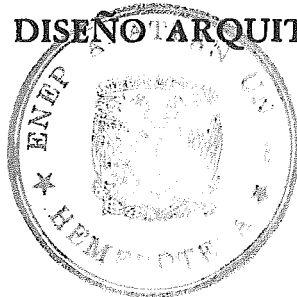




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ACATLAN**

**EL PARABOLOIDE HIPERBOLICO Y SU
APLICACION AL DISEÑO ARQUITECTONICO**



TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER LA LICENCIATURA EN :

A R Q U I T E C T U R A

PRESENTA :

MARIO ALBERTO RODRIGUEZ LOPEZ

MEXICO, D. F.



1987

M-0063978



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Esta tesis la dedico con mucho cariño a la memoria de mi madre; que gracias a su esfuerzo y sacrificio puedo ver realidad este momento, tan importante para mi, en mi vida profesional.-

Agradezco los consejos y la ayuda prestada para la realización de esta tesis al org. Ramón Monroy Rojas, persona que admiro y de la que he aprendido mucho, tanto académicamente como profesionalmente.-

Gracias también a mi padre y a mi familia que siempre han estado conmigo.-

Gracias a Dios.-

ARΦ. RAMON MONROY ROJAS

ARΦ. SERGIO H. CANTU SALDAÑA

ARΦ. SERGIO ISLAS CARPIZO

ARΦ. SALVADOR VAZQUEZ MARTIN DEL CAMPO

ARΦ. JAIME LEZAMA TIRADO

TESIS PROFESIONAL

EL PARABOLOIDE
HIPERBOLICO Y SU
APLICACION AL
DISEÑO ARQUITECTONICO

INDICE DE TESIS

- I: INTRODUCCION
- II: INVESTIGACION GENERAL DE LAS ESTRUCTURAS DE MEMBRANA
- III: DISEÑO DE UNA FORMA ESPECIFICA CON PARABOLOIDES HIPERBOLICOS
- IV: GEOMETRIA DEL PARABOLOIDE HIPERBOLICO
- V: DETERMINACION DE LOS EJES X, Y, Z . EN EL PARABOLOIDE HIPERBOLICO
- VI: ESQUEMA MECANICO DE ESFUERZOS
- VII: DETERMINACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE EQUILIBRIO EN SU FORMA GENERAL
- VIII: DETERMINACION DE LAS FORMULAS PARTICULARES PARA UNA FORMA ESPECIFICA
- IX: CALCULO ESTRUCTURAL
- X: PLANO ESTRUCTURAL
- XI: UTILIZACION DE NOMOGRAMAS
- XII: EJEMPLO DE APLICACION
- XIII: MODELO A ESCALA

M-0036978

"Entender la forma arquitectónica desde una perspectiva, en la que la disciplina de la geometría, el comportamiento estructural y la resistencia de materiales, nos dan una comprensión en la que la forma arquitectónica, es algo más que sólo su aspecto puramente formal."

INTRODUCCION

La carrera de arquitectura en la ENEP Acatlán, se define en tres áreas generales de conocimiento; el área humanística, el área tecnológica y el área creativa.-

En el área humanística tiene un conocimiento integral del hombre, en sus dimensiones físicas, en sus valores y comportamientos psicológicos como individuo y como grupo; llegando a colindar en un momento dado, con las fronteras de la Filosofía y la Psicología.-

En el área tecnológica, se conocen las técnicas de construcción, instalaciones y sistemas estructurales que habrán de integrar el proyecto arquitectónico, y que en determinado momento llegan a colindar con la frontera de las Ingenierías -

Finalmente en el área creativa, se ve el diseño de la forma, el espacio, la textura, la función, el color; aspectos que se integran en el diseño arquitectónico y que colindan en un momento dado, con la frontera del artista plástico y la Escultura.-

Por esto considero que el arquitecto es un filósofo, un ingeniero y un artista; en el que, el quehacer u oficio arquitectónico abarca múltiples aspectos de sus áreas de conocimiento. En un trabajo escolar sistemático querer abarcar todos estos aspectos puede resultar muy amplio; pero poco profundo; quiero en lo particular tomar uno de estos aspectos, comprendido en una de las áreas de conocimiento de la arquitectura, para poder profundizar un poco más en el mismo.-

Es por esto, que uno de los objetivos principales de esta tesis "El paraboloides hiperbólico y su aplicación al diseño arquitectónico" considera sólo el estudio estructural de este tipo de superficie; ya que normalmente en las escuelas de arquitectura el problema estructural se estudia superficialmente y no con la debida profundidad e importancia que merece; siendo que al profundizar en este conocimiento estructural de las formas arquitectónicas encontramos grandes posibilidades para resolver el diseño y construcción de espacios; además este conocimiento, es una herramienta de gran utilidad para el arquitecto, que no sólo debe

concretarse a la creación de espacios de acuerdo a una forma, textura y función; sino que debe completar su proyecto arquitectónico, profundizando en forma lógica: mediante un lenguaje estructural bien interpretado.-

Otro motivo de esta tesis, es el de poder mostrar un trabajo definido, didáctico, claro y sencillo que desarrolle la naturaleza estructural del paraboloides hiperbólico y de esta manera permita ampliar el lenguaje arquitectónico en el medio escolar y particularmente en la escuela de arquitectura de acatlán.-

Esta tesis pretende mostrar al paraboloides hiperbólico como una posibilidad de forma estructural en el diseño arquitectónico; mediante la comprensión de su geometría como una superficie reglada de doble curvatura; para posteriormente poder determinar en forma gráfica y analítica los ejes X, Y, Z , en el paraboloides hiperbólico y poder así mostrar el esquema mecánico de los esfuerzos que actúan a todo lo largo de la superficie, para poder llegar a la determinación de las ecuaciones diferenciales de equilibrio en su forma general, de una manera clara y ordenada.

que pueda ayudar a comprender el proceso de cálculo de este tipo de superficie; posteriormente se definen las formulas particulares para el cálculo de esfuerzos de membrana en la forma específica, compuesta por cuatro paraboloides hiperbólicos unidos en forma de quilla con eje Z vertical; y concluir finalmente con el cálculo estructural de la superficie determinando cargas y elementos estructurales necesarios para su previa construcción.-

Por último considero que el arquitecto debe conocer los procesos y sistemas estructurales de las formas arquitectónicas y además ser un constructor de las mismas.-

INVESTIGACION
GENERAL DE LAS
ESTRUCTURAS DE
MEMBRANA

ESTRUCTURAS LAMINARES

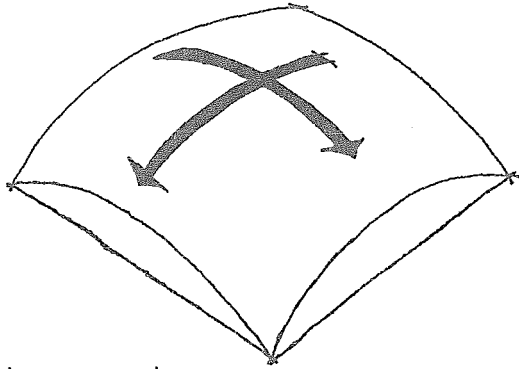
Se agrupan generalmente bajo el nombre de estructuras laminares, a una serie de formas constructivas, cuyo comportamiento estructural difiere de unos tipos a otros de acuerdo con la forma de la superficie. -

Las estructuras laminares son todas aquellas estructuras en que el espesor es muy reducido con respecto a las otras dos dimensiones que la forman. Una clasificación adecuada de dichas estructuras, de acuerdo al tipo de esfuerzos a las que son sometidas, podría ser la siguiente:

Losas Horizontales:	trabajan a esfuerzos de flexión exclusivamente.
Losas Prismáticas:	o losas dobladas; trabajan a esfuerzos de membrana y flexión. -
Bovedas cilíndricas " conicas Superficies desarrollables. -	trabajan a esfuerzos de membrana y flexión con predominio de los primeros esfuerzos. -
Superficies de Doble curvatura	o cascarones; trabajan exclusivamente a esfuerzos de membrana. -

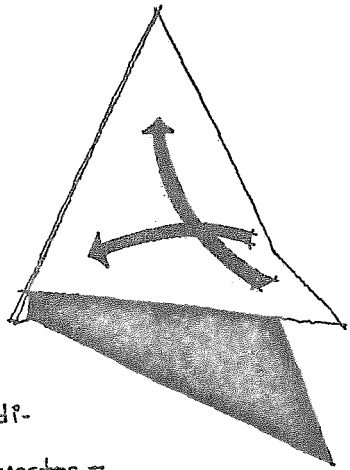
C
A
S
C
A
R
O
H
E
S

superficies
sinclásticas



ó elípticas; sus dos
curvaturas principales
en cada punto ván dirigidas
en el mismo sentido.-

superficies
anticlásticas



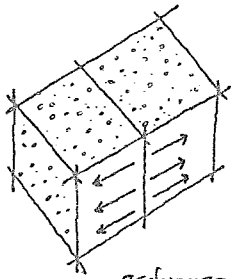
ó hiperbólicas en
las que ambas curva-
turas principales ván di-
rigidas en sentidos opuestos.-

Estructuras de Cascarón:

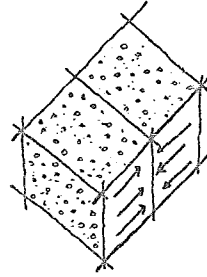
Son todas aquellas estructuras laminares capaces de trabajar en condiciones normales de carga, con esfuerzos de membrana exclusivamente, es decir sin que se produzcan esfuerzos de flexión.-

Y una condición necesaria para que no existan esfuerzos de flexión, es que la superficie sea de doble curvatura; es decir que tenga una forma natural e inmutable, mientras no se produzcan alargamientos ó acortamientos considerables.- Con el concreto armado tales variaciones solo son posibles si los esfuerzos de membrana sobrepasan los valores del límite elástico del material; pero si no es así que tales esfuerzos no sobrepasen dichos valores, por lo tanto no existirán flexiones y no es necesario de esta forma recurrir a la teoría general de flexión para el estudio de los cascarones.-

Los esfuerzos de membrana, son todos aquellos esfuerzos capaces de repartirse uniformemente en el espesor de la lámina y actuar paralelamente al plano tangente de la superficie en cada punto.-



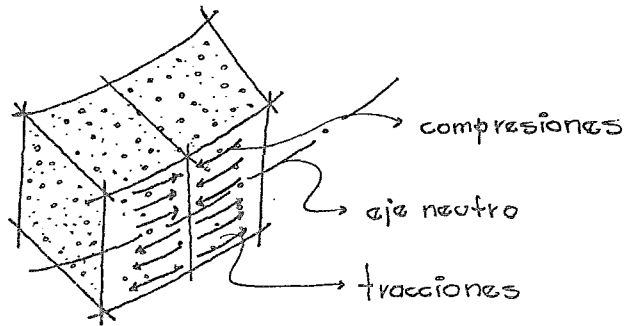
esfuerzos de membrana en tracción



esfuerzos de membrana en compresión.

Los esfuerzos de flexión

Son aquellos esfuerzos combinados de compresión y de tracción, que actúan a todo lo largo de la superficie.



Las superficies de doble curvatura son capaces de trabajar en régimen de membrana exclusivamente, lo que trae como consecuencia, que puedan ser utilizadas para cubrir grandes claros con un mínimo de material y por tanto de peso.

La utilización de los cascarones en la construcción sin embargo no puede pasar por alto una serie de circunstancias ...

que dependen del lugar donde sean realizadas como es el clima, el grado de evolución de la construcción, el costo de la mano de obra, los materiales económicos e.t.c; pero todas estas circunstancias no son factor de determinación en muchos casos de edificios para la realización de tales formas arquitectónicas.-

En cambio el cálculo de este tipo de superficies, puede ser un factor que imposibilite la libertad para el uso de estas formas arquitectónicas; y es que muchas veces no alcanzamos a comprender el comportamiento estructural de las superficies; este desconocimiento trae como consecuencia que la mayor parte de los proyectos en que se proponen formas arbitrarias se queden en el papel o bien serán mal construidas con un desconsiderado gasto de material intentando aumentar el factor de seguridad de la estructura mediante el incremento de la masa; siendo que la esencia de la estructura misma esta en su forma natural de trabajo.-

El cálculo en este tipo de superficies consiste en la determinación de los esfuerzos de membrana mediante el proceso de la estática; es decir establecer

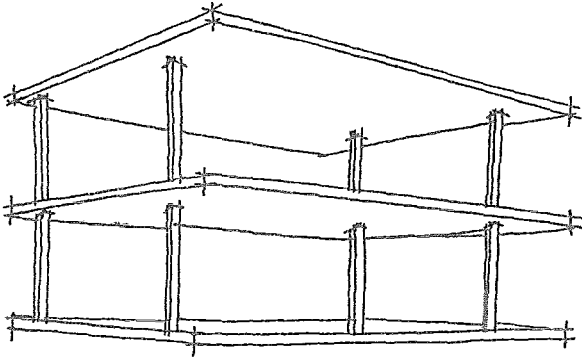
las condiciones de equilibrio, según tres ejes en el espacio de un elemento diferencial de superficie, en el que actúan fuerzas normales y esfuerzos internos aplicados en las caras del elemento.-

Los cascarones deben tener formas de doble curvatura y mientras no se desarrollen nuevos materiales y se han utilizados en la construcción, el material indicado para la realización de los cascarones sigue siendo aún el concreto armado de gran maleabilidad para dar formas arbitrarias.-

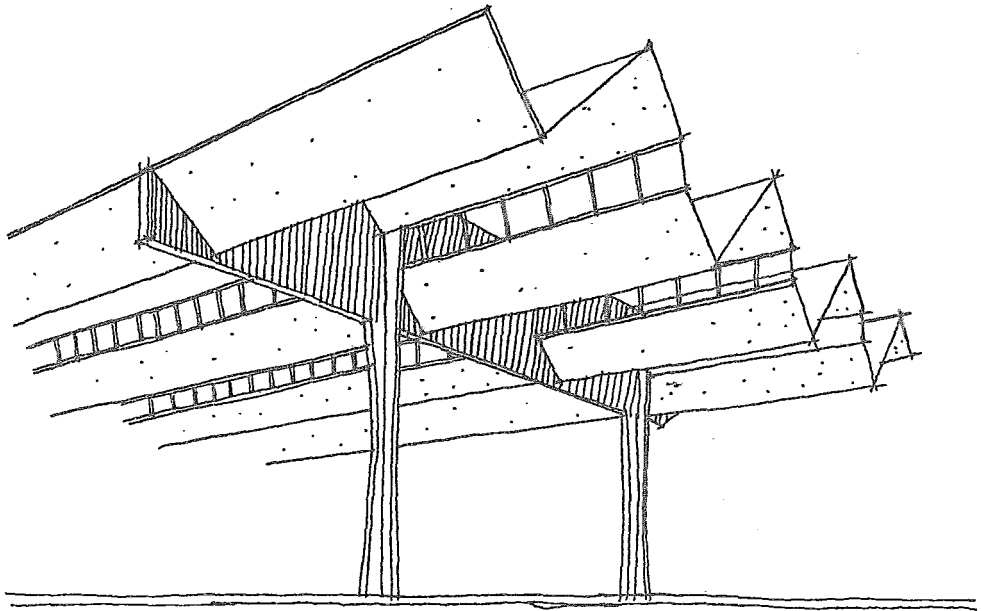
La forma deseada en los cascarones se consigue mediante el levantamiento previo de una cimbra de madera ó bien una cimbra metálica que puede ser utilizada cuando su reemplazo va a ser un número considerable de veces.- Lo anterior expuesto nos lleva a la conclusión que el empleo de superficies sinclásticas, exigen la preparación de curvar la dvela, mediante un proceso laborioso y costoso; lo que da como resultado la limitación constructiva del empleo de este tipo de superficies.-

En cambio las superficies anticlásticas son superficies generadas por dos sistemas de generatrices rectas

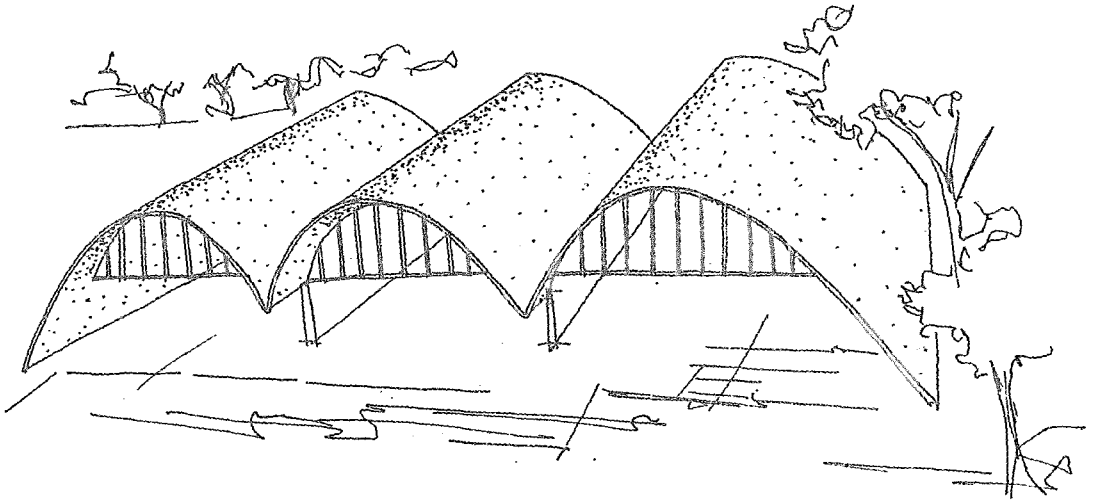
y simplifican el trabajo para la elaboración previa de la cimbra; tal es el caso del paraboloides hiperbólico, superficie que tiene este tipo de característica geométrica.—



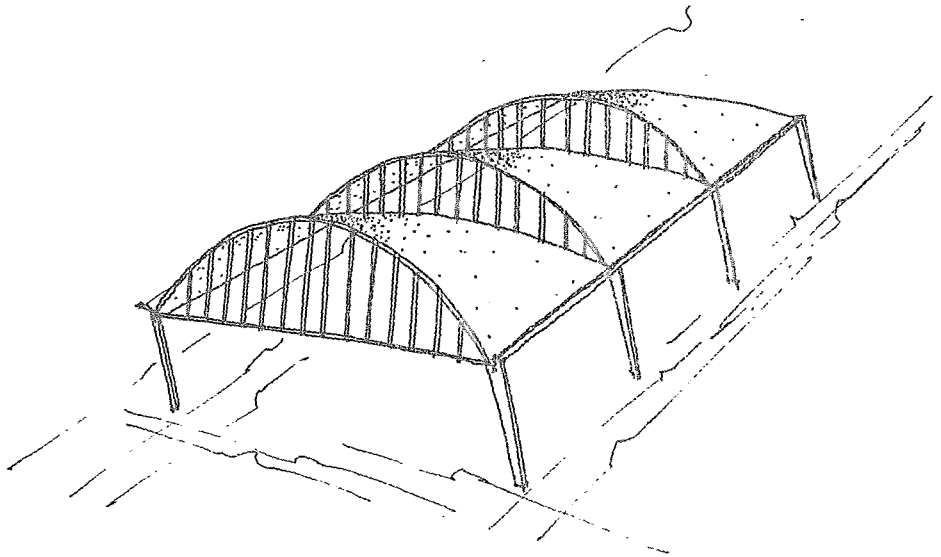
losa plana



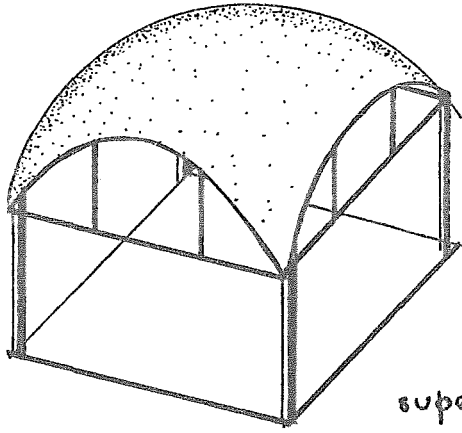
estructura prismática



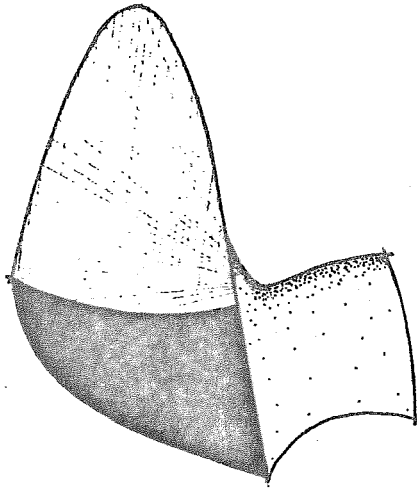
bóvedas cilíndricas



bóvedas cónicas



superficie
sinclástica

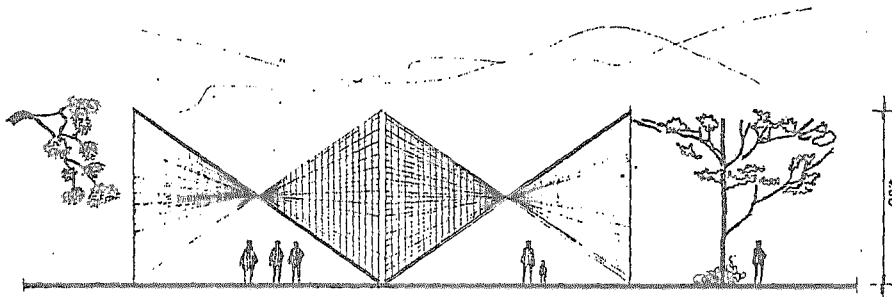


superficie
anticlástica

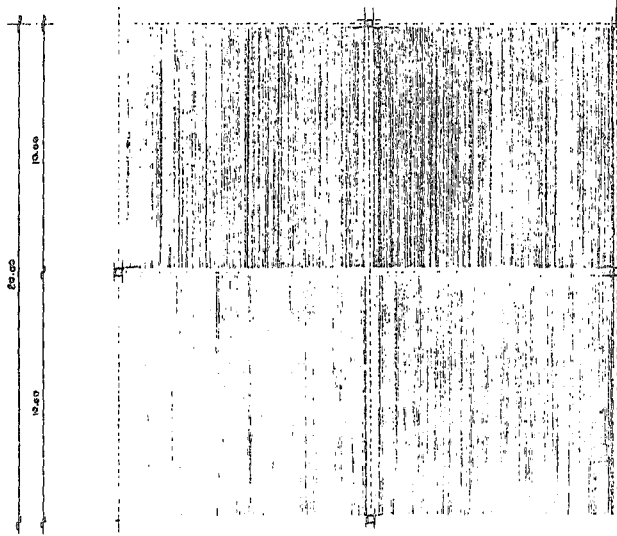
DISEÑO DE UNA
FORMA ESPECÍFICA
CON PARABOLOIDES
HÍPERBOLICOS

El diseño de esta forma arquitectónica, de planta cuadrada (20.00×20.00 mts.), cubre un área de 400.00 m^2 y se encuentra cubierta por cuatro paraboloides hiperbólicos unidos entre sí, todos simétricos, de bordes rectos y bordes opuestos paralelos, organizados en la forma conocida de "paraboloides en quilla"; la cubierta tiene un espesor de 4 cms y se encuentra apoyada tan sólo en sus cuatro puntos inferiores.-

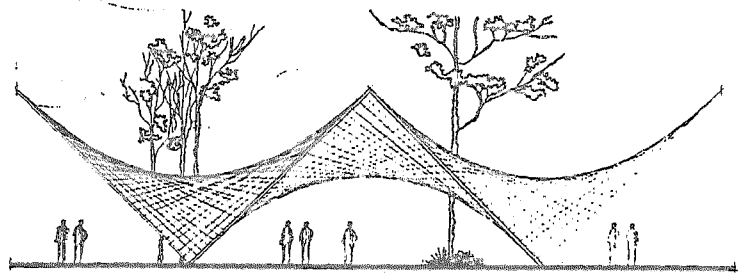
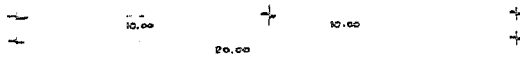
Existe una gran variedad de formas de paraboloides hiperbólicos; en nuestra forma arquitectónica el paraboloides hiperbólico, que estamos utilizando, recibe el nombre de paraboloides hiperbólico equilateral con eje Z vertical; recibe este nombre, cuando el eje Z forma un ángulo de 90° con respecto a los ejes X y Y, que son las generatrices principales que generan el paraboloides hiperbólico; para este tipo de paraboloides hiperbólico determinaremos las ecuaciones diferenciales de equilibrio en su forma general.-



ALZADO a 25C.11800



PLANTA 25C.11800



ALZADO b 25C.11800

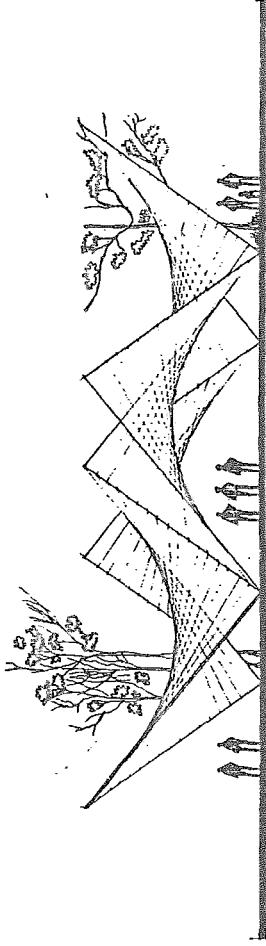
TESIS PROFESIONAL

EL PARABOLOIDE HIPERBOLICO Y SU

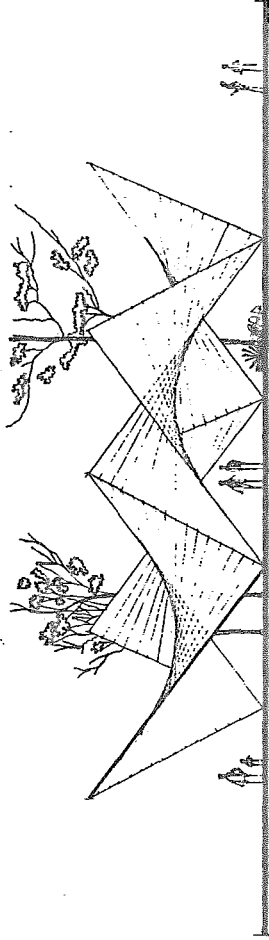
APLICACION AL DISEÑO ARQUITECTONICO

ENEP ACATLAN ARQUITECTURA

MARIO ALBERTO RODRIGUEZ LOPEZ



ALZADO c



ALZADO d

TESIS PROFESIONAL

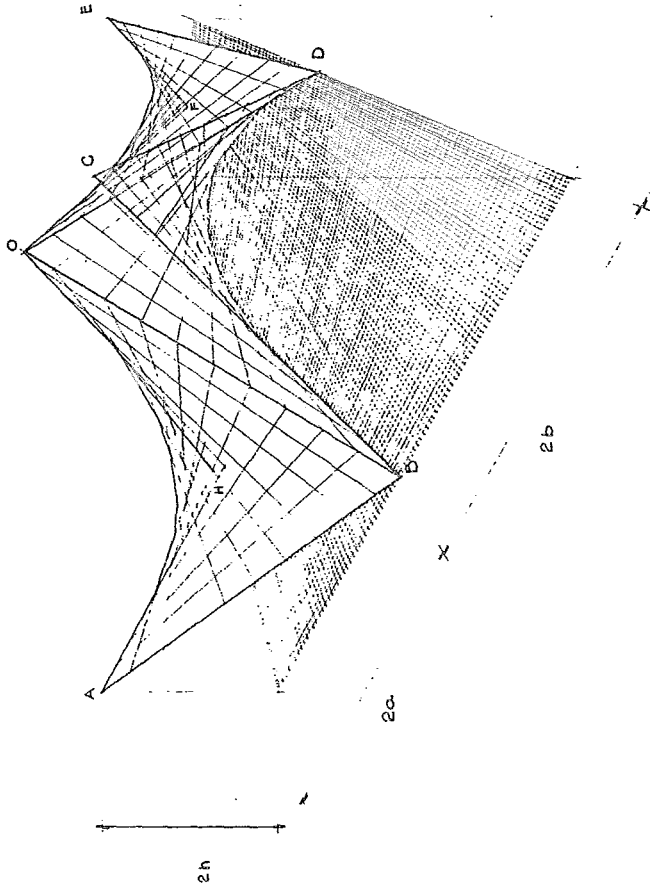
EL PARABOLOIDE HIPERBOLICO YSU

APLICACION AL DISEÑO ARQUITECTONICO

TENEP ACATLAN ARQUITECTURA

MARIO ALBERTO RODRIGUEZ LOPEZ

paraboles en quilla



TESIS PROFESIONAL

EL PARABOLOIDE HIPERBOLICO Y SU

APLICACION AL DISEÑO ARQUITECTONICO

ENER ACATLAN ARQUITECTURA

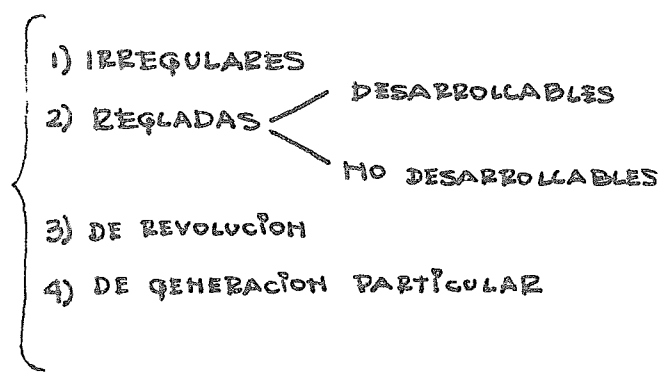
MARIO ALBERTO RODRIGUEZ LOPEZ

GEOMETRÍA
DEL
PARABOLOIDE HIPERBOLICO

El conocimiento de las superficies es de gran utilidad para la construcción ó análisis de formas en el espacio, ya que dicho conocimiento nos permite tener una amplísima libertad en el diseño arquitectónico.—

Una superficie en geometría se encuentra generada por el movimiento de una línea cualquiera, sujeta a determinadas condiciones.— La línea que con su movimiento genera la superficie se llama "generatriz" y la que determina el movimiento recibe el nombre de "directriz"

Por la forma de sus generatrices y condiciones, las superficies pueden clasificarse de la siguiente manera:

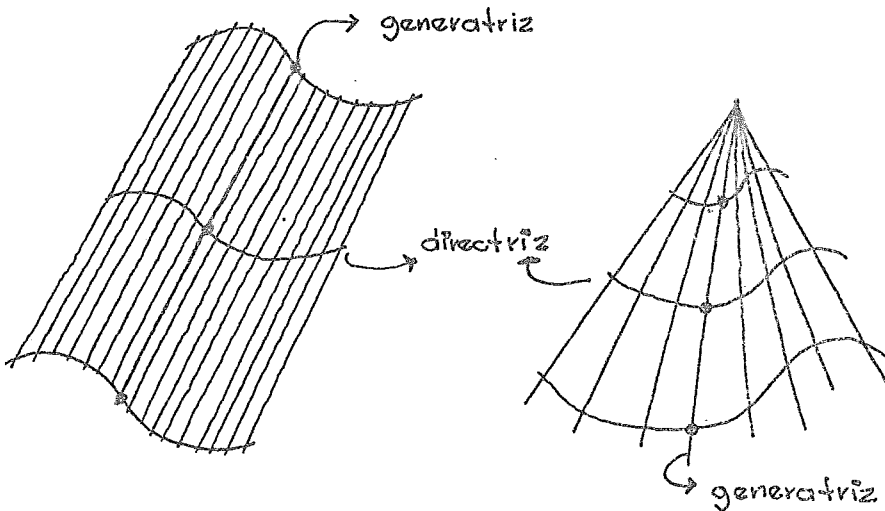


Las superficies que en particular, en este momento nos interesan para el estudio del paraboloides hiperbólico son

las superficies denominadas regladas; que son superficies generadas por rectas que se mueven a lo largo de la misma, siguiendo ciertas condiciones;

- a) por tres líneas llamadas directrices deberá apoyarse la generatriz recta.-
- b) las generatrices rectas deberán apoyarse sobre las dos directrices y ser paralelas a un plano director.-

Dentro de la primera condición se encuentran las bóvedas de curvatura simple.-



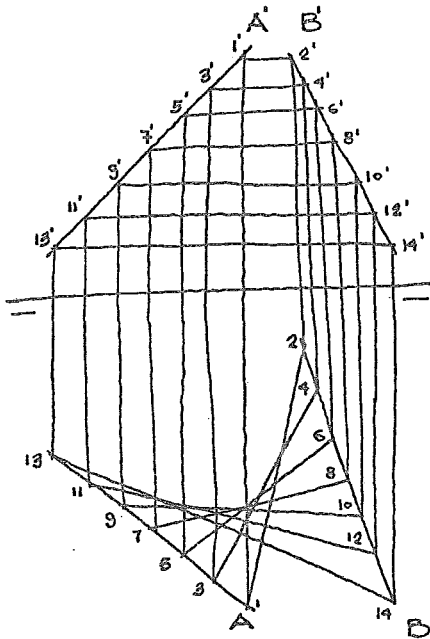
superficies regladas desarrollables

Ahora bien según las condiciones que fijen las directrices para el movimiento de la generatriz recta, las superficies regladas, podrán ser desarrollables ó no desarrollables.-

Las superficies no desarrollables son aquellas superficies en que sus generatrices no determinan plano; llamadas también superficies alabeadas, término que designa esa doble curvatura que las distingue.-

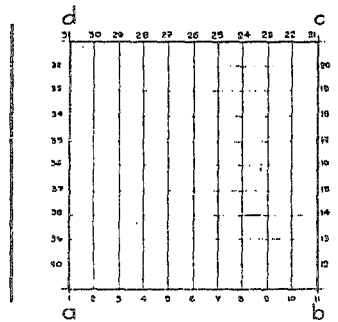
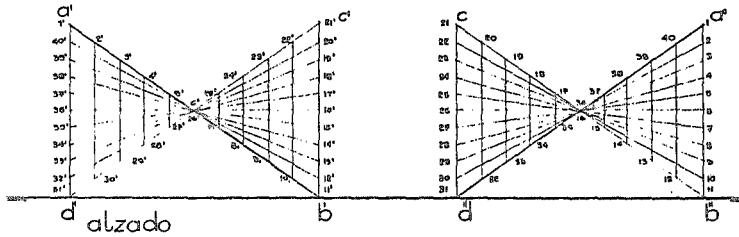
Un ejemplo de este tipo de superficies es el paraboloides hiperbólico; superficie generada por una recta que se desplaza apoyada en otras dos rectas llamadas directrices, no coplanares y paralelas a un plano director.- En esta superficie cabe siempre una doble posibilidad de generación, pues siendo rectas tanto generatrices, como directrices, éstas podrán intercambiarse unas con otras, dando como resultado la misma superficie.- Esta propiedad es de gran importancia en la construcción de formas arquitectónicas especialmente cubiertas, pues este doble apoyo de las generatrices resuelve algunos problemas

estáticos, además que, para la realización de la cimbra, la dueda podrá ser recta y también los largueros sustentantes podrán serlo, simplificando de esta manera el trabajo para dar la forma requerida. -

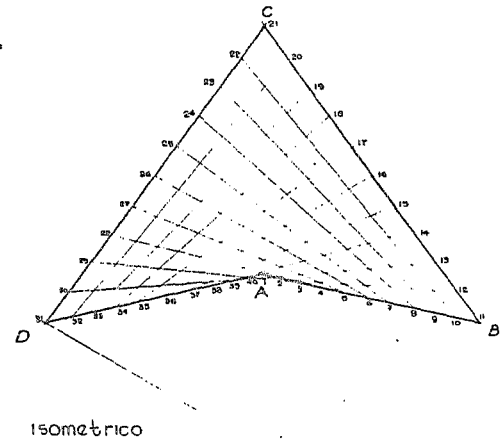


paraboloid hiperbólico

geometria



Plano director
planta



TESIS PROFESIONAL
 EL PARABOLOIDE HIPERBOLICO Y SU
 APLICACION AL DISEÑO ARQUITECTONICO
 ENEP ACATLAN | ARQUITECTURA
 MARIO ALBERTO RODRIGUEZ LOPEZ

DETERMINACION
DE LOS EJES
X Y Z EN EL
PARABOLOIDE
HIPERBOLICO

Existen varios procedimientos para la determinación de los ejes X, Y, Z , en el paraboloides hiperbólico, elegimos el más sencillo con el propósito de simplificar el estudio de la superficie.-

Los ejes a los que nos referimos en el paraboloides hiperbólico, son el par de generatrices horizontales, que con su movimiento generán la superficie y la perpendicular que pasa por el punto de intersección de los ejes, que es el eje Z .-

Es importante determinar estos ejes, porque la ecuación de la superficie, referida a ellos, tiene la forma simple de $Z = Kxy$; en la que K , es una constante que representa el cambio unitario de pendiente ó alabeamiento del paraboloides hiperbólico.-

Para la determinación geométrica de los ejes X, Y, Z , en el paraboloides hiperbólico de bordes rectos y bordes opuestos paralelos, necesitaremos de una planta, de un alzado y de una tercera proyección de la superficie.-

El procedimiento para la localización de los ejes es el siguiente:

- 1) Localizamos en el alzado los puntos de intersección de dos bordes opuestos y los referimos a la planta.
- 2) En la tercera proyección localizamos los mismos puntos de intersección de los bordes opuestos refiriéndolos igualmente a la planta.
- 3) En las intersecciones de las referencias ya mencionadas, localizamos los puntos; por dichos puntos trazamos paralelas a los bordes; estas rectas son los ejes horizontales X y Y del paraboloides hiperbólico y forman un ángulo ω
- 4) Por el punto de intersección de los ejes X y Y , pasará el eje Z perpendicular al plano que determinan X y Y .- Dicho punto es el vértice del paraboloides hiperbólico.-

Por lo tanto las coordenadas del vértice de nuestro paraboloides hiperbólico de acuerdo a los ejes ya determinados en planta y alzado son las siguientes:

$$V(5, 5, 3.5)$$

Y las coordenadas de nuestros puntos extremos del paraboloides A, B, C, D de acuerdo a los ejes ya encontrados son las siguientes:

$$A(-5, -5, 3.5)$$

$$B(5, -5, -3.5)$$

$$C(5, 5, 3.5)$$

$$D(-5, 5, -3.5)$$

Ahora bien encontramos el valor de la constante K del paraboloides hiperbólico de acuerdo a los ejes que pasan por el vértice; tomamos el valor de las coordenadas con respecto al punto A y tenemos que:

$$z = Kxy \therefore K = \frac{z}{xy} = \frac{3.5}{(-5)(-5)} = \frac{3.5}{25} = 0.14$$

$$K = 0.14$$

Existe otro camino para la determinación de los ejes X y Y , con eje Z vertical en el paraboloides hiperbólico. Este camino es el método analítico y que igualmente que el anterior analizado es muy sencillo.

Al determinar los ejes por el método analítico comprobamos la determinación de los ejes encontrados en el procedimiento anterior. Por lo tanto deben coincidir los valores de las coordenadas en el punto del vértice y los puntos extremos del paraboloides hiperbólico y con estos valores posteriormente encontrar el valor de la constante K .

El método analítico consiste en la forma siguiente:

Primera mente suponemos un sistema de ejes coordenados convenientes para nuestra superficie y de acuerdo a ellos encontramos las coordenadas de los puntos A, B, C, D;

	X	Y	Z
A	0	0	7
B	10	0	0
C	10	10	7
D	0	10	0

Posteriormente encontramos los valores de las pendientes de tres de los bordes, m_A , m_B y m_C , por medio de las ecuaciones generales indicadas a continuación;

$$m_{AB} = \frac{z_B - z_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 7}{10 - 0} = -0.7$$

$$m_{BC} = \frac{z_C - z_B}{y_C - y_B} = \frac{7 - 0}{10 - 0} = 0.7$$

$$m_{CD} = \frac{z_D - z_C}{x_D - x_C} = \frac{0 - 7}{0 - 10} = 0.7$$

Ahora aplicamos las ecuaciones siguientes, con los valores de las pendientes ya obtenidas y las coordenadas de los puntos, A, B, C, y D, para obtener las coordenadas del vértice del paraboloides hiperbólico:

$$\bar{X} = \frac{m_{AB} - X_A - m_{CD} + Z_D - Z_A}{m_{AB} - m_{CD}}$$

$$\bar{X} = \frac{(-0.7)(0) - (0.7)(0) + (0-7)}{-0.7 - 0.7} = \frac{-7}{-1.4} = 5$$

$$\bar{Z} = m_{AB}(\bar{X} - X_A) + Z_A$$

$$\bar{Z} = -0.7(5 - 0) + 7 = 3.5$$

$$\bar{Y} = \frac{\bar{Z} - Z_C}{m_{BC}} + Y_C$$

$$\bar{Y} = \frac{3.5 - 7}{0.7} + 10 = 5$$

De donde el vértice será el punto: $V(5, 5, 3.5)$

Ahora las coordenadas de los puntos, con respecto a los ejes particulares \bar{X} , \bar{Y} y \bar{Z} cuyo origen está en el vértice son:

$$A (-5, -5, 3.5)$$

$$B (5, -5, -3.5)$$

$$C (5, 5, 3.5)$$

$$D (-5, 5, -3.5)$$

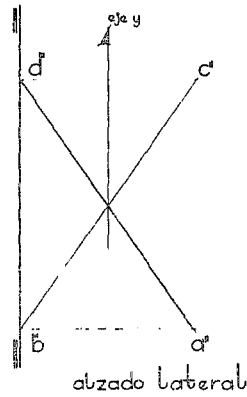
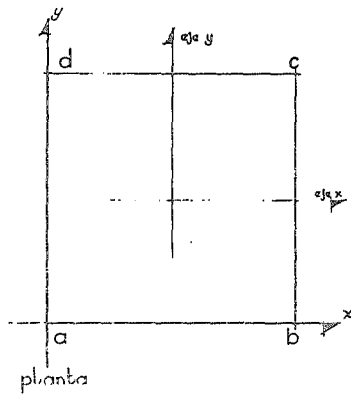
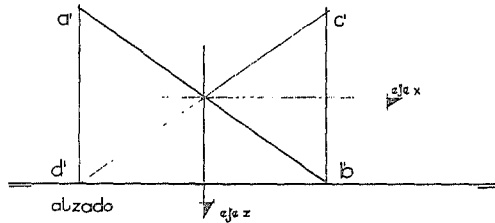
El valor de la constante K con respecto al punto A es el siguiente:

$$\text{tenemos que: } Z = K \times y \quad \therefore K = \frac{Z}{xy}$$

$$\therefore K = \frac{3.5}{(-5)(-5)} = \frac{3.5}{25} = 0.14$$

$$K = 0.14$$

Determinación Gráfica de los ejes x, y, z



coordenadas de los puntos

- V (5, 5, 3.5)
- A (-5, -5, 3.5)
- B (5, -5, -3.5)
- C (5, 5, 3.5)
- D (-5, 5, -3.5)

valor de K con respecto al punto A

$$z = kxy \therefore k = \frac{z}{xy} = \frac{3.5}{-5(-5)} = 0.14$$

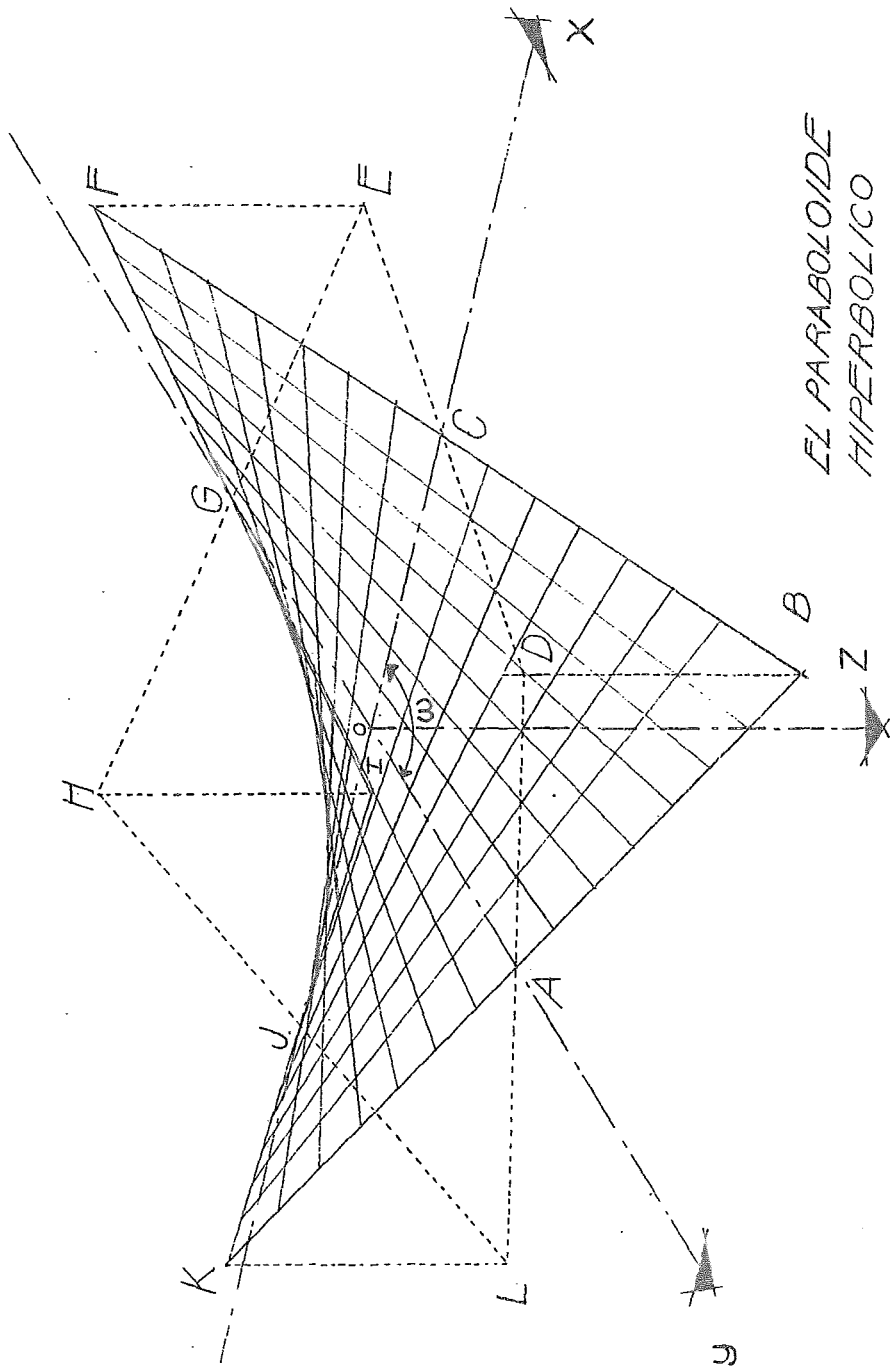
TESIS PROFESIONAL

EL PARABOLOIDE HIPERBOLICO Y SU

APLICACION AL DISEÑO ARQUITECTONICO

ENEP ACATLAN | ARQUITECTURA

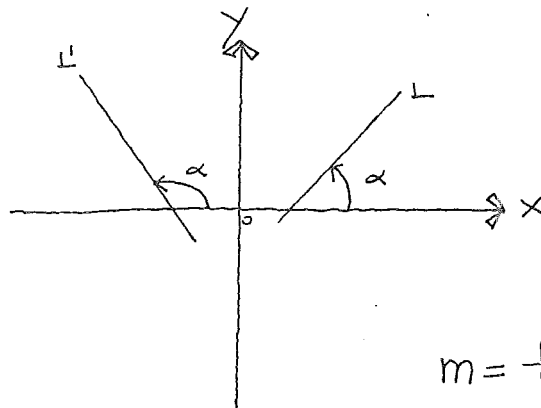
MARIO ALBERTO RODRIGUEZ LOPEZ

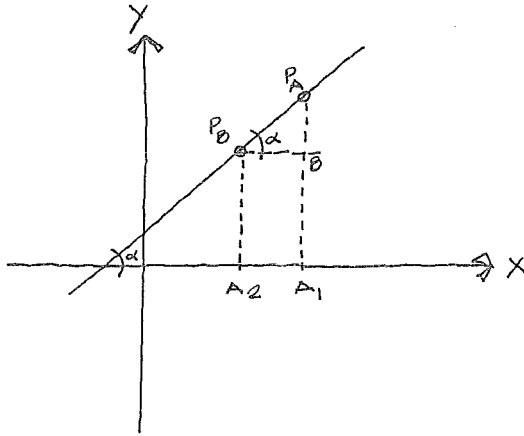


EL PARABOLOIDE
HIPERBOLICO

DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL PARA LA PENDIENTE DE UNA RECTA.

Para la determinación de dicha ecuación, primeramente debemos definir lo que es pendiente; y llamamos pendiente de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación de una recta, al formado por el eje X y la recta misma — como se muestra en la figura siguiente:





Las coordenadas de los puntos A_1 , A_2 y B son:

$$A_1 (x_1, 0)$$

$$A_2 (x_2, 0)$$

$$B (x_1, y_2)$$

Ahora por el teorema que dice: "que la longitud de un segmento dirigido se obtiene restando la coordenada del punto inicial de la coordenada del punto final."

por lo tanto se tiene:

$$\overline{BP_A} = y_1 - y_2$$

$$\overline{P_B B} = \overline{A_2 A_1} = x_1 - x_2$$

Ahora bien si por dos puntos diferentes cualesquiera de una recta $P_A(x_1, y_1)$ y $P_B(x_2, y_2)$ la ecuación de la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Demostración:

consideramos la recta P_A, P_B de la fig. siguiente determinada por los puntos P_A y P_B y sea α su ángulo de inclinación —

Por P_A y P_B trazamos las perpendiculares $P_A A_1$ y $P_B A_2$ al eje X y por P_B trazamos una paralela al eje X que corte $P_A A_1$ en B . — El ángulo $P_A, P_B, B = \alpha$ y por trigonometría tendremos;

$$m = \tan \alpha = \frac{\overline{BP_A}}{\overline{P_B B}}$$

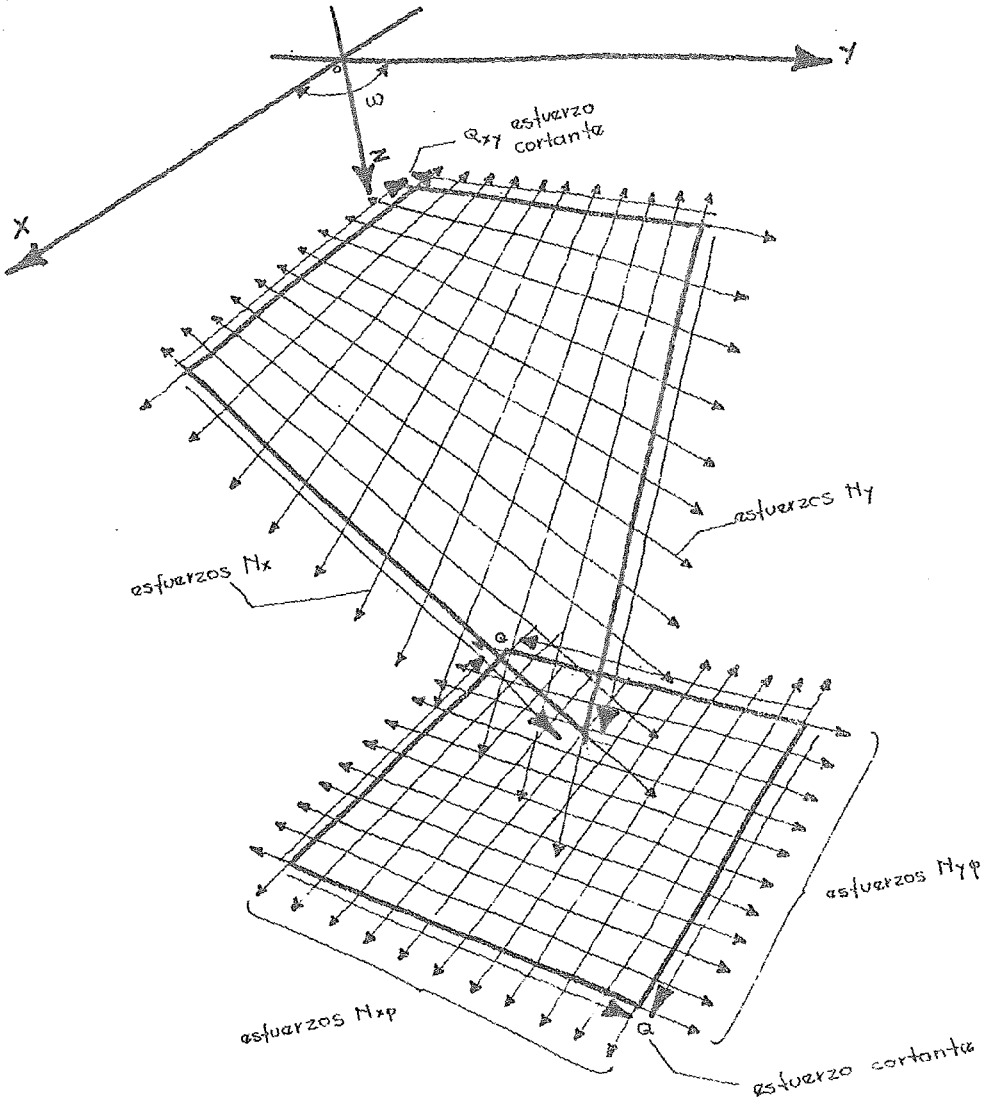
sustituyendo estos valores en (4)

$$m = \tan \alpha = \frac{\overline{BP_A}}{P_B B}$$

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

ESQUEMA MECANICO

ESFUERZOS DE MEMBRANA



TEORÍA DE LA MEMBRANA

La teoría de la membrana supone inexistentes los esfuerzos de flexión, quedando tan sólo esfuerzos directos en la superficie que se analiza, es decir esfuerzos de compresión pura, esfuerzos de tracción pura y esfuerzos cortantes contenidos en el plano tangente a la superficie y en las direcciones previamente fijadas de acuerdo a unos ejes determinados.-

La expresión más simple de la estructura de membrana es el cable, ó su inversión, la bóveda de directriz catenaria, es decir que en el trabajo de membrana, la estructura realiza el menor esfuerzo, adecuándose a las cargas que soporta.-



el cable



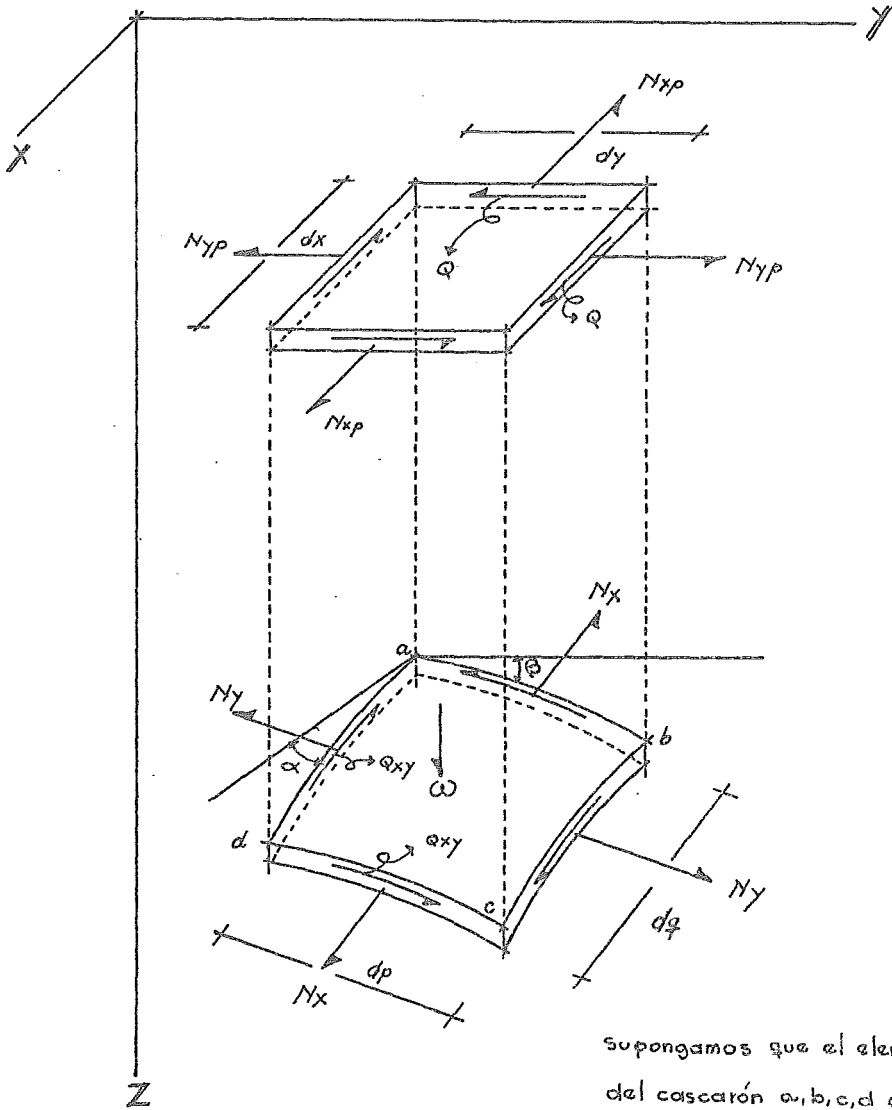
bóveda de directriz catenaria.-

En cambio la teoría de la flexión obliga al material a que sufra pequeñas alteraciones para impedir que cambie su forma, siendo que en este cambio, estaría la adecuación de la estructura a su modo natural de trabajo.-

También podemos considerar que el trabajo a flexión desde el punto de vista estructural, es aquel que desperdicia más material; basta con analizar una sección de concreto armado de una viga y observar que todo el material que está en la parte central trabaja a esfuerzos muy bajos y sin embargo tiene la misma resistencia que el material en los bordes.- En cambio en las estructuras de membrana se aprovecha y se ahorra al máximo el material en cuanto a resistencia se refiere.-

En conclusión, podemos afirmar que el cálculo estructural debería enfocarse desde un punto de vista estático; es decir la estructura adecuada a la forma que solicitan las cargas.-

DETERMINACIÓN
DE LAS ECUACIONES
DIFERENCIALES DE
EQUILIBRIO EN SU
FORMA GENERAL



supongamos que el elemento del cascarón a, b, c, d actúan

las fuerzas normales N_x, N_y y las fuerzas cortantes Q_{xy} con objeto de simplificar las expresiones que se obtendrán proyectaremos en un plano horizontal tanto las fuerzas como el elemento del cascarón.

COMPONENTES HORIZONTALES:

Así tendremos que:

$$\cos \theta = \frac{dy}{dp} \quad \therefore dy = \cos \theta dp \quad \text{--- (1)}$$

$$\cos \alpha = \frac{dx}{dq} \quad \therefore dx = \cos \alpha dq \quad \text{--- (2)}$$

Ahora la componente horizontal de la fuerza N_x que actúa en la cara ab vale:

$$N_x \cos \alpha dp = N_x p dy$$

Si sustituimos el valor dp de la ecuación (1) tenemos:

$$dp = \frac{dy}{\cos \theta} \quad \therefore N_x \frac{\cos \alpha}{\cos \theta} dy = N_x p dy \quad \text{--- (3)}$$

y por lo tanto

$$N_x \frac{\cos \alpha}{\cos \theta} = N_x p \quad \text{--- (4)}$$

En forma semejante podemos encontrar el valor de $N_y p$

$$N_y \cos \theta \, dq = N_{yp} \, dx$$

si ahora sustituimos el valor dq de la ecuación (2) tenemos

$$dq = \frac{dx}{\cos \alpha} \quad \therefore N_y \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} \, dx = N_{yp} \, dx$$

por lo tanto

$$N_y \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} = N_{yp} \text{-----} \quad (5)$$

Ahora igualando la componente horizontal del cortante que actúa en la cara ab con el cortante en el elemento proyectado queda:

$$\text{si } dp = \frac{dy}{\cos \theta} \quad \therefore \phi_{xy} \frac{dy}{\cos \theta} \cos \theta = \phi \, dy$$

$$\phi_{xy} \, dy = \phi \, dy$$

$$\phi_{xy} = \phi \text{-----} \quad (6)$$

Supongamos ahora que en el elemento del cascarón solo actúa como carga exterior una carga vertical. Si también suponemos que las fuerzas N_x , N_y , ϕ_{xy}

que actúan en el elemento varían de la cara más cercana a la más alejada, podemos plantear las ecuaciones de equilibrio en las direcciones X, Y, Z, en la forma siguiente:

$$\sum F_x = 0$$

$$N_x \phi \, dx + \phi \, dy - N_x \phi \, dx - \phi \, dy = 0$$

pero como la fuerza $N_x \phi$ varía en cada una de las caras se tiene que:

$$N_x \phi = N_x \phi + \left(\frac{\partial N_x \phi}{\partial x} \right) dx$$

$$\phi = \phi + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy$$

Sustituyendo estos valores, sólo en uno de los valores correspondientes se tiene:

$$\cancel{N_x \phi \, dx} + \cancel{\phi \, dy} - \cancel{N_x \phi + \left(\frac{\partial N_x \phi}{\partial x} \right) dx} \, dx - \cancel{\phi + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy} \, dy$$

de lo que queda:

$$\frac{\partial N_x \phi \, dx}{\partial x} + \frac{\partial \phi \, dy}{\partial y}$$

pero $dx = 1$
 $dy = 1$

$$\frac{\partial N_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

Ahora $\sum F_y = 0$

$$N_{yp} dy + \phi dx - N_{yp} dy - \phi dx = 0$$

$$\therefore N_{yp} = N_{yp} + \left(\frac{\partial N_{yp}}{\partial y} \right) dy$$

$$\phi = \phi + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx$$

tendremos:

$$\cancel{N_{yp} dy} + \cancel{\phi dx} - \cancel{N_{yp} dy} - \cancel{\phi dx} + \left(\frac{\partial N_{yp}}{\partial y} \right) dy \cancel{dy} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx \cancel{dx}$$

quedando:

$$\frac{\partial N_{yp}}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \quad \text{pero } dx = 1$$

$$dy = 1$$

$$\frac{\partial N_{yp}}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

COMPONENTES VERTICALES:

Ahora con respecto al eje de la Z es indispensable obtener las componentes verticales N_x , N_y , ϕ_{xy} en la forma siguiente:

$$\text{sen } \alpha = \frac{dz}{dq} \quad \therefore dz = \text{sen } \alpha dq$$

$$\text{sen } \beta = \frac{dz_1}{dp} \quad \therefore dz_1 = \text{sen } \beta dp$$

La componente vertical N_x vale

$$N_x \text{ sen } \alpha dp$$

La componente vertical N_y vale

$$N_y \text{ sen } \beta dq$$

y la componente vertical de ϕ_{xy} en los dos planos vale

$$\phi_{xy} \text{ sen } \beta dp = \phi_{xy} \text{ sen } \alpha dq$$

si sustituimos en las expresiones anteriores dp y dq por sus valores de las ecuaciones (1) y (2) tendremos:

$$N_x \operatorname{sen} \alpha \, dp \quad \text{pero } dp = \frac{dy}{\cos \theta}$$

$$N_x \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \theta} \, dy$$

$$N_y \operatorname{sen} \theta \, dq \quad \text{pero } dq = \frac{dx}{\cos \alpha}$$

$$N_y \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \alpha} \, dx$$

Ahora de la ecuación (4) si sustituimos a N_x en función de $N_x p$ queda:

$$p = \frac{N_x \cos \alpha}{\cos \theta} \quad (4)$$

$$N_x = \frac{N_x p}{\frac{\cos \alpha}{\cos \theta}} \quad \therefore N_x = N_x p \frac{\cos \theta}{\cos \alpha}$$

si tenemos que:

$$N_x \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \theta} \, dy = N_x p \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \theta} \, dy = N_x p \operatorname{tanga} \, dy$$

$$\text{solo que } \tan \alpha = \frac{\partial z}{\partial x}$$

si expresamos la componente vertical por unidad de longitud nos queda:

$$N_x p \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y} = N_x p \frac{\partial z}{\partial x}$$

Ahora encontraremos el valor N_y

$$N_y \frac{\sin \theta}{\cos \alpha} dx$$

$$N_{yp} = N_y \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} \text{-----} (5)$$

$$N_y = \frac{N_{yp}}{\frac{\cos \theta}{\cos \alpha}} \quad \therefore N_y = N_{yp} \frac{\cos \alpha}{\cos \theta}$$

$$N_y \frac{\sin \theta}{\cos \alpha} dx = N_{yp} \frac{\cancel{\cos \alpha}}{\cos \theta} \frac{\sin \theta}{\cancel{\cos \alpha}} dx = N_{yp} \tan \theta dx$$

$$\text{solo que } \tan \theta = \frac{\partial z}{\partial y}$$

si expresamos la componente vertical por unidad de longitud nos queda:

$$N_{yp} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial x} = N_{yp} \frac{\partial z}{\partial y}$$

En igual forma encontramos que las componentes verticales de las fuerzas cortantes por unidad de longitud valen:

$$\phi_{xy} \operatorname{sen} \theta \, dp \quad \text{pero } dp = \frac{dy}{\cos \theta}$$

$$\phi_{xy} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \, dy \quad \text{pero } \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \operatorname{tang} \theta$$

$$\phi_{xy} \operatorname{tang} \theta \, dy \quad \text{pero } \operatorname{tang} \theta = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\phi_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \, dy$$

si expresamos la componente vertical por unidad de longitud:

$$\phi_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} = \phi_{xy} \frac{\partial z}{\partial y}$$

Ahora en el otro sentido:

$$\phi_{xy} \operatorname{sen} \alpha \, dq \quad \text{pero } dq = \frac{dx}{\cos \alpha}$$

$$\phi_{xy} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \, dx \quad \text{pero } \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tang} \alpha$$

$$\phi_{xy} \operatorname{tang} \alpha \, dx \quad \text{pero } \operatorname{tang} \alpha = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\phi_{xy} \frac{\partial z}{\partial x} \, dx$$

si expresamos la componente vertical por unidad de longitud

$$\phi_{xy} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} = \phi_{xy} \frac{\partial z}{\partial x}$$

Ahora sumando todas las fuerzas verticales tomando en cuenta su variación en magnitud de una cara a la otra:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N_x p \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y p \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial z}{\partial x} \right) + w_z = 0$$

Expresión en la cual w_z es la carga por unidad de superficie de área proyectada.—

Haciendo operaciones

$$N_{xp} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + N_{yp} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \phi \frac{\partial^2 z}{\partial^2 xy} + \phi \frac{\partial^2 z}{\partial^2 xy} + w_z = 0 \quad (9)$$

$$N_{xp} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + N_{yp} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\phi \frac{\partial^2 z}{\partial^2 xy}$$

Ahora sumando $\sum F_x$, $\sum F_y$, $\sum F_z$

$$N_{xp} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + N_{yp} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\phi \frac{\partial^2 z}{\partial^2 xy} + \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial N_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) +$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial N_{yp}}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -w_z \quad (10)$$

Ahora bien por las ecuaciones (7) y (8)

sabemos que los terminos encerrados en parentesis valen cero:

$$N_{xp} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + N_{yp} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\phi \frac{\partial^2 z}{\partial^2 xy} = -w_z$$

el término $2\phi \frac{\partial^2 z}{\partial^2 xy} = 2\phi \frac{\partial^2 z}{\partial^2 xy}$

Ahora tenemos 3 incógnitas y 3 ecuaciones que se pueden resolver para cada caso particular que se trate:

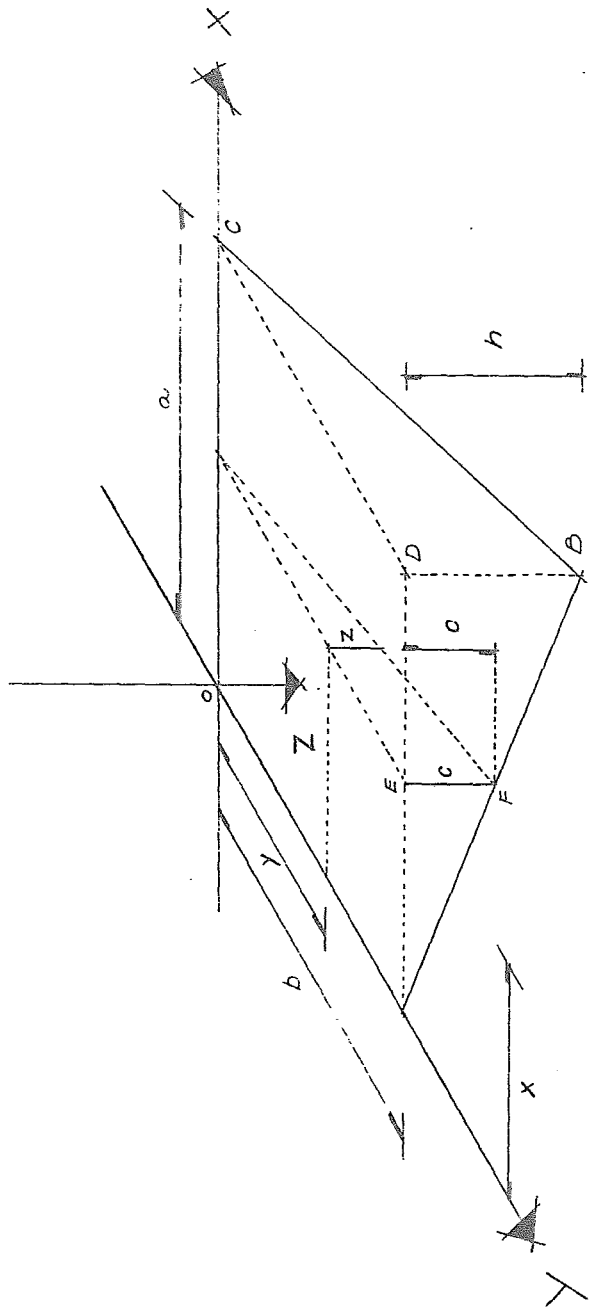
$$\frac{\partial N_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial N_{yp}}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$$N_{xp} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + N_{yp} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\phi \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -w_2 \quad (11)$$

Sistema General de Ecuaciones de Equilibrio

DETERMINACIÓN
DE FORMULAS
PARTICULARES



A continuación plantzaremos la ecuación del paraboloides hiperbólico en la cual se expresa el valor de Z en función de los valores x, y, h, a, b ;

Si observamos la fig. veremos que podemos expresar el valor de Z para cualquier punto del paraboloides, estableciendo las relaciones siguientes:

Ahora tenemos que:

$$\frac{z}{y} = \frac{c}{b} \quad \therefore z = \frac{c}{b} y$$

pero

$$\frac{c}{x} = \frac{h}{a} \quad \therefore c = \frac{h}{a} x$$

sustituyendo el valor de
c en z nos queda:

$$z = \frac{h}{ab} x y \quad \text{-----} \quad (13)$$

Si ahora en la ecuación tercera del sistema general de ecuaciones de equilibrio, sustituimos el valor de 'z' por su valor expresado en la ecuación (13) tendremos que:

$$N_x p \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + N_y p \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\phi \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -w_2$$

$$2\phi \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -w_2 \quad \text{pero } z = \frac{h}{ab} x y$$

$$2\phi \frac{\partial^2 \frac{h}{ab} x y}{\partial x \partial y} = -w_z$$

$$2\phi \frac{\partial^2 h x y}{\partial x \partial y ab} = -w_z$$

$$2\phi \frac{h}{ab} = -w_z$$

$$2\phi h = -w_z ab$$

$$\phi = \frac{ab}{2h} w_z \text{ ----- (14)}$$

Si ahora sustituimos el valor obtenido de ϕ en las dos ecuaciones del sistema general de equilibrio encontramos que:

$$N_x p = 0$$

$$N_y p = 0$$

Esto significa que en cualquier punto del paraboloides hiperbólico, cuando la carga vertical que actúa sobre él, es uniformemente repartida, los esfuerzos que tienen la dirección de los ejes x y y valen cero pro-

duciéndose en dichas direcciones esfuerzos cortantes con intensidad igual a ϕ .—

Sin embargo esto no quiere decir que en otras direcciones diferentes de X y Y, no se presenten esfuerzos normales.—

Así por ejemplo, en el mismo punto en planos a 45° con los plano X y Y se presentan tracciones y compresiones diagonales cuyos valores se pueden determinar con el auxilio de las ecuaciones generales de esfuerzos, para los esfuerzos máximos que se presentan en un punto determinado.—

$$N_1 = \frac{N_x + N_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(N_x - N_y)^2 + 4\phi^2}$$

Formula para esfuerzos máximos.—

Empleando el signo más para uno de los esfuerzos principales y el menos para el otro esfuerzo.—

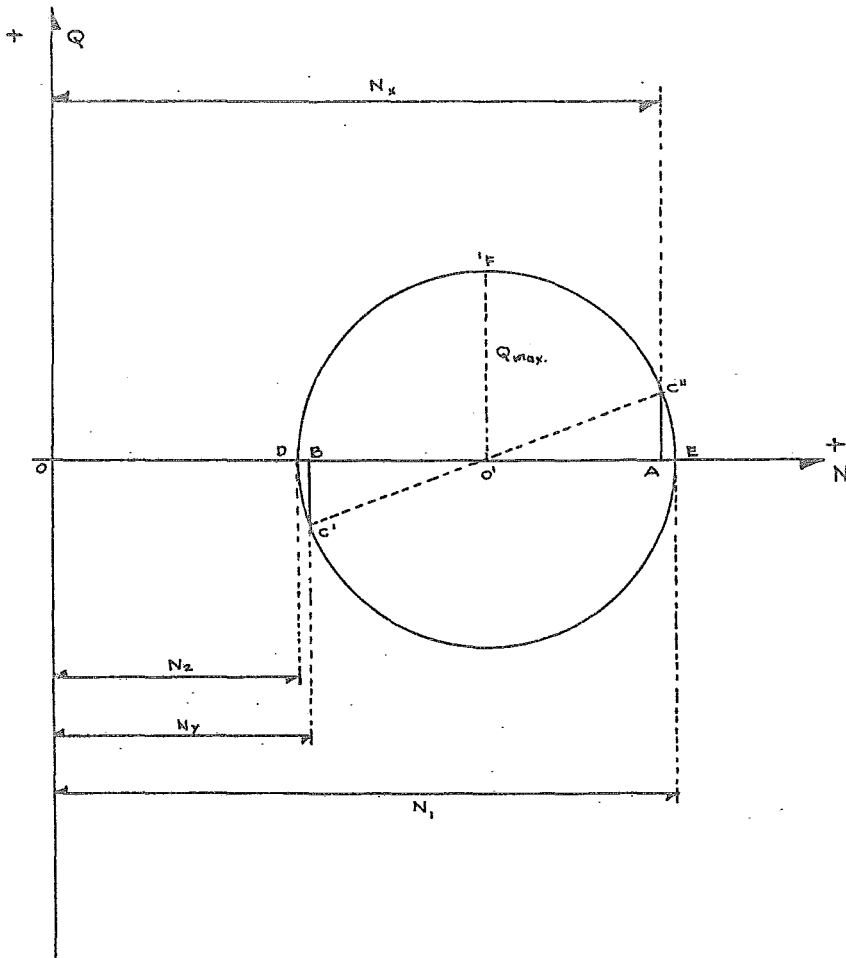
Aplicando la formula anterior a nuestro caso particular nos queda:

$$N_1 = + \frac{1}{2} 2\phi_{xy} = \phi_{xy} \text{ tracción}$$

$$N_2 = - \phi_{xy} \text{ compresión}$$

A continuación se deduce la fórmula para esfuerzos máximos que se presentan en un punto determinado mediante el círculo de esfuerzos Mohr.—

CIRCULO DE ESFUERZOS (MOHR)



CIRCULO DE ESFUERZOS MOHR

El círculo de esfuerzos o de Mohr, es un método gráfico que tiene por objeto el determinar, la intensidad de los esfuerzos normales y cortantes que se producen en una dirección cualquiera cuando se conocen los que se producen en otra dirección dada:—

Secuela de trazo:

- 1) Se trazan dos ejes perpendiculares entre sí; sobre el eje horizontal se miden los esfuerzos normales N y en el eje vertical los esfuerzos cortantes ϕ :—
- 2) Sobre el eje N se miden N_x y N_y distancias \overline{OA} y \overline{OB}
- 3) En los puntos A y B se trazan perpendiculares AC'' y AC' valores a escala ϕ_{xy} :—

- 4) Se unen los puntos $c'c''$ y con radio $O'C'$ se traza el círculo.-
- 5) Las distancias \overline{OE} y \overline{OD} son los valores de los esfuerzos principales N_1 y N_2 respectivamente.-

Demostración:

Se dice que $OE = N_1$

Ahora:

$$OE = \overline{OA} + \overline{AE} = N_x + AE$$

pero:

$$AE = O'E - O'A$$

$$O'A = \frac{N_x - N_y}{2}$$

$$AE = O'E - \frac{N_x - N_y}{2}$$

pero:

$$O'E = O'C'' = \sqrt{\overline{O'A}^2 + \overline{AC''}^2}$$

$$O'E = \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + \phi_{xy}^2}$$

y

$$AE = \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + \phi_{xy}^2} - \frac{N_x - N_y}{2}$$

Entonces:

$$OE = N_x + \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + \phi_{xy}^2} - \frac{N_x - N_y}{2}$$

$$N_1 = \frac{N_x + N_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(N_x - N_y)^2 + 4\phi_{xy}^2}$$

y

$$N_2 = \overline{OB} - \overline{DB}$$

$$\overline{DB} = \overline{AE}; \quad \overline{OB} = N_y$$

$$N_2 = N_y - \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + \phi_{xy}^2} + \frac{N_x - N_y}{2}$$

$$N_2 = \frac{N_x + N_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(N_x - N_y)^2 + 4\phi xy^2}$$

$$N_{1,2} = \frac{N_x + N_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(N_x - N_y)^2 + 4\phi xy^2}$$

La línea $O'F$ no da el valor del esfuerzo cortante máximo y algebraicamente vale:

$$O'F = O'C'' = \phi_{\max} = \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + \phi xy^2}$$

$$OE = N_x + \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + \Phi_{xy}^2} - \frac{N_x - N_y}{2}$$

$$OE = \frac{N_x - N_x + N_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + \Phi_{xy}^2}$$

$$OE = \frac{2N_x - N_x + N_y}{2} + \sqrt{\frac{(N_x - N_y)^2}{(2)^2} + \Phi_{xy}^2}$$

$$OE = \frac{N_x + N_y}{2} + \sqrt{\frac{(N_x - N_y)^2}{4} + \Phi_{xy}^2}$$

$$OE = \frac{N_x + N_y}{2} + \sqrt{\frac{(N_x - N_y)^2 + 4\Phi_{xy}^2}{4}}$$

$$OE = \frac{N_x + N_y}{2} + \frac{\sqrt{(N_x - N_y)^2 + 4\Phi_{xy}^2}}{\sqrt{4}}$$

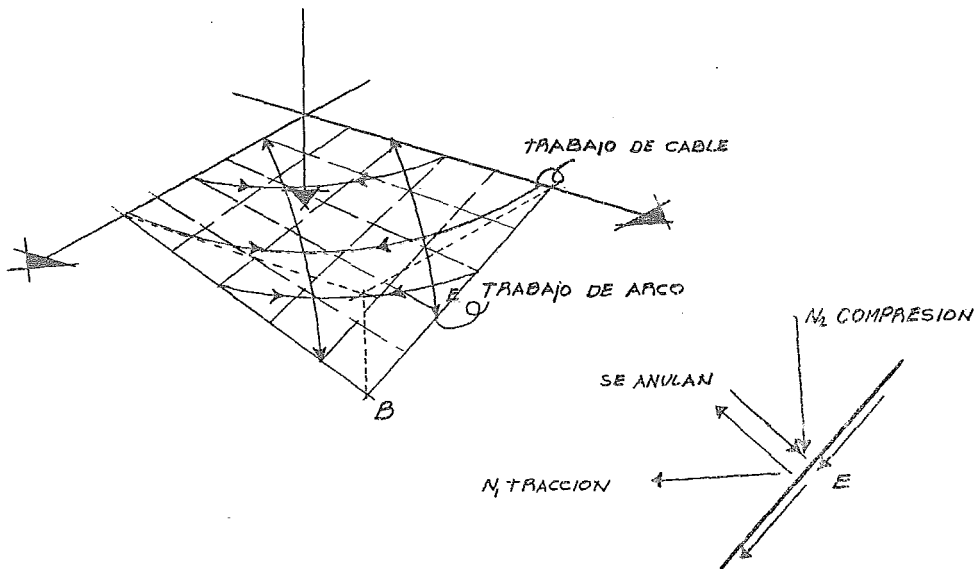
$$OE = \frac{N_x + N_y}{2} + \frac{\sqrt{(N_x - N_y)^2 + 4\Phi_{xy}^2}}{2}$$

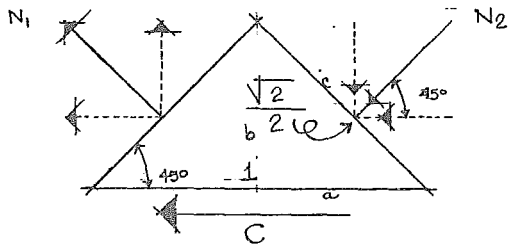
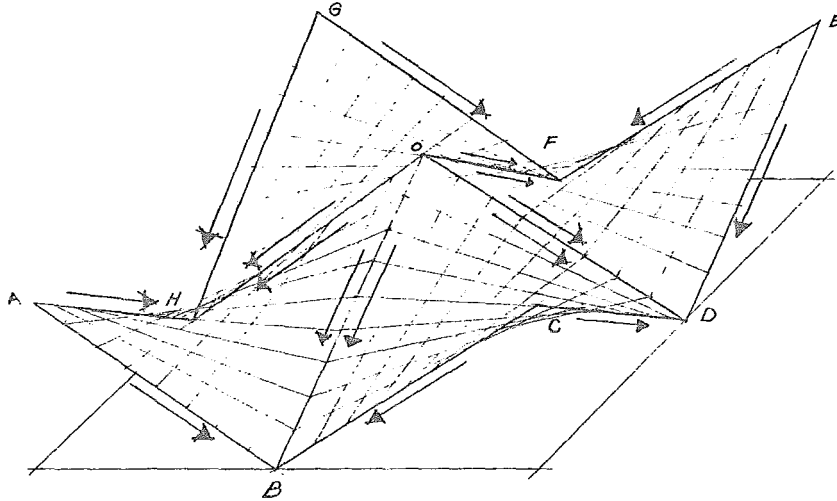
$$OE = \frac{N_x + N_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(N_x - N_y)^2 + 4\Phi_{xy}^2}$$

$$OE = N_1 = N_2 = \frac{N_x + N_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(N_x - N_y)^2 + 4\Phi_{xy}^2}$$

Ahora analizaremos lo que acontece en los bordes del paraboloides; a estos llegan tracciones en una dirección como si se tratara de cables colgados y compresiones, como si se tratara de arcos parabolícos apoyados en los mismos.-

Así tomando un punto cualquiera en uno de los bordes tenemos que llegan a él fuerzas; las fuerzas N_1 y N_2 , las primeras de tracción y las segundas de compresión.- Si descomponemos dichas fuerzas N_1 y N_2 en sus componentes, veremos que las componentes perpendiculares al borde se anulan, mientras las componentes tangenciales se suman;





Ahora tendremos que; por trigonometria

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$c = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$$

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore C_{X1} = N_1 \cos 45^\circ \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 \cos 45^\circ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{pero } \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore C_{X1} = N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C_{X1} = N_1 \frac{(\sqrt{2})^2}{4} + N_2 \frac{(\sqrt{2})^2}{4}$$

$$C_{X1} = N_1 \frac{2}{4} + N_2 \frac{2}{4}$$

$$C_{X1} = \frac{2}{4} (N_1 + N_2)$$

$$\text{pero } N_1 = N_2$$

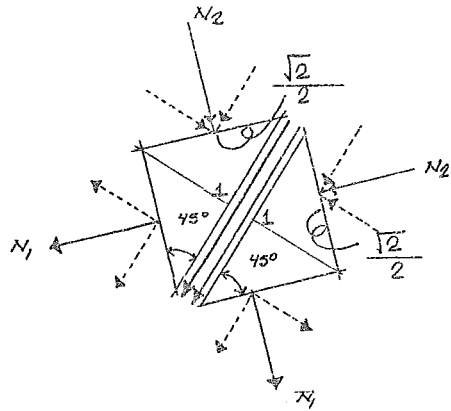
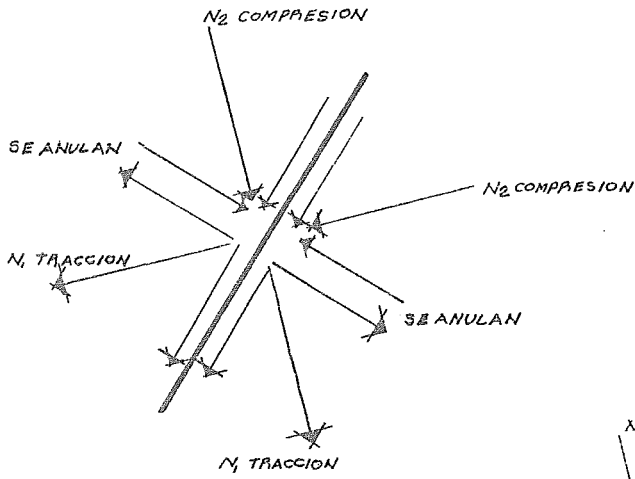
$$\therefore C_{X1} = \frac{2}{4} (2N_{1,2})$$

$$C_{X1} = \frac{2}{2} (N_{1,2})$$

$$C = N_1 = N_2$$

$$\therefore C_{AB} = N_{AB}$$

valor de la compresión en
el borde AB;



Ahora veremos lo que pasa en los bordes de unión de los paraboloides:

bordes \overline{OB} \overline{OF}
 \overline{OD} \overline{OH}

tendremos que:

$$C_2 = 2\left(N_1 \cos 45^\circ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(N_2 \cos 45^\circ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{pero } \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore C_2 = 2\left(N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$C_2 = 2\left(N_1 \frac{2}{4}\right) + 2\left(N_2 \frac{2}{4}\right)$$

$$C_2 = 2\frac{2}{4}(N_1 + N_2) \quad \text{pero } N_1 = N_2$$

$$C_2 = \frac{4}{4}(2N_{1,2})$$

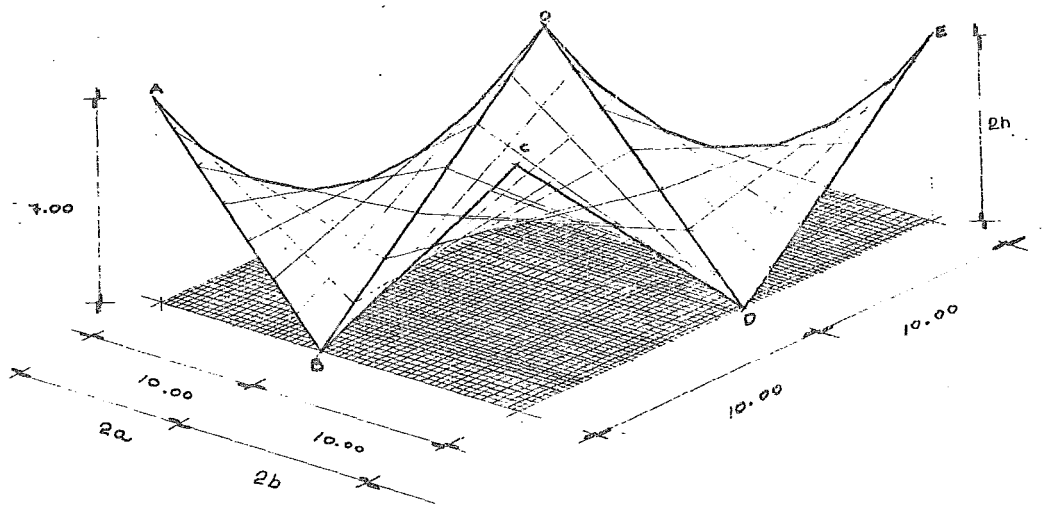
$$C_2 = 2N_1$$

$$\therefore C_2 \overline{OB} = 2N_1 \overline{OB}$$

valor de la compresión
en el borde \overline{OB} ;

CALCULO ESTRUCTURAL

Paraboloides en ϕ uilla: union de cuatro paraboloides hiperbólicos en donde los puntos de apoyo lógicos son los puntos B, D, F, H, - puntos centrales en la superficie.-



DISEÑO Y CÁLCULO

Se desea cubrir una superficie cuadrangular de 20.00x20.00 mts, con cuatro paraboloides hiperbólicos, organizados en la forma conocida de "phiillo" mostrada ya en la figura anterior.-

DETERMINACION DE LA CARGA w :

$$\begin{array}{r} 0.04 \times 2.4 \text{ t/m}^3 = 96 \text{ kg/m}^2 \text{ Cascarón-} \\ 4 \text{ kg/m}^2 \text{ Impermeabilizante.-} \\ 100 \text{ kg/m}^2 \text{ carga viva-} \\ \hline 200 \text{ kg/m}^2 \\ w = 200 \text{ kg/m}^2 \end{array}$$

ANÁLISIS DE LA CÁSCARA :

$$\text{tenemos que : } \phi = \frac{ab}{2h} w$$

$$\text{sustituyendo : } \phi = \frac{(5.00)(5.00)}{2(3.50)} (200 \text{ kg/m}^2)$$

$$\therefore \phi = 714.28 \text{ Kg/m}$$

$$\therefore \phi = N_1 = N_2$$

$$N_1 = 714.28 \text{ Kg/m Tracción}$$

$$N_2 = 714.28 \text{ Kg/m Compresión}$$

Si suponemos que el espesor de la cáscara es de 4 cms. los esfuerzos de compresión valdrán:

$$f_c = \frac{N_2}{100 \times e} = \frac{714.28 \text{ Kg/m}}{100 \times 4 \text{ cms}} = 1.78 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_c = 1.78 \text{ Kg/cm}^2$$

el refuerzo necesario para absorber la tracción será:

$$A_s = \frac{N_1}{f_s} = \frac{714.28 \text{ Kg/m}}{1265 \text{ Kg/cm}^2} = 0.56 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 0.56 \text{ cm}^2$$

Si empleamos acero del No 2 $\phi 1/4$ $a = 0.32 \text{ cm}^2$

$$\text{Nº de Varillas} = \frac{0.56 \text{ cm}^2}{0.32 \text{ cm}^2} = 1.75 \approx 2 \text{ varillas}$$

por especificación @ 20 cms.- (ambos sentidos)

ANÁLISIS EN LOS BORDES LIBRES:

A continuación calcularemos los valores de las compresiones que actúan en los bordes:

$$\begin{array}{l} \overline{AB} \\ \overline{BC} \\ \overline{CD} \\ \overline{DE} \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{EF} \\ \overline{FG} \\ \overline{GH} \\ \overline{HA} \end{array}$$

$$c_1 = \overline{AB} \frac{ab}{2h} \omega \quad \text{pero } \overline{AB} = 2\sqrt{a^2+h^2}$$

$$c_1 = \cancel{2}\sqrt{a^2+h^2} \frac{ab}{\cancel{2}h} \omega$$

$$c_1 = \sqrt{(5.00)^2 + (3.50)^2} \left(\frac{5.00 \times 5.00}{3.50} \right) 200 \text{ kg/m}^2 =$$

$$c_1 = 8714.28 \text{ kg}$$

La dimensión de los bordes para resistir el valor de las compresiones podemos determinarla con la fórmula siguiente:

$$P = A_c f'_c + 0.225 \times A_s f_s$$

$$\text{pero } f'_c \cdot 0.225 = f_c$$

$$140 \text{ Kg/cm}^2 (0.225) = 31.5 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\therefore f_c = 31.5.$$

$$\therefore P = A_c f_c$$

$$A_c = \frac{P}{f_c} = \frac{8714.28 \text{ Kg}}{31.5 \text{ Kg/cm}^2} = 276 \text{ cm}^2$$

lo que significa que necesitaremos una area de concreto de 276 cm^2 para poder resistir el valor de la compresión en los puntos indicados.-

ANÁLISIS EN LOS BORDES COMUNES

Ahora calcularemos el valor de las compresiones que actúan en los bordes siguientes:

OB

OD

OF

OH

$$c_2 = 2 \overline{OB} \frac{ab}{2h} w \quad \text{pero: } \overline{OB} = 2 \sqrt{a^2 + h^2}$$

$$c_2 = 2 (2 \sqrt{a^2 + h^2}) \frac{ab}{2h} w$$

$$c_2 = 2 (\sqrt{(5.00)^2 + (3.50)^2}) \frac{(5.00)(5.00)}{3.5} (200 \text{ kg/m}^2)$$

$$c_2 = 17\,428.55 \text{ Kg}$$

La dimensión de los bordes la determinamos con la fórmula siguiente:

$$P = A_c f_c + A_s f_s$$

$$A_c = \frac{P}{f_c} = \frac{17\,428.55 \text{ Kg}}{0.225 \times 140 \text{ Kg/cm}^2} = 553.28 \text{ cm}^2$$

$$A_c = 553.28 \text{ cm}^2$$

area de concreto que necesitaremos en el bordz para resistir la compresión en ese tramo.

Ahora determinaremos las condiciones en que trabajan los apoyos B, D, F, H; En ellos descansa toda la estructura, por lo tanto el valor de las componentes verticales C_1 y C_2 valdrán:

$$W_{v1} = C_1 \operatorname{sen} \alpha_1 ; \quad W_{v2} = C_2 \operatorname{sen} \alpha_2$$

$$\text{pero: } \operatorname{sen} \alpha_1 = \frac{2h}{AB} ; \quad \operatorname{sen} \alpha_2 = \frac{2h}{OB}$$

$$W_{v1} = \cancel{AB} \frac{abw}{2h} \frac{2h}{\cancel{AB}} ; \quad W_{v2} = \cancel{2OB} \frac{abw}{2h} \frac{2h}{\cancel{OB}}$$

$$W_{v1} = abw \quad ; \quad W_{v2} = 2abw$$

tomando el punto B como referencia, tendremos que a él llegan las siguientes componentes verticales:

$$\overline{AB} ; W_{v1}$$

$$\overline{OB} ; W_{v2}$$

$$\overline{CB} ; W_{v1} \quad \therefore \sum F_v \text{ en B} = 4abw$$

$$\begin{aligned} \text{sustituyendo } \sum F_v \text{ en B} &= 4(5.00)(5.00)(200 \text{ kg/m}^2) \\ &= 20\,000 \text{ Kg} \end{aligned}$$

$$\sum F_{V \text{ TOTAL}} = 4abw \quad (1)$$

que vendría a ser el peso total de la cubierta;
sustituyendo;

$$\begin{aligned} \sum F_{V \text{ TOTAL}} &= 4(5.00)(5.00)(200 \text{ Kg/m}^2) \quad (1) \\ &= 80000 \text{ Kg} = 80.0 \text{ ton} \end{aligned}$$

A continuación calcularemos las componentes horizontales de C_1 y C_2 ;

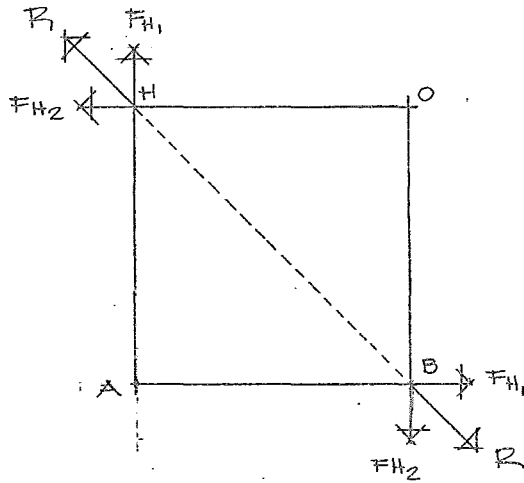
$$F_{H_1} = C_1 \cos \alpha_1 \quad ; \quad F_{H_2} = C_2 \cos \alpha_2$$

$$\text{pero : } \cos \alpha_1 = \frac{2a}{AB} \quad ; \quad \cos \alpha_2 = \frac{2b}{OB}$$

$$F_{H_1} = \frac{AB}{AB} \frac{abw}{2h} \frac{2a}{AB} \quad ; \quad F_{H_2} = \frac{2OB}{2h} \frac{abw}{2h} \frac{2b}{OB}$$

$$F_{H_1} = \frac{a^2bw}{h} \quad ; \quad F_{H_2} = \frac{ab^2w}{h} \quad (2)$$

La resultante de estas fuerzas horizontales tiene la dirección de la diagonal HB y su valor es:



$$R_{HB} = \sqrt{(F_{H1})^2 + (F_{H1})^2}$$

$$R_{HB} = \sqrt{\frac{(F_{H2})^2}{2} + \frac{(F_{H2})^2}{2}}$$

sustituyendo;

$$R_{HB} = \sqrt{\left(\frac{a^2 b w}{h}\right)^2 + \left(\frac{a b^2 w}{h}\right)^2}$$

$$R_{HB} = \sqrt{\left(\frac{(5)^2 (5) (200)}{3.5}\right)^2 + \left(\frac{(5) (5)^2 (200)}{3.5}\right)^2}$$

$$R_{HB} = 10096.53 \text{ Kg}$$

el refuerzo que se emplearía como tensor, si se emplea acero de alta resistencia quedaría de:

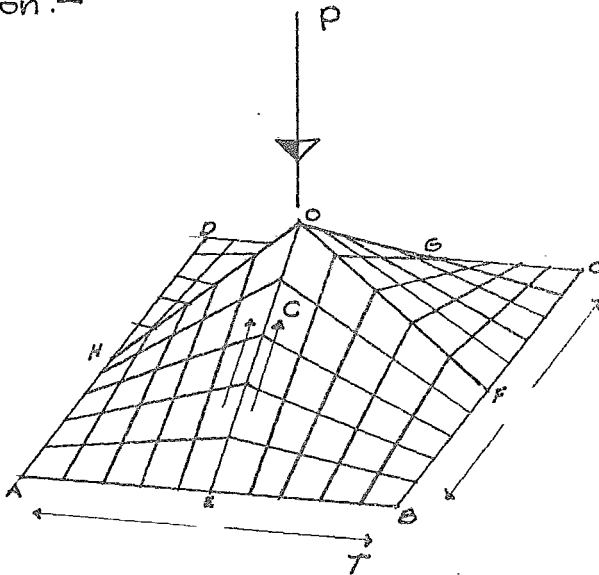
$$A_s = \frac{10096.53 \text{ Kg}}{5000 \text{ Kg/cm}^2} = 2.01 \text{ cm}^2$$

emplearíamos cable de $\frac{3}{4}$ " de ϕ cuya area = 2.84 cm^2

CALCULO DE CIMENTACION

Para resolver la cimentación de la superficie emplearemos paraboloides hiperbólicos invertidos como zapatas aisladas.-

Como puede observarse en la figura los bordes AB-BC-CD-PA trabajan a esfuerzos de tracción; mientras que en las uniones de los paraboloides OE-OF-OG y OH se producen esfuerzos de compresión.-



Sabemos que la carga total de la superficie es de 20.0 ton; es decir 20.0 ton por apoyo ya que contamos con cuatro apoyos para soportar el peso de la superficie;- ahora si suponemos que la reacción del terreno vale 4 ton/m² entonces el área necesaria de cimentación vale:

$$A = \frac{P_t}{r}$$

P_t = peso total

r = reacción del terreno

A = área de cimentación

si P_t es la carga total incluyendo el peso propio de la cimentación; y si suponemos que el peso propio del cemento es el 10% de la carga tendremos que:

$$A = \frac{22.0 \text{ ton}}{4.0 \text{ ton/m}^2} = 5.5 \text{ m}^2$$

$$\therefore 2a = 2b = 2.40 \text{ M} \quad \therefore a = b = 1.20 \text{ M}$$

Si sabemos que la carga total es de 20.0 ton el valor por m² será de:

$$\omega = \frac{20\,000 \text{ Kg}}{2.40 \times 2.40} = 3\,472.22 \text{ Kg/m}^2$$

Si sabemos que $N_1 = N_2 = \phi$

$$\phi = \frac{ab}{2h} \omega = \frac{1.20 \times 1.20}{2(1)} 3\,472.22 = 2\,500 \text{ Kg/mlin}$$

$$\phi = 2\,500 \text{ Kg/mlin.}$$

si suponemos que el espesor de la superficie es de 10 cms, el esfuerzo de compresión valdrá:

$$f_c = \frac{N_2}{z} = \frac{2\,500 \text{ Kg}}{10 \times 100} = 2.5 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_c = 2.5 \text{ Kg/cm}^2$$

el refuerzo de tracción sera:

$$A_s = \frac{2\,500 \text{ Kg}}{1\,265 \text{ Kg/cm}^2} = 1.97 \text{ cm}^2$$

$$\therefore N_s \text{ vs} = \frac{1.97 \text{ cm}^2}{0.32 \text{ cm}^2} = 7 \text{ vs} \quad \text{y} \quad \frac{100}{7} = 15$$

por lo tanto 7 vs ϕ 1/4 @ 15 cms en ambos sentidos.-

El refuerzo de tracción en los bordes

AE	CG
EB	GD
BF	DH
FC	HA

será de:

$$T = 2500 \text{ kg} \times 1.20 = 3000 \text{ kg}$$

$$\therefore A_s = \frac{3000 \text{ kg}}{1265 \text{ kg/cm}^2} = 2.37 \text{ cm}^2$$

$$\therefore N_{\#} V_s = \frac{2.37 \text{ cm}^2}{1.22 \text{ cm}^2} = 1.94$$

por lo tanto 2 vs $\phi/2$ en los bordes mencionados anteriormente.

La compresión en las uniones de los paraboloides será:

$$C = 2500 \text{ kg} \times 1.20 \times 2 = 6000 \text{ kg}$$

$$C = 6000 \text{ kg}$$

que pueden ser resistidas sin peligro de pandeo por los miembros angulares formados por la intersección de ambas superficies contiguas.

Ahora veremos que carga de seguridad puede soportar la columna corta sencilla de concreto armado que propondremos para soportar el peso de 20.0 ton, carga que tenemos para cada apoyo de la cubierta. -

DATOS:

$$f'c = 150 \text{ kg/cm}^2$$

$$fs = 1265 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = 12.$$

sección de la columna $25 \times 25 \text{ cms.}$

armada con 4 vs $\phi 5/8$

1: sección efectiva de concreto
sin recubrimiento:

$$20 \times 20 = 400 \text{ cm}^2$$

2: coeficiente de trabajo del concreto

$$fc = 0.225 \times 150 \text{ kg/cm}^2 = 33.8 \text{ kg/cm}^2$$

3: area de acero $a = \phi 5/8 = 1.93 \text{ cm}^2$

$$1.93 \text{ cm}^2 \times 4 = 7.72 \text{ cm}^2$$

4: coeficiente de trabajo del acero

$$f_s = (n \times f_c) + 600 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_s = 12 \times 33.8 \text{ kg/cm}^2 + 600 \text{ kg/cm}^2 = 1006 \text{ kg/cm}^2$$

5: carga que se puede aplicar a la columna.

$$P = A_c f_c + A_s f_s$$

$$P = (200 \text{ cm}^2 \times 33.8 \text{ kg/cm}^2) + (7.72 \text{ cm}^2 \times 1006 \text{ kg/cm}^2)$$

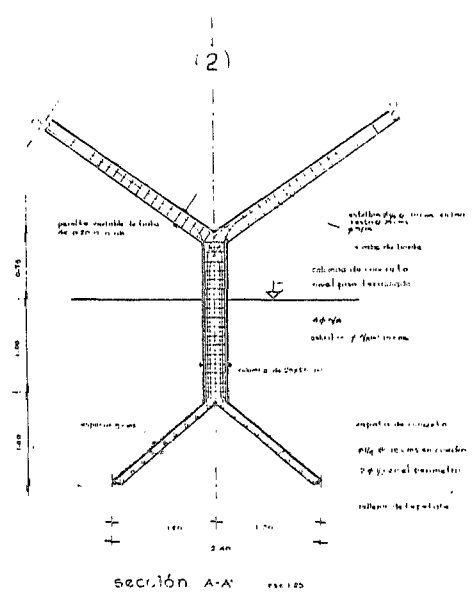
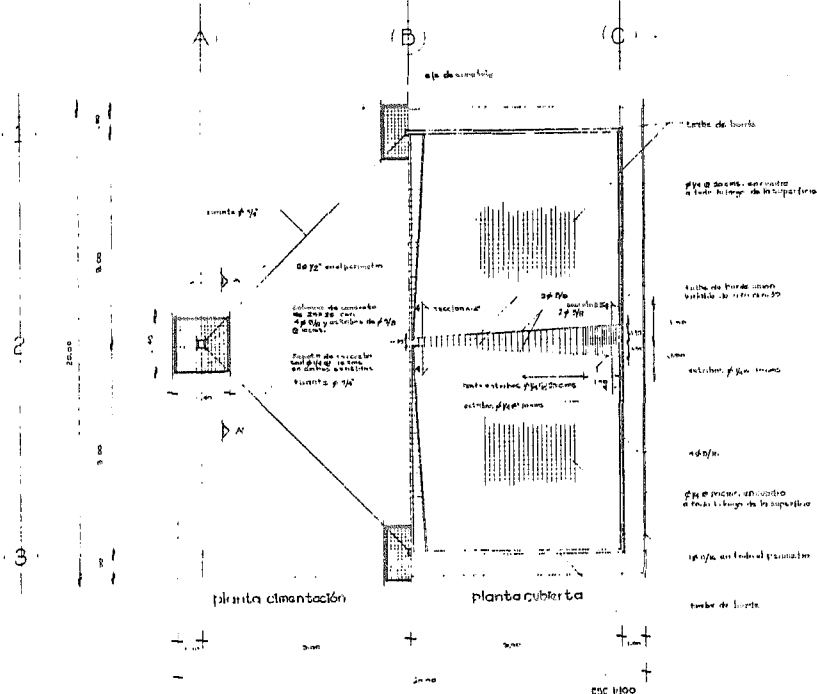
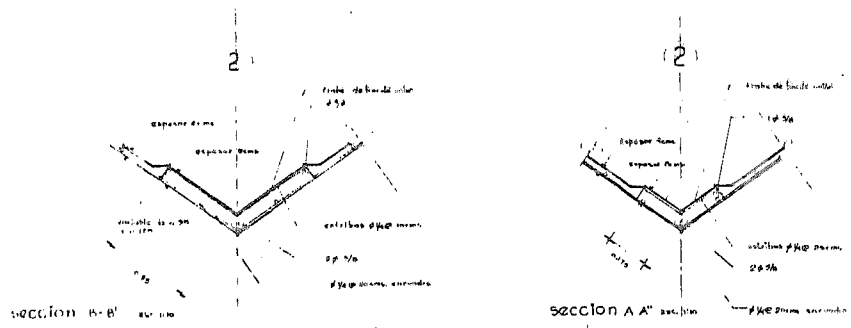
$$P = 13520 \text{ kg} + 7766.32 \text{ kg}$$

$$P = 21286.32 \text{ kg.}$$

lo cual significa que las secciones propuestas son correctas para soportar una carga de 20.0 ton.-

PLANO ESTRUCTURAL

M-0063978



plano estructural

TESIS PROFESIONAL
 EL PARABOLOIDE HIPERBOLICO Y SU
 APLICACION AL DISEÑO ARQUITECTONICO
 ENEP ACATLAN ARQUITECTURA
 MARIO ALBERTO RODRIGUEZ LOPEZ

UTILIZACION DE NOMOGRAMAS

Los nomogramas son graficas, que equivalen a un paraboloides hiperbolicos visto en planta; en el que aparecen el valor de los esfuerzos para cualquier punto del paraboloides hiperbolicos que se necesite.-

El proposito de utilizar estos nomogramas es la de proporcionar en forma sencilla, el cálculo de los esfuerzos normales y tangenciales en proyección horizontal segun las generatrices principales del paraboloides hiperbolicos.-

Estos nomogramas solo pueden ser utilizados cuando el paraboloides hiperbolicos, es equilatero con eje Z vertical; caso al que pertenece la superficie utilizada en el diseño de nuestra forma arquitectónica.-

No tendria ningun sentido tratar de explicar los pasos para utilizar los nomogramas, ya que estos se encuentran explicados claramente en el libro Paraboloides Hiperbolicos del ing. Juan Antonio Tonda.-

Lo que trataremos es demostrar que al utilizar los nomogramas del ing. Juan Antonio tonda, comprobamos de alguna manera por así decirlo, en forma gráfica, que el valor de los esfuerzos normales y tangenciales obtenidos anteriormente por el camino matemático para nuestra superficie son correctos.

Para utilizar los nomogramas requerimos el dibujo de una planta en papel transparente del paraboloides hiperbólico esc. 1:100 con los ejes principales X, Y, Z, ; posteriormente se calcula el valor de la constante K y se localiza el nomograma correcto para el valor encontrado de la constante K ; ahora sobre ponemos nuestra planta en el nomograma localizado, haciendo coincidir los ejes X, Y de la planta, con los ejes X, Y del nomograma, leyendo así gráficamente el valor de los esfuerzos normales y tangenciales para cualquier punto del paraboloides hiperbólico que se necesite -

En nuestro caso particular podemos observar, en la tabla de valores obtenidos de los nomogramas para esfuerzos normales y tangenciales

respectivamente, que el valor máximo del esfuerzo tangencial corresponde a los puntos 1, 11, 21, y 31 del paraboloide hiperbólico y que es de $\phi = 1012.5 \text{ Kg/m}$;

Y el valor mínimo del esfuerzo tangencial en la parte central del paraboloide hiperbólico es de $\phi = 714 \text{ Kg/m}$;

Lo que significa, que los esfuerzos tanto normales como tangenciales, van aumentando de valor, de la parte central hacia los bordes que limitan al paraboloide hiperbólico ; sin embargo en el caso, de la superficie que estamos analizando, si sustituimos el valor máximo del esfuerzo tangencial en las formulas anteriormente utilizadas para encontrar el valor de f_c y A_s , podemos observar lo siguiente :

$$f_c = \frac{N_1}{100 \times e} = \frac{1012.5}{100 \times 4} = 2.53 \text{ Kg/cm}^2$$

$$A_s = \frac{N_2}{f_s} = \frac{1012.5}{1265} = 0.80 \text{ cm}^2$$

$$\text{y } a_s = \frac{0.80}{0.82} = 2.5 \approx 3 \text{ varillas}$$

por especificación acero $\phi 1/4 @ 20$ cms. en ambos sentidos:-

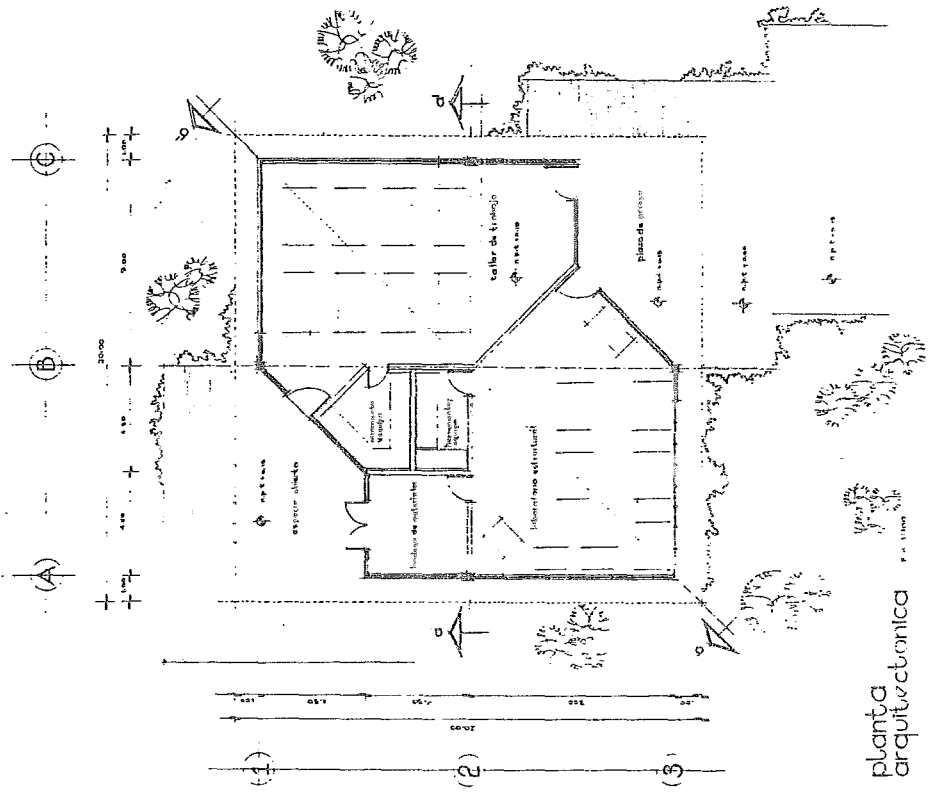
Lo anterior demuestra, que los valores encontrados en los nomogramas, no afectan a los valores obtenidos por el camino matemático, para resolver estructuralmente al paraboloides hiperbólico:-

La utilización de los nomogramas de alguna manera nos ayuda a que tengamos una visión mas clara de como trabaja la estructura en cada punto del paraboloides hiperbólico -

PUNTOS	X	Y	K _x =q	K _y =p	Q	N _x	N _y	N _x	N _y	X	Y	Z _x	Z _y
	m	m			Kg/m	Kg/m	Kg/m	Kg/m	Kg/m			Kg/m	Kg/m
1	-5	-5	-0.70	-0.70	-1012.5	+275	+275	0	0				
2	-4	-5	-0.56	-0.70	-962.5		+237.5		0				
3	-3	-5	-0.42	-0.70	-925		+187.5		0				
4	-2	-5	-0.28	-0.70	-900		+125		0				
5	-1	-5	-0.14	-0.70	-887.5		+62.5		0				
6	0	-5	0	-0.70	-875		0		0				
7	+1	-5	+0.14	-0.70	-887.5		-62.5		0				
8	+2	-5	+0.28	-0.70	-900		-125		0				
9	+3	-5	+0.42	-0.70	-925		-187.5		0				
10	+4	-5	+0.56	-0.70	-962.5		-237.5		0				
11	+5	-5	+0.70	-0.70	-1012.5	-275	-275	-550	0	-0.57		+313.5	
12	+5	-4	+0.70	-0.56	-962.5	-237.5	-475	-550		-0.45		+213.7	
13	+5	-3	+0.70	-0.42	-925	-187.5	-375	-550		-0.34		+123.5	
14	+5	-2	+0.70	-0.28	-900	-125	-250	-550		-0.22		+55	
15	+5	-1	+0.70	-0.14	-887.5	-62.5	-125	-550		-0.11		+13.7	
16	+5	0	+0.70	0	-875	0	0	-550		0		0	
17	+5	+1	+0.70	+0.14	-887.5	+62.5	+125	-550		+0.11		+13.7	
18	+5	+2	+0.70	+0.28	-900	+125	+250	-550		+0.22		+55	
19	+5	+3	+0.70	+0.42	-925	+187.5	+375	-550		+0.34		+123.5	
20	+5	+4	+0.70	+0.56	-962.5	+237.5	+475	-550		+0.45		+213.7	
21	+5	+5	+0.70	+0.70	-1012.5	+275	+275	+550	+550	+0.57	+0.57	+313.5	+313.5
22	+4	+5	+0.56	+0.70	-962.5		+237.5		+475		+0.45		+213.7
23	+3	+5	+0.42	+0.70	-925		+187.5		+375		+0.34		+123.5
24	+2	+5	+0.28	+0.70	-900		+125		+250		+0.22		+55
25	+1	+5	+0.14	+0.70	-887.5		+62.5		+125		+0.11		+13.7
26	0	+5	0	+0.70	-875		0		0		0		0
27	-1	+5	-0.14	+0.70	-887.5		-62.5		-125		-0.11		+13.7
28	-2	+5	-0.28	+0.70	-900		-125		-250		-0.22		+55
29	-3	+5	-0.42	+0.70	-925		-187.5		-375		-0.34		+123.5
30	-4	+5	-0.56	+0.70	-962.5		-237.5		-475		-0.45		+213.7
31	-5	+5	-0.70	+0.70	-1012.5	-275	-275	0	-550	-0.57		+313.5	
32	-5	+4	-0.70	+0.56	-962.5	-237.5		0					
33	-5	+3	-0.70	+0.42	-925	-187.5		0					
34	-5	+2	-0.70	+0.28	-900	-125		0					
35	-5	+1	-0.70	+0.14	-887.5	-62.5		0					
36	-5	0	-0.70	0	-875	0		0					
37	-5	-1	-0.70	-0.14	-887.5	+62.5		0					
38	-5	-2	-0.70	-0.28	-900	+125		0					
39	-5	-3	-0.70	-0.42	-925	+187.5		0					
40	-5	-4	-0.70	-0.56	-962.5	+237.5		0					

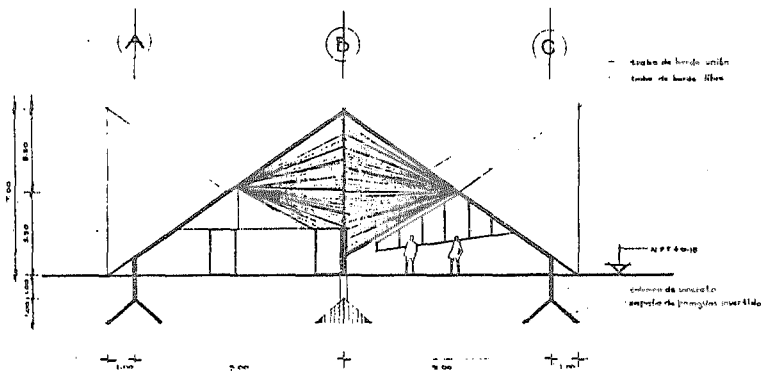
Tabla de
valores de
 $\Phi N_x, N_y$
por nomogramas

EJEMPLO DE APLICACION

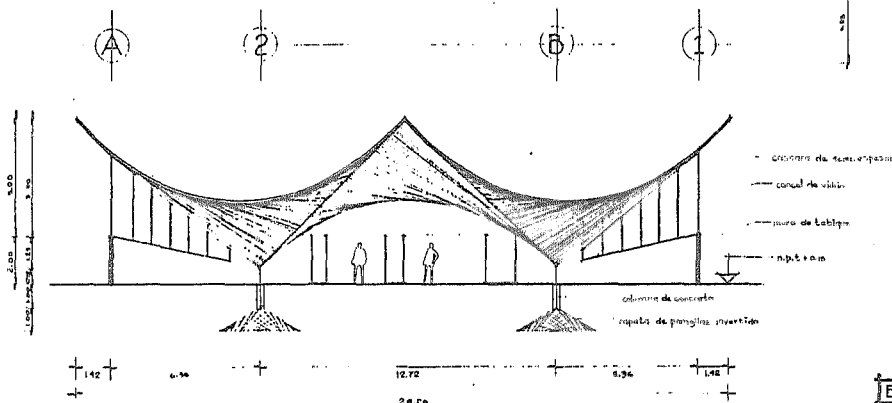


TESIS PROFESIONAL
 EL PARABOLOIDE HIPERBOLICO Y SU
 APLICACION AL DISEÑO ARQUITECTONICO
 ENEP ACATLAN | ARQUITECTURA
 MARIO ALBERTO RODRIGUEZ LOPEZ

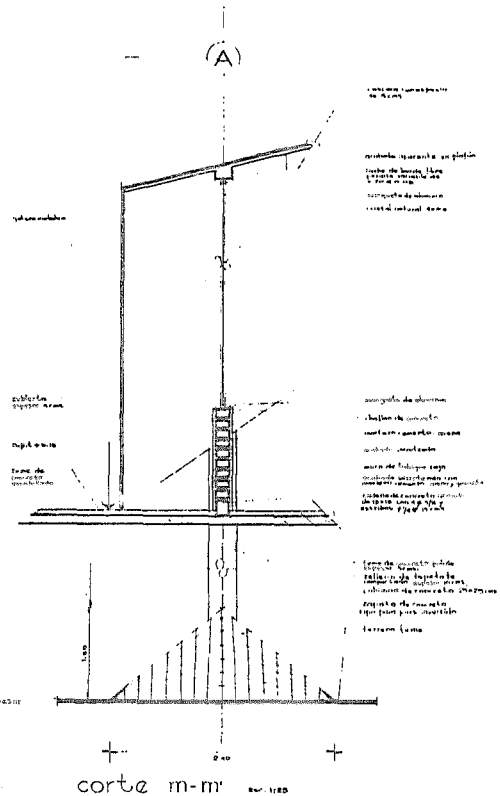
planta
 arquitectonica



corte a-a

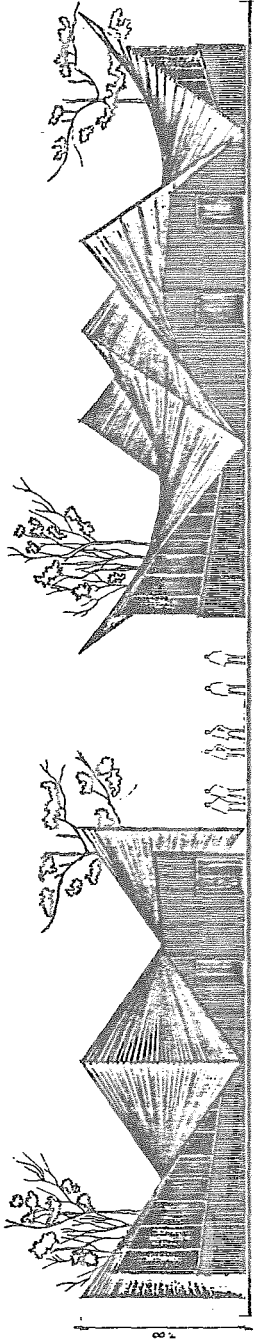


corte b-b

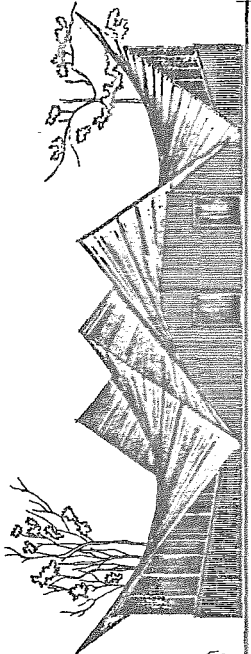


corte m-m

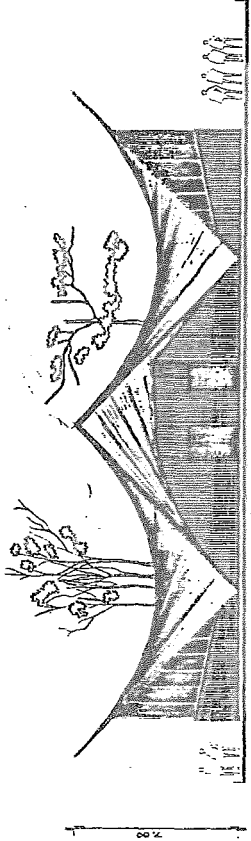
TESIS PROFESIONAL
 EL PARABOLOIDE HIPERBOLICO Y SU
 APLICACION AL DISEÑO ARQUITECTONICO
 ENEP ACATLAN | ARQUITECTURA
 MARIO ALBERTO RODRIGUEZ LOPEZ



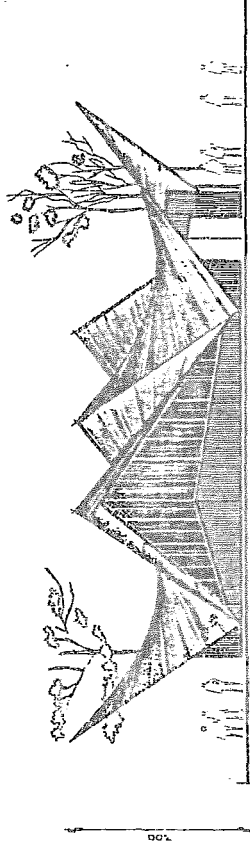
ALZADO a



ALZADO b



ALZADO c



ALZADO d

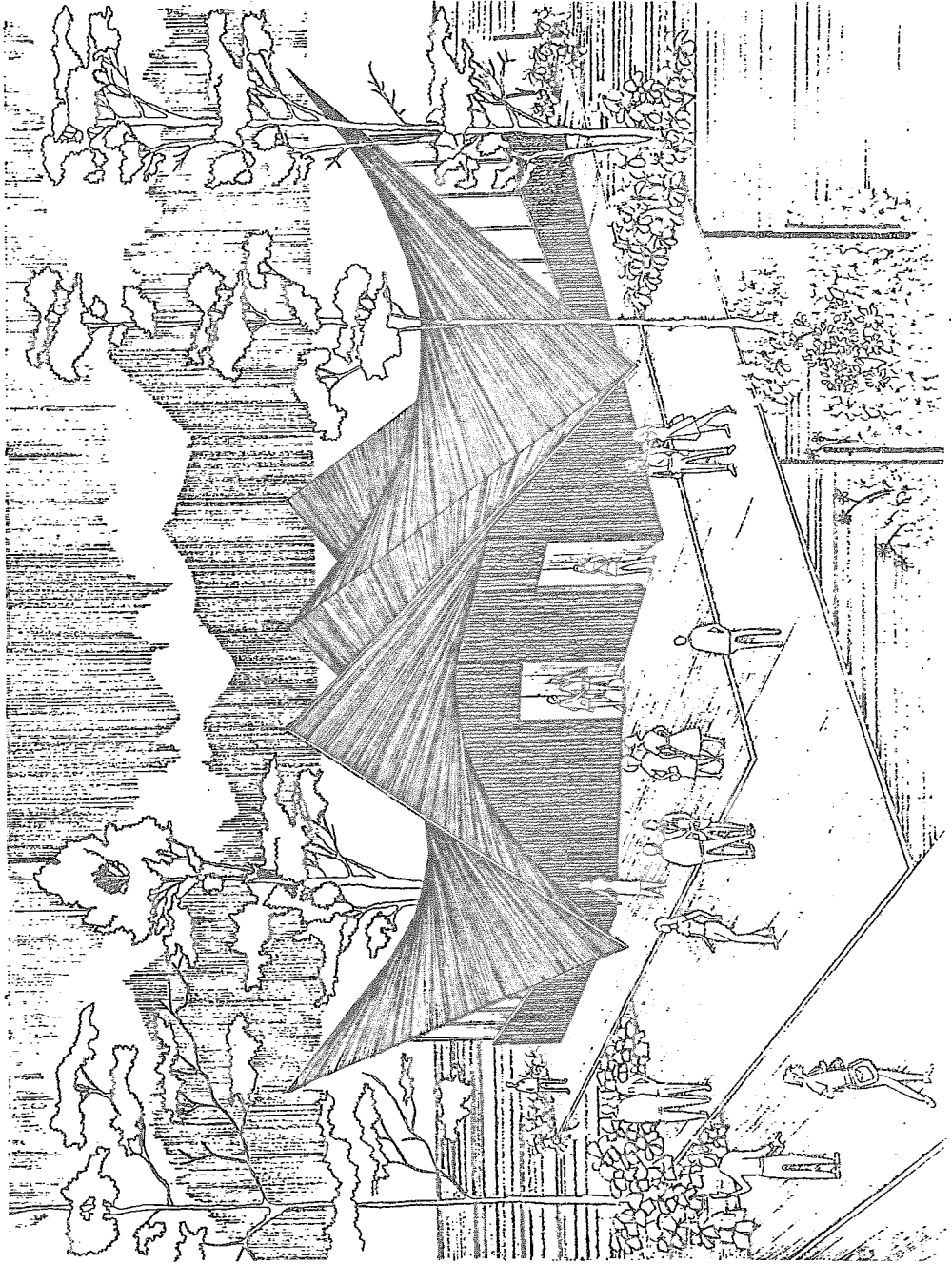
TESIS PROFESIONAL

EL PARABOLOIDE HIPERBOLICO Y SU

APLICACION AL DISEÑO ARQUITECTONICO

ENEF ACATLAN | ARQUITECTURA

MARIO ALBERTO RODRIGUEZ LOPEZ



BIBLIOGRAFÍA

- 1º ANALISIS, CALCULO Y DISEÑO DE LAS BOVEDAS DE CASCARA.
A. Olvera López Editorial CECSA
- 2º ANALISIS DE ESTRUCTURAS.
A. Olvera López Editorial CECSA.
- 3º ESTABILIDAD EN LAS CONSTRUCCIONES
Asp. Jose Creixell Editorial CECSA.
- 4º ESTRUCTURAS DE CANDELA
Colin Faber Editorial CECSA.
-
- 5º CASCARONES PARABOLICOS HIPERBOLICOS
Canals · Guerin Editorial LIMUSA.
- 6º PARABOLOIDES HIPERBOLICOS
Juan Antonio fonda
Eduardo fonda. Editorial LIMUSA.
- 7º GEOMETRIA ANALITICA
Lehman Editorial LIMUSA