

300615

6

2ej



UNIVERSIDAD LA SALLE

Incorporada a la U.N.A.M.

Escuela de Ingeniería

**SOLUCION DE LOS ESTADOS PLANOS DE LA
ELASTICIDAD LINEAL MEDIANTE EL METODO
DEL ELEMENTO FINITO**

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

T E S I S

Que para obtener el título de:

INGENIERO CIVIL

P r e s e n t a :

Ma. de la Gracia Barquero Díaz Barriga



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.	INTRODUCCION	1
1.1	Generalidades	1
1.2	Objetivos	2
2.	FORMULACION INTEGRAL PARA LA SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES	3
2.1	Métodos de diferencias finitas	4
2.2	Métodos variacionales	4
2.3	Métodos de los residuos pesados	6
2.3.1	Método de colocación	7
2.3.2	Método de subdominios	7
2.3.3	Método de Galerkin	7
2.4	Ejemplo	8
3.	ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA EL ESTADO PLANO DE ESFUERZOS Y SU SOLUCION POR EL MEF	17
3.1	Ecuaciones de equilibrio del medio continuo	18
3.2	Ecuaciones de forma	25
3.3	Secuencia del método del elemento finito	29
4.	SOLUCION DE ECUACIONES LINEALES	41
4.1	Método de Gauss-Crout	42
4.2	Arreglos para almacenamiento en memoria	45
4.3	Solución de ecuaciones lineales empleando arreglos unidimensionales	48
5.	PROGRAMA DE COMPUTADORA	60
5.1	TESO1	63
5.2	TESO2	64
5.3	TESO3	65
5.4	TESO4	66
5.5	Manual de usuario	66
6.	EJEMPLO DE APLICACION	72
7.	CONCLUSIONES	79
8.	REFERENCIAS	81
	APENDICE A. LISTADO DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA	82

1. INTRODUCCION

1.1 Generalidades

Para estudiar el comportamiento de estructuras ante diferentes condiciones de carga, en la etapa de diseño, es necesario idealizar a las estructuras mediante modelos estructurales, ya sea numéricos o experimentales. El método del elemento finito es un método aproximado para resolver las ecuaciones de equilibrio esfuerzo-deformación para análisis de esfuerzos de medios continuos. Para emplear este método se requiere una computadora con gran capacidad de memoria central y periférica.

Actualmente con el desarrollo de las computadoras personales se presenta la opción de plantear la solución teniendo como herramienta de cálculo una microcomputadora.

1.2 Objetivos

Los objetivos del presente trabajo se pueden resumir en los siguientes:

- a) Desarrollar un programa de computadora para la solución del estado plano de esfuerzos en forma eficiente para una micro computadora.
- b) Conocer la magnitud de los problemas que es posible analizar para una configuración mínima en una computadora personal.
- c) Desarrollo de algoritmos eficientes en la solución de ecuaciones lineales.

2. FORMULACION INTEGRAL PARA LA SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Un camino para la solución de problemas físicos gobernados por ecuaciones diferenciales es obtener la solución analítica, pero en muchas situaciones ésta es difícil de obtener, ya que la región que se considera es irregular y esto significa que matemáticamente es imposible describir su frontera.

Los métodos numéricos pueden ser usados para obtener una solución aproximada cuando la solución analítica no puede ser desarrollada. Todas las soluciones numéricas dan valores en puntos discretos de un conjunto de parámetros independientes.

El procedimiento de solución completa es repetir el cálculo con el cambio en cada paso de esos parámetros.

Existen varios procedimientos para obtener la solución numérica de una ecuación diferencial.

Estos métodos se pueden separar en tres grupos básicos:

1. Métodos de diferencias finitas.
2. Métodos variacionales.
3. Métodos de los residuos pesados.

2.1 Método de diferencias finitas.

El método de diferencias finitas aproxima las derivadas de la ecuación diferencial usando ecuaciones en diferencias. Este método es usado generalmente cuando la frontera de la región a estudiar es paralela a los ejes coordenados. Estos métodos no son recomendables cuando la frontera es curva o irregular.

2.2 Métodos variacionales.

La aproximación variacional involucra la integral de una función que produce un nuevo número. La función que produce un número muy bajo tiene la propiedad adicional de satisfacer una ecuación diferencial específica. Para clarificar este concepto sea la integral

$$\pi = \int_0^1 \left[\frac{D}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - Qy \right] dx \quad (2.1)$$

El valor numérico de π puede ser calculado dando una ecuación específica.

$$y = f(x)$$

El cálculo variacional demuestra que una ecuación particular

$$y = g(x)$$

el cual tiene en su límite un valor numérico bajo de π , es la solución de la ecuación diferencial

$$D \frac{d^2y}{dx^2} + Q = 0 \quad (2.2)$$

con las condiciones frontera

$$y(0) = y$$

$$y(H) = y$$

El proceso puede ser reversible. Dando una ecuación diferencial se puede obtener una solución aproximada al sustituir diferentes funciones prueba dentro de la funcional, si éstas dan un valor mínimo de π .

Los métodos variacionales son la base para la formulación del método del elemento finito, pero su desventaja es que no es aplicable a cualquier ecuación diferencial que contenga térmi-

nos en su primera derivada.

2.3 Métodos de los residuos pesados.

Los métodos de los residuos pesados involucran una integral. En estos métodos una solución aproximada se sustituye en la ecuación diferencial. Dado que esta solución aproximada no satisface la ecuación, éste resulta ser un término residual. Supóngase que

$$y = h(x)$$

es una solución aproximada de la ecuación diferencial al sustituir se tiene

$$D \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + 0 = R(x) \neq 0 \quad (2.3)$$

donde $y = h(x)$ no satisface la ecuación. El método de los residuos pesados requiere

$$\int_a^b W_1(x) R(x) dx = 0 \quad (2.4)$$

Se requiere que el residual $R(x)$ sea multiplicado por una función de peso $W_1(x)$ igual al número de incógnitas en la solución aproximada.

Dependiendo del tipo de función de peso $W_1(x)$ a escoger existen

varios métodos, los más conocidos son:

2.3.1 Método de colocación.

La función de peso es $W_i(x) = \delta(x - X_i)$. El escoger esta función es lo equivalente a considerar que el residual vale cero en puntos específicos. El número de puntos a escoger es igual al número de incógnitas en la solución aproximada.

2.3.2 Método de subdominios.

La función de peso es unitaria $W_i(x) = 1$ sobre una determinada región, esto equivale a hacer que, en la integral, el residual sea cero para un intervalo de la región. El número de intervalos será igual a número de incógnitas en la solución aproximada.

2.3.3 Método de Galerkin.

Utiliza las mismas funciones de la ecuación aproximada como funciones de peso $W_i(x)$.

2.3.4 Método de los mínimos cuadrados.

Este método utiliza el residual como una función de peso y obtiene un nuevo error definido como

$$F_r = \int_0^L [R(x)]^2 dx \quad (2.5)$$

Este error debe ser mínimo con respecto a las incógnitas en la solución aproximada.

El método de los mínimos cuadrados se puede utilizar para la formulación de la solución por el método del elemento finito.

El método variacional y el de los residuos pesados consideran una integral, por lo que se conocen como formulaciones integrales. El tipo de solución numérica basada en formulaciones integrales se utiliza de apoyo para formular la solución por el método de Galerkin.

2.4 Ejemplo.

Para ilustrar el uso de los métodos integrales para la obtención de una solución aproximada de una ecuación diferencial que modela un problema físico, se considera el siguiente ejemplo.

Sea una viga simplemente apoyada sujeta a momentos concentrados en cada extremo como se muestra en la fig 2.1.

La ecuación diferencial es

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} - M(x) = 0 \quad (2.6)$$

sus condiciones frontera

$$y(0) = 0 ; \quad y(H) = 0 \quad (2.7)$$

en donde

E = módulo de elasticidad

I = momento de inercia

M(x) = es el momento flexionante

La solución exacta de la ecuación diferencial es

$$y(x) = \frac{M_0 x}{2EI} (x - H) \quad (2.8)$$

Método variacional.

La formulación integral de la ecuación diferencial es

$$\pi = \int_0^H \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + M_0 y \right] dx \quad (2.9)$$

Se propone una solución aproximada de la deflexión la cual es

$$y(x) = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{H} \quad (2.10)$$

donde A es un coeficiente indeterminado, esta solución puede ser aceptable porque satisface las condiciones frontera $y(0) = 0$ y $y(H) = 0$.

El valor de A debe ser una aproximación a la deflexión de la curva cuando π es mínimo, al evaluar A, debe ser escrito en función de A y minimizar con respecto a A.

Al derivar la ec 2.10 con respecto a π se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A\pi}{H} \cos \frac{\pi x}{H} \quad (2.11)$$

al sustituir la ec 2.11 en 2.9

$$\pi = \int_0^H \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{A\pi}{H} \cos \frac{\pi x}{H} \right)^2 + M_0 A \sin \frac{\pi x}{H} \right] dx \quad (2.12)$$

al resolver la integral

$$\pi = \left(\frac{EI\pi^2}{4H} \right) A^2 + \left(\frac{2M_0 H}{\pi} A \right) \quad (2.13)$$

al minimizar la función (ec 2.13) con respecto a A

$$\frac{\partial \pi}{\partial A} = 2 \left(\frac{EI\pi^2}{4H} \right) A + \frac{2M_0 H}{\pi} = 0 \quad (2.14)$$

al despejar

$$A = - \frac{4M_0 H^2}{\pi^3 EI} \quad (2.15)$$

la solución aproximada es

$$y(x) = - \frac{4M_0 H^2}{\pi^3 EI} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{H} \quad (2.16)$$

Método de colocación.

Se requiere que la ecuación residual para obtener la solución aproximada sea cero en algunos puntos para obtener el valor de A.

Al sustituir una solución aproximada (ec 2.10) en la ecuación diferencial (ec 2.6) se define el residuo

$$R(x) = - EI \frac{A\pi^2}{H^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{H} - M_0 \quad (2.17)$$

donde

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - A \frac{\pi^2}{H^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{H} \quad (2.18)$$

existe un coeficiente indeterminado A, por lo tanto debe haber un punto donde el residual R(x) vale cero, al seleccionar $x = H/2$ se tiene

$$R\left(\frac{H}{2}\right) = - EI \frac{A\pi^2}{H^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - M_0 = 0$$

Al despejar

$$A = - \frac{M_0 H^2}{EI \pi^2}$$

Se puede escoger otro punto diferente y obtener otra solución aproximada.

Método de los subdominios.

El método requiere que $\int R(x)dx = 0$ se cumpla en tantos intervalos como coeficientes indeterminados existan. Se debe escoger que tan grande será el intervalo que se va a considerar, en nuestro ejemplo hay únicamente un coeficiente desconocido por lo tanto el intervalo puede ser de $[0, H]$ se tiene

$$\int_0^H R(x)dx = \int_0^H \left[-EI \frac{A\pi^2}{H^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{H} - M_0 \right] dx = 0$$

al efectuar la integración

$$-\left(\frac{2EI\pi}{H} \right) A - M_0 H = 0$$

$$A = - \frac{M_0 H^2}{2\pi EI}$$

la solución aproximada es

$$y(x) = - \frac{M_0 H^2}{2\pi EI} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{H}$$

Método de Galerkin.

Cuando se usa el método de Galerkin, la integral $\int W_1(x)R(x)dx$ los valores de $W_1(x)$ son las mismas funciones que las que utili

zan en la solución aproximada, en este ejemplo hay únicamente una función de peso $W_1(x) = \text{sen } \frac{\pi x}{H}$ por lo que la ecuación residual en forma integral queda

$$\int_0^H \text{sen } \frac{\pi x}{H} \left[-EI \frac{A\pi^2}{H^2} \text{sen } \frac{\pi x}{H} - M_0 \right] dx = 0$$

al integrar

$$- \frac{EI\pi^2 A}{2H} + \frac{2M_0 H}{\pi} = 0$$

al despejar A de la ecuación anterior

$$A = \frac{4 M_0 H^2}{\pi^3 EI}$$

y la solución aproximada es

$$y(x) = - \frac{4 M_0 H^2}{\pi^3 EI} \text{sen} \frac{\pi x}{H}$$

Esta solución es igual a la obtenida usando un método variacional.

Método de los mínimos cuadrados.

Un nuevo error $E_r = \int [R(x)]^2 dx$

es formado cuando el método de los mínimos cuadrados al sustituir la ecuación residual

$$E_r = \int_0^H \left[-\frac{EI\pi^2}{H^2} A \sin \frac{\pi x}{H} - M_0 \right]^2 dx$$

al integrar

$$E_r = \frac{\Lambda^2 H}{2} \left(\frac{EI\pi^2}{H^2} \right)^2 + \frac{AM_0 EI\pi}{H} A + M_0^2 H$$

el error es mínimo con respecto a A

$$\frac{\partial E_r}{\partial A} = AH \left(\frac{EI\pi^2}{H^2} \right)^2 + \frac{4M_0 EI\pi}{H} = 0$$

Al despejar A y sustituir en la solución aproximada

$$y(x) = -\frac{4M_0 H^2}{\pi^3 EI} \sin \frac{\pi x}{H}$$

es la misma solución obtenida por los métodos variacionales y de Galerkin.

Con base en los métodos anteriores es posible hacer la formulación para la obtención de las ecuaciones de solución por el método del elemento finito. Por el MEP se puede plantear la solución para problemas de equilibrio, de eigenvalores y de propagación; al considerar el tipo de solución a partir de los métodos de los residuos pesados o de los métodos variacionales, en el capítulo siguiente se hace el planteamiento para ecuaciones de equilibrio de la elasticidad lineal para el análisis bidimensio

nal de esfuerzos de un continuo.

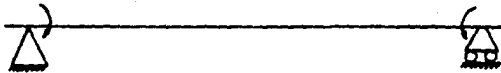


Fig 2.1 Esquema de la viga mencionada en el ejemplo

3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA EL ESTADO PLANO DE ESFUERZOS Y SU SOLUCION POR EL METODO DEL ELEMENTO FINITO.

El método del elemento finito en términos generales es un método para resolver ecuaciones diferenciales de problemas en la frontera o de valores en la frontera e iniciales.

En la mecánica estructural el método del elemento finito es una extensión de los métodos matriciales (estructuras esqueléticas) para analizar medios continuos, el cual se discretiza como una estructura formada por un número de elementos interconectados entre sí en los puntos nodales como se indica en la fig 3.1, este método resulta muy útil cuando la geometría del continuo es bastante completa.

Para plantear las ecuaciones de equilibrio de la teoría de la

elasticidad (estado plano de esfuerzos) y proponer su solución por el método del elemento finito, se pueden seguir dos caminos, uno es mediante el método de los residuos pesados en donde se demuestra que el principio del trabajo virtual es una forma débil de las ecuaciones de equilibrio y mediante una formulación de Galerkin se obtienen las ecuaciones del método del elemento finito que se utilizan para la solución, otro criterio es por los métodos variacionales que a continuación se expone, en ambos caminos se llega a las mismas ecuaciones.

3.1 Ecuaciones de equilibrio del medio continuo

En la teoría de la elasticidad lineal la ecuación variacional viene dada por el principio del trabajo virtual, el cual se obtiene de las ecuaciones de Cauchy del movimiento, en forma esquemática el enunciado del principio es:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{FUERZAS} & & \text{FUERZAS DE} & & \text{FUERZAS DE} & & \text{FUERZAS DE} \\ \text{INTERNAS} & + & \text{INERCIA} & = & \text{SUPERFICIE} & + & \text{CUERPO} \end{array}$$

esto en notación matricial es:

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \delta \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{\dot{U}}} d\Omega = \oint_{\Gamma} \delta \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{\sigma}}_{(n)} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \delta \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{f}} d\Omega \quad (3.1)$$

en donde:

Ω = punto interior de la estructura

Γ = condiciones frontera

δ = primera variación que opera sobre las cantidades que proceden

\underline{Y}_ω = componentes de las cargas que por unidad de superficie actúan

sobre la frontera del cuerpo:

\underline{f} = vector de cargas de cuerpo

$\underline{\varepsilon}$ = componentes del tensor de deformación

\underline{T} = componentes del tensor de esfuerzos

\underline{U} = vector de desplazamientos

ρ = densidad de masa por unidad de volumen

Al considerar una solución aproximada del campo de desplazamientos

$$\underline{U} \approx \underline{\hat{U}} \quad (3.2)$$

la solución aproximada se propone mediante funciones de forma y se tiene:

$$\underline{U} \approx \underline{\hat{U}} = \underline{N} \underline{\hat{U}} \quad (3.3)$$

en donde $\underline{\underline{U}}$ resultan los desplazamientos que se van a obtener en la solución y $\underline{\underline{N}}$ son las funciones de forma. De acuerdo a la teoría de la elasticidad se pueden definir las siguientes ecuaciones:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{U}} \quad (3.4)$$

$$\underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\epsilon}} \quad (3.5)$$

en donde $\underline{\underline{\epsilon}}$ y $\underline{\underline{\gamma}}$ están definidas en la ec 3.1 y $\underline{\underline{L}}$ es una matriz de operadores (ec 3.6) y D es la matriz de coeficientes elásticos para el caso de estado plano de esfuerzos (ec 3.7)

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} (1-\nu) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

al considerar la solución aproximada se sustituye la ec 3.3 en las ecs 3.4 y 3.5

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{N} \underline{\hat{U}} \quad (3.8)$$

$$\underline{r} = \underline{D} \underline{L} \underline{N} \underline{\hat{U}} \quad (3.9)$$

se define

$$\underline{B} = \underline{L} \underline{N} \quad (3.10)$$

al sustituir la ec 3.10 en las ecs 3.8 y 3.9

$$\underline{r} = \underline{D} \underline{B} \underline{\hat{U}} \quad (3.11)$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{\hat{U}} \quad (3.12)$$

al considerar la primera variación con los desplazamientos aproximados se tiene:

$$\delta \underline{U} \approx \delta \underline{\bar{U}} = \underline{N} \delta \underline{\hat{U}} \quad (3.13)$$

$$\delta \underline{U}^T \approx \delta \underline{\bar{U}}^T = \delta \underline{\hat{U}}^T \underline{N}^T \quad (3.14)$$

al sustituir las ecs 3.11 a 3.14 en 3.1 se tiene:

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\hat{U}}^T \underline{B} \underline{D} \underline{B} \, d\Omega \, \underline{\hat{U}} + \int_{\Omega} \mathbf{e} \, \delta \underline{\hat{U}}^T \underline{N}^T \underline{N} \, \underline{\hat{U}} \, d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\hat{U}}^T \underline{N}^T \underline{r}_{\text{ext}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{e} \, \delta \underline{\hat{U}}^T \underline{N}^T \underline{f} \, d\Omega \quad (3.15)$$

al factorizar y simplificar

$$\int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d\Omega \, \underline{\dot{U}} + \int_{\Omega} \rho \underline{N}^T \underline{N} \, \underline{\ddot{U}} = \int_{\Gamma} \underline{N}^T \underline{T}_{(n)} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{f} \, d\Omega \quad (3.16)$$

la ec 3.16 es válida para toda la región del continuo ($\Omega + \Gamma$), pero al utilizar el método del elemento finito se tienen las siguientes hipótesis:

- a) El medio continuo se divide en un número finito de regiones, y a cada una de estas regiones se le llama elemento finito.
- b) Los elementos finitos se supone están intercomunicados en un número finito de puntos nodales situados en las fronteras de los mismos y los desplazamientos de los puntos nodales son las incógnitas básicas del problema.
- c) Se define en forma única el campo de desplazamientos en cualquier punto del elemento finito en función de los desplazamientos de los puntos nodales.
- d) Conocidos los desplazamientos se pueden definir en forma única, las deformaciones y los esfuerzos.

Según las hipótesis anteriores la región $\Omega + \Gamma$ se divide en elementos finitos, esto es:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{\text{nelem}} \Omega_i^e \quad \Gamma = \sum_{i=1}^{\text{nelem}} \Gamma_i^e \quad (3.17)$$

nelem = N° de elementos

y la ec 3.16 se aplica en forma aislada a todos los elementos finitos por lo que se tiene:

$$\int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d\Omega^e \underline{U}^e + \int_{\Omega^e} \underline{e} \underline{N}^{eT} \underline{N}^e \ddot{\underline{U}} \, d\Omega^e =$$

$$\oint_{\Gamma^e} \underline{N}^{eT} \underline{T}_{(n)} \, d\Gamma^e + \int_{\Omega^e} \underline{N}^{eT} \underline{f} \, d\Omega^e \quad (3.18)$$

Ω^e = región de cada elemento
 Γ^e = frontera de cada elemento

en donde:

$$\underline{k}^e = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d\Omega^e = \text{matriz de rigidez del elemento} \quad (3.19)$$

$$\underline{M}^e = \int_{\Omega^e} \underline{e} \underline{N}^{eT} \underline{N}^e \, d\Omega^e = \text{matriz de masas del elemento} \quad (3.20)$$

$$\underline{f}_s^e = \oint_{\Gamma^e} \underline{N}^{eT} \underline{T}_{(n)} \, d\Gamma^e = \text{vector de fuerzas de superficie del elemento} \quad (3.21)$$

$$\underline{f}_c^e = \int_{\Omega^e} \underline{N}^{eT} \underline{f} \, d\Omega^e = \text{vector de fuerzas de cuerpo del elemento} \quad (3.22)$$

al sustituir las ecs de la 3.19 a la 3.22 en 3.18 se obtiene el modelo discreto de cada elemento, esto es:

$$\underline{k}^e \underline{U}^e + \underline{M}^e \ddot{\underline{U}}^e = \underline{f}_s^e + \underline{f}_c^e \quad (3.23)$$

para el caso en que únicamente las fuerzas que actúan son independientes del tiempo

$$\ddot{\underline{U}}^e = 0 \quad (3.24)$$

y la ec 3.23 para equilibrio estático queda:

$$\underline{k}^e \underline{U}^e = \underline{f}_s^e + \underline{f}_c^e \quad (3.25)$$

en lo sucesivo el desplazamiento $\tilde{\underline{U}}^e$ se escribe \underline{U}^e para la solución, una vez definida la ecuación de equilibrio de cada elemento (ec 3.27), estos elementos aislados se ensamblan para obtener las ecuaciones de equilibrio del medio continuo global la cual es:

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{P} \quad (3.26)$$

en donde:

$$\underline{K} = \sum_{i=1}^{nelem} \underline{k}_i^e = \text{matriz de rigideces del continuo} \quad (3.27)$$

$$\underline{U} = \text{desplazamientos de toda la estructura en los puntos nodales} \quad (3.28)$$

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^{nelem} (\underline{f}_{s_i}^e + \underline{f}_{c_i}^e) = \text{vector de cargas de toda la estructura} \quad (3.29)$$

La ec 3.26 representa un sistema de ecuaciones algebraicas lineales simétrico no homogénea en donde los desplazamientos son las incógnitas y cuya solución se describe en el capítulo 4.

3.2 Funciones de forma

En la solución aproximada considerada en las ecuaciones de equilibrio (ecs 3.19 a la 3.22) se deben definir las funciones de forma, las cuales dependen de los siguientes factores:

- a) Geometría del dominio global.- Esto se refiere al tipo de espacio donde se va a integrar las ecuaciones, puede ser unidimensional, bidimensional y tridimensional.
- b) El grado de aproximación deseado en la solución.- Generalmente las funciones de forma son de interpolación, las cuales son polinomios con funciones exponenciales o trigonométricas. Si son polinomios lineales, únicamente se requieren los puntos nodales en las esquinas del elemento, si se utilizan polinomios cuadráticos se deben adicionar puntos nodales en la frontera del elemento.
- c) Facilidad de integración sobre el dominio del elemento.- La función de forma debe permitir la representación de cualquier forma lineal, de manera que se satisfaga el criterio de deformación constante.

d) Las incógnitas deben presentar continuidad entre elementos.

Existen varias familias de funciones de forma que cumplen con las características anteriores (polinomial, lagrange, etc) pero al considerar un grado de aproximación aceptable, se utiliza el elemento rectangular cuadrilátero de 4 puntos de la familia "serendipity", en la fig 3.2 se presenta este elemento con sus funciones de forma, la obtención de estas funciones de forma fueron deducidas por mera observación de tal manera que al sustituir en la función asociada al nodo su correspondiente coordenada su valor sea 1 y si en esa misma función se sustituye la coordenada de los otros puntos del elemento su valor es cero.

Una vez definidas las funciones de forma, existe la posibilidad de mapear en dos sistemas de referencia elementos distorsionados (ver fig 3.3) y esto es posible cuando existe una relación biunívoca entre coordenadas cartesianas y curvilíneas, un criterio de hacer estas transformaciones es mediante las funciones de forma. En ese caso existen dos grupos de funciones de forma, unas para definir la geometría y por hacer el mapeo de un sistema de referencia a otro y otras a para hacer la interpolación del elemento. Esto en forma esquemática se puede escribir.

Aproximación

Mapeo

$$\underline{U} = \underline{N} \underline{U}^e$$

$$\underline{X} = \underline{N}' \underline{\gamma}$$

$$\underline{y} = \underline{N}' \underline{\eta}$$

para n puntos nodales

sistema de referencia x - y
sistema de referencia $\gamma - \eta$
para m puntos nodales.

cuando se hacen coincidir los mismos puntos nodales y las mismas funciones de forma para la aproximación y el mapeo, a estos elementos se les conoce con el nombre de elementos isoparamétricos.

Al utilizar elementos isoparamétricos cuadriláteros de la familia "serendipity", se deben definir las ecuaciones que efectúan ese mapeo y su influencia en las ecuaciones de equilibrio.

Las ecs 3.19 a la 3.22 están referenciadas con respecto a un sistema local γ, η para efectuar la transformación de estas ecuaciones al sistema de referencia x - y se considera la ec 3.30 para el cambio de coordenadas

$$x_m = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k + N_l x_l$$

$$y_m = N_i y_i + N_j y_j + N_k y_k + N_l y_l \quad (3.30)$$

$$m = i, j, k, l$$

en donde las funciones de forma están referenciadas al sistema

ξ, η , la ec 3.30 nos permite obtener los puntos en la referencia $x - y$ donde se aplican los esfuerzos al resolver las ecuaciones de equilibrio en el sistema de referencia ξ, η .

Existe otra transformación a considerar, son las derivadas de las funciones de forma, las cuales se deben expresar en función de coordenadas locales ξ, η y cambiar convenientemente los límites de la integración, esta relación es:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_m}{\partial x} \\ \\ \\ \frac{\partial N_m}{\partial y} \end{Bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \\ \\ \\ \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

$m = i, j, k, l$

en donde:

$$\underline{J}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} & -\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.32)$$

definida la relación de transformación (ec 3.31 a 3.32) se pueden expresar las ecs 3.19 y 3.22 en función de coordenadas loca

les y se tiene:

$$\underline{k}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J(\gamma, \eta) \underline{B}^T(\gamma, \eta) \underline{D} \underline{B}(\gamma, \eta) d\gamma d\eta \quad (3.33)$$

$$\underline{f}_c^e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e J(\gamma, \eta) \underline{N}^T(\gamma, \eta) \underline{f} d\gamma d\eta \quad (3.34)$$

$$\underline{e} \underline{f} = pv \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \text{sen } \alpha \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

pv = peso volumétrico del material

α = dirección de la gravedad en el sistema de referencia global

Para efectuar la integración de las ecs 3.33, 3.34 se utiliza la cuadratura gaussiana por lo que las ecs 3.33 y 3.34 quedan:

$$\underline{k}^e = t \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 H_m H_n J(\gamma_m, \eta_n) \underline{B}^T(\gamma_m, \eta_n) \underline{D} \underline{B}(\gamma_m, \eta_n) \quad (3.36)$$

$$\underline{f}_c^e = t \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 H_m H_n J(\gamma_m, \eta_n) \underline{N}^T(\gamma_m, \eta_n) \underline{e} \underline{f} \quad (3.37)$$

Una vez definidas las ecuaciones a utilizar se menciona la metodología a seguir para obtener la solución.

3.3 Metodología del elemento finito.

Supóngase una estructura que se va a analizar por los estados planos de esfuerzo por lo que se utiliza un dominio bidimensional con elemento isoparamétrico lineal y se llevan a cabo los

siguientes pasos:

1. Se divide el continuo en un número finito de regiones o elementos, por lo que se procede a elaborar una malla de la estructura formada por elementos cuadriláteros (de cuatro puntos) y puntos nodales, cada punto nodal admite dos grados de libertad, un desplazamiento en la dirección "x" y un desplazamiento en la dirección "y" por lo que cada elemento está compuesto de 8 desplazamientos según se indica en la fig 3.4.
2. Una vez definida la malla se numeran los nodos y los elementos en un sistema de referencia cartesiano global, se obtienen las coordenadas de cada punto nodal con sus restricciones frontera, esto significa que el punto nodal puede tener desplazamiento libre o restringido en alguna de sus componentes.
3. Se obtiene la matriz de rigideces de cada elemento con la ec 3.36 con los valores correspondientes según los datos de cada elemento como son el tipo de material y coordenadas.
4. Se obtiene el vector de cargas de cada elemento, según la discretización, únicamente se aceptan cargas en los nodos, y cada uno tendrá dos componentes F_{x_i} y F_{y_i} donde i es el número de nodo, esto significa que cada elemento tendrá un vector de cargas de 8 valores como se indica en la fig 3.5.

5. En el caso de considerar las fuerzas de cuerpo, éstas se calculan con la ec 3.37.

6. Se procede al ensamble de la matriz de rigideces de la estructura. Definida la matriz de rigideces de cada elemento (matriz de 8 x 8), sus componentes ocupan una localidad en la matriz de rigideces global según el desplazamiento al que está asociado, en nodos donde son comunes a dos elementos se sumarán en la misma localidad de la matriz de rigideces de la estructura, la contribución de cada elemento asociado a ese desplazamiento. En forma esquemática se presenta un ejemplo en la fig 3.6. La forma de ensamble mediante el uso del indicador de ecuación para el programa de computadora se analiza en el capítulo 4.

7. El ensamble del vector de cargas de la estructura consta del ensamble de las fuerzas de cuerpo y de las fuerzas de superficie. Las primeras se ensamblan en forma análoga a la matriz de rigideces en forma esquemática se presentan en la fig 3.7 y las fuerzas que se aplican en los nodos según el desplazamiento asociado ocupan una localidad en P, en la fig 3.8 se presenta en forma esquemática la adición de estos elementos a P.

8. Con la matriz de rigideces de la estructura y el vector de cargas se plantea la ecuación:

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{P}$$

(3.38)

en donde el vector \underline{U} son los desplazamientos. Esta ecuación representa un sistema de ecuaciones lineales algebraicas no homogéneas simétricas positivas definida y \underline{U} son las incógnitas, el método de solución es el de Gauss-Crout con arreglo en silueta. En el capítulo 4 se detalla la obtención de estos algoritmos.

9. Conocidos los desplazamientos de la estructura, se obtienen los correspondientes desplazamientos asociados a cada elemento y mediante la ec 3.9 se calculan los esfuerzos correspondientes.

Por la metodología de solución y el número de ecuaciones que se puede llegar a tener es necesario el uso de la computadora, el cual se pretende en este trabajo pueda ser procesado en una computadora personal con las restricciones que ésta impone, utilizando los aspectos numéricos que desde el punto de vista de computación controlan la eficiencia del programa así como la organización más adecuada para que resulte en lo posible lo más óptimo.

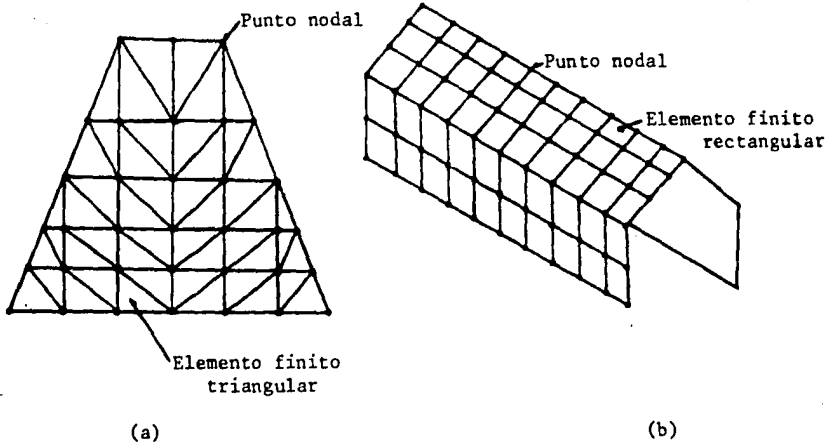
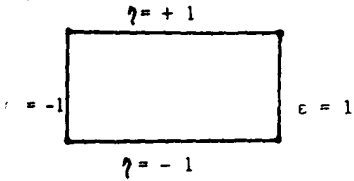


Fig 3.1 Idealización de un continuo por elemento finito

- a) sección de la cortina de una presa.
- b) cubierta



a) Lineal



b) Cuadrático



c) Cúbico



d) Cuártico

Fig 3.2 Funciones de forma para un elemento cuadrilátero de la familia "serendipity"

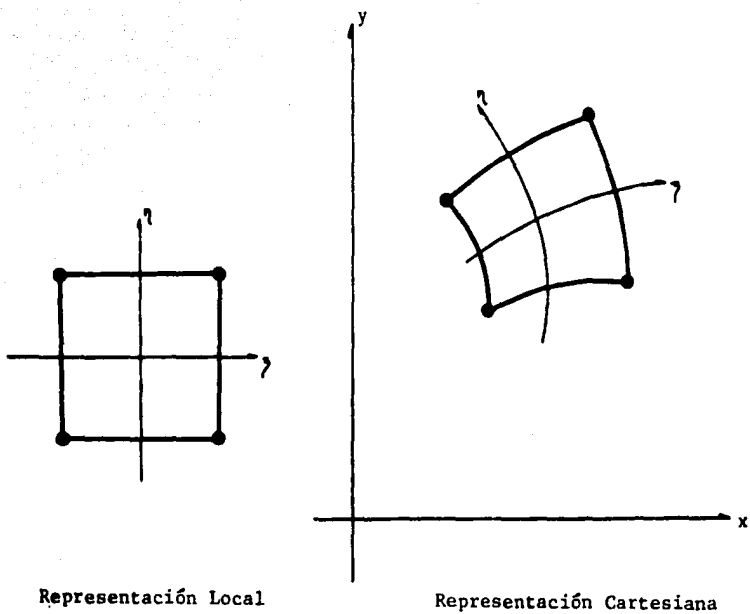


Fig 3.3 Transformación en dos dimensiones

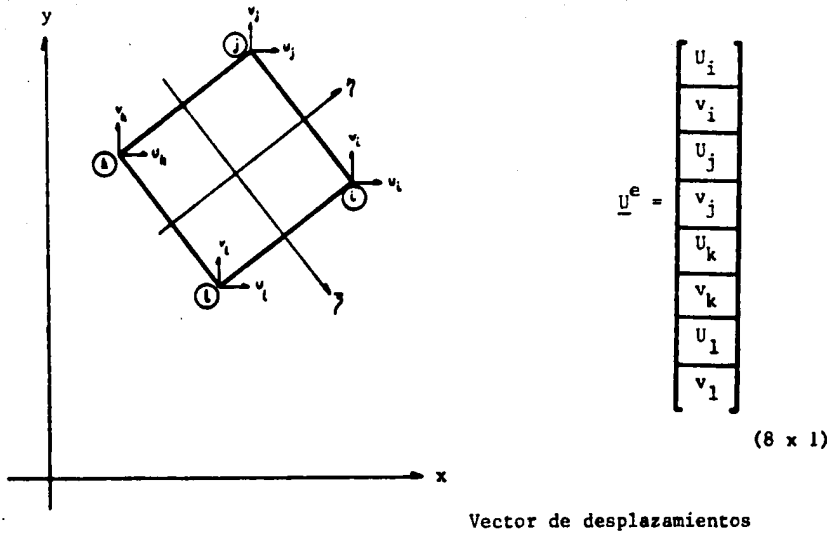


Fig 3.4 Representación del vector de desplazamientos para un elemento cuadrilátero

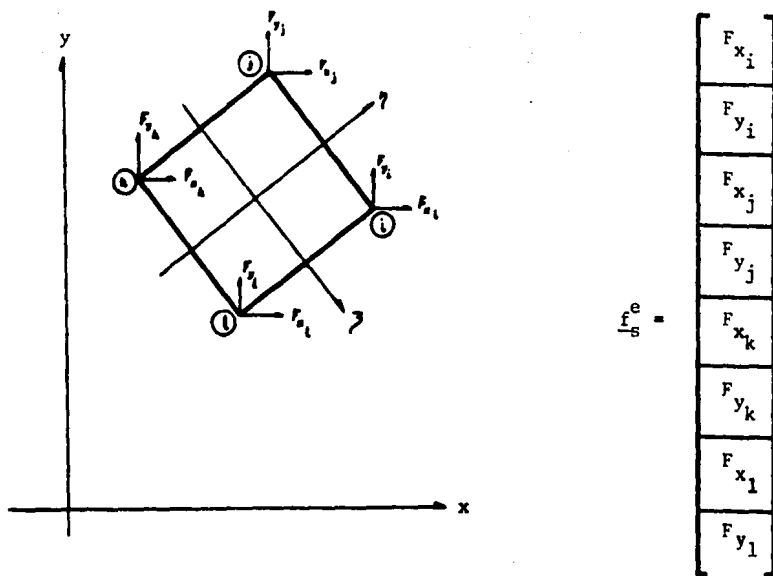
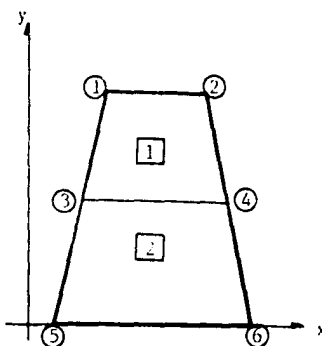


Fig 3.5 Representación de las cargas de superficie para un elemento cuadrilátero

ELEMENTO 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	Indicador de ecuación
1	X	X	X	X	X	X	X	X	
2	X	X	X	X	X	X	X	X	
3	X	X	X	X	X	X	X	X	
4	X	X	X	X	X	X	X	X	
5	X	X	X	X	X	X	X	X	
6	X	X	X	X	X	X	X	X	
7	X	X	X	X	X	X	X	X	
8	X	X	X	X	X	X	X	X	

Indicador de ecuación



	1	2	3	4	5	6	7	8	Indicador de ecuación
1	X	X	X	X	X	X	X	X	
2	X	X	X	X	X	X	X	X	
3	X	X	X	X	X	X	X	X	
4	X	X	X	X	X	X	X	X	
5	X	X	X	X	X+Y	X+Y	X+Y	X+Y	
6	X	X	X	X	X+Y	X+Y	X+Y	X+Y	
7	X	X	X	X	X+Y	X+Y	X+Y	X+Y	
8	X	X	X	X	X+Y	X+Y	X+Y	X+Y	

Indicador de ecuación

Matriz de rigideces de la estructura

Indicador de ecuación 5 6 7 8 0 0 0 0

nodos	1	2	3	4	5	6
despl. x	1	3	5	7	0	0
despl. y	2	4	6	8	0	0

5	Y	Y	Y	Y				
6	Y	Y	Y	Y				
7	Y	Y	Y	Y				
8	Y	Y	Y	Y				
0								
0								
0								
0								

Indicador de ecuación

ELEMENTO 2

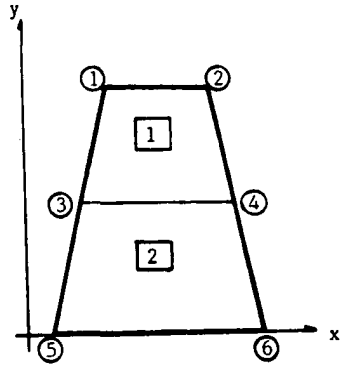
Fig 3.6 Ensamble de la matriz de rigideces

Nº de valor	F_{21}	F_{11}	Elemento
			1
			2

Elemento 1	Elemento 2
1	5
2	6
3	7
4	8
5	0
6	0
7	0
8	0

1	F_{11}	5	F_{12}
2	F_{21}	6	F_{22}
3	F_{31}	7	F_{32}
4	F_{41}	8	F_{42}
5	F_{51}	0	F_{52}
6	F_{61}	0	F_{62}
7	F_{71}	0	F_{72}
8	F_{81}	0	F_{82}

Indicador de ecuación	Indicador de ecuación
-----------------------	-----------------------

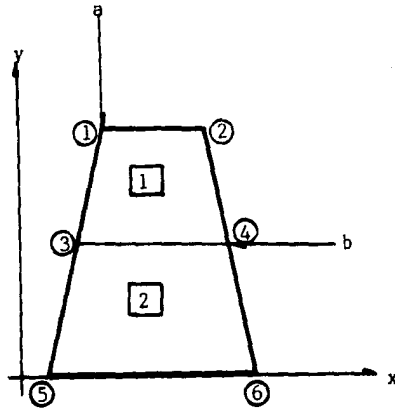


VECTOR DE FUERZAS DE CUERPO DE LA ESTRUCTURA

1	F_{11}
2	F_{21}
3	F_{31}
4	F_{41}
5	$F_{51} + F_{12}$
6	$F_{61} + F_{22}$
7	$F_{71} + F_{32}$
8	$F_{81} + F_{42}$

Indicador de ecuación

Fig 3.7 Ensamble del vector de fuerzas de cuerpo de cada elemento



$$\begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 F_{11} \\
 F_{21} \\
 F_{31} \\
 F_{41} \\
 F_{51} + F_{12} \\
 F_{61} + F_{22} \\
 F_{71} + F_{32} \\
 F_{81} + F_{42}
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 -a \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -b
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 F_{11} \\
 F_{21} - a \\
 F_{31} \\
 F_{41} \\
 F_{51} + F_{12} \\
 F_{61} + F_{22} \\
 F_{71} + F_{32} \\
 F_{81} + F_{42} - b
 \end{bmatrix}$$

Fuerzas de cuerpo **Fuerzas de superficie** **Vector \underline{P}**

Fig 3.8 Vector de cargas \underline{P} de la estructura

4. SOLUCION DE ECUACIONES LINEALES

Se tiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales no homogéneas de la forma:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b} \quad (4.1)$$

donde

\underline{A} = matriz de coeficientes cuadrada de $n \times n$

\underline{b} = vector de coeficientes independientes

\underline{x} = vector de incógnitas del sistema

estos sistemas en ocasiones son extremadamente grandes por lo que se requiere trabajarlos en una computadora y utilizar métodos de solución que resulten eficientes. Los métodos de solución más conocidos se agrupan en iterativos y directos, los métodos directos se basan en la eliminación gaussiana y los que

se adaptan a la computadora se denominan compactos, existen varios métodos directos compactos según las características de la matriz A de la ec 4.1 (general, positiva definida), para el presente trabajo se desarrolla el método de Gauss-Crout para matrices simétricas en versión eficiente.

4.1 Método de Gauss-Crout

Los métodos directos compactos se basan en un teorema del álgebra lineal el cual menciona que cualquier matriz A no singular, se puede descomponer en dos matrices triangulares, una superior U y una inferior L con la condición que una de ellas esté normalizada, esto es que los elementos de la diagonal principal sean iguales a la unidad, al apoyarse en este teorema se puede escribir:

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{U} \quad (4.2)$$

al sustituir la ec 4.2 en 4.1 se tiene:

$$\underline{L} \underline{U} \underline{x} = \underline{b} \quad (4.3)$$

si se define:

$$\underline{U} \underline{x} = \underline{y} \quad (4.4)$$

en donde "y" se le llama vector auxiliar, al sustituir la ec.

4.4 en 4.3 se tiene:

$$\underline{L} \underline{y} = \underline{b} \quad (4.5)$$

con las ecs 4.2, 4.4 y 4.5 se presenta el esquema general de la solución de ecuaciones lineales por los métodos compactos el cual consta de tres pasos:

- a) Obtención de las matrices triangulares \underline{L} y \underline{U} conocida \underline{A} (ec 4.2) a este proceso se le conoce con el nombre de triangulación.
- b) Obtención del vector \underline{y} conocida \underline{L} , \underline{b} (ec 4.5) a este proceso se le conoce con el nombre de sustitución hacia adelante.
- c) Obtención del vector incógnita \underline{x} conocida \underline{y} , \underline{U} (ec 4.4) a este proceso se le conoce con el nombre de sustitución hacia atrás.

Para el caso de matrices simétricas se tiene la condición:

$$\underline{A} = \underline{A}^T \quad (4.6)$$

al aplicar la ec 4.6 en 4.2 y mediante transformaciones se tienen las siguientes expresiones:

a) Triangulación:

$$\underline{A} = \underline{U}^T \underline{D} \underline{U} \quad (4.7)$$

\underline{U} = matriz triangular superior normalizada

\underline{D} = matriz diagonal

b) Sustitución hacia adelante

$$\underline{U}^T \underline{y} = \underline{b} \quad (4.8)$$

c) Sustitución hacia atrás

$$\underline{D} \underline{U} \underline{x} = \underline{y} \quad (4.9)$$

al desarrollar las ecs 4.7, 4.8 y 4.9 se obtienen los siguientes algoritmos para la solución del sistema.

a) Triangulación

$$A_{11} = D_{11} \quad (4.10)$$

Primer paso

$$G_{1j} = A_{1j} \quad j = 2, \dots, N \quad (4.11)$$

$$G_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} U_{ki} G_{kj} \quad i = 2, \dots, j-1 \quad (4.12)$$

$$j = 2, \dots, N$$

Segundo paso

$$U_{ij} = G_{ij}/D_{ii} \quad j = 2, \dots, N \quad (4.13)$$

$$i = 2, \dots, j-1$$

$$D_{jj} = A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} U_{kj} G_{kj} \quad j = 2, \dots, N \quad (4.14)$$

b) Sustitución hacia adelante

$$y_1 = b_1 \quad (4.15)$$

$$y_j = b_j - \sum_{k=1}^{j-1} U_{kj} y_k \quad j = 2, \dots, N \quad (4.16)$$

c) Sustitución hacia atrás

$$x_n = y_n/D_{nn} \quad (4.17)$$

$$x_j = (y_j - \sum_{k=j+1}^n D_{jk} U_{jk} x_k)/D_{jj} \quad (4.18)$$

$$j = n-1, \dots, 1$$

4.2 Arreglos para almacenamiento en memoria.

La matriz A de la ec 4.7 en principio da lugar a arreglos cuadra-

dos bidimensionales, pero existen otro tipo de arreglos que aprovechan la simetría y la disposición de los coeficientes de esta matriz para lograr un ahorro en el uso de la memoria central, así como en las operaciones asociadas a dichos algoritmos (ecs 4.10 a 4.17) este tipo de arreglos son los rectangulares (en banda) y los unidimensionales.

En los arreglos rectangulares (en banda) de acuerdo a la fig 4.1 los coeficientes no nulos de una matriz A se encuentran alojados a lo largo de una franja paralela a la diagonal principal limitada por el contorno de banda, y se puede almacenar en un arreglo rectangular con el número de columnas igual al ancho de banda según se muestra en la fig 4.2 y al escribirla por renglones y columnas se obtiene un arreglo rectangular mostrado en la fig 4.3.

Al observar la matriz A de la fig 4.1 y compararla con la fig 4.3 se observa que los algoritmos de solución (ecs 4.10 a 4.17) se modifican con una nueva localidad y las operaciones se limitan únicamente hasta el ancho de banda, en este arreglo como se indica en la fig 4.2 existen localidades en la banda que no forman parte de la matriz A y se toman en cuenta en el dimensionamiento del arreglo esto da lugar a un desperdicio de memoria al utilizar este tipo de arreglo.

El arreglo unidimensional almacena la matriz A en un vector como se observa en la fig 4.4 y cuenta con las siguientes caracte

ísticas:

- a) Se define un contorno de silueta que se forma a partir del primer elemento diferente de cero de cada columna que considera los coeficientes que se van a guardar en un arreglo unidimensional indicado por NEA (número de elementos de A).
- b) Para poder identificar los elementos del arreglo unidimensional con el arreglo cuadrado se necesitan los datos del vector MD formado con las localidades que ocupan los elementos de la diagonal principal. La equivalencia de un coeficiente en un arreglo cuadrado con un arreglo unidimensional es:

$$\text{arreglo cuadrado } \underline{A}_{ij} = \underline{A}_m \text{ arreglo unidimensional} \quad (4.19)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, N$$

$$m = i + \underline{MD}(j) - j$$

- c) En este arreglo no hay localidades desperdiciadas a diferencia de otros arreglos (en banda, cuadrado).

Desde el punto de vista de programación al comparar el arreglo unidimensional con el arreglo cuadrado y el arreglo en banda se puede analizar los siguientes puntos:

1. En lo referente a memoria central, al observar la matriz de la fig 4.1 en donde el arreglo cuadrado es de 324 localidades, en el bandeó es de 180 y el unidimensional es de 117.
2. Puesto que en el contorno de silueta se eliminan ceros que reflejan operaciones no realizadas, se puede afirmar que los arreglos unidimensionales conducen a un ahorro en el tiempo de procesamiento.

Esto da como conclusión que el arreglo unidimensional es el más eficiente de los arreglos vistos.

4.3 Solución de ecuaciones lineales empleando arreglos unidimensionales

Para modificar los algoritmos para arreglos unidimensionales se va a utilizar el vector auxiliar MD, debido a que conocido este dato es posible localizar cualquier elemento de la matriz A en la localidad del arreglo vector y se pueden definir los límites para efectuar la triangulación y sustitución del método de Gauss-Crout versión eficiente.

Al modificar los algoritmos de solución para arreglo unidimensional se tiene:

a) Triangulación

Con base en las ecs 4.10 a 4.14 y conocido el vector auxi-

liar MD

$$A_1 = D_1 \quad (4.20)$$

$$U_2 = A_2/D_1 \quad \forall MD(2) \neq 2 \quad (4.21)$$

$$U_3 = A_3 - D_1 U_2^2 \quad \forall MD(2) \neq 2 \quad (4.22)$$

$$U_f = A_f/D_p \quad (4.23)$$

$$j = 3, \dots, n$$

$$f = MD_{j-1} + 1$$

$$p = MD$$

$$\Theta = j + MD_{j-1} - MD_j + 1$$

$$\forall MD_j - MD_{j-1} - 1 = 0 = U_f = A_f$$

$$U_u = (A_u - \sum_{k=1}^{i-1} U_v D_{MD_k} U_w) / D_{MD_i} \quad (4.24)$$

$$j = 3, \dots, N$$

$$i = q, \dots, j-1$$

$$q = j - MD_j + MD_{j-1} + 2$$

$$t = i - MD_j + (MD_{j+1} + 1)$$

$$\Theta = j - MD_j + (MD_{j+1} + 1)$$

$$U = i - j + MD_j$$

$$V = k - t + MD_{i-1} + 1$$

$$W = k - \theta + MD_{j-1} + 1$$

$$\forall MD_j - MD_{j-1} - 1 = 0$$

$$U_u = A_u$$

$$\forall j - 1 \quad q$$

$$U_u = A_u$$

$$\forall MD_i - MD_{i-1} - 1 = 0$$

$$U_u = A_u$$

$$D_{MD_j} = A_{MD_j} \sum_{k=\theta}^{j-1} U_{MD_k} D_w \quad (4.25)$$

$$j = 3, \dots, n$$

$$\theta = j - MD_j + (MD_{j+1} + 1)$$

$$W = k - \theta + MD_{j-1} + 1$$

$$\forall MD_j - MD_{j-1} - 1 = 0$$

$$D_{MD_j} = A_{MD_j}$$

b) Sustitución hacia adelante.

Al tener las ecs 4.15 y 4.16 y el vector MD

$$y_1 = b_1 \quad (4.26)$$

$$y_j = b_j - \sum_{k=a}^d U_k y_c \quad (4.27)$$

$$j = 2, \dots, n$$

$$a = MD_{j-1} + 1$$

$$d = MD_{j-1}$$

$$c = k + j - MD_j$$

$$f_j = d - a$$

$$\forall f_j < 0$$

$$y_i = b_j$$

c) Sustitución hacia atrás

$$x_n = y_n / D_{nn}$$

$$x_j = (y_j - \sum_{k=j+1}^n D_{jk} U_{jk} x_k) / D_{jj} \quad (4.28)$$

$$j = n - 1, \dots, 1$$

La sustitución hacia atrás de la matriz A en arreglo unidimensional se presenta en forma matricial en la fig 4.5. Al efectuar las operaciones correspondientes y despejar los elementos del vector X (incógnitas) queda desarrollado como se presenta en la fig 4.6.

Al analizar la figura para este tipo de arreglo, resulta más sencillo efectuar esta sustitución por columnas e ir sumando a cada elemento del vector X según sea el renglón correspondiente, por lo que se debe definir para cada columna los límites para efectuar las operaciones correspondientes. En la columna 5 de la fig 4.6 no se efectúa operación alguna.

Al comparar la ec 4.1 con el modelo matemático a resolver (ec 3.26) se observa la similitud que existe, en donde la matriz \underline{A} representa la matriz de rigideces \underline{K} , el vector \underline{X} (incógnitas) representa el vector de desplazamientos \underline{U} y el vector \underline{b} es el vector de cargas \underline{P} . Debido a la metodología de la solución enunciada en el capítulo anterior, existen otras ventajas al utilizar el método de Gauss-Crout. En el proceso de triangulación únicamente se necesita la matriz de rigideces de la estructura, la cual es independiente de las cargas que se apliquen, esto significa que para cada estructura que se va a resolver, únicamente se debe hacer una vez el proceso de triangulación y con ésta se pueden hacer tantas sustituciones (paso b y c del esquema de los métodos compactos) con vectores de carga \underline{P} que se quiera resolver, ésta da un ahorro también en el tiempo de proceso en comparación con otros esquemas de solución, por otro lado la triangulación representa el ochenta y ocho por ciento del tiempo de proceso total, en tanto que las sustituciones únicamente el doce por ciento.

Otra ventaja que se presenta es el dimensionamiento debido no sólo al tipo de arreglo unidimensional sino también a la disposición de las operaciones, las localidades que se utilizan para almacenar la matriz de rigideces \underline{K} , también se utilizan para almacenar el vector de cargas \underline{P} se utiliza para guardar el vector auxiliar \underline{y} y posteriormente guardar el vector de desplazamientos \underline{U} , es decir el vector solución, por lo que únicamente se deben dimensionar la matriz de rigideces \underline{K} , el vector de cargas \underline{P}

y el vector MD.

En el programa de computadora que se realiza el proceso de solución de ecuaciones se divide en dos partes, una es la triangulación y la segunda la sustitución hacia adelante y hacia atrás.

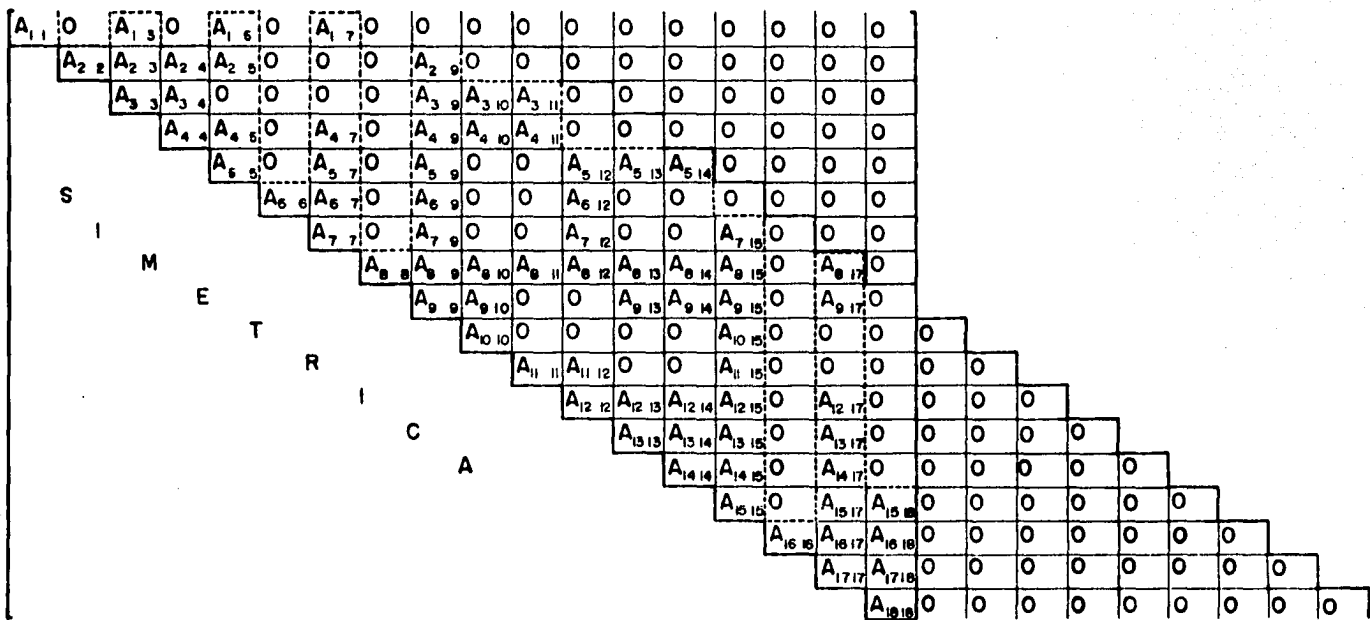


Fig 4.1 Representación esquemática de la matriz A , con diferentes tipos de almacenamientos

Ancho de banda = NBAN

$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$	$A_{1,4}$	$A_{1,5}$	$A_{1,6}$	$A_{1,7}$	$A_{1,8}$	$A_{1,9}$	$A_{1,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0							
	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	$A_{2,3}$	$A_{2,4}$	$A_{2,5}$	$A_{2,6}$	$A_{2,7}$	$A_{2,8}$	$A_{2,9}$	$A_{2,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0							
		$A_{3,1}$	$A_{3,2}$	$A_{3,3}$	$A_{3,4}$	$A_{3,5}$	$A_{3,6}$	$A_{3,7}$	$A_{3,8}$	$A_{3,9}$	$A_{3,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0							
			$A_{4,1}$	$A_{4,2}$	$A_{4,3}$	$A_{4,4}$	$A_{4,5}$	$A_{4,6}$	$A_{4,7}$	$A_{4,8}$	$A_{4,9}$	$A_{4,10}$	0	0	0	0	0	0	0							
				$A_{5,1}$	$A_{5,2}$	$A_{5,3}$	$A_{5,4}$	$A_{5,5}$	$A_{5,6}$	$A_{5,7}$	$A_{5,8}$	$A_{5,9}$	$A_{5,10}$	0	0	0	0	0	0							
					$A_{6,1}$	$A_{6,2}$	$A_{6,3}$	$A_{6,4}$	$A_{6,5}$	$A_{6,6}$	$A_{6,7}$	$A_{6,8}$	$A_{6,9}$	$A_{6,10}$	0	0	0	0	0							
						$A_{7,1}$	$A_{7,2}$	$A_{7,3}$	$A_{7,4}$	$A_{7,5}$	$A_{7,6}$	$A_{7,7}$	$A_{7,8}$	$A_{7,9}$	$A_{7,10}$	0	0	0	0							
							$A_{8,1}$	$A_{8,2}$	$A_{8,3}$	$A_{8,4}$	$A_{8,5}$	$A_{8,6}$	$A_{8,7}$	$A_{8,8}$	$A_{8,9}$	$A_{8,10}$	0	0	0							
								$A_{9,1}$	$A_{9,2}$	$A_{9,3}$	$A_{9,4}$	$A_{9,5}$	$A_{9,6}$	$A_{9,7}$	$A_{9,8}$	$A_{9,9}$	$A_{9,10}$	0	0							
									$A_{10,1}$	$A_{10,2}$	$A_{10,3}$	$A_{10,4}$	$A_{10,5}$	$A_{10,6}$	$A_{10,7}$	$A_{10,8}$	$A_{10,9}$	$A_{10,10}$	0							
										$A_{11,1}$	$A_{11,2}$	$A_{11,3}$	$A_{11,4}$	$A_{11,5}$	$A_{11,6}$	$A_{11,7}$	$A_{11,8}$	$A_{11,9}$	$A_{11,10}$							
											$A_{12,1}$	$A_{12,2}$	$A_{12,3}$	$A_{12,4}$	$A_{12,5}$	$A_{12,6}$	$A_{12,7}$	$A_{12,8}$	$A_{12,9}$	$A_{12,10}$						
												$A_{13,1}$	$A_{13,2}$	$A_{13,3}$	$A_{13,4}$	$A_{13,5}$	$A_{13,6}$	$A_{13,7}$	$A_{13,8}$	$A_{13,9}$	$A_{13,10}$					
													$A_{14,1}$	$A_{14,2}$	$A_{14,3}$	$A_{14,4}$	$A_{14,5}$	$A_{14,6}$	$A_{14,7}$	$A_{14,8}$	$A_{14,9}$	$A_{14,10}$				
														$A_{15,1}$	$A_{15,2}$	$A_{15,3}$	$A_{15,4}$	$A_{15,5}$	$A_{15,6}$	$A_{15,7}$	$A_{15,8}$	$A_{15,9}$	$A_{15,10}$			
															$A_{16,1}$	$A_{16,2}$	$A_{16,3}$	$A_{16,4}$	$A_{16,5}$	$A_{16,6}$	$A_{16,7}$	$A_{16,8}$	$A_{16,9}$	$A_{16,10}$		
																$A_{17,1}$	$A_{17,2}$	$A_{17,3}$	$A_{17,4}$	$A_{17,5}$	$A_{17,6}$	$A_{17,7}$	$A_{17,8}$	$A_{17,9}$	$A_{17,10}$	
																	$A_{18,1}$	$A_{18,2}$	$A_{18,3}$	$A_{18,4}$	$A_{18,5}$	$A_{18,6}$	$A_{18,7}$	$A_{18,8}$	$A_{18,9}$	$A_{18,10}$

S
I
M
E
T
R
I
C
A

Fig 4.2 Organización de los coeficientes de la matriz A , en arreglos en banda (rectangular).

NBAN

$A_{1,1}$	0	$A_{1,3}$	0	$A_{1,5}$	0	$A_{1,7}$	0	0	0
$A_{2,2}$	$A_{2,3}$	$A_{2,4}$	$A_{2,5}$	0	$A_{2,7}$	0	$A_{2,9}$	0	0
$A_{3,3}$	$A_{3,4}$	$A_{3,5}$	0	$A_{3,7}$	0	$A_{3,9}$	$A_{3,10}$	$A_{3,11}$	0
$A_{4,4}$	$A_{4,5}$	0	$A_{4,7}$	0	$A_{4,9}$	$A_{4,10}$	$A_{4,11}$	$A_{4,12}$	0
$A_{5,5}$	0	$A_{5,7}$	0	$A_{5,9}$	$A_{5,10}$	$A_{5,11}$	$A_{5,12}$	$A_{5,13}$	$A_{5,14}$
$A_{6,6}$	$A_{6,7}$	0	$A_{6,9}$	$A_{6,10}$	$A_{6,11}$	$A_{6,12}$	$A_{6,13}$	$A_{6,14}$	0
$A_{7,7}$	0	$A_{7,9}$	$A_{7,10}$	$A_{7,11}$	$A_{7,12}$	$A_{7,13}$	$A_{7,14}$	$A_{7,15}$	0
$A_{8,8}$	$A_{8,9}$	$A_{8,10}$	$A_{8,11}$	$A_{8,12}$	$A_{8,13}$	$A_{8,14}$	$A_{8,15}$	0	$A_{8,17}$
$A_{9,9}$	$A_{9,10}$	$A_{9,11}$	$A_{9,12}$	$A_{9,13}$	$A_{9,14}$	$A_{9,15}$	0	$A_{9,17}$	0
$A_{10,10}$	$A_{10,11}$	$A_{10,12}$	$A_{10,13}$	$A_{10,14}$	$A_{10,15}$	0	$A_{10,17}$	0	0
$A_{11,11}$	$A_{11,12}$	$A_{11,13}$	$A_{11,14}$	$A_{11,15}$	0	$A_{11,17}$	0	0	0
$A_{12,12}$	$A_{12,13}$	$A_{12,14}$	$A_{12,15}$	0	$A_{12,17}$	0	0	0	0
$A_{13,13}$	$A_{13,14}$	$A_{13,15}$	0	$A_{13,17}$	0	0	0	0	0
$A_{14,14}$	$A_{14,15}$	0	$A_{14,17}$	0	0	0	0	0	0
$A_{15,15}$	0	$A_{15,17}$	$A_{15,18}$	0	0	0	0	0	0
$A_{16,16}$	$A_{16,17}$	$A_{16,18}$	0	0	0	0	0	0	0
$A_{17,17}$	$A_{17,18}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$A_{18,18}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\Delta(N \times NBAN) =$

Fig 4.3 Matriz de rigideces en arreglo en banda

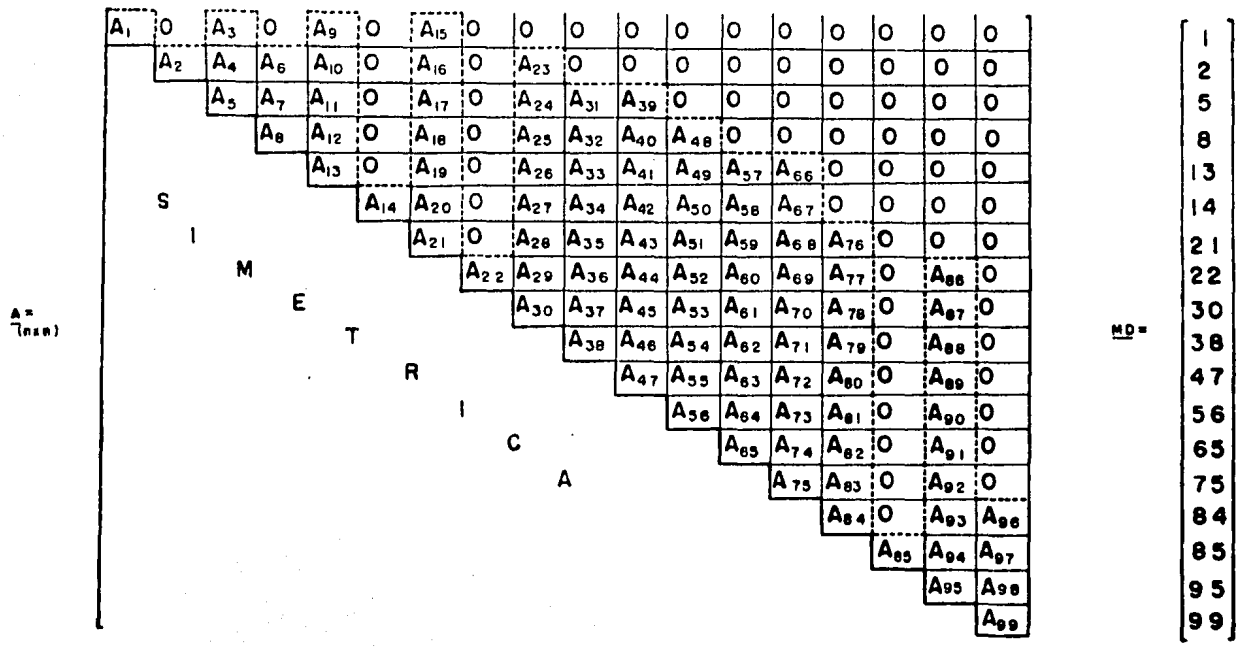


Fig 4.4 Organización de los coeficientes de la matriz A, en arreglos en contorno de silueta (unidimensionales)

$$\begin{array}{c}
 \text{DU} = \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 D_1 & & & & & & & \\
 & D_1 U_2 & 0 & & & & & \\
 & & D_3 & & & & & \\
 & & & D_3 U_4 & & & & \\
 & & & & D_5 & & & \\
 & & & & & D_5 U_8 & & \\
 & & & & & & D_9 & \\
 & & & & & & & D_9 U_{12} & \\
 & & & & & & & & D_{10} & \\
 & & & & & & & & & D_{10} U_{13} & \\
 & & & & & & & & & & D_{10} U_{17} & \\
 & & & & & & & & & & & D_{14} & \\
 & & & & & & & & & & & & D_{14} U_{15} & \\
 & & & & & & & & & & & & & D_{14} U_{18} & \\
 & & & & & & & & & & & & & & D_{18} & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & D_{18} U_{19} & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & D_{20} & \\
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 = \\
 \left[\begin{array}{c}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_6 \\
 x_7 \\
 x_8
 \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c}
 y_1 \\
 y_2 \\
 y_3 \\
 y_4 \\
 y_5 \\
 y_6 \\
 y_7 \\
 y_8
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}$$

Fig 4.5 Elementos para la sustitución hacia atrás en el método de Gauss-Crout y arreglos unidimensionales compactos.

$x_1 = y_1 / D_1$	-0	-0	-0	-0	$-u_6 x_4$	-0	$-u_2 x_2$
$x_2 = y_2 / D_3$	-0	-0	-0	-0	$-u_7 x_4$	$-u_4 x_3$	
$x_3 = y_3 / D_5$	-0	-0	$-u_8 x_6$	-0	$-u_9 x_4$		
$x_4 = y_4 / D_9$	-0	-0	$-u_{12} x_6$	-0			
$x_5 = y_5 / D_{10}$	-0	-0	$-u_{13} x_6$				
$x_6 = y_6 / D_{14}$	$-u_{17} x_8$	$-u_{15} x_7$					
$x_7 = y_7 / D_{16}$	$-u_{18} x_8$						
$x_8 = y_8 / D_{20}$							

Fig 4.6 Desarrollo de la sustitución hacia atrás por el método de Gauss-Crout, en arreglo unidimensional compacto.

5. PROGRAMA DE COMPUTADORA

En los capítulos anteriores se ha hecho referencia a las ecuaciones de equilibrio, el proceso de cálculo, así como el método numérico conveniente para obtener la solución, ahora se propone un criterio para organizar un programa de computadora para dicho análisis, al utilizar una microcomputadora con una configuración mínima de 64K de memoria central, dos manejadores de disco, una impresora y dos discos de tamaño 5 $\frac{1}{4}$ " con una capacidad de 256kbytes cada uno. El propósito de elegir una configuración mínima es el conocer la magnitud de los problemas que es posible analizar e intentar identificar los parámetros que influyen en la eficiencia del proceso.

Existen varios criterios para desarrollar un programa pero no resulta fácil el elegir alguno que resulte ventajoso en todos

los aspectos que se deben considerar, se mencionan algunos elementos para la elaboración del programa y la opción que se utiliza.

Para el desarrollo de programas en ingeniería estructural el lenguaje por excelencia es el compilador FORTRAN, la mayoría de los programas de elemento finito utilizan este lenguaje, para el caso de la microcomputadora el compilador FORTRAN posee proposiciones que lo hacen más potente pero tiene algunas desventajas al trabajar en forma interactiva, esto resulta lógico debido a que fue el primer compilador usado en forma comercial y su configuración fue hecha para trabajar con lectora de tarjetas para la entrada de datos. Otro lenguaje que se utiliza cada día más es el intérprete BASIC, este resulta más sencillo para programar, contempla el manejo interactivo y el uso de archivos es más fácil, tiene algunas limitaciones en las instrucciones como lenguaje y la velocidad de ejecución es menor que en FORTRAN. El lenguaje que se optó fue el BASIC, ya que al tener la misma capacidad de memoria para ambos lenguajes, las limitaciones en cuanto a instrucciones se podía superar con otras opciones del mismo.

Por configuración de la máquina el tipo de procesador de 8bytes también influye en el tiempo de procesamiento, en programas de Método de Elemento Finito se considera que un proceso no debe ser mayor de 5 horas continuas en memoria central ya que el riesgo de falla o imprevistos aumenta en forma considerable,

con base en este criterio se limitó el tiempo de proceso continuo a no más de 3 horas.

Al considerar dos manejadores de disco, como dispositivos de memoria periférica, se considera más práctico el utilizar un manejador de disco para cargar los programas del paquete y el segundo manejador de discos únicamente para guardar datos y resultados, esto da la facilidad de efectuar varios procesos en una sola sesión guardando en disco los datos de cada proceso.

Al utilizar varios programas en el proceso éstos deben ser hechos con la finalidad de ocupar lo mínimo de memoria central para tener la mayor capacidad posible para los arreglos del problema, también se considera en la modulación la posibilidad que con un mínimo de cambios fuera posible elaborar otras versiones del mismo paquete con otras aplicaciones (flexión en placas, cascarones, etc) ya que en programas de elemento finito en su esquema general tienen el mismo proceso de solución con algunas variantes sobre todo en el cálculo de la matriz de rigideces de cada elemento.

En lo referente al manejo de archivos se utilizan los de acceso directo y no secuenciales para permitir una mayor libertad en la lectura de los mismos con la posibilidad de cambiar de dispositivo de almacenamiento por ejemplo a disco duro.

En lo posible se intenta en cada programa el separar la lectura

e impresión de archivos con el algoritmo de solución para una mejor revisión en el caso de cambiar el algoritmo éste sea mas sencillo.

Al tomar en cuenta todos los aspectos antes mencionados el paquete consta de 4 programas numerados en forma secuencial del tes01 al tes04, a continuación se explica lo que hace cada programa y los archivos que se generan.

5.1 Tes01.

En esta primera parte se leen todos los datos que serán utilizados en el problema, esto se hace de forma interactiva con manejo de pantalla para facilitar la corrección de errores en la entrada de datos, los cuales quedan definidos en los siguientes grupos:

- a) Iniciales
- b) De los puntos nodales
- c) De los tipos de material
- d) De los elementos
- e) De las condiciones de carga

Se calcula el número de ecuaciones que se van a generar y el indicador de ecuación a utilizar en el ensamble de las mismas, el que se asigna a cada elemento.

Los archivos que se generan en este bloque son:

DATINIC.- Guarda los datos iniciales

NOD.- Guarda los datos de los puntos nodales

MATERIALES.- Guarda las características de cada tipo de material

ELEMENTOS.- Guarda los datos de cada elemento

IDE.- Guarda los indicadores de ecuación

CARGAS.- Guarda las condiciones de carga

5.2 Tes02.

En este bloque, con los tipos de material se calcula la matriz \underline{D} (ec 3.7) después se obtiene el valor del Jacobiano (ec 3.32), las funciones de forma y la matriz \underline{B} .

Luego se procede al ensamble del vector de fuerzas de cuerpo. Por último en esta parte se ensambla la matriz de rigideces de cada elemento.

Los archivos que aquí se generan son:

MATRIZDT.- Guarda la matriz \underline{D} para cada material

DB.- Guarda la matriz producto D B.

FZACPO.- Guarda el vector de fuerzas de cuerpo

MATKE.- Guarda la matriz k^e de cada elemento.

5.3 Tes03.

Este módulo calcula el vector MD (alto de columnas) para el arreglo en silueta, definido este vector se sabe cuántos elementos formarán la matriz de rigideces de la estructura en arreglo unidimensional compacto, luego realiza el ensamble de la matriz de rigideces de la estructura.

Después se lleva a cabo la triangulación para un arreglo unidimensional compacto (ecs 4.20 a 4.24), se realiza el ensamble del vector de fuerzas total mediante la suma de los vectores de fuerzas de cuerpo y de superficie. Se efectúa la sustitución hacia adelante y hacia atrás (ecs 4.26 a 4.28 para arreglo unidimensional), se obtienen los desplazamientos y se imprimen.

Los archivos nuevos en esta parte son:

F.- Guarda el vector de fuerza total

U.- Guarda los desplazamientos

5.4 Tes04.

En esta parte se obtienen los esfuerzos para cada elemento y se genera el archivo S para guardarlos.

Estos programas se presentan en un diagrama de bloque en la fig 5.1 la forma modular del programa permite efectuar el proceso de cálculo en varias sesiones dependiendo de la disponibilidad del equipo, en cada programa procesado se guardan los resultados obtenidos para continuar con el siguiente paso.

En lo referente a memoria, se puede apreciar en la tabla 5.1, el programa que ocupa mayor espacio es el de lectura de datos (Tes01), el que menos memoria ocupa es el de cálculo de esfuerzos (Tes04), mientras que los dos programas de cálculos de matrices de rigideces y solución de ecuaciones ocupan cada uno un 26% de la memoria total requerida para el total del paquete.

5.5 Manual de usuarios

El programa trabaja en forma interactiva, pregunta los datos del problema en pantalla, por lo que a continuación se definen los datos que se necesitan para correr el paquete.

Datos iniciales

1. Número de puntos nodales (1)

- | | |
|------------------------------------|-----|
| 2. Número de elementos | (2) |
| 3. Número de materiales diferentes | (3) |
| 4. Número de nodos cargados | (4) |
| 5. Condiciones de carga | (5) |

1. Aquí se da la cantidad de puntos nodales en los que se discretiza la estructura. Este valor no puede ser nulo.
2. Este se refiere a la cantidad de elementos finitos en los que se discretiza la estructura. Tampoco puede ser nulo.
3. La cantidad de tipos de materiales diferentes de que está constituida la estructura.
4. Este es el único valor que puede ser nulo, e indica en cuántos nodos se encuentra una carga.
5. Las condiciones de carga se refieren a si se considera el peso propio de la estructura o no. Para el primer caso se utiliza el número 1 y 2 para cuando no se considere el peso propio.

El siguiente grupo de datos es el de los puntos nodales en donde se requiere la coordenada en x, luego en y, el grado de libertad en la dirección x y en dirección y, para definir dicho indicador de desplazamiento se emplean el número 1 para despla-

zamiento no nulo, 2 para nulo y 3 para el caso de desplazamientos prescritos.

Después requiere el valor del ángulo de gravedad, sólo en el caso de considerar el peso propio en el análisis.

Para los diferentes tipos de material se requieren las siguientes características:

Modulo de elasticidad	(E)
Relación de Poisson	(ν)
Peso volumétrico	(pv)

este último dado en ton/m^3 .

Los datos de los elementos son en el orden siguiente:

Número del nodo I
Número del nodo J
Número del nodo K
Número del nodo L
Número del tipo de material
Espesor del elemento (ml)

Nota. Un elemento NO puede contener más de un tipo de material

Por último los datos de las cargas que se requieren en la si-

guiente forma:

Número de nodo sobre el cual actúa

Valor de la carga en dirección x (+→)

Valor de la carga en dirección y (+↑)

Una vez definidos los datos se procede a cargar el intérprete BASIC, se manda ejecutar el programa Tes01, al teclear.

RUN TES01

Se dan los datos y al terminar éste de correr se carga el programa TES02, en el cual al terminar de calcular la matriz de ri gideces de cada elemento pregunta si se desea conocer la matriz calculada (N = no; S = si; no acepta cualquier otro caracter).

Al terminar esta parte se llama el programa TES03 donde se imprimen los valores del vector MD, CD = número de elementos del vector KT (matriz de rigideces K en arreglo en silueta), luego imprime los valores de dicho vector KT, el vector de fuerzas y por último el vector de deformaciones.

Después se manda cargar el programa TES04 el cual imprime los esfuerzos de cada elemento.

PROGRAMA	N° DE BLOQUES OCUPADOS EN MEMORIA	% RESPECTO AL TOTAL
TES01	30	37.50
TES02	21	26.25
TES03	21	26.25
TES04	08	10.00
T O T A L	80	100.00

Tabla 5.1 Número de bloques que se utilizan con
cada programa del paquete

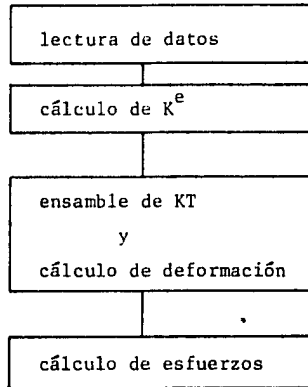


Fig 5.1 Diagrama de bloque del programa

6. EJEMPLO DE APLICACION

A fin de ejemplificar el uso de los programas, presentar resultados y conocer la capacidad del programa con la configuración descrita, se presenta el siguiente ejemplo.

Se refiere a una viga empotrada con una carga puntual con las características geométricas y tipo de material mostrada en la fig 6.1, esta viga se discretiza con 4, 16 y 64 elementos como se muestra en las figs 6.2 y 6.3.

En lo referente al tiempo de procesamiento, al aumentar el número de elementos, se presenta los resultados en la tabla 6.1 para cada uno de los programas así como el tiempo de todo el proceso y el porcentaje de cada uno en relación del tiempo total.

En las tablas 6.2 y 6.3 se presentan los resultados del uso del disco, cuántos bloques de memoria ocupa cada archivo que se utilizó con los diferentes programas para los diferentes problemas con el total de bloques y el porcentaje en función del total.

En la tabla 6.4 se muestra el número de elementos de la matriz de rigideces para cada ejemplo.

Para trabajar con una mayor cantidad de elementos quizá se requiera borrar del disco de datos los archivos que ya no se emplearán más adelante.

Programa	4 elem	%	16 elem	%	64 elem	%
Tes01	212	21.88	245	7.32	1452	10.66
Tes02	505	52.12	2063	61.64	8078	59.28
Tes03	109	11.25	422	12.61	1728	12.68
Tes04	143	14.75	617	18.43	2368	17.38
seg	969		3347		13626	
min	16 09		55 47		227 06	
hr					3 47 06	

Tabla 6.1 Tiempos de procesamiento para cada ejemplo.

Archivos	4	%	16	%	64	%
DATINIC	2	2.9	2	0.99	2	0.46
NOD	2	2.9	3	1.48	7	1.61
MATE. IALES	2	2.9	2	0.99	2	0.46
ELEMENTOS	2	2.9	3	1.48	5	1.15
CARGAS	2	2.9	2	0.99	2	0.46
IDE	3	4.35	8	3.96	8	1.83
MATRIZDT	2	2.9	2	0.99	2	0.46
DB	21	30.43	80	39.60	60	13.76
FZACPO	4	5.8	9	4.46	32	7.34
MATKE	18	26.09	67	33.17	256	58.72
F	3	4.35	5	2.48	10	2.29
U	3	4.35	5	2.48	10	2.29
S	5	7.23	14	6.93	40	9.17
T O T A L	69		202		436	

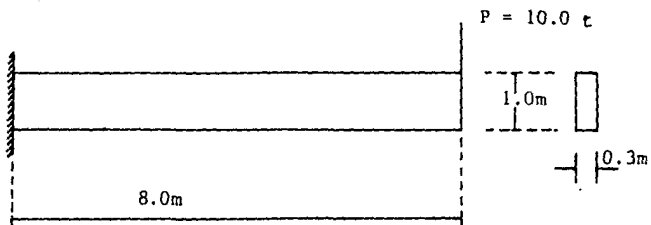
Tabla 6.2 No. de bloques que ocupa cada archivo.

	4	%	16	%	64	%
DATOS	10	14.49	12	5.94	18	4.13
RESULTADOS	59	85.51	190	94.06	418	95.87
T O T A L	69		202		436	

Tabla 6.3 Resumen de bloques empleados en disco.

No. de elementos	vector <u>KT</u>
4	88
16	388
64	1568

Tabla 6.4 No. de elementos del vector KT.



$$E = 2.0 \times 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$g = 9.81 \text{ m/seg}^2$$

$$= 0.2$$

$$P_v = 2.4 \text{ t/m}^3$$

$$P = \frac{P_v}{g} = 0.245 \text{ t seg}^2/\text{m}^4$$

Fig 6.1 Estructura del ejemplo de aplicación

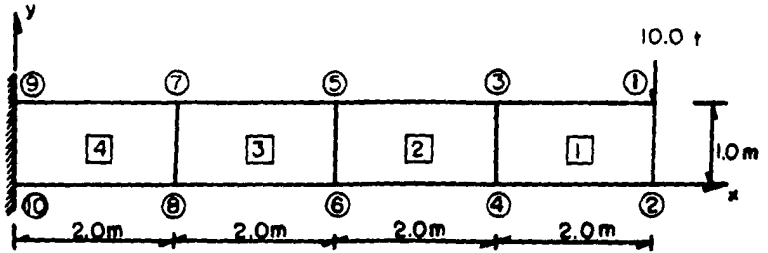


Fig 6.2a Malla de elementos finitos
4 elementos finitos

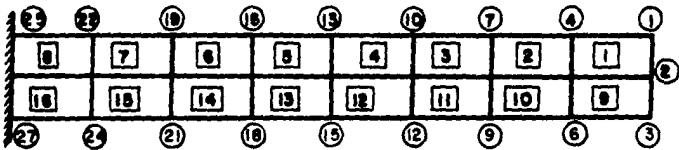


Fig 6.2b Malla de elementos finitos
16 elementos finitos

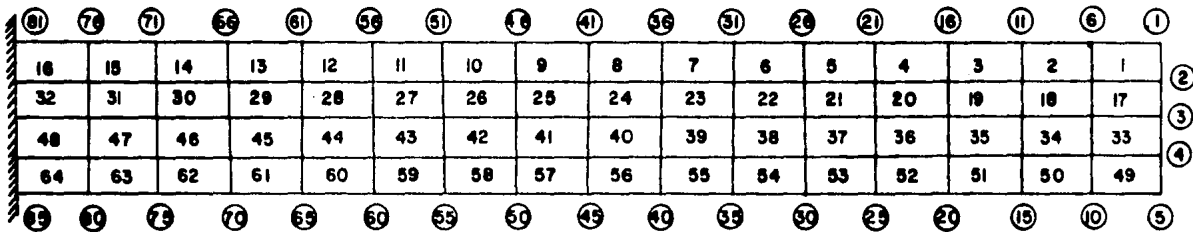
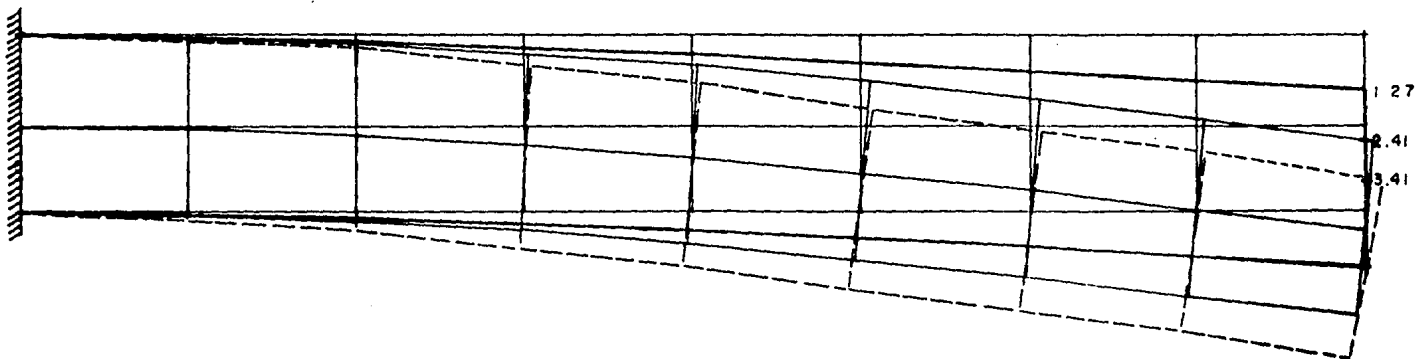


Fig 6.3 Malla de elementos finitos
64 elementos finitos



----- calculado con fórmulas
 ————— calculado con programa

Fig. 6.4 Comparación de los desplazamientos calculados usando el programa de elemento finito y los obtenidos mediante las fórmulas tradicionales.

310.9	310.9	222.2	221.9	132.8	133.7	46.4	42.4
-310.9	-310.9	-221.9	-222.2	-133.7	-132.8	-42.4	-46.4

a) Calculado por programa.

879.28	744.72	647.28	512.72	415.28	280.72	183.28	48.72
-879.28	-744.72	-647.28	-512.72	-415.28	-280.72	-183.28	-48.72

b) Calculado por fórmula.

Fig. 6.5 Esquemas comparativos de los esfuerzos σ_{xx} obtenidos para los puntos gaussianos discretizando la barra de la fig. 6.1 en 4 elementos finitos.

850.5	835.5	726.2	731.9	616.9	617.6	504.0	505.9	392.0	393.7	279.4	280.6	167.6	171.8	62.9	52.4
223.9	208.8	177.0	182.7	153.7	154.4	124.8	126.6	96.8	98.5	69.6	70.8	38.9	43.2	15.4	4.9
-223.9	-208.8	-177.0	-182.8	-153.7	-154.4	-124.6	-126.5	-97.1	-98.8	-68.4	-70.0	-43.0	-44.3	-11.7	-16.3
-850.5	-835.5	-726.2	-731.9	-616.9	-617.6	-504.0	-505.9	-391.8	-393.5	-280.2	-281.8	-166.5	-167.8	-51.5	-56.5

a) Calculado por programa.

1215.2	1124.8	1059.2	968.2	903.2	812.8	747.2	656.8	591.2	500.8	435.2	344.8	279.2	188.8	123.2	34.5
342.8	317.2	298.8	273.2	254.8	229.2	210.8	185.2	166.8	141.2	122.8	97.2	78.8	53.2	34.8	9.7
-342.8	-317.2	-298.8	-273.2	-254.8	-229.2	-210.8	-185.2	-166.8	-141.2	-122.8	-97.2	-78.8	-53.2	-34.8	-9.7
-1215.2	-1124.8	-1059.2	-968.8	-903.2	-812.8	-747.2	-656.8	-591.2	-500.8	-435.2	-344.8	-279.2	-188.8	-123.2	-34.5

b) Calculado por fórmula.

Fig. 6.6 Esquemas comparativos de los esfuerzos σ_{xx} obtenidos para los puntos gaussianos, discretizando la barra de la fig. 6.1 en 16 elementos finitos.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

7. CONCLUSIONES

Al considerar los resultados en el ejemplo de aplicación es posible analizar algunos aspectos.

- a) En lo que se refiere al tiempo de proceso (tabla 6.1) en general el 55% se utiliza en el cálculo de la matriz de rigideces de cada elemento.

- b) Al comparar la memoria utilizada para datos (tabla 6.3), estos ocupan un porcentaje muy bajo del 14.5% hasta el 4.13% conforme aumenta el número de elementos este porcentaje disminuye, en cambio para los resultados varía, en este caso del 85.51% al 95.87%, esto indica que el archivo de datos no influye en la capacidad del disco.

- c) Para la memoria central al usar 64K de memoria, se tiene 32K para sistema operativo y el resto para programa y dimensionamiento de arreglos, con esta limitación fue posible resolver un sistema hasta de 48 ecuaciones lineales, esto hace patente la importancia del estudio y desarrollo de algoritmos que permitan optimizar la solución de ecuaciones lineales.
- d) La capacidad que requiere el programa completo ocupa 30 bloques de memoria en disco, esto significa menos de la mitad de la capacidad total del disco e implica que los programas modulares no ocupan mucha memoria.

Con base en los incisos anteriores se puede afirmar que el uso de microcomputadoras para la solución del análisis de estructuras en especial para problemas de elemento finito presentan varias ventajas en relación con el uso de computadoras grandes, ya que con una configuración mínima es posible resolver problemas de regular tamaño, con grado de aproximación aceptable.

Existe un porcentaje de error al emplear este método, el cual disminuye conforme el número de elementos en que se discretiza la estructura aumenta como se puede apreciar en las fig. 6.4, 6.5 y 6.6, por lo tanto para un resultado más cercano al exacto se deberá considerar una malla más cerrada.

8. REFERENCIAS.

1. O.C. Zienkiewicz, THE FINITE ELEMENT METHOD, Third Edition, McGraw-Hill, 1977.
2. R. Cervantes, APUNTES DE METODO DEL ELEMENTO FINITO, DEPFI, UNAM.
3. F. Vera Badillo, SOLUCION DE ECUACIONES ALGEBRAICAS EN EL ANALISIS ESTRUCTURAL, Tesis Profesional, 1980.
4. S. Timoshenko y J.N. Goodier, TEORIA DE LA ELASTICIDAD, Segunda Edición, URMO, 1975.
5. A. Ghali y A. Neville, ANALISIS ESTRUCTURAL, Primera Edición, Diana, 1980.
6. G. Salazar Polanco, ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES, Representaciones y Servicios de Ing., 1980.

7. F. Vera Badillo, APUNTES DEL CURSO DE COMPUTACION APLICADA A LA INGENIERIA, 1983.
8. K.J. Bathe y E.L. Wilson, NUMERICAL METHODS IN FINITE ELEMENT ANALYSIS, Prentice-Hall, 1976.
9. L.J. Segerlind, APPLIED FINITE ELEMENT ANALYSIS, Jhon Wiley, 1976.

APENDICE A

LISTADO DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA

DLIST

83

```
5 REM
6 REM
7 REM
8 REM
9 PRINT CHR# (4); "MAXFILES 7"
10 IA = 1
11 HOME
12 VTAB 1: HTAB 19: PRINT "G. B."
13
14 VTAB 2: HTAB 6: PRINT "PROGRAMA
15 MA PARA EL ANALISIS DE"
16 VTAB 3: HTAB 6: PRINT "ESTRUC
17 TURAS POR EL METODO DEL"
18 VTAB 4: HTAB 13: PRINT "TELEME
19 NTO FINITO"
20 ON IA GOTO 30,380,1130,1450,1
21 820
22 REM
23 REM DATOS INICIALES
24 REM
25 VTAB 4: HTAB 3: PRINT "Datos
26 Iniciales:"
27 I = 1
28 VTAB 9: HTAB 3: PRINT "1 No.
29 de Nodos "; INPUT
30 NI: IF I = 2 THEN 100
31 VTAB 11: HTAB 3: PRINT "2 No.
32 de Elementos "; INPUT
33 EI: IF I = 2 THEN 100
34 VTAB 13: HTAB 3: PRINT "3 No.
35 de Materiales "; INPUT
36 MI: IF I = 2 THEN 100
37 VTAB 15: HTAB 3: PRINT "4 No.
38 de Nodos Cargados "; INPUT
39 CI: IF I = 2 THEN 100
40 VTAB 17: HTAB 3: PRINT "5 Co
41 ndiciones de Carga:"
42 VTAB 19: HTAB 3: PRINT "1=co
43 nsiderando peso propio"; VTAB
44 20: HTAB 3: PRINT "2=sin con
45 siderar peso propio"
46 VTAB 17: HTAB 3: INPUT CC
47 VTAB 20: HTAB 1: INVERSE: PRINT
48 "DESEA CAMBIAR ALGUN DATO (S
49 /N)"; INPUT C1: NORMAL
50 VTAB 22: PRINT "
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
```

```

378 REM
380 DIM X(N), Y(N1), ID(2,N1)
382 DIM I(E1), J(E1), K(E1), L(E1),
M(E1), P(E1)
384 DIM E(M1), P(M1), V(M1)
420 DIM DN(2), FA(C1), FY(C1)
434 REM
436 REM          PUNTOS NODIALES
448 VTAB 1: HTAB 1: PRINT " Punt
No. 1 de las "
450 VTAB 2: HTAB 2: PRINT "No.
de las "
452 REM
454 REM          OY"
456 XY = 0
458 FOR I = 1 TO N1 STEP 10
460 II = N1 - 10 * I + 1
462 IF II > 10 THEN 520
464 YI = N1
466 GOTO 480
468 YI = I + 9
470 FOR J = 1 TO XX
472 YI = YY + 1
474 VTAB YY: HTAB 1: PRINT J: HTAB
9: INPUT X(I): VTAB YY: HTAB
17: INPUT Y(I)
476 VTAB YY: HTAB 26: INPUT ID(1
,J)
478 VTAB YY: HTAB 35: INPUT ID(2
,J)
480 NEXT J
482 VTAB 30: INVERSE : PRINT "DE
SEA CAMBIAR ALGUN DATO (S/N)
": INPUT C1: NORMAL
484 VTAB 30: PRINT "
"
486 IF C1 = "N" THEN 770
488 IF C1 = "S" THEN 440
490 GOTO 480
492 VTAB 30: HTAB 5: PRINT "CUAL
DEBEA CAMBIAR": INPUT C2
494 IF C2 >= 1 AND C2 <= J THEN
700
496 VTAB 20: PRINT "
"
498
500 VTAB 20: INVERSE : PRINT "DA
TO FUERA DE ESTA TABLA": NORMAL
502
504 VTAB 21: PRINT "Borrar el N.
de dato a cambiar": INPUT
C3
506 VTAB 20: PRINT "
"
508
510 VTAB 21: PRINT "
"
512
514 GOTO 450
516 V1 = C2 - 1 + 9
518 VTAB V1: PRINT "
"
520
522 VTAB V1: HTAB 2: PRINT C2: HTAB
9: INPUT X(C2): VTAB V1: HTAB
17: INPUT Y(C2)
524 VTAB V1: HTAB 26: INPUT ID(1
,C2)
526 VTAB V1: HTAB 35: INPUT ID(2
,C2)
528 GOTO 480
530 FOR V2 = 9 TO 22
532 VTAB V2: PRINT "
"
534
536 NEXT V2
538 NEXT I
540 REM
542 REM          CALCULO DE

```

```

805 REM      N U M E R O D E
807 REM      E D U C A C I O N E S
808 REM      E F I
809 REM      H O M E
810 NC = 0:NN = 0:NP = 0
811 FOR I = 1 TO NC
812 FOR J = 1 TO 2
820 CH IN(1, I) GOTO 860,890,920
830 NC = NC + 1
840 ID(1, I) = NC
850 R = 1:240
860 NN = NN + 1
870 ID(1, I) = 0
880 NP = NP + 1
890 ID(1, I) = 0
910 GOTO 840
920 NP = NP + 1
930 ID(1, I) = - NP
940 NEXT I
950 NEXT I
960 VTAB 3: HTAB 4: PRINT "No. d
e Ecs. con Des. NO NULOS ="
: PRINT NC
970 VTAB 5: HTAB 4: PRINT "No. d
e Ecs. con Des. NULOS ="
: PRINT NN
980 VTAB 7: HTAB 4: PRINT "No. d
e Ecs. con Des. PRESCRITOS="
: PRINT NP
990 IF CC < > 1 THEN 1030
1000 VTAB 10: HTAB 4: PRINT "Tec
lea el angulo de gravedad.":
: INPUT A
1010 AF = AF / 57.29579
1020 GOTO 1100
1030 VTAB 15: HTAB 5: PRINT "Par
a configurar teclas RETURN":
: INPUT G
1100 HOME :IA = 9: GOTO 20
1104 REM
1105 REM      M A T E R I A L E S
1106 REM
1110 VTAB : PRINT "Materiales"
1120 VTAB 3: PRINT "No. de
Rel. de Poisson
Vol.:"
1140 XY = 0
1150 FOR I = 1 TO M1 STEP 10
1160 I1 = M1 - I:Y1 = 9
1170 IF I1 >= 10 THEN 1200
1180 X1 = M1
1190 GOTO 1210
1200 XX = X1 + 10
1210 FOR J = 1 TO XX
1220 YY = Y1 + 1
1230 VTAB YY: HTAB 2: PRINT J: HTAB
7: INPUT E(J): VTAB YY: HTAB
21: INPUT P(J): VTAB YY: HTAB
32: INPUT V(J)
1240 NEXT J
1250 VTAB 20: HTAB 1: PRINT "DES
EA CAMBIAR ALGUN DATO (S/N)?"
: INPUT C#
1260 VTAB 20: PRINT "
"
1270 IF C# = "N" THEN 1400
1280 IF C# < > "S" THEN 1250
1290 VTAB 20: PRINT "No. DE MATE
RIAL A CORREGIR": INPUT C2
1300 VTAB 20: PRINT "
"
1310 IF C2 >= 1 AND C2 < J THEN
1320 VTAB 20: INVERSE : PRINT "D
ATO FUERA DE ESTA TABLA": NORMAL
1330 VTAB 21: PRINT "Teclar el
No. de dato a cambiar": INPUT

```

```

      C2
1340 VTAB 20: PRINT "
"
1350 VTAB 21: PRINT "
"
1360 GOTO 1310
1370 V2 = C2 - I + 10
1375 VTAB V2: PRINT "
"
1380 VTAB V2: HTAB 2: PRINT C2:
      HTAB 7: INPUT E(C2): VTAB 0
      C: HTAB 21: INPUT F(C2): VTAB
      0: HTAB 2: INPUT V(C2)
1390 GOTO 1350
1400 FOR L = 10 TO 22
1410 VTAB L: PRINT "
"

1420 NEXT L
1430 NEXT I
1440 IA = 4: GOTO 20
1444 REM
1445 REM      E L E M E N T O S
1446 REM
1450 VTAB 6: HTAB 2: PRINT "Elem
      entos:"
1460 VTAB 7: PRINT "No.   + + +
      NODOS + + + Mat. Esp."
1470 VTAB 8: PRINT "      I   J
      L           (ml)"
1480 XX = 0
1490 FOR I = 1 TO E1 STEP 10
1500 II = E1 - I: YY = 9
1510 IF II = -10 THEN 1540
1520 XY = E1
1530 GOTO 1550
1540 YY = XX + 10
1550 FOR J = I TO II
1560 VY = YY + 1
1570 VTAB YY: PRINT J: HTAB 5: INPUT
      I(J): VTAB YY: HTAB 11: INPUT
      J(J)
1580 VTAB YY: HTAB 16: INPUT K(J)
      J: VTAB YY: HTAB 21: INPUT L
      (J)
1590 VTAB YY: HTAB 27: INPUT N(J)
      J: VTAB YY: HTAB 32: INPUT C
      S(J)
1600 NEXT J
1610 VTAB 22: HTAB 1: PRINT "DES
      EA CAMBIAR ALGUN DATO (S/N)?"
      C3: INPUT C3
1620 IF C3 = "N" THEN 1770
1630 VTAB 22: PRINT "
"
"
1640 IF C3 < > "S" THEN 1610
1650 VTAB 20: HTAB 1: PRINT "No.
      de elemento que desea corre
      gir:"; INPUT C2
1660 VTAB 20: PRINT "
"
"
1670 IF C2 > = I AND C2 < J THEN
      1770
1680 VTAB 20: INVERSE : PRINT "O
      ATO FUERA DE ESTA TABLA": NORMAL
1690 VTAB 21: HTAB 1: PRINT "TEC
      LEE EL No. DE DATO A CAMBIAR
      "; INPUT C2
1700 VTAB 20: PRINT "
"
"
1710 VTAB 21: PRINT "
"
"

```

```

1720 V2 = C2 - I + 10
1735 VTAB V2: PRINT "
"
1740 VTAB V2: PRINT C2; HTAB 9:
INPUT I (C2); VTAB V2: HTAB
11: INPUT I (C2)
1745 VTAB V2: HTAB 16: INPUT K (C
2); VTAB V2: HTAB 21: INPUT
L (C2)
1750 VTAB V2: HTAB 27: INPUT M (C
2); VTAB V2: HTAB 32: INPUT
N (C2)
1760 GOTO 1910
1770 FOR L = 1 TO 22
1780 VTAB L: PRINT "
"
1790 NEXT L
1800 NEXT I
1810 IA = 5: GOTO 20
1814 REM
1815 REM NUDOS CARGADOS
1816 REM
1820 VTAB 6: HTAB 3: PRINT "Nudo
s Cargados"
1830 VTAB 6: PRINT "Data No
de FX F/"
1840 AX = 0
1850 FOR I = 1 TO 21 STEP 10
1860 II = C1 - II * Y = 5
1870 IF II = 10 THEN 1900
1880 YX = C1
1890 GOTO 1910
1900 YX = YX + 10
1910 FOR J = 1 TO YX
1920 YJ = YJ + 1
1930 VTAB YJ: HTAB 2: PRINT J; HTAB
10: INPUT CNOC(J)
1940 VTAB YJ: HTAB 14: INPUT FX(J)
VTAB YJ: HTAB 34: INPUT
FY(J)
1950 NEXT J
1960 VTAB 22: HTAB 1: PRINT "DES
DE CAMBIAR ALGUN DATO (S/N)"
1970 INPUT CS
VTAB 22: PRINT "
"
1980 IF CS = "N" THEN 2110
1990 IF CS = "S" THEN 1960
2000 VTAB 10: PRINT "No. de dato
a corregir::: INPUT CS
2010 VTAB 10: PRINT "
"
2020 IF C2 = I AND C2 = J THEN
2030 VTAB 30: INVERSE: PRINT "D
ATO FUERA DE ESTA TABLA": NORMAL
2040 VTAB 21: PRINT "TECLEE EL N.
O DE DATO A CAMBIAR::: INPUT
2050 VTAB 20: PRINT "
"
2060 VTAB 21: PRINT "
"
2070 V2 = C2 - I + 10
2075 VTAB V2: PRINT "
"
2080 VTAB V2: HTAB 2: PRINT C2;:
HTAB 10: INPUT CNOC2)
2090 VTAB V2: HTAB 24: INPUT FX(C
2); VTAB V2: HTAB 34: INPUT
FY(C2)
2100 GOTO 1950

```

2110 FOR L = 1 TO 22
2120 VTA: L: PRINT "

88

```
2130 NEXT L
2140 NEXT I
2144 REM
2145 REM GUARDA INFORMACION
2146 REM EN ARCHIVOS
2147 REM
2150 HOME
2160 VTA: 3: HTAB 6: PRINT "Se a
sta guardando la informacion
"
2161 VTA: 4: HTAB 6: PRINT "Favo
r de esperar un momento."
2162 PRINT D$: "OPEN DATINIC.L50,
D2"
2163 PRINT D$: "WRITE DATINIC.R1"
2164 PRINT M1
2165 PRINT E1
2166 PRINT M1
2167 PRINT C1
2168 PRINT CC
2169 PRINT AF
2170 PRINT D$: "WRITE DATINIC.R2"
2171 PRINT NC
2172 PRINT NN
2173 PRINT NP
2174 PRINT D$: "CLOSE"
2180 PRINT D$: "OPEN NCD.L15,D2"
2190 FOR I1 = 1 TO M1
2200 PRINT D$: "WRITE NCD,R"; I1
2210 PRINT X(I1)
2220 PRINT Y(I1)
2230 PRINT ID(1,I1)
2240 PRINT ID(2,I1)
2250 NEXT I1
2260 PRINT D$: "CLOSE"
2270 PRINT D$: "OPEN MATERIALES.L
10,D2"
2280 FOR I1 = 1 TO M1
2290 PRINT D$: "WRITE MATERIALES.
R"; I1
2300 PRINT E(I1)
2310 PRINT P(I1)
2320 PRINT V(I1)
2330 NEXT I1
2340 PRINT D$: "CLOSE"
2350 PRINT D$: "OPEN ELEMENTOS.L1
5,D2"
2360 FOR I1 = 1 TO E1
2370 PRINT D$: "WRITE ELEMENTOS.R
"; I1
2380 PRINT I(I1)
2390 PRINT J(I1)
2400 PRINT K(I1)
2410 PRINT L(I1)
2420 PRINT M(I1)
2430 PRINT ES(I1)
2440 NEXT I1
2450 PRINT D$: "CLOSE"
2460 PRINT D$: "OPEN IDE.L104,D2"
2470 FOR EM = 1 TO E1
2480 I = IEM: J = JEM
2490 K = KEM: L = LEM
2500 PRINT D$: "WRITE IDE,R"; EM
2510 PRINT ID(1,I)
2520 PRINT ID(2,I)
2530 PRINT ID(1,J)
2540 PRINT ID(2,J)
2550 PRINT ID(1,K)
2560 PRINT ID(2,K)
2570 PRINT ID(1,L)
2580 PRINT ID(2,L)
2590 NEXT EM
2600 PRINT L$: "CLOSE"
```

```
2610 PRINT D4:"OPEN CARDAS,L35,D  
2620 FOR I = 1 TO C1  
2630 PRINT D4:"WRITE CARDAS,R":I  
  
2640 PRINT C4(I)  
2650 PRINT F4(I)  
2660 PRINT F4(I)  
2670 NEXT I  
2680 PRINT D4:"CLOSE"  
2690 WTAB 20: HTAB 12: PRINT "Gr  
2700 WTAB 20: HTAB 11: PRINT "Fe  
2710 END
```


PRNG
LIST

90

```
1 REM PROGRAMA NUMERO 2
2 REM
3 REM Version
4 REM Sabado 01 de Enero 87.
5 REM
6 REM
7 REM
8 REM
9 REM
10 READ I: HTAB 7: PRINT "G. B.
11 CASTE # 2"
12 READ J: HTAB 1: PRINT "PROGRA
13 MA PARA EL ANALISIS DE"
14 READ K: HTAB 3: PRINT "ESTRUC
15 TURA POR EL METODO DEL"
16 READ L: HTAB 10: PRINT "ELEME
17 NTO FINITO"
18 IF PV > 1 THEN 5010
19 D2 = CHR$(13) + CHR$(14)
20 PRINT D2: OPEN DATINIC, L50, D2
21
22 PRINT D2: "READ DATINIC, R1"
23 INPUT I1
24 INPUT E1
25 INPUT M1
26 INPUT C1
27 INPUT G1
28 INPUT AF
29 PRINT D2: "CLOSE"
30 REM DIMENSIONA
31 REM
32 DIM X(N1), Y(N1), ID(2, N1)
33 DIM I(1), NE(1), L(1),
34 N(E), P(E)
35 DIM E(M1), F(M1), V(M1), CN(C1),
36 F(C1), FX(C1)
37 DIM DT(M1, 5), D(3, 2), S(2), ET
38 (2, N1), NS(4), NE(4), XN(4), Y
39 (4), I1(4), I2(4), B(3, 2)
40 DIM A(3, 2), A1(3, 2), A2(3, 2), W
41 (3, 2), Z(3, 2)
42 DIM T(25), I(1), MA(1, 25), MH
43 (5), ND(25)
44 REM
45 REM CREACION MATRIZ D
46 REM PARA CADA MATERIAL
47 REM
48 FOR I1 = 1 TO M1
49 PRINT D2: "OPEN MATERIALES, L1
50 G, D2"
51 PRINT D2: "READ MATERIALES, R"
52 I1
53 INPUT E(I1)
54 INPUT P(I1)
55 INPUT V(I1)
56 PRINT D2: "CLOSE"
57 C1 = E(I1) / (1 - P(I1)) * P
58 (I1)
59 D(1, 1) = C1
60 D(2, 2) = D(1, 1)
61 D(3, 2) = C1 * (1 - P(I1)) *
62 0.5
63 D(1, 2) = P(I1) * C1
64 D(2, 1) = D(1, 2)
65 D(1, 1) = D(1, 1)
66 DT(1, 2) = D(1, 2)
67 DT(1, 3) = D(2, 1)
68 DT(1, 4) = D(3, 2)
69 DT(1, 5) = D(3, 2)
70 PRINT D2: "OPEN MATRIZDT, L30,
71 D2"
72 PRINT D2: "WRITE MATRIZDT, R";
73 I1
74 FOR J1 = 1 TO 5
75 PRINT DT(I1, J1)
76 NEXT J1
77 PRINT D2: "CLOSE MATRIZDT"
78 NEXT I1
79 S(I1) = .57735026918963
```

```

330 SI(2) = - SI(1)
340 ET(1) = SI(1)
350 ET(2) = - SI(1)
410 HI(1) = 1.
420 HI(2) = 1.
430 FOR EM = 1 TO E1
440 FOR FR = 1 TO 8
450 F(EM,FR) = 0
460 NEXT FR
470 NS = (EM * 12) - 11
480 UNTIL 15: PRINT "ELEMENTO No.",
    "EM"
490 FOR
500 REM FUNCIONES DE FORMA
510 REM
520 FOR R = 1 TO 2
530 FOR S = 1 TO 2
540 SI = SI(1)
550 ET = ET(1)
560 N(1) = 0.25 * (1 + SI) * (1 +
    ET)
570 N(2) = 0.25 * (1 - SI) * (1 +
    ET)
580 N(3) = 0.25 * (1 - SI) * (1 -
    ET)
590 N(4) = 0.25 * (1 + SI) * (1 -
    ET)
600 REM
610 REM JACOBIANG
620 REM
630 NS(1) = 0.25 * (1 + ET)
640 NS(2) = - 0.25 * (1 + ET)
650 NS(3) = - 0.25 * (1 - ET)
660 NS(4) = 0.25 * (1 - ET)
670 NE(1) = 0.25 * (1 + SI)
680 NE(2) = 0.25 * (1 - SI)
690 NE(3) = - 0.25 * (1 - SI)
700 NE(4) = - 0.25 * (1 + SI)
710 PRINT D1:"OPEN ELEMENTOS,L15.D2"
720 PRINT D4:"READ ELEMENTOS,R":
    EM
730 INPUT I
740 INPUT J
750 INPUT K
760 INPUT L
770 INPUT M
780 INPUT ES
790 PRINT D3:"CLOSE"
800 PRINT D1:"OPEN NOD,L15.D2"
810 PRINT I1:"READ NOD,R":I
820 INPUT X(I)
830 INPUT Y(I)
840 PRINT D4:"READ NOD,R":J
850 INPUT X(J)
860 INPUT Y(J)
870 PRINT D4:"READ NOD,R":K
880 INPUT X(K)
890 INPUT Y(K)
900 PRINT D4:"READ NOD,R":L
910 INPUT X(L)
920 INPUT Y(L)
930 PRINT D3:"CLOSE"
940 XS = NS(1) * X(I) + NS(2) * X
    (J) + NS(3) * X(K) + NS(4) *
    X(L)
950 XE = NE(1) * X(I) + NE(2) * X
    (J) + NE(3) * X(K) + NE(4) *
    X(L)
960 YS = NS(1) * Y(I) + NS(2) * Y
    (J) + NS(3) * Y(K) + NS(4) *
    Y(L)
970 YE = NE(1) * Y(I) + NE(2) * Y
    (J) + NE(3) * Y(K) + NE(4) *
    Y(L)
980 JA = XS * YE - XE * YS
990 REM
992 REM MATRIZ B
994 REM

```

```

1000 XN(1) = (YE * NS(1) - YS * N
      EC(1) / JA
1010 YN(2) = (YE * NS(2) - YS * N
      EC(2) / JA
1020 XN(3) = (YE * NS(3) - YS * N
      EC(3) / JA
1030 YN(4) = (YE * NS(4) - YS * N
      EC(4) / JA
1040 YN(1) = (-YE * NS(1) + YS *
      NE(1)) / JA
1050 YN(2) = (-YE * NS(2) + YS *
      NE(2)) / JA
1060 YN(3) = (-YE * NS(3) + YS *
      NE(3)) / JA
1070 YN(4) = (-YE * NS(4) + YS *
      NE(4)) / JA
1080 II(1) = 1
1090 IJ(1) = 2
1100 II(2) = 3
1110 IJ(2) = 4
1120 II(3) = 5
1130 IJ(3) = 6
1140 II(4) = 7
1150 IJ(4) = 8
1160 FOR R = 1 TO 4
1170 I = II(R)
1180 J = IJ(R)
1190 EC(1, I) = YN(I)
1200 EC(2, J) = YN(J)
1210 B(3, I) = YN(I)
1220 F(3, J) = XN(J)
1230 NEXT I
1240 D(1, 1) = DT(M, 1)
1250 D(1, 2) = DT(M, 2)
1260 D(2, 1) = DT(M, 3)
1270 D(2, 2) = DT(M, 4)
1280 D(3, 3) = DT(M, 5)
1290 PRINT D$:"OFFN D(1,104,D2"
1300 FOR R = 1 TO 3
1310 FOR C = 1 TO 8
1320 W(R, C) = B(R, C)
1330 IF R = 3 THEN 1350
1340 A(R, C) = D(R, C)
1350 NEXT C
1360 NEXT R
1370 RA = 3:CA = 3:RW = 3:CW = 8
1380 GOSUB 2500
1390 FOR R = 1 TO 3
1400 PRINT D$:"WRITE DB,R":DB
1410 FOR C = 1 TO 8
1420 PRINT Z(R,C)
1430 A(R, C) = Z(R, C)
1440 NEXT C
1450 DB = DB + 1
1460 NEXT R
1470 PRINT D$:"CLOSE"
1480 FOR R = 1 TO 3
1490 FOR C = 1 TO 8
1500 A(R, C) = B(C, R)
1510 IF R = 3 THEN 1530
1520 W(R, C) = B(R, C)
1530 NEXT C
1540 NEXT R
1550 RA = 3:CA = 3:RW = 3:CW = 8
1560 GOSUB 2500
1570 FOR R = 1 TO 8
1580 FOR C = 1 TO 3
1590 A(R, C) = Z(R, C)
1600 NEXT C
1610 NEXT R
1620 FOR R = 1 TO 3
1630 FOR C = 1 TO 8
1640 W(R, C) = B(R, C)
1650 NEXT C
1660 NEXT R
1670 CW = 8
1675 GOSUB 2500
1680 HJ = JA * H(I) * H(JK)
1690 IF CC = 2 THEN 1910
1700 REM

```



```

0590 7-A 1) = XX
0600 7-A 1)
0610 7-A 1)
0620 RETURN
0630 REM
0640 REM LMP. MATRIZ 3x3
0650 REM
0660 I = 1
0670 M1 = 0 + 1
0680 IF M1 > 3 THEN M1 = 1
0690 FOR RI = 1 TO 3
0700 M2 = 1
0710 M3 = RI - 5
0720 7-A 1) HTAB HH: PRINT A1(
0730 RI, I)
0740 I = I + 1
0750 NEXT RI
0760 7-A 1) PRINT "PARA CONTIN
0770 7-A 1) "WAVE RECORD 1": INPUT C2
0780 7-A 1)
0790 GOTO M1 + 1
0800 IF M1 > 3 THEN GOTO 0850
0810 7-A 1) 27.5
0820 RETURN
0830 HOME
0840 PV = 2
0850 GOTO 30
0860 7-A 1) HTAB 10: PRINT "PARA CONTIN
0870 7-A 1) "UAR:"
0880 7-A 1) 12: PRINT "NEW OLD T
0890 7-A 1)
0900 END

```



```

"
620 IF EM > 1 THEN 650
630 RI = 1
640 GOTO 660
650 RI = EM - 1; K = 1
660 EI = EM + 3
665 AI =
670 FOR EI = RI TO EF
680 PRINT D$;"READ MATR.F.R";EI
690 K = K + 1
710 FOR CI = 1 TO 8
720 INPUT I$(CI,K);
730 NEXT CI
740 NEXT EI
750 PRINT D$;"CLOSE
760
770 PRINT D$;"OPEN IDE.: 104.D2"
780 PRINT D$;"READ IDE.S";EM
790 FOR CI = 1 TO 8
800 INPUT IA$(CI)
810 NEXT CI
820 PRINT D$;"CLOSE"
830 FOR EI = 1 TO 8
840 FOR CI = 1 TO 8
850 IF IA$(EI,K) = 0 THEN 920
860 IF IA$(EI,K) = 1 AND THEN 930
870 I = IA$(EI)
880 LI = MD(EI) - (CI - 1)
890 RT(LI) = PT(LI) + NE(R,C)
900 NEXT I
910 NEXT EI
920 IF EI = 1 THEN 1450
1000 NEXT EM
1010 REM
1020 HOME : VTAB 9: HTAB 6: PRINT
"Vector KI (Matriz K)"
1030 PRINT "
"
1040 PRINT "
"
1050 FOR RK = 1 TO CD
1060 HTAB 9: PRINT KI(RK)
1070 NEXT RK
1080 PRINT "
"
1090 PRINT "
"
1100 GOTO 1600
1120 REM Subrutina de impresion
de matrices.
1121 HOME
1130 FOR RI = 1 TO 8
1140 HH = 3
1150 FOR CI = 1 TO 3
1160 VV = RI + 4
1170 VTAB VV: HTAB HH: PRINT KE(
RI,CI)
1180 HH = HH + 12
1190 NEXT CI
1200 NEXT RI
1210 VTAB 20: PRINT "Para contin
uar teclee 0": INPUT O$
1220 HOME
1230 FOR RI = 1 TO 8
1240 HH = 3
1250 FOR CI = 4 TO 6
1260 VV = RI + 5
1270 VTAB VV: HTAB HH: PRINT KE(
RI,CI)
1280 HH = HH + 12
1290 NEXT CI
1300 NEXT RI
1310 VTAB 20: PRINT "Para contin
uar teclee 0": INPUT O$
1320 HOME
1330 FOR RI = 1 TO 8
1340 HH = 3
1350 FOR CI = 7 TO 8

```

```

1330 W = R1 + 5
1370 VTAB W: HTAB HH: PRINT LEX
      RI, CI
1380 HH = HH + 12
1390 NEXT CI
1400 NEXT RI
1410 RETURN
1450 REM Ensemble del Paso Prop
1460 REM
1470 PRINT D: "OPEN F.ZA00.L15,
      D2"
1480 PRINT D: "READ F.ZA00.R"; EM
1490 FOR I = 1 TO 8
1500 F(I) = 0
1510 NEXT I
1520 F(1) = F(1) + F
1530 I = 2
1540 I = I + 1
1550 REM
1560 REM          C A R G A S
1570 REM
1580 FOR IJ = 1 TO C1
1590 PRINT D: "OPEN CARGAS.L35, D
      2"
1600 PRINT D: "READ CARGAS.R"; IJ
1610 INPUT CN
1620 INPUT FX(CN)
1630 INPUT FY(CN)
1640 PRINT D: "CLOSE"
1650 PRINT D: "OPEN NOD.L15, D1"
1660 PRINT D: "READ NOD.F1(CN)
      1"
1670 INPUT A, B, ID(1), I, J
1680 PRINT D: "CLOSE"
1690 F(I) = F(I) +
      FX(CN)
1700 F(J) = F(J) +
      FY(CN)
1710 F(1) = F(1) +
      F(CN)
1720 NEXT IJ
1730 REM Impresion del vector d
      e
1740 REM
1750 REM
1760 REM
1770 REM
1780 REM
1790 REM
1800 REM
1810 REM
1820 REM
1830 REM
1840 REM
1850 REM
1860 PRINT " "
1870 PRINT " "
1880 PRINT "Para continuar tecle
      e RETURN"; INPUT G#
1890 REM
1900 REM SOLUCION DE ECUACIONES
1910 REM
1920 REM TRIANGULACI
      ON
1930 REM
1940 IF ND(2) = 1 THEN 2060
1950 ET(2) = RT(2) / RT(1)
1960 KT(2) = NT(2) - KT(1) * KT(2)
      + RT(2)
1970 IF ND = 2 THEN 2480
1980 FOR J = 1 TO NC
1990 JM = J - 1
2000 JJ = MD(J)
2010 LJ = MD(JM) + 1

```



```

2110 JM = MJ - LJ
2120 IF MJ = 0 THEN 2410
2130 KJ = MJ - LP
2140 LL = M(JMJ)
2150 LY = MJ - P(1,LL) / AT(1,LL)
2160 LP = MJ + 1
2170 IF MJ = LP THEN 2330
2180 FOR I = LP TO JM
2190   KJ = I
2200   KS = I
2210   IT = P(1,I)
2220   LI = M(I) - I + 1
2230   IH = LI - 1
2240   IF IH = 0 THEN 2150
2250   MI = I - IH
2260   IF MI = 0 THEN 2150
2270   IF MI = MI THEN 2260
2280   NI = MI / 6000 * 70
2290   KI = NI
2300   FOR I = NI TO KS
2310     HJ = I - KI + LY
2320     IJ = I - KI + LJ
2330     KJ = M(IJ)
2340     XJ = XJ + I(IJK) * I(IJK) *
       AT(IJ)
2350     NEXT I
2360     IJ = I - MJ + LJ
2370     ET(IJ) = M(IJ) - XJ / AT(IJ)
2380     ET(I) = ET(I)
2390   NEXT I
2400   XJ = 0
2410   KJ = I
2420   KI = I
2430   FOR I = IJ TO KS
2440     XJ = XJ + I(IJK) * I(IJK) *
       AT(IJ)
2450     NEXT I
2460     ET(IJ) = ET(IJ) - XJ
2470     NEXT I
2480     REM *****
2490     REM *****
2500     REM *****
2510     FOR I = 0 TO NJ
2520       XJ = 0
2530       LI = I - 1
2540       FI = M(LI) + 1
2550       KI = M(LI) - 1
2560       PI = IS - FI
2570       IF FI = 0 THEN 2630
2580       IF PI = M(LI) - M(LI)
2590       FOR I = FI TO KI
2600         II = II + 1
2610         XJ = XJ + I(I) * F(II)
2620       NEXT I
2630       FI = F(I) - XJ
2640       NEXT I
2650       FOR I = 1 TO NJ
2660         XJ = M(I)
2670         FI = F(I) / AT(I)
2680         NEXT I
2690         NN = NJ
2700         NM = NJ - 1
2710         FOR I = 1 TO NN
2720           NI = NN - I
2730           II = P(1,NI)
2740           LI = NN + I - (M(NN) - M(
             NI))
2750           IS = NN - I
2760           FI = IS - I
2770           IF FI = 0 THEN 2830
2780           FOR I = NI TO KS
2790             HJ = I + 1
2800             IJ = I + 1
2810             XJ = I(IJ) - I(IJ) * AT(IJ) * F(NN)
2820           NEXT I
2830           NEXT I
2840           NEXT I
2850           NEXT I

```

```
2830 HOME : HTAB 7: HTAB 4: PRINT
2840 PRINT "
2850 FOR I = 1 TO NC
2860 PRINT #1
2870 NEXT I
2880 PRINT #1: "OPEN U, L1: D:"
2890 FOR I = 1 TO NR
2900 PRINT #1: "WRITE U, R": I
2910 NEXT I
2920 PRINT #1: "CLOSE"
2930 PRINT "
2940 PRINT "
2950 PRINT "
2960 PRINT "
2970 HTAB 6: PRINT "Tactee NEW"
2980 HTAB 4: PRINT "Tactee RUN"
2990 HTAB 6: PRINT "Logo tactee
3000 RUN"
3010 END
```

```

801 REM PROGRAMA NUMERO 1
802 REM
803 REM      Version
804 REM      Versado 31 de Enero 87.
805 REM
806 HOME = "PRG 01: HTAS DE PRINT "
807 REM      Se estan calculando los esfuerzos
808 REM      de las HTAS.
809 READ A1: HTAS DE PRINT " F=100
810 REM      Se calcula el momento de inercia
811 REM      de la HTAS de PRINT " de la
812 REM      siguiente informacion de los ar
813 REM      botes.
814 REM
815 REM OBTENCION DE ESFUERZOS.
816 REM
817 DIM IAA(2),DEB(1,2),A1E(2),W(2)
818 DIM I(2)
819 DIM M(2),U(2)
820 REM
821 DE = CHR$(12) + CHR$(14)
822 F = 1
823 PRINT DE:"OPEN DATINIO,L50,D2"
824
825 OPEN DE:"READ DATINIO,F1"
826 INPUT I,E1
827 OPEN DE:"READ DATINIO,S1"
828 INPUT N1
829 OPEN DE:"CLOSE"
830 FOR E1 = 1 TO E1
831 M1 = (EM - I1) * 11:OT = 1
832 PRINT DE:"OPEN IDE,L103,D2"
833 PRINT DE:"READ IDE,E1:EM"
834 F = 1 TO 8
835 INPUT IAA1
836 NEXT I
837 OPEN DE:"CLOSE"
838 PRINT DE:"OPEN U,L116,D2"
839 FOR I = 1 TO NC
840 INPUT DE:"READ U,R":I
841 DEB(I,1)
842 NEXT I
843 PRINT DE:"CLOSE"
844 FOR I = 1 TO 8
845 U(1) = U(1)
846 U(2) = U(2)
847 W(1) = (W(1)
848 NEXT I
849 PRINT DE:"OPEN DE,L104,D2"
850 FOR I = 1 TO 8
851 PRINT DE:"READ DE,R":I
852 F = 1 TO 8
853 DEB(I,2)
854 NEXT I
855 U(1) = U(1)
856 U(2) = U(2)
857 PRINT DE:"CLOSE"
858 REM      DE = STAR = S:CM = 1
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999

```

REM Subrutina de multiplica

```

710      DIM J, MAT(1000)
720      GOTO 730
730      FOR R = 1 TO 100
740          FOR C = 1 TO 100
750              FOR I = 1 TO 100
760                  V = VA + DB*(R-I) * MU*(C-I)
770                  SURR(I) = V
780              NEXT I
790          NEXT C
800      NEXT R
810      PRINT " "
820      PRINT " "
830      PRINT " "
840      PRINT " "
850      PRINT " "
860      PRINT " "
870      PRINT " "
880      PRINT " "
890      PRINT " "
900      PRINT " "
910      PRINT " "
920      PRINT " "
930      PRINT " "
940      PRINT " "
950      PRINT " "
960      PRINT " "
970      PRINT " "
980      PRINT " "
990      PRINT " "
1000     END

```