

300615

19  
2y



**UNIVERSIDAD LA SALLE**

**ESCUELA DE INGENIERIA**

Incorporada a la U.N.A.M.

**SOLUCION AL PROBLEMA DE TERZAGHI DE LA CONSO-  
LIDACION UNIDIMENSIONAL POR MEDIO DEL METODO  
DEL ELEMENTO FINITO.**

**Tesis Profesional**

Que para obtener el título de

**INGENIERO CIVIL**

presenta

**DANIEL TAPIA HERNANDEZ**

México, D. F.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

1986



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# INDECE

1	INTRODUCCION	1
1.1	Generalidades . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	2
2	FORMULACION DEL PROBLEMA	4
2.1	Ecuación de Continuidad . . . . .	4
2.2	Ley de Darcy . . . . .	7
2.3	Ecuación de Conservación para la Ley de Darcy . . . . .	8
2.4	Masa acumulada en un suelo poroso saturado . . . . .	9
2.5	Casos particulares de Flujo de Agua en medios porosos . . . . .	10
2.5.1	Partículas incomprensibles . . . . .	10
2.5.2	Proceso unidimensional de deformación . . . . .	11
2.5.3	Coefficiente de permeabilidad constante . . . . .	13
3	SOLUCION DE TERZAGHI	15
3.1	Solución de la ecuación de la Consolidación Unidimensional . . . . .	15
3.2	Grado de Consolidación . . . . .	15
4	SOLUCION CON EL METODO DEL ELEMENTO FINITO	20
4.1	Formulación de la ecuación de la consolidación unidimensional con sus condiciones en la frontera e iniciales . . . . .	20
4.1.1	Condiciones de frontera en función de la presión . . . . .	21
4.1.2	Condiciones de frontera en función de la velocidad . . . . .	21
4.1.3	Condición inicial . . . . .	22
4.1.4	Condiciones generales de frontera e iniciales . . . . .	22

4.2	Solución numérica de la ecuación de la consolidación unidimensional . . . . .	24
4.2.1	Forma variacional o débil de la ecuación de la consolidación unidimensional . . . . .	24
4.2.2	Método de Galerkin en el dominio geométrico.	27
4.2.3	Aproximación de Galerkin para la ecuación de la consolidación unidimensional . . . . .	29
4.2.4	Métodos de Galerkin en el dominio tiempo . . . . .	32
4.3	Aproximación del método del elemento finito . . . . .	33
4.3.1	Funciones de forma . . . . .	34
4.3.2	Funciones de interpolación del elemento finito . . . . .	34
4.4	Aproximación de las funciones de forma . . . . .	35
4.4.1	Elementos convencionales . . . . .	35
4.4.2	Interpolación lineal . . . . .	36
4.4.3	Interpolación cuadrática . . . . .	38
4.4.4	Aproximación de la solución en un elemento finito . . . . .	39
4.4.5	Propiedades de las matrices $K^e$ y $C^e$ . . . . .	42
4.5	Ecuación de equilibrio del medio continuo global . . . . .	43
4.5.1	Ensamble de ecuaciones . . . . .	43
4.6	Condiciones de frontera e iniciales . . . . .	45
4.7	Aspectos numéricos de las ecuaciones del MEF para la consolidación unidimensional . . . . .	46
4.7.1	Solución del sistema de ecuaciones algebraicos lineales . . . . .	46
5	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	48
5.1	Conclusiones . . . . .	48
5.2	Recomendaciones . . . . .	50

6	REFERENCIAS	51
APENDICE A	Problemas . . . . .	53
APENDICE B	Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden . . .	73
APENDICE C	Solución de sistemas de ecuaciones algebrai cas lineales . . . . .	82
APENDICE D	Instructivo del programa del computador . . .	94
APENDICE E	Programa de computador . . . . .	102
APENDICE F	Tablas y figuras. . . . .	117

## 1. INTRODUCCION

### 1.1 Generalidades

En el campo de las matemáticas y de la ingeniería se presentan problemas que por su complejidad es necesario dividirlos en componentes, para tener una visión más clara y poder estudiarlos. En algunas ocasiones es posible representar un problema en un número de componentes bien definidos llamados problemas discretos, pero en otros casos la subdivisión es infinita con lo que se obtienen ecuaciones diferenciales o expresiones equivalentes, a éstos se les llaman problemas continuos.

Los primeros en buscar soluciones prácticas para la solución de problemas continuos fueron los ingenieros, y esto fue realizando analogías directas entre modelos y metodologías aplicables a sistemas discretos. Ref. 11.

Los matemáticos han podido obtener una metodología para resolver ecuaciones diferenciales por medio de métodos numéricos y el método que ha llegado a tener la mayor aceptación es el método del elemento finito y éste es el que se desarrolla en el presente trabajo.

## 1.2 Objetivos

Los objetivos de este trabajo están motivados por el estudio de fenómenos físicos que puedan ser solucionados por medio de métodos numéricos aproximados y se resumen en los siguientes puntos:

- a) Presentar un problema continuo específico de un fenómeno físico de la mecánica de suelos que es el de la consolidación unidimensional.
- b) Desarrollar por métodos tradicionales el problema y obtener soluciones exactas.
- c) Aplicar el método del elemento finito para obtener soluciones aproximadas del mismo problema.
- d) Efectuar comparaciones entre los métodos analíticos tradicionales y el método del elemento finito que proporcionen las ventajas que existen en ambos métodos.

- e) Formalizar un criterio en el lector que haga percaterse de la importancia que tiene el método del elemento finito para la solución de ecuaciones diferenciales.



2 FORMULACION DEL PROBLEMA.

## 2. FORMULACION DEL PROBLEMA

La consolidación es la reducción gradual de volumen de suelo totalmente saturado, de baja permeabilidad, debido al drenaje de agua a través de los poros. Un proceso que continúa hasta que se disipa totalmente el exceso de presión de agua en los poros, producida por un incremento en el esfuerzo total sobre el suelo. Ref. 5.

### 2.1 Ecuación de continuidad

El principio de la conservación de la materia nos dice:

La masa por unidad de tiempo del fluido que entra ( $M_e$ ) a un volumen especificado, una parte queda almacenada en su interior ( $M_{ac}$ ) y el resto sale ( $M_s$ ) del volumen, es decir:

$$M_e = M_s + M_{ac} \quad (2.1)$$

o bien:

$$\frac{\partial \text{Mac}}{\partial t} = \dot{M}_e - \dot{M}_s$$

De acuerdo con la figura 2.1 la masa que entra por la cara formada por los ejes xz resulta ser ( $\dot{M}_{ex}$ ), donde:

$$\dot{M}_{ex} = \int_w v_x \, dy \, dz \quad (2.3)$$

y la que sale ( $\dot{M}_{sx}$ ) en el mismo plano:

$$\dot{M}_{sx} = \left[ \int_w v_x + d \left( \int_w v_x \right) \right] dy \, dz \quad (2.4)$$

Al efectuar la resta entre las ecuaciones 2.3 y 2.4 se obtiene la masa por unidad de tiempo acumulada entre los planos de entrada y salida xz como se indica a continuación:

$$\dot{M}_{ex} - \dot{M}_{sx} = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_w v_x \right) dx \, dy \, dz \quad (2.5)$$

o sea:

$$\dot{M}_{ex} - \dot{M}_{sx} = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_w v_x \right) dv \quad (2.6)$$

Análogamente, para las direcciones restantes se obtiene:

$$\dot{M}_{ey} - \dot{M}_{sy} = - \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_w v_y \right) dv \quad (2.7)$$

$$\dot{M}_e z - \dot{M}_G z = - \frac{\partial}{\partial z} (\rho_w v_z) \, dv \quad (2.8)$$

Por lo que la acumulación global resulta ser:

$$\dot{M}_e - \dot{M}_S = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho_w v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_w v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_w v_z) \right] \quad (2.9)$$

Que puede expresarse en notación matricial como:

$$\dot{M}_e - \dot{M}_S = - \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]}_{\underline{v}^T} (\rho_w \underbrace{\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}}_{\underline{v}}) \quad (2.10)$$

$$\dot{M}_e - \dot{M}_S = - \underline{v}^T (\rho_w \underline{v}) \quad (2.11)$$

Al sustituir la ecuación 2.11 en la ecuación 2.2 se obtiene que:

$$\underline{v}^T (\rho_w \underline{v}) + \frac{\partial}{\partial t} (Mac) = 0 \quad (2.12)$$

Que es la ecuación que representa el principio de la conservación de masa.

## 2.2 Ley de Darcy

La ley de Darcy establece para un flujo laminar, la relación siguiente:

$$\underline{v} = - \underline{k} \underline{i} \quad (2.13)$$

Donde,  $\underline{i}$  es el gradiente hidráulico (es decir la pérdida de carga hidráulica por unidad de longitud),  $\underline{k}$  es la matriz (tensor) de coeficientes de permeabilidad,  $z$  es la posición respecto a un plano de referencia y  $\gamma_w$  es el peso volumétrico del agua.

El gradiente hidráulico está definido por:

$$\underline{i} = - \underline{\nabla} h \quad (2.14)$$

La carga hidráulica se puede representar como:

$$h = z + \frac{p}{\gamma_w} \quad (2.15)$$

La representación matricial del tensor de coeficientes de permeabilidad resulta ser:

a) Para el caso isotrópico

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

b) Para el caso ortotrópico

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Al sustituir la ecuación 2.14 en la ecuación 2.13 se obtiene que:

$$\underline{v} = - \underline{k} \nabla h \quad (2.18)$$

Y al sustituir la ecuación 2.15 en la ecuación 2.18 se tiene:

$$\underline{v} = - \underline{k} \nabla \left( z + \frac{p}{\gamma_w} \right) \quad (2.19)$$

### 2.3 Ecuación de conservación para la ley de Darcy

Al sustituir la ecuación 2.18 en la ecuación 2.12 se obtiene que:

$$\nabla \cdot \left[ \rho_w \underline{k} \underline{v} h \right] = \frac{\partial \text{Mac}}{\partial t} \quad (2.20)$$

o bien la ecuación 2.19 en la ecuación 2.12

$$\left[ \nabla^T w k \nabla \left( z + \frac{p_s}{\gamma_w} \right) \right] = \frac{\partial \text{Mac}}{\partial t} \quad (2.21)$$

Estas ecuaciones representan a la ecuación de la conservación de masa por unidad de tiempo para la ley de Darcy.

#### 2.4 Masa acumulada en un suelo poroso saturado

Para un suelo saturado el medio poroso lo constituye la fase sólida, denominada esqueleto y el fluido que llena los poros es usualmente agua.

Las causas de acumulación de agua en el proceso de deformación de un suelo se puede deber,

- A la compresibilidad del fluido, lo que puede ocasionar una acumulación  $\epsilon_v^f$ , sin cambio de volumen.
- A la compresibilidad del sólido, que también puede provocar una acumulación  $\epsilon_v^s$ , sin cambio de volumen.
- A un cambio de volumen del suelo indicado como  $\epsilon_v$ .

De acuerdo con lo anterior, el volumen total de almacenamiento, se puede expresar como:

$$\epsilon = \epsilon_v + \epsilon_v^f + \epsilon_v^s \quad (2.22)$$

lo que produce una masa acumulada:

$$Mac = \rho_w \epsilon \quad (2.23)$$

Y la rapidez de variación respecto al tiempo de la masa acumulada resulta ser:

$$\frac{\partial Mac}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_w \epsilon) \quad (2.24)$$

## 2.5 Casos particulares de flujo de agua en medios porosos

### 2.5.1 Partículas incompresibles

Ya que las presiones que se transmiten al suelo son relativamente pequeñas se puede afirmar que tanto las partículas de sólidos como las del fluido son incompresibles, lo que implica:

$$\epsilon_v^s = \epsilon_v^f = 0$$



por lo que el volumen total de almacenamiento es únicamente el producido por el de un cambio volumétrico,

$$\xi = \xi_v \quad (2.25)$$

Al sustituir el valor de la identidad 2.25 en la ecuación 2.24 se obtiene que:

$$\nabla^T \left[ \rho_w \underline{k} \nabla \underline{h} \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_w \xi_v) \quad (2.26)$$

Se simplifica la densidad de masa ( $\rho_w$ ) de la ecuación 2.26 ya que se considera constante.

$$\nabla^T \left[ \underline{k} \nabla \underline{h} \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\xi_v) \quad (2.27)$$

El volumen de almacenamiento total es el producido por el flujo en las direcciones paralelas a los ejes de referencia  $x$ ,  $y$  y  $z$ , o sea:

$$\xi_v = \xi_{x_v} + \xi_{y_v} + \xi_{z_v} \quad (2.28)$$

### 2.5.2 Proceso unidimensional de deformación

Los desplazamientos contenidos en el plano horizontal en los suelos, debido al incremento de esfuerzos perpendiculares al plano horizontal, se pueden considerar pequeños en comparación con los desplazamientos verticales. Si se desprecian los desplazamientos horizontales se obtiene un estado unidimensional de deformación. Y el volumen total de

la masa acumulada resulta ser igual al volumen de masa acumulada en la dirección vertical, paralela al eje  $z$ , o sea:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{z_v} \quad (2.29)$$

También para el caso unidimensional el componente tensor de permeabilidad  $\underline{k}$  que se considera es el asociado a la dirección paralela al eje  $z$ , y resulta ser un escalar.

$$\underline{k} = k_z = k \quad (2.30)$$

Además el valor del operador  $\nabla$  nabla se reduce a la derivada parcial respecto a  $z$ .

$$\underline{\nabla} = \nabla = \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.31)$$

y la dirección de la velocidad es únicamente la  $z$ , así que:

$$\underline{v} = v_z \quad (2.32)$$

Se sustituyen los valores de 2.30 y 2.31 en la ecuación 2.27 y queda expresada como:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial h}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_v) \quad (2.33)$$

### 2.5.3 Coeficiente de permeabilidad constante

En general el coeficiente de permeabilidad disminuye al reducir la porosidad del suelo durante la consolidación. Sin embargo, para incrementos de esfuerzos, se puede considerar que el coeficiente de permeabilidad es constante durante todo el proceso; y la ecuación 2.33 se puede expresar de la forma siguiente:

$$k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_v) \quad (2.34)$$

y al sustituir 2.15 en 2.34 se obtiene

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_v) \quad (2.35)$$

De las curvas de compresibilidad Fig. 2.2 se obtiene la siguiente expresión:

$$\epsilon_v = -m_v \sigma' \quad (2.36)$$

Donde  $m_v$  se conoce como coeficiente de variación volumétrica. Como el esfuerzo total está formado por la suma del es esfuerzo efectivo  $\sigma'$  y la presión de agua de poro  $p$ ; o sea:

$$\sigma = \sigma' + p \quad (2.37)$$

al sustituir la ecuación 2.37 en la ecuación 2.36 se obtiene que:

$$\epsilon_v = -m_v (\sigma - p) \quad (2.38)$$

al derivar la ecuación 2.38 respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -m_v \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right] \quad (2.39)$$

De la condición de equilibrio el esfuerzo total es constante durante todo el proceso de consolidación y la ecuación 2.39 puede escribirse como:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = m_v \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.40)$$

Se sustituye 2.40 en 2.35, y resulta

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = m_v \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.41)$$

Al ordenar los términos de la ecuación 2.41 resulta

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{m_v \gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (2.42)$$

que se puede escribir como:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (2.43)$$

donde:

$$c_v = \frac{k}{m_v \gamma_w} \quad (2.44)$$

y a  $c_v$  se le conoce como coeficiente de consolidación. A la ecuación 2.43 se le denomina con el nombre de ecuación de la consolidación unidimensional. Ref. 3.

### 3 SOLUCION DE TERZAGHI.

### 3. SOLUCION DE TERZAGHI

Terzaghi encontró que la ecuación de consolidación unidimensional tenía analogías matemáticas con otras ecuaciones que representaban procesos físicos diferentes. Uno de estos procesos físicos, muy estudiado en ese tiempo fue el de propagación unidimensional de calor y su ecuación fue resuelta por medio de series de Fourier. Ref. 8.

La similitud entre estas dos ecuaciones diferenciales, permitió a Terzaghi conocer una solución para su teoría de consolidación unidimensional por medio de series de Fourier, como se verá en el presente capítulo.

#### 3.1 Solución de la ecuación diferencial de la consolidación unidimensional.

Como se discutió en el capítulo 2, la ecuación que gobierna al proceso de consolidación unidimensional, es una ecuación diferencial parcial, respecto a las variables  $z$  y  $t$  como se muestra a continuación:

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.1)$$

Por lo que es un problema de valores iniciales y en la frontera.

La solución original de Terzaghi corresponde a la condición de frontera siguiente:

$$p = 0, \text{ para } z = 0 \text{ y } z = 2H, \text{ para todo tiempo } t > 0$$

y a la condición inicial dada

$$p = \Delta u, \text{ para } t = 0 \text{ y } 0 < z < 2H$$

De acuerdo con el método de separación de variables para integrar ecuaciones diferenciales, la solución  $p$ , se puede expresar como el producto de dos funciones, o sea:

$$p = Z(z) T(t) \quad (3.2)$$

Al sustituir la ecuación 3.2 en la ecuación 3.1 se puede escribir como:

$$c_v Z''(z) T(t) = Z(z) T'(t) \quad (3.3)$$

donde las comillas representan derivadas ordinarias.

Al ordenar términos de modo que un miembro esté en función, sólo de la profundidad (z) y otro en función sólo del tiempo (t), se tiene que:

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{T'(t)}{c_v T(t)} \quad (3.4)$$

Estas relaciones tienen la característica de poderse separar al igualarse a una constante por lo que la ecuación 3.4 se puede expresar como:

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda \quad (3.5)$$

$$\frac{T'(t)}{c_v T(t)} = \lambda \quad (3.6)$$

o bien

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0 \quad (3.7)$$

$$T'(t) - \lambda c_v T(t) = 0 \quad (3.8)$$

De esta manera se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, homogéneas, que se pueden resolver por métodos directos. Ref. 6.

Al resolver 3.7 y 3.8 con sus propias condiciones y al sustituirlas en 3.3, la solución de esta ecuación emerge como



se había dicho, de series de Fourier, así que la solución buscada es,

$$p(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \Delta \sigma}{M} \operatorname{sen} (M z) e^{(-M^2 T_v)} \quad (3.9)$$

en donde

$$M = \frac{1}{2} \pi (2n + 1)$$

$$z = \frac{z}{H}$$

y

$$T_v = \frac{c}{v} \frac{t}{H^2}$$

### 3.2 Grado de Consolidación ( $U_z(t)$ )

El grado de consolidación a una profundidad  $z$  y a un instante  $t$ ,  $U_z(t)$ , se define como la relación entre la consolidación que ya ha tenido lugar a esa profundidad y a la consolidación total que ha de producirse bajo el incremento de carga impuesto, representado por la ecuación que se escribe a continuación:

$$U_z(t) = 100 \frac{\Delta \sigma - p}{\Delta \sigma} = 100 \left( 1 - \frac{p}{\Delta \sigma} \right) \quad (3.10)$$

Del mismo modo se puede definir al grado medio de consolidación  $U(t)$  como la relación entre la consolidación que ha tenido lugar en todo el estrato en un tiempo  $t$  y la total que haya de producirse, por lo que ha de representarse como:

$$U(t) = \frac{\int_0^{2H} (\sigma' - p) dz}{\Delta \sigma' 2H} \quad (100) \quad (3.11)$$

puede escribirse como:

$$U(t) = 100 \left[ 1 - \frac{1}{\Delta \sigma' 2H} \int_0^{2H} p dz \right] \quad (3.12)$$

Al sustituir el valor de la expresión 3.9, en la ecuación 3.12 y al efectuarse la integración se obtiene la siguiente expresión, (referencia 5).

$$U(t) = 100 \left[ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2} e^{-\left( \frac{(2n+1)^2 \pi^2 Tv}{4} \right)} \right] \quad (3.13)$$

Esta ecuación tiene una característica importante y es, que el grado medio de consolidación del suelo está sólo en función del factor tiempo ( $Tv$ ); con lo que se pueden realizar curvas teóricas de consolidación, Fig. 3.1 y 3.2.

4 SOLUCION CON EL METDO DEL ELEMEN-  
TO FINITO.

#### 4. SOLUCION CON EL METODO DEL ELEMENTO FINITO ( M E F )

De acuerdo con el capítulo 2 se define al proceso de la consolidación unidimensional mediante un modelo matemático, el cual está representado por una ecuación diferencial y es un problema de valores en la frontera y de valores iniciales. Una forma de solucionar esta ecuación, es mediante el método del elemento finito. El MEF es un método aproximado para la solución de problemas en la frontera e iniciales, aspecto que se presenta en este capítulo.

##### 4.1 Formulación de la ecuación de la consolidación unidimensional con sus condiciones en la frontera e iniciales.

Sea un estrato de suelo compresible tal como se muestra en la figura 4.1, en el cual su proceso de consolidación está

gobernado por la ecuación 2.43 que se discute en el capítulo 2 del presente trabajo y que se muestra a continuación:

$$c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.1)$$

en donde el exceso de la presión de agua de poro,  $p$ , está en función de la profundidad,  $z$ , y el tiempo,  $t$ , el símbolo,  $c_v$ , se conoce como coeficiente de consolidación.

#### 4.1.1 Condiciones de frontera en función de la presión

Al definir las condiciones de frontera para el suelo de la figura 4.1 en función de la presión, se considera que la superficie del estrato registra una presión nula para todo tiempo mayor de cero; por lo que se tiene que:

$$p \Big|_{z=0} = 0 \text{ para } t > 0 \quad (4.2)$$

#### 4.1.2 Condición frontera en función de la velocidad

Para el mismo estrato de la figura 4.1, otra condición de frontera se establece en la capa impermeable en donde la velocidad de descarga de presión,  $v$ , es nula; esto es por que el suelo no recibe flujo de agua de dicha capa. La condición frontera en función de la velocidad puede por lo tanto ser representada por:

$$v \Big|_{z=H} = 0 \text{ para } 0 \leq t \leq \infty \quad (4.3)$$

#### 4.1.3 Condición inicial

Para un tiempo igual a cero, como condición inicial, la presión en todo el estrato es equivalente al incremento de esfuerzo,  $\Delta p$ , y se puede escribir de la forma siguiente:

$$P \left\{ \begin{array}{l} = \Delta p \quad \text{Para } z \geq 0 \\ \text{inicial} \\ t=0 \end{array} \right. \quad (4.4)$$

#### 4.1.4 Condiciones generales de frontera e iniciales

La velocidad de descarga de presión,  $v$ , en el estrato en la dirección  $z$  está definida en función de la permeabilidad,  $k$ , y de la carga hidráulica,  $h$ , como se puede apreciar en las ecuaciones 2.18 y 2.31 que se escriben a continuación:

$$v = -k \nabla h = -k \frac{\partial h}{\partial z} \quad (4.5)$$

y de acuerdo con la ecuación 2.15 la carga hidráulica se representa como:

$$h = z + \frac{P}{\gamma_w} \quad (4.6)$$

al sustituir 4.6 en 4.5 se tiene que

$$v = -k \left( 1 + \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (4.7)$$

para que la ecuación 4.7 se cumpla, según la condición de frontera 4.3, la velocidad debe ser nula; con lo que se tiene que los dos términos que se multiplican se deben anular. El valor de la permeabilidad,  $k$ , es conocido, de modo que la ecuación 4.7 se puede representar como:

$$1 + \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (4.8)$$

llámese,  $\bar{q}$ , al peso específico del agua,  $\gamma_w$ , y despéjese de la ecuación 4.8, como se indica a continuación:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\bar{q} \quad (4.9)$$

de modo que la ecuación 4.9 se puede expresar como:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \bar{q} = 0 \quad (4.10)$$

Esta ecuación 4.10 define las condiciones generales de borde e iniciales del estrato de la figura 4.1.

#### 4.2 Solución Numérica de la Ecuación de la Consolidación Unidimensional.

De los métodos aproximados más estudiados para resolver problemas en un medio continuo, son los métodos de las funciones prueba; de estos métodos existen dos técnicas principales y son, el método de los residuos pesados y los métodos variacionales. El primero de estos métodos cuantifica la solución aproximada mediante funciones de peso que hacen que el error de aproximación sea mínimo o pequeño en algún contexto y los métodos variacionales buscan la solución de la ecuación diferencial, expresada en forma integral, al proporcionar un valor extremal a un funcional.

##### 4.2.1 Forma Variacional Simétrica o Débil de la Ecuación de la Consolidación Unidimensional.

Una vez definida la ecuación de la consolidación unidimensional 4.1 y sus condiciones de frontera 4.10, el problema a resolver es determinar una función  $v$ , tal que satisfaga a la ecuación en todos los puntos del estrato. Al integrar todos estos puntos gobernados por la ecuación 4.1, se tiene que:

$$\int_0^H v \left( c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) dz = 0 \quad (4.11)$$

en donde la función  $v$ , es un conjunto de funciones arbitrarias llamadas funciones prueba. Se puede afirmar que si



la ecuación 4.11 se cumple para cualquier  $v$ , la ecuación 4.1 se deberá satisfacer en todos los puntos del estrato.

Del mismo modo se debe satisfacer a la condición de borde 4.10 por medio de una función prueba,  $\bar{v}$ , cualquiera, en todos los puntos del estrato, así que la ecuación 4.10 evaluada en todo el estrato se puede escribir como;

$$\bar{v} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \bar{q} \right) \Big|_0^H = 0 \quad (4.12)$$

en donde  $\bar{v}$  es una función arbitraria.

Las ecuaciones 4.11 y 4.12, por ser igual a cero, se pueden representar del modo siguiente:

$$\int_0^H v \left( c_v \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) dz = \bar{v} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \bar{q} \right) \Big|_0^H \quad (4.13)$$

Al cumplirse la ecuación 4.13 para toda función,  $v$ ,  $y$ ,  $\bar{v}$ , equivale a decir que la ecuación 4.1 con sus condiciones de borde 4.10 se satisfacen en todos sus puntos. Al desarrollar la ecuación 4.13 se tiene la siguiente expresión:

$$\int_0^H v c_v \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dz - \int_0^H v \frac{\partial p}{\partial t} dz - \bar{v} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_0^H - \bar{v} \bar{q} \Big|_0^H = 0 \quad (4.14)$$

Esta forma de expresar a la ecuación con sus condiciones de borde, se le conoce como forma integral de la consolidación unidimensional. La ecuación presenta una asimetría en el primer elemento que la forma, es por esta razón que se hará la integración de este elemento por separado y a continuación se sustituirán los resultados obtenidos en la ecuación 4.14 original; llámese I al primer elemento de la ecuación 4.14.

$$I = c_v \int_0^H v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} dz \quad (4.15)$$

Procédase a integrar por partes la expresión 4.15

$$I = c_v v \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_0^H - c_v \int_0^H \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (4.16)$$

se sustituye este nuevo valor de I de la ecuación 4.16 en la ecuación 4.14, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & - c_v \int_0^H \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} dz + c_v v \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_0^H - \\ & - \int_0^H v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} dz - \bar{v} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_0^H - \bar{v} \bar{q} \Big|_0^H = 0 \quad (4.17) \end{aligned}$$

al considerar el valor de la función ,v, en forma arbitraria como se muestra a continuación

$$\bar{v} = c_v v \quad (4.18)$$

y al sustituir este valor de la función 4.18 en la ecuación 4.17 se obtiene la siguiente expresión.

$$\begin{aligned}
 & -c_v \int_0^H \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} dz + c_v v \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_0^H - \int_0^H v \frac{\partial p}{\partial t} dz - \\
 & -c_v v \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_0^H - c_v v \bar{q} \Big|_0^H = 0
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

al reducir términos y multiplicar por -1 a la ecuación 4.19, ésta resulta como se describe a continuación:

$$c_v \int_0^H \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} dz + \int_0^H v \frac{\partial p}{\partial t} dz + c_v v \bar{q} \Big|_0^H = 0 \tag{4.20}$$

Esta ecuación 4.20 representa la forma débil de la ecuación de la consolidación unidimensional. Se le da este nombre ya que como se puede observar el orden del operador es menor al que aparece en la ecuación 4.14 a pesar de ser mayor el orden de la continuidad de la función  $v$ .

#### 4.2.2 Método de Galerkin en el dominio geométrico

Uno de los procedimientos más utilizados por los métodos de los residuos pesados, para evaluar las funciones prueba, es el método de Galerkin por sus conveniencias numéricas. En este método la función prueba  $v$ , se representa de la siguiente manera:

$$v(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \phi_i(z) \tag{4.21}$$

en donde  $\beta_i$  son constantes arbitrarias y  $\phi_i(z)$  son funciones desconocidas llamadas funciones base.

Es claro que si se toman un número finito de esos términos en la serie 4.21, se obtendrá solamente una aproximación,  $v_n$ , de la función base  $v$ . De modo que la expresión 4.21 se puede escribir como:

$$v_n(z) = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i(z) \quad (4.22)$$

El método de Galerkin consiste en construir una solución aproximada al problema variacional de valores en la frontera en una dimensión finita de toda la región, así que la solución buscada,  $p$ , es aproximada mediante la prueba  $u$ , de la siguiente forma:

$$p \approx u_n(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j(z) \quad (4.23)$$

donde  $\phi_j$  son esas funciones conocidas que existen en la región en donde se desarrolla la ecuación; y los coeficientes  $\alpha_j$  son parámetros desconocidos.

El criterio que utiliza Galerkin para determinar los coeficientes  $\alpha_j$  en una ecuación en donde intervienen las aproximaciones 4.22 y 4.23, es forzar a que los valores de  $\beta_j$  de la función prueba 4.22, tengan el valor de la unidad

en el punto  $i$  y nulo los valores en todos los demás puntos. De este modo los valores de  $\alpha_j$  son únicamente los que se obtienen en los cálculos del punto en cuestión. Por lo que la función prueba se reduce a ser la función base:

$$v(z) = \phi_i(z) \quad (4.24)$$

y esto equivale a que el error de aproximación sea mínimo. Este método de Galerkin provee una estrategia elegante para la solución de ecuaciones con valores en la frontera e iniciales pero es limitado en su uso, ya que no proporciona una metodología para la construcción razonable de las funciones base. Ref. 2.

#### 4.2.3 Aproximación de Galerkin para la ecuación de la consolidación unidimensional.

Sea  $p$ , la solución buscada, aproximada mediante la prueba  $u$ , de la siguiente forma:

$$p \approx u = \sum_{i=1}^n N_i a_i = \underline{N} \underline{a} \quad (4.25)$$

Donde  $N$ , son un número finito de funciones base y  $a$ , un número finito de coeficientes desconocidos.

Sea la función prueba  $v$ , la función base propuesta por Galerkin:

$$v = N_j \quad (4.26)$$

Al sustituir la aproximación 4.25 en la ecuación 4.17 se obtiene que:

$$c_v \int_0^H \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial N_a}{\partial z} dz + \int_0^H v \frac{\partial N_a}{\partial t} dz + c_v v \bar{q} \Big|_0^H = 0 \quad (4.27)$$

De acuerdo al método de los residuos pesados la ecuación 4.27 recibe el nombre de integral de peso. Al aplicar el método de Galerkin en la ecuación 4.27 o sea al sustituir la ecuación de la aproximación 4.26 en la integral de peso, se obtiene la siguiente expresión,

$$c_v \int_0^H \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_a}{\partial z} dz + \int_0^H N_j \frac{\partial a}{\partial t} dz + c_v N_j \bar{q} \Big|_0^H = 0 \quad (4.28)$$

Ya que ésta es una ecuación en donde se trata de efectuar una aproximación exclusivamente en el estrato por medio de la variable,  $z$  se establecen las siguientes condiciones;

$$\begin{aligned} \underline{N} &= \underline{N}(z) \\ \underline{a} &= \underline{a}(t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Esto quiere decir que la función base está en función de la profundidad,  $z$ , y el coeficiente,  $\underline{a}$ , en función de la variable tiempo,  $t$ . Al sustituir las condiciones anteriores 4.29 en la ecuación 4.28 se obtiene la expresión que se indica a continuación:

$$\left( c_v \int_0^H \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_a}{\partial z} dz \underline{a} + \int_0^H N_j \underline{N} dz \frac{\partial \underline{a}}{\partial t} + c_v N_j \bar{q} \right) \Big|_0^H = 0 \quad (4.30)$$

Se hará uso de la comilla para representar la primera derivada con respecto a la profundidad,  $z$ , y al ordenar los términos de la ecuación 4.30 se obtiene la siguiente formulación.

$$\left( c_v \int_0^H N_j' \underline{N}' dz \right) \underline{a} + \left( \int_0^H N_j \underline{N} dz \right) \dot{\underline{a}} + c_v N_j \bar{q} \Big|_0^H = 0 \quad (4.31)$$

en donde

$$\dot{\underline{a}} = \frac{\partial \underline{a}}{\partial t}$$

Esta ecuación 4.31 se le identifica como "Ecuación de los residuos pasados" para la consolidación unidimensional. Al ser ésta un sistema de ecuaciones diferenciales se puede expresar en notación matricial, como:

$$\underline{K} \underline{a} + \underline{C} \dot{\underline{a}} + \underline{f} = 0 \quad (4.32)$$

donde  $\underline{K}$ ,  $\underline{C}$  y  $\underline{f}$  son:

$$\underline{K} = c_v \int_0^H N_j' N_j' dz \quad (4.33)$$

$$\underline{C} = \int_0^H N_j N_j dz \quad (4.34)$$

$$\underline{f} = c_v N_j q \Big|_0^H \quad (4.35)$$

#### 4.2.4 Métodos de Galerkin en el Dominio del Tiempo

El problema de la consolidación unidimensional representado por la ecuación 4.31 es un sistema de ecuaciones diferenciales que se caracteriza por contar con la variable del dominio tiempo, el cual es de dimensión infinita, es por esta razón éste un caso particular de los problemas de equilibrio dinámico.

En el Apéndice B del presente trabajo se desarrolla por medio del método del elemento finito la discretización para la solución del sistema de ecuaciones indicado por la ecuación 4.32.

La discretización del espacio completo del tiempo y del espacio geométrico se expresan en sistemas diferentes ya que de otro modo el dominio general contendría simultáneamente demasiadas variables, por otra parte la geometría simple del dominio tiempo no da pie al empleo de una subdivisión irregular en elementos espacio-tiempo.



La metodología para la solución de problemas de este tipo se basa en cálculos por incrementos sucesivos. (Ref. 11).

Del Apéndice B se toma la formulación general en la cual se sustituye la ecuación 4.32 y se obtiene la siguiente expresión:

$$\left( \frac{C}{\Delta t} K \theta \right) a_{n+1} + \left( -\frac{C}{\Delta t} + K(1 - \theta) \right) a_n = 0 \quad (4.36)$$

Donde  $\theta$  son los valores indicados en el Apéndice B para los diferentes métodos.

$$\theta = \frac{1}{2}, \text{ Crank - NICHOLSON}$$

$$\theta = 0, \text{ Euler, o diferencias hacia adelante}$$

$$\theta = 2/3, \text{ Galerkin}$$

$$\theta = 1, \text{ Diferencias hacia atrás}$$

#### 4.3 Aproximación del Método del Elemento Finito

Se ha discutido a lo largo de este capítulo la metodología para solucionar mediante aproximaciones la ecuación de la consolidación unidimensional en un medio continuo. Generalmente es difícil asociar los medios continuos con un modelo discreto para la representación racional de sus ecuaciones, por tanto el elemento finito da una secuencia de cómo lograr esto.

#### 4.3.1 Funciones de Forma

El método del elemento finito proporciona una técnica general y sistemática para la construcción de las funciones base para el método de Galerkin. Para poder realizar lo anterior, primero hay que dividir el estrato en un número finito de subregiones llamadas elementos finitos, estos elementos deben estar interconectados por un número finito de nodos o puntos nodales, situados sobre las fronteras de los elementos. Estos puntos nodales representan las incógnitas para la ecuación de la consolidación unidimensional o sea el exceso de la presión de agua de poro. Ver figura 4.2. No es por demás mencionar que por ser éste un caso unidimensional se emplean exclusivamente regiones lineales en su geometría.

#### 4.3.2 Funciones de Interpolación del Elemento Finito

La parte más importante en el método del elemento finito consiste en la selección de las funciones de interpolación, las cuales deben satisfacer ciertos criterios para que se logre la convergencia de la solución aproximada a la exacta de la ecuación diferencial que se este empleando. Unas características relevantes de las funciones son su geometría, el grado de aproximación y la facilidad de integración sobre el dominio del elemento.

Existe una técnica general y sistemática para la construcción de funciones base para la aproximación de Galerkin para problemas de valores en la frontera e iniciales, referencia 2, en la que se dan los valores de la unidad en el punto nodal y nulo en todos los demás. De modo que siempre se tenga un valor el punto nodal que se esté trabajando. Estas funciones base se les da el nombre de funciones de forma y se acostumbra referirlas localmente. (Ref.4).

#### 4.4 Aproximación de las Funciones de Forma

Para poder conocer en cualquier punto del elemento el exceso de la presión de agua de poro se hace por medio de la interpolación.

Para hacer la construcción de las funciones de forma, que son las funciones que permiten la interpolación, existe una regla que dice que habrán tantas funciones de forma como puntos nodales en cada elemento.

##### 4.4.1 Elementos Convencionales

La expansión polinómica de la variable unidimensional del exceso de la presión de agua de poro con respecto a la profundidad  $z$ ,  $p=p(z)$  se puede indicar como:

$$p = a_0 + a_1 z^i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.37)$$

#### 4.4.2 Interpolación Lineal

Para el caso de una interpolación lineal en donde sólo existen dos puntos nodales, la ecuación 4.27 resulta ser:

$$p = a_0 + a_1 (z) \quad (4.38)$$

Para poder expresar el valor de  $p$ , en función de los valores en los puntos nodales (Fig. 4.3) se necesita evaluar la ecuación 4.37 en tales puntos, como se indica a continuación:

$$p_1 = p \quad \left| \quad z = 0 \quad (4.39)$$

$$p_2 = p \quad \left| \quad z = 1 \quad (4.40)$$

al sustituir la ecuación 4.39 en la ecuación 4.38 se obtiene:

$$p_1 = a_0 \quad (4.41)$$

Al sustituir la ecuación 4.40 en la ecuación 4.38 resulta:

$$p_2 = a_0 + a_1 \quad (4.42)$$

De las ecuaciones 4.41 y 4.42 se obtienen:

$$a_0 = P_1 \quad (4.43)$$

$$a_1 = \frac{1}{l} (P_2 - P_1) \quad (4.44)$$

Al sustituir las ecuaciones 4.43 y 4.44 en la ecuación 4.38 resulta:

$$p = \left(1 - \frac{z}{l}\right) P_1 + \frac{z}{l} P_2 = N_1 P_1 \quad (4.45)$$

donde:  $N_1$ , se denominan funciones de interpolación y sus expresiones son:

$$N_1 = 1 - \frac{z}{l} \quad (4.46)$$

$$N_2 = \frac{z}{l} \quad (4.47)$$

y sus derivadas son:

$$N'_1 = -\frac{1}{l} dz \quad (4.48)$$

$$N'_2 = \frac{1}{l} dz \quad (4.49)$$

#### 4.4.3 Interpolación Cuadrática

Para este caso existen tres puntos nodales por lo que se requiere conocer el valor de  $p$  en otro punto adicional a los extremos, al cual se seleccionará en el centro del elemento. La ecuación 4.37 toma la forma siguiente:

$$p = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \quad (4.50)$$

Se procede a cuantificar las constantes  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  de manera similar al punto anterior y la solución resulta ser:

$$p = 1 - 3 \left( \frac{z}{l} \right) + 2 \left( \frac{z}{l} \right)^2 p_1 + 4 \left( \frac{z}{l} \right) \left( 1 - \frac{z}{l} \right) + \frac{z}{l} - 1 + 2 \left( \frac{z}{l} \right) p_3 = N_i p_i$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

$$(4.51)$$

en donde:

$$N_1 = 1 - 3 \left( \frac{z}{l} \right) + 2 \left( \frac{z}{l} \right)^2 \quad (4.52)$$

$$N_2 = 4 \left( \frac{z}{l} \right) \left( 1 - \frac{z}{l} \right) \quad (4.53)$$

$$N_3 = \left( \frac{z}{l} \right) - 1 + \left( \frac{z}{l} \right) \quad (4.54)$$

#### 4.4.4 Aproximación de la Solución en un Elemento Finito

La formulación del elemento finito, a diferencia de los métodos de las funciones prueba tradicionales, aproximan la solución en cada una de las subregiones correspondientes a los elementos finitos. Entonces, la aproximación en la región global de la estructura es seccionalmente continua.

La expresión de la forma variacional dada por Galerkin en la ecuación 4.31 es válida como ya se discutió para la región completa de la estructura. Cuando se aplica a la región de un elemento finito (HE) su expresión resulta ser:

$$\left( c_v \int_0^{HE} N_j' \underline{M}_i' dz \right) \underline{a} + \left( \int_0^{HE} N_j \underline{M}_i dz \right) \underline{a} + c_v N_j \bar{q} \Big|_0^{HE} = 0 \quad (4.55)$$

en donde los elementos del integrando deben referirse al elemento finito; la ecuación (4.55) se puede escribir matricialmente como:

$$\underline{K}_{ij}^e \underline{a} + \underline{C}_{ij}^e \underline{a} + \underline{f}_j^e = 0 \quad (4.56)$$

en donde:

$$\underline{K}_{ij}^e = c_v \int_0^{HE} N_j' \underline{M}_i' dz \quad (4.57)$$

$$\underline{C}_{ij}^e = \int_0^{HE} N_j N_i dz \quad (4.58)$$

$$\underline{f}_j^e = c_v N_j \bar{q} \quad \left| \begin{array}{l} HE \\ 0 \end{array} \right. \quad (4.59)$$

La ecuación 4.56 representa un sistema de ecuaciones diferenciales dinámico ya que interviene el tiempo como variable.

Al sustituir los valores de las funciones de forma 4.46, 4.47 y sus derivadas 4.48, 4.49 en ecuaciones las matrices  $\underline{K}_{ij}^e$  y  $\underline{C}_{ij}^e$  del sistema de ecuaciones diferenciales 4.56 se obtiene;

$$\underline{K}_{ij}^e = c_v \int_0^{HE} \left(-\frac{1}{HE}\right) \left(-\frac{1}{HE}\right) dz = -\frac{c_v}{HE} \quad (4.60)$$

en donde

$$\begin{aligned} l &= HE \\ dz &= dz \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\underline{C}_{ij}^e = \int_0^{HE} \left(1 - \frac{z}{HE}\right) \left(-\frac{z}{HE}\right) dz = -\frac{HE}{6} \quad (4.62)$$



De manera similar se obtienen los valores de  $\underline{K}_{ij}^e$  y  $\underline{C}_{ij}^e$  faltantes y en forma matricial se expresan como:

$$\underline{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{c_v}{HE} & -\frac{c_v}{HE} \\ -\frac{c_v}{HE} & \frac{c_v}{HE} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$\underline{C}^e = \begin{bmatrix} \frac{HE}{6} & \frac{HE}{3} \\ \frac{HE}{3} & \frac{HE}{6} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Con la misma analogía para determinar las matrices  $\underline{K}_{ij}^e$  y  $\underline{C}_{ij}^e$  que el anterior, se obtiene para el caso de interpolación cuadrático, las siguientes igualdades:

$$\underline{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{7c}{3HE} & -\frac{8c}{3HE} & \frac{c}{3HE} \\ \frac{8c}{3HE} & \frac{16c}{3HE} & -\frac{8c}{3HE} \\ \frac{c}{3HE} & -\frac{8c}{3HE} & \frac{7c}{3HE} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

$$\underline{C}^e = \begin{bmatrix} \frac{4 \text{ HE}}{30} & \frac{2 \text{ HE}}{30} & -\frac{\text{HE}}{30} \\ \frac{2 \text{ HE}}{30} & \frac{16 \text{ HE}}{30} & \frac{2 \text{ HE}}{30} \\ -\frac{\text{HE}}{30} & \frac{2 \text{ HE}}{30} & \frac{4 \text{ HE}}{30} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

#### 4.4.5 Propiedades de las Matrices $\underline{K}^e$ y $\underline{C}^e$

Al calcular la traspuesta de la matriz  $\underline{K}^e$  de la ecuación 4.29 se obtiene que:

$$(\underline{K}^e)^T = \underline{K}^e \quad (4.67)$$

Y si se calcula la traspuesta de la matriz  $\underline{C}^e$  de la ecuación (4.58) se obtiene:

$$(\underline{C}^e)^T = \underline{C}^e \quad (4.68)$$

Las ecuaciones 4.67 y 4.68 indican que las matrices  $\underline{K}^e$  y  $\underline{C}^e$  son simétricas, con lo que se concluye que las matrices  $\underline{K}$  y  $\underline{C}$  de los elementos finitos para la consolidación unidimensional son simétricas.

#### 4.5 Ecuación de Equilibrio del Medio Continuo Global

Si una estructura está en equilibrio, cualquier parte de ella también lo está; la inversa, también es cierta. Entonces, si se tiene garantizado el equilibrio de todos los elementos finitos en que se discretizó el medio continuo, se puede establecer el equilibrio del medio continuo global.

##### 4.5.1 Ensamble de las Ecuaciones

A fin de llevar a cabo sistemáticamente, el establecimiento de las ecuaciones de equilibrio del medio continuo global, se procede a enumerar en forma secuencial, los elementos finitos y los puntos nodales. Ver Fig. 4.2.

El equilibrio de la estructura mostrada en la Fig. 4.2 - se puede establecer al utilizar la ecuación 4.56 como se indica a continuación.

$$\underline{K}_{ij}^{(1)} \underline{a} + \underline{C}_{ij}^{(1)} \underline{a} + \underline{f}_j^{(1)} = 0 \quad (4.69)$$

$$\underline{K}_{ij}^{(2)} \underline{a} + \underline{C}_{ij}^{(2)} \underline{a} + \underline{f}_j^{(2)} = 0 \quad (4.70)$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \underline{K}_{ij}^{(n)} \underline{a} + \underline{C}_{ij}^{(n)} \underline{a} + \underline{f}_j^{(n)} \end{array} = 0 \quad (4.71)$$

En las ecuaciones anteriores 4.69 a 4.71, el número indicado en los paréntesis corresponde el número del elemento.

En forma condensada las ecuaciones 4.34 a 4.36 se pueden escribir como:

$$\sum_{e=1}^n K_{ij}^{(e)} \underline{a} + \sum_{e=1}^n C_{ij}^{(e)} \dot{\underline{a}} + \dots + \sum_{e=1}^n f_j^{(e)} = 0 \quad (4.72)$$

por el número de grados de libertad asociado a cada punto nodal. Entonces las ecuaciones de equilibrio dinámico ordenadas se pueden escribir como:

$$\bar{K} \underline{a} + \bar{C} \dot{\underline{a}} + \bar{F} = 0 \quad (4.73)$$

en donde:

$$\bar{K} = \sum_{e=1}^{n+1} K_{ij}^{(e)} \quad \bar{C} = \sum_{e=1}^{n+1} C_{ij}^{(e)} \quad \bar{F} = \sum_{e=1}^{n+1} f_j^{(e)} \quad (4.74)$$

#### 4.6 Condiciones Frontera e Iniciales

Las ecuaciones de movimiento de la estructura ecuación 4.73 deben satisfacer valores prescritos de algunos componentes. Tales valores conocidos definen las condiciones de frontera.

En la Fig. 4.2 los valores del exceso de la presión de agua de poro ( $p$ ) son nulos para una profundidad nula y un tiempo mayor que cero. Esto se indica a continuación como:

$$p \left| \begin{array}{l} = 0 \\ z=0 \\ t>0 \end{array} \right. \quad (4.75)$$

Para poder integrar las ecuaciones de equilibrio dinámico se requiere especificar el origen de movimiento, a partir del cual se desea cuantificar, de modo que se puede expresar como

$$p \left| \begin{array}{l} = \Delta \sigma \\ t=0 \end{array} \right. \quad (4.76)$$

Como se discutió en el capítulo 2 del presente trabajo en el proceso de la consolidación unidimensional no existe gasto hidráulico, hay solamente drenaje a través del esqueleto del suelo, de manera que el vector  $\underline{f}^e$  es nulo y se puede escribir el sistema de ecuaciones diferenciales 4.73 como:

$$\underline{K}a + \underline{C}\dot{a} = 0 \quad (4.77)$$

Al aplicar las condiciones de frontera e iniciales en el problema, se puede observar que facilita el manejo de los métodos numéricos utilizables para la solución del mismo.

Estas condiciones se emplearán, como se verá adelante, como datos de alimentación para el programa de computador.

#### 4.7 Aspectos Numéricos de las Ecuaciones del Elemento Finito para la Consolidación Unidimensional.

En el presente capítulo se mostró al lector, cómo se puede resolver el problema de la consolidación unidimensional por el método del elemento finito y se puede aseverar que para que sea eficiente es necesario el uso de una computadora digital. Por tanto, se requiere desarrollar un programa de computador que con la información de la geometría, el material del suelo y la carga que soporta el estrato que resuelva las ecuaciones de equilibrio dinámico de la estructura.

Este inciso demuestra los aspectos numéricos que forman parte de los algoritmos asociados al método del elemento finito.

##### 4.7.1 Solución de Sistemas de Ecuaciones Algebraicas Lineales.

El modelo matemático correspondiente al sistema de ecuaciones algebraicas lineales se acostumbra representar por la ecuación C.6.

Para el caso que se estudia en el presente trabajo la matriz de coeficientes se sigue representando por  $A$ , las incógnitas o sea el exceso de presión de agua de poro por  $a_{n+1}$  y el vector de coeficientes independientes por la multiplicación de la matriz de coeficientes conocidos  $B$  y el vector de exceso de presión de agua de poro conocido  $a_n$  representada por la ecuación B.5.

El sistema representado por la ecuación B.5 se desarrolla y se presenta su solución por el método de Cholesky en el Apéndice C. de este trabajo.

## 5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES



## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 5.1 Conclusiones

- a) La consolidación unidimensional es un problema que por sus características físicas se puede representar mediante un modelo matemático.
- b) Este problema se puede solucionar por métodos tradicionales exactos, siempre y cuando se presenten en forma simplificada. Esto implica que sea un solo material con las características indicadas en el capítulo 2.
- c) Al aplicar el método del elemento finito se obtienen soluciones muy aproximadas a los métodos llamados exactos, con la ventaja de poder tener mayor versatilidad en la composición del problema, como puede ser una estratificación de diferentes materiales en una misma

muestra de suelo, y a pesar de esta complicación, poder conocer el comportamiento de cada estrato sin que el suelo pierda su característica de continuidad.

- d) Al efectuar comparaciones entre los dos métodos anteriores para la solución del problema de consolidación unidimensional, se encuentran ventajas en los métodos exactos cuando se presenten problemas simples y en problemas complejos el método aproximado es más representativo del comportamiento del modelo físico real.
- e) El método del elemento finito por ser un método aproximado resulta ser confiable dentro de ciertos parámetros, ya que mientras más pequeños sean los intervalos de las aproximaciones, mayor será su precisión.
- f) Como se puede apreciar en el apéndice C y D, el método del elemento finito reduce las ecuaciones del medio continuo a sistemas de ecuaciones fáciles de resolver con la ayuda de un procesador electrónico y de los métodos numéricos. Con esto se logra una mayor rapidez en la búsqueda de soluciones prácticas de problemas reales.
- g) En base a las conclusiones anteriores se puede afirmar que el método del elemento finito es una herramienta numérica muy valiosa para la ingeniería, la física y las matemáticas.

## 5.2 Recomendaciones

- a) En el método de elemento finito se puede apreciar que se realizan una gran cantidad de aproximaciones. Por lo que el programa de computador que aparece en el apéndice E de este trabajo, no resuelve cualquier problema si no es alimentado con los datos correctos que cada aproximación necesita. Por lo que se recomienda hacer corridas de prueba antes de dar por definitiva cualquier solución.
  
- b) El uso del computador digital y de los métodos numéricos aproximados han llegado a sustituir algunos métodos tradicionales exactos. Por lo cual se recomienda conocer en forma más general la gran ayuda que ofrece el método del elemento finito para la solución de problemas continuos.

**6 REFERENCIAS**

## 6. REFERENCIAS

1. AGNEW, PALMER RALPH, "Ecuaciones Diferenciales", UTEHA (1968).
2. BECKER, ERIC B., GRAJAM, F., TINSLEY, CAREY AND ODEN J., "Finite Elements an Introduction", Volumen I, PRENTICE-HALL (1981).
3. Cervantes Beltrán, Ramón, "Ecuaciones de Movimiento de los Suelos", División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, (En prensa).
4. Cervantes Beltrán, Ramón, Porrás Silva, Víctor, "Introducción al Método del Elemento Finito", División de Estudios de Posgrado. Facultad de Ingeniería, UNAM (1982).
5. Graig, R. F., "Mecánica de Suelos", Logos (1974)
6. Juárez Badillo, Eulalio, Rico Rodríguez, Alfonso, "Mecánica de Suelos", Limusa (1980).

7. Organik, E. I., "Fortran IV", Fondo Educativo Interamericano (1972).
8. Terzaghi, Karl, "Theoretical Soil Mechanics", John Wiley & Sons (1943).
9. Vera Badillo, Fernando, "Solución de Ecuaciones Algebraicas en el Análisis Estructural", tesis profesional, Escuela de Ingeniería, Universidad La Salle (1980).
10. Zienkiewicz, O. C., Cheung, Y. K., "The Finite Element Method In Structural and Continuum Mechanics", MC'GROW-HILL (1967).
11. Zienkiewicz, O. C., "El Método de los Elementos Finitos", Reverte (1980).

## APENDICE A PROBLEMAS

### Problema No. 1

Obtégase por medio de la solución de Terzaghi,:

- a) El asentamiento de consolidación ( $s_c$ )
- b) Las curvas de exceso de presión de los poros ( $p$ ) para los tiempos ( $t$ ), del suelo que tiene las siguientes características:

$P = 5.0 \quad \frac{\text{ton}}{\text{m}^2}$  Carga o incremento de esfuerzo

$E = 5000 \quad \frac{\text{tf}}{\text{m}^2}$  Módulo de elasticidad,

$\nu = 0.4$  Relación de Poisson

**APENDICE A**

**PROBLEMAS**



$k = 1.0 \times 10^{-5}$	$\frac{m}{\text{día}}$	Permeabilidad del suelo
$w = 2.0$	$\frac{tf}{m^3}$	Peso Volumétrico del material
$H = 5.0$	$m$	Altura del estrato

Fig. (A.1)

Desarrollo

$$D = \frac{E}{(1 + \mu^2)} \frac{(1 - \mu^2)}{(1 - \mu^2)} = 10,714.29 \quad \frac{tf}{m^2}$$

$$c_v = \frac{k D}{\gamma_w} = 0.05357 \quad \frac{m^2}{\text{día}}$$

$$m_v = \frac{k}{c_v \gamma_w} = 9.333 \times 10^{-5} \quad \frac{m}{tf}$$

$$s_{C'} = m_v \Delta \sigma H = 0.23 \quad cm$$

El asentamiento de consolidación que alcanzará esta muestra de suelo será de 23 cm.

Para calcular el exceso de presión de agua de los poros se utilizará la serie de la ecuación 3.9 que se escribe a continuación:

$$p(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \Delta c}{M} \operatorname{sen}(Mz) e^{-M^2 T_v}$$

donde:

$$M = \frac{1}{2} \pi (2n + 1)$$

$$z = \frac{x}{H}$$

$$t_v = \frac{c_v t}{H^2}$$

Para este problema se empleará una aproximación de  $n = 8$ . Los resultados se representan para este problema en la tabla (A.1) y se grafican sus respectivas curvas en la figura (A.2).

### 3.3.2 Problema No. 2

Calcúlese para el suelo estratificado de la figura (A.3) los siguientes puntos:

- a) El asentamiento de consolidación ( $s_c$ )
- b) La presión de exceso de los poros ( $p$ )
- c) El grado de consolidación ( $U(\%)$ )
- d) Tabúlese y trácense las gráficas de los resultados obtenidos.

Considérense para el presente problema dos casos:

I) Sistema Semipermeable (o semicerrado) Fig. (A.4)

II) Sistema permeable (o abierto) Fig. (A.5)

Los datos de las diferentes capas del suelo son:

DATOS	$c_v$ ( $\frac{m}{día}$ )	$m_v$ ( $\frac{m}{ton}$ )	$k$ ( $\frac{m}{día}$ )
Capa 1	10	0.01	0.1
Capa 2	5	0.001	0.005
Capa 3	20	0.01	0.2
Capa 4	40	0.001	0.4

El incremento de esfuerzo o carga aplicada al suelo es:

$$p = 10 \frac{ton}{m^2}$$

- a) El asentamiento de consolidación es único (ignórese su drenaje) ya que solamente es afectado por el ritmo de asentamiento.

$$s_c = \int_0^h m_v \Delta \sigma dz$$

al efectuar la integración se obtiene que:

$$s_c = m_v \Delta \sigma h$$

así que para cada capa el asentamiento parcial es:

$$\begin{aligned} s_{c1} &= 2 \quad \text{m} \\ s_{c2} &= 0.12 \quad \text{m} \\ s_{c3} &= 2 \quad \text{m} \\ s_{c4} &= 0.28 \quad \text{m} \end{aligned}$$

por lo que el asentamiento final es la suma de los parciales:

$$s_{cf} = s_{c1} + s_{c2} + s_{c3} + s_{c4}$$

$$s_{cf} = 4.40 \text{ m}$$

Para poder continuar con el problema es necesario encontrar valores que sean equivalentes de los estados particulares de cada capa al de todo el suelo, ya que si no se hace de esta forma, los resultados presentarían discontinuidades en las gráficas y de tal modo que no serían representativos del problema.

Obtégase el coeficiente volumétrico equivalente del suelo estratificado que se representa como  $m_v$  eq :

$$m_v \text{ eq} = \frac{m_c \ f}{H} = 0.006 \frac{m^2}{\text{ton}}$$

Calcúlese la permeabilidad media (vertical) del suelo. El gasto hidráulico (Q) está definido por la multiplicación de la velocidad (v) por el área (A) como se indica a continuación:

$$Q = v A$$

Para la consolidación unidimensional el gasto y el área es la misma en todas las capas para un suelo estratificado, siendo la velocidad para cada una de ellas:

$$v_i = \frac{Q}{A}$$

Darcy comprobó que para velocidades pequeñas el gasto queda expresado por:

$$Q = \frac{dv}{dt} = A k i$$

Así que la velocidad se puede representar por:

$$v = k i = k \frac{h}{l}$$

Al expresar la pérdida de carga (h) y el espesor de la capa (l) para un caso particular el gasto se puede presentar como se indica a continuación:

$$Q = k_1 \frac{\Delta h_1}{l_1} A$$

o sea:

$$Q = k_1 \frac{\Delta h_1}{l_1} A + k_2 \frac{\Delta h_2}{l_2} A + \dots + k_n \frac{\Delta h_n}{l_n} A$$

se despeja el incremento de pérdida de carga ( $\Delta h_1$ ):

$$\Delta h_1 = \frac{Q l_1}{A k_1}$$

Llámense a la suma de incremento de pérdida de carga ( $\Delta h_i$ ) pérdida de carga total ( $h$ ), a la suma de espesores ( $l_i$ ) de las capas, espesor total ( $l$ ) y a la ( $k_{eq}$ ) permeabilidad equivalente, de modo que la pérdida total se expresa como:

$$h = \frac{Ql}{A k_1} = \frac{Ql}{A k_1} + \frac{Ql}{A k_2} + \dots + \frac{Ql}{A k_n}$$

y al despejar la permeabilidad equivalente se obtiene la siguiente ecuación:

$$k_{eq} = \frac{l}{\frac{l}{k_1} + \frac{l}{k_2} + \dots + \frac{l}{k_n}}$$

al sustituir valores de este problema en esta ecuación se obtiene como resultado el que se presenta a continuación:

$$k_{eq} = 0.015 \frac{m}{día}$$

para obtener el coeficiente de consolidación equivalente ( $c_v \text{ eq}$ ) se logra por medio de la siguiente expresión:

$$c_v \text{ eq} = \frac{k_{\text{eq}}}{m_v \text{ eq} \gamma_w}$$

por lo que al sustituir los datos requeridos se obtiene que:

$$c_v \text{ eq} = 2.564 \frac{\text{m}^2}{\text{día}}$$

Resumen de datos y resultados importantes:

$$P = 10 \quad \frac{\text{ton}}{\text{m}^2}$$

$$c_v \text{ eq} = 2.564 \quad \frac{\text{m}^2}{\text{día}}$$

$$m_v \text{ eq} = 0.006 \quad \frac{\text{m}^2}{\text{día}}$$

$$k_{\text{eq}} = 0.016 \quad \frac{\text{m}}{\text{día}}$$



## b) Grado de consolidación

Para obtener el grado de consolidación ( $U\%$ ) de una muestra de suelo se realiza por medio de la serie escrita a continuación:

$$U\% = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-M^2 T_v}$$

donde:

$$M = \frac{\pi}{2} (2n + 1)$$

$$T_v = \frac{c_v t}{H^2}$$

a  $T_v$  como se vio anteriormente en el capítulo 3 se le llama factor tiempo y es adimensional.

## c) Exceso de presión de agua de los poros

Esta sección del problema se resuelve por medio de la ecuación No. 3.20 al igual como se hizo en el problema No. 1.

**Caso I Sistema semicerrado o simipermeable****b) Resultados del grado de consolidación**

Tabla (A.2)

Gráfica (A.6)

**c) Resultados del exceso de presión de poro**

Tabla (A.3)

Gráfica (A.7)

**Caso II Sistema abierto o semipermeable**

Para este caso en que hay drenaje de agua en ambas fronteras (superior e inferior) el suelo, la constante del espesor total del suelo ( $H$ ) es necesaria dividirla entre dos para no modificar la fórmula. De este modo los resultados obtenidos al resolver la serie, son representativos de la mitad de la parábola de la isocrona y al ser esta figura simétrica es posible representarla totalmente con estos datos, como se muestra en la figura (A.8)

## b) Resultado del grado de consolidación

Tabla (A.4)  
Gráfica (A.9)

## c) Resultados del exceso de presión de poro

Tabla (A.5)  
Gráfica (A.10)

## A.1 Problema 3

Obtégase por medio del MEF el exceso de la presión de agua de poro para un suelo semipermeable de un espesor de 5 m de profundidad, un coeficiente de consolidación  $c_v = 0.05357 \text{ m}^2/\text{día}$  al aplicar una fuerza uniforme repartida de  $5 \text{ ton/m}^2$ . Ver figura del problema No. 1 representada por la figura A.1.

- a) En este problema se dividirá el medio continuo en tres elementos finitos iguales de longitud, por lo que tenemos que el:

Número de elementos finitos	NEF = 3
Número de puntos de la estructura	NPE = 4
Tamaño del elemento finito	HE = 5/3

Como ya se vió en el capítulo 4 el proceso de la consolidación unidimensional está gobernada por la ecuación 4.31, go bernar en forma aislada a todos los elementos que interviengan en la malla formada por éstos. De manera que esta ecuación para cada elemento finito se exprese a continuación co mo:

$$\left( c_v \int_0^{HE} N_j N_i dz \right) \underline{a} + \left( \int_0^{HE} N_j N_i dz \right) \underline{a} - c_v N_j q \Bigg|_0^{HE} = 0$$

$$\text{para } (1, j = 1, 2, 3, 4) \quad (\text{A.1})$$

La ecuación representa un sistema dinámico o sea un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\underline{K}^e \underline{a} + \underline{C}^e \underline{a} + \underline{f}^e = 0$$

en donde los valores de las matrices  $\underline{K}^e$  y  $\underline{C}^e$  son:

$$\underline{K}_{ij}^e = c_v \int_0^{HE} N_j N_i dz \quad (\text{A.2})$$

$$\underline{C}_{ij}^e = \int_0^{HE} N_j N_i dz \quad (\text{A.3})$$

En el proceso de la consolidación de un suelo no existe un gasto hidráulico, hay solamente drenaje através de los poros del esqueleto; de manera que el vector  $\underline{f}^e = 0$ , y se escribe como:

$$\underline{f}_j^e = 0 \quad (\text{A.4})$$

en la ecuación A.2 intervienen las derivadas de las funciones de forma y éstas se representan como:

$$\frac{d N_1}{d z} = - \frac{1}{H E} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d N_2}{d z} = \frac{1}{H E} \quad (\text{A.5})$$

que al sustituirlas en la ecuación A.2 de la matriz  $\underline{K}_{ij}^e$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \underline{K}_{ij}^e &= c_v \int_0^{H E} N_j' N_i' dz \\ &= c_v \int_0^{H E} \left( - \frac{1}{H E} \right) \left( \frac{1}{H E} \right) dz \\ &= - \frac{c_v}{H E} \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

de manera similar se obtienen los valores faltantes de la matriz  $\underline{K}^e$  y de la matriz  $\underline{C}^e$ , pudiendo expresarse matricialmente como:

$$\underline{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{c_v}{HE} & -\frac{c_v}{HE} \\ -\frac{c_v}{HE} & \frac{c_v}{HE} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\underline{C}^e = \begin{bmatrix} \frac{HE}{3} & \frac{HE}{6} \\ \frac{HE}{6} & \frac{HE}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

se sustituyen los valores numéricos de  $HE = 5/3$  y  $c_v = 0.05357$  en las matrices de A.8 y A.9:

$$\underline{K}^e = \begin{bmatrix} 0.032 & -0.032 \\ -0.032 & 0.032 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\underline{C}^e = \begin{bmatrix} 0.556 & 0.278 \\ -0.278 & 0.556 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

las matrices A.10 y A.11 representan las matrices  $\underline{K}$  y  $\underline{C}$  de cada elemento.

El problema descriptivo consta de 3 elementos, por lo que son 4 sus puntos nodales. Esto quiere decir que las matrices de la estructura debieran ser de cuatro renglones por cuatro columnas, pero si se toma en cuenta que el exceso de la presión de agua de poro para una profundidad cero es igual a cero. La condición anterior reduce el número de incógnitas a tres, por lo tanto las matrices  $\underline{K}$  y  $\underline{C}$  son tres renglones por tres columnas ( 3 X 3 ).

Para el presente problema en donde la permeabilidad es la misma en todo el suelo y el tamaño de los tres elementos finitos es la misma se tiene que las matrices  $\underline{K}^e$  y  $\underline{C}^e$  son iguales para los tres. Al ensamblar las matrices A.10 y A.11 para obtener las matrices del sistema global se obtiene:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 0.064 & - 0.032 & 0 \\ - 0.032 & 0.064 & - 0.032 \\ 0 & 0.032 & 0.032 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 1.112 & 0.278 & 0 \\ 0.278 & 1.112 & 0.278 \\ 0 & 0.278 & 0.556 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Existen varios métodos numéricos para el ensamblaje de matrices por lo que solamente se muestra gráficamente un tipo de arreglo matricial ensamblado en la figura 4.4.

Una vez conocidas las matrices de la estructura se sustituyen en la ecuación 4.27, y se obtiene el siguiente sistema:

$$\underline{K} \underline{a} + \underline{C} \dot{\underline{a}} = 0 \quad (\text{A.14})$$

Solución de ecuaciones de primer orden por medio de esquema de recurrencia de dos puntos.

Este esquema de recurrencia se presenta en el apéndice B y la solución general para este tipo de problemas está dada por la fórmula que se presenta a continuación:

$$\left( \frac{\underline{C}}{\Delta t} + \underline{K} \theta \right) \underline{a}_{n+1} + \left( -\frac{\underline{C}}{\Delta t} + \underline{K} (1 - \theta) \right) \underline{a}_n + \underline{f} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Prosiguiendo con el problema, el intervalo de tiempo que se propone para las primeras cien interacciones es  $t = 1$  día y como se puede ver en el apéndice B, la aproximación más adecuada para estos casos es la propuesta por Galerkin en donde  $\theta = 2/3$ . Se sustituyen estos valores en la ecuación A.15, como ya se sabe que  $\underline{f} = 0$ , se obtiene:

$$\left( \underline{C} + \Delta t \frac{2}{3} \underline{K} \right) \underline{a}_{n+1} - \left( \underline{C} - \Delta t \left( 1 - \frac{2}{3} \right) \underline{K} \right) \underline{a}_n = 0 \quad (\text{A.16})$$



Al sustituir los valores de las matrices  $\underline{K}$  y  $\underline{C}$ , obtenidos en las ecuaciones A.12 y A.13 respectivamente, la ecuación A.16, además se realizan operaciones, se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} 1.155 & 0.257 & 0 \\ 0.257 & 1.155 & 0.257 \\ 0 & 0.257 & 0.577 \end{bmatrix} \underline{a}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1.091 & 0.289 & 0 \\ 0.289 & 1.091 & 0.289 \\ 0 & 0.289 & 0.545 \end{bmatrix} \underline{a}_n \quad (\text{A.17})$$

El sistema A.17 se puede expresar en forma matricial simplificada, como:

$$\underline{A} \underline{a}_{n+1} = \underline{C} \underline{a}_n \quad (\text{A.18})$$

o bien:

$$\underline{A} \underline{a}_{n+1} - \underline{C} \underline{a}_n = 0 \quad (\text{A.19})$$

Las condiciones iniciales del problema se conocen ya que el incremento de esfuerzo del estrato es  $\Delta p = 5 \text{ Kg/m}^2$  y como el exceso de la presión de agua de poro en el suelo para un tiempo cero es igual al incremento del esfuerzo en todo el estrato, el vector  $\underline{a}_n$  resulta ser:

$$\underline{a}_n = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{para } p \Big|_{t=0} = \Delta p \quad \text{en } 0 \leq z \leq H \quad (\text{A.20})$$

Este sistema de ecuaciones algebraicas A.21 que por ser positivas definidas y simétrica, se puede solucionar por el método de Cholesky.

Este método de resolver sistemas de ecuaciones de primer grado se explican en el apéndice C.

La solución del problema o sea el exceso de presión de agua de poro en los puntos está dada por el vector  $\underline{z}_{n+1}$ . Este vector solución toma el valor de  $\underline{z}_n$ , que al sustituirlo en la ecuación A.22, el vector  $\underline{B}$  adquiere una nueva expresión. Este es un proceso sucesivo de interacciones, en donde los nuevos valores del vector  $\underline{B}$  se sustituyen en la ecuación A.21 para poder resolver el sistema indefinidamente.

Los resultados de estas primeras 100 interacciones se presentan en la figura (A.11).

Para facilidad operativa en este problema se realiza un cambio en el incremento de tiempo a partir de las 100 interacciones, el cambio se refiere a un incremento de 1 a 10 días, esto es posible ya que las pendientes de las isocronas son más suaves al aumentar el tiempo.

Los resultados de esta segunda fase del problema se presentan en la figura (A.12).

**Problema No. 4**

Resuélvase por medio del método del elemento finito el problema No. 1 expuesto en el capítulo 3. Para este problema divídase en una malla de diez elementos y procédase a solucionarlo con una aproximación de 0 propuesta por Galerkin y un incremento de un día para todos los tiempos. Compárense los resultados.

Los resultados se presentan en las gráficas de las figuras, (A.13) y (a.14).

**Problema No. 5**

Resuélvase por medio del MEF el problema No. 2 compárense los resultados.

Caso I, y figura A.15

Caso II, y figura A.16

APENDICE B

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES  
DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER  
ORDEN.

**APENDICE B SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES  
DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN**

El modelo correspondiente a la ecuación de equilibrio del medio continuo indicada por la ecuación 4.27 que se escribe a continuación:

$$\underline{K} \underline{a} + \underline{C} \underline{\dot{a}} + \underline{f} = 0 \quad (\text{B.1})$$

se puede solucionar mediante procedimientos clásicos de ecuaciones diferenciales lineales, (Ref. 1).

Pese a las diversas posibilidades de solución analítica, la solución real de los problemas de régimen transitorio es generalmente difícil e incluso es desconocido en casos no lineales. Por consiguiente en este apéndice se emplean la discretización por elementos finitos y las funciones de interpolación (Ref. 10) como las estudiadas en el Capítulo 4 para resolver sistemas de ecuaciones de la forma representada por la ecuación B.1.

En el problema de la consolidación unidimensional se supone que las funciones de forma " $N$ " incluyen coordenadas independientes del problema y " $\underline{a}$ " esté en función de otra variable que implica al dominio tiempo; y éste es de dimensión infinita. Para los cálculos de la ecuación B.1 se tratarán con dominios de tiempos finitos, repitiendo los cálculos para los dominios sucesivos variando las condiciones iniciales. El proceso para encontrar la solución será similar a los métodos de cálculo por incrementos sucesivos.

### B.1 Discretización del problema

Se efectúa la discretización con el tiempo como variable independiente de modo que la aproximación de la ecuación.

$$\underline{a} \approx \hat{\underline{a}} = \sum N_i \underline{a}_i$$

En donde  $\underline{a}_i$  representa un conjunto de variables nodales de " $\underline{a}$ " en un instante " $i$ ".

Las funciones de forma " $N_i$ " es un escalar

A esta discretización se le llama parcial y es esencialmente útil ya que el subdominio no depende del tiempo y se le da el nombre de prismático.

## B.2 Funciones de forma

El polinomio de menor grado necesario para la función de forma " $N_i$ " es de primer grado, puesto que en la ecuación sólo aparecen derivadas primeras; de modo que se considera un elemento típico de longitud " $t$ ", tomando " $a_i$ " en los nodos los valores " $a_n$ " y " $a_{n+1}$ " como se presenta en la figura B.1.

Por lo que las funciones de forma se pueden escribir en variables locales como:

$$N_n = 1 - \xi$$

$$N_{n+1} = \xi$$

donde

$$0 < \xi < 1 \quad \text{y} \quad \xi = \frac{t}{\Delta t}$$

Y las derivadas de las funciones son:

$$N'_n = -\frac{1}{\Delta t}$$

$$N'_{n+1} = \frac{1}{\Delta t}$$

### B.3 Solución general del sistema $\underline{K}\dot{\underline{a}} + \underline{C}\dot{\underline{a}} + \underline{f} = 0$

La forma integral de la ecuación B.1 se puede expresar como:

$$\int_0^1 w_j \left[ \underline{C} (\underline{a}_n \dot{N}_n + \underline{a}_{n+1} \dot{N}_{n+1}) + \underline{K} (\underline{a}_n N_n + \underline{a}_{n+1} N_{n+1}) + \underline{f} \right] dz = 0 \quad (\text{B.2})$$

Ya que en el problema intervienen los valores iniciales, uno de los conjuntos de parámetros " $\underline{a}_n$ " se supone conocido y la ecuación servirá para calcular " $\underline{a}_{n+1}$ " de forma aproximada.

Así que la expresión B.2 se puede expresar como:

$$\left( \underline{K} \int_0^1 w_j z dz + \underline{C} \int_0^1 w_j \frac{dz}{\Delta t} \right) \underline{a}_{n+1} + \left( \underline{K} \int_0^1 w_j (1-z) dz - \underline{C} \int_0^1 w_j \frac{dz}{\Delta t} \right) \underline{a}_n + \int_0^1 w_j \underline{f} dz = 0 \quad (\text{B.3})$$



Las matrices  $\underline{K}$  y  $\underline{C}$  se suponen independientes del tiempo y la ecuación B.3 se puede expresar como:

$$\left( \frac{\underline{C}}{\Delta t} + \underline{K} \theta \right) \underline{a}_{n+1} + \left( -\frac{\underline{C}}{\Delta t} + \underline{K} (1-\theta) \right) \underline{a}_n + \underline{f} = 0 \quad (\text{B.4})$$

donde:

$$\theta = \frac{\int_0^1 w_j \xi \, d\xi}{\int_0^1 w_j \, d\xi}$$

$$\underline{f} = \frac{\int_0^1 w_j \underline{f} \, d\xi}{\int_0^1 w_j \, d\xi}$$

Como  $\underline{a}_n$  y  $\underline{f}$  son conocidos se puede expresar la ecuación B.4 del siguiente modo:

$$\underline{A} \underline{a}_{n+1} + (\underline{B} \underline{a}_n + \underline{f}) = 0$$

o bien

$$\underline{A} \underline{a}_{n+1} = (-\underline{B} \underline{a}_n - \underline{f})$$

Es conveniente suponer que a la función  $\underline{f}$  se le aplique la misma interpolación que a la matriz de incógnita " $\underline{a}$ " así que:

$$\underline{f} = \underline{f}_{n+1} \theta = \underline{f}_n (1-\theta)$$

Para el caso de la consolidación unidimensional el valor de  $f$  es cero por lo que la ecuación B.4 se puede expresar como:

$$\underline{A} \underline{a}_{n+1} = \underline{B} \underline{a}_n \quad (\text{B.5})$$

Existen varias posibilidades de valores para  $\theta$  que resuelven la ecuación B.4 establecidos por los siguientes métodos:

$\theta = 0$  Euler o diferencias hacia adelante .

$\theta = \frac{1}{2}$  Crank Nicholson  
2

$\theta = \frac{2}{3}$  Galerkin  
3

$\theta = 1$  Diferencias hacia atrás .

#### B.4 Comparación de los Métodos

Para tener una idea más clara de la aproximación de cada uno de los métodos de aproximación del valor de  $\theta$  se resolverá el siguiente problema.

Resuélvase por método exacto y aproximado la ecuación dinámica de la forma:

$$\underline{K} \underline{a} + \underline{C} \dot{\underline{a}} + \underline{f} = 0$$

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

siendo:

$$K y C = 1$$

y:

$$\underline{f} = 0$$

para:

$$\underline{a} \Big|_{t=0} = 1$$

a) Solución Exacta

La ecuación es homogénea y de primer orden, que se puede escribir como:

$$\frac{d a}{d t} = - a$$

por lo que

$$a = c_1 e^{-\mu t}$$

como la ecuación auxiliar es

$$\mu + 1 = 0$$

El valor de  $\lambda$  es

$$\lambda = -1$$

así que

$$\underline{a} = c_1 e^{-t}$$

y por la condición inicial el valor de  $c_1$  es:

$$\underline{a} \Big|_{t=0} = 1 = c_1$$

de modo que la solución exacta es

$$\underline{a} = e^{-t}$$

Para la comparación de gráficas los valores de esta solución se presentan en la Tabla B.1

#### b) Solución Aproximada

La ecuación B.4 se puede expresar para este problema como:

$$\left( \frac{1}{\Delta t} + 0 \right) a_{n+1} = \left( \frac{1}{\Delta t} - (1 - 0) \right) a_n$$

Si se dan valores de .5 y .9 a  $\Delta t$  se obtienen los resultados de la Tabla B.2 y en las gráficas que para cada caso son como sigue a continuación.

para  $\phi = 0$  Fig. B.2

$\phi = \frac{1}{2}$  Fig. B.3

$\phi = \frac{2}{3}$  Fig. B.4

$\phi = 1$  Fig. B.5

APENDICE C

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES  
ALGEBRAICAS LINEALES.

#### APENDICE C SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES.

Una gran cantidad de problemas en el campo de la física y las matemáticas se pueden representar mediante modelos. Los cuales al resolver sus ecuaciones de equilibrio nos conducen a ecuaciones algebraicas lineales, éstas en muchas ocasiones resultan ser sistemas muy grandes, que sólo es posible resolverlos con ayuda de métodos numéricos y de una computadora.

Se han desarrollado muchos métodos para diferentes problemas, que dependen de la complejidad de las matrices que la forman.

Podemos mencionar métodos como lo son los que se basan fundamentalmente en la eliminación Gaussiana, llamados directos o los adaptados a las computadoras llamados compactos. Ref. 9.

En el desarrollo de los métodos compactos está el método clásico de la eliminación Gaussiana, en el cual se van eliminando una a una las incógnitas quedando un sistema que se resuelve de atrás hacia adelante. Existen métodos matriciales para matrices no simétricas, y la característica de estos métodos consiste en utilizar la matriz normalizada inferior en el caso de Gauss y superior en el caso de Crout, en el caso que las matrices sean simétricas se utiliza un método modificado de las anteriores teorías, que como se basan en los mismos principios, le es llamado de Gauss-Crout.

Existen formas particulares que adoptan las matrices las cuales es posible resolver con métodos que sean más eficientes para cada caso, como se muestra en la referencia 2, uno de estos métodos es el de Cholesky llamado también método de la raíz cuadrada y es aplicable al caso en que la matriz de coeficientes  $A$  es simétrica y positiva definida, como se verá más adelante es el que mejor se adapta a las necesidades de este trabajo.

### C.1 Solución de ecuaciones algebraicas lineales

### C.2 Métodos compactos



La notación del sistema de  $n$  ecuaciones simultáneas lineales es:

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + \dots + A_{1n}x_n = b_1 \quad (C.1)$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + \dots + A_{2n}x_n = b_2 \quad (C.2)$$

$$A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + \dots + A_{3n}x_n = b_3 \quad (C.3)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + A_{n3}x_3 + \dots + A_{nn}x_n = b_n \quad (C.4)$$

al utilizar notación matricial, el sistema de ecuaciones dado por las ecuaciones C.1 a C.4 se puede escribir como:

$$\begin{array}{ccccccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} & x_1 & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} & x_2 & b_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} & x_3 = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} & x_n & b_n \end{array} \quad (C.5)$$

La notación compacta de la ecuación C.5 es:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b} \quad (C.6)$$

en donde  $\underline{A}$  es una matriz de coeficientes cuadrada de  $n \times n$ ,  $\underline{x}$  es un vector cuyos elementos son las incógnitas del sistema de ecuaciones y  $\underline{b}$  es el vector formado por los coeficientes independientes de dicho sistema.

Existe un teorema fundamental del álgebra lineal que dice (Ref. 9) "Dada una matriz  $\underline{A}$  de orden  $n \times n$  y  $\underline{A}_k$  es una matriz principal correspondiente a los  $k$ -ésimos renglones y columnas de  $\underline{A}$ , si el determinante de  $\underline{A}_k$  es diferente de cero,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Lo que implica que  $\underline{A}$  es no singular, existe una matriz triangular inferior única  $\underline{L}$  y una matriz triangular superior  $\underline{U}$  tal que el producto de las dos matrices triangulares es igual a la matriz  $\underline{A}$ , con la condición que una cualesquiera de las matrices triangulares debe estar normalizada".

De acuerdo con el teorema anterior se puede escribir la expresión siguiente:

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{U} \quad (\text{C.7})$$

Al sustituir la ecuación C.7 en la ecuación C.6 se tiene:

$$\underline{L} \underline{U} \underline{x} = \underline{b} \quad (\text{C.8})$$

Con base en la ecuación C.8 se puede efectuar la transformación siguiente:

$$\underline{U} \underline{x} = \underline{y} \quad (\text{C.9})$$

En donde  $\underline{y}$  es un vector de dimensión  $n$ . Al sustituir la ecuación C.9 en la ecuación C.8 resulta:

$$\underline{L} \underline{y} = \underline{b} \quad (\text{C.10})$$

Al proceso de obtener los valores de  $\underline{L}$  y  $\underline{U}$  se conoce con el nombre de triangulación y de acuerdo con la ecuación C.8 es independiente del vector  $\underline{b}$ .

En el sistema de ecuaciones dado por la ecuación C.10 se conocen el vector  $\underline{b}$  y la matriz  $L$ , por lo que al resolver tal sistema se obtiene el vector  $\underline{y}$ .

Por ser  $\underline{L}$  una matriz triangular inferior, la solución de la ecuación C.10 se conoce con el nombre de sustitución hacia adelante.

Una vez calculado el vector  $\underline{y}$  se puede resolver la ecuación C.9 para cuantificar el vector  $\underline{x}$ . Debido a que  $\underline{U}$  es una matriz triangular superior, a la solución de la ecuación C.9 se le conoce con el nombre de sustitución hacia atrás.

Para la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales por los métodos compactos, el esquema general que se utiliza se resume a continuación:

- a) Obtención de las matrices triangulares  $\underline{L}$  y  $\underline{U}$  (triangulación), mediante la ecuación C.7.
- b) Obtención del vector auxiliar  $\underline{y}$  (sustitución hacia adelante), mediante la ecuación C.10.
- c) Obtención del vector incógnita  $\underline{x}$  (sustitución hacia atrás) mediante la ecuación C.9.

### C.3 Método de Cholesky

El método de Cholesky llamado también método de raíz cuadrada, es aplicable al caso en que la matriz de coeficientes  $\underline{A}$  es simétrica positiva definida.

La condición de simetría para la matriz cuadrada  $\underline{A}$  se indica a continuación:

$$\underline{A} = \underline{A}^T \quad (\text{C.11})$$

Además la condición de triangulación se puede escribir como:

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{D}^{-1} \underline{D} \underline{U} \quad (\text{C.12})$$

Donde  $\underline{D}$  es una matriz diagonal formada por las diagonales normalizadas de  $\underline{L}$  o de  $\underline{U}$ , y por lo tanto también simétrica es decir:

$$\underline{D} = \underline{D}^T \quad (\text{C.13})$$

Al hacer las transformaciones siguientes:

$$\underline{\bar{L}} = \underline{L} \underline{D}^{-1} \quad (\text{C.14})$$

Donde  $\underline{L}$  resulta normalizada, y la ecuación C.10 se puede escribir como:

$$\underline{\bar{A}} = \underline{L} \underline{D} \underline{U} \quad (\text{C.15})$$

Al hacer que satisfaga la condición dada por la ecuación C.11 se obtiene:

$$\underline{L} \underline{D} \underline{U} = \underline{U}^T \underline{D}^T \underline{L}^{-T} \quad (\text{C.16})$$

De la cual se puede deducir lo siguiente:

$$\underline{L} = \underline{U}^T \quad (\text{C.17})$$

Al sustituir ésta en la ecuación C.13 se obtiene:

$$\underline{A} = \underline{U}^T \underline{D} \underline{U} \quad U_{ii} = 1 \quad (\text{C.18})$$

Pudiéndose escribir:

$$\underline{A} = \underline{U}^T \underline{D}^{1/2} \underline{D}^{1/2} \underline{U} \quad (\text{C.19})$$

Donde la matriz triangular superior  $U$  está normalizada. Si se define la matriz triangular superior no normalizada mediante la expresión siguiente:

$$\bar{U} = D^{1/2} U \quad (C.20)$$

y por lo tanto, en la transpuesta resulta ser:

$$\bar{U}^T = U^T D^{1/2} \quad (C.21)$$

al sustituir las ecuaciones C.20 y C.21 en la ecuación C.19 resulta que:

$$\underline{A} = \bar{U}^T \bar{U} \quad (C.22)$$

La ecuación C.22 representa el proceso de triangulación para el método de Cholesky. En los desarrollos sucesivos la matriz triangular superior no normalizado se presenta únicamente con la letra  $\underline{U}$ , sin la raya superior.

#### C.4 Triangulación

Al analizar los elementos por columna de  $\underline{A}$  de la ecuación C.22 producto de  $\underline{U}^T \underline{U}$ , de cada elemento de  $\underline{A}$  en cuestión y despejando los elementos de las matrices triangulares se tiene:

Para la primera columna de la matriz  $\underline{A}$

$$U_{11} = A_{11} \quad (\text{C.23})$$

Segunda columna de  $\underline{A}$  se tiene

$$U_{12} = A_{12}/U_{11} \quad (\text{C.24})$$

$$U_{22} = A_{22} - U_{12} \quad (\text{C.25})$$

Tercera columna de  $\underline{A}$  se escribe:

$$U_{13} = A_{13}/U_{11} \quad (\text{C.26})$$

$$U_{23} = (A_{23} - U_{12}U_{13})/U_{22} \quad (\text{C.27})$$

$$U_{33} = A_{33} - U_{13} - U_{23} \quad (\text{C.28})$$

Cuarta columna de  $\underline{A}$

$$U_{14} = A_{14}/U_{11} \quad (\text{C.29})$$

$$U_{24} = (A_{24} - U_{12}U_{14})/U_{22} \quad (\text{C.30})$$

$$U_{34} = (A_{34} - U_{13}U_{14} - U_{23}U_{24})/U_{33}$$

$$U_{44} = A_{44} - U_{14} - U_{24} - U_{34} \quad (\text{C.32})$$

Para la enésima columna

$$U_{1n} = A_{1n}/U_{11} \quad (C.33)$$

$$U_{2n} = (A_{2n} - U_{12}U_{1n}) / U_{22} \quad (C.34)$$

$$U_{3n} = (A_{3n} - U_{13}U_{1n} - U_{23}U_{2n}) / U_{33}$$

$$U_{4n} = (A_{4n} - U_{14}U_{1n} - U_{24}U_{2n} - U_{34}U_{3n}) / U_{44}$$

.

.

.

$$U_{nn} = A_{nn} - U_{1n} - U_{2n} - U_{3n} - U_{4n}$$

al obtener el resumen de triangulación de las ecuaciones C.23 a C.37 se tiene:

$$U_{11} = A_{11} \quad (C.38)$$

$$U_{1i} = A_{1i}/U_{11} \quad i=2 \dots n \quad (C.39)$$

$$U_{ij} = (A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} U_{ki}U_{kj})/U_{ii} \quad i=2 \dots n-1 \\ j=3 \dots n$$

$$U_{ii} = A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} U_{ki} \quad i=2 \dots n$$



### C.5 Sustitución hacia adelante

De acuerdo con la ecuación C.22 la sustitución hacia adelante se puede escribir como:

$$\underline{U}^T \underline{y} = \underline{b} \quad (\text{C.42})$$

que en forma desarrollada:

$$\begin{array}{cccccc} U_{11} & 0 & 0 & 0 \dots 0 & y_1 & b_1 \\ U_{12} & U_{22} & 0 & 0 \dots 0 & y_2 & b_2 \\ U_{13} & U_{23} & U_{33} & 0 \dots 0 & y_3 & b_3 \\ U_{14} & U_{24} & U_{34} & U_{44} \dots 0 & y_4 & b_4 \\ U_{1n} & U_{2n} & U_{3n} & U_{4n} \dots U_{nn} & y_n & b_n \end{array}$$

De la primera ecuación se tiene:

$$y_1 = b_1 / U_{11} \quad (\text{C.44})$$

y de las ecuaciones siguientes resulta la expresión siguiente:

$$y_l = (b_l - \sum_{k=1}^{l-1} U_{lk} y_k) / U_{ll} \quad l=2 \dots n \quad (\text{C.45})$$

### C.6 Sustitución hacia atrás

De acuerdo con la ecuación C.22 la sustitución hacia atrás resulta ser:

$$\underline{U} \underline{x} = \underline{y} \quad (C.46)$$

Y al escribirla en forma desarrollada se tiene

$$\begin{array}{ccccccc} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & \dots & U_{1n} & x_1 & y_1 \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} & \dots & U_{2n} & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} & \dots & U_{3n} & x_3 & = & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} & \dots & U_{4n} & x_4 & y_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & U_{nn} & x_n & y_n \end{array} \quad (C.47)$$

De la ecuación n-ésima se tiene

$$x_n = y_n / U_{nn} \quad (C.48)$$

y para la ecuación i-ésima de atrás hacia adelante se tiene la siguiente expresión general:

$$x_i = (y_i - \sum_{k=1+1}^n U_{ik} x_k) / U_{ii} \quad (C.49)$$

APENDICE D

INSTRUCTIVO DEL PROGRAMA DEL CONSU-  
TADOR.

#### **APENDICE D      INSTRUCTIVO DEL PROGRAMA DEL COMPUTADOR**

**El presente instructivo indica la forma para poder hacer uso del programa del computador mediante información perforada en tarjetas de entrada.**

**El programa está escrito en lenguaje FORTRAN, para un sistema BURROUGHS.**

**I. Tarjeta de Datos de Entrada y Ejecución  
(5 I 5)**

<b>COLUMNAS</b>	<b>NOTAS</b>	<b>CONCEPTOS PERFORADOS</b>
1 - 5	1	NPE = Número de Puntos de la Estructura.
6 - 10	2	NMA = Número de Materiales
11 - 15	3	IEJEC = Indicador de Ejecución
16 - 20	4	NE = Número de Elementos
21 - 25	5	IEL = Indicador de Elementos

**NOTAS I**

1. El conjunto de puntos que se idealizan en la región lineal, que permite definir a los elementos finitos, define al número de puntos nodales de la estructura o estrato. Este valor no puede ser nulo.
2. Los materiales que constituyen a un estrato de suelo se indican numéricamente. Este valor no puede ser nulo.
3. Para tener opciones de eficiencia del programa referentes a la ejecución del mismo, se diseñó con estas tres alternativas.
  1. Ejecuta el programa e imprime datos, resultados y desarrollo.

2. Ejecuta el programa e imprime datos y resultados, y
3. Imprime exclusivamente datos

Así que favorece el número que corresponda a las necesidades.

4. El número de elementos finitos queda definido al numerar, en forma secuencial, los elementos en que se dividió la geometría de la región lineal. Este valor no puede ser nulo.
5. Este programa tiene la capacidad de hacer interpolación lineal o cuadrática y se hace perforando:

- 1 Cuando es lineal o
- 2 Cuando es cuadrática

según se necesite la aproximación en el análisis.

II. Tarjetas de Coordenadas y Condiciones de Frontera  
(15, F10.2, 15)                      Cantidad de Tarjetas = NPE

COLUMNAS	NOTAS	CONCEPTOS PERFORADOS
1 - 5	1	N = Número de Coordenadas
6 - 15	2	(N) = Coordenada del punto
16 - 20	3	ID = Indicador de Ecuación

## NOTAS II-

1. Este número se define enumerando secuencialmente las tarjetas.
2. La posición o coordenada de cada punto al teclarse queda relacionado con el número secuencial asignado a la tarjeta y se debe dar del diagrama global.
3. Cada punto nodal tiene un grado de libertad (potencial en ese punto) que puede ser conocido o no.

El código de condición de frontera permite identificar el tipo de carga a considerar, a este código se le llama indicador de ecuación y puede ser:

- 1 Si el potencial es nulo, o
- 2 Si el potencial es desconocido

## III. Tarjetas de Clasificación de Materiales

(F10.5)

Cantidad de Tarjetas = NMA

COLUMNAS	NOTAS	CONCEPTOS PERFORADOS
1 - 10	1	CV = Coeficiente de Consolidación.

## NOTAS III

1. El coeficiente de consolidación asignado a cada tarjeta queda relacionado con un número secuencial que se le asigna en el programa, que comienza a partir del número uno, y este es el número del material.

## IV. Tarjetas de los Puntos de cada Elemento

- a) Caso lineal (4 I 5)                      Cantidad de Tarjetas = NEL

COLUMNAS	NOTAS	CONCEPTOS PERFORADOS
1 - 5	1	NE = Número de Elemento
6 - 10	2	I = Coordenada de I
11 - 15	2	J = Coordenada de J
16 - 20	3	N(MAT) = Número del Material

- b) Caso Cuadrático (5 I 5)

COLUMNAS	NOTAS	CONCEPTOS PERFORADOS
1 - 5	1	NE = Número de Elemento
6 - 10	2	I = Coordenada de I
11 - 15	2	J = Coordenada de J
16 - 20	2	K = Coordenada de K
21 - 25	3	N(MAT) = Número del Material



## NOTAS IV

1. Número que se asigna secuencialmente a cada uno de los elementos de los que se compone la estructura.
  2. Coordenadas globales asignadas secuencialmente a cada uno de los puntos de cada elemento que en el caso lineal son dos y en el cuadrático tres. Estos números están relacionados con la Coordenada dada en la Tarjeta No. II.
  3. El número del material está dado secuencialmente en el proceso de la Tarjeta No. III por lo que a los elementos se les debe asignar el número correspondiente al del mismo coeficiente de consolidación.
- V. Tarjetas de Incrementos de Tiempo y Valor de  $\theta$   
(2 F 10.5)

COLUMNAS	NOTAS	CONCEPTOS PERFORADOS
1 - 10	1	AT = Incremento de Tiempo
11 - 20	2	TAO = $\theta$

## NOTASA V

1. Dependiendo de la aproximación deseada en la ecuación dinámica es necesario escoger un incremento de tiempo que haga lo más exacto posible a la aproximación de tal modo que se puedan obtener resultados realistas. Este dato se escoge y nunca debe ser nulo.

2. Como ya se vió en el apéndice B, el valor de  $\theta$  depende del tipo de aproximación requerida, teniendo que para:

$\theta = 0$  (Euler o diferencias hacia adelante)

$\theta = 1/2$  (Crank Nicholson)

$\theta = 2/3$  (Galerkin)

$\theta = 1$  (Diferencias hacia atrás)

VI. Tarjeta de Cargas y Valores de incrementos  
(F 10.2. 2 I 5)

COLUMNAS	NOTAS	CONCEPTOS PERFORADOS
1 - 10	1	FAS = Incremento de esfuerzo o carga.
11 - 15	2	NT = Número total de interacciones.
16 - 20	3	IN = Inicio del Incremento de tiempo.

NOTAS VI

1. El incremento de esfuerzo o incremento de carga en el estrato es un dato del problema.
2. El número total de las interacciones se debe escoger de acuerdo a las necesidades de cada problema.

3. El inicio del incremento del tiempo para algunos problemas resulta de gran ayuda ya que sin hacer cambios en el programa se puede comensar en el número de interacción deseado. Y por lo general se recomienda dar el mismo valor al incremento AT definido en la Tarjeta No. V.

#### VII. Tarjetas de Interacciones

(I 10)

Cantidad de Tarjetas 1 hasta WT

COLUMNAS

NOTAS

CONCEPTOS PERFORADOS

1 - 10

1

Interacción de Dato

#### NOTAS VII

1. Este dato es el número de interacción que se desea que se imprima, se recomienda nunca darle valor de cero.

APENDICE E

PROGRAMA DEL COMPUTADOR.

```

PROGRAM PRINCI (INPUT,OUTPUT,IADH,TAPE5=INPUT, TAPE6=OUTPUT,
1TAPE7=IACB)
DIMENSION A(15000)
COMMON/ARCHIV/IACB
COMMON/ELTMC/IE(3),ECK(3,3),ECC(3,3)
DATA IAL/5/,IAE/6/,IADH/7/
READ (IAL,5000)NPE,NMA,IEJEC,NEL,IEL
WRITE (IAE,6000)NPE,NMA,IEJEC,NEL,IEL
N1=1
N2=N1+NFE
N3=N2+NPE
N4=N3+NMA
CALL COCOP (A(N2),A(N1),NEC,NPE)
CALL COEPER (A(N3),NMA)
IF(IEI,EQ.2)GO TO 300
CALL HAAREL (A(N3),A(N1),NEL,NPE,NMA,A(N2))
N2=N1+NEC*NEC
N3=N2+NEC*NPE
CALL MATEST (A(N2),A(N1),NEC,NEL)
GO TO 400
300 CONTINUE
CALL HARCUC (A(N3),A(N1),NEL,NPE,NMA,A(N2))
N2=N1+NEC*NEC
N3=N2+NEC*NPE
CALL HAFSCU (A(N2),A(N1),NEC,NEL)
400 CONTINUE
N4=N1+NEC*NEC
N5=N4+NEC*NPE
N6=N5+ECC
N7=N6+NEC*NEC
N8=N7+NEC*NPE
N9=N8+NEC
CALL FORGEN (A(N1),A(N2),A(N3),A(N4),A(N7),A(N8),NEC )
CALL CATRFP (A(N3),A(N4),A(N5),NEC,A(N9))
CALL EXIT
5000 FORMAT (5I5)
6000 /FORMAT (//10X,15,2X,"NO. DE PUNTOS EN LA ESTRUCTURA"/
1 10X,15,2X,"NO. DE MATERIALES"/
2 10X,15,2X,"INDICADOR DE EJECUCION"/
3 10X,15,2X,"NO. DE ELEMENTOS"/
4 10X,15,2X,"INDICADOR DEL GRADO DEL ELEMENTO"/)
END

```

```

SUBROUTINE CODCOF (IC,X,NEC,NPE)
C COORDENADAS Y CODIGOS DE FRONTERA
DIMENSION ID(NPE),X(NPE)
DATA IAL/5/,IAE/5/
WRITE (IAF,6000)
DO 100 I=1,NPE
READ (IAL,5000)N,X(N),IL(N)
WRITE(IAE,6010) N,X(N),ID(N)
100 CONTINUE
NEC=0
NEN=0
DO 600 I=1,NPE
IF (IC(I)-1)200,300,300
200 CONTINUE
NEC=NEC+1
ID(I)=NEC
GO TO 500
300 CONTINUE
NEN=NEN+1
ID(I)=0
500 CONTINUE
600 CONTINUE
WRITE(IAE,6020)NEC,NEN
NEN=NEN
5000 FORMAT (I5,F10.2,I5)
6000 FORMAT (///10X,"NUMERO",3X,"COORDENADAS",3X,"CODIGO"/)
6010 FORMAT (I3X,I5,5X,F10.2,7X,I5)
6020 FORMAT (///10X,I5,2X,"NO. DE ECUACIONES"
1 10X,I5,2X,"NO. DE ECUACIONES NEUTRAS"/)
END

```

```

SUBROUTINE COPPER (CV,NMA)
C COEFICIENTES DE CONSOLIDACION
DIMENSION CV(NMA)
DATA IAL/5/, IAE/5/
WRITE (IAF,6000)
DO 100 I=1,NMA
READ (IAL,5010)CV(I)
WRITE (IAE,6020)I,CV(I)
100 CONTINUE
RETURN
5010 FORMAT(F10.5)
6000 FORMAT (///10X,"N.C.",5X,"COEF. DE CONSOLIDACION"/)
6020 FORMAT (I1X,I5,27X,F10.5)
END

```

```

C   MATRIZ DE LA ESTRUCTURA
      DIMENSION EEK(NEC,NEC),EEC(NEC,NEC)
      COMMON/ARCHIV/IACB
      COMMON/ ELEM/ IE(2), EK(2,2), EC(2,2)
      DATA IAL/5/,IAE/6/,IADH/7/
      REWIND IAOB
      DO 100 P=1,NEC
      DO 100 A=1,NEC
      EEK(A,N)=0
      EEC(A,N)=0
100  CONTINUE
      DO 600 K=1, NEL
      CALL LEEDIS (IE,IO, IAOB)
      DO 300 I=1,2
      IK=IE(I)
      IF (IK.LE.0) GO TO 300
      DO 200 J=1,2
      JK=IE(J)
      IF (JK.LE.0) GO TO 200
      EEK(IK,JK)=EEK(IK,JK)+EK(I,J)
      EEC(IK,JK)=EEC(IK,JK)+EC(I,J)
200  CONTINUE
300  CONTINUE
600  CONTINUE
      RETURN
      END

C   SUBROUTINE MAAREL (CV,X,NEL,NPE,NNA,IO)
      MATRIZ DE PERMEABILIDAD Y APORTICUAMIENTO DE CADA ELEMENTO
      DIMENSION X(NPE),CV(NNA),IC(NPE)
      COMMON/ARCHIV/IACB
      COMMON/ ELEM/ IE (2),EK(2,2), EC(2,2)
      DATA IAL/5/,IAE/6/,IADH/7/
      WRITE (IAE,6000)
      DO 100 P=1,NEL
      READ (IAL,5000)IE,I,J,MAT
      WRITE (IAE,6010)IE,I,J,MAT
      DIS=X(J)-X(I)
      CC=CV (MAT)
      EC(1,1)=DIS/3
      EC(1,2)=DIS/6
      EC(2,1)=EC(1,2)
      EC(2,2)=EC(1,1)
      EK(1,1)=CC/DIS
      EK(1,2)=- (EK(1,1))
      EK(2,1)=EK(1,2)
      EK(2,2)=EK(1,1)
      IE(1)=IC(I)
      IE(2)=IC(J)
      CALL GUACIS (IE,IO,IADH)
100  CONTINUE
      RETURN
5000  FORMAT (4I5)
6000  FORMAT (////10X,"NO. DE ELEMENTO",3X,"I",3X,"J",3X,"MATERIAL",//)
6010  FORMAT (10X,15,10X,15,3X,15,7X,15//)
      END

```

```

SUBROUTINE MARCLO (CV,X,NEL,NPE,NMA,IO)
C
MATRIX K Y C DE CADA ELEMENTO
DIMENSION X (NPE),CV(NMA),IBENPL)
COMMON/ APCHIV/IADB
COMMON/ ELEPC/IEC(3),ECK(3,3),LCC(3,3)
DATA IAL/5/,IAG/6/,IAGB/7/
WRITE (IAE,6040)
DO 100 N=1,NEL
READ (IAL,5000)NE,I,J,K,PAT
WRITE(IAE,6010)NE,I,J,K,PAT
DIS=X(K)-X(I)
CECK=CV(PAT)/(3*DIS)
ECK(1,1)=7*CECK
ECK(1,2)=-8*CECK
ECK(1,3)=CECK
ECK(2,1)=ECK(1,2)
ECK(2,2)=16*CECK
ECK(2,3)=ECK(1,2)
ECK(3,1)=ECK(1,3)
ECK(3,2)=ECK(1,2)
ECK(3,3)=ECK(1,1)
CECC=DIS/30
ECC(1,1)=4*CECC
ECC(1,2)=2*CECC
ECC(1,3)=-CECC
ECC(2,1)=ECC(1,2)
ECC(2,2)=16*CECC
ECC(2,3)=ECC(1,2)
ECC(3,1)=ECC(1,3)
ECC(3,2)=ECC(1,2)
ECC(3,3)=ECC(1,1)
IEC(1)=IEC(I)
IEC(2)=IEC(J)
IEC(3)=IEC(K)
CALL GUADIS (IEC,21,IADB)
100 CONTINUE
RETURN
5000 FORMAT (5I5)
6010 FORMAT (18A,15,10X,15,3X,15,2X,15,4X,15)
6040 FORMAT (/10X,"AC. DE ELEMENTO",3X,"I",3X,"J",3X,"K",3X,"PAT",//
END

```



```

SUBROUTINE MA_SCU (EEC,E EK,NIC,NEL)
C  MATRIZ DE LA ESTRUCTURA CUADRATICA
DIMENSION EEC (NEC,NEC),E1 (NEC,NIC)
COMMON/ELE/PC/I=C(3),ECK(3,3),ECC(3,3)
DATA IAL/5/,IAE/6/,IALB/7/
REWIND IAE
DO 100P=1,NEC
DO 100 N=1,NEC
E E K(N,N)=C
E E C(N,N)=C
100 CONTINUE
DO 600 K=1,NEL
CALL LEEDIS (IEC,21,IAOB)
DO 300I=1,3
IK=IEC(I)
IF (IK,LE,0) GO TO 300
DO 200 J=1,3
JK=IEC(J)
IF (JK,LE,0) GO TO 200
E E K(IK,JK)=E E K(IK,JK)+E C K(I,J)
E E C(IK,JK)=E E C(IK,JK)+E C C(I,J)
200 CONTINUE
300 CONTINUE
600 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE FORGEN (EEK,E E C,EA,EB,EMP,EOP,N,C)
C  FORMULACION ECUACION DE PONDERACIONES GENERAL
DIMENSION E E K(NEC,NEC),E E C(NEC,NEC),EA(NEC,NEC),EB(NEC,NIC)
DIMENSION E K(NEC,NEC),EOP(NEC,NEC)
DATA IAL/5/,IAE/6/
WRITE (IAE,6000)
READ (IAL,5000) AT,TAO
WRITE (IAE,6010) AT,TAO
P=AT*TAO
CALL NUMER (EEK,P,E K,NEC)
CALL SUPATS (E E C,E K,EA,NEC)
OT=1-TAO
OP=OT*AT
CALL NUMER (EEK,OP,EOP,NEC)
CALL RESTMAT(E E C,EOP,EB,NEC)
RETURN
5000 FORMAT (2F10.5)
6010 FORMAT (//10X,F10.2,3X,"VALOR DEL INCREMENTO",/
1 10X,F10.2,3X,"VALOR DE THETA",//)
6000 FORMAT (//10X,"NO. DE ELEMENTOS",3X,"I",3X,"J",3X,"K",3X,"VALOR",//)

```

```

SUBROUTINE CATREP (FA,EB,AS,NEC,AUX)
C  CARGA, TRIANGULACION, PRESION DE PORO
DIMENSION BA(NEC,NEC),EB(NEC,NEC),AS(NEC),AUX(NEC)
DATA IAL,/,IAE,0/
READ (IAL,5000)FAS,NT,IN
WRITE (IAE,6010)FAS,NT,IN
WRITE (IAE,6030)
DO 200 I=1,NEC
AS(I)=FAS
200 CONTINUE
CALL TRICHO (EA,NEC)
READ(IAL,5010)ICTC
ND=IDTC
DO 100 I=1,NT
CALL MUMAVE (EB,AS,AUX,NEC)
CALL SUSCHO (EA,AS,NEC)
IF(ND.EC.1) GO TO 150
GO TO 100
150 CONTINUE
WRITE (IAE,6020)I
CALL PRIME (AS,NEC,1)
READ (IAL,5010)IDTO
ND=IDTO
100 CONTINUE
RETURN
5000 FORMAT (F10.2,2I5)
5010 FORMAT(I10)
6010 FORMAT (//10X,F10.2,3X,"FUERZA APLICADA SOBRE EL SUELO",/
1      15X,I5 ,8X,"NO. DE INTERACCION MAXIMA",/
2      10X,I5 ,8X,"NO. DE INTERVALO DEL INCREMENTO",//)
6020 FORMAT (//6X,"INTERACCION ALM.",3X,I5)
6030 FORMAT (//,"NO.",2X,"EXCESO DE PRESION DE AGUA DE PORO")
END

```

```

SUBROUTINE MUM/ERIA,ES,2,NB)
C  MULTIPLICACION DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR
DIMENSION A(NB,NB),Z(NB,NB)
DO 100 I=1,NB
DO 200 J=1,NB
Z(I,J)=A(I,J)*ES
200 CONTINUE
100 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SUMATS (A,B,C,ND)
SUMA DE MATRICES
DIMENSION A(ND,ND),B(ND,ND),C(ND,ND)
DO 100 I=1,ND
DO 200 J=1,ND
C(I,J)=A(I,J)+B(I,J)
200 CONTINUE
100 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MUMAVE (A,VE,AUX,NB)
DIMENSION A(NB,NB),VE(NB),AUX(NB)
DO 100 I=1,NB
ZZ=0.
DO 200 J=1,NB
ZZ=ZZ+A(I,J)*VE(J)
200 CONTINUE
AUX(I)=ZZ
100 CONTINUE
DO 300 I=1,NB
VE(I)=AUX(I)
300 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE RESTMAT (A,B,C,ND)
RESTA DE MATRICES
DIMENSION A(ND,ND),B(ND,ND),C(ND,ND)
DO 100 I=1,ND
DO 200 J=1,ND
C(I,J)=A(I,J)-B(I,J)
200 CONTINUE
100 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE LEFOTIS (A,NB,IAOB)
LEE EL ARREGLO A QUE ESTA EN DISCO
DIMENSION A(NB)
READ (IAOB) A
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MULTI (A,B,C,IA,JA,JB)
MULTIPLICACION DE MATRICES
DIMENSION A(IA,JA),B(JA,JB),C(IA,JB)
DO 300 I=1,IA
DO 200 J=1,JB
XX=0
DO 100 K=1,JA
XX=XX+A(I,K)*B(K,J)
100 CONTINUE
C(I,J)=XX
200 CONTINUE
300 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE GUADIS (A,NE,IADB)
GUARDA EN DISCO EL ARREGLO A
DIMENSION A (NE)
WRITE (IADB) A
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE PRIME (A,NR,NC)
DIMENSION A(NR,NC)
DO 100 L=1,NC,8
M=L+7
IF (M.GT.NC)M=NC
WRITE (6,6002)((K,K=L,M)
DO 100 I=1,NR
100 WRITE (6,6003)I,(A(I,J),J=L,M)
6002 FORMAT (13X,13,7(12X,13)/)
6003 FORMAT (1X,13,8(1PE15.7))
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE TRID00 (A,N)
DIMENSION A(N,N)
A(1,1)=SCRT(A(1,1))
A(1,2)=A(1,2)/A(1,1)
A(2,1)=A(2,1)/A(1,1)
A(2,2)=SCRT(A(2,2)-A(1,2)*A(1,2))
DO 400 J=3,N
  A(1,J)=A(1,J)/A(1,1)
  IS=J-1
  DO 300 I=2,IS
    XX=0
    KS=I-1
    DO 100 K=1,KS
      XX=XX+A(K,I)*A(K,I)
100  CONTINUE
      A(1,J)=(A(1,J)-XX)/A(1,1)
200  CONTINUE
      XK=0
      DO 300 K=1,IS
        XX=XX+A(K,J)*A(K,J)
300  CONTINUE
        A(I,J)=SCRT(A(I,J)-XX)
400  CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE SPC00 (A,B,N)
DIMENSION A (N,N), B(N)
B(1)=B(1)/A(1,1)
DO 200 I=2,N
  KS=I-1
  XX=0
  DO 100 K=1,KS
    B(I)=B(I)-A(K,I)*B(K)
100  CONTINUE
    B(I)=B(I)/A(I,I)
200  CONTINUE
  B(N)=B(N)/A(N,N)
  IS=N-1
  DO 400 I =1,IS
    IA=N-I
    KI=IA+1
    XX=0
    DO 300 K=KI,N
      XX=XX+A(IA,K)*B(K)
300  CONTINUE
    B(IA)=B(IA)-XX/A(IA,IA)
400  CONTINUE
  RETURN
  END

```

41 NO. DE PUNTOS EN LA ESTRUCTURA  
 4 NO. DE MATERIALES  
 1 INDICADOR DE EJECUCIÓN  
 20 NO. DE LLENADOS  
 2 INDICADOR DEL GRADO DE ELEMENTO

NUMERO	COORDENADAS	COBIGO
1	0.00	1
2	2.00	0
3	4.00	0
4	6.00	0
5	8.00	0
6	10.00	0
7	12.00	0
8	14.00	0
9	16.00	0
10	18.00	0
11	20.00	0
12	22.00	0
13	24.00	0
14	26.00	0
15	28.00	0
16	30.00	0
17	32.00	0
18	34.00	0
19	36.00	0
20	38.00	0
21	40.00	0
22	42.00	0
23	44.00	0
24	46.00	0
25	48.00	0
26	50.00	0
27	52.00	0
28	54.00	0
29	56.00	0
30	58.00	0
31	60.00	0
32	62.00	0
33	64.00	0
34	66.00	0
35	68.00	0
36	70.00	0
37	72.00	0
38	74.00	0
39	76.00	0
40	78.00	0
41	80.00	1

39 NO. DE ECUACIONES

2 NO. DE ECUACIONES NEUTRAS

NUMERO

COEFICIENTE DE CONSOLIDACION

1	10.00000
2	5.00000
3	20.00000
4	40.00000

NO. DE ELEMENTO

I

J

K

MATERIALES

1	1	2	3	1
2	3	4	5	1
3	5	6	7	1
4	7	8	9	1
5	8	10	11	1
6	11	12	13	2
7	13	14	15	2
8	15	16	17	2
9	17	18	19	3
10	19	20	21	3
11	21	22	23	3
12	23	24	25	3
13	25	26	27	3
14	27	28	29	4
15	29	30	31	4
16	31	32	33	4
17	33	34	35	4
18	35	36	37	4
19	37	38	39	4
20	39	40	41	4

1.00 VALOR DEL INCREMENTO  
.67 VALOR DE THETA

1.00 FUERZA APLICADA SOBRE EL SUELO  
2170 NO. DE INTERACCION MAXIMA  
1 NO. DE INTERVALO DEL INCREMENTO

## EXCESO DE PRESION DE AGUA DE PORO

INTERACCION MM. 30

1	5.4976395E-02
2	1.0927856E-01
3	1.6224069E-01
4	2.1321600E-01
5	2.6158223E-01
6	3.0675340E-01
7	3.4818202E-01
8	3.8537115E-01
9	4.1755322E-01
10	4.4510174E-01
11	4.6825790E-01
12	4.8737228E-01
13	5.0285406E-01
14	5.14721432E-01
15	5.23023713E-01
16	5.2902490E-01
17	5.3174035E-01
18	5.3028384E-01
19	4.8371738E-01
20	4.6812310E-01
21	4.4760052E-01
22	4.2426872E-01
23	3.9826349E-01
24	3.6973920E-01
25	3.3886588E-01
26	3.0583056E-01
27	2.8832362E-01
28	2.7499004E-01
29	2.6058698E-01
30	2.3047499E-01
31	2.0961740E-01
32	1.8803052E-01
33	1.6593302E-01
34	1.4324606E-01
35	1.2009271E-01
36	9.6047952E-02
37	7.2688192E-02
38	4.8591127E-02
39	2.4335391E-02



## INTERACCIÓN NUM. 240

1	1.5006727E-05
2	1.7474947E-04
3	2.5547657E-04
4	3.3306428E-04
5	4.0852521E-04
6	4.7892642E-04
7	5.4339357E-04
8	6.0113060E-04
9	6.5141945E-04
10	6.9764021E-04
11	7.4002296E-04
12	7.7915349E-04
13	8.1538949E-04
14	8.4900958E-04
15	8.8142879E-04
16	9.12747806E-04
17	9.4301668E-04
18	9.72369714E-04
19	1.000863198E-04
20	1.02846510E-04
21	1.055286702E-04
22	1.081363716E-04
23	1.106732100E-04
24	1.131438611E-04
25	1.15551441E-04
26	1.179006440E-04
27	1.202057303E-04
28	1.22471560E-04
29	1.247029120E-04
30	1.269046130E-04
31	1.29081571E-04
32	1.31238783E-04
33	1.33380387E-04
34	1.3550110E-04
35	1.37613139E-04
36	1.4572826E-04
37	1.0969724E-04
38	7.3318260E-05
39	3.6716925E-05

## INTERACCION NUM. 1080

1	4.8040557E-16
2	9.5486116E-16
3	1.4174857E-15
4	1.8625542E-15
5	2.2845450E-15
6	2.6782409E-15
7	3.0387525E-15
8	3.3616281E-15
9	3.6428520E-15
10	3.8789579E-15
11	4.2542047E-15
12	4.5242023E-15
13	4.6821822E-15
14	4.7243248E-15
15	4.6494949E-15
16	4.4596363E-15
17	4.3843579E-15
18	4.2819117E-15
19	4.1529273E-15
20	3.9982092E-15
21	3.8187112E-15
22	3.6155504E-15
23	3.3899814E-15
24	3.1434062E-15
25	2.8773490E-15
26	2.5934623E-15
27	2.4434056E-15
28	2.2857764E-15
29	2.1210622E-15
30	1.9497745E-15
31	1.7724434E-15
32	1.5896191E-15
33	1.4018677E-15
34	1.2097717E-15
35	1.0139259E-15
36	8.1495772E-16
37	6.1342364E-16
38	4.1000843E-16
39	2.0532238E-16

## INTERACCIÓN NUM. 2160

1	1.6376151E-30
2	3.2549477E-30
3	4.831904E-30
4	6.3491078E-30
5	7.7875976E-30
6	9.1096393E-30
7	1.0388054E-29
8	1.1459178E-29
9	1.2333119E-29
10	1.3022661E-29
11	1.3561309E-29
12	1.4021391E-29
13	1.4590701E-29
14	1.5104308E-29
15	1.5849281E-29
16	1.5202088E-29
17	1.4945477E-29
18	1.4005257E-29
19	1.4156573E-29
20	1.3722111E-29
21	1.3017291E-29
22	1.2624753E-29
23	1.1555879E-29
24	1.0715199E-29
25	9.8083586E-30
26	8.8666404E-30
27	8.1291248E-30
28	7.7917952E-30
29	7.3303148E-30
30	6.4464261E-30
31	6.0190069E-30
32	5.4187111E-30
33	4.7787317E-30
34	4.1335912E-30
35	3.4562816E-30
36	2.7779742E-30
37	2.0910494E-30
38	1.3976440E-30
39	6.9990660E-31

APENDICE F

TABLAS Y FIGURAS.

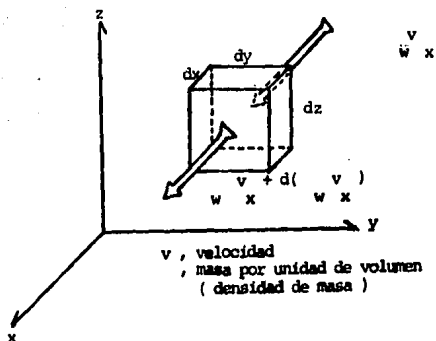


FIG 2.1 REPRESENTACION ESQUEMATICA DEL FLUIDO ATRAVES DE UN VOLUMEN ELEMENTAL, ASOCIADO A LA DIRECCION x.

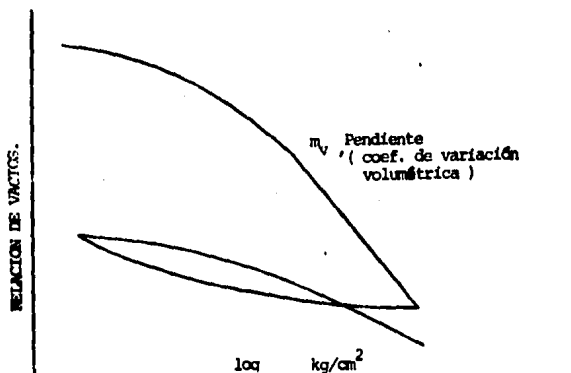


FIG 2.2 CURVA DE COMPRESIBILIDAD EN ESCALA LOGARITMICA

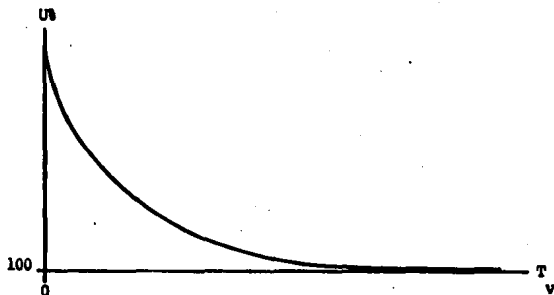


FIG. 3.1 CURVA TEORICA DE CONSOLIDACION EN ESCALA ARITMETICA

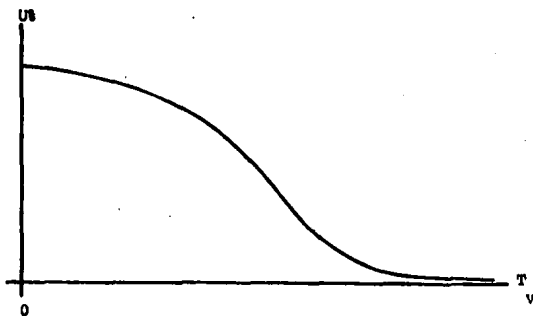


FIG. 3.2 CURVA TEORICA DE CONSOLIDACION EN ESCALA LOGARITMICA

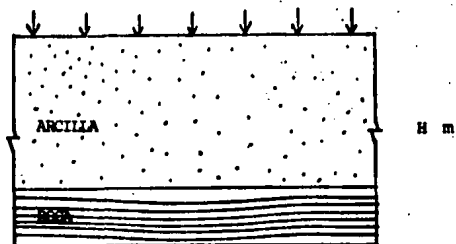


FIG 4.1 ESTRATO DE ARCILLA EN UN SISTEMA CERRADO

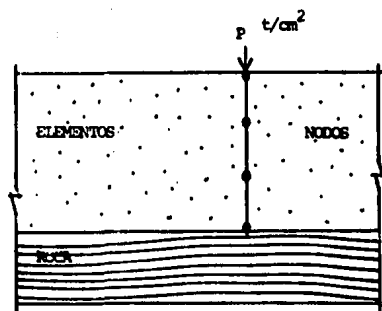


FIG 4.2 ESTRATO DE ARCILLA DIVIDIDO POR UNA MALLA DE TRES ELEMENTOS FINITOS EN UN SISTEMA CERRADO.

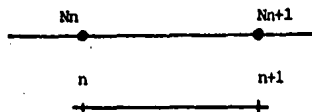


FIG. 4.3 ELEMENTO SIEMPLE DE INTERPOLACION LINEAL.

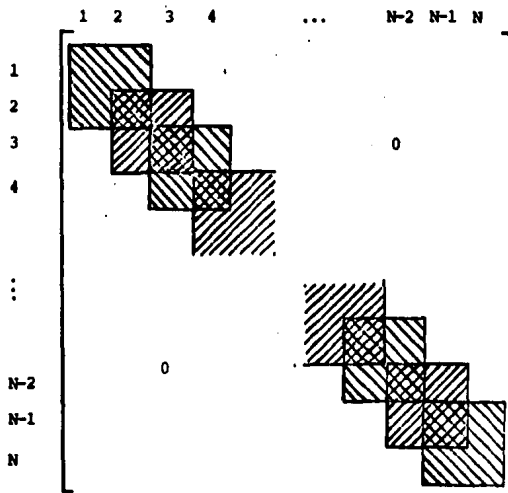


FIG. 4.4. CONTRIBUCION DE LAS MATRICES DE CADA ELEMENTO FINITO PARA EL ENSAMBLE DE LAS MATRICES GLOBALES DELESTRATO, LAS ZONAS FUERA DE LOS CUADROS SON ELEMENTOS CON VALOR NULO.



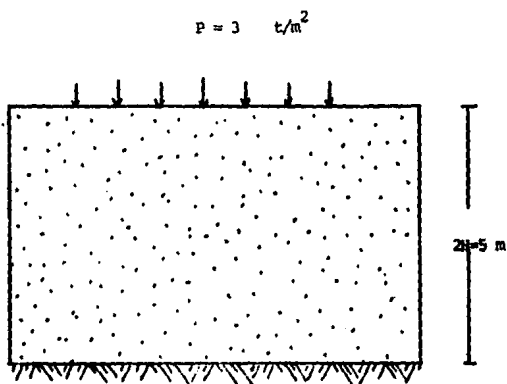


FIG A.1 REPRESENTACION ESQUEMATICA DEL PROBLEMA No.1

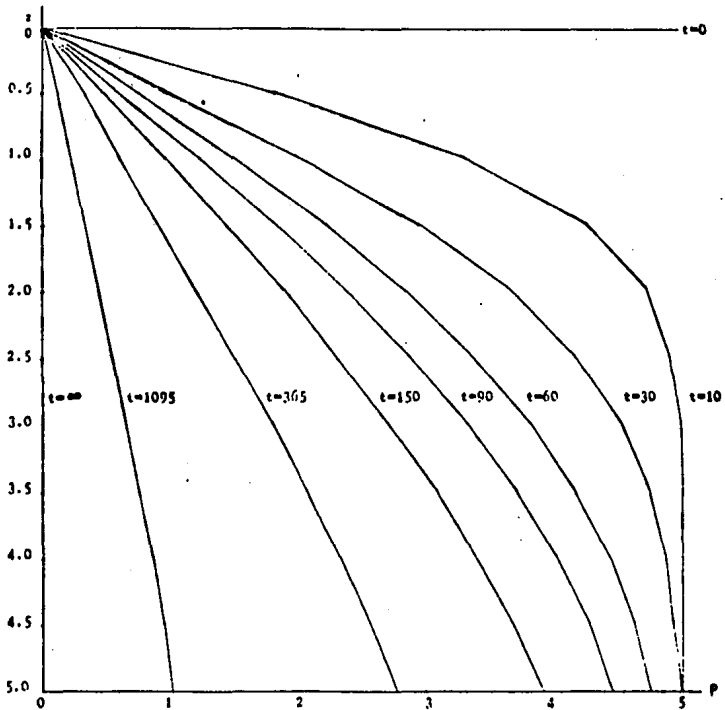


FIG. A.2 - ISOCRONAS PARA EL PROBLEMA N°1 EN UN TIEMPO.  
t día

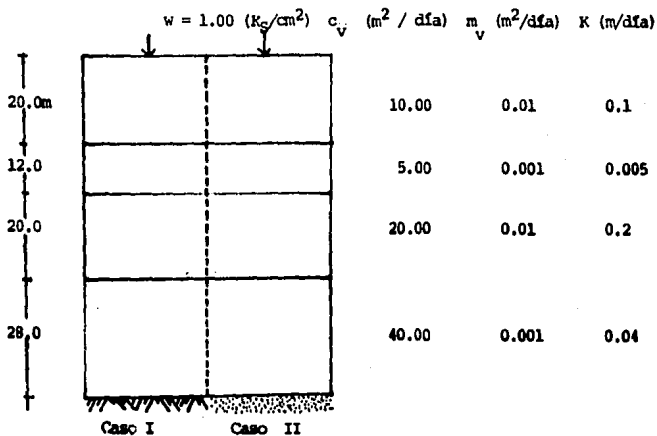
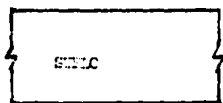
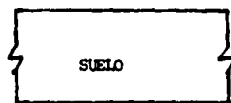


FIG A.3 REPRESENTACION GRAFICA DEL  
PROBLEMA N° 2



FRONTERA IMPERMEABLE

FIG A.4 SISTEMA SEMIPERMEABLE



ARENA O GRAVA

FIG. A.5 SISTEMA PERMEABLE  
O ABIERTO

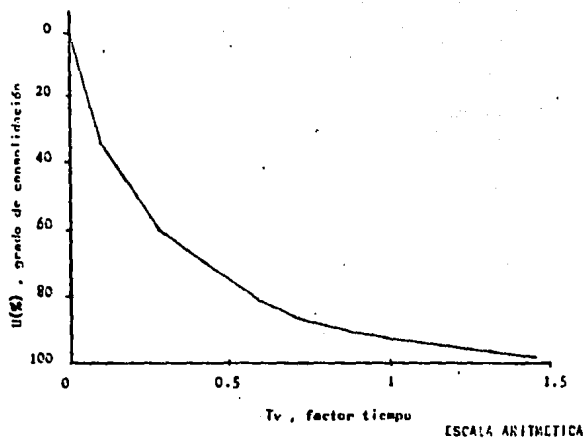


FIG. A.6 CURVA TEORICA DE CONSOLIDACION PARA EL CASO 1 DEL PROBLEMA N°2

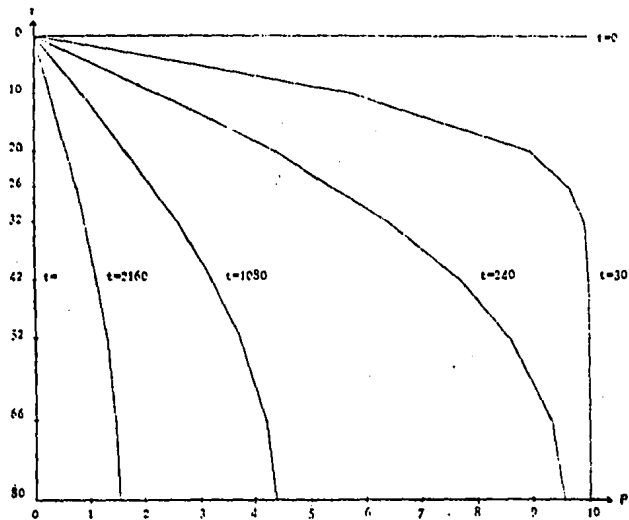


FIG. A.7 ISOCRONAS PARA UN SISTEMA SEMIPERMEABLE CASO 1 PROBLEMA N°2  
t día

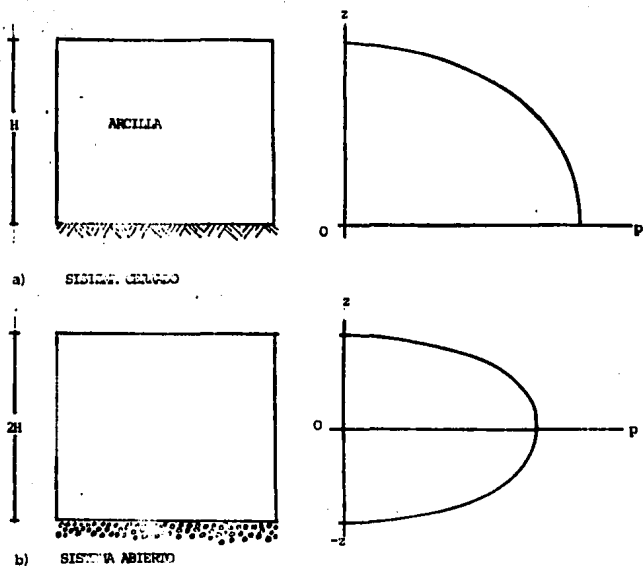


FIG. A. 8 REPRESENTACION GRAFICA DEL EMPLEO DE LA FORMULA DE LA CONSOLIDACION UNIDIMENSIONAL PARA UNA PROFUNDIDAD  $H$  PARA EL SISTEMA CERRADO INCISO a

FIG. A. 9 INCISO b PARA EL SISTEMA ABIERTO

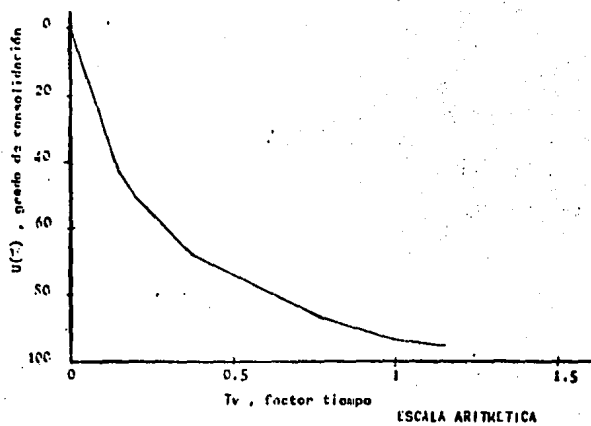


FIG. A.9 CURVA TEORICA DE CONSOLIDACION CASO 11 PROBLEMA N° 2

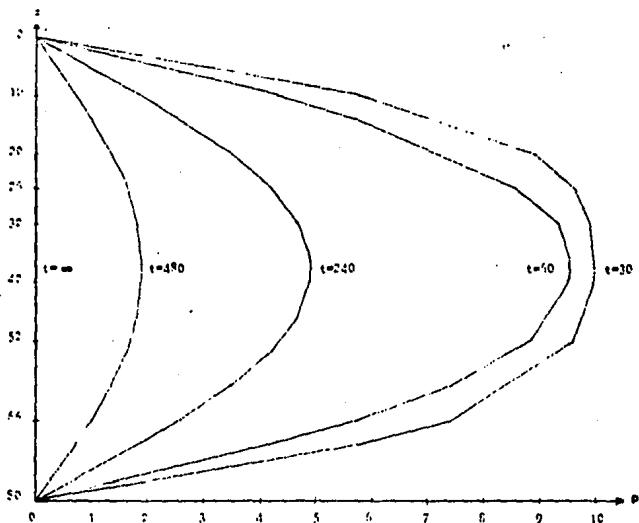


FIG. A.10 ISOCRONAS PARA UN SISTEMA ABIERTO CASO 11 PROBLEMA N°2 EN UN TIEMPO  $t$  día



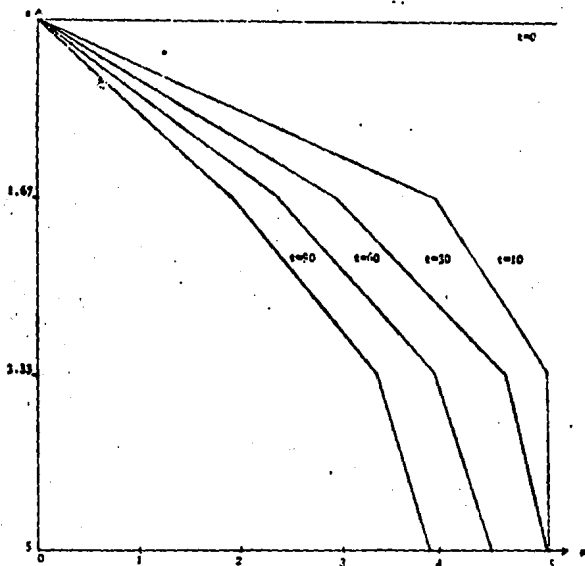


FIG. (A.11) EXCESO DE PRESION DE AGUA DE PORO PARA EL PROBLEMA DESCRIPTIVO, # 3 PARA TRES ELEMENTOS.  
PARA UN TIEMPO  $t$  DIA

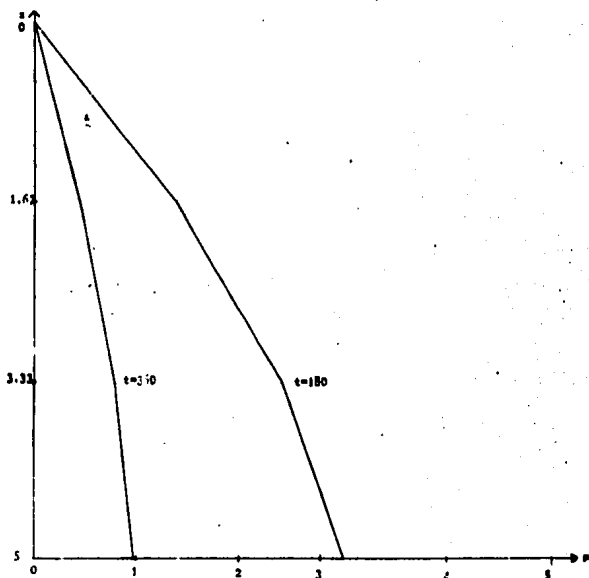


FIG. (A.12) CONTINUACION DE LA GRAFICA DE LA FIGURA (A.11) PARA UN INCREMENTO DE TIEMPO DE 10 DIAS  $t$  DIA

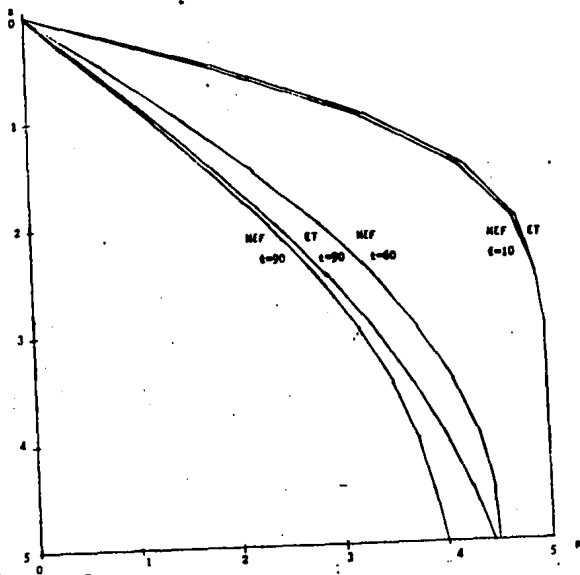


FIG (A.13) GRAFICAS DEL EXCESO DE LA PRESION DE AGUA LE PORO PARA EL PROBLEMA No. 4 CON UNA MALLA DE 20 ELEMENTOS Y CON UNA APROXIMACION LINEAL. t DIA

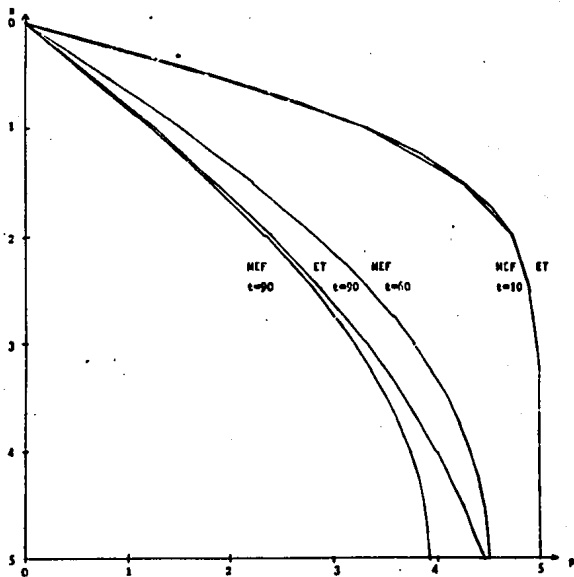


FIG. (A.13) EXCESO DE PRESION DE AGUA DE PORO PARA EL PROBLEMA No.4 CON UNA APROXIMACION CUADRATICA Y CON 20 ELEMENTOS. t DIA

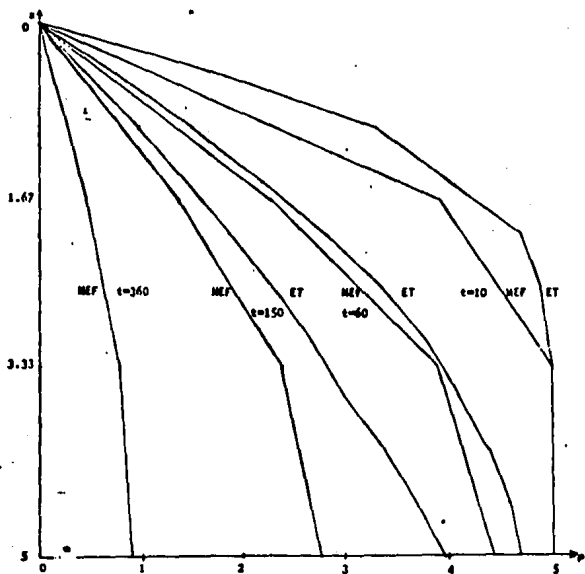


FIG (A.14) COMPARACION DE LAS CURVAS ISOCRONAS DEL EXCESO DE LA PRESION DE AGUA DE PORO ENTRE UNA MALLA DE TRES ELEMENTOS POR MEDIO DEL METODO DEL ELEMENTO-FINITO (MEF) Y LA SOLUCION EXACTA DE TERZAGHI (ET). PARA EL PROBLEMA # 4 DONDE  $t$  DIA

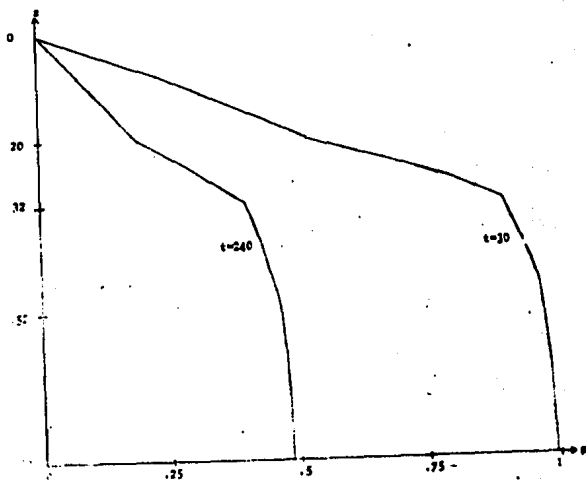


FIG. (A.15) ISOCRONAS CORRESPONDIENTES AL PROBLEMA No.5 PARA UNA APROXIMACION LINEAL CON UNA MALLA DE 20 ELEMENTOS FINITOS. t DIA

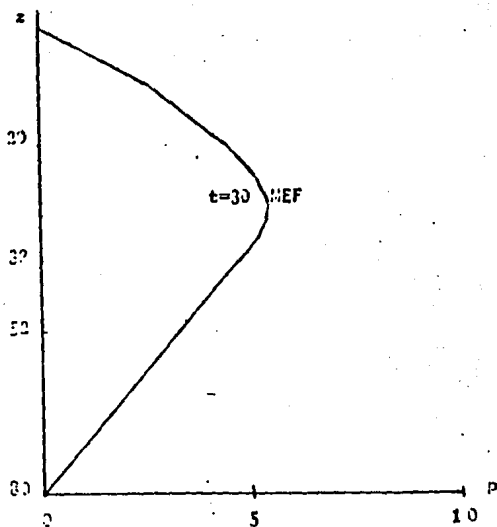


FIG. (A.16) ISOCRONAS PARA EL PROBLEMA No. 5 PARA EXCESO DE PRESION DE AGUA DE PORO EN UN SUELO PERMEABLE CON LA SOLUCION DEL MEF CON - 20 ELEMENTOS Y APROXIMACION CUADRATICA. DIA

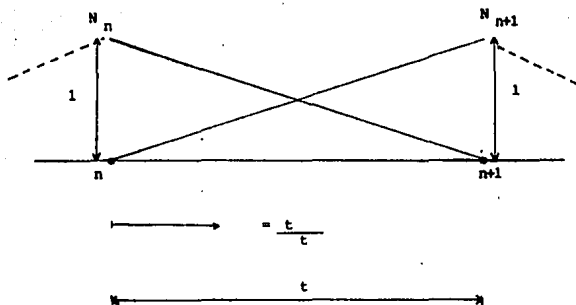


FIG B.1 FUNCIONES DE FORMA DE UN POLINOMIO DE PRIMER GRADO PARA UN ELEMENTO DE TIEMPO TÍPICO DE LONGITUD  $t$



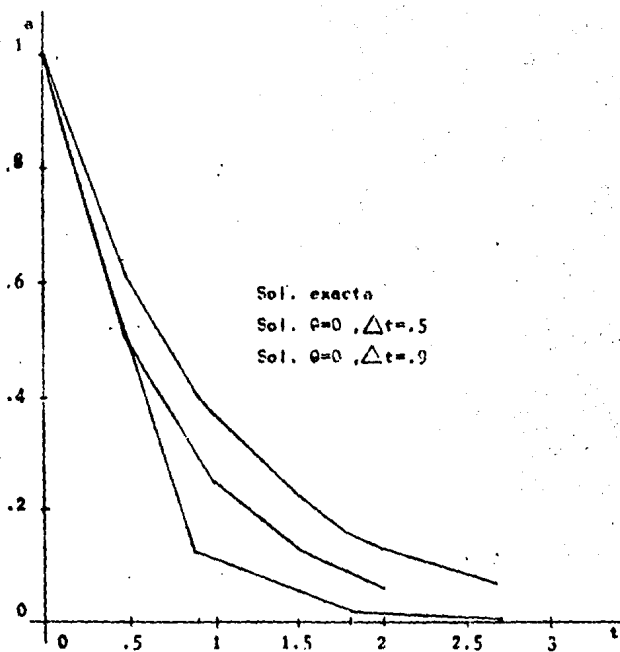


FIG. B.2 SOLUCION DEL PROBLEMA DESCRIPTIVO PARA EL METODO DE EULER O DIFERENCIAS HACIA ADELANTE

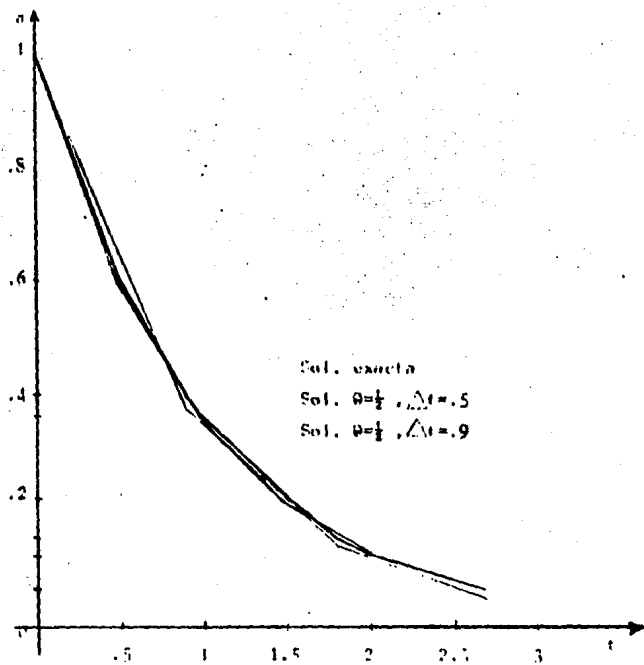


FIG B.3 SOLUCION DEL PROBLEMA DESCRIPTIVO PARA EL METODO DE CRANK-NICHOLSON

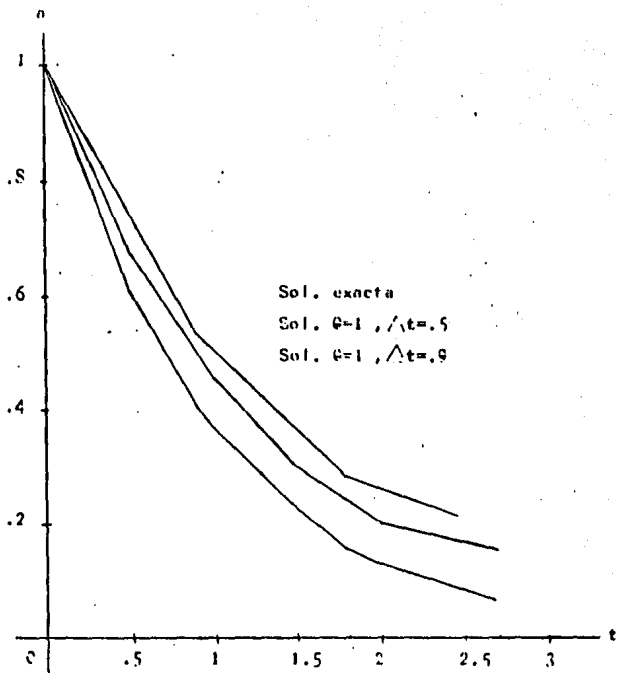


FIG. B.5 SOLUCION DEL PROBLEMA DESCRIPTIVO POR EL METODO DE DIFERENCIAS HACIA ATRAS

TABLA (A.1) RESULTADOS OBTENIDOS DE EXCESO DE PRESION DE AGUA DE PORO POR MEDIO DE LA ECUACION (3.9) CON UNA APROXIMACION DE  $n = 8$ .

$z$	$P^t=10$	$P^t=30$	$P^t=60$	$P^t=90$
0.5	1.85067	1.09836	0.78167	0.63960
1.0	3.32992	2.11503	1.53361	1.26287
1.5	4.26737	2.98611	2.22946	1.85471
2.0	4.73365	3.67695	2.84892	2.40235
2.5	4.91788	4.18409	3.37940	2.89651
3.0	4.98065	4.52870	3.81641	3.33004
3.5	4.99948	4.74545	4.16274	3.70155
4.0	5.00000	4.87164	4.42676	4.01151
4.5	5.00000	4.93964	4.62038	4.26353
5.0	5.00000	4.97356	4.75698	4.46319

$z$	$P^t=150$	$P^t=365$	$P^t=1095$	$P^t=3650$
0.5	0.49628	0.31476	0.11748	0.00401
1.0	0.98494	0.62727	0.23423	0.00800
1.5	1.45859	0.93529	0.34953	0.01193
2.0	1.91070	1.23667	0.46269	0.01580
2.5	2.33554	1.52932	0.57299	0.01956
3.0	2.72862	1.81138	0.67975	0.02321
3.5	3.08667	2.08076	0.78233	0.02671
4.0	3.40776	2.33605	0.88008	0.03005
4.5	3.69122	2.57564	0.97241	0.03320
5.0	3.93753	2.79820	1.05874	0.03615

**TABLA (A.2) VALORES OBTENIDOS DEL GRADO DE CONSOLIDACION PARA EL CASO I DEL PROBLEMA NO. 2 DEL GRADO DE CONSOLIDACION.**

<b>t</b>	<b>Tv</b>	<b>U</b>
30	0.012	0.1237
60	0.024	0.1749
90	0.030	0.2143
120	0.048	0.2474
240	0.096	0.3499
720	0.288	0.6020
1080	0.432	0.7213
1440	0.577	0.8047
1800	0.721	0.8632
2160	0.865	0.9042
2493	1.000	0.9313
2552	1.022	0.9350
3600	1.445	0.9769
7200	2.884	0.9993

TABLA (A.3) VALORES DEL EXCESO DE PRESION DE PORO PARA EL CASO  
I DEL PROBLEMA NO. 2.

$z$	$P^t=30$	$P^t=240$	$P^t=1080$	$P^t=2160$	$P^t=7200$
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	5.80	2.24	0.85	0.20	$2 \times 10^{-3}$
20	8.93	4.31	1.68	0.58	$3 \times 10^{-3}$
26	9.64	5.41	2.14	0.74	$5 \times 10^{-3}$
32	9.90	6.38	2.57	0.88	0.0100
42	9.99	7.68	3.21	1.11	0.0100
52	10.00	8.60	3.73	1.28	0.0100
66	10.00	9.33	4.21	1.45	0.0100
80	10.00	9.55	4.38	1.51	0.0103

**TABLA (A.4) VALORES OBTENIDOS DEL GRADO DE CONSOLIDACION PARA  
EL CASO II DEL PROBLEMA NO. 2.**

<b>t</b>	<b>Tv</b>	<b>U %</b>
30	0.048	0.247
60	0.096	0.350
90	0.144	0.429
120	0.192	0.494
240	0.384	0.686
480	0.769	0.879
600	0.962	0.924
624	1.000	0.931
720	1.153	0.953
1800	2.885	0.999

**TABLA (A.5) VALORES CORRESPONDIENTES AL EXCESO DE PRESION DE AGUA DE LOS POROS DEL SUELO, PARA EL CASO II DEL PROBLEMA NO. 2.**

<b>z</b>	<b>P<sup>t</sup>=30</b>	<b>P<sup>t</sup>=60</b>	<b>P<sup>t</sup>=240</b>	<b>P<sup>t</sup>=420</b>	<b>P<sup>t</sup>=1800</b>
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	5.80	4.31	1.89	0.73	3X10 <sup>-3</sup>
20	8.93	7.45	3.49	1.35	7X10 <sup>-3</sup>
26	9.64	8.60	4.20	1.63	9X10 <sup>-3</sup>
32	9.90	9.26	4.69	1.81	0.010
40	9.97	9.55	4.93	1.91	0.010
42(38)	9.97	9.53	4.91	1.90	0.010
52(28)	9.76	8.83	4.39	1.70	0.009
66(14)	7.41	5.75	2.58	1.00	0.005
80( 0)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00



TABLA B.1 VALORES DE  $\frac{a}{t}$  PARA EL PROBLEMA RESUELTO CON LA SOLUCION EXACTA DE LA FORMULA  $a = e^{-t}$

$t = 0$	.1	.9	1	1.5	1.8	2	2.7
$\frac{a}{t} = 1$	.607	.407	.368	.223	.165	.135	.067

TABLA B.2 VALORES DE  $\frac{a}{t}$  OBTENIDOS POR METODOS APROXIMADOS, VARIANDO EL INCREMENTO DE TIEMPO, PARA EL PROBLEMA DESCRIPTIVO DEL APENDICE B.

$\theta = t$	0	.50	1.00	1.50	2.00	.90	1.80	2.70
$\theta = 0$	1	.60	.36	.22	.13	.38	.14	.05
$\theta = 1/2$	1	.67	.45	.30	.20	.53	.38	.15
$\theta = 2/3$	1	.63	.40	.25	.16	.44	.19	.09
$\theta = 1$	1	.50	.25	.13	.06	.12	.02	.002
$t$		.5				.9		