881201

15
2e

UNIVERSIDAD ANAHUAC

ESCUELA DE ACTUARIA

CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA U. N. A. M.

CONJUNTOS BORROSOS: UNA APLICACION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

ROBERTO QUIROS CABALLERO

MEXICO, D. F. 1986

CONTENIDO.

PREFACIO.

La teoría de conjuntos borrosos se ha ido adentrando, cada vez más, en muchas ramas de las matemáticas.
La base intuitiva de donde parte esta teoría ha hecho que cada vez haya tenido más aceptación.

Este trabajo tiene dos objetivos principales: primero, se tratará de enriquecer la bibliografía que sobre el tema se ha escrito en español. Segundo, creo que una manera de difundir el interés en alguna teoría, es escribir sus nociones básicas con una notación clara y en forma tal que se apoye en ideas intuitivas que la hagan fácil de entender en un primer encuentro; además, motivando el interés para investigaciones posteriores. Este segundo objetivo se ha logrado mediante nuevas ideas de interpretación de las operaciones entre conjuntos borrosos, las cuales harán sentir al lector que la teoría de conjuntos borrosos es una fácil generalización de la usual. Por otra parte, la notación que se presenta se ha hecho buscando conjuntar las ventajas de las notaciones de distintos autores.

El trabajo se ha dividido en tres capítulos. El primero de ellos contiene los elementos básicos de la teoría de conjuntos borrosos; el segundo estudia las relaciones borrosas, así como sus operaciones y propiedades, todo ello enfocado a la aplicación que, sobre clasificación en patrones, desarrolla el tercero y último capítulo.
En los tres capítulos se presta atención a fundamentar sobre ideas intuitivas los principales conceptos.
Todos los teoremas han sido demostrados, y la base teórica de la cual parte la aplicación, ha sido hecha utilizando los conceptos que se estudian en los primeros dos capítulos. Esto ayudará a que el lector no tenga que estudiar la teoría de conjuntos borrosos de algún otro lado para entender la aplicación.

A lo largo de este estudio se utilizan conceptos de la teoría clásica de conjuntos, por lo que el lector debe tener bases de ésta para entenderlo.
Al final se han incluido dos apéndices. El primero, trata los conceptos básicos de las relaciones binarias ordinarias, los cuales son empleados en la aplicación que se desarrolla. El segundo contiene referencias sobre aplicaciones interesantes que podrían continuar lo expuesto en esta tesis.

El lector podrá comprobar lo extensa que es esta teoría, además de lo controvertida que puede ser. Espero que, además, como a mí, le parezca apasionante.

En este trabajo he empleado la palabra "relacionamiento", para significar la fuerza de relación que existe entre dos elementos de un conjunto, para una relación dada.

I. NOCIONES BASICAS DE LA TEORIA DE CONJUNTOS BORROSOS.

1.1. Introducción.

Como consecuencia del esfuerzo del hombre por obtener una representación matemática lo más apegada a la realidad de las situaciones a las que se enfrenta, surgió en 1965 la teoría de conjuntos borrosos, iniciada por A. Zadeh.

Supóngase que se enfrenta el problema de formar el conjunto de los seres humanos a los que se estima. Seguramente los familiares más cercanos estarán dentro de él, pero llegará un momento en el cual se tendrá dificultad para incluir, o no, a algún otro ser humano. Es decir, sería injusto tanto excluirlo del conjunto de los seres humanos a los que se estima, como admitirlo en él.
Parece ser que en este caso es poco apegado a la realidad el considerar un cambio brusco entre estar incluido o no, por lo que se pensaría que un cambio gradual entre estas situaciones sería más apropiado. Dicho en otras palabras, el conjunto en cuestión es borroso.

Por citar otro ejemplo supóngase que el tomador de decisiones de cierta empresa ha determinado que obtener un rendimiento de 50% sobre las inversiones es satisfactorio. Si esta persona formase el conjunto de los rendimientos satisfactorios, ¿sería lógico descartar un rendimiento de 49.9%?.

El lector podrá plantear muchísimos problemas de la vida real en los que estén involucrados conjuntos borrosos, y seguramente estará de acuerdo en que la idea fundamental de esta teoría es interesante. Más aún, en muchas situaciones es más adecuada que la teoría usual de conjuntos.

Como muchas que tratan de romper con lo clásico, esta teoría ha sido atacada. Yo concuerdo con el profesor Kaufmann (†), en que aquello que puede explicarse por medio de la teoría de conjuntos borrosos también puede hacerse sin ésta, pero ¿sería tan fácil de interpretar y usar?.

En realidad, la teoría de conjuntos borrosos es una generalización de la usual, por lo que trataré, hasta donde sea posible, de hacer aparecer las propiedades de los conjuntos borrosos como una extensión natural de las propiedades de los ordinarios.

A partir de este momento hablaré de subconjuntos borrosos, y no de conjuntos borrosos, pues el conjunto referencia de elementos está perfecta

(†) Ver segunda referencia bibliográfica.

mente definido. Así, en el primer ejemplo citado se formó un subconjunto borroso del conjunto ordinario de los seres humanos.

Posiblemente el lector encuentre cierta analogía entre el tratamiento de problemas mediante la teoría de conjuntos borrosos y teoría de probabilidad, por lo que conviene aclarar que lo borroso está en la falta de criterio exacto para clasificar y no en la presencia de variables aleatorias.

1.2. Definición de subconjunto borroso.

Cuando se trabaja con conjuntos ordinarios se utilizan dos formas para representarlos: extensión y comprensión.

Por ejemplo, sea $E=\{2,4,5,7,8\}$ un conjunto y A el subconjunto de E que contiene a los pares. A puede ser representado como:

$$A=\{2,4,8\} \qquad \text{(extensión)}$$

$$A=\{x\in E \mid x \text{ es par}\} \qquad \text{(comprensión)}.$$

Ahora utilizaré la función característica (o de membresía) de un conjunto para definirlo.

Definición. Un subconjunto A de un conjunto E puede representarse por medio de su función de membresía, μ_A, de la siguiente manera:

$$A=\{(x,\mu_A(x)) \mid x\in E \text{ y } \mu_A:E\longrightarrow\{0,1\}\},$$

donde

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{si } x\notin A\end{cases}$$

Utilizando la función de membresía, el subconjunto del ejemplo se puede representar como

$$A=\{(2,1),(4,1),(5,0),(7,0),(8,1)\}.$$

Supóngase que ahora se tiene el subconjunto B de E definido como

$$B=\{x\in E \mid x \text{ está cercano a } 5\}.$$

La función de membresía de B no debe tomar únicamente los valores 0 y 1, ya que es mejor definir un grado de membresía, en B, para los elementos de E. Estos grados podrían ser:

$$\mu_B(2)=0.7;\ \mu_B(4)=0.9;\ \mu_B(5)=1;\ \mu_B(7)=0.8;\ \mu_B(8)=0.7$$

Es decir, aquí no se habla de pertenecer o no, sino de pertenecer con cierto grado. El 2 "está menos en B" que el 4.
Se puede entonces definir el subconjunto borroso B de E como

$$B=\{(2,0.7),(4,0.9),(5,1),(7,0.8),(8,0.7)\}.$$

Conviene decir que B es borroso, ya que el cambio entre cercanía y lejanía no es brusco.
Se denotará a los subconjuntos borrosos subrayándolos con una tilde: $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C}$, etc.

Definición. Se llamará subconjunto borroso $\underset{\sim}{A}$ del conjunto E al conjunto

$$\underset{\sim}{A}=\left\{(x,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x))\mid x\in E \text{ y } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\in[0,1]\right\};$$

$\mu_{\underset{\sim}{A}}$ es llamada función de membresía del subconjunto borroso $\underset{\sim}{A}$.

Observaciones.
1) La función de membresía de un subconjunto borroso de E será un mapeo de E en [0,1]. Aunque el codominio de la función de membresía puede ser un conjunto más general (†), en este estudio será [0,1], que intuitivamente puede interpretarse como el paso entre pertenecer (1) a no pertenecer (0).
2) Aunque los conjuntos ordinarios son un caso particular de los borrosos, éstos se denotarán por A,B,C,etc. Esto se hará para enfatizar su condición particular.
3) La asignación de los valores de la función de membresía de un subconjunto borroso es subjetiva. Depende de la experiencia del investigador.
Este problema no ha sido estudiado sistemáticamente. Sin embargo, algunas ideas y métodos han sido sugeridos (‡).
4) Los grados de membresía reflejan un orden, que en ocasiones es más significativo que los mismos grados.
5) El subconjunto borroso queda perfectamente determinado conociendo su función de membresía. En lo sucesivo, la mayoría de las veces, definiré subconjuntos borrosos mencionando la función de membresía.

Se verán algunos ejemplos de subconjuntos borrosos.
1) Representación del conjunto universal:

$$E=\left\{(x,\mu_E(x))\mid x\in E \text{ y } \mu_E(x)=1\right\}, \text{ para todo elemento x de E .}$$

2) Representación del conjunto vacío:

$$\Phi=\left\{(x,\mu_\Phi(x))\mid x\in E \text{ y } \mu_\Phi(x)=0\right\}, \text{ para todo elemento x de E .}$$

3) Sea $E=\left\{a_i\in \mathbb{N}\mid i=1,\dots,n;\ \text{para toda } i,\ a_{i+1}>a_i\right\}$. Sea $\underset{\sim}{A}$ el subconjunto borroso de E que contiene los elementos que están cerca de a_1.

$$\underset{\sim}{A}=\left\{(x,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x))\mid x\in E \text{ y } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=a_1/x\right\}.$$

Con esta función de membresía, a medida que x crece $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ decrece.

Ahora se definirán algunas operaciones entre subconjuntos borrosos.

1.3. Operaciones con subconjuntos borrosos.

1.3.1. Unión e intersección.

Como se ha mencionado, se tratará de hacer que la teoría de subconjuntos borrosos aparezca como una generalización natural de la clásica.
Partiendo de la base de que la unión de dos conjuntos es el conjunto más pequeño que contiene a ambos conjuntos, mientras que la intersección es el conjunto más grande que está contenido en ambos conjuntos, pare-

(†) Para el profesor Kaufmann, el codominio de la función de membresía, puede ser cualquier conjunto totalmente ordenado (ref. bibl.2).

(‡) En el capítulo 1 de la cuarta parte de la referencia bibliográfica 4 se mencionan algunos enfoques, así como fuentes bibliográficas.

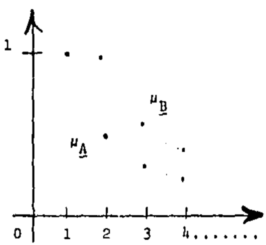
ce que lo primero que se debe definir es la inclusión de subconjuntos borrosos.

Definición. Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos subconjuntos borrosos de un conjunto E. Se dice que $\underline{A}$ está incluido en $\underline{B}$ si $\mu_{\underline{A}}(x)\leq\mu_{\underline{B}}(x)$, para todo x elemento de E, lo cual denotaremos como $\underline{A}\subset\underline{B}$.

Antes de ejemplificar lo dicho en esta definición, es importante señalar que las definiciones que se darán también pueden emplearse para los subconjuntos ordinarios.

Ejemplos.
1) Sea $E=\mathbb{N}$. Sean $\underline{A}=\{(x,\mu_{\underline{A}}(x))\mid x\in E \text{ y } \mu_{\underline{A}}(x)=1/x\}$ y $\underline{B}=\{(x,\mu_{\underline{B}}(x))\mid x\in E$ y $\mu_{\underline{B}}(x)=2/x$ si $x\neq 1$ y $\mu_{\underline{B}}(1)=1\}$. Obsérvese que, si $x=1$, $\mu_{\underline{A}}(x)=\mu_{\underline{B}}(x)=1$, mientras que, si $x\neq 1$, $\mu_{\underline{A}}(x)=1/x<2/x=\mu_{\underline{B}}(x)$, de modo que $\underline{A}\subset\underline{B}$.

Una manera de obtener una representación gráfica de los subconjuntos borrosos es la de graficar la función de membresía. Así, la representación de este primer ejemplo estará dada por:



2) Sea $E=\{a,b,c\}$ y sean $\underline{A}=\{(a,1),(b,0.5),(c,0.5)\}$ y $\underline{B}=\{(a,1),(b,0.3),(c,0.6)\}$. En este caso ni $\underline{A}\subset\underline{B}$ ni $\underline{B}\subset\underline{A}$.

Definición. Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos subconjuntos borrosos de un conjunto E. Se dirá que $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son iguales, lo que se denotará por $\underline{A}=\underline{B}$, si $\mu_{\underline{A}}(x)=\mu_{\underline{B}}(x)$, para todo elemento x de E.

Ejemplo. Sea $E=\{a,b,c\}$ y sean $\underline{A}=\{(a,0.7),(b,0.8),(c,1)\}$ y $\underline{B}=\{(a,0.7),(b,0.8),(c,1)\}$. $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son iguales, ya que $\mu_{\underline{A}}(x)=\mu_{\underline{B}}(x)$, para todo x elemento de E. Nótese que $\underline{A}\subset\underline{B}$ y $\underline{B}\subset\underline{A}$.

Una vez definida la inclusión de conjuntos borrosos, se definen la unión y la intersección.

Definición. Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos subconjuntos borrosos de un conjunto E. Se definirá la unión de $\underline{A}$ y $\underline{B}$ como el subconjunto borroso de E, denotado por $\underline{A}\cup\underline{B}$, con función de membresía $\mu_{\underline{A}\cup\underline{B}}(x)=\text{máx}\{\mu_{\underline{A}}(x),\mu_{\underline{B}}(x)\}$.

Definición. Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos subconjuntos borrosos de un conjunto E. Se definirá la intersección de $\underline{A}$ y $\underline{B}$ como el subconjunto borroso de E, de notado por $A \cap B$, con función de membresía $\mu_{A \cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$.

Ejemplo. Sea $E=\{a,b,c\}$ y sean $A=\{(a,0.7),(b,1),(c,1)\}$ y $B=\{(a,0.8),(b,0.4),(c,0.6)\}$; entonces

$$A \cup B=\{(a,0.8),(b,1),(c,1)\}$$

y

$$A \cap B=\{(a,0.7),(b,0.4),(c,0.6)\}.$$

1.3.2. Otras operaciones.

<u>Definición</u>. Sea A un subconjunto borroso de un conjunto E. Llamaremos complemento de A al subconjunto borroso de E, denotado por $\bar{A}$, con función de membresía $\mu_{\bar{A}}(x)=1-\mu_A(x)$.

Parece lógico decir que si un elemento pertenece a A con cierto grado, con la diferencia respecto a 1 no pertenece a A.

Ejemplos.

1) Sea $E=\{a,b,c\}$ y sea $A=\{(a,1),(b,0.7),(c,0.3)\}$ un subconjunto borroso de E. Entonces
$$\bar{A}=\{(a,0),(b,0.3),(c,0.7)\}.$$
2) Sea $E=\mathbb{N}$ y sea $A=\{(x,\mu_A(x)) \mid x \in E \text{ y } \mu_A(x)=1/x\}$; entonces
$$\bar{A}=\{(x,1-\mu_A(x)) \mid x \in E \text{ y } \mu_A(x)=1/x\}.$$

¿No será verdad que si A es el subconjunto borroso de los naturales cercanos a 1, entonces $\bar{A}$ es el subconjunto borroso de los naturales no cercanos a 1?

Existen otras operaciones con subconjuntos borrosos. Con el fin de completar los elementos básicos de la teoría se define un par de ellas.

<u>Definición</u>. Sean A y B dos subconjuntos borrosos de un conjunto E; se define la diferencia de A y B, denotada por $A-B$, como el subconjunto borroso de E con función de membresía $\mu_{A-B}(x)=\mu_{A \cap \bar{B}}(x)$.

<u>Definición</u>. Sean A y B dos subconjuntos borrosos de E; se define la suma disyuntiva, $A \oplus B$, como el subconjunto borroso de E con función de membresía $\mu_{A \oplus B}(x)=\mu_{(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)}(x)$.

Ejemplo. Sea $E=\{a,b,c\}$ y sean $A=\{(a,0.7),(b,0.4),(c,0.8)\}$ y $B=\{(a,0.3),(b,1),(c,0.2)\}$ subconjuntos borrosos de E.
La suma disyuntiva de A y B está dada por
$$A \oplus B=\{(a,0.7),(b,0.6),(c,0.8)\},$$
mientras que las diferencias están dadas por
$$A-B=\{(a,0.7),(b,0),(c,0.8)\}$$
y por
$$B-A=\{(a,0.3),(b,0.6),(c,0.2)\},$$
notándose que en general $A-B$ es distinto de $B-A$.

1.3.3. Algunas propiedades.

No obstante que la teoría de conjuntos borrosos es una generalización de la de conjuntos ordinarios, la mayoría de las propiedades del álgebra de conjuntos ordinarios se mantienen para los borrosos. Entre estas propiedades se encuentran:

1) $A \cup B=B \cup A$ y $A \oplus B=B \oplus A$ (conmutatividad).

2) $\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cup\underset{\sim}{C}$ y $\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cap\underset{\sim}{C}$ (asociatividad).

3) $\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cup(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{C})$ y $\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cap(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{C})$ (distributividad).

4) $(\overline{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}})=\bar{\underset{\sim}{A}}\cap\bar{\underset{\sim}{B}}$ y $(\overline{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}})=\bar{\underset{\sim}{A}}\cup\bar{\underset{\sim}{B}}$ (De Morgan).

5) $(\bar{\bar{\underset{\sim}{A}}})=\underset{\sim}{A}$ (complemento).

1.4. Subconjuntos de nivel.

Una de las ventajas que tiene trabajar con conjuntos ordinarios es la exactitud con la que se hace. Como se mencionó al principio, la teoría de conjuntos borrosos da un acercamiento mayor a la realidad. Existe un punto intermedio entre los subconjuntos borrosos y ordinarios, lo cual se hace ver en la siguiente definición.

Definición. Sea $\underset{\sim}{A}$ un subconjunto borroso de un conjunto E y sea $\ell\in[0,1]$ se llamará subconjunto ordinario de nivel ℓ de un subconjunto borroso $\underset{\sim}{A}$ al subconjunto ordinario

$$A_\ell=\{x\in E \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\geq\ell\}.$$

Considero que el conjunto ordinario de nivel, que tiene función de membresía con codominio $\{0,1\}$, es un punto intermedio entre los subconjuntos ordinarios y borrosos, ya que se forma a partir de una función de membresía borrosa. En realidad A_ℓ es el conjunto de aquellos elementos del conjunto referencia que pertenecen a $\underset{\sim}{A}$ con un grado de al menos ℓ.

Ejemplo. Sea $E=\{a,b,c,d\}$ y sea $\underset{\sim}{A}=\{(a,1),(b,0.5),(c,0.3),(d,0.7)\}$ un subconjunto borroso de E.
A continuación se dan algunos subconjuntos de nivel:

$$A_{0.7}=\{a,d\} \qquad A_{0.3}=\{a,b,c,d\} \qquad y \qquad A_{0.5}=\{a,b,d\}.$$

Proposición. Sean $\ell_1,\ell_2\in[0,1]$, con $\ell_1<\ell_2$, y sean $\underset{\sim}{A}$ un subconjunto borroso de E y A_{ℓ_1} y A_{ℓ_2} sus subconjuntos ordinarios de nivel correspondientes a ℓ_1 y ℓ_2; entonces $A_{\ell_2}\subset A_{\ell_1}$.

Demostración.

Hay que demostrar que cualquier elemento x de A_{ℓ_2} está en A_{ℓ_1}.

Si $x\in A_{\ell_2}$, entonces $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\geq\ell_2\geq\ell_1$

por lo que $x\in A_{\ell_1}$.

Q.E.D.

Se pasa ahora al tratamiento general de las relaciones borrosas.

II. RELACIONES BORROSAS.

2.1. Introducción.

Los conceptos de grafo y relación son aplicables en muchas ramas de las matemáticas; su extensión para el caso borroso es el objetivo de este capítulo.

Es de esperarse que, siendo una relación ordinaria entre los conjuntos A y B un subconjunto de AxB, el concepto de relación sea fácilmente generalizable para el caso borroso. Es decir, parece inmediato definir una relación borrosa entre los conjuntos A y B como un subconjunto borroso de AxB.

No obstante esta posibilidad de generalización inmediata, conviene reflexionar sobre la importancia que puede tener el concepto de relación borrosa, que no sólo es una extensión del de subconjunto borroso, sin una utilidad adicional, sino que también tiene significado aplicable en diversas situaciones.

Volviendo al conjunto de los seres humanos, supóngase que se desea identificar en este conjunto la relación de amistad. Es decir, dos seres humanos cualesquiera están relacionados si son amigos.
Parece ser que se tiene nuevamente el problema de falta de apego a la realidad si se considera esta relación como ordinaria; o sea, si solamente se aceptan las opciones "es amigo de" y "no es amigo de". En este caso, al igual que en la mayor parte de las relaciones humanas, conviene considerar un grado de relación. Esta es la idea intuitiva valiosa del concepto de relación borrosa y será estudiada a lo largo de este capítulo.

Espero que los ejemplos de relaciones borrosas que doy motiven el interés del lector en las aplicaciones.

2.2. Relaciones y grafos borrosos.

Para comenzar, recordaré que el producto cartesiano de dos conjuntos E_1 y E_2 está dado por

$$E_1 x E_2 = \{(x,y) | x \in E_1 \text{ y } y \in E_2\}.$$

Definiré ahora el concepto de relación borrosa.

Definición. Una relación borrosa de un conjunto E_1 en un conjunto E_2 es un subconjunto borroso de $E_1 x E_2$.

Si $\underset{\sim}{R}$ es una relación borrosa de un conjunto E_1 en un conjunto E_2, para cada $(x,y)\in E_1 x E_2$, puede interpretarse a $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$ como la fuerza de relacionamiento entre x y y. Si $E_1=E_2=E$, se habla de una relación en E.

Como en el caso de relaciones ordinarias, cada relación borrosa puede ser representada por un grafo borroso dirigido. La definición de grafo borroso es la misma que la de relación borrosa, pero se utilizará la noción de grafo para representación de la relación.
Se utilizarán dos formas para la representación de relaciones borrosas, la matricial y la de grafo borroso dirigido; este último consiste en un conjunto de vértices unidos por arcos.

Ejemplo. Sean $E_1=\{a,b,c\}$ y $E_2=\{1,2,3\}$, de modo que

$$E_1 x E_2=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3)\}.$$

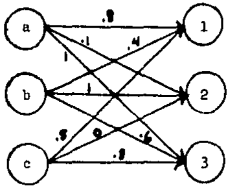
Sea $\underset{\sim}{R}=\{((a,1),0.8),((b,1),0.4),((c,1),0.5),((a,2),0.1),((b,2),1),$

$((c,2),0),((a,3),1),((b,3),0.6),((c,3),0.8)\}$; entonces $\underset{\sim}{R}$ es una relación borrosa de E_1 en E_2.

La representación matricial de esta relación borrosa está dada por:

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .8 & .1 & 1 \\ .4 & 1 & .6 \\ .5 & 0 & .8 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Las ventajas de la representación matricial se verán más adelante cuando se defina la composición de relaciones.
La representación de $\underset{\sim}{R}$ utilizando un grafo dirigido se hace como sigue:



Debido a que se ha definido la relación borrosa como un subconjunto borroso, es de esperarse que las operaciones definidas en el capítulo anterior se puedan extender para relaciones.

<u>Definición</u>. Sean $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{S}$ dos relaciones borrosas de E_1 en E_2.

- Se dice que $\underset{\sim}{R}$ está contenida en $\underset{\sim}{S}$, $\underset{\sim}{R}\subset\underset{\sim}{S}$, si $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\leq\mu_{\underset{\sim}{S}}(x,y)$, para to da pareja (x,y) de $E_1 x E_2$.

- La unión de $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{S}$, $\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{S}$, es la relación borrosa con función de membresía $\mu_{\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{S}}(x,y)=\text{máx}\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y),\mu_{\underset{\sim}{S}}(x,y)\right\}$, para toda pareja (x,y) de $E_1 x E_2$.
- La intersección de $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{S}$, $\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{S}$, es la relación borrosa con función de membresía $\mu_{\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{S}}(x,y)=\text{mín}\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y),\mu_{\underset{\sim}{S}}(x,y)\right\}$, para toda pareja (x,y) de $E_1 x E_2$.
- El complemento de $\underset{\sim}{R}$, $\bar{\underset{\sim}{R}}$, es la relación borrosa con función de membresía $\mu_{\bar{\underset{\sim}{R}}}(x,y)=1-\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$, para toda pareja (x,y) de $E_1 x E_2$.
- La inversa de $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{R}^{-1}$, es una relación borrosa de E_2 en E_1 con función de membresía $\mu_{\underset{\sim}{R}^{-1}}(y,x)= \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$, para toda pareja (x,y) de $E_1 x E_2$.

Ejemplos.
1) Sean $E=\{a,b,c\}$ y $D=\{1,2,3\}$. Sean $\underset{\sim}{R}_1$ y $\underset{\sim}{R}_2$ relaciones borrosas de E en D definidas por:

$$\underset{\sim}{R}_1= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} .7 & .6 & 1 \\ 0 & 1 & .3 \\ .4 & .7 & .3 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underset{\sim}{R}_2= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} .4 & 0 & .3 \\ .7 & 1 & .6 \\ .8 & .5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se pueden formar nuevas relaciones borrosas a partir de $\underset{\sim}{R}_1$ y $\underset{\sim}{R}_2$ como sigue:

$$\underset{\sim}{R}_1 \cup \underset{\sim}{R}_2= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} .7 & .6 & 1 \\ .7 & 1 & .6 \\ .8 & .7 & .3 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underset{\sim}{R}_1 \cap \underset{\sim}{R}_2= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} .4 & 0 & .3 \\ 0 & 1 & .3 \\ .4 & .5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\bar{\underset{\sim}{R}}_1= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} .3 & .4 & 0 \\ 1 & 0 & .7 \\ .6 & .3 & .7 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underset{\sim}{R}_1^{-1}= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} .7 & 0 & .4 \\ .6 & 1 & .7 \\ 1 & .3 & .3 \end{bmatrix} \end{array}$$

2) Sean $E_1=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ y $E_2=\{m_1,m_2,m_3\}$ dos conjuntos, de cuatro alumnos y tres materias, respectivamente. Sea $\underset{\sim}{R}$ la relación borrosa, de E_1 en E_2, "el alumno x tiene suficientes conocimientos de la materia y". Una manera de calcular la fuerza de relacionamiento entre alumnos y materias es la siguiente:

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(a_i,m_j)=C(a_i,m_j)/10,\ i=1,2,3,4;\ j=1,2,3.$$

$C(a_i,m_j)$ es la calificación obtenida por el alumno a_i en la materia m_j. Supóngase que los resultados obtenidos son los siguientes:

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .7 & 1 & .3 \\ .2 & .5 & .6 \\ .6 & .8 & .8 \\ .9 & 1 & .7 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ahora supóngase que la relación borrosa $\underset{\sim}{S}$, de E_1 en E_2, dada por "el alumno x tiene interés en la materia y", ha sido calculada:

$$\underset{\sim}{S} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .6 & .8 & .3 \\ 0 & .4 & .9 \\ .5 & .1 & .7 \\ .8 & .9 & .6 \end{bmatrix} \end{array}$$

La unión y la intersección de estas relaciones son:

$$\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{S} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .7 & 1 & .3 \\ .2 & .5 & .9 \\ .6 & .8 & .8 \\ .9 & 1 & .7 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underset{\sim}{R}\cap\underset{\sim}{S} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .6 & .8 & .3 \\ 0 & .4 & .6 \\ .5 & .1 & .7 \\ .8 & .9 & .6 \end{bmatrix} \end{array}$$

La unión de $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{S}$ representa, para cada alumno y cada materia, su relacionamiento máximo, de acuerdo con alguna de las relaciones. La intersección representa el mínimo.

La relación inversa es solamente una manera de definir una relación borrosa cambiando el dominio y el codominio, pero con base en una relación existente.

Se pueden seguir definiendo operaciones entre relaciones borrosas, pero para este estudio la más importante será la composición de relaciones. Las operaciones de unión e intersección han sido mencionadas por su facilidad de definición y su tradición como operaciones entre conjuntos.

2.3. Relaciones de nivel.

Al igual que con los subconjuntos borrosos estudiados en el capítulo anterior, con las relaciones borrosas se pueden formar subconjuntos ordinarios de nivel.

Cuando se hablaba de subconjuntos de nivel para subconjuntos borrosos se hacía referencia al grado de pertenencia de cada elemento. Aunque en relaciones borrosas se puede seguir esta convención, prefiero hablar de una relación de nivel como de aquella relación ordinaria que contiene aquellas parejas de elementos que al menos tienen un relacionamiento del nivel en cuestión.

<u>Definición</u>. Sea $\underset{\sim}{R}$ una relación borrosa de E_1 en E_2. Se llama soporte de la relación, denotado por $S(\underset{\sim}{R})$, al conjunto ordinario

$$S(\underset{\sim}{R})=\left\{(x,y)\mid \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)>0\right\}.$$

<u>Definición</u>. Sea $\underset{\sim}{R}$ una relación borrosa de E_1 en E_2. Se llama relación ordinaria de nivel ℓ, $\ell\in[0,1]$, a la relación R_ℓ dada por

$$R_\ell=\left\{(x,y)\mid \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\geq\ell\right\}.$$

Obsérvese que R_ℓ es una relación ordinaria. Es decir, un subconjunto del producto cartesiano $E_1 \times E_2$.

Se utilizará la relación $\underset{\sim}{R}$ del segundo ejemplo de la sección anterior para ilustrar estas definiciones. Se tenía

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .7 & 1 & .3 \\ .2 & .5 & .6 \\ .6 & .5 & .5 \\ .9 & 1 & .7 \end{bmatrix} \end{array}$$

entonces, por ejemplo,

$$R_{0.6}=\{(a_1,m_1),(a_1,m_2),(a_2,m_3),(a_3,m_1),(a_3,m_2),(a_3,m_3),(a_4,m_1),(a_4,m_2),(a_4,m_3)\}$$

y

$$R_{0.8}=\{(a_1,m_2),(a_3,m_2),(a_3,m_3),(a_4,m_1),(a_4,m_2)\}.$$

Si se considera que la medida subjetiva de entendimiento, de las distintas materias, es aceptable con un grado de al menos .8, $R_{0.8}$ contiene las parejas de alumnos y materias que lo satisfacen.
De acuerdo con la definición de soporte de una relación vemos que, para este ejemplo,

$$S(\underset{\sim}{R})=E_1\times E_2.$$

Es decir, para todos los alumnos y materias existe, por pequeño que sea, algún relacionamiento.

Como es natural, si $\ell_1 \geq \ell_2$, entonces $R_{\ell_1} \subset R_{\ell_2}$.

2.4. Composición de relaciones borrosas.

Se pasa a definir la operación de relaciones borrosas que interesará en lo sucesivo. La operación de composición, que será la base de la aplicación que se presenta, involucra en su definición conceptos más difíciles de visualizar que los dados hasta el momento.

Siguiendo con los objetivos planteados desde un principio, se buscará dar una explicación intuitiva de esta definición, con el fin de que el lector interprete correctamente el resultado de componer dos relaciones borrosas.

Definición. Si $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{S}$ son relaciones borrosas de E_1 en E_2 y de E_2 en E_3 respectivamente, entonces la composición de $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{S}$, denotada por $\underset{\sim}{S}\cdot\underset{\sim}{R}$, es la relación borrosa de E_1 en E_3 con función de membresía

$$\mu_{\underset{\sim}{S}\cdot\underset{\sim}{R}}(x,z)=\max_{y\in E_2}\left\{\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y),\mu_{\underset{\sim}{S}}(y,z)\right\}\right\} \quad x\in E_1,\ z\in E_3.$$

Existen muchas maneras de definir relaciones borrosas entre E_1 y E_3, pero la composición de relaciones dará una relación basada en las relaciones que en ella intervienen.

Ejemplo. Sean los conjuntos $E_1=\{a_1,b_1\}$, $E_2=\{a_2,b_2\}$ y $E_3=\{a_3,b_3\}$. Estén las relaciones $\underset{\sim}{R}$ de E_1 en E_2 y $\underset{\sim}{S}$ de E_2 en E_3 definidas por:

$$\underset{\sim}{R}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \end{array} & \begin{bmatrix} .5 & .7 \\ .8 & .5 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underset{\sim}{S}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a_3 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_2 \\ b_2 \end{array} & \begin{bmatrix} .3 & .4 \\ 1 & .6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Según la definición de composición, que a partir de ahora se llamará composición máx-mín (†) o producto máx-mín (esto último cuando las relaciones estén representadas por matrices), $\underset{\sim}{S}\cdot\underset{\sim}{R}$ está dada por:

$$\underset{\sim}{S}\cdot\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a_3 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \end{array} & \begin{bmatrix} .7* & .6 \\ .5 & .5 \end{bmatrix} \end{array}$$

La operación de matrices máx-mín, que permite obtener la matriz de la composición, es análoga a la multiplicación usual de matrices. Ahora explicaré cómo se obtuvo el elemento señalado (*) en la matriz del ejemplo anterior.

Para obtener el elemento del primer renglón y primera columna de la matriz resultante, hay que operar máx-mín el primer renglón de la matriz correspondiente a $\underset{\sim}{R}$ con la primera columna de la matriz correspondiente a $\underset{\sim}{S}$. Esto es:

$$[.5,.7] \quad \text{con} \quad \begin{bmatrix} .3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si se efectuase la operación usual de multiplicación de estos vectores el resultado sería:

$$[.5,.7] \begin{bmatrix} .3 \\ 1 \end{bmatrix} = (.5)\cdot(.3)+(.7)\cdot(1)$$

Para lograr el producto máx-mín, basta con cambiar en la operación anterior (·) por mín y (+) por máx; esto es:

$$[.5,.7] \begin{bmatrix} .3 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{máx}\left\{\text{mín}\left\{.5,.3\right\},\text{mín}\left\{.7,\ 1\right\}\right\}$$

$$= \text{máx}\left\{.3,.7\right\}$$

$$= .7 \ .$$

Basándose en la definición de la composición, el valor de la posición de la matriz que se desea encontrar está dado por:

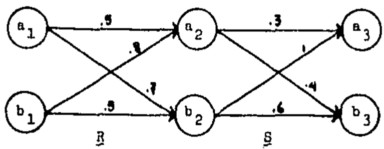
$$\mu_{\underset{\sim}{S}\cdot\underset{\sim}{R}}(a_1,a_3) = \underset{y\in E_2}{\text{máx}}\left\{\text{mín}\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(a_1,y),\mu_{\underset{\sim}{S}}(y,a_3)\right\}\right\}$$

$$= \underset{y\in\{a_2,b_2\}}{\text{máx}}\left\{\text{mín}\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(a_1,y),\mu_{\underset{\sim}{S}}(y,a_3)\right\}\right\}$$

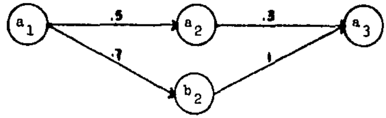
(†) La definición de composición máx-mín es la composición usual, más no la única que se ha dado (ver por ejemplo la referencia bibliográfica 2). Aquí se empleará esta definición por la utilidad de la idea en que se basa.

$$=\text{máx}\left\{\text{mín}\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(a_1,a_2),\mu_{\underset{\sim}{S}}(a_2,a_3)\right\},\text{mín}\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(a_1,b_2),\mu_{\underset{\sim}{S}}(b_2,a_3)\right\}\right\}$$
$$=\text{máx}\left\{\text{mín}\left\{.5,.3\right\},\text{mín}\left\{.7,\ 1\right\}\right\}$$
$$=\text{máx}\left\{.3,.7\right\}$$
$$=.7\ .$$

Explicaré, con la ayuda de la representación gráfica de la relación, el significado de esta operación. En grafos dirigidos, las relaciones $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{S}$ se verán:



Lo que se ha calculado en detalle es el relacionamiento que existe entre a_1 y a_3. La reducción siguiente del grafo muestra los posibles pasos de a_1 a a_3:



Si se piensa por un momento que a_1, a_2, b_2 y a_3 son ciudades, y que existen puentes que las unen, pero que tienen cierta restricción de resistencia al peso, dada por el relacionamiento. Y si se quisiera pasar de a_1 a a_3 la mayor carga posible, lo primero que se tendría que hacer sería cerciorarse de la posibilidad del paso en el puente, lo cual se logra encontrando los relacionamientos mínimos. Esto es, si se escoge a a_2 como intermediario, el paso estará garantizado no excediendo un peso de .3. Pero si se escoge a b_2 como intermediario el paso se puede hacer con .7 de peso. Así, el relacionamiento que existe entre las ciudades a_1 y a_3 es de .7 (el máximo de los pasos posibles).

Se interpretará la composición de relaciones como el máximo relaciona miento posible, tomando en cuenta los valores de las relaciones involucradas.

La operación entre matrices facilita la obtención de la relación compuesta (†).

Cuando se haga la composición de una relación $\underset{\sim}{R}$ consigo misma, la relación compuesta se denotará por $\underset{\sim}{R}^2$.
En general $\underset{\sim}{R}^k = \underbrace{\underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{R} \cdot \ldots \cdot \underset{\sim}{R}}_{k\text{-veces}}$.

2.5. Un ejemplo.

Se aplicará el concepto de composición de relaciones borrosas a la selección de área de estudio en la carrera de actuaría. Supóngase que se consideran las siguientes áreas:

Investigación de operaciones (I O)

Estadística (E)

Finanzas (F)

Economía (E C)

Computación (C)

Administración (A)

Seguros (S)

Pensiones (P)

Matemáticas (M)

Estas son algunas de las áreas de especialización que se presentan actualmente. Para este ejemplo se tomarán únicamente tres de ellas y un alumno.
Con base en los prerrequisitos se encontrará la relación entre materias y áreas. Esto es, cada área está formada por ciertas materias, llamadas básicas. Estas materias básicas tienen ciertos prerrequisitos y entre mayor sea el número de materias básicas que necesitan un prerrequisito, mayor será la relación entre el prerrequisito y el área. La relación entre el alumno y las materias estará dada por las calificaciones.

A continuación se muestran las áreas, sus materias básicas y los prerrequisitos.

(†) El lector puede comprobar que el operar manualmente máx-mín, sobre todo cuando se tienen matrices grandes, resulta muy laborioso.
En este trabajo se utilizaron los operadores máximo (⌈) y mínimo (⌊) con que cuenta el lenguaje de computación APL.
La multiplicación de matrices es muy fácil de efectuar en APL, basta con utilizar el operador +.x, para efectuar el producto máx-mín se utiliza el operador ⌈.⌊.
No consideré conveniente profundizar en este tópico por considerarlo fuera del tema central de la tesis.

Area	Básicas	Prerrequisitos
I.O	Teoría de juegos	Estadística I (1)
	Teoría de inventarios	Probabilidad I (1)
	Teoría de colas	Análisis mat. (3)
	Seminario de I.O.	Algebra lineal (1)
	Programación lineal	
E	Muestreo	Estadística I (4)
	Procesos estocásticos	Probabilidad I (2)
	Análisis de regresión	Estadística II (3)
	Estadística bayesiana	Análisis mat. (1)
	Teoría de decisiones	Probabilidad II (1)
S	Modelos dinámicos	Cálculo act. II (1)
	Contabilidad de seguros	Contabilidad (1)
	Legislación de seguros	Seguros de vida (2)
	Estadística de seguros	Seguros de personas (2)
		Cálculo act. III (1)
		Estadística I (1)

El número que aparece al lado de los prerrequisitos es el número de materias básicas que necesitan de tal materia. Por ejemplo, Estadística I (E1) es necesaria en una materia básica de I O, en cuatro de E y en una de S.

Sean los conjuntos:

$$A=\{\text{alumnos}\}=\{a1\}$$

$$B=\{\text{materias}\}=\{E1,E2,AM,AL,P1,P2,CA2,CA3,SP,SV,C\}$$

$$C=\{\text{áreas}\}=\{I\ O,E,S\}.$$

Se podría decir que la relación $\underset{\sim}{R}_1:A\longrightarrow B$ con función de membresía

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x,y)=C(x,y)/10$$

se debería de "completar" con otros aspectos, por no considerar como algo definitivo la calificación obtenida en un curso.
Supóngase que, en términos solamente de calificaciones, se tiene

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccc} E1 & E2 & AM & AL & P1 & P2 & CA2 & CA3 & SP & SV & C \end{array} \\ \underset{\sim}{R}_1=a1 & \left[\begin{array}{ccccccccccc} .8 & .6 & 1 & .8 & .8 & .6 & 1 & .6 & .6 & .6 & 1 \end{array}\right]. \end{array}$$

Observación.
El crear un modelo de este tipo podría subir el nivel académico, ya que no solamente sería orientador del alumno, sino que se podrían pedir niveles mínimos.
Por ejemplo, la relación de nivel .8 está dada por

$$R_{1_{0.8}}=\{(a1,E1),(a1,AL),(a1,P1),(a1,AM),(a1,CA2),(a1,C)\}.$$

Sea $\underset{\sim}{R}_2$ la relación de B a C, "la materia x tiene importancia en el área y"; una manera de obtener $\underset{\sim}{R}_2$ puede ser la siguiente:

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_2}(x,y)=\frac{\text{básicas del área y que necesitan x}}{\text{total de básicas del área y}}\ .$$

Es decir:

$$\underset{\sim}{R}_2 = \begin{array}{c} \\ E1 \\ E2 \\ AM \\ AL \\ P1 \\ P2 \\ CA2 \\ CA3 \\ SP \\ SV \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} IO & E & S \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1/5 & 4/5 & 1/4 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ 3/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{array}\right] \end{array}$$

La matriz correspondiente a $\underset{\sim}{R}_2 \cdot \underset{\sim}{R}_1$ es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} IO & E & S \end{array} \\ \underset{\sim}{R}_2 \cdot \underset{\sim}{R}_1 = a1 & [\begin{array}{ccc} 3/5 & 4/5 & 1/2 \end{array}] \end{array}.$$

El alumno debería especializarse en el área de estadística, ya que está más relacionado con ella.

Considero que las ideas expuestas en este ejemplo podrían ser, con un análisis más profundo, de importancia para la resolución de los proble mas planteados.

2.6. Algunas propiedades.

En muchas aplicaciones se analizan relaciones de un conjunto en sí mismo. Aquí utilizaré este tipo de relaciones y algunas de sus propiedades, las cuales se destacan mediante las siguientes definiciones.

Definición. Sea $\underset{\sim}{R}$ una relación borrosa en un conjunto E. Se dice que $\underset{\sim}{R}$ es reflexiva si

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,x)=1, \text{ para todo elemento } x \text{ de } E.$$

Ejemplo. Sean $E=\{a,b,c\}$ y $\underset{\sim}{R}$ la relación en E definida por

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \underset{\sim}{R} = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & .3 & 0 \\ .1 & 1 & .7 \\ 1 & .5 & 1 \end{bmatrix} \end{array} .$$

Claramente $\underset{\sim}{R}$ es reflexiva. Obsérvese que la matriz que representa a una relación borrosa reflexiva debe tener 1's en toda su diagonal principal.

Definición. Sea $\underset{\sim}{R}$ una relación borrosa en un conjunto E. Se dice que $\underset{\sim}{R}$ es simétrica si

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)=\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,x), \text{ para todos los elementos } x \text{ y } y \text{ de } E.$$

Ejemplo. Sean $E=\{a,b,c\}$ y $\underset{\sim}{R}$ la relación en E definida por

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \underset{\sim}{R} = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & .3 & .7 \\ .3 & 1 & .5 \\ .7 & .5 & .2 \end{bmatrix} \end{array} .$$

Es fácil comprobar que $\underset{\sim}{R}$ es simétrica. Nótese que la matriz que representa a una relación borrosa simétrica debe ser una matriz simétrica; es decir, al intercambiar las columnas por los renglones la matriz no se altera.

Definición. Sea $\underset{\sim}{R}$ una relación borrosa en un conjunto E. Se dice que $\underset{\sim}{R}$ es transitiva si

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z)\geq \max_{y}\left\{\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y),\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z)\right\}\right\}, \text{ para todos los elementos } x,y \text{ y } z \text{ de } E.$$

Intuitivamente, esta definición nos dice que el relacionamiento direc to entre cualquier par de elementos del conjunto en cuestión, es mayor o igual que el relacionamiento utilizando algún intermediario.

Ejemplo. Sean $E=\{a,b,c,d\}$ y $\underset{\sim}{R}$ la relación en E definida por

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} .2 & 1 & .4 & .4 \\ 0 & .6 & .3 & 0 \\ 0 & 1 & .3 & 0 \\ .1 & 1 & 1 & .1 \end{bmatrix} \end{array}$$

El lector podrá comprobar que $\underset{\sim}{R}$ es transitiva, siguiendo la definición. A continuación se hace la comprobación para los elementos a y b.

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(a,b) \geq \max_{y \in E}\left\{\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(a,y),\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,b)\right\}\right\}$$

$$y=a;\ \min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(a,a),\mu_{\underset{\sim}{R}}(a,b)\right\}=\min\{0.2,1\}=0.2$$

$$y=b;\ \min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(a,b),\mu_{\underset{\sim}{R}}(b,b)\right\}=\min\{1,0.6\}=0.6$$

$$y=c;\ \min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(a,c),\mu_{\underset{\sim}{R}}(c,b)\right\}=\min\{0.4,1\}=0.4$$

$$y=d;\ \min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(a,d),\mu_{\underset{\sim}{R}}(d,b)\right\}=\min\{0.4,1\}=0.4$$

$$\max_{y \in E}\left\{\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(a,y),\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,b)\right\}\right\}=\max\{0.2,0.4,0.6\}=0.6\leq 1=\mu_{\underset{\sim}{R}}(a,b)\ .$$

En el siguiente capítulo se desarrollará una aplicación de las relaciones borrosas, haciendo uso de las propiedades estudiadas en esta sección.

A continuación se enuncia un lema que será de utilidad.

Lema 1. Sea $\underset{\sim}{R}$ una relación borrosa simétrica en un conjunto E, entonces la composición de $\underset{\sim}{R}$ consigo misma es también una relación borrosa simétrica en E.

Demostración.

Hay que demostrar que $\mu_{\underset{\sim}{R}^2}(x,y)=\mu_{\underset{\sim}{R}^2}(y,x)$, para todos los elementos x y y de E.

Para todos los elementos x y y de E se tiene que

$$\mu_{\underset{\sim}{R}^2}(x,y)=\max_{z \in E}\left\{\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z),\mu_{\underset{\sim}{R}}(z,y)\right\}\right\}$$

$$=\max_{z \in E}\left\{\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(z,x),\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z)\right\}\right\} \quad \text{(simetría de } \underset{\sim}{R}\text{)}$$

$$=\max_{z \in E}\left\{\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z),\mu_{\underset{\sim}{R}}(z,x)\right\}\right\}$$

$=\mu_{\underset{\sim}{R}^2}(y,x).$

Q.E.D.

2.7. Cierre transitivo de una relación borrosa.

Para fundamentar la aplicación que se desarrollará en el siguiente capítulo, será necesario definir el cierre transitivo de una relación borrosa. Además, se definirán nuevos conceptos que ayudarán a derivar algunas propiedades del cierre transitivo.

Definición. Se llamará cierre transitivo de una relación borrosa $\underset{\sim}{R}$, a la relación borrosa

$$\hat{\underset{\sim}{R}}=\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{R}^2\cup\underset{\sim}{R}^3\cup\ldots$$

Definición. Considérese un conjunto finito E y una relación borrosa $\underset{\sim}{R}$ definida en éste. Un camino de x a y en la relación $\underset{\sim}{R}$, es una r-upla ordenada con o sin repetición (i.e. no importa la relación de orden que guardan r y la cardinalidad de E)

$$C(x,y)=(x=x_1,x_2,\ldots,x_r=y)$$

donde x_i es un elemento de E, $i=1,\ldots,r$, con la condición de que

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_i,x_{i+1})>0,\ i=1,\ldots,r-1\ .$$

Intuitivamente, esta condición asegura un relacionamiento mínimo entre cualquier par de elementos del camino. ¿Podría el lector imaginar un camino sin conexión entre todos sus puntos?

Definición. Sean E un conjunto, $\underset{\sim}{R}$ una relación en E y C(x,y) un camino en $\underset{\sim}{R}$ de x a y tal que

$$C(x,y)=(x=x_1,x_2,\ldots,x_r=y).$$

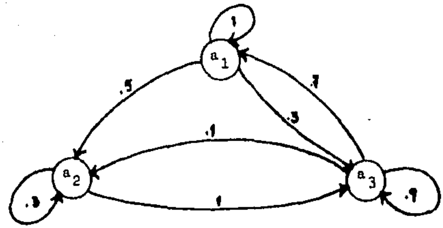
Se llamará fuerza del camino C(x,y) al número

$$\ell[C(x,y)]=\ell[(x=x_1,x_2,\ldots,x_r=y)]$$
$$=\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1,x_2),\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_2,x_3),\ldots,\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_{r-1},x_r)\right\}.$$

Ejemplo. Sea $E=\{a_1,a_2,a_3\}$ y sea $\underset{\sim}{R}$ la relación borrosa en E dada por

$$\underset{\sim}{R}=\begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & .5 & .3 \\ a_2 & 0 & .3 & 1 \\ a_3 & .7 & .1 & .9 \end{array}\ .$$

Considérese la siguiente representación gráfica de $\underset{\sim}{R}$.



Los siguientes son caminos en $\underset{\sim}{R}$:

$$C(a_1,a_1)=(a_1,a_3,a_1)$$

$$C(a_1,a_3)=(a_1,a_2,a_3)$$

$$C(a_2,a_3)=(a_2,a_3,a_1,a_1,a_3).$$

La cuádrupla (a_1,a_2,a_1,a_3) no es un camino en $\underset{\sim}{R}$, ya que $\mu_{\underset{\sim}{R}}(a_2,a_1)=0$.

Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned}\ell[C(a_1,a_1)]&=\ell[(a_1,a_3,a_1)]\\ &=\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(a_1,a_3),\mu_{\underset{\sim}{R}}(a_3,a_1)\right\}\\ &=\min\left\{.3,.7\right\}\\ &=.3.\end{aligned}$$

Se denotará por $\mathcal{C}(x,y)$ al conjunto que contenga todos los caminos po sibles de x a y en una relación dada.

Definición. El camino más fuerte de x a y, denotado por $C^*(x,y)$, es a quel elemento de $\mathcal{C}(x,y)$ que tenga fuerza máxima. Es decir,

$$\ell[C^*(x,y)]=\max_{C(x,y)\in\mathcal{C}(x,y)}\left\{\ell[C(x,y)]\right\}.$$

La longitud de un camino está dada por el número de elementos que con tiene, menos 1.

Teorema 1. Sea $\underset{\sim}{R}$ una relación en un conjunto E, se tiene entonces que para todos los elementos x y y de E

$$\mu_{\underset{\sim}{R}^k}(x,y)=\ell[C_k^*(x,y)]$$

donde $C_k^*(x,y)$ es el camino más fuerte de x a y de longitud k.

Demostración.

$$\ell[C_k^*(x,y)]=\max_{C_k(x,y)\in\mathcal{C}(x,y)}\left\{\ell[C_k(x,y)]\right\}$$

$$= \max_{C_k(x,y)\in \mathcal{C}(x,y)} \{\ell[(x=x_1,x_2,\ldots,x_k,x_{k+1}=y)]\}$$

$$= \max_{C_k(x,y)\in \mathcal{C}(x,y)} \{\min\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,x_2),\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_2,x_3),\ldots,\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_k,y)\}\}\ldots\ldots(1)$$

por otra parte, para todos los elementos x y y de E

$$\mu_{\underset{\sim}{R}^k}(x,y)= \max_{z_k\in E}\{\min\{\mu_{\underset{\sim}{R}^{k-1}}(x,z_k),\mu_{\underset{\sim}{R}}(z_k,y)\}\}$$

donde

$$\mu_{\underset{\sim}{R}^{k-1}}(x,z_k)= \max_{z_{k-1}\in E}\{\min\{\mu_{\underset{\sim}{R}^{k-2}}(x,z_{k-1}),\mu_{\underset{\sim}{R}}(z_{k-1},z_k)\}\}\ldots\ldots(2)$$

entonces

$$\mu_{\underset{\sim}{R}^k}(x,y)= \max_{z_k\in E}\{\min\{ \max_{z_{k-1}\in E}\{ \min\{\mu_{\underset{\sim}{R}^{k-2}}(x,z_{k-1}),\mu_{\underset{\sim}{R}}(z_{k-1},z_k)\}\}, {}_{\underset{\sim}{R}}(z_k,y)\}\}.$$

Si se sigue el desarrollo que se hizo en (2) para $\mu_{\underset{\sim}{R}^{k-2}}$ y todas las re laciones que sean alguna composición de $\underset{\sim}{R}$, se tiene que

$$\mu_{\underset{\sim}{R}^k}(x,y)= \max_{z_k\in E}\{\min\{ \max_{z_{k-1}\in E}\{\min\{ \max_{z_{k-2}\in E}\{\min\{\ldots\{\min\{\max_{z_2\in E}\{ \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z_2),\mu_{\underset{\sim}{R}}(z_2,z_3)\}\},\mu_{\underset{\sim}{R}}(z_3,z_4)\}\},\ldots,\mu_{\underset{\sim}{R}}(z_k,z_{k-1}) ,\mu_{\underset{\sim}{R}}(z_k,y)\}\}$$

esta última expresión es una forma alternativa de escribir la expresión (1).

Q.E.D.

Hay que recordar que $\underset{\sim}{R}^k$ da el máximo relacionamiento posible utilizan do k-1 intermediarios. La longitud de un camino con k+1 puntos (elemen tos de E) es de k; sin los extremos hay k-1 intermediarios. La fuerza del camino dará los pasos posibles y el camino más fuerte dará el máxi mo paso posible.

<u>Teorema 2</u>. Sea $\underset{\sim}{R}$ una relación en un conjunto E, entonces

$\mu_{\hat{\underset{\sim}{R}}}(x,y)=\ell[C^*(x,y)]$, para todos los elementos x y y de E.

Demostración.

$$\mu_{\hat{\underset{\sim}{R}}}(x,y)=\max\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y),\mu_{\underset{\sim}{R}^2}(x,y),\ldots\}$$

$$=\max\{\ell[C_1^*(x,y)],\ell[C_2^*(x,y)],\ldots\} \quad \text{(Teorema 1)}$$

$$=\ell[C^*(x,y)].$$

Q.E.D.

Teorema 3. Sea E un conjunto con n-elementos. Si k es la longitud del camino, en $\underset{\sim}{R}$, de x a y, con k>n, entonces no todos los elementos del camino son únicos, hay al menos un circuito (camino cerrado) en el camino. Si se hace desaparecer este (o estos) circuito, el camino queda de una longitud inferior o igual a n; se puede entonces afirmar que

$$\ell[C^*_k(x,y)]\leq\ell[C^*_{j\leq n}(x,y)],$$

donde $\ell[C^*_{j\leq n}(x,y)]$ es la fuerza del camino, de x a y, más fuerte y de longitud menor o igual a n.

Demostración.

Sea $C^*_k(x,y)=(x=\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_\ell,\ldots,\hat{x}_m,\ldots,\hat{x}_k,\hat{x}_{k+1}=y)$ el camino más fuerte de x a y, en $\underset{\sim}{R}$ y de longitud k. Supóngase que $C^*_k(x,y)$ tiene solamente el circuito entre x_ℓ y x_m (i.e. $\hat{x}_\ell=\hat{x}_m$). Sea $C_{j\leq n}(x,y)$ el camino entre x y y resultante de quitar a $C^*_k(x,y)$ el circuito. Es decir,

$$C_{j\leq n}(x,y)=(x=\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_\ell,\hat{x}_{m+1},\ldots,\hat{x}_{k+1}=y).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\ell[C^*_k(x,y)]&=\text{mín}\Big\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(\hat{x}_1,\hat{x}_2),\ldots,\mu_{\underset{\sim}{R}}(\hat{x}_\ell,\hat{x}_{\ell+1}),\ldots,\mu_{\underset{\sim}{R}}(\hat{x}_{m-1},\hat{x}_m),\ldots\\&\qquad\ldots,\mu_{\underset{\sim}{R}}(\hat{x}_k,\hat{x}_{k+1})\Big\}\\&\leq\text{mín}\Big\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(\hat{x}_1,\hat{x}_2),\ldots,\mu_{\underset{\sim}{R}}(\hat{x}_{\ell-1},\hat{x}_\ell),\mu_{\underset{\sim}{R}}(\hat{x}_\ell,\hat{x}_{m+1}),\ldots\\&\qquad\ldots,\mu_{\underset{\sim}{R}}(\hat{x}_k,\hat{x}_{k+1})\Big\}\\&=\ell[C_{j\leq n}(x,y)]\\&\leq\ell[C^*_{j\leq n}(x,y)].\end{aligned}$$

Q.E.D.

Teorema 4. Si $\underset{\sim}{R}$ es una relación en un conjunto E, con n elementos, entonces

$$\hat{\underset{\sim}{R}}=\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{R}^2\cup\ldots\cup\underset{\sim}{R}^n.$$

Demostración.

Para todos los elementos x y y de E,

$$\begin{aligned}\mu_{\hat{\underset{\sim}{R}}}(x,y)&=\text{máx}\Big\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y),\mu_{\underset{\sim}{R}^2}(x,y),\ldots,\mu_{\underset{\sim}{R}^n}(x,y),\mu_{\underset{\sim}{R}^{n+1}}(x,y),\ldots\Big\}\\&=\text{máx}\Big\{\ell[C^*_1(x,y)],\ell[C^*_2(x,y)],\ldots,\ell[C^*_n(x,y)],\ell[C^*_{n+1}(x,y)],\\&\qquad\ldots\Big\}\\&=\text{máx}\Big\{\ell[C^*_1(x,y)],\ell[C^*_2(x,y)],\ldots,\ell[C^*_n(x,y)]\Big\}\quad\text{(teorema 3)}\end{aligned}$$

$$=\max\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y),\mu_{\underset{\sim}{R}^2}(x,y),\dots,\mu_{\underset{\sim}{R}^n}(x,y)\}$$

$$=\mu_{\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{R}^2\cup\dots\cup\underset{\sim}{R}^n}(x,y) .$$

Q.E.D.

<u>Teorema 5</u>. Sea $\underset{\sim}{R}$ una relación borrosa en un conjunto E, entonces $\hat{\underset{\sim}{R}}$ es una relación borrosa transitiva en E.

Demostración.

Hay que demostrar que para todos los elementos x,y y z de E $\mu_{\hat{\underset{\sim}{R}}}(x,z)\geq\max_{y\in E}\{\min\{\mu_{\hat{\underset{\sim}{R}}}(x,y),\mu_{\hat{\underset{\sim}{R}}}(y,z)\}\}$, o equivalentemente $\hat{\underset{\sim}{R}}^2\subset\hat{\underset{\sim}{R}}$.

$$\hat{\underset{\sim}{R}}^2=\hat{\underset{\sim}{R}}\cdot\hat{\underset{\sim}{R}}=\underset{\sim}{R}^2\cup\underset{\sim}{R}^3\cup\dots$$

$$\subset\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{R}^2\cup\dots$$

$$=\hat{\underset{\sim}{R}}$$

Q.E.D.

Ahora se pasa a estudiar una aplicación de las relaciones borrosas.

III. APLICACION.

3.1. Introducción.

En este capítulo se desarrollará una metodología, basada tanto en relaciones borrosas como en relaciones ordinarias, para realizar clasificaciones de elementos de un conjunto dado. Debido a que muchas veces las características que permiten la clasificación de objetos son subjetivas, es útil el concepto de relación borrosa para dicho propósito.
Existen varios artículos sobre el tema, algunos de los cuales son citados en el apéndice II y en la bibliografía, pero aquí se desarrollará un método sumamente fácil de comprender y aplicar.
Este método utiliza el concepto de relación borrosa para definir la similitud subjetiva entre objetos, pero debido a que en muy pocas ocasiones la similitud inicial da toda la información necesaria, se define una relación n-ésima con base en la composición de la relación inicial. La relación resultante permitirá medir el máximo relacionamiento posible entre los objetos a clasificar. Haciendo uso de la relación n-ésima se define una relación ordinaria de equivalencia en el conjunto dado, la cual induce una partición en él; las clases de equivalencia son los patrones de clasificación.

3.2. Fundamentación del método.

Considérese un conjunto finito E y supóngase que se quiere clasificar los elementos de E en patrones. Los patrones deberán contener aquellos elementos que tengan un nivel de similitud dado, el cual no se dará con elementos de otros patrones.
La similitud subjetiva que se asocie a cada par de elementos de E estará dada por la relación borrosa $\underset{\sim}{R}_1$. Supóngase que esta relación satisface las siguientes propiedades:

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x,x)=1, \text{ para todo elemento x de E.}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x,y)=\mu_{\underset{\sim}{R}_1}(y,x), \text{ para todos los elementos x y y de E.}$$

La primera de estas propiedades es la de reflexividad; indica que el grado de similitud de todo elemento con él mismo es perfecto.
La segunda es la propiedad de simetría, que indica que el grado de similitud de un elemento x con otro y, es el mismo que el del elemento y con x. Es decir, la similitud no depende del orden de comparación.
Estas dos propiedades facilitarán el trabajo de clasificación y, al parecer, no son tan restrictivas.

Se dirá que R_1^n es la relación n-ésima borrosa de la relación inicial

$\underset{\sim}{R}_1$ si:

$$\underset{\sim}{R}_1^n=\underbrace{\underset{\sim}{R}_1\cdot\underset{\sim}{R}_1\cdot\ldots\cdot\underset{\sim}{R}_1}_{n\text{-veces}}$$

Definición. La relación de similitud $\underset{\sim}{R}$, dada por la relación borrosa inicial $\underset{\sim}{R}_1$, se define como:

$$\underset{\sim}{R}=\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{R}_1^n.$$

Debido a que me concentraré en conjuntos finitos, la obtención de $\underset{\sim}{R}$ será más fácil. A aquéllos que deseen profundizar en el caso de conjuntos infinitos se les recomienda ver la primera referencia en la bibliografía.

Teorema 6. Sea $\underset{\sim}{R}$ una relación borrosa reflexiva en un conjunto E que contenga N elementos; entonces existe $k\leqslant N$ tal que

$$\underset{\sim}{R}\leqslant\underset{\sim}{R}^2\leqslant\underset{\sim}{R}^3\leqslant\ldots\leqslant\underset{\sim}{R}^k=\underset{\sim}{R}^{k+1} ,$$

donde

$\underset{\sim}{R}^i\leqslant\underset{\sim}{R}^j$ si, y solamente si, $\mu_{\underset{\sim}{R}^i}(x,y)\leqslant\mu_{\underset{\sim}{R}^j}(x,y)$, para todos los elementos x y y de E.

Demostración.

i) Primero demostraré que $\underset{\sim}{R}^n\leqslant\underset{\sim}{R}^{n+1}$, para todo número natural n.

$$\mu_{\underset{\sim}{R}^{n+1}}(x,y)=\max_{z\in E}\left\{\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}^n}(x,z),\mu_{\underset{\sim}{R}}(z,y)\right\}\right\},$$ para todos los elementos x y y de E.

$$=\max\left\{\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}^n}(x,z_1),\mu_{\underset{\sim}{R}}(z_1,y)\right\},\ldots,\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}^n}(x,z_N),\mu_{\underset{\sim}{R}}(z_N,y)\right\}\right\}$$

sin pérdida de generalidad se puede suponer que $z_1=y$, entonces

$$\mu_{\underset{\sim}{R}^{n+1}}(x,y)=\max\left\{\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}^n}(x,y),\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,y)\right\},\ldots,\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}^n}(x,z_N),\mu_{\underset{\sim}{R}}(z_N,y)\right\}\right\}$$

$$=\max\left\{\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}^n}(x,y),1\right\},\ldots,\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}^n}(x,z_N),\mu_{\underset{\sim}{R}}(z_N,y)\right\}\right\}$$

$$=\max\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}^n}(x,y),\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}^n}(x,z_2),\mu_{\underset{\sim}{R}}(z_2,y)\right\},\ldots,\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}^n}(x,z_N),\mu_{\underset{\sim}{R}}(z_N,y)\right\}\right\}$$

$$\geqslant\mu_{\underset{\sim}{R}^n}(x,y)$$

Q.E.D.

ii) Voy a demostrar que $\underset{\sim}{R}^N=\underset{\sim}{R}^{N+1}$; esto aseguraría que, cuando más, a partir de N se tiene la periodicidad.
Se tiene que demostrar que $\mu_{\underset{\sim}{R}^N}(x,y)=\mu_{\underset{\sim}{R}^{N+1}}(x,y)$, para todos los elementos x y y de E.

Por la primera parte del teorema se tiene que para todos los elementos x y y de E

$$\mu_{\underset{\sim}{R}^N}(x,y)\leq\mu_{\underset{\sim}{R}^{N+1}}(x,y),$$

o equivalentemente, $\ell[C^*_N(x,y)]\leq\ell[C^*_{N+1}(x,y)]$.

Empleando la notación que se utiliza para caminos en una relación, lo que se tiene que demostrar es que para todos los elementos x y y de E

$$\ell[C^*_N(x,y)]=\ell[C^*_{N+1}(x,y)],$$

supóngase que existen elementos $\hat{x}$ y $\hat{y}$ en E tales que

$$\ell[C^*_N(\hat{x},\hat{y})]<\ell[C^*_{N+1}(\hat{x},\hat{y})],$$

esto implicaría que

$$\ell[C^*_{N+1}(\hat{x},\hat{y})]>\ell[C^*_t(\hat{x},\hat{y})],\text{ para toda } t\leq N,$$

lo que contradice lo demostrado en el teorema 3. Por lo tanto no existen tales elementos en E.

Q.E.D.

Este teorema asegura que en un conjunto de N elementos, como máximo en N composiciones se tendrá la relación límite $\underset{\sim}{\hat{R}}$. Además, permite asegurar que para una relación tal, el cierre transitivo coincide con $\underset{\sim}{R}^k$, donde k es el período.

Este último resultado se tiene debido a que

$$\underset{\sim}{\hat{R}}=\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{R}^2\cup\ldots\cup\underset{\sim}{R}^k$$

y como $\underset{\sim}{R}^i\leq\underset{\sim}{R}^{i+1}$, entonces

$$\text{máx}\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y),\mu_{\underset{\sim}{R}^2}(x,y),\ldots,\mu_{\underset{\sim}{R}^k}(x,y)\right\}=\mu_{\underset{\sim}{R}^k}(x,y),\text{ para cualquier par de elementos x y y de E.}$$

Lo anterior permite concluir que la relación límite es transitiva.

La relación límite dará la similitud máxima posible entre cualquier par de elementos. Es decir, no solamente se considerará la similitud directa dada subjetivamente, sino que también se considerará la similitud indirecta.

Basándome en la relación $\underset{\sim}{R}$, en E, que se ha definido anteriormente, se introducirá en la siguiente definición una relación ordinaria en E.

<u>Definición</u>. La relación ordinaria de similitud de nivel ℓ, $\ell\in[0,1]$, denotada por R_ℓ, se define por

$$R_\ell=\left\{(x,y)\mid\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\geq\ell\right\}.$$

Con base en esta relación ordinaria se encontrarán los patrones de clasificación para los elementos de E.

<u>Teorema 7</u>. R_ℓ es una relación de equivalencia en E.

Demostración.

Hay que demostrar que R_ℓ es una relación reflexiva. Esto es, para todo elemento x de E se debe tener que $(x,x)\in R_\ell$.

$$1=\mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x,x)\leq\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,x)\leq 1 \qquad \text{(reflexividad de } \underset{\sim}{R}_1 \text{ y teorema 6)},$$

entonces $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,x)=1$, para todo elemento x de E,

de lo anterior $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,x)\geq\ell$, para cualquier $\ell\in[0,1]$,

por lo tanto $(x,x)\in R_\ell$, para todo elemento x de E.

También se debe demostrar que R_ℓ es una relación simétrica. Es decir, para todos los elementos x y y de E se debe tener que $(x,y)\in R_\ell$ implica que $(y,x)\in R_\ell$.

Por el lema 1 se tiene que

$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)=\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,x)$, para todos los elementos x y y de E, ya que $\underset{\sim}{R}_1$ es una relación simétrica y $\underset{\sim}{R}$ es composición de ésta.

Entonces si $(x,y)\in R_\ell$ se tiene que $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\geq\ell$, $\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,x)\geq\ell$ y

por lo tanto $(y,x)\in R_\ell$.

Por último hay que demostrar que la relación R_ℓ es transitiva. Esto es, para todos los elementos x,y y z de E se debe tener que $(x,y)\in R_\ell$ y $(y,z)\in R_\ell$ implica que $(x,z)\in R_\ell$.

Para todos los elementos x,y y z de E se tiene que si

$(x,y)\in R_\ell$ y $(y,z)\in R_\ell$, entonces $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\geq\ell$ y $\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z)\geq\ell$,

como $\underset{\sim}{R}$ es el cierre transitivo de $\underset{\sim}{R}_1$, es una relación transitiva y

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z)\geq\mu_{\underset{\sim}{R}^2}(x,z)=\max_{t\in E}\left\{\min\left\{\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,t),\mu_{\underset{\sim}{R}}(t,z)\right\}\right\},$$

si t=y se tiene que $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z)\geq\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\geq\ell$, o bien, $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z)\geq\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z)\geq\ell$.

Por lo tanto $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z)\geq\ell$, concluyendo que $(x,z)\in R_\ell$.

Q.E.D.

Se ha obtenido una relación de equivalencia en E a partir de la relación borrosa dada subjetivamente. Utilizaré la partición que induce esta relación para clasificar los elementos de E.

Antes de ejemplificar el resultado, es importante mencionar lo siguien

te:
1) No debe de sorprender que la relación que finalmente permitirá la clasificación, sea una relación ordinaria (¿puede el lector imaginarse una clasificación borrosa?). Sin embargo, como se apreciará en el ejemplo, la relación borrosa permite tener una semejanza más apegada a la realidad en muchas situaciones.
2) En esta aplicación se debe observar la importancia que tienen las relaciones ordinarias de nivel, las cuales pueden ser consideradas como el punto medio entre las relaciones ordinarias y borrosas.

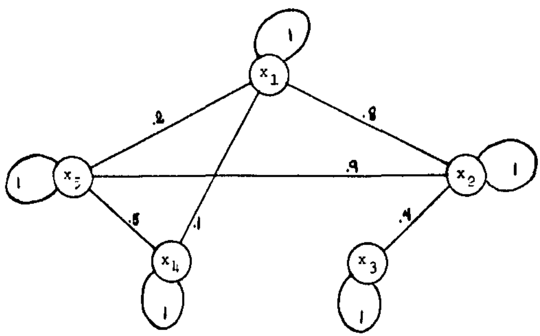
Es importante mencionar que ℓ debe ser escogida por el investigador, de acuerdo a lo estricta que desee hacer su clasificación. En efecto, si $\ell>\mu$, entonces la partición que induce R_ℓ refina la correspondiente de R_μ, ya que

$$\text{si } (x,y)\in R_\ell, \text{ entonces } \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\geq\ell\geq\mu, \text{ de modo que } (x,y)\in R_\mu.$$

Ejemplo. Sea $E=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ y $\underset{\sim}{R}_1$ la relación borrosa dada por

$$\underset{\sim}{R}_1 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & .8 & 0 & .1 & .2 \\ .8 & 1 & .4 & 0 & .9 \\ 0 & .4 & 1 & 0 & 0 \\ .1 & 0 & 0 & 1 & .5 \\ .2 & .9 & 0 & .5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gráficamente, la relación borrosa puede representarse por el diagrama:

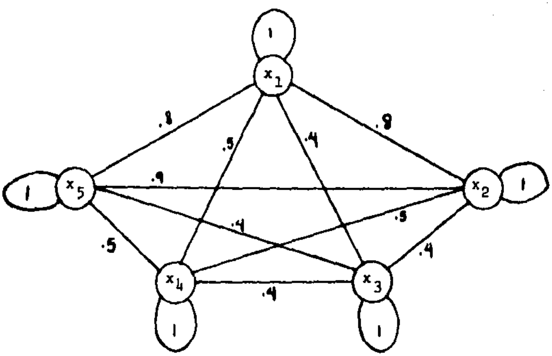


Nótese que, como los grafos son simétricos, no se necesita indicar la dirección en sus arcos.

La siguiente tabla muestra la relación borrosa $\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{R}_1^3$ (aquí se tiene $\underset{\sim}{R}_1^3 =\underset{\sim}{R}_1^4$):

$$
\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & .8 & .4 & .5 & .8 \\
.8 & 1 & .4 & .5 & .9 \\
.4 & .4 & 1 & .4 & .4 \\
.5 & .5 & .4 & 1 & .5 \\
.8 & .9 & .4 & .5 & 1
\end{array}\right] \end{array}
$$

Gráficamente, $\underset{\sim}{R}$ aparecería como sigue



A continuación se muestran las particiones correspondientes, para algunos valores de ℓ.

+) $\ell=0.3$

$(x,y)\in R_{0.3}$ si, y solamente si, $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\geq 0.3$.

$[x_1]=\left\{y\in E \mid \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1,y)\geq 0.3\right\}$

$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1,x_2)=0.8\geq 0.3$, entonces $x_2\in[x_1]$

$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1,x_3)=0.4\geq 0.3$, entonces $x_3\in[x_1]$

$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1,x_4)=0.5\geq 0.3$, entonces $x_4\in[x_1]$

$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1,x_5)=0.8\geq 0.3$, entonces $x_5\in[x_1]$,

por lo tanto $[x_1]=\left\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right\}=E$

Como $[x_1]=[x_2]=[x_3]=[x_4]=[x_5]$, la partición que induce $R_{0.3}$ es E, de modo que aquí la clasificación no resultó ser tal (todos los elementos están en la misma clase).

+) $\ell=0.45$

$\mu_{\underline{R}}(x_1,x_2)=0.8\geq 0.45$, entonces $x_2\in[x_1]$

$\mu_{\underline{R}}(x_1,x_3)=0.4< 0.45$, entonces $x_3\notin[x_1]$

$\mu_{\underline{R}}(x_1,x_4)=0.5\geq 0.45$, entonces $x_4\in[x_1]$

$\mu_{\underline{R}}(x_1,x_5)=0.8\geq 0.45$, entonces $x_5\in[x_1]$,

entonces $[x_1]=\{x_1,x_2,x_4,x_5\}$ y $[x_3]=\{x_3\}$,

por lo que la partición es $\{\{x_1,x_2,x_4,x_5\},\{x_3\}\}$;

en esta clasificación al menos ya el elemento x_3 ha sido separado de los demás.

+) $\ell=0.65$

$\mu_{\underline{R}}(x_1,x_2)=0.8\geq 0.65$, entonces $x_2\in[x_1]$

$\mu_{\underline{R}}(x_1,x_3)=0.4<0.65$, entonces $x_3\notin[x_1]$

$\mu_{\underline{R}}(x_1,x_4)=0.5<0.65$, entonces $x_4\notin[x_1]$

$\mu_{\underline{R}}(x_1,x_5)=0.8\geq 0.65$, entonces $x_5\in[x_1]$,

entonces $[x_1]=\{x_1,x_2,x_5\}$.

$\mu_{\underline{R}}(x_3,x_4)=0.5<0.65$, entonces $x_4\notin[x_3]$,

por lo que la partición es $\{\{x_1,x_2,x_5\},\{x_3\},\{x_4\}\}$.

3.3. Un ejemplo.

Supóngase que un departamento de cierta compañía contiene 16 empleados y quiere hacer grupos de trabajo de acuerdo con la compatibilidad de carácter de ellos.

Supóngase además que el relacionamiento que hay entre los empleados ha sido medido mediante los estudios psicológicos cuyos resultados se dan en la tabla 1.

Si la psicóloga ha determinado que un nivel de compatibilidad de 0.8 es suficiente para obtener buenos resultados, lo que se tiene que hacer para formar los grupos es encontrar la partición que induce $R_{0.8}$.

Calculando primero $\underline{R}=\underline{R}^6$ (ver tabla 2), se tiene que:

$[1]=\{1,13\}$, ya que $\mu_{\underline{R}}(1,1)=1\geq 0.8$ y $\mu_{\underline{R}}(1,13)=0.8\geq 0.8$

De la misma forma se tiene que

[2]={2,5,7,11,14}

[3]={3}

[4]={4,9,10,12,15}

[5]=[2]

[6]={6,8,16}

[7]=[2]

[8]=[6]

[9]=[4]

[10]=[4]

[11]=[2]

[12]=[4]

[13]=[1]

[14]=[2]

[15]=[4]

[16]=[6] .

Por lo que se tendrían los grupos de trabajo {1,13}, {2,5,7,11,14}, {3}, {4,9,10,12,15} y {6,8,16}.

Es importante hacer notar, que aquí no se ha prestado atención al número de empleados que hay en cada grupo de trabajo. Seguramente en un caso real este detalle sería de gran importancia.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1															
2	0	1														
3	0	0	1													
4	0	0	.4	1												
5	0	.8	0	0	1											
6	.5	0	.2	.2	0	1										
7	0	.8	0	0	.4	0	1									
8	.4	.2	.2	.5	0	.8	0	1								
9	0	.4	0	.8	.4	.2	.4	0	1							
10	0	0	.2	.2	0	0	.2	0	.2	1						
11	0	.5	.2	.2	0	0	.8	0	.4	.2	1					
12	0	0	.2	.8	0	0	0	0	.4	.8	0	1				
13	.8	0	.2	.4	0	.4	0	.4	0	0	0	0	1			
14	0	.8	0	.2	.4	0	.8	0	.2	.2	.6	0	0	1		
15	0	0	.4	.8	0	.2	0	0	.2	0	0	.2	.2	0	1	
16	.6	0	0	.2	.2	.8	0	.4	0	0	0	0	.4	.2	0	1

Tabla 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1															
2	.4	1														
3	.4	.4	1													
4	.5	.4	.4	1												
5	.4	.8	.4	.4	1											
6	.6	.4	.4	.5	.4	1										
7	.4	.8	.4	.4	.8	.4	1									
8	.6	.4	.4	.5	.4	.8	.4	1								
9	.5	.4	.4	.8	.4	.5	.4	.5	1							
10	.5	.4	.4	.8	.4	.5	.4	.5	.8	1						
11	.4	.8	.4	.4	.8	.4	.8	.4	.4	.4	1					
12	.5	.4	.4	.8	.4	.5	.4	.5	.8	.8	.4	1				
13	.8	.4	.4	.5	.4	.6	.4	.6	.5	.5	.4	.5	1			
14	.4	.8	.4	.4	.8	.4	.8	.4	.4	.4	.8	.4	.4	1		
15	.5	.4	.4	.8	.4	.5	.4	.5	.8	.8	.4	.8	.5	.4	1	
16	.6	.4	.4	.5	.4	.8	.4	.8	.5	.5	.4	.5	.6	.4	.5	1

Tabla 2.

APENDICE I.

Relaciones binarias ordinarias.

Definición. Sean A y B dos conjuntos. Se llama producto cartesiano de A y B al conjunto de parejas (x,y) tales que $x\in A$ y $y\in B$. El producto cartesiano de A y B se denota por $A\times B$. Es decir,

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \text{ y } y\in B\}.$$

Ejemplos.
1) Sean $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{a,b,c\}$ dos conjuntos, entonces

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}.$$

2) Sean $A=B=\mathbb{R}$, entonces $A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ es el plano cartesiano.

Definición. Sean A y B dos conjuntos. Una relación R de A en B es un subconjunto de $A\times B$.

Ejemplos.
1) Sean $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{a,b,c\}$ dos conjuntos. Los subconjuntos R_1 y R_2, dados a continuación, son relaciones de A en B.

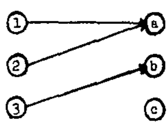
$$R_1=\{(1,a),(2,a),(3,b)\}$$

$$R_2=\{(1,a),(2,a),(3,a),(1,c),(2,c)\}.$$

2) Sean $A=B=\mathbb{R}$ y R la relación en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$R=\{(x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}.$$

Observaciones.
a) Cuando A=B se habla de una relación en A. Este tipo de relaciones son muy importantes y se estudiarán más detalladamente.
b) Si un elemento (x,y) de $A\times B$ pertenece a cierta relación R, se puede indicar escribiendo xRy (x está en relación con y). Así, en el ejemplo 2 último 1R1, 2R2 y 3R3, pero $1\not R 2$.
c) En realidad la definición de relación dada, es la de grafo, que es una representación de la relación. El grafo ayuda a la representación de la relación; por ejemplo, la relación R_1 del ejemplo anterior se puede representar:



Se enunciarán algunas propiedades importantes de las relaciones de un conjunto A en sí mismo.

Definición. Sea R una relación en un conjunto A. Se dice que R es una relación reflexiva si

$$(x,x)\in R, \text{ para todo elemento } x \text{ de } A.$$

Ejemplos.
1) Sea $A=\{1,2,3\}$, entonces $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ es una relación reflexiva en A.
2) Sea R la relación en $\mathbb{R}$ dada por $R=\{(x,x)|x\in\mathbb{R}\}$. R es reflexiva.

Definición. Sea R una relación en un conjunto A. Se dice que R es una relación simétrica si

$$(x,y)\in R \text{ implica } (y,x)\in R, \text{ para todos los elementos } x \text{ y } y \text{ de } A.$$

Ejemplos.
1) Sea $A=\{1,2,3\}$, entonces $R_1=\{(1,1)\}$ y $R_2=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ son relaciones simétricas en A. La relación $R_3=\{(1,1),(2,2),(1,3)\}$ no es simétrica.
2) Sea A un conjunto de individuos y R la relación en A dada por xRy si, y solamente si, x y y tienen el mismo nombre, para todos los elementos x y y de A. R es una relación simétrica.

Definición. Sea R una relación en un conjunto A. Se dice que R es una relación transitiva si

$$(x,y)\in R \text{ y } (y,z)\in R \text{ implica } (x,z)\in R, \text{ para todos los elementos } x, y \text{ y } z \text{ de } A.$$

Ejemplos.
1) Sea $A=\{1,2,3\}$, entonces $R=\{(1,1),(1,2),(2,3),(1,3)\}$ es una relación transitiva en A.
2) La relación R dada en el último ejemplo 2 es una relación transitiva.

Definición. Sea R una relación en un conjunto A. R es una relación de equivalencia si:
a) R es reflexiva.
b) R es simétrica.
c) R es transitiva.

Definición. Sea A un conjunto y sea $\mathcal{C}$ una clase de subconjuntos de A. Se dice que $\mathcal{C}$ es una partición de A si:

a) $A_1\cap A_2=\Phi$, para todos los elementos A_1 y A_2 de $\mathcal{C}$, con $A_1\neq A_2$.

b) $\bigcup\limits_{A_i\in\mathcal{C}} A_i=A$.

Definición. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Para todo elemento x de A, se llama clase de equivalencia de x con respecto a R, al conjunto

$$[x]=\{y\in A|(x,y)\in R\}.$$

Teorema. Sean A un conjunto y R una relación de equivalencia en A. Sea $\mathcal{E}$ el conjunto que contiene todas las clases de equivalencia de los elementos de A; entonces $\mathcal{E}$ es una partición de A.

Demostración.

i) Hay que demostrar que los elementos de $\mathcal{E}$ son ajenos o iguales.

Para todos los elementos x y y de A se tiene que xRy, o bien, $x\not R y$.

+) xRy.

$a\in[x]$ si, y solamente si, xRa

si, y solamente si, aRx (simetría de R)

si, y solamente si, aRx y xRy (por hipótesis)

si, y solamente si, aRy (transitividad de R)

si, y solamente si, yRa (simetría de R)

si, y solamente si, $a\in[y]$.

Así, xRy implica que $[x]=[y]$.

+) $x\not R y$.

Supóngase que $x\not R y$ y que existe $a\in A$ tal que $a\in[x]$ y $a\in[y]$.

$a\in[x]$ implica xRa.

$a\in[y]$ implica yRa implica aRy.

xRa y aRy implica xRy, lo que contradice la hipótesis.

Por tanto las clases de equivalencia son ajenas.

ii) Hay que demostrar que $\bigcup_{x\in A}[x]=A$

+) $\bigcup_{x\in A}[x]\subset A$.

Por definición, $[x]\subset A$, para todo elemento x de A.

Por lo tanto, la unión de clases de equivalencia de A (subconjuntos de A), es un subconjunto de A.

+) $A\subset\bigcup_{x\in A}[x]$.

Sea $x\in A$; por reflexividad, xRx, entonces $x\in[x]$ y $x\in\bigcup_{x\in A}[x]$. Como x es cualquier elemento de A, resuelto que $A\subset\bigcup_{x\in A}[x]$.

Q.E.D

APENDICE II.

Referencias sobre aplicaciones.

A continuación se dan algunas referencias sobre la aplicación de la teoría de conjuntos borrosos a la investigación de operaciones.

Asai, K., Tanaka, H. y Okuda, T. (1975). Decision-making and its goal in a fuzzy environment. En "Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes" (L. A. Zadeh, K. S. Fu, K. Tanaka, and M. Shimura, eds.), pp. 257-277. Academic Press, New York.

Baas, S. M., y Kwakernaak, H. (1977). Rating and ranking of multiple-aspects alternatives using fuzzy sets. Automatica 13, 45-78.

Bellman, R. E. y Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. Manage. Sci. 17, No. 4, B141-B164.

Blin, J. M. (1974). Fuzzy relations in group decision theory. J. Cybern. 3, No. 2, 17-22.

Blin, J. M. y Whinston, A. B. (1973). Fuzzy sets and social choice. J. Cybern. 3, No. 4, 28-36.

Dorris, A. L. y Sadosky, T. L. (1973). A fuzzy set-theoretic approach to decision-making. Nat. Meet. ORSA, 44th, San Diego, Calif.

Dubois, D. y Prade, H. (1978a). Algorithmes de plus courts chemins pour traiter des donées floues. RAIRO Oper. Res. 12, No. 2, 213-227.

Jain, R. (1976). Decision-making in the presence of fuzzy variables. IEEE Trans. Syst., Man Cybern. 6, No. 10, 698-703.

Negoita, C. V. (1976). Fuzzines in management. ORSA/TIMS, Miami.

Negoita, C. V., Minoiu, S. y Stan, E. (1976). On considering imprecision in dynamic linear programming. Econ. Comput. Econ. Cybern. Stud. Res. No.

3, 83-96.

Negoita, C. V. y Ralescu, D. A. (1977). On fuzzy optimization. Kybernetes 6, No. 3, 193-196.

Rosenfeld, A. (1975). Fuzzy graphs. En "Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes" (L. A. Zadeh, K. S. Fu, K. Tanaka, and M. Shimura, eds.), pp 77-95. Academic Press. New York.

Yager, R. R. (1978). Fuzzy decision-making including unequal objectives. Int. J. Fuzzy Sets Syst. 1, No. 2, 87-95.

Zimmermann, H. J. (1978). Fuzzy programming and LP with several objective functions. Int. J. Fuzzy Sets Syst. 1, No. 1, 45-55.

BIBLIOGRAFIA.

1. Tamura, S., Higuchi, S. y Tanaka, K., "Pattern Classification Based on Fuzzy Relations", IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Vol. SMC-1, No. 1, January 1971, pp. 338-353.

De esta referencia bibliográfica se obtuvo la idea de la aplicación, así como cási toda su fundamentación.

2. Kaufmann A., "Introducción a la Teoría de los Subconjuntos Borrosos", Vol. I (Elementos Teóricos de Base), Ed. C.E.C.S.A., 1982.

De este libro se obtuvo la base teórica para los capítulos I y II.

3. M. Mizumoto, J. Toyoda y K. Tanaka, "Some considerations on fuzzy automata", J. Comput. Syst. Sci., Vol. 3, pp. 9-12, 296.

De este artículo se obtuvieron ideas sobre la aplicación de la teoría de conjuntos borrosos.

4. Dubois D., Prade H., "Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications" Academic Press, 1980.

De aquí se obtuvo la bibliografía e ideas generales sobre toda la teoría de conjuntos borrosos. También se obtuvo la lista de referencias para el apéndice II.

5. Rosenfeld A., "Fuzzy Graphs". En "Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes" (L. A. Zadeh, K. S. Fu, K. Tanaka and M. Shimura, eds.), pp. 77-95. Academic Press, 1975.

De este artículo se obtuvo teoría para el capítulo II.

6. Yeh, R. T. y Bang, S. Y., "Fuzzy Relations and their applications to Clustering Analysis". En "Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive

and Decision Processes" (L. A. Zadeh, K. S. Fu, K. Tanaka and M. Shimura, eds.), pp. 125-149. Academic Press, 1975.
De este artículo se obtuvo teoría para el capítulo II, así como ideas para el capítulo III.