88/201

9
2ej

# UNIVERSIDAD ANAHUAC

ESCUELA DE ACTUARIA

CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

# PROYECTO DE TEXTO PARA LA MATERIA DE MATEMATICAS FINANCIERAS

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

## T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A N

MARIA ELENA LOPEZ ANCONA

ADRIANA ELENA RODRIGUEZ ARANGO

MEXICO, D. F. 1988

# I N D I C E

# INTRODUCCION

La intención de los autores al elaborar este texto fue crear un libro de Matemáticas Financieras moderno, actualizado a la disponibilidad de instrumentos de cálculo poderosos y cuyo contenido sea una herramienta útil así como obra de consulta y referencia no sólo para actuarios, sino también para economistas, administradores, contadores y para otras personas que requieran conocimientos de la materia

En el desarrollo de los temas, se reduce la importancia de largas demostraciones y aproximaciones que han sido tratadas en textos anteriores de la materia y que con el tiempo han ido perdiendo relevancia debido al gran avance tecnológico ocurrido en los últimos años, durante los cuales la disponibilidad y potencia de cálculo de las computadoras y calculadoras han eliminado la dependencia tan grande que se tenía de voluminosas tablas de valores financieros previamente calculados y limitados a un número muy reducido de tasas de interés.

La limitación expuesta en el párrafo anterior, se consideraba de tal magnitud que condicionaba el enfoque de todos los textos de la materia a lograr la manipulación eficiente de fórmulas y tablas en detrimento de la exposicion de los conceptos y de la claridad temática.

Por ello, en este texto, se dedica mucha más atención a la exposición de los temas, completados con una mayor cantidad de material en gráficas que ayuden a lograr una mayor visualización de los conceptos. Se enfatiza lo fundamental en cada capítulo, así como sus inter relaciones con los otros temas; de manera de promover un mayor ejercicio intelectual del estudiante en lugar de desarrollar el planteo de problemas en una forma mecánica o por analogía. Adicionalmente se desarrollan numerosos ejemplos, que además de facilitar el aprendizaje, introducen al estudiante a situaciones reales, comunes en la práctica comercial y profesional.

Al finalizar cada capítulo, se expone una lista de ejercicios propuestos para que el estudiante pueda aplicar y reafirmar los conocimientos adquiridos.

Asimismo se introducen capítulos que analizan temas hasta ahora no mencionados por los textos de la materia, pero que por la situación inflacionaria actual han cobrado importancia y se han vuelto indispensables para el nuevo enfoque de las Matemáticas Financieras.

# I. <u>INTERES SIMPLE.</u>

## 1. GENERALIDADES

Las matemáticas financieras se ocupan de operaciones relacionadas con el dinero: el crédito, el descuento, el interés, la amortización de deudas y en general, la valuación de transacciones cuya ocurrencia es tenida por cierta.

Gran parte de la actividad financiera se basa en el hecho de pagar cierta cantidad, llamada interés, por el uso del dinero prestado; una consecuencia de esto se refleja en que la mayoría de los ingresos de los bancos provienen de los intereses sobre los préstamos otorgados. Desde el punto de vista económico, el interés es el precio del dinero en el tiempo, es decir, el premio que una persona o entidad ha de otorgar a otra por el goce anticipado del dinero.

El interés suele expresarse como una tasa relacionada al monto de la transacción que se está haciendo y se expresa como un tanto por ciento (%).

La tasa de interés que prevalece en un mercado de dinero o en un mercado de capitales, está relacionada con factores económicos, sociales, psicológicos e históricos.

Entre los factores económicos se encuentran la oferta y la demanda (escasez relativa del dinero), la inflación (pérdida del poder adquisitivo del dinero en el tiempo), la productividad relativa del capital respecto a otros factores de la producción, etc.

Entre los factores sociales se encuentran las tasas de ahorro y de consumo de la población, así como la distribución del ingreso.

Entre los factores psicológicos están la seguridad que ofrece el gobierno, la confianza que exista en la sociedad en general y la percepción que se tenga sobre el nivel de riesgo que implica la transacción particular de que se trate, etc.

Entre los factores históricos, están las tasas de interés que hayan prevalecido en el mercado de dinero en tiempos recientes.

La tasa de interés se compone de los siguientes factores:

a) Un factor que repsenta la productividad intrínseca del dinero en el tiempo ($K_1$).

b) Un factor que compensa la tasa de inflación (h) en la sociedad ($K_2$).

c) Un factor que compensa el nivel específico de riesgo asociado a la operación ($K_3$).

d) Un factor que constituye el beneficio del acreedor ($K_4$).

Estos factores determinan la tasa de interés. Componiéndose según la siguiente expresión:

$$(1 + i) = (1 + K_1)\ (1 + K_2)\ (1 + K_3)(1 + K_4)$$

$$i \neq K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

donde las tasas i, $K_1$, $K_2$, $K_3$ y $K_4$ se expresan en decimal.

Ejemplo:

Determinar la tasa que esperará obtener un inversionista en una sociedad en la que la tasa anual de producti vidad intrínseca del dinero es de un 4%, la tasa anual - de inflación es del 6%, el nivel específico de riesgo es del 1% y el beneficio del acreedor es de un 3%.

$K_1 = .04$
$K_2 = .06$
$K_3 = .01$
$K_4 = .03$

$$(1 + i) = (1 + K_1)(1 + K_2)(1 + K_3)(1 + K_4)$$

$$(1 + i) = (1 + .04)(1 + .06)(1 + .01)(1 + .03)$$

$$(1 + i) = (1.04)(1.06)(1.01)(1.03)$$

$$(1 + i) = 1.146827$$

$$i = .146827$$

$$i = 14.6827\% \text{ anual}$$

que es diferente de las sumas de las tasas:

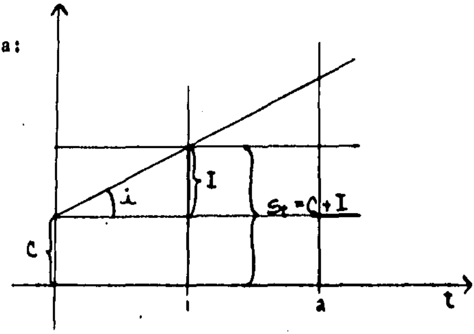
$$i \neq K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

$$14.6827\% \neq 14\%$$

2. CONCEPTO.

**Son operaciones de crédito a interés simple aquéllas en que se pacta la tasa de interés como un porcentaje por unidad de tiempo siempre referido al capital inicial.**

**Gráfica:**



Donde:

$C$ = capital inicial tomado a préstamo

$i$ = tasa de interés por periodo $t$

$I$ = intereses sobre el capital = $iC$

$S_t$ = monto final al cabo de $t$. periodos

De acuerdo a la anterior se obtienen las siguientes relaciones:

$$
\begin{aligned}
S_t &= C + It \\
&= C + Cit \\
&= C(1 + it)
\end{aligned}
\qquad (I.1)
$$

Como se puede observar, el interés simple se comporta como una recta: a incrementos iguales en tiempo, corresponden incrementos iguales en dinero. La pendiente se expresa en dinero/tiempo; es decir, los pesos que se ganan por unidad de tiempo.

Ejemplos:

1) Una persona solicita un préstamo a otra bajo las siguientes condiciones: plazo 3 años, tasa de interés simple 10% semestral, capital inicial $250,000.00.

   Calcular el monto que deberá pagar al término de los 3 años, si no se pagó nada en el transcurso.

   $C = 250,000.00$

   $S_6 = ?$

   $i = 10\%$ semestral

   $t = 3$ años $= 6$ semestres

   $$S_t = C(1 + it)$$
   $$S_6 = 250,000.(1 + .10(6))$$
   $$S_6 = 400,000.$$

2) ¿A qué tasa de interés simple trimestral se multiplicará una cantidad 2.6 veces en un periodo de 4 años?

$i = ?$

$S_t = 2.6C$

$t = 4$ años = 16 trimestres

$$S_t = C(1 + it)$$
$$2.6C = C(1 + i(16))$$
$$2.6 = 1 + i\,(16)$$
$$1.6 = i\,(16)$$
$$\frac{1.6}{16} = i$$
$$i = 10\%$$

3. CALCULO EXACTO Y APROXIMADO DEL TIEMPO.

Conociendo las fechas, el número de días sobre el - que se ha de calcular el monto o los intereses, puede ser determinado de dos formas:

a) Método exacto.- Se cuentan todos los días que hay entre las fechas sin contar el día inicial pero sí contando el día final; los bancos en México, cuentan los dos.

Ejemplo:

Del 20 de abril al 16 de agosto de 1979 hay 10 + 31 + 30 + 31 + 16 = 118 días. El año se -- considera de 365 días.

b) Método aproximado.- Se cuentan todos los meses enteros como de 30 días y los días que sobran - se cuentan individualmente.

Ejemplo:

El mismo ejemplo que utilizamos en el método -- exacto resultará entonces: 10 + 30 + 30 + 30 + 16 = 116 días. El año se considera de 360 días.

Convención del Cálculo del Tiempo.

1) Si el plazo está dado en años (y fracciones de año) o meses (y fracciones de meses), se utilizará el método aproximado.

2) Si el plazo está dado en días, se utilizará el método exacto.

3) Si el plazo está dado en años y meses, se utilizará el método aproximado.

4) Si el plazo está dado en años, meses y días, o en meses y días, o en años y días, se utilizará el método exacto.

## 4. INTERES SIMPLE EXACTO E INTERES SIMPLE ORDINARIO.

El interés simple exacto es aquél cuyo monto se calcula sobre la base del número exacto de días en que esté en vigor la operación o el préstamo, tomando en cuenta el año calendario de 365 o 366 días según sea el caso.

El interés simple ordinario o comercial, es aquél cuyo monto se calcula sobre la base del año comercial formado por 12 meses de 30 días cada uno o de 360 días en total. El uso del año de 360 días simplifica el cálculo pero aumenta la tasa cargada por el acreedor o pagada por el deudor.

Ejemplos:

1) Determinar el interés exacto y ordinario sobre $2,500.00 al 8% anual, para el periodo del 20 de marzo al 5 de julio de 1981, calculando el tiempo: a) en forma exacta y b) en forma aproximada.

a) Método exacto = 11 + 30 + 31 + 30 + 5 = 107 días.

b) Método aproximado = 10 + 30 + 30 + 30 + 5 = 105 días.

Interés exacto

a) $I = 2{,}500\ (.08)(107/365) = \$\ 58.63$

b) $I = 2{,}500\ (.08)(105/365) = \$\ 57.53$

Interés ordinario

a) $I = 2{,}500\ (.08)(107/360) = \$\ 59.44$

b) $I = 2{,}500\ (.08)(105/360) = \$\ 58.33$

Se observa que el método que produce mayor interés es el usado para el interés ordinario calculado con el número exacto de días, de hecho es el sistema más utilizado por las instituciones bancarias.

2) Un préstamo de \$10,000.00 es concedido a un año de plazo, a una tasa de interés simple comercial del 18% anual.

a) Determinar el monto final a pagar por el deudor.

b) Los intereses devengados.

c) La tasa de interés exacto que es equivalente para producir los mismos resultados.

a) Comercial $= \dfrac{.18}{360} = .0005$

$S_{365} = 10{,}000\ (1 + (.0005)(365)) = \$11{,}825.00$

b) $I = Ci = 11{,}825 - 10{,}000 = 1{,}825$

c) Exacto $= \dfrac{i}{365} = .0005\ \therefore\ i = 18.25\%$

## 5. PAGARES.

Un pagaré es la promesa escrita de pago de una determinada cantidad de dinero en una fecha futura dada, suscrita por un deudor en favor de un acreedor.

ELEMENTOS DE UN PAGARE.

a) Plazo: es el tiempo, especificado de manera implícita o explítica en el documento, que separa la fecha en que se firma el pagaré de la fecha en que es exigible su pago.
b) Valor nominal: es la suma estipulada en el documento.
c) Fecha de vencimiento: es aquélla en la cual debe ser pagada la deuda (incluyendo capital e intereses).
d) Valor de vencimiento: es la suma que debe ser pagada en la fecha de vencimiento.
e) Monto de los intereses: es la diferencia entre el valor de vencimiento y el valor nominal; en caso de que no se especifique el valor de vencimiento, éste será la suma del valor nominal más los intereses correspondientes al plazo a la tasa de interés especificada en el documento.

## 6. VALOR PRESENTE DE UNA DEUDA BAJO INTERES SIMPLE.

El valor presente de una deuda futura a una fecha dada anterior, bajo interés simple, es la suma que trabajando a la tasa de interés simple especificada durante el tiempo que falta entre la fecha dada y el vencimiento de la deuda produciría el monto final de la deuda.

# INSTRUCTIVO PARA LLENAR LA FORMA DE REGISTRO DE TESIS

1. Consigne la información de manera clara, de acuerdo a las instrucciones que aquí se señalan. Escriba con tinta.

2. No invada las zonas sombreadas. Tales espacios están reservados a la codificación de la información que usted proporciona.

3. **AÑO EN QUE SE PRESENTA LA TESIS:** Consigne solamente el año (omita el día y el mes); utilice para ello caracteres numéricos únicamente.

4. **AUTOR:** Escriba el nombre del autor en el siguiente orden: apellido paterno, apellido materno y nombre o nombres. Si la tesis ha sido elaborada por más de tres personas, consigne el nombre de las tres primeras en la hoja principal de registro de tesis y solicite una hoja anexa para registrar el nombre de las restantes.

5. **TITULO DE LA TESIS:** Escríbalo tal y como aparece en la portada de la tesis. En caso de haberlo, anexe el subtítulo en el renglón destinado a tal efecto.

6. **LUGAR DE EDICION:** Indique la ciudad donde fue presentada la tesis en examen profesional. No se considera lugar de edición la ciudad donde fue impresa la tesis.

7. **NUMERO DE PAGINAS:** Anote el último número que aparezca impreso en la paginación del ejemplar que presente.

8. **ILUSTRACIONES:** Si su tesis cuenta con algún tipo de ilustraciones (mapas, esquemas, diagramas, fotografías, etc.) tache la palabra "SI". Tache en caso contrario la palabra "NO".

9. **IDIOMA:** Indique el idioma en el que fue redactada la tesis sólo en el caso de que sea éste una lengua distinta al castellano. Si su tesis está escrita en español, ignore el renglón correspondiente a idioma y déjelo en blanco.

10. **GRADO ACADEMICO:** Tache la letra que corresponda al grado académico que obtiene mediante la presentación de la tesis: L para licenciatura, M para maestría, D para doctorado y E para especialización.

11. **CARRERA:** Escriba el nombre completo de la carrera objeto de la tesis de acuerdo a su denominación oficial en los planes de estudio de la universidad en la que la cursó. No utilice abreviaturas.

12. **FACULTAD O ESCUELA:** Anote el nombre completo oficial de la facultad a la que corresponda la tesis. No utilice abreviaturas.

13. **UNIVERSIDAD:** Si su tesis fue presentada en alguna facultad o escuela de la U. N. A. M., deje en blanco este renglón. En caso contrario, consigne el nombre completo y oficial de la universidad a la que pertenece la facultad en la que presentó la tesis.

14. **TEMAS DE QUE TRATA LA TESIS:** Anote los temas que más claramente definan el objeto de la investigación. Consígnelos de manera clara y concisa por orden de importancia.

15. **GRADO ACADEMICO DEL ASESOR DE LA TESIS:** Indíquelo -en caso de saberlo- de la misma manera que se pide en el punto 10 de este instructivo.

16. **NOMBRE DEL ASESOR DE LA TESIS:** Escríbalo en el siguiente orden: nombre(s), apellido paterno y apellido materno.

17. **RESUMEN:** Si la tesis que registra corresponde al nivel de doctorado, solicite una hoja anexa para redactar un resumen no mayor de una cuartilla. Dicho resumen deberá presentarse -de preferencia- en inglés.

Dirección General de Bibliotecas

| Fecha | i | idioma | g | clave U. | Nº de matriz | f. cat. | iden. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

Registro de Tesis

| | |
|---|---|
| $050 | Año en que se presenta la tesis: 1986 |
| $100 | Autor: [illegible] (Apellido paterno) AGUILA (Apellido materno) MARIA ELENA (Nombre(s)) |
| $100 | Autor: [illegible] (Apellido paterno) ALVAREZ (Apellido materno) ADRIANA ELENA (Nombre(s)) |
| $100 | Autor: (Apellido paterno) (Apellido materno) (Nombre(s)) |
| $2451 | Título: [illegible] DE [illegible] PARA LA MATERIA DE MATEMATICAS FINANCIERAS |
| | Subtítulo: |
| $260 | Lugar de Edición: MEXICO D.F. |
| $300 | Número de páginas: 217 — Ilustraciones: SI NO — Idioma: Español |

Grado: L M D E — Carrera: ACTUARIA

Facultad o escuela: ACTUARIA

Universidad: ANAHUAC

Temas que trata la tesis: INTERES SIMPLE Y COMPUESTO; DESCUENTO SIMPLE Y COMPUESTO; VALOR PRESENTE; ECUACION DE VALOR; ANUALIDADES; AMORTIZACION; DEPRECIACION; BONOS; TASA REAL DE INTERES.

Grado del asesor de tesis: L M D E — Nombre del asesor: ACT. LUIS GONZALEZ DE COSSIO

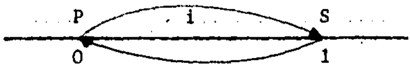
$650

$600

$90

$$P = \frac{S}{1 + it} \qquad (I.2)$$

Gráfica:




Cabe aclarar que la tasa de interés simple que se especifique para calcular el valor presente de una deuda futura no necesariamente es igual a la tasa de interés que esté produciendo la deuda para calcular su monto final.

Ejemplos:

1) Encontrar el valor presente de \$ 4,000.00 al 12% anual de interés simple, con vencimiento dentro de 7 meses.

$S = 4,000$

$i = .12$

$t = 7/12$

$P = ?$

$$S = P\,(1 + it)$$
$$4,000 = P(1 + .12(7/12)$$
$$4,000 = P(1.06999)$$
$$P = 3,738.32$$

Es decir, que si se invierten \$3,738.32 a una tasa del 12% de interés anual simple durante 7 meses, se obtendrían \$4,000.00.

2) Un documento de \$1,500.00 firmado el 5 de marzo de 1980 con vencimiento a los 6 meses y a un interés simple anual del 7% es vendido al

Sr. Pérez el 18 de mayo, con un rendimiento en la inversión del 10%. ¿Cuánto deberá pagar el Sr. Pérez por su documento?

El valor de vencimiento del pagaré es de:

$$1{,}500(1 + .07(1/2) = 1{,}552.50$$

El valor presente del documento con vencimiento a los 108 días, al 10% de interés simple es de:

$$P = \frac{1{,}552.50}{(1 + .10(108)/360)}$$

$$P = \frac{1{,}552.50}{1.03}$$

$$P = 1{,}507.28$$

3) Calcular el valor presente de una deuda de: -- \$15,000.00 cuando faltan 9 meses para su vencimiento, considerando:

a) $i = 8\%$ anual simple

b) $i = 4\%$ anual simple

a) $P = \dfrac{15{,}000}{(1 + .08(9/12)} = \$\ 14{,}150.94$

b) $P = \dfrac{15{,}000}{(1 + .04(9/12)} = \$\ 14{,}563.11$

Se puede notar que si se mantiene constante el tiempo que falta para el vencimiento de una deuda(donde t es mayor que cero), el valor presente es menor mientras mayor sea la tasa de interés y viceversa; así como también que el valor presente de un monto es mayor a medida que la fecha de vencimiento se encuentra más cerca.

## 7. ECUACION DE VALOR A UNA TASA DE INTERES SIMPLE.

En algunas transacciones es conveniente tanto para el acreedor como para el deudor cambiar un conjunto de de rechos y obligaciones futuras por otro conjunto financieramente equivalente.

Para poder efectuar dicha operación es necesario - que ambas partes convengan en una misma tasa de interés para la valuación de los derechos y obligaciones que componen ambos conjuntos, así como en una fecha de valuación que recibe el nombre de fecha focal (f.f.).

Condición de Equivalencia.

El conjunto de derechos y obligaciones "A" será financieramente equivalente al conjunto de derechos y obligaciones "B", si y sólo si el valor presente en la fecha focal del conjunto A es igual al valor presente en la fecha focal del conjunto B, a la tasa de interés pactada.

$$\sum_{a=1}^{n} P_a(i,t) = \sum_{b=1}^{n} P_b(i,t)$$

Ejemplo:

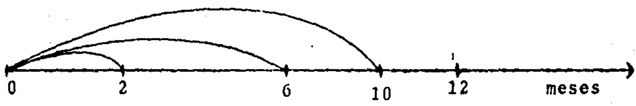
1) Una persona le debe a otra 3 documentos con -- las siguientes características:

a) $ 15,000.00 con vencimiento dentro de dos meses sin intereses.

b) $ 100,000.00 con vencimiento dentro de 6 meses que fueron prestados hace 6 meses al 18% de interés anual simple.

c) $ 50,000.00 con vencimiento dentro de 10 meses que ya incluyen intereses al 12% anual simple.

Y desea redocumentar su deuda por un único documento con vencimiento dentro de un año, considerando - una tasa anual simple del 19%. La fecha focal es hoy.




El valor de los documentos es el siguiente:

a) \$ 15,000.00

b) $S = 100{,}000(1 + .18(1)) = \$\ 118{,}000.00$

c) \$ 50,000.00

El valor presente de los 3 documentos está dado por la siguiente relación:

$$P = \frac{15{,}000}{(1 + .19(2/12))} + \frac{118{,}000}{(1 + .19(6/12))} + \frac{50{,}000}{(1 + .19(10/12))}$$

$$P = \frac{15{,}000}{1.03167} + \frac{118{,}000}{1.095} + \frac{50{,}000}{1.15833}$$

$$P = \$\ 165{,}467.60$$

El monto dentro de un año que sería equivalente se obtiene por:

$$S = P\ (1 + it)$$

$$S = (165{,}467.60)(1 + .19(1))$$

$$S = \$196{,}906.44$$

2) El Sr. Pereda le debe al Sr. Sandoval \$35,000.00 dentro de 8 meses sin intereses, \$75,000.00 dentro de 11 meses y que ganan intereses desde hace 7 meses al 1% mensual de interés simple.

El Sr. Sandoval le debe al Sr. Pereda \$250,000.00 desde hace un año y con vencimiento dentro de 1 año, que ganan intereses al 9% anual.

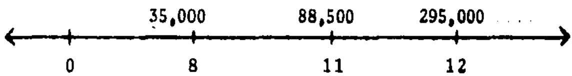
Suponiendo que ambos están de acuerdo en efectuar un sólo pago, de monto X, a favor de cualquiera de los dos en un año, pactando una tasa del 15% anual simple y una fecha focal dentro de 1 año.

El valor de los documentos es el siguiente:

a) $ 35,000.00

b) 75,000 (1 + .01(18)) = $ 88,500.00

c) 250,000 (1 + .09(2)) = $ 295,000.00




El monto del pago único está dado por:

$S = 35{,}000\,(1 + .15(4/12)) + 88{,}500\,(1 + .15(1/12)) - 295{,}000$

$S = 36{,}750 + 89606.25 - 295{,}000$

= $168,643.75 cantidad que deberá pagar el Sr. Sandoval al Sr. Pereda.

## 8. FECHA EQUIVALENTE.

El problema de determinación de la fecha equivalente es un caso particular de una ecuación de valor, en el que se busca sustituir un conjunto A de derechos y obligaciones con vencimiento en el futuro, por un pago único B cuyo monto es la suma algebraica de todos los pagos contenidos en el conjunto A en una fecha indeterminada todavía, y que se le conoce por el nombre de fecha equivalente.

Ejemplo:

Una persona le debe a otra los siguientes documentos:

a) Un pagaré prestado hace 8 meses con plazo de 12 meses por $70,000.00 más intereses a una ta sa del 17% de interés simple.

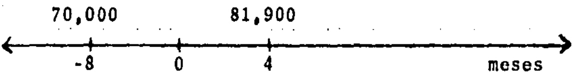
b) Un documento por \$72,000.00 que incluye intereses por 20 meses a la tasa del 16.5% de interés simple anual, y que vence dentro de 7 meses.

c) Un documento que fue prestado hace 5 meses, cuyo vencimiento ocurre dentro de 19 meses y que causa interés simple al 1.5% mensual, siendo su capital inicial de \$100,000.00

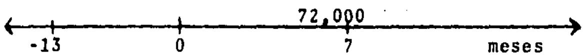
Desea redocumentar su deuda con fecha focal dentro de 10 meses y pago en la fecha focal equivalente a la tasa de interés simple del 22%.

Calcular la fecha equivalente.

a)




b)




c)


Monto A = 70,000 (1 + .17(1)) = 81,900.00

Monto B = 72,000.00

Monto C =100,000(1+.015(24)) = 136,000.00

Monto Total = \$289,900.00

Planteando la ecuación de valor se tiene:

$$81{,}900\,(1+.22(6/12)) + 72{,}000\,(1+.22(3/12)) + \frac{136{,}000}{(1+.22(9/12))}$$

$$= \frac{289{,}900}{(1+.22t)}$$

$$90{,}909 + 75{,}960 + 116{,}738.20 = \frac{289{,}900}{(1+.22t)}$$

$$283{,}607.20 = \frac{289{,}900}{1+(.22)t}$$

$$1 + (.22)t = \frac{289{,}900.00}{283{,}607.20}$$

$$1 + (.22)t = 1.022188$$

$$(.22)t = 0.022188$$

$$t = \frac{0.022188}{.22}$$

$t = 0.100857$ años

$t = 1.2103$ meses después de la fecha focal o

$t = 11.2103$ meses a partir de hoy.

Método aproximado para determinar la fecha equivalente.

La ecuación de valor constituye el único método financieramente exacto para determinar la fecha equivalente, sin embargo, ésta puede aproximarse mediante un promedio ponderado de los tiempos en que se vence cada una de las obligaciones o derechos mediante las siguientes fórmulas:

$$S_t = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots + S_n$$

$$t = \frac{S_1t_1 + S_2t_2 + S_3t_3 + \ldots\ldots + S_nt_n}{S_t} \qquad (1.3)$$

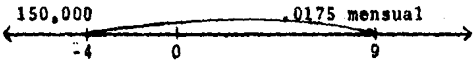
Ejemplo:

Determinar la fecha equivalente en que se deberá fijar el pago de un único documento que sustituye a los dos siguientes:

a) Un pagaré con vencimiento dentro de 9 meses por un capital inicial de $150,000.00 más intereses al 1.75% mensual de interés simple por un plazo de 13 meses.

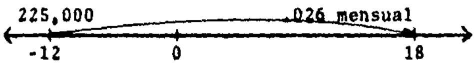
b) Otro pagaré que fue prestado hace 12 meses, por un capital inicial de $225,000.00 cuyo vencimiento ocurre dentro de 18 meses y que causa intereses a la tasa del 2.6% mensual de interés simple.

Suponer la tasa anual de interés simple al 28% y escoger como fecha focal hoy para la ecuación de valor y determinar la fecha equivalente exacta y aproximada.



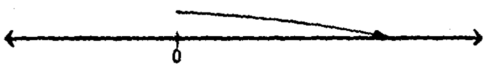

$S_a = 150{,}000\ (1 + .0175(13))$

$S_a = 184{,}125.00$




$S_b = 225{,}000\ (1 + .026(30))$

$S_b = 400{,}500.00$




$S_t = S_a + S_b$

$S_t = 184{,}125.00 + 400{,}500.00$

$S_t = 584{,}625.00$

$$\frac{584{,}625}{(1 + (.28)(t))} = \frac{184{,}125}{(1 + (.28)(9/12))} + \frac{400{,}500}{(1 + (.28)(18/12))}$$

$$\frac{584{,}625}{1+.28t} = 152{,}169.42 + 282{,}042.25$$

$$584{,}625 = 434{,}211.67\ \ (1 + .28t)$$

$$\frac{584{,}625}{434{,}211.675} - 1 = .28t$$

$$1.346406 - 1 = .28\ t$$

$$.346406 = .28t$$

$$t = \frac{.346406}{.28}$$

t = 1.237163 años

t = 1 año, 2 meses, 26 días

para pagar los $584,625.00

Por el método aproximado:

$$t = \frac{S_1t_1 + S_2t_2}{S_t}$$

$$t = \frac{184,125(9/12) + 400,500(18/12)}{584,625}$$

$t_{aproximada}$ = 1.26 años

$t_{aproximada}$ = 1 año, 3 meses, 1 día.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular el interés simple que produce un capital de $200,000.00 en 4 años al 0.8% mensual.

2. ¿A qué tasa de interés, un capital de $50,000.00 será de $62,500.00 a interés simple en 9 meses?

3. El 1o. de enero se firmó un pagaré de $ 80,000.00 con 20% de interés anual. ¿En qué fecha los intereses serán de $12,000.00?

4. ¿Qué suma debe ser invertida al 15% anual para tener $300,000.00 dentro de 11 meses.

5. Calcular el interés simple comercial de $25,000.00 durante 1 año 3 meses al 6% semestral.

6. Un inversionista recibió un pagaré que gana intereses del 12% por $200,000.00 el 15 de octubre a 150 días. El 20 de enero del próximo año lo ofrece a otro inversionista que desea ganar el 15% ¿Cuánto recibe por el pagaré el primer inversionista?

7. Una persona debe $80,000.00 con vencimiento a 3 meses y $52,000.00 con vencimiento a 8 meses, que ya incluyen intereses. Determinar el valor de los nuevos pagarés con el 25% de rendimiento. La fecha focal es dentro de 1 año.

8. Una persona le debe a otra los siguientes documentos:

a) Un pagaré prestado hace 5 meses con plazo a 1 año por $100,000.00 más intereses a la tasa anual del 32% de interés simple.

b) Un documento por \$90,000.00 que incluye intereses por 18 meses a la tasa del 28.3% anual de interés simple y que vence dentro de 4 meses.

c) Un documento que fue prestado hace 7 meses con vencimiento dentro de 17 meses y que causa interés simple al 15% anual, siendo su capital inicial de \$150,000.00

Desea redocumentar su deuda con fecha focal dentro de 8 meses y pago en fecha equivalente a la tasa anual de interés simple del 28%.

9. Determinar de que monto deberán ser 2 pagos iguales con vencimiento dentro de 6 y 9 meses respectivamente para ser equivalentes a las siguientes deudas:

a) Un pagaré por \$140,000.00 cuyo vencimiento ocurre dentro de 4 meses y fue prestado hace 8 meses al 1.5% mensual de interés simple.

b) Un pagaré por \$180,000.00 cuyo vencimiento ocurre dentro de 10 meses y que causa intereses desde hace 8 meses al 1.6% mensual de interés simple.

Suponer una tasa anual de interés simple del 21% y escoger como fecha focal dentro de 3 meses.

10. ¿De qué monto deberán ser 2 pagos con vencimiento dentro de 8 y 12 meses si el segundo es 50% más grande que el primero, el monto neto para ser equivalente a una deuda única cuyo vencimiento ocurre dentro de 6 meses por \$320,000.00 más intereses por 2 años al 1.7% mensual de interés simple.

Suponer una tasa anual de interés simple del 19.5% y escoger como fecha focal hoy.

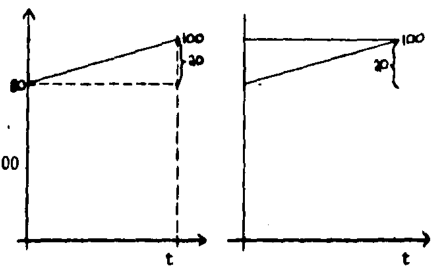
## II. DESCUENTO SIMPLE.

## 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

Hasta ahora se ha estudiado el fenómeno "interés" siempre referido como un porcentaje de una cantidad que se considera el capital original de una operación. Sin embargo, también es posible definir los intereses como un porcentaje de una cantidad que será la final de la operación.

Aunque la definición anterior parece similar a la definición del valor presente de un monto futuro (como se vió en el capítulo I), conceptualmente es diferente. La diferencia consiste en que el porcentaje que nos indica la pendiente de la línea recta se mide en el punto final en lugar de en el punto inicial como podemos ver en el ejemplo siguiente:

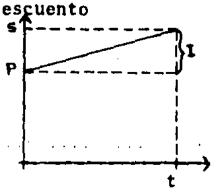
20% adelantdo




25%

$S=80(1+.25(1))=100$

Los intereses que se pagan divididos entre P es tasa de interés. Los intereses que se pagan divididos entre S es tasa de descuento




$$i=\frac{I_1}{P_0} \quad d=\frac{I_1}{S_1} \qquad \text{(II.1)}$$

$i > d$ para $i > 0$

La tasa de interés (en números) es mayor que la tasa de descuento.

En el ejemplo anterior:

Intereses P: $\frac{20}{80}$ = .25 ó 25% de interés

Intereses S: $\frac{20}{100}$ = .20 ó 20% de interés

Si

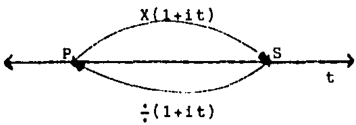
$$P = S(1 - d(t)) \tag{II.2}$$

Es la cantidad que realmente se nos presta (la que nos dan).

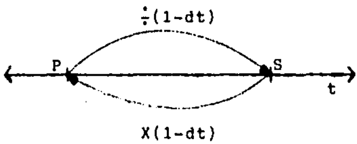
$$S = \frac{P}{(1 - d(t))} \tag{II.3}$$

Es la cantidad total a pagar, en el tiempo t.

Comparación con el interés simple:




interés simple




descuento simple

## 2. DEFINICION

En general se denomina "descontar" al proceso de calcular el valor presente (P) de un monto futuro conocido (S), aunque no sea a tasa de descuento.

Se conoce como descuento a la diferencia entre el valor del documento y el monto de éste una vez descontado.

Podemos distinguir si el descuento es a una tasa de interés simple o bien si es a una tasa de descuento simple.

## 3. DESCUENTO A UNA TASA DE INTERES SIMPLE.

Es la cantidad que hay que restarle a un monto futuro conocido S por el tiempo que falta por transcurrir hasta su vencimiento:

$$Dr = S - P \tag{II.4}$$

También se le conoce con el nombre de descuento racional o matemático y es otra forma de interpretar lo visto en el capítulo anterior, donde:

$$I = S - P$$

Por lo que se puede concluir que el interés simple aplicado al capital inicial será lo mismo que el descuento (a una tasa de interés simple) aplicado al monto final.

La única diferencia es que cuando el pago se hace al principio de la operación se llamará descuento y si se hace al final, entonces se trata de interés.

## 4. DESCUENTO SIMPLE A UNA TASA DE DESCUENTO.

Con frecuencia se define la tasa que ha de aplicarse para obtener el valor presente de un monto futuro conocido S como un porcentaje del monto final (S), en lugar de definirse como algún porcentaje del propio valor presente (P).

En tales casos se dice que el porcentaje es una tasa de descuento (d) en lugar de una tasa de interés (i) y los resultados que produce son diferentes aunque su valor absoluto sea el mismo.

Se puede decir que es un pago de intereses por adelantado o anticipo de intereses.

El descuento simple es también llamado descuento bancario y significa que el descuento (D) es un porcentaje de S para obtener P. De hecho este tipo de descuento es el más usado en la práctica comercial debido a que proporciona mayores ingresos a las personas que se dedican a tratar con préstamos, además su aplicación no requiere de mayores cálculos.

La fórmula para calcular el descuento bancario está dada por:

$$D = Sdt \qquad \text{(II.5)}$$

y el valor presente del monto S, está dado por:

$$P = S - D$$
$$P = S - Sdt$$
$$P = S(1 - dt)$$

Por convención, cuando se trata de descuento bancario se utiliza la palabra "descuento" para representarlo, sobreentiéndese que para el caso de otro tipo de descuento, se especificará aquél de que se trate.

Ejemplos:

1) Calcular el valor presente y el descuento simple de un adeudo de $150,000.00 con vencimiento dentro de 1 año, si la tasa de descuento es del 12% anual simple.

$S = 150,000$ $\quad$ $D = Sdt$

$P = ?$ $\quad$ $D = 150,000(.12)(1)$

$D = ?$ $\quad$ $D = 18,000$

$d = .12$

$t = 1$ $\quad$ $P = S - D$

$P = 150,000 - 18,000$

$P = 132,000$

2) De acuerdo al ejemplo anterior, calcular el descuento racional a una tasa de interés simple anual del 12%.

$S = 150,000$

$$P = \frac{S}{(1 + it)}$$

$P = ?$

$Dr = ?$ $\quad$ $$P = \frac{150,000}{(1+.12(1))}$$

$i = .12$

$t = 1$

$P = 133,928.57$

$D = S - P$

$D = 150,000 - 133,928.57$

$D = 16,071.43$

Con este ejemplo se puede concluir que con condiciones iguales de tiempo y tasa de interés, el valor presente con descuento bancario siempre es menor que el valor presente con descuento racional.

3) Determinar el valor presente y el descuento D de un adeudo de $80,000.00 cuyo vencimiento ocurre dentro de 8 meses si la tasa de descuento simple es del 18% anual.

$P = ?$ $\quad$ $P = S\ (1 - dt)$

$S = 80,000$ $\quad$ $P = 80,000\ (1-(.18)(8/12))$

$d = .18$ $\quad$ $P = 70,400$

$t = 8/12$ $\quad$ $D = std$ o $D = S - P$

$D = 9,600$

Los $70,400.00 son el valor presente, es decir lo que se recibe realmente; los $9,600.00 representan lo que se descuenta.

4) Calcular el valor presente del ejemplo anterior con la misma tasa del 18% pero de interés.

$P = ?$ $\qquad P = \dfrac{S}{(1 + it)}$

$S = 80,000$

$i = .18$ $\qquad P = \dfrac{80,000}{(1 + (.18)(8/12))}$

$t = 8/12$ $\qquad P = 71,428.57$

$I = S - P$ o $I = Pit$

$I = 8,571.43$

En este ejemplo el 18% se refiere a los $71,428.57 en el ejemplo anterior se refería a los $80,000.00

5) En el problema 3, se desea saber qué tasa de interés es necesario aplicar para que en 8 meses se obtengan $80,000.00 a partir de un capital inicial de $70,400.00

$P = 70,400$ $\qquad S = P(1 + it)$

$S = 80,000$ $\qquad \dfrac{S}{P} = 1 + it$

$t = 8/12$

$i = ?$ $\qquad \dfrac{80,000}{70,400} - 1 = it$

$it = 1.136364 - 1$

$i = \dfrac{0.136364}{8/12}$

$i = .2045 = 20.45\%$

6) Resolver los problemes 3 y 5 si el tiempo es 1 año.

a) Problema 3:

$P = 80,000 \ (1 - (.18)(1))$

$P = 80,000 \ (.82)$

$P = 65,600$

$D = S - P$

$D = 80,000 - 65,600$

$D = 14,400$

b) Problema 5:

$S = P \ (1 + it)$

$80,000 = 65,600 \ (1 + i(1))$

$\frac{80,000}{65,600} - 1 = i$

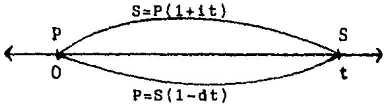
$i = .2195 = 21.95\%$

5. DESCUENTO SIMPLE DE DOCUMENTOS.

No cabe duda que una de las operaciones que más se utiliza en la práctica bancaria y comercial es la del descuento. Cualquier clase de créditos puede ser objeto de descuento, aunque el más utilizado es el de títulos de crédito.

Se puede decir que la operación en sí consiste en la adquisición de un crédito a cargo de un tercero, mediante el pago al contado del monto de vencimiento de dicho crédito, menos un cierto importe calculado aplicando la tasa de descuento al monto de vencimiento por el tiempo que falta por transcurrir hasta su exigibilidad.

Las relaciones entre las tasas de interés simple y las tasas de descuento simple, conocido el tiempo, pueden deducirse a partir de las fórmulas para variables iguales de la siguiente manera:




Por interés simple: $S = P\ (1 + it)$

Por descuento simple: $P = S\ (1 - dt)$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera:

$$S = S\ (1 - dt)\ (1 + it)$$

$$1 = (1 - dt)\ (1 + it)$$

Despejando i:

$$1 + it = \frac{1}{1 - dt}$$

$$it = \frac{1}{1 - dt} - 1$$

$$it = \frac{1 - (1 - dt)}{(1 - dt)}$$

$$i = \frac{dt}{t - dt^2}$$

$$i = \frac{\cancel{t}(d)}{\cancel{t}(1 - dt)}$$

$$i = \frac{d}{1 - dt} \qquad \text{(II.6)}$$

Despejando de:

$$1 - dt = \frac{1}{1 + it}$$

$$dt = 1 - \frac{1}{1 + it}$$

$$dt = \frac{(1 + it) - 1}{1 + it} = \frac{it}{1 + it}$$

$$d = \frac{\cancel{t}\,(i)}{\cancel{t}\,(1 + it)}$$

$$d = \frac{i}{1 + it} \qquad \text{(II.7)}$$

Es práctica comercial corriente vender o comprar documentos firmados por terceras personas a descuento. Puede aprovecharse la ecuación $i = \dfrac{d}{1 - dt}$ para conocer, el rendimiento obtenido por un documento si éste se compra a descuento:

Ejemplos:

1) Un documento comercial cuyo valor inicial era de $100.00 hace siete meses, produce intereses a la tasa de interés simple del 12% anual por un plazo de dos años. Un comprador adquiere el documento hoy a precio tal que obtenga una tasa de descuento anual simple del 18%. Calcular a qué precio deberá comprarlo y qué rendimiento (medio como tasa de interés simple) obtendrá si lo consigue a ese precio.

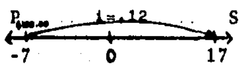
$P_0 = 100$

$i = .12$ anual $\qquad S = P_0\,(1 + it)$

$t = 24$ meses $\qquad S = 100\,(1 + (.12)(2))$

$S = 100\,(1.24)$

$S = 124$




$t = 17$ meses (lo que falta)

$i = ?$

$d = .18$

$P_1$ = precio hoy = ?

$P_1 = S\ (1 - dt)$
$P_1 = 124\ (1 - (.18)(17/12))$
$P_1 = 92.38$

$$i = \frac{d}{(1 - dt)} = \frac{.18}{(1 - (.18)(17/12))} = .241611$$

$i = 24.16\%$ anual

Calculando con la fórmula:

$S = P\ (1 + it)$

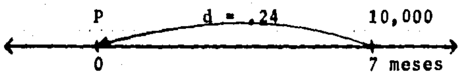
$124 = 92.38\ (1 + i\ (17/12))$

$$\frac{124}{92.38} - 1 = i\ (17/12)$$

$i = .342282(12/17) = .241611$

$i = 24.16\%$ anual.

2) Qué precio deberá pagar un inversionista por unos documentos cuyo monto final es de: ----- \$10,000.00 cada uno, cuando faltan 7 meses para su vencimiento, si desea obtener una tasa de descuento simple del 24% anual? ¿Qué tasa de interés produciría el mismo resultado?




| | |
|---|---|
| $P = ?$ | $P = S\ (1 - dt)$ |
| $S = 10{,}000$ | $P = 10{,}000\ (1-(.24)(7/12))$ |
| $d = .24$ anual | $P = 10{,}000\ (1-(.07)(2))$ |
| $t = 7/12$ | $P = 10{,}000\ (.86)$ |
| | $P = 8{,}600$ |

Por cada documento se van a pagar \$8,600.00

$$i = \frac{d}{(1 - dt)} = \frac{.24}{(1-(.24)(7/12))} = \frac{.24}{.86} = .279070$$

$i$ = 27.9070% anual.

6. DESCUENTO POR PRONTO PAGO.

En ocasiones se presentan varias alternativas en donde el comprador puede obtener diferentes descuentos según la opción que se tenga para el plazo de liquidación. Cada tasa de descuento por pronto pago en realidad representa un costo financiero diferente por el uso del crédito del proveedor a diferentes plazos. Pueden compararse estas tasas de costo financiero contra la tasa de costo financiero que puede conseguirse en el mercado de dinero.

Ejemplo:

1) Un cierto proveedor de materias primas para una empresa ofrece las siguientes alternativas de pago:

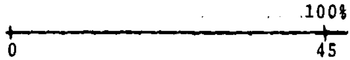
a) Crédito a 45 días sin intereses, pero pagando la totalidad del importe de la compra.

b) Un descuento del 8% sobre el importe de la compra si se paga de contado.

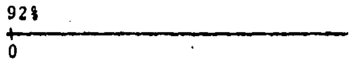
c) Un descuento del 4% sobre el importe de la compra si se paga a los 15 días.

Suponiendo que la empresa puede conseguir préstamos en los mercados de dinero a una tasa de interés simple del 60% anual, decidir qué alternativa le conviene más.

a)




b)




c)


Valuando a la tasa de interés simple propuesta y con fecha focal igual a la fecha de compra, las alternativas tienen los siguientes valores presentes:

$$P_a = \frac{100}{(1+(45/360)(.60))} = 93.02$$

$$P_b = 92$$

$$P_c = \frac{96}{(1+(15/360)(.60))} = 93.66$$

Como el valor presente de la alternativa b es el menor, la mejor opción es pagar de contado con un descuento del 8%. Sin embargo, si el proveedor redujera el descuento por pronto pago al 6%, entonces el valor presente de la alternativa b aumentaría a 94, en cuyo caso convendría más aceptar el crédito del proveedor a 45 días con su costo financiero implícito.

## 7. DESCUENTO EN CADENA O EN SERIE.

Es común que se efectúe más de un descuento sobre una factura, donde cada descuento sea completamente independiente del otro.

En este caso se va aplicando el descuento sobre el valor resultante de aplicar el descuento anterior.

A continuación se expone un ejemplo que muestra una situación típica de este inciso.

Ejemplo:

1) Se tiene un documento con valor nominal de: $ 225,000.00 y con derecho a los siguientes descuentos:

9% por compra al mayoreo
10% por ser mercancía defectuosa
5% por retraso en la entrega
¿A cuánto ascenderá el valor neto a pagar?

225,000 x(1-.09)=204.750
204,750 x(1-.10)= 184.275
184,275 x(1-.05)= 175,061.25

Por lo que se tendrá por cargo $175,061.25

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- ¿Cuál es la tasa de descuento anual simple que es equivalente al 18% anual de interés simple si el tiempo es de 8 meses?

2.- Calcular el valor presente y el descuento simple de un documento por $540,000.00 con vencimiento dentro de 9 meses, si la tasa de descuento es del 18% anual simple.

3.- Un documento comercial cuyo valor inicial era de $25,000.00 hace 4 meses produce intereses a la tasa de interés simple del 20% anual, por un plazo de 2 años. Un comprador adquiere el documento hoy a un precio tal que obtenga una tasa de descuento anual simple del 27%. Calcular a qué precio deberá comprarlo y qué rendimiento (medido como tasa de interés simple) obtendrá si lo consigue a ese precio.

4.- Se tiene un documento con valor de $400,000.00 y con derecho a los siguientes descuentos:

13% por ser mercancía rebajada
4% por retraso en la entrega

¿A cuánto ascenderá el valor neto a pagar?

5.- Un préstamo es concedido bajo los siguientes términos: plazo 2 años, valor presente $750,000.00, tasas de interés:

a) 4% trimestral de interés simple durante el primer semestre.
b) 4.25% trimestral de descuento simple durante todo el año siguiente
c) 18% anual de interés simple durante el resto del tiempo.

Suponiendo que los intereses se capitalizan cada vez que se cambie la tasa, calcular el monto a pagar al final y la tasa de interés simple anual y trimestral que hubiera producido los mismos resultados.

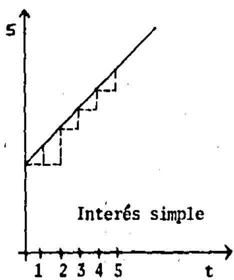
6.- ¿Qué cantidad es necesaria depositar en un banco dentro de 8 meses para asegurar el pago de $25,000.00 mensuales a partir del 9°. mes, por un total de 6 mensualidades? Suponer como fecha focal hoy. a) La tasa de interés simple es del 1.25% mensual. b) La tasa de descuento simple es del 1% mensual. ¿Qué alternativa es mejor?.

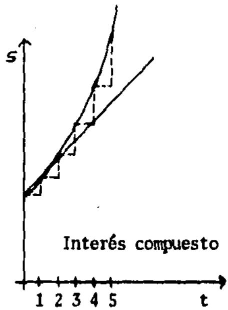
7.- Un pagaré a 120 días por $300,000.00 que gana intereses del 24% se negoció en un banco que descuenta al 20% de intereses por adelantado; hallar el valor efectivo que se recibió del banco.

# III. <u>INTERES COMPUESTO.</u>

1. GENERALIDADES.

Hasta ahora se ha estudiado el fenómeno del interés (o de su contrapartida del descuento) tomando como base un cierto monto en un momento determinado del tiempo y refiriendo los intereses siempre a ese monto. Sin embargo en la mayor parte de las transacciones comerciales o crediticias en las que más de un periodo está involucrado, los intereses de los periodos posteriores al primero se definen relativos a las diferentes cantidades iniciales.

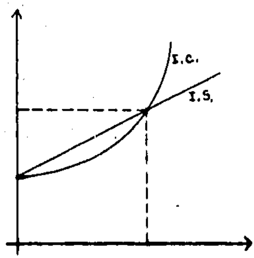



Para tiempos menores que "uno" conviene más el interés simple.

Ejemplo:

Se deposita un capital inicial de \$250,000.00; al final de un año gana \$50,000.00 por concepto de intereses; para el segundo año, los intereses se calcularán sobre un capital de \$300,000.00 o lo que es lo mismo, los intereses integrados al capital generarán nuevos intereses y así sucesivamente.



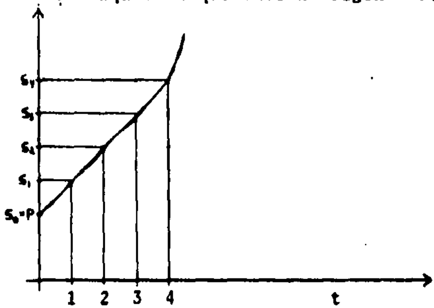

2. DEFINICIONES.

a) Tasa Efectiva de Interés (i):
Es el porcentaje que se contrata para ser pagado como interés por unidad de tiempo y por unidad de capital invertido al principio de cada unidad de tiempo. Aunque generalmente se expresa en porcentaje, la tasa efectiva de interés puede ser convertida fácilmente a fracción o decimal, que conceptualmente es lo correcto.

Ejemplo:
Si se dice que la tasa efectiva de interés es del 27% anual, esto puede expresarse como $i = .27$ y significa que por cada unidad invertida al principio del año se recibirán intereses de 27/100 al finalizar el año.

Si se dice que una tasa de interés es vencida o pagada, esto significa que los intereses se consideran devengados al final de cada periodo. Si se dice que una tasa de interés es anticipada o que es una tasa de descuento, esto significa que los intereses se consideran devengados al principio de cada periodo.

Al hablar de interés compuesto se considera que una vez que los intereses de un periodo cualquiera han sido devengados, están en condiciones de integrarse inmediatamente al capital e invertirlos para que comiencen a producir intereses a la misma tasa del préstamo original desde el periodo siguiente a aquél en que fueron originados.




$$S_0 = P$$
$$S_1 = P\,(1+i)$$
$$S_2 = S_1\,(1+i) = P\,(1+i)^2$$
$$S_3 = S_2(1+i) = S_1(1+i)^2 = P\,(1+i)^3$$
$$\vdots$$
$$S_t = S_{t-1}(1+i) = S_{t-2}(1+i)^2 = \ldots = P(1+i)^t$$

$$S_t = P(1+i)^t \qquad \text{(III.1)}$$

Puede demostrarse fácilmente que la fórmula anterior, produce montos formando una sucesión geométrica para valores igualmente espaciados de t. En particular dando valores naturales a t se obtiene la sucesión geométrica.

$$(P,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n, \ldots)$$

Cuya razón es: $r = (1 + i)$

b) Tasa Nominal de Interés ($i^{(m)}$):

Es la tasa de interés que se pacta se pagará por unidad de periodo, pero con una frecuencia mayor ("m" veces por periodo), pagándose $\frac{i^{(m)}}{m}$ cada 1/m periodo. Al número m se le llama frecuencia o convertibilidad de la tasa y representa el número de veces por periodo que los intereses se integran al capital.

Cabe aclarar que la expresión $i^{(m)}$ se lee: "i de m" en lugar de "i a la m" ya que no se trata de un exponente sino de un "super-índice".

Ejemplo:

Si un banco ofrece una tasa de interés anual nominal convertible mensualmente del 36%, esto se denota $i^{(12)} = .36$ y significa que el banco pagará un 3% efectivo cada mes, $\frac{i^{(12)}}{12} = \frac{.36}{12} = .03$

Resultando ésto en una tasa anual efectiva mayor del 36% por la reinversión de los intereses de cada mes. (En tasa efectiva equivale al 42.7%).

Para efectos de hacer una mejor exposición de ambos conceptos se usará en el transcurso del texto la siguiente notación:

$i^{(m)}$ = tasa nominal anual de interés convertible m veces al año.

$\frac{i^{(m)}}{m}$= j = tasa efectiva de interés por periodo.

m = frecuencia o convertibilidad de la tasa.

La convertibilidad de una tasa nominal de interés o frecuencia con la que los intereses se capitalizan se suele denotar con la letra m en número de veces al año, con el siguiente significado:

m = 1 una vez al año o convertibilidad anual.
m = 2 dos veces al año o convertibilidad semestral.
m = 3 tres veces al año o convertibilidad cuatrimestral o tetramestral.
m = 4 cuatro veces al año o convertibilidad -- trimestral.
m = 6 seis veces al año o convertibilidad bimestral.
m = 12 doce veces al año o convertibilidad mensual.
m = 24 veinticuatro veces al año o convertibilidad quincenal.
m = 52 cincuenta y dos veces al año o convertibilidad semanal.
m =360 trescientos sesenta veces al año o convertibilidad diaria.
m = $\infty$ infinitas veces al año o convertibilidad instantánea.

## 3. RELACIONES ENTRE TASAS DE INTERES.

Una vez definida una tasa nominal de interés y la frecuencia con que es convertible, es posible calcular - otra tasa nominal de interés con una frecuencia distinta de convertibilidad, de tal manera que las dos tasas sean financieramente equivalentes. Como la tasa anual efectiva es un caso particular de la tasa anual nominal con m= 1, también puede encontrarse la tasa anual efectiva equivalente a una tasa anual nominal convertible m veces al año $i = i^{(1)}$. Finalmente también es posible encontrar - la fuerza instantánea de crecimiento ($\delta$) equivalente a una tasa anual efectiva i y por consiguiente a una tasa nominal anual convertible m veces al año de la siguiente manera:

Sabemos que:

$$S_t = Pe^{\delta t} \qquad \text{donde } S_t = f(t) \text{ y } P=f(0)=a$$

$$S_t = P\,(1+i)^t$$

$$S_t = P\,\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt} \qquad j = \frac{i^{(m)}}{m}$$

Porque el monto del interés unitario por periodo $\frac{(i^{(m)})}{m}$ se recibe (mt) veces.

Igualando:

$$S_t = Pe^{\delta t} = P(1+i)^t = P\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt} = P(1+j)^{mt}$$

$$e^{\delta t} = (1+i)^t = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt} = (1+j)^{mt}$$

Sacando raíz t-ésima:

$$e^{\delta} = (1+i) = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} = (1+j)^{m} \qquad \text{(III.2)}$$

Finalmente, sacando logarítmos naturales:

$$\delta = L(1+i) = mL\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right) = mL(1+j) \qquad \text{(III.3)}$$

$$e^{\delta} = (1+i) = \left(1+\frac{i^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1+\frac{i^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2} = (1+j_1)^{m_1} = (1+j_2)^{m_2}$$

Ejercicios:

1) Encontrar la tasa anual efectiva (i) que es - equivalente a una tasa de interés anual nominal convertible mensualmente del 24%.

$i^{(12)} = .24$

$i = ?$

$$(1+i) = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = (1+j)^m$$

$$j = \frac{i^{(12)}}{12} = \frac{.24}{12} = .02 \text{ ó } 2\% \text{ mensual}$$

$$(1+i) = (1+j)^m$$

$$(1+i) = (1+.02)^{12}$$

$$1+i = (1.02)^{12}$$

$$i = .268242$$

$$i = 26.8242\% \text{ anual efectivo.}$$

2) Encontrar la tasa trimestral efectiva (j) equi valente a una tasa anual nominal convertible - bimestralmente del 18% anual.

$i^{(6)} = .18$

$$j = \frac{i^{(6)}}{6} = \frac{.18}{6} = .03$$

$$\left(1 + \frac{.18}{6}\right)^6 = \left(1 + \frac{i^{(4)}}{4}\right)^4 = (1 + j_2)^4$$

Donde $j_2$ es la tasa trimestral efectiva e $i^{(4)}$ es la tasa anual nominal.

$$(1.03)^{6} = (1 + j_2)^4$$

$$(1.03)^{3/2} = 1 + j_2$$

$$(1.03)^{3/2} - 1 = j_2$$

$$j_2 = 1.0453358 - 1$$

$$j_2 = .0453358$$

$j_2$ = 4.53358% trimestral efectivo.

3) Encontrar la tasa anual nominal convertible semestralmente equivalente a una tasa anual nominal convertible mensualmente del 30%.

$$i^{(2)} = ?$$

$$i^{(12)} = .30$$

$$\left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{.30}{12}\right)^{12}$$

$$\left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right) = \left(1 + \frac{.30}{12}\right)^{6}$$

$$\frac{i^{(2)}}{2} = (1.025)^6 - 1$$

$$\frac{i^{(2)}}{2} = 1.1597 - 1$$

$$i^{(2)} = (.1597)\ (2)$$

$$i^{(2)} = .319386$$

$i^{(2)}$ = 31.9386% anual convertible semestralmente.

4) Encontrar la tasa anual efectiva (i) equivalente a las dos del problema anterior.

$i^{(12)} = .30$

$i^{(2)} = .319386$

$$(1 + i) = (1 + \frac{i^{(12)}}{12})^{12} = (1 + \frac{i^{(2)}}{2})^{2}$$

$$(1 + i) = (1 + \frac{.30}{12})^{12} = (1 + \frac{.319386}{2})^{2}$$

$$(1 + i) = (1.025)^{12} = (1.159693)^{2}$$

$1 + i = 1.34488$
$i = 1.34488 - 1$
$i = .34488$
$i = 34.488\%$ anual efectiva.

5) Encontrar la tasa anual nominal convertible trimestralmente equivalente a una tasa del 14% semestral efectivo.

$j = .14$ semestral.

$i^{(4)} = ?$

$$(1 + j)^{m} = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^{m}$$

$$(1 + .14)^{2} = (1 + \frac{i^{(4)}}{4})^{4}$$

$$(1.14)^2 = (1 + \frac{i^{(4)}}{4})^4$$

$$1.14 = (1 + \frac{i^{(4)}}{4})^2$$

$$\sqrt{1.14} = (1 + \frac{i^{(4)}}{4})$$

$$\frac{i^{(4)}}{4} = \sqrt{1.14} - 1$$

$$\frac{i^{(4)}}{4} = .0677$$

$$i^{(4)} = .2708313$$

$i^{(4)}$ = 27.08313% anual nominal convertible - trimestralmente.

6) Encontrar la tasa mensual efectiva que es equivalente a la tasa anual nominal convertible semestralmente del 25%.

$$j = \frac{i^{(12)}}{12}$$

$$i^{(2)} = .25$$

$$(1 + \frac{.25}{2})^2 = (1 + j)^{12}$$

$$(1.125)^2 = (1 + j)^{12}$$

$$1.125 = (1 + j)^6$$

$$\sqrt[6]{1.125} = 1 + j$$

$$j = .019824451$$

$j$ = 1.9824451% mensual efectiva.

7) Encontrar la tasa anual nominal convertible - mensualmente que es equivalente a una tasa -- trimestral efectiva del 5.5%

$i^{(12)} = ?$

$j = \frac{i^{(4)}}{4} = .055$

$$(1 + .055)^4 = (1 + \frac{i^{(12)}}{12})^{12}$$

$$(1.055)^4 = (1 + \frac{i^{(12)}}{12})^{12}$$

$$1.055 = (1 + \frac{i^{(12)}}{12})^3$$

$$\sqrt[3]{1.055} = 1 + \frac{i^{(12)}}{12}$$

$$1.018007 = 1 + \frac{i^{(12)}}{12}$$

$$.018007 = \frac{i^{(12)}}{12}$$

$$i^{(12)} = .21608556$$

$$i^{(12)} = 21.608556\%$$

## 4. FUERZA DE INTERES.

Podemos establecer una analogía entre la cuerva exponencial y el límite de la tasa efectiva de interés que se obtiene con una tasa anual nominal cuando m tiende a -

infinito ($m \dashrightarrow \infty$) :

$$(1+i) = (1+\frac{i^{(m)}}{m})^m = e^{\delta}$$

$$\lim_{m \dashrightarrow \infty} (1+\frac{i^{(m)}}{m})^m = e^{\delta} \qquad \text{(III.4)}$$

Podemos llamar a $\delta$ (fuerza de interés) tasa nominal anual convertible instantáneamente o tasa nominal - anual convertible infinitas veces al año.

$$\delta = i^{(\infty)}$$

5. CALCULO DE MONTOS.

Suponga que se tiene un monto inicial P, ganando una tasa de interés simple i. Sea $S_t$ el monto (incluido el capital inicial) cuando ha pasado un tiempo t; entonces se verifica la expresión.

$$S_t = P\ (1+it)$$

Por otra parte si la operación se efectúa a interés compuesto se verifica la igualdad:

$$S_t = P\ (1+i)^t = P(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mt} = Pe^{\delta t} \qquad \text{(III.5)}$$

La expresión anterior puede utilizarse para resolver cualquier problema en el cual la incógnita sea o bien el monto futuro $S_t$ o bien el valor presente P a interés compuesto de un monto futuro $S_t$ conocido.

Ejemplos:

1) Encontrar qué capital se tendrá dentro de 3 - años en un banco que paga una tasa de interés efectivo del 22% anual si se inicia con ----- \$300,000.00

$P = 300,000$
$i = .22$
$t = 3$

$$S_3 = P\,(1 + i)^3$$

$$S_3 = 300,000\,(1 + .22)^3$$

$$S_3 = \$544,754.40$$

2) Encontrar qué capital se tendrá al final de - los mismos tres años si el banco paga el 22% anual nominal convertible trimestralmente.

$P = 300,000$
$i^{(4)} = .22$

$$S_t = P\,(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^{mt}$$

$$S_t = 300,000\,(1 + \frac{.22}{4})^{4(3)}$$

$$S_t = 300,000\,(1 + .055)^{12}$$

$$S_t = 300,000\,(1.055)^{12}$$

$$S_t = 570,362.25$$

Como puede observarse, los \$25,607.85 de aumento con respecto al problema anterior son el producto de la reinversión de los intereses.

Una tasa anual nominal equivalente a una tasa anual efectiva será numéricamente menor para compensar la mayor frecuencia de los intereses con $(m) > 1$ si son equivalentes en resultados. Es decir, $i^{(m)} < i$.

3) Los bonos del Ahorro Nacional ofrecen triplicar el capital inicial en 8 años. Encontrar la tasa anual efectiva que está implícita en la oferta.

$S = 3P$
$t = 8$
$i = ?$

$$S_t = P(1 + i)^t$$

$$3P = P(1 + i)^8$$

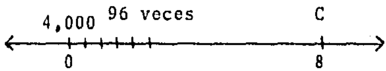
$$3 = (1 + i)^8$$

$$\sqrt[8]{3} = 1 + i$$

$$i = \sqrt[8]{3} - 1$$
$$i = .147202$$
$$i = 14.7202 \text{ anual efectiva}$$

4) Nacional Financiera hace la siguiente oferta: "Deposite usted \$4,000.00 durante 8 años y podrá formar un capital que le permitirá disfrutar de una renta mensual de \$10,000.00 sin tocar el capital".

¿Qué tasa mensual efectiva está implícita en la oferta? ¿A qué tasa anual nominal convertible mensualmente equivale? ¿A qué tasa anual efectiva?.




$$C = 4{,}000 + 4{,}000(1+j) + 4{,}000(1+j)^2 + 4{,}000(1+j)^3 + \ldots$$
$$\ldots + 4{,}000\,(1+j)^{95}$$

Es una serie geométrica con:

$a = 4{,}000 \qquad r = (1+j) \qquad n = 96$

El capital que se formó producirá intereses a la misma tasa.

$$_jC = 10{,}000$$

$j$ = tasa

$C$ = capital

10,000 = monto de intereses (sin la cantidad original)

Despejando:

$$C = \frac{10{,}000}{j}$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$\frac{10{,}000}{j} = 4{,}000 + 4{,}000(1+j) + 4{,}000(1+j)^2 + \ldots$$
$$\ldots + 4{,}000(1+j)^{95}$$

$$\frac{10{,}000}{j} = 4{,}000\left(\frac{1 - (1+j)^{96}}{1 - (1+j)}\right)$$

$$\frac{10}{j} = 4\left(\frac{1 - (1+j)^{96}}{1 - (1+j)}\right) = 4\left(\frac{1 - (1+j)^{96}}{-j}\right)$$

$$\frac{10}{j} = -4\frac{(1 - (1+j)^{96})}{j}$$

$$-2.5 = (1 - (1+j)^{96})$$

$$-3.5 = -(1+j)^{96}$$

$$(3.5)^{1/96} = 1 + j$$

$j = .013135$

$j = 1.3135\%$ mensual efectiva.

Si se quiere saber el capital acumulado:

$$C = \frac{10,000}{j} = \frac{10,000}{.013135} = 761,317.05$$

$C = \$761,317.05$

¿A qué tasa anual nominal convertible mensualmente equivale la tasa mensual efectiva $j = 1.3135\%$?

$$\frac{i^{(12)}}{12} = j = .0131351$$

$$i^{(12)} = 12\,j$$

$$i^{(12)} = 12(.0131351)$$

$$i^{(12)} = .1576212$$

$i^{(12)} = 15.7621\%$ anual nominal convertible mensualmente.

¿A qué tasa anual efectiva es equivalente?

$$(1+i) = (1+j)^{12}$$

$$(1+i) = (1.013135)^{12}$$

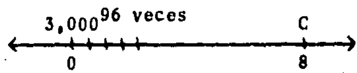
$1+i = 1.16952$

$i = .16952$

$i = 16.95\%$ anual efectiva.

5) El banco XYZ mejora la oferta de la siguiente manera: "Deposite usted \$3,000.00 mensuales - durante 8 años, al cabo de los cuales habrá - formado un capital tal que le permitirá recibir una renta mensual de \$12,000.00 sin tocar el capital".

¿Qué tasa mensual efectiva (j) está implícita en la oferta?. ¿A qué tasas anual efectiva y anual nominal convertible mensualmente equivale? y ¿Qué capital se acumula?




¿Cuál es la tasa mensual efectiva?

$$C = 3{,}000 + 3{,}000(1+j) + 3{,}000(1+j)^2 + \ldots$$
$$\ldots + 3{,}000(1+j)^{95}$$

$JC = 12{,}000$ $\qquad\qquad C = \dfrac{12{,}000}{j}$

Igualando con la primera ecuación:

$$\frac{12{,}000}{j} = \frac{3{,}000(1 - (1+j)^{96})}{1 - (1+j)}$$

$$\frac{12}{j} = \frac{3(1 - (1+j)^{96})}{-j}$$

$$\frac{12}{3} = - \ (1 - (1+j)^{96})$$

$4 = -1 + (1+j)^{96}$

$5 = (1+j)^{96}$

$\sqrt[96]{5} = 1 + j$

$j = \sqrt[96]{5} - 1$

$j = .016906$

$j =$ 1.6906% mensual efectivo.

¿Qué capital se acumula?

$C = \dfrac{12,000}{.016906}$

$C = \$709,794.62$

¿Cuál es la tasa anual nominal convertible men sualmente equivalente?

$\dfrac{i^{(12)}}{12} = j = .016906$

$i^{(12)} = 12j$

$i^{(12)} = 12(.016906)$

$i^{(12)} = .202876$

$i^{(12)} =$ 20.2876% anual nominal convertible men sualmente.

¿A qué tasa anual efectiva equivale?

$(1+i) = (1+j)^{12}$

$(1+i) = (1.016906)^{12}$

$i = .22284$

$i =$ 22.284% anual efectiva.

## 6. PROPIEDADES MATEMATICAS DE LAS TASAS DE INTERES.

Se ha definido una triple igualdad entre tasas de interés de diferentes convertibilidades, de manera que sean financieramente equivalentes (esto es, que produzcan idénticos resultados, partiendo del mismo valor presente y operando durante igual tiempo). Mediante esta triple igualdad pueden demostrarse relaciones matemáticas entre ellas.

a) $i^{(m)} < i$

$i^{(m)} > 0 \wedge m > 1$

Para demostrarlo se utiliza la siguiente fórmula:

$$(1+i) = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

Por Binomio de Newton:

$$(1+i) = 1^m + m(1)^{m-1}\frac{i^{(m)}}{m} + \frac{m(m-1)}{2}(1)^{m-2}\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2 + \ldots$$

Todos los términos son positivos porque:

$i^{(m)} > 0 \qquad m > 1$

$(1+i) = 1 + i^{(m)} + \Delta$

$\Delta$ = incremento (una cantidad positiva)

$i = i^{(m)} + \Delta$

$\therefore\ i^{(m)} < i$

con $i^{(m)} > 0 \wedge m > 1$

b) $\delta < i^{(m)}$ con $1 > i^{(m)} > 0$ $1 < m < \infty$

Se utiliza:

$$e^{\delta} = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

$$\delta = L_n\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)(m)$$

Desarrollando la serie de McLaurin:

$$\delta = m\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^3 - \frac{1}{24}\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^4 + \frac{1}{180}\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^5 - \dots$$

$$\delta = i^{(m)} - \frac{1}{2}\frac{(i^{(m)})^2}{m} + \frac{1}{6}\frac{(i^{(m)})^3}{m^2} - \frac{1}{24}\frac{(i^{(m)})^4}{m^3} + \frac{1}{120}\frac{(i^{(m)})^5}{m^4}$$

El término negativo es más grande que el siguiente, - por lo tanto se tiene un decremento.

$$\delta = i^{(m)} - \Delta$$

$$\therefore \delta < i^{(m)}$$

con $0 < i^{(m)} < 1 \wedge 1 < m < \infty$

Se puede observar que para tasas equivalentes al aumentar m (frecuencia de convertibilidad) disminuye el valor de - la tasa nominal $i^{(m)}$ hasta alcanzar en el límite (cuando m $\dashrightarrow \infty$) el valor $\delta$. (Está acotado por $\delta < i^{(m)} < i$).

Ejemplo:

Construir la tabla de las tasas nominales $i^{(m)}$ para los diferentes valores de m de manera que todas sean equivalentes a una tasa anual efectiva del 30%.

TABLA DE $i^{(m)}$

| m | $i^{(m)}$ | i |
|---|---|---|
| 1 | 30,0000% | 30% |
| 2 | 28.0351% | 30% |
| 3 | 27.4179% | 30% |
| 4 | 27.1160% | 30% |
| 6 | 26.8185% | 30% |
| 12 | 26.5253 | 30% |
| 24 | 26.3804% | 30% |
| 26 | 26.3692% | 30% |
| 52 | 26.3027% | 30% |
| 360 | 26.2460% | 30% |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ∞ | 26.2364% | 30% |

Porque:

$$(1+i) = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

$$(1+i)^{1/m} = 1+\frac{i^{(m)}}{m}$$

$$m((1+i)^{1/m} - 1) = i^{(m)}$$

Para sacar $m = \infty$ se usa $e^{\delta} = (1+i)$

Tasa de conv. instantánea = fuerza de interés = $L_n(1+i)$

Por el contrario, si se mantiene constante el valor de la tasa anual nominal ($i^{(m)}$), la tasa anual efectiva (i) equivalente será mayor conforme la frecuencia de convertibilidad se incremente.

Ejemplo:

Construir la tabla de las tasas anuales efectivas equivalentes a una tasa anual nominal del 30% convertible m veces al año.

TABLA DE i

| m | $i^{(m)}$ | i |
|---|---|---|
| 1 | 30% | 30,0000% |
| 2 | 30% | 32.2500% |
| 3 | 30% | 33.1000% |
| 4 | 30% | 33.5469% |
| 6 | 30% | 34.0096% |
| 12 | 30% | 34,4889% |
| 24 | 30% | 34.7351% |
| 26 | 30% | 34.7542% |
| 52 | 30% | 34.8696% |
| 360 | 30% | 34.9690% |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $\infty$ | 30% | 34.9859% |

$$(1+i) = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \Longrightarrow i = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$$

Para $m = \infty$ $\quad e^{\delta} = (1+i) \Longrightarrow e^{\delta} - 1 = i$ con $\delta = .30$

Por consiguiente si se aumenta indefinidamente la frecuencia de convertibilidad de la tasa se obtendrá una función:

$$f(t) = S_t$$

Que se parece cada vez más a la curva exponencial contínua, como se definió en el apéndice.

Ejemplo:

¿Con qué frecuencia (veces por año) será necesario convertir una tasa nominal anual del 24% para que a partir de un capital inicial de $250,000.00 se tuvieran al cabo de tres años $506,454.13? ¿A qué tasa anual efectiva equivale?

$i^{(m)} = 24\%$

$i = ?$

$m = ?$

$P = 250{,}000$

$t = 3$ años

$S_3$ años $= 506{,}454.13$

$$S_t = P(1+i)^t = P(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mt}$$

$$506{,}454.13 = 250{,}000\ (1+i)^3$$

$$1 + i = (2.02581)^{1/3}$$

$$i = .265319$$

$$i = 26.5319\%$$

Por tanteo (se prueban varias "m"):

Sea $m = 2$:

$$(1+i) = (1 + \frac{.24}{2})^2$$

porque

$$(1+i) = (1+\frac{i^{(m)}}{m})^m$$

$$(1+i) = 1.2544$$

$i = 25.44\%$ $\therefore$ no es

Sea $m = 4$:

$$(1+i) = (1+\frac{.24}{4})^4$$

$$(1+i) = 1.262477$$

$i = 26.2477\%$ $\therefore$ no es

Sea $m = 6$:

$$(1+i) = (1+\frac{.24}{4})^6$$

$$(1+i) = 1.265319$$

$i = 26.5319\%$ $\therefore$ si es

$\Longrightarrow$ $m = 6$

Por lo tanto el 24% ($i^{(m)}$) es anual nominal convertible bimestralmente. (6 veces al año).

7. CALCULO DE LA TASA DE INTERES.

Una vez conocido el monto S, el capital inicial P y el tiempo t, es posible calcular la tasa de interés a la que está colocada la operación; los métodos más comunes para ésto son:

a) Resolver la ecuación por medio del uso de logarítmos.
b) Aplicando la interpolación líneal.

a) Uso de Logarítmos:
A continuación se obtiene la expresión para obtener la tasa buscada:

$$S = P\,(1+i)^t$$

$$\frac{S}{P} = (1+i)^t$$

$$\text{Log } S - \log P = \log\,(1+i)^t$$

$$\text{Log }(1+i) = \frac{\log S - \log P}{t}$$

Aplicando antilogarítmos:

$$1+i = \text{antilog } \frac{\log S - \log P}{t}$$

$$i = \text{antilog } \frac{\log S - \log P}{t} - 1 \qquad \text{(III.6)}$$

Ejemplo:

Encontrar la tasa de interés anual efectiva, para que un capital inicial de \$325,000.00 aumente a \$550,000.00 en un periodo de dos años.

P = 325,000
S = 550,000
i = ?
t = 2

$$i = \text{antilog } \frac{\log S - \log P}{t} - 1$$

$$i = \text{antilog } \frac{\log 550{,}000 - \log 325{,}000}{2} - 1$$

$$i = \text{antilog } \frac{5.74036 - 5.51188}{2} - 1$$

$$i = \text{antilog } (.11424) - 1$$
$$i = 1.30089 - 1$$
$$i = 30.089\%$$

8. CALCULO DEL TIEMPO.

Similarmente, el cálculo del tiempo se puede hacer usando logarítmos o interpolación líneal.

a) Por logarítmos:

$$S = P\ (1+i)^t$$

$$\frac{S}{P} = (1+i)^t$$

$$\text{Log } S - \log P = t \log (1+i)$$

$$t = \frac{\log S - \log P}{\log (1+i)} \qquad \text{(III.7)}$$

Ejemplo:

¿En cuánto tiempo un capital inicial de \$125,000.00 se incrementará a \$300,000.00 si se encuentra colocado a una tasa de interés anual efectiva del 27%?

$P = 125{,}000$
$S = 300{,}000$
$i = .27$
$t = ?$

$$t = \frac{\log S - \log P}{\log (1+i)}$$

$$t = \frac{\log 300{,}000 - \log 125{,}000}{\log (1.27)}$$

$$t = \frac{5.47712 - 5.09691}{.10380}$$

$$t = 3.662909 \text{ años}$$

Para el caso en que la operación se encuentre colocada a una tasa de interés nominal convertible m veces al año, se tiene lo siguiente:

$$S = P\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}$$

$$t = \frac{\log S - \log P}{m \log\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)}$$

Ejemplo:

Calcular el tiempo que tardará un capital inicial de \$225,000.00 en incrementarse hasta \$500,000.00 si se encuentra colocado a una tasa de interés del 36% convertible mensualmente.

$P = 225,000$

$S = 500,000$

$i^{(12)} = .36$

$m = 12$

$t = ?$

$$t = \frac{\log S - \log P}{m \log\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)}$$

$$t = \frac{\log 500,000 - \log 225,000}{12 \log\left(1 + \frac{.36}{12}\right)}$$

$$t = \frac{5.69897 - 5.35218}{12(.012837)}$$

$$t = \frac{.34679}{.154044}$$

$$t = 2.251240 \text{ años}$$

b) **Por interpolación lineal:**
**De hecho esta es la manera más sencilla y la más utilizada en la práctica.**

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Demostrar la triple igualdad que relaciona a las tres tasas de interés.

2. ¿A qué tasa de interés convertible trimestralmente, una cierta cantidad duplicará su valor en 10 años?.

3. Una población aumentó de 475,000 habitantes a 1'100,000 en 23 años. ¿Cuál fue el tipo anual aproximado de crecimiento?.

4. Un padre al nacimiento de su hijo invierte $25,000.00 a una tasa del 22% anual convertible semestralmente. ¿Cuál será el monto del capital al cumplir su hijo 18 años?

5. Encontrar la tasa anual efectiva que es equivalente a las siguientes tasas:

a) Anual nominal convertible semestralmente del 19%.
b) Anual nominal convertible trimestralmente del 25%.
c) Anual nominal convertible mensualmente del 38%.

6. Encontrar la tasa mensual efectiva equivalente a una tasa anual nominal convertible semestralmente del 24%.

7. Encontrar la tasa anual nominal convertible trimestralmente equivalente a una tasa anual nominal convertible mensualmente del 32%.

8. Encontrar qué capital se tendrá dentro de 6 años en un banco que ofrece una tasa de interés efectivo

semestral del 19% si se depositan $850,000.00.

9. Una Institución Financiera ofrece una renta mensual de $25,000.00 sin tocar el capital inicial, a partir de depósitos mensuales de $10,000.00 durante 7 años. ¿Qué tasa mensual efectiva está implícita en la oferta?. ¿A qué tasa anual nominal convertible mensualmente equivale?.

10. ¿Con qué frecuencia será necesario convertir una tasa anual nominal del 36% para que a partir de un capital inicial de $500,000.00 se tuvieran al cabo de 3 años $1'406,332.39? ¿A qué tasa anual efectiva equivale?.

11. Encontrar la tasa de interés anual nominal convertible trimestralmente, para que un capital inicial de $600,000.00 aumente a $895,000.00 en año y medio.

12.. ¿En cuánto tiempo un capital inicial de: ---- $350,000.00 se duplicará si se encuentra colocado a una tasa de interés anual efectiva del 36%?

13. Si la población de una ciudad en el año de 1976 fue de 16,000 habitantes y si el porcentaje anual de crecimiento se estima en un 4%, ¿Qué población habrá 12 años después, si la tasa permanece constante?.

14. Si una cantidad de dinero se duplica en 9 años colocada a una cierta tasa de interés anual, ¿Cuánto tiempo tardará en triplicarse a la misma tasa de interés?.

15. Calcular la fecha equivalente en que se deberá hacer un pago único que sustituya a las siguientes obligaciones:

a) Un documento por un capital original de: $75,000.00 concedido hace 5 meses por un plazo de 2 años que gana intereses a la ta sa del 17% anual convertible semestralmente.

b) Un documento por un capital original de: - $150,000.00 por un plazo de 18 meses concedido hace 2 meses que produce intereses a la tasa del 1.75% mensual efectiva.

c) Un tercer documento por un capital original de $50,000.00 por un plazo de 3 años y medio, concedido hace un año y que gana intereses según la fuerza de interés del 16.6% anual.

Suponer que ambas partes pactan una tasa de interés del 18% anual convertible mensualmente.

16. Un inversionista que desea una tasa de interés del 2% mensual efectivo analiza una emisión de obligaciones de TELMEX que vence dentro de 10 años. Las obligaciones cuyo valor nominal es de $100.00 pagan el 6% semestral efectivo y pagan $100.00 al final de los 10 años. ¿Cuál - es el precio a que las deberá comprar hoy?.

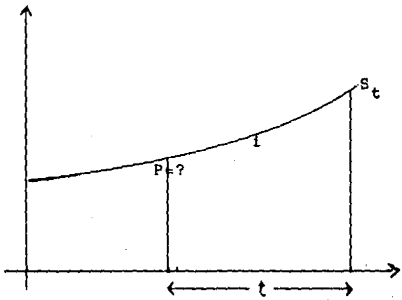
17. Suponer que el inversionista del problema anterior consigue las obligaciones a $59.00 y las conserva durante 5 años (cobrando los 10 cupones correspondientes) y las vende a $78.00. Calcular cuál fue su rendimiento.

# IV. VALOR PRESENTE Y DESCUENTO COMPUESTO.

1. DEFINICION.

Llamamos valor presente de un monto futuro conocido a la cantidad (P) que puesta a la tasa de interés compuesto ($i$ o $i^{(m)}$) es capaz de producir el monto final conocido $S_t$ al cabo de un tiempo t.

Gráfica.




Del capítulo anterior, se sabe que:

$$S_t = P\ (1+i)^t$$

Por lo que:

$$P = \frac{S}{(1+i)^t} = S(1+i)^{-t} = S\ V_i^{\ t}$$

Donde:

$$V_i = \frac{1}{1+i}$$

Si se opera con tasa de interés nominal convertible m veces:

$$S_t = P\ \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}$$

Por lo tanto:

$$P = \frac{S_t}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}} = S_t\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mt} = S_t \; V_j^{\,t}$$

Donde:

$$V_j = \frac{1}{(1+j)} = \frac{1}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}} \qquad \text{(IV.1)}$$

Ejemplos:

1) Calcular el valor presente (hoy) de un pago que se recibirá dentro de 4 años si la tasa es del 20% anual nominal convertible trimestralmente y el monto del pago es $300,000.00

$S_t = 300,000$

$i^{(m)} = .20$

$t = 4$

$m = 4$

$$P = \frac{S_t}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}}$$

$$P = \frac{300,000}{\left(1+\frac{.20}{4}\right)^{4(4)}}$$

$$P = \frac{300,000}{(1+.05)^{16}}$$

$$P = \$137,433.46$$

2) Calcular el valor presente (hoy) de $300,000.00 que se recibirán dentro de 4 años si la tasa de interés es del 20% anual efectivo.

$St = 300{,}000$

$i = .20$

$t = 4$

$$P = \frac{S_t}{(1+i)^t}$$

$$P = \frac{300{,}000}{(1+.20)^4}$$

$$P = \$144{,}675.93$$

## 2. VALOR PRESENTE DE UN MONTO FUTURO A UNA TASA DE DESCUENTO COMPUESTO.

En ocasiones se requiere calcular el valor presente de un monto futuro conocido ($S_t$) con base en una tasa de descuento compuesto, esto es, una tasa referida como un porcentaje del monto final en lugar de expresada como un porcentaje del capital inicial.

La tasa de descuento compuesto representa el porcentaje que hay que restar a una unidad que se tendrá en el futuro para obtener su valor presente cuando falta una unidad de tiempo para su obtención. Por la razón precedente puede concluirse que el descuento compuesto y el valor presente son dos caras de una misma moneda. Lo anterior queda expresado por la ecuación:

$$(1-d) = V_i = \frac{1}{1+i} \qquad \text{(IV.2)}$$

Porque:

$$P = \frac{S}{(1+i)^t} \quad y \quad \frac{1}{(1+i)} = V_i$$

## 3. RELACION ENTRE TASAS DE INTERES Y TASAS DE DESCUENTO.

Por consiguiente pueden obtenerse las mismas relaciones para las tasas de descuento compuesto que para las tasas de interés compuesto, simplemente haciendo negativo el tiempo.

$$V = (1-d) = \frac{1}{(1+i)} = (1+i)^{-1}$$

$$V^{t} = (1-d)^{t} = \frac{1}{(1+i)^{t}} = (1+i)^{-t}$$

$$(1+i)^{t} = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt} = (1+j)^{mt} = e^{\delta t}$$

Haciendo el tiempo negativo:

$$(1+i)^{-t} = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mt} = (1+j)^{-mt} = e^{-\delta t}$$

$$\frac{1}{(1+i)^{t}} = \frac{1}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}} = \frac{1}{(1+j)^{mt}} = \frac{1}{e^{\delta t}}$$

y como:

$$\frac{1}{(1+i)} = (1-d)$$

Entonces:

$$(1-d)^{t} = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mt} = (1-g)^{mt} = e^{-\delta t} \qquad \text{(IV.3)}$$

En todas las fórmulas anteriores la notación utilizada es la siguiente:

$d$ = tasa anual efectiva de descuento

$d^{(m)}$ = tasa anual nominal de descuento convertible m veces al año.

$\frac{d^{(m)}}{m}$ = $g$ = tasa de descuento efectiva por periodo.

$\delta$ = fuerza de interés = fuerza de descuento.

## 4. CONVERTIBILIDAD DE UNA TASA DE DESCUENTO COMPUESTO.

En forma paralela a la definición de la convertibilidad de una tasa nominal de interés compuesto también puede definirse la convertibilidad de una tasa de descuento compuesto como la frecuencia con la que se descuentan (o pagan) los intereses sobre el monto furuto ($S_t$), expresada en número de veces por año (m). De la ecuación (IV. 3) puede derivarse inmediatamente una relación de equivalencia entre tasas de descuento nominales y tasas de descuento efectivas.

$$(1-d) = \left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m = (1-g)^m = e^{-\delta} \qquad \text{(IV.4)}$$

Por último también podemos establecer una relación entre montos futuros y valores presentes recordando que:

$$S_t = P\,(1+i)^t = P\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt} = P\,(1+j)^{mt} = Pe^{\delta t}$$

$$P = \frac{S_t}{(1+i)^t} = \frac{S_t}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}} = \frac{S_t}{(1+j)^{mt}} = \frac{S_t}{e^{\delta t}}$$

$$P = S_t\,(1+i)^{-t} = S_t\,V_i^t = S_t\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mt} = S_t(1+j)^{-mt}$$

$$= S_t\,V_j^{mt} = S_t\,e^{-\delta t}$$

Por consiguiente, sustituyendo tasas de interés compuesto por sus correspondientes tasas de descuento equivalentes:

$$P = S_t(1-d)^t = S_t\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mt} = S_t(1-g)^{mt} = S_t\,e^{-\delta t} \qquad \text{( IV.5)}$$

$$S_t = \frac{P}{(1-d)^t} = \frac{P}{\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mt}} = \frac{P}{(1-g)^{mt}} = \frac{P}{e^{-\delta t}}$$

$$S_t = P(1-d)^{-t} = P\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-mt} = P(1-g)^{-mt} = Pe^{\delta t} \qquad \text{(IV.6)}$$

Ejemplos:

1) Calcular el valor presente de $500,000.00 que se pagarán dentro de 16 meses si la tasa de descuento es del 1.2% mensual efectiva.

$S_t = 500,000$

$g = 1.2\%$

$t = 16/12$

$m = 12$

$P = S_t\,(1-g)^{mt}$

$P = 500,000\,(1-.012)^{12(16/12)}$

$P = 500,000\,(.988)^{16}$

$P = 500,000\,(.824349)$

$P = \$412,174.50$

2) ¿Qué tasa de interés mensual efectiva (j) produce iguales resultados?

$g = .012$

$j = ?$

$(1-g) = \frac{1}{1+j}$

$1-.012 = \frac{1}{1+j}$

$1+j = \frac{1}{.988}$

$j = .01214575$

$j = 1.214575\%$ mensual efectivo.

3) ¿Qué tiempo será necesario para duplicar un capital si la tasa de descuento es del 15% anual nominal convertible trimestralmente?

$$\frac{d^{(m)}}{m} = \frac{.15}{4} \qquad S_t = \frac{P}{\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mt}}$$

$$S_t = 2P \qquad 2\cancel{P} = \frac{\cancel{P}}{\left(1-\frac{.15}{4}\right)^{4t}}$$

$$m = 4 \qquad (1-.0375)^{4t} = \frac{1}{2}$$

$$(.9625)^{4t} = \frac{1}{2}$$

$$4t \text{ Ln } (.9625) = \text{Ln } (1/2)$$

$$4t = \frac{\text{Ln } (1/2)}{\text{Ln } (.9625)}$$

$$4t = \frac{-.693147}{-.038221}$$

$$t = \frac{18.135240}{4}$$

$$= 4.533810 \text{ años.}$$

4) Los certificados de la Tesorería de la Federación (CETES) se operan en la Bolsa de Valores a tasas de descuento, generalmente anuales nominales convertibles trimestralmente. Calcular:
   a) ¿Qué precio deberá pagarse por uno de estos títulos cuyo valor de Redención (al final) es de $10,000.00 cuando faltan tres meses para su vencimiento; si el inversionista desea obtener una tasa de descuento del 24% anual nominal convertible trimestralmente?
   b) ¿ Qué tasa de interés anual nominal convertible trimestralmente es equivalente?
   c) ¿Qué tasa de interés anual efectiva equivale a las dos anteriores?

a) $S_t = 10{,}000$ $\qquad$ $P = S_t\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mt}$

$d^{(4)} = .24$ $\qquad$ $P = 10{,}000\left(1-\frac{.24}{4}\right)^{4(3/12)}$

$t = 3/12$ de año

$m = 4$ $\qquad$ $P = 10{,}000\,(1-.06)^{3/3}$

$i^{(4)} = ?$ $\qquad$ $P = 10{,}000\,(.94)$

$i = ?$ $\qquad$ $P = \$9{,}400.00$

b) $g = \frac{d^{(4)}}{4}$ $\qquad$ $(1+j) = \frac{1}{1-g}$

$$1+j = \frac{1}{1-.06} = \frac{1}{.94} = 1.063829$$

$$j = .063829$$

$$j = \frac{i^{(4)}}{4} \Rightarrow i^{(4)} = 4j$$

$$i^{(4)} = 4\,(.063829)$$

$i^{(4)} = 25.5319\%$ anual nominal convertible trimestralmente.

c) $(1+i) = (1+j)^m$

$$1+i = (1+.0638297)^4$$

$$i = .28082143$$

$i = 28.082143\%$ anual efectivo.

5. FUERZA DE DESCUENTO ($\delta$).

Al aumentar la frecuencia de convertibilidad de la tasa de descuento compuesto, se puede demostrar que el límite cuando la frecuencia (m) tiende a infinito es igual a la fuerza instantánea de interés compuesto obtenida en el Capítulo III; por consiguiente a la tasa $\delta$ la podemos llamar indistintamente fuerza instantánea de interés o fuerza instantánea de descuento.

La única diferencia en el empleo de $\delta$ surge de la forma de medir el tiempo, ya que cuando $\delta$ representa una fuerza instantánea de interés, el tiempo cero se ubica en la fecha del valor presente P y consecuentemente el tiempo correspondiente al monto $S_t$ será positivo. Por el contrario cuando $\delta$ representa una fuerza de descuento, el momento t = 0 se asinga al tiempo correspondiente al monto final $S_t$ y consecuentemente el tiempo correspondiente al valor presente P será negativo.

De las ecuaciones definidas entre tasas de interés y descuento financieramente equivalentes, pero con diferentes frecuencias de convertibilidad, puede deducirse la siguiente relación:

$$d < d^{(m)} < \delta < i^{(m)} < i \qquad \text{(IV.7)}$$

Si la frecuencia de convertibilidad cumple:

$$1 < m < \infty$$

En interés compuesto al aumentar la convertibilidad disminuye la tasa aparente. En descuento compuesto al aumentar la convertibilidad aumenta la tasa aparente.

## 6. COMPARACION ENTRE EL VALOR PRESENTE DE UN MONTO A UNA TASA DE INTERES COMPUESTO Y A UNA TASA DE DESCUENTO COMPUESTO.

Si se tiene un monto futuro conocido ($S_t$) que se recibirá en el futuro, su valor presente (P) puede valuarse de dos maneras distintas:

a) A tasa de interés compuesto (i).

$$P = \frac{S_t}{(1+i)^t} = S_t\ (1+i)^{-t} = S_t\ V_i^t$$

b) A tasa de descuento compuesto (d);

$$P = S_t\ (1-d)^t$$

Desde luego pueden obtenerse tasas (i) y (d) financieramente equivalente entre sí, en cuyo caso el valor presente será el mismo. Sin embargo, para un valor numérico dado idéntico para la tasa de interés y para la tasa de descuento el resultado no es el mismo, ya que estas tasas no son financieramente equivalentes porque la tasa de interés se aplica sobre el capital inicial y la tasa de descuento se aplica sobre el monto final.

Si ambas son positivas ($i = d > 0$) el valor presente a tasa de interés será mayor que el valor presente a tasa de descuento.

Ejemplo:

Calcular el valor presente hoy de $50,000.00 que se recibirán dentro de 17 meses.

a) Si la tasa de interés compuesto es del 21% anual efectivo.

$S_t = 50{,}000$

$$P = \frac{S_t}{(1+i)^t}$$

$i = .21$

$t = 17/12$ años

$$P = \frac{50{,}000}{(1+.21)^{17/12}}$$

$$P = \frac{50{,}000}{1.310024}$$

$$P = \$38{,}167.238$$

b) Si la tasa de descuento compuesto es del 21% anual efectivo.

$d = .21$ $\qquad P = S_t(1-d)^t$

$S_t = 50{,}000$ $\qquad P = 50{,}000\ (1-.21)^{17/12}$

$t = 17/12$ $\qquad P = 50{,}000\ (.79)^{17/12}$

$$P = \$35{,}804.84$$

c) ¿Qué tasa anual efectiva de descuento es equivalente al 21% anual efectivo de interés compuesto?

$i = .21$ $\qquad (1-d) = \frac{1}{1+i}$

$$(1-d) \quad \frac{1}{1+.21}$$

$$-d = .826446-1$$
$$-d = -.173553$$
$$d = .173553$$
$$d = 17.3553\%$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Probar que aproximadamente se cumple la siguiente relación:

$$d = i - i^2 + i^3$$

2. Demostrar que aproximadamente se cumple la siguiente relación.

$$\delta = \frac{i^{(m)} + d^{(m)}}{2}$$

3. Comparar en una gráfica los valores actuales con descuento comercial, racional y compuesto. Utilizar la tasa del 20% anual y hacer las gráficas para 4 periodos anuales.

4. Calcular el valor presente de $900,000.00, que se recibirán dentro de 2 años si la tasa de interés es del 30% anual efectivo.

5. Calcular el valor presente de un pago que se recibirá dentro de 3 años si la tasa de interés es del 28% anual nominal convertible semestralmente y el monto del pago es de $750,000.00.

6. Calcular el valor presente de $1'000,000.00 que se pagarán dentro de 24 meses si la tasa de descuento es del 3.4% mensual efectiva.

7. ¿Qué tiempo será necesario para triplicar un capital si la tasa de descuento es del 31% anual nominal convertible semestralmente?.

8. Calcular el valor presente de \$1'500,000.00 que se recibirán dentro de 15 meses.

a) Si la tasa de interés compuesto es del 38% anual efectivo.

b) Si la tasa de descuento compuesto es del 38% anual efectivo.

c) ¿Qué tasa anual efectiva de descuento es - - equivalente al 38% anual efectivo de interés compuesto?.

# V. ECUACION DE VALOR

## 1. GENERALIDADES.

Con frecuencia debe plantearse un conjunto de derechos y obligaciones que sea financieramente equivalente a otro conjunto de derechos y obligaciones conocido, tomando en cuenta una tasa de interés compuesto o una tasa de descuento compuesto para la valuación de ambos conjuntos en una fecha única cualquiera conocida como "fecha de valuación" o "fecha focal".

El problema anterior se resuelve planteando una "ecuación de valor" que representa la igualdad del valor presente (o del monto acumulado) de ambos conjuntos de derechos y obligaciones. Para ello debe elegirse una fecha única y una tasa de interés compuesto o de descuento compuesto que servirán de base para la valuación de cada derecho y de cada obligación que componen cualquiera de los dos conjuntos evaluados.

Puede recordarse que la elección de la fecha focal en un problema de ecuación de valor a interés simple o a descuento simple, siempre repercutía en el resultado de la ecuación; sin embargo, una de las propiedades del interés compuesto y del descuento compuesto es que el porcentaje definido por la tasa siempre se refiere a la cantidad acumulada hasta ese momento, razón por la cual la fecha de valuación no afecta de ninguna manera los resultados, por lo que puede elegirse la fecha que resulte más conveniente a fin de facilitar los cálculos.

## 2. PLANTEO DE LA ECUACION DE VALOR.

La ecuación de valor se plantea como la igualdad de los valores presentes (o de los montos futuros) de cada uno de los derechos u obligaciones contenidos en cada uno de los dos conjuntos.

$$\sum V P (A) = \sum V P (B)$$

ó

$$\sum V F (A) = \sum V F (B) \qquad (IV.1)$$

Ejemplo:

Un deudor tiene las siguientes obligaciones:

1) Un documento por \$150,000.00 que vence dentro de tres años y que causa intereses desde hace un año a la tasa anual efectiva del 22%.

2) Otro documento por \$250,000.00 que vence dentro de 18 meses, que fue prestado hace seis meses a una tasa anual nominal convertible semestralmente del 20%.

Desea cambiar el conjunto actual de sus obligaciones futuras por otro conjunto que consista en el pago de una mensualidad fija de monto "x" durante todos los meses desde el primero hasta el 36°. Plantear la ecuación de valor en: a) el momento cero, b) el momento 36 y c) el momento 12. Suponer una tasa de interés mensual efectivo del 2% en todos los casos.

Primero se determinan los montos futuros. $(S_t)$

| | |
|---|---|
| 1) | $S_t = P(1+i)^t$ |
| $P = 150{,}000$ | $S_t = 150{,}000\ (1+.22)^4$ |
| $i = .22$ | $S_4 = 150{,}000\ (2.2153)$ |
| $t = 4$ | $S_4 = 332{,}300.18$ |

2) $$S_t = P\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}$$

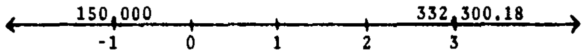
$$P = 250{,}000 \qquad S_2 = 250{,}000\left(1+\frac{.20}{2}\right)^{2(2)}$$

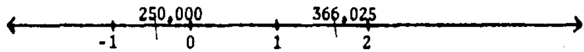
$$i^{(2)} = .10 \qquad S_2 = 250{,}000\ (1.10)^4$$

$$t = 4 \qquad S_2 = 250{,}000\ (1.4641)$$

$$S_2 = 366{,}025$$

Gráficas.

1) 


2) 


a) Si la fecha focal es hoy:

$$\frac{366{,}025}{(1.02)^{18}} + \frac{332{,}300.18}{(1.02)^{36}} = \frac{x}{1.02} + \frac{x}{(1.02)^2} + \frac{x}{(1.02)^3} + \frac{x}{(1.02)^4} \cdots\cdots + \frac{x}{1.02^{36}}$$

$$256{,}275.84 + 162{,}901.24 = x\left(\frac{1}{1.02} + \frac{1}{(1.02)^2} + \frac{1}{(1.02)^3} + \ldots + \frac{1}{(1.02)^{36}}\right)$$

Puede observarse que la cantidad que se encuentra dentro de los corchetes forma una serie geométrica con $r = \frac{1}{1.02}$

y $a = \frac{1}{1.02}$

$$Sn = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{1}{1.02}\left(1-\left(\frac{1}{1.02}\right)^{36}\right)}{1-\frac{1}{1.02}}$$

$$= 25.48884248\ (x)$$

$$419{,}177.08 = 25.48884248\ (x)$$

$$x = \$16{,}445.51 \text{ (cada pago)}$$

b) Si la fecha focal es el momento 36:

$$336{,}025\,(1.02)^{18} + 332{,}300.18 = x\,(1.02)^{35} + x\,(1.02)^{34} \ldots + x\,(1.02) + x$$

Puede notarse que es la misma ecuación pero multiplicada por una constante: $(1.02)^{36}$

c) Si la fecha focal es en el momento 12:

$$\frac{336{,}025}{(1.02)^{6}} + \frac{332{,}300.18}{(1.02)^{24}} = x\,(1.02)^{11} + x\,(1.02)^{10} + \ldots + x\,(1.02) + x +$$

$$\frac{x}{(1.02)} + \frac{x}{(1.02)^{2}} + \ldots + \frac{x}{(1.02)^{24}}$$

Puede observarse que es la misma ecuación pero multiplicada por la constante: $(1.02)^{12}$.

3. ECUACION DE VALOR CUYA INCOGNITA ES EL TIEMPO.

Existen problemas en los cuáles es necesario determinar la fecha en que se llevará a cabo una operación para que sea financieramente equivalente a un conjunto de derechos y obligaciones ya conocida.

En tales casos la incógnita (t) suele quedar como exponente de una expresión en términos de (1+i), o de V o de (1-d) o de series geométricas de ellas, pudiendo despejarse por alguno de los tres métodos siguientes:

1. Métodos analíticos o exactos: por logarítmos o por raíz n-ésima de la ecuación.
2. Regla práctica: es el promedio ponderado de montos y tiempos que da una aproximación aceptable de la fecha equivalente.

$$t = \frac{t_k \quad S_k}{S_k} \qquad (\text{V.2})$$

3. Métodos numéricos: tratan de determinar el valor de una incógnita de una ecuación que generalmente es muy difícil de despejar, mediante un proceso de tanteo dando valores numéricos a la incógnita y observando el comportamiento de la igualdad, de manera de acotar una solución que cumpla con algún nivel satisfactorio de precisión prefijado (E).

Una vez que se han determinado 2 valores numéricos $t_1$ y $t_2$ lo suficientemente próximos entre sí y que comprendan una solución entre ellos (garantizable si los signos de sus respectivas funciones son opuestos y si la función es contínua en el intervalo $t_1 < t < t_2$) puede aplicarse el logarítmo de la interpolación lineal según se propuso en el apéndice y cuya solución es:

$$t = \frac{(f(t) - f(t_1))\ (t_2 - t_1)}{f(t_2) - f(t_1)} + t_1 \qquad (\text{V.3})$$

Ejemplos:

1) Un comerciante tiene las siguientes deudas: ---- \$14,000.00 pagaderos en un año y \$38,000.00 pagaderos en dos años. ¿En qué fecha puede hacerse un pago único de \$52,000.00 utilizando una tasa de interés compuesto del 6% anual convertible semestralmente?

$i$ = 3% semestral.

$$\frac{14,000}{(1+i)^2} + \frac{38,000}{(1+i)^4} = \frac{52,000}{(1+i)^t}$$

$$\frac{14,000}{(1.03)^2} + \frac{38,000}{(1.03)^4} = \frac{52,000}{(1.03)^t}$$

$$(1.03)^t = 1.10734$$

1. Resolviendo por lagarítmos:

   $tL(1.03) = L(1.10734)$

   $t = 3.4494207$ semestres

   $t = 1.7247103$ años

2. Resolviendo por la Regla Práctica:

| ti | Si | tiSi |
|---|---|---|
| 2 | 14,000 | 28,000 |
| 4 | 38,000 | 152,000 |
| x | 52,000 | 180,000 |

$$t = \frac{180,000}{52,000} = 3.4615385 \text{ semestres}$$

$t = 1.7307692$ años

3. Resolviendo por interpolación lineal:

   Sean $t_1 = 3$ y $t_2 = 3.5$

$$f(ti) = (1.03)^t$$
$$f(t_1) = 1.092727$$
$$f(t_2) = 1.1089968$$

$$t = \frac{(f(t) - f(t_1)\ (t_2 - t_1))}{f(t_2) - f\ (t_1)} + t_1$$

$$= \frac{(1.10734 - 1.092727)\ (3.5-3)}{1.1089968 - 1.092727} + 3$$

$= 0.449083 + 3$

$= 3.449083$ semestres

$= 1.7245418$ años

2) Deducir una expresión para el tiempo a partir de las ecuaciones para el monto y el valor presente a interés compuesto y a descuento compuesto respectivamente.

| INTERES COMPUESTO | DESCUENTO COMPUESTO |
|---|---|
| $P = \dfrac{St}{(1+i)^t}$ | $P = St\,(1-d)^t$ |
| $(1+i)^t = \dfrac{St}{P}$ | $\dfrac{P}{St} = (1-d)^t$ |
| $Ln(1+i)^t = Ln\,\dfrac{St}{P}$ | $Ln\,\left(\dfrac{P}{St}\right) = Ln\,(1-d)^t$ |
| $tLn(1+i) = Ln\,(St) - Ln(P)$ | $Ln\,(P) - Ln(St) = t\,Ln(1-d)$ |
| $t = \dfrac{Ln\,(St) - Ln(P)}{Ln(1+i)}$ | $t = \dfrac{Ln(P) - Ln(St)}{Ln(1-d)}$ |

3) Suponer que una persona adeuda 3 cantidades cuyos montos finales son $S_1$, $S_2$, $S_3$, pagaderos respectivamente dentro de $t_1$, $t_2$, $t_3$ años. Plantear el problema de la fecha equivalente por ecuación de valor (método exacto) y por regla práctica (promedio ponderado), si la tasa de interés anual efectiva es i.

a) $$\frac{S_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{S_2}{(1+i)^{t_2}} + \frac{S_3}{(1+i)^{t_3}} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{(1+i)^t},$$

Se busca despejar t:

$$\frac{S_1(1+i)^{t_2+t_3} + S_2(1+i)^{t_1+t_3} + S_3(1+i)^{t_1+t_2}}{(1+i)^{t_1+t_2+t_3}} = \frac{S}{(1+i)^t}$$

$$(1+i)^t = \frac{S\,(1+i)^{t_1+t_2+t_3}}{S_1(1+i)^{t_2+t_3} + S_2(1+i)^{t_1+t_3} + S_3(1+i)^{t_1+t_2}}$$

$$t \operatorname{Ln}(1+i) = \operatorname{Ln}\left(\frac{S(1+i)^{t_1+t_2+t_3}}{S_1(1+i)^{t_2+t_3} + S_2(1+i)^{t_1+t_3} + S_3(1+i)^{t_1+t_2}}\right)$$

$$t = \frac{\operatorname{Ln}[S(1+i)^{t_1+t_2+t_3}] - \operatorname{Ln}[S_1(1+i)^{t_2+t_3} + S_2(1+i)^{t_1+t_3} + S_3(1+i)^{t_1+t_2}]}{\operatorname{Ln}(1+i)}$$

b)

$$\frac{S_1 t_1 + S_2 t_2 + S_3 t_3}{S_1 + S_2 + S_3} = t$$

$$t = \frac{S_1 t_1 + S_2 t_2 + S_3 t_3}{S_t}$$

4. PROBLEMAS DE FECHA EQUIVALENTE.

Son casos particulares de problemas cuya incógnita es el tiempo, en ellos se busca sustituir una serie de pagos - ($S_1$, $S_2$,..., $S_n$) con vencimiento en el futuro ($t_1$, $t_2$,...,$t_n$) respectivamente, por un pago único igual a la suma algebraica de los montos de dichos pagos ($S = S_1 + S_2 + ... + S_n$), en una fecha todavía indeterminada llamada "fecha equivalente" y una tasa de interés o descuento especificada.

Ejemplo:

Encontrar la fecha equivalente en que se deberá pagar - un monto único S para que sustituya a las siguientes obliga - ciones:

a) Un documento de un préstamo concedido hace 10 meses, que vence dentro de 14 meses por un monto original - de \$210,000.00 ganando intereses a una tasa de interés compuesto del 16% anual convertible semestralmente.

b) Otro documento por un monto inicial de \$90,000.00 concedido hace 2 años por un periodo de 3 años y que gana intereses a una fuerza de interés del 12% anual.

Suponer que se pacta para la operación una tasa de interés compuesto del 18% anual convertible quincenalmente.

Primero se determinan los montos de vencimiento de cada adeudo:

a) $Sa = 210,00\ (1.08)^4 = \$285,702.68$

b) $Sb = 90,000\,e^{(.12)(3)} = \$128,999.65$

$S = Sa + Sb$

$= 414,702.33$

$$\frac{285,702.68}{(1.0075)^{28}} + \frac{128,999.65}{(1.0075)^{24}} = \frac{414,702.33}{(1.0075)^{t}}$$

$$(1.0075)^t = 1.221137$$

$$t = .8250169 \text{ años.}$$

## 5. ECUACION DE VALOR CUYA INCOGNITA ES LA TASA DE INTERES.

Con frecuencia se presentan problemas en los cuales la incógnita es la tasa de interés que satisface la ecuación de valor. Ejemplos de esta categoría los constituyen problemas de determinación del rendimiento efectivo de inversiones y problemas en los que se conoce tanto el adeudo inicial como el número y el monto de los pagos que lo amortizarán y se desea saber la tasa de interés que se está cargando por el financiamiento.

Los métodos de solución pueden ser:

a) Analíticos o algebraícos.- Como el empleo de la raíz n-ésima y la solución de polinomios. Estos mé todos pretenden despejar la variable "i" de la ecuación de valor cuando es posible.

Ejemplo:

$$x = y\,(1+j)^{-3} + y(1+j)^{6}$$

sea $(1+j)^{-3} = k$

$$x = y\,k + y\,k^{2}$$

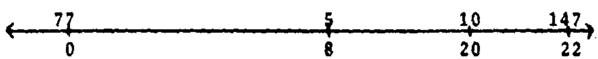
$$y\,k + y\,k^{2} - x = 0$$

Que es la ecuación de 2° grado.

b) Métodos Numéricos. Cuando resulta muy difícil o imposible despejar la tasa de interés de la ecuación de valor pueden emplearse métodos numéricos o aproximativos que consisten en asignar valores tentativos a la incógnita de la ecuación y observar el comportamiento de la igualdad, hasta determinar un valor que cumpla la igualdad con un nivel de precisión satisfactorio escogido de antemano (E).

Ejemplo:

Encontrar el rendimiento mensual efectivo (j) que obtuvo un inversionista que compró unas acciones hace 22 meses a \$77.00 cada una; que cobró un dividendo en efectivo de \$5.00 a los 8 meses de tener las acciones; que cobró un segundo dividendo en efectivo de \$10.00, 12 meses después del primer dividendo y que, finalmente, vendió las acciones 22 meses después de adquiridas a \$147.00 cada una.




$$77\,(1+j)^{22} = 5(1+j)^{22-8} + 10(1+j)^{22-20} + 147$$

$$77\,(1+j)^{22} = 5(1+j)^{14} + 10(1+j)^{2} + 147$$

$$147 = 77(1+j)^{22} - 5(1+j)^{14} - 10(1+j)^{2}$$

Interpolando:

$j_1 = 3\%$ $\qquad f(j_1) = 129.368$

$j = ?$ $\qquad f(j) = 147$

$j_2 = 4\%$ $\qquad f(j_2) = 163.0094$

$$j = \frac{(j_2 - j_1)(f(j) - f(j_1))}{(f(j_2) - f(j_1))} + j_1$$

$$j = \frac{(.04 - .03)(147 - 129.368)}{163.01 - 129.368} + .03$$

$$j = 3.54\%$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un deudor tiene las siguientes obligaciones:

a) Un documento por $450,000.00 que vence dentro de 2 años y que causa intereses desde hace 8 meses a la tasa anual nominal convertible mensualmente del 28%.

b) Otro documento por $1'000,000 que vence dentro de 6 meses, que fue prestado hace 18 meses a una tasa anual efectiva del 34%.

Desea cambiar el conjunto actual de sus obligaciones futuras por otro conjunto que consista en el pago de una mensualidad fija de monto x durante todos los meses desde el 1° hasta el 24° mes. Plantear la ecuación de valor, suponiendo una tasa de interés mensual efectivo del 3.5%.

2. Un vendedor tiene las siguientes deudas: $150,000.00 pagaderos en 3 meses y $700,000.00 en 1 año. ¿En qué fecha puede hacerse un pago único de $850,000.00 utilizando una tasa de interés del 22% anual nominal convertible trimestralmente?.

3. Encontrar la fecha equivalente en que se deberá pagar un monto único S para que sustituya a las siguientes obligaciones:

a) Un documento de un préstamo concedido hace 8 meses, que vence dentro de 16 meses por un capital original de $450,000.00 ganando intereses a una tasa de interés anual nominal convertible mensualmente del 18%.

b) Otro documento por un capital inicial de $350,000 concedido hace 4 semestres faltando 2 más y que gana intereses a una fuerza de interés del 19% anual .

Suponer que se pacta para la operación una tasa de interés anual nominal convertible mensualmente del 16%.

4. Encontrar la fecha equivalente para un pago único que se hace en sustitución de:

a) Un cobro de $250,000.00 neto dentro de 8 meses.

b) Un pago de $400,000.00 más intereses por 8 meses al 24% anual de interés simple, cuyo vencimiento ocurre dentro de 6 meses.

Suponer la fecha focal de 6 meses al 4.8% mensual de interés simple.

# VI. ANUALIDADES

## 1. INTRODUCCION.

En matemáticas financieras, al hablar de una anualidad se entiende que es el pago de cierta cantidad de dinero a intervalos regulares de tiempo. Antiguamente la palabra "anualidad" se refería únicamente a la serie formada por pagos anuales, pero en la actualidad se comprenden también pagos a intervalos diferentes a un año, tales como semestrales, mensuales, etc. Muchos de los términos que se manejan con relativa frecuencia son o están íntimamente relacionados con el concepto de anualidad.

Algunos ejemplos de anualidades son los sueldos, las pensiones, los cupones de obligaciones, los fondos de amortización y depreciación, las rentas producidas por los fondos en fideicomiso, etc.

Para una mejor comprensión del tema, a continuación se presentan las definiciones de los diferentes conceptos que se utilizarán a través del capítulo.

## 2. DEFINICIONES.

Anualidad.- Es una serie de pagos periódicos, generalmente de un mismo monto. Por extensión también se denomina anualidad al valor presente (en el momento cero)de la serie de pagos, aunque es más correcto emplear el término "anualidad" solamente para definir la serie.

Renta.- Es el monto de cada pago periódico.

Renta anual.- Es la suma de los pagos efectuados en un año.

Tiempo o plazo de una anualidad.- Es el intervalo que transcurre entre el comienzo del primer periodo de pago de renta y el final del último periodo.

Periodo de la renta.- Es el tiempo que se fija entre dos pagos sucesivos.

Tasa de una anualidad.- Es la tasa de interés usada para calcular el importe del pago; puede ser nominal o efectiva.

## 3. CLASIFICACION DE LAS ANUALIDADES.

Se puede decir que existen dos grupos de anualidades: anualidades contingentes y anualidades ciertas.

a) Las anualidades contingentes son aquéllas en las que el pago de la renta depende de la ocurrencia de alguna eventualidad. Por ejemplo: es requisito que fallezca el asegurado para poder cobrar el monto contratado en su seguro de vida; es necesario que se invalide un trabajador para que pueda recibir la pensión correspondiente.

b) Las anualidades ciertas son aquéllas en las que los pagos deben efectuarse con seguridad durante el plazo establecido, independientemente de cualquier evento fortuito. Por ejemplo: pagos de intereses sobre obligaciones, pagos de mensualidades sobre un automóvil adquirido a crédito.

Tanto las anualidades contingentes como las anualidades ciertas pueden clasificarse según la forma o fecha de pago de la siguiente manera:

α) Anualidades vencidas u ordinarias.- Consisten en una serie de pagos cada uno de los cuales se hace al final de los periodos sucesivos de renta.

P P P ... P P P P

0 1 2 3 n-3 n-2 n-1 n

β) Anualidades anticipadas.- Consisten en una serie de pagos cada uno de los cuales se hace al comienzo de los periodos sucesivos de renta.

```
P    P    P    P    P ...   P     P
+----+----+----+----+-------+-----+------
0    1    2    3    4      n-2   n-1    n
```

γ) Anualidades diferidas.- Son aquéllas cuyo plazo comienza después de transcurrido un intervalo de tiempo. Tanto las anualidades vencidas como las anticipadas pueden comenzar inmediatamente o en alguna fecha futura. Por ejemplo: algunas empresas otorgan préstamo de emergencia a sus empleados por un monto máximo equivalente a tres meses del sueldo del empleado; las condiciones de pago suelen incluir un plazo de gracia de tres meses, transcurridos los cuales el préstamo deberá pagarse mediante descuentos quincenales iguales durante un plazo no mayor de un año.

```
____________... P____P_____P ...___P______P______P_
0     1     2   K   K+1   K+2    K+n-2  K+n-1   K+n
\_______________/\_________________________________/
 Tiempo  Diferido  Periodo de  Pago de la Anualidad
```

δ) Rentas perpetuas o perpetuidades.- Son aquéllas que consisten en una serie de pagos que se efectúan indefinidamente. Por ejemplo: los intereses devengados periódicamente por el capital depositado en un fideicomiso en el cual no es posible tocar el capital.

```
P    P    P    P    P    P
+----+----+----+----+----+--------        ...............
0    1    2    3    4    5
```

## 4. VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD.

- Anualidades Constantes Vencidas y Finitas.

Con frecuencia es necesario conocer el valor equivalente de una serie de pagos los cuales se efectuarán al final de cada periodo de un intervalo dado cuya fecha de valuación se considera al inicio del plazo de la anualidad.


Sea P el monto del pago que se realiza al término de cada uno de los n periodos y sea j la tasa efectiva por periodo de interés para efectuar la valuación; entonces, el valor presente de la anualidad estará dado por:

$$A = \frac{P}{1+j} + \frac{P}{(1+j)^2} + \frac{P}{(1+j)^3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{P}{(1+j)^n}$$

y como:

$$\frac{1}{1+j} = V_j$$

$$A = PV_j + PV_j^2 + PV_j^3 + \ldots\ldots\ldots + PV_j^n$$

$$A = P(V_j + V_j^2 + V_j^3 + \ldots\ldots + V_j^{n})$$

Si se utiliza la expresión $a_{\overline{n|}}\,j$ para denotar la suma de los valores presentes de cada pago:

$a_{\overline{n|}}\,j = V_j + V_j^2 + \ldots + V_j^n$

Se obtiene la siguiente relación:

$$A = P\,a_{\overline{n|}}\,j \qquad \text{(VI.1)}$$

Que representa el valor presente de n pagos periódicos, impuestos a una tasa de interés efectiva j.

Debido a que los términos de $a_{\overline{n}|j}$ constituyen una serie geométrica con razón V, es posible obtener una expresión que proporcione el valor $a_{\overline{n}|j}$ sin necesidad de utilizar las tablas financieras. Según la fórmula de series geométricas:

$$a = V_j \qquad S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$r = V_j \qquad a_{\overline{n}|j} = \frac{V_j(1-V_j^{\,n})}{1-V_j}$$

$$= \frac{1}{1+j}\;\frac{(1-V_j^{\,n})}{\frac{1+j-1}{1+j}}$$

$$a_{\overline{n}|j} = \frac{1-V_j^{\,n}}{j} \qquad \text{(VI.2)}$$

Ejemplos:

1) Calcular el valor presente hoy de una anualidad - a 5 años de $1'750,000.00 pagaderos al término de cada año, si la tasa anual efectiva de interés es del 40%.

P = 1'750,000
i = .40 = j
n = 5
A = ?

$$A = P\,a_{\overline{n}|j}$$

$$= P\,\frac{(1-V_j^{\,n})}{j}$$

$$= 1'750{,}000\;\frac{\left(1-\left(\frac{1}{(1+.40)}\right)^5\right)}{.40}$$

$$= 1'750{,}000\;\frac{(1-.185934)}{.40}$$

$$= 1'750,000\ (2.03516392)$$
$$A = \$3'561,536.86$$

2) ¿Qué capital será necesario depositar hoy en un banco que paga el 3% mensual efectivo si se desea recibir una mensualidad de $35,000.00 durante 15 años?.

$P = 35,000$

$j = .03$

$n = 180$

$$A = P\ \frac{(1 - V_j^{\,n})}{j}$$

$$= 35,000\ \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{1.03}\right)^{180}\right)}{.03}$$

$$= 35,000\ (33.170337)$$
$$= \$1'160,961.79$$

3) Demostrar que $a_{\overline{h+k}|} = a_{\overline{h}|} + v^h\, a_{\overline{k}|}$

$$a_{\overline{h+k}|} = v + v^2 + v^3 + \ldots\ldots + v^{h+k}$$

$$a_{\overline{h}|} = v + v^2 + v^3 + \ldots\ldots + v^h$$

$$v^h\, a_{\overline{k}|} = v^h\ (v + v^2 + v^3 + \ldots\ldots + v^k)$$

$$v^h\, a_{\overline{k}|} = v^{h+1} + v^{h+2} + v^{h+3} + \ldots\ldots + v^{h+k}$$

$$a_{\overline{h}|} + v^h a_{\overline{k}|} = v + v^2 + \ldots\ldots + v^h + v^{h+1} +$$

$$+\ v^{h+2} + v^{h+k} = v + v^2 + v^3 + \ldots\ldots + v^{h+k}$$

$$a_{\overline{h}|} + v^h a_{\overline{k}|} = a_{\overline{h+k}|}$$

La expresión anterior permite el cálculo de anualidades cuyo valor se encuentra fuera de las tablas financieras a partir de dos valores (h y k) que sí se encuentran en las tablas.

Ejemplo:

Expresar el valor presente de una anualidad de 180 pagos si en las tablas solamente se encuentran valores de hasta un máximo de 100 pagos periódicos.

$$a_{\overline{180}|} = a_{\overline{100}|} + v^{100}\, a_{\overline{80}|}$$

o también

$$a_{\overline{180}|} = a_{\overline{80}|} + v^{80}\, a_{\overline{100}|}$$

Anualidades Constantes Anticipadas y Finitas.

A diferencia de las anualidades vencidas, el valor presente de una anualidad anticipada consiste en el valor equivalente de una serie de pagos, los cuales se efectúan al principio de cada periodo de un intervalo dado y considerando como fecha de valuación el inicio del plazo de la anualidad.

| P | P | P | P | | P | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | | n-1 | n |

Sea P el monto constante de cada pago que se efectúa al principio de cada periodo y sea j la tasa efectiva de interés por periodo para realizar la valuación; el valor presente de los n pagos comprendidos en la anualidad anticipada será entonces:

$$A = P + \frac{P}{1+j} + \frac{P}{(1+j)^2} + \frac{P}{(1+j)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+j)^{n-1}}$$

y como:

$$\frac{1}{1+j} = V_j$$

$$A = P + PV_j + PV_j^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + PV_j^{n-1}$$

$$A = P(1+V_j + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + V_n^{n-1})$$

A partir de la definición de anualidad anticipada se deduce que su valor presente estará dado por:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}\, j = 1 + V_j + V_j^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + V_j^{n-1}$$

De donde se obtiene la siguiente expresión:

$$A = P\, \ddot{a}_{\overline{n}|}\, j \qquad \text{(VI.3)}$$

que representa el valor presente de una serie de n pagos anticipados a una tasa de interés efectiva j.

Es posible obtener una relación entre anualidad vencida y anualidad anticipada a partir de las definiciones anteriores.

$$a_{\overline{n}|}\, j = V_j + V_j^2 + V_j^3 + \ldots\ldots\ldots + V_j^n$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}\, j = 1 + V_j + V_j^2 + \ldots\ldots\ldots + V_j^{n-1}$$

Se puede observar que si se multiplica la expresión $\ddot{a}_{\overline{n}|}\, j$ por V, se obtiene la expresión $a_{\overline{n}|}\, j$, de tal forma que se cumple:

$$v\ddot{a}_{\overline{n}|}\, j = a_{\overline{n}|}\, j$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}\, j = \frac{a_{\overline{n}|}\, j}{v}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}\, j = a_{\overline{n}|}\, j\ (1+i) \qquad \text{(VI.4)}$$

$$A = P\, a_{\overline{n}|}\, j\ (1+i)$$

$$A = \frac{P(1-V_j^{\,n})(1+j)}{j}$$

Ejercicios:

1) Calcular el valor presente de una anualidad formada por 5 pagos de $1'750,000.00 que se pagarán al principio de cada año, si la tasa efectiva de interés es del 40% anual.

$A = ?$ $\qquad A = P(\ddot{a}_{\overline{n}|}\ j)$

$n = 5$ $\qquad \ddot{a}_{\overline{n}|}\ j = a_{\overline{n}|}\ j\ (1+i)$

$P = 1'750,000$

$i = .40 = j$ $\qquad A = 1'750,000\ (a_{\overline{5}|}\ .40)(1.4)$

$$= 1'750,000\ \frac{(1 - (\frac{1}{1.4})^{5})}{.4}(1.4)$$

$$= 1'750,000\ (2.03516)(1.4)$$

$$A = \$4'986,151.60$$

2) ¿Qué capital será necesario depositar hoy en un banco que paga el 3% mensual efectivo, si se desea recibir una mensualidad de $35,000.00 durante 15 años, la primera de ellas en el momento cero y la última en el 179° mes?

$P = 35,000$ $\qquad A = P\ddot{a}_{\overline{n}|}\ j$

$n = 180$ $\qquad \ddot{a}_{\overline{n}|}\ j = a_{\overline{n}|}\ j\ (1+j)$

$j = .03$ $\qquad A = 35,000\ a_{\overline{180}|}\ .03\ (1+.03)$

$$= 35,000\ \frac{(1 - (\frac{1}{1.03})^{180})}{.03}(1.03)$$

$$A = 35,000\ (33.17)(1.03)$$

$$A = \$1'195,790.64$$

3) Obtener una expresión para $\ddot{a}_{\overline{h+k}|}$ en términos de

$\ddot{a}_{\overline{k}|}$, $(1+j)^h$, $v^h$, $\ddot{a}_{\overline{h}|}$

$$\ddot{a}_{\overline{h+k}|} = \underbrace{1+v+v^2+v^3+\dots+v^{h-1}}_{\ddot{a}_{\overline{h}|}}+v^h+v^{h+1}+\dots+v^{h+k}$$

$$\ddot{a}_{\overline{h+k}|} = \ddot{a}_{\overline{h}|} + v^h + v^{h+1} + \dots\dots + v^{h+k-1}$$

$$\ddot{a}_{\overline{h+k}|} = \ddot{a}_{\overline{h}|} + v^h \underbrace{(1+v+v^2+\dots+v^{k-1})}_{\ddot{a}_{\overline{k}|}}$$

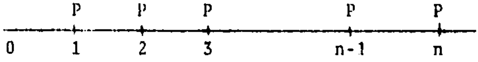
$$\ddot{a}_{\overline{h+k}|} = \ddot{a}_{\overline{h}|} + v^h \ddot{a}_{\overline{k}|}$$

Simil: $\ddot{a}_{\overline{h+k}|} = \ddot{a}_{\overline{k}|} + v^k \ddot{a}_{\overline{h}|}$

5. MONTO FUTURO DE UNA ANUALIDAD.

Anualidades Constantes Vencidas.

Se define el monto futuro de una anualidad vencida, como el valor que se acumula al término del plazo de un conjunto de pagos, cada uno de los cuales es efectuado al final de cada periodo y con fecha de valuación al plazo de vencimiento de la anualidad.




Sea P el monto del pago que se realiza al término de cada uno de los n periodos y sea j la tasa efectiva por periodo de interés para efectuar la valuación; entonces el monto futuro de la anualidad estará dado por:

$$S = P + P(1+j) + P(1+j)^2 + \ldots\ldots\ldots + P(1+j)^{n-1}$$

$$= P(1+(1+j) + (1+j)^2 + \ldots\ldots\ldots + (1+j)^{n-1})$$

Se define $S_{\overline{n}|}\,j$ como la suma de los pagos y sus intereses acumulativos desde el momento en que se realiza cada pago hasta el término del plazo de la anualidad:

$$S_{\overline{n}|}\,j = (1+j)^{n-1} + \ldots\ldots + (1+j)^2 + (1+j) + 1$$

Se obtiene:

$$S = P \quad S_{\overline{n}|}\,j \qquad \text{(VI.5)}$$

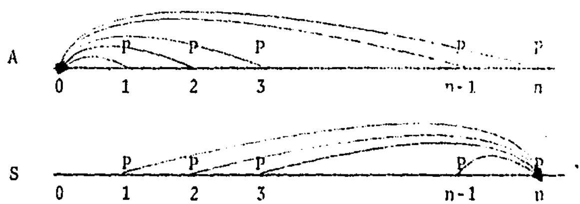
Debido a que los términos de $S_{\overline{n}|}\,j$ forman una serie geométrica con razón (1+i) se puede obtener la siguiente expresión que calcula el valor de $S_{\overline{n}|}\,j$ sin necesidad de utilizar las tablas financieras.

$$S_{\overline{n}|}\,j = \frac{(1+j)^n - 1}{j} \qquad \text{(VI.6)}$$

Relación entre Montos Acumulados y Valores Presentes de una misma Anualidad.

El valor presente y el monto futuro acumulado de una anualidad representan dos medidas de una serie de pagos.

La diferencia estriba simplemente en la fecha de valuación elegida, ya que para el valor presente se elige como fecha de valuación el inicio del plazo de la anualidad, mientras que para el monto futuro se elige como fecha de valuación la del término del mismo.



$$s_{\overline{n}|\,j} = (1+j)^n \,(a_{\overline{n}|\,j})$$

$$a_{\overline{n}|\,j} = V^n \; s_{\overline{n}|\,j}$$

$$A \quad = V^n \; S$$

$$S \quad = (1+j)^n \, A \qquad \text{(VI.7)}$$

Las fórmulas simplemente significan que el monto futuro de una anualidad puede obtenerse multiplicando el valor presente por $(1+j)^n$ y que el valor presente puede obtenerse multiplicando el monto futuro por $V^n$.

Ejemplos:

1) Calcular el monto que se acumulará en una cuenta de ahorros si se depositan $500.00 mensuales en la misma durante 6 años y si la tasa que paga el banco es del 3% mensual efectiva.

$P = 500$

$n = 72$

$j = .03$

$$S = P\, s_{\overline{n}|\,j}$$

$$s_{\overline{n}|\,j} = \frac{(1+j)^n - 1}{j}$$

$$= \frac{(1.03)^{72} - 1}{.03}$$

$$= 246.6672$$

$$S = 500\ (246.6672)$$

$$= \$123{,}333.62$$

2) Calcular el valor presente de la serie de pagos del problema anterior y verificar la fórmula.

$$A = V^n S$$

$$= \left(\frac{1}{1.03}\right)^{72} (123{,}333.62)$$

$$= 14{,}682.54$$

Si se utiliza la fórmula directa del valor presente de una anualidad (VI.1).

$$A = P a_{\overline{n}|j}$$

$$a_{\overline{n}|j} = \frac{1-\left(\frac{1}{1+j}\right)^{n}}{j}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{1.03}\right)^{72}}{.03}$$

$$a_{\overline{n}|j} = 29.36508$$
$$A = 500\ (29.36508)$$
$$= \$14{,}682.54$$

Verificando la fórmula (VI.7):

$$S = (1+j)^{n}\ A$$

$$= (1.03)^{72}\ (14{,}682.54)$$
$$= (8.4000172)(14{,}682.54)$$
$$S = \$123{,}333.62$$

3) Una persona deposita \$2'000,000.00 en un banco que paga el 29% anual convertible semestralmente y desea asegurarse el pago de 180 mensualidades antes de que se le termine el dinero. Calcular el monto del pago mensual, el valor futuro de la serie de pagos y verificar la fórmula.

$A = 2'000{,}000$ $\qquad (1+\frac{i^{(2)}}{2})^{2} = (1+j)^{12}$

$i^{(2)} = .29$ $\qquad (1.145)^{2} = (1+j)^{12}$

$n = 180$ $\qquad \sqrt[6]{1.145} = 1 + j$

$$j = .02282401$$

$$A = P\, a_{\overline{n|}\,j}$$

$$a_{\overline{n|}\,j} = \frac{1-V_j^n}{j}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{1.022824}\right)^{180}}{.022824}$$

$$= 43.0593834$$

$$P = \frac{A}{a_{\overline{n|}\,j}}$$

$$= \frac{2'000,000}{43.05938}$$

$$= \$46,447.48$$

$$S = P\ s_{\overline{n|}\,j}$$

$$s_{\overline{n|}\,j} = \frac{(1+j)^n-1}{j}$$

$$= \frac{(1.022824)^{180}-1}{.022824}$$

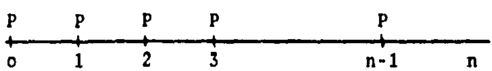
$$= 2,501.6802$$

$$S = (46,447.48)(2,501.6802)$$

$$= \$116'196,741.50$$

Anualidades Constantes Anticipadas.

Se define el monto futuro de una anualidad anticipada como el valor acumulado de un conjunto de pagos, cada uno de los cuales es efectuado al principio de cada periodo y con fecha de valuación al término del plazo del vencimiento de la anualidad.



Sea P el monto de cada pago constante que se realiza al principio de cada periodo y sea j la tasa efectiva de interés por periodo; entonces el monto futuro acumulado de n pagos al término del n-ésimo periodo será:

$$S = P(1+j)^n + P(1+j)^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + P(1+j)$$

$$= P[(1+j)^n + (1+j)^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + (1+j)]$$

Debido a la definición de anualidad anticipada:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}\, j = (1+j)^n + (1+j)^{n-1} + (1+j)^{n-2} + \ldots + (1+j)$$

$$S = P\,(\ddot{s}_{\overline{n}|}\, j) \qquad \text{(VI.8)}$$

De igual forma que $\ddot{a}_{\overline{n}|}\, j = a_{\overline{n}|}\, j \;\; (1+j)$
se cumple:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}\, j = (1+j)\, s_{\overline{n}|}\, j \qquad \text{(VI.9)}$$

**Ejemplos:**

**1) Calcular el monto que se acumulará en una cuenta de ahorros que paga el 20% anual convertible mensualmente si se depositan hoy y cada mes durante 180 meses -- \$3,000.00**

$S = ?$ $\qquad\qquad j = \dfrac{.20}{12} = .0166667$

$i^{(12)} = .20$

$P = 3{,}000$ $\qquad\qquad S = P\, \ddot{s}_{\overline{n}|}\, j$

$n = 180$ $\qquad\qquad \ddot{s}_{\overline{n}|}\, j = (1+j)\;\; s_{\overline{n}|}\, j$

$$S = 3{,}000\, \frac{((1.0166667)^{180} - 1)}{.0166667}(1.0166667)$$

$$= 3{,}000\,(1.0166667)(1{,}115.7046)$$

$$S = \$3'402{,}899.18$$

2) Demostrar que: $\ddot{s}_{\overline{h}|j} = s_{\overline{h+1}|j} - 1$

$$s_{\overline{h}|j} = 1+(1+j)+(1+j)^2 + \ldots\ldots + (1+j)^{h-1}$$

$$s_{\overline{h+1}|j} = 1+(1+j)+(1+j)^2 + \ldots. + (1+j)^h$$

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{\overline{h}|j} &= (1+j)\ s_{\overline{h}|j} \\ &= (1+j)\ (1+(1+j)+(1+j)^2 + \ldots + (1+j)^{h-1}) \\ &= (1+j)+(1+j)^2 + \ldots\ldots. + (1+j)^h \end{aligned}$$

$$s_{\overline{h+1}|j} - 1 = (1+j) + (1+j)^2 + \ldots. + (1+j)^h$$

$$s_{\overline{h+1}|j} - 1 = \ddot{s}_{\overline{h}|j}$$

## 6. CALCULO DE LA RENTA.

En muchas ocasiones es necesario encontrar el monto del pago periódico, que impuesto a una tasa efectiva de interés y en un tiempo determinado produzca una cierta cantidad establecida.

También puede presentarse el caso de que se conozca el valor presente de la anualidad en lugar del monto futuro.

Para el caso en que se conozca el monto futuro:

$$S = P\ s_{\overline{n}|j}$$

$$P = \frac{S}{s_{\overline{n}|j}} = \frac{S}{\frac{(1+j)^n-1}{j}} = \frac{S\,j}{(1+j)^n-1}$$

Para el segundo caso puede partirse de:

$$A = P\,a_{\overline{n}|j}$$

que resulta en:

$$P = \frac{A}{a_{\overline{n}|j}} = \frac{A}{\frac{1-V_j^{\,n}}{j}} \qquad \frac{Aj}{1-V_j^{\,n}}$$

Ejemplo:

Una persona desea disponer de un capital de $100,000.00 dentro de 10 años, formado mediante depósitos mensuales en un banco que le ofrece el 9% de interés anual nominal convertible mensualmente.

¿De cuánto será la renta anual para lograr su objetivo?

$S = 100{,}000$ $\qquad P = \dfrac{100{,}000(12)}{s_{\overline{120}|}\ .0075}$

$n = 10$

$i^{(12)} = .09$ $\qquad = \dfrac{1'200{,}000}{193{,}514.281}$

$m = 12$

$p = ?$

$i = \dfrac{.09}{12} = .0075$ $\qquad = \$\ 6{,}201.09$

7. CALCULO DE LA TASA DE INTERES.

En un número importante de problemas de las matemáticas financieras se conoce el valor presente o el monto futuro, el pago periódico y el número de pagos iguales, buscándose calcular el valor de la tasa efectiva de interés.

Ejemplos de esta clase de situaciones son aquellos problemas relacionados con determinar las tasas efectivas de rendimiento que proporcionan ciertas inversiones, o bien las tasas efectivas de interés que están cobrando los acreedores en formas comunes de financiamiento.

Generalmente la tasa de interés es la incógnita más difícil de despejar de la ecuación por métodos analíticos; por ello, se emplean con frecuencia métodos numéricos o de aproximación sucesiva hasta que la diferencia entre dos tasas es lo suficientemente pequeña para poder interpolar linealmente entre ellas:

Ejemplos:

1) Una institución bancaria hace al público ahorrador la siguiente oferta: "Deposite usted mensualmente \$8,000.00 durante 10 años y al final podrá gozar de una renta de: \$15,000.00 mensuales sin tocar el capital". Calcular qué tasa mensual efectiva está implícita en la oferta, ¿Qué tasa anual efectiva es equivalente?, ¿Qué tasa anual nominal convertible mensualmente?

$P = 8{,}000$

$n = 120$

$S = C = ?$

$j = ?$

$i^{(m)} = ?$

$jC = 15{,}000$

$$S = P\, s_{\overline{n}|j}$$

$$S = P\frac{((1+j)^n-1)}{j}$$

$$15{,}000 = 8{,}000\,((1+j)^{120}-1)$$

$$j = 0.88\%$$

$$i^{(12)} = (.0088)(12) = 10.56\%$$

$$i = (1.0088)^{12}-1 = 11.14\%$$

2) Calcular el rendimiento (tasa anual efectiva de interés) que obtendrá una inversionista al adquirir unas obligaciones de determinada empresa que valen \$100.00 cada una y que pagan \$9.00 cada semestre a \$40.00 cuando faltan 16 semestres para recuperar los \$100.00 originales.

| 40.00 | 9.00 | 9.00 | 9.00 | 100.00 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 16 | |

$$40.00(1+j)^{16} = 9.00\ s_{\overline{16}|j} + 100$$

$$40\ (1+j)^{16} = 9\left(\frac{(1+j)^{16}-1}{j}\right) + 100$$

Por interpolación:

$j = .2372 = 23.72\%$

8. CALCULO DEL NUMERO DE PAGOS Y EL PAGO ROTO.

Con frecuencia se presentan problemas en los cuales se conoce el valor presente de una serie de pagos iguales de monto P y la tasa efectiva por periodo j, pero se desconoce el número exacto de pagos, así como el monto del "pago roto" que generalmente debe hacerse al final para que la igualdad que se plantea en la ecuación de valor se cumpla exactamente.

Para calcular el número entero de pagos completos es necesario despejar el valor del tiempo (n) de la siguiente manera:

$$A = P a_{\overline{n}|j}$$

$$A = P\ \frac{(1-V^n)}{j}$$

$$\frac{jA}{P} = 1-V^n$$

$$V^n = 1-\frac{jA}{P}$$

$$V^n = \frac{P-jA}{P} \qquad \text{(VI.9)}$$

Se puede resolver la ecuación exponencial por logaritmos o por interpolación con tablas financieras de valores presentes o de montos futuros.

Utilizando logaritmos:

$$n \text{ Ln } V = \text{Ln } (P-jA) - \text{Ln}(P)$$

$$n = \frac{\text{Ln } (P-jA) - \text{Ln}(P)}{\text{Ln } (v)} \text{ para } P > jA$$

$$\text{ó} \quad n = \frac{\text{Ln } (P) - \text{Ln}(P-jA)}{\text{Ln } (1+i)} \text{ para } P < jA \qquad \text{(VI.9)}$$

En caso de que el número de pagos resulte fraccionado, se efectuará un pago menor un periodo después de efectuado el último pago entero y que sea de un monto suficiente para cubrir totalmente el valor de la anualidad.

El monto del pago (n+i) se hace calculando el valor presente de n y restándolo del valor presente total:

$$A^1 = P\, a_{\overline{n}|\, j}$$

$$Pn+1 = (A-A^1)\ (1+j)^{n+1} \qquad \text{(VI.10)}$$

Ejemplo:

Una persona deposita \$10'000,000.00 en un banco que paga el 4% mensual efectivo. Desea recibir una mensualidad de \$500,000.00 durante tantos meses como le dure el dinero. Calcular el número de pagos completos que recibirá y el monto del pago "roto" que recibirá un mes después del último pago completo.

$A = 10'000,000$

$j = .04$

$P = 500,000$

$$n = \frac{\text{Ln } (P-jA) - \text{Ln}(p)}{\text{Ln } (v)}$$

$$n = \frac{(\text{Ln}(500,000-(.04)10'000,000) - \text{Ln } (500,000)}{\text{Ln } (1) - \text{Ln } (1.04)}$$

$$n = \frac{-13.122363 + 11.512925}{-0.039220713}$$

$n = 41.0354068$

$n = 41$ meses

Pago roto:

$$A^1 = P\,a_{\overline{n}|}\, j$$

$$= 500{,}000 \;\frac{\left(1-\left(\frac{1}{1.04}\right)^{41}\right)}{.04}$$

$$A^1 = 500{,}000\ (19.993052)$$

$$A^1 = 9{,}996{,}525.91$$

Valor presente de los 41 pagos:

$$Pn + 1 = (A-A^1)(1+j)^{n+1}$$

$$= (10'000{,}000 - 9'996{,}525.88)(1.04)^{42}$$

$$= (\ 3{,}474.09)\ (1.04)\ 42$$

$$= 18{,}040.20$$

En caso de que lo que se conozca sea el monto acumulado al final de la serie de pagos de monto P y la tasa de interés efectiva por periodo j, se procede en forma semejante.

$$S = P\ S_{\overline{n}|}\ j$$

$$\frac{S}{P} = \frac{(1+j)^n-1}{j}$$

$$\frac{jS}{P} = (1+j)^n-1$$

$$\frac{jS + P}{P} = (1+j)^n$$

$$Ln\ (JS + P) - Ln\ (P) = n\ Ln\ (1+j)$$

$$n = \frac{Ln\ (S+P) - Ln\ (P)}{Ln\ (1+j)}$$

El monto del pago (n+1) se calcula en la forma siguiente:

$$S^1 = P\ \ S_{\overline{n}|}\ j\ (1+j)$$

$$Pn+1 = S-S^1 \qquad \text{(VI.11)}$$

Ejemplo:

Una persona desea saber durante cuántos meses deberá depositar $8,000.00 en una cuenta de ahorros que paga el 2% mensual efectivo para juntar $250,000.00 ¿De cuánto deberá ser el pago roto del último mes?

$P = 8{,}000 \qquad n = \dfrac{\ln(JS+P) - \ln(P)}{\ln(1+j)}$

$j = .02$

$S = 250{,}000 \qquad = \dfrac{\ln((.02)(250{,}000)+8{,}000) - \ln 8{,}000}{\ln(1.02)}$

$$= \frac{9.4727 - 8.0872}{.0198}$$

$$= 24.520202$$

$$= 24 \text{ meses}$$

$$S' = P\, s_{\overline{n}|j}\,(1+j)$$

$$= 8{,}000\,\frac{((1.02)^{24}-1)}{.02}\,(1.02)$$

$$= 248{,}242.3776$$

$$P_{n+1} = S - S^1$$

$$= 250{,}000 - 248{,}242.37$$

$$P_{25} = \$1{,}757.6224$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Calcular el valor presente hoy de una anualidad a tres años de $1'500,000.00 pagaderos al término de cada año, si la tasa anual efectiva de interés es del 24%.

2. ¿Qué capital será necesario depositar hoy en un banco que paga el 4% mensual efectivo si se desea recibir una mensualidad de $50,000.00 durante 10 años?

3. Calcular el valor presente de una anualidad formada por tres pagos de $2'500,000.00 que se pagarán al principio de cada año si la tasa efectiva de interés es del 29% anual.

4. ¿Qué capital será necesario depositar hoy en un banco que paga el 12% trimestral efectivo, si se desea recibir pagos trimestrales de $100,000.00 durante 6 años, el primero hoy y el último en el mes 24?.

5. Calcular el monto que se acumulará en una cuenta de ahorros si se depositan $25,000.00 mensuales durante 4 años, si la tasa que paga el banco es del 4.5% mensual efectiva.

6. Una persona deposita $3,500,000.00 en un banco que paga el 34% anual nominal convertible trimestralmente y desea asegurarse el pago de 120 mensualidades antes de que se le termine el dinero. Calcular el monto del pago mensual y el valor futuro de la serie de pagos.

7. Calcular el monto que se acumulará en una cuenta de ahorros que paga el 26% anual nominal convertible bimestralmente si se depositan hoy y cada mes al inicio, durante 48 meses $35,000.00.

8. Una persona adquiere una televisión cuyo valor es de $75,000.00 con la opción de pagarla mediante 12 pagos mensuales, el primero un mes después de efectuada la compra. Si la tasa de interés que le cargan es del 3.2% mensual efectiva, ¿a cuánto ascenderán los abonos mensuales?.

9. Una persona deposita $5'000,000.00 en un banco que paga el 4.25% mensual efectivo. Desea recibir una mensualidad de $250,000.00 durante tantos meses como le dure el dinero. Calcular el número de pagos completos que recibirá y el monto del pago "roto" que recibirá un mes después del último pago completo.

10. Una persona desea saber durante cuántos meses deberá depositar $25,000.00 en una cuenta de ahorros que paga el 4% mensual efectivo para juntar $400,000.00. ¿De cuánto deberá ser el pago "roto" del último mes?.

# VII. ANUALIDADES ESPECIALES.

## 1. ANUALIDADES DIFERIDAS.

En el Capítulo VI se ha tratado el tema de las anualidades en forma general, principalmente las anualidades ordinarias o vencidas, así como las anualidades anticipadas. A partir de la definición de anualidad pueden introducirse variantes cuyo estudio es útil en la solución de algunos problemas financieros.

### 1. Anualidades Diferidas.-

Una anualidad diferida es una anualidad ordinaria en la cual se establece que el primer pago se efectuará hasta pasado un cierto número de periodos, conocidos como plazo de gracia, durante los cuales no se efectuará ningún pago.

Existen dos clases de anualidades diferidas: las puras y las híbridas; las primeras son aquéllas en las cuáles no se pagan ni aún los intereses durante el plazo de gracia; las segundas son aquéllas en las cuales se pagan los intereses (Cj) correspondientes a cada periodo durante el plazo de gracia.

Supóngase que se tiene una anualidad unitaria pagadera durante n periodos y diferida durante m periodos. Esta anualidad será pagadera a partir del (m+1) -ésimo periodo y su ultimo pago ocurrirá en el periodo (m+n).

$$m/a_{\overline{n}|} = v^{m+1} + v^{m+2} + v^{m+3} + \dots + v^{m+n}$$

$$= v^{m}(v + v^{2} + v^{3} + \dots + v^{n})$$

$$= v^{m} a_{\overline{n}|}$$

La expresión puede valuarse fácilmente a partir de los valores tabulados de $V^m a_{\overline{n}|}$; sin embargo, puede obtenerse otra relación si se considera que la anualidad diferida consta de todos los pagos durante el intervalo (0,m+n) excepto los correspondientes al plazo de gracia, por lo cual:

$$m/a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}$$

Esta última expresión resulta más sencilla de valuar si se dispone de tablas financieras.

Si el pago periódico no es unitario sino de monto R, el valor presente de una anualidad que consta de n pagos diferidos m periodos será:

$$A = R\,(m/a_{\overline{n}|}) = V^m\,R\,a_{\overline{n}|} \qquad \text{(VII.1)}$$

$$A = R\,(m/a_{\overline{n}|}) = R\,(a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}) \qquad \text{(VII.2)}$$

Ejemplo:

Una Compañía desea un crédito a largo plazo para financiar parcialmente una nueva planta de chocolates. Un banco ofrece financiar el proyecto otorgando un periodo de gracia de 3 años y recuperando el capital desde el 4°. año hasta el 10°. año inclusive. Si la tasa es del 16% anual convertible trimestralmente y la Compañía no estará en posición de pagar más de $4'000,000.00 trimestrales, encontrar el crédito máximo que puede otorgársele.

| | |
|---|---|
| R = 4'000,000 | $A = R\,(a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|})$ |
| j = .04 | $= 4'000,000\ (a_{\overline{40}|} - a_{\overline{12}|})$ |
| m = 12 | = 4'000,000 (10.4077) |
| n = 28 | = $41'630,800.00 |

## 2. PERPETUIDADES.

Se conoce como perpetuidad o renta perpetua a la serie de pagos que se efectúan a partir de una cierta fecha y en forma indifinida, denotándose por la siguiente expre sión:

$$a_{\overline{\infty}|}$$

Ejemplos de perpetuidades son:

- La renta de un inmueble
- Los intereses de una deuda que nunca se salda.

Para encontrar el valor presente de una perpetuidad se plantea el límite de una anualidad ordinaria finita, su poniendo que n crece indefinidamente:

$$a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n \to \infty} a_{\overline{n}|}$$

Recordando la expresión para una anualidad ordinaria $a_{\overline{n}|}$:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-V^n}{i}$$

Se obtiene el límite para $n \to \infty$

$$a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n \to \infty} \frac{(1-V^n)}{i}$$

Pero como $V^n \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$ para valores de $0 < j < 1$ por lo tanto:

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{j}$$

Si el pago periódico no es unitario sino de monto R el valor presente de la perpetuidad estará dado por:

$$A = R\,a_{\overline{\infty}|} = \frac{R}{j} \qquad \text{(VII.3)}$$

Ejemplo:

Una persona desea depositar una cantidad en una Sociedad Nacional de Crédito que ofrece una tasa nominal del 18% convertible trimestralmente. a) ¿Qué cantidad deberá depositarse si desea una renta trimestral de $150,000.00 a partir del próximo trimestre y en forma indefinida?. b)

¿Qué renta recibirá si únicamente dispone de $1'500,000.00 para depositar?

a) $R = 150,00$ $\qquad$ $A = R\,a_{\overline{\infty}|} = \frac{R}{j}$

$j = .045$

$A = ?$ $\qquad$ $= \frac{150,000}{.045}$

$= \$3'333,333.33$

b) $j = .045$ $\qquad$ $R = A(j)$

$R = ?$ $\qquad$ $= 1'500,000\ (.045)$

$A = 1'500,000$ $\qquad$ $= \$67,500$

## 3. ANUALIDADES CRECIENTES Y DECRECIENTES EN SUCESION ARITMETICA.

En muchas ocasiones las posibilidades de pago de la parte deudora de una transacción financiera no permiten pactar el pago de la deuda mediante una anualidad de monto constante. Por ello resulta de gran interés el estudio de anualidades cuya renta periódica sea creciente o decreciente de manera que pueda ajustarse a las posibilidades del deudor. Dentro de las anualidades crecientes o decrecientes las más comúnmente empleadas son aquéllas que forman una sucesión aritmética.

Considérese que se tiene una anualidad formada por n pagos cuyos montos son: P, (P+Q), (P+2Q),..., (P+(n-1)Q). Si se designa al valor presente con la letra X y se considera una tasa efectiva de interés por periodo j, entonces:

$$X = PV + (P+Q)V^2 + (P+2Q)V^3 + \ldots + (P+(n-1)Q)V^n$$

Multiplicando la ecuación anterior por (1+j):

$$(1+j)X = P + (P+Q)V + (P+2Q)V^2 + \ldots + (P+(n-1)Q)V^{n-1}$$

Restando ambas ecuaciones:

$$jX = P+QV+QV^2+\ldots+ QV^{n-1}-PV^n-(n-1)QV^n$$

$$jX = P+Qa_{\overline{n}|} - PV^n - n\,QV^n$$

$$jX = P(1-V^n) + Q\,(a_{\overline{n}|} - n\,V^n)$$

$$X = \frac{P(1-V^n) + Q\,(a_{\overline{n}|} - n\,V^n)}{j}$$

$$X = P\frac{(1-V^n)}{j} + Q\,\frac{(a_{\overline{n}|} - nV^n)}{j}$$

$$X = Pa_{\overline{n}|} + Q\,\frac{(a_{\overline{n}|} - nV^n)}{j} \qquad \text{(VII.4)}$$

Ejemplos:

1) **Calcular el valor presente de una acción cuyos dividendos durante los próximos 25 años se calcula que serán de montos: \$32, \$33, \$34,... Suponer que el inversionista desea un rendimiento anual efectivo del 24%.**

$n = 25 \qquad X = Pa_{\overline{n}|} + Q\dfrac{(a_{\overline{n}|} - nV^n)}{j}$

$j = .24$

$Q = 1 \qquad = 32\,a_{\overline{25}|\,.24} + \dfrac{1(a_{\overline{25}|\,.24} - 25\,V^{25})}{.24}$

$P = 32$

$X = ? \qquad = 32(4.14742) + \dfrac{(4.14742 - 25(.004618))}{.24}$

$X = 149.5174$

2) **Calcular durante cuánto tiempo será necesario pagar anualidades crecientes para extinguir un adeudo de \$1'800,000.00 si el primer pago es -**

de \$300,000.00, el segundo de \$330,000.00, etc. La tasa anual efectiva es del 20%.

$X = 1'800,000$ $\qquad X = P a_{\overline{n}|} + \dfrac{Q(a_{\overline{n}|} - nV^n)}{j}$

$P = 300,000$

$Q = 30,000$ $\qquad 1'800,000 = 300,000 \dfrac{(1-V^n)}{.20} + \dfrac{30,000}{.20}$

$$\frac{(1-V^n/.20 - nV^n)}{.20}$$

$n = ?$ $\qquad 180 = \dfrac{30(1-V^n)}{.20} + \dfrac{3(1-V^n/.20-nV^n)}{.20}$

$j = .20$

$$180 = 150(1-V^n) + 15\left(\frac{1-V^n}{.2} - nV^n\right)$$

$$180 = 150(1-V^n) + \frac{15}{.2}(1-V^n) - 15nV^n$$

$$180 = 150(1-V^n) + 75(1-V^n) - 15nV^n$$

$$180 = 150 - 150V^n + 75-75V^n-15nV^n$$

$$45 = V^n(225 + 15n)$$

$$45 = (.8333)^n\ (225+15n)$$

Interpolando:

$n_1 = 12$ $\qquad f(n_1) = 45.4234$

$n = ?$ $\qquad f(n) = 45$

$n_2 = 13$ $\qquad f(n_2) = 39.2548$

$$n = \frac{(n_2-n_1)(f(n) - f(n_1))}{f(n_2) - f(n_1)} + n_1$$

$$n = \frac{(13-12)(45-45.4234)}{39.2548 - 45.4234} + 12$$

$$n = 12.0686$$

La ecuación representa una expresión de una anualidad creciente en forma aritmética cuyo primer término es de monto P y cuya diferencia constante es de monto Q. Si se hace P = Q = 1, se obtiene una anualidad creciente ordinaria que se representa por: $Ia_{\overline{n}|}$ y cuyo valor presente será:

$$X = Ia_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - nV^n}{j}$$

$$= \frac{1-V^n}{j} + \frac{a_{\overline{n}|} - nV^n}{j}$$

$$= \frac{1-V^n + a_{\overline{n}|} - nV^n}{j}$$

$$= \frac{(a_{\overline{n}|} - V^n) + (1-nV^n)}{j}$$

$$Ia_{\overline{n}|} = \frac{a_{\overline{n-1}|} + 1-nV^n}{j} \qquad \text{(VII.4)}$$

Si se hace P = n y Q = -1, se tendrá una anualidad decreciente ordinaria aritmética cuyo símbolo es $Da_{\overline{n}|}$ y cuyo valor presente queda expresado por:

$$Da_{\overline{n}|} = na_{\overline{n}|} - \frac{(a_{\overline{n}|} - nV^n)}{j}$$

$$= \frac{jna_{\overline{n}|} - a_{\overline{n}|} + nV^n}{j}$$

$$= \frac{jn(1-V^n)/j - a_{\overline{n}|} + nV^n}{j}$$

$$= \frac{n-nV^n - a_{\overline{n}|} + nV^n}{j}$$

$$Da_{\overline{n}|} = \frac{n - a_{\overline{n}|}}{j} \qquad \text{(VII.5)}$$

Ejemplos:

1) Calcular el valor presente de un documento con 20 cupones, el primero de los cuales vence dentro de 1 año y prevee un pago de $120,000.00 con los sucesivos, decreciendo con una diferencia constante de $6,000.00. Suponer una tasa de interés efectiva del 19% anual.

$A = ?$

$Q = 6{,}000$

$n = 20$

$j = .19$

$$A = QDa_{\overline{n}|}$$

$$= \frac{Q(n - a_{\overline{n}|})}{j}$$

$$= 6{,}000\ \frac{(20 - a_{\overline{20}|}\ .19)}{.19}$$

$$= \frac{89{,}394.82716}{.19}$$

$$A = 470{,}499.09$$

2) Calcular qué cantidad P es necesario empezar a pagar y qué cantidad Q se irá disminuyendo para liquidar una deuda cuyo valor presente es de $742,138.60. Si j=20% anual y se desea terminar en 30 años mediante pagos decrecientes en forma aritmética de manera que el último sea igual a P/30.

$A = 742{,}138.60$

$P = ?$

$Q = ?$

$j = .20$

$n = 30$

$$A = \frac{Q(n - a_{\overline{n}|})}{j}$$

$$742{,}138.60 = \frac{Q(30 - a_{\overline{30}|}\ .20)}{.20}$$

$$\frac{742{,}138.60\ (.20)}{30 - a_{\overline{30}|}} = Q$$

$$\frac{148{,}427.72}{30 - 4.978936} = Q$$

$$Q = 5932.11$$

## 4. VALOR PRESENTE DE ANUALIDADES CRECIENTES O DECRECIENTES GEOMETRICAMENTE.

Aunque empleadas en muy raras ocasiones, las anualidades crecientes o decrecientes con los pagos formando una sucesión geométrica son de particular interés porque sus expresiones matemáticas se simplifican desde los primeros pasos de su análisis.

Valor presente de una anualidad creciente o decreciente geométricamente con un número de pagos "n" finito.-

Considérese que se tiene una anualidad formada por n pagos cuyos montos son: $PV$, $PrV^2$, $Pr^2V^3$, ..., $Pr^{n-1}V^n$. Si se designa con la letra A al valor presente y con r a la razón constante entre cada pago, se tiene:

$$A = PV + PrV^2 + Pr^2V^3 + \dots + Pr^{n-2}V^{n-1} + Pr^{n-1}V^n$$

Puede observarse que la expresión anterior es una serie geométrica para la cual la razón es rV y el primer término es PV, entonces:

$$A = \frac{PV(1-r^nV^n)}{1-rV} \qquad \text{(VII.6)}$$

Ejemplos:

1) Calcular el valor presente de una pensión con duración de 15 años que se paga mediante un pago anual vencido creciente geométricamente al 20%. Si el primer pago es de $200,000.00 y la tasa anual efectiva es del 28%.

$P = 200,000$

$$A = \frac{PV(1-r^nV^n)}{1-rV}$$

$r = 1.20$

$n = 15$

$i = .28$

$$= \frac{200{,}000 \left(\frac{1}{1.28}\right)\left(1-(1.20)^{15}\left(\frac{1}{1.28}\right)^{15}\right)}{1-(1.20)\left(\frac{1}{1.28}\right)}$$

$$= \frac{(156{,}250)(.620187594)}{.0625}$$

$A = \$1'550{,}468.985$

2) Calcular el valor presente de una pensión con duración de 15 años que se paga mediante un pago anual vencido creciente geométricamnete un 10% cada año, si el primer pago es de \$200,000.00 y la tasa de interés anual efectiva es del 28%.

$P = 200{,}000$

$n = 15$

$r = 1.1$

$i = 0.28$

$$A = \frac{PV(1-r^n V^n)}{1-rV}$$

$$= \frac{200{,}000\left(\frac{1}{1.28}\right)\left(1-(1.1)^{15}\left(\frac{1}{1.28}\right)^{15}\right)}{1-(1.1)\left(\frac{1}{1.28}\right)}$$

$$= \frac{(156{,}250)(0.897023)}{.140625}$$

$A = 996{,}692.09$

Valor presente de una anualidad creciente o decreciente geométricamente cuyo número de pagos es infinito.

La serie geométrica representada por la ecuación converge cuando $n \to \infty$ si y sólo si la razón cumple:

$$-1 < rV < 1$$

Ello implica que la tasa de interés efectiva por periodo de pago debe de ser mayor que la tasa con la cual se incrementan los pagos.

$$\lim_{n \to \infty} A = \frac{PV}{1-rV} \qquad (VII.7)$$

Ejemplos:

1) Encontrar el valor presente de una perpetuidad cuyo primer pago anual es de $500,000.00 crecientes al 25% anual, si la tasa de interés es del 45% anual efectivo.

$$\lim_{n \to \infty} A = \frac{500{,}000\left(\frac{1}{1.45}\right)}{1-(1.25)\left(\frac{1}{1.45}\right)}$$

Primero se analiza si $|rv| < 1$ porque de otra manera la serie diverge:

$$rV = \frac{1.25}{1.45} = 0.862068966 < 1$$

La serie converge.

$$A = \frac{500{,}000\left(\frac{1}{1.45}\right)}{1-.86\,2068966}$$

$$= 2'500{,}000$$

2) Calcular el valor presente de una perpetuidad cuyo primer pago es de \$500,000.00 con pagos crecientes al 50% anual si la tasa de interés es del 11% trimestral efectivo.

$P = 500{,}000$ $\qquad$ $1+i = (1+j)^m$

$j = 11\%$ trimestral $\qquad$ $i = (1.11)^4 - 1$

$r = 1.5$ anual $\qquad$ $i = .51807041$

$$rV = (1.5)\left(\frac{1}{1.51807041}\right)$$

$$= 0.9880965$$

Si rV fuere $\geqslant 1$, el valor presente de la perpetuidad diverge o sea, que tiene un valor infinito.

$$\lim_{n \to \infty} A = \frac{500{,}000\left(\dfrac{1}{1.51807041}\right)}{1-(1.5)\left(\dfrac{1}{1.51807041}\right)}$$

$$\lim_{n \to \infty} A = \frac{329{,}365.4871}{0.011903539}$$

$$\lim_{n \to \infty} A = \$27'669{,}543.71$$

Monto acumulado final de una anualidad creciente o decreciente geométricamente y cuyo número de pagos es finito.

Considérese que se tiene una anualidad formada por n pagos cuyos montos son: $P(1+j)^{n-1}, Pr(1+j)^{n-2}, Pr^2(1+j)^{n-3}, \ldots, Pr^{n-2}(1+j), Pr^{n-1}$. Si se designa por S al monto acumulado final se tiene:

$$S = P(1+j)^{n-1} + Pr(1+j)^{n-2} + Pr^2(1+j)^{n-3} + \ldots + Pr^{n-2}(1+j) + Pr^{n-1}$$

Puede observarse que la expresión anterior es una serie geométrica cuya razón es rV y cuyo primer término es: $P(1+j)^{n-1}$, entonces:

$$S = \frac{P(1+j)^{n-1}\ (1-r^nV^n)}{(1-rV)} \qquad \text{(VII.8)}$$

De las fórmulas(VI.7), pueden verificarse las siguientes relaciones:

$S = A(1+j)^n$

$A = S\ Vj^n$

Ejemplo:

¿Cuánto dinero se acumulará en una cuenta de banco que paga el 10% trimestral efectivo si se depositan $1,000.00 al final del primer trimestre, $2,000.00 al final del segundo trimestre y así sucesivamente durante 4 años?.

Nota: Si las anualidades de las que se trata son anticipadas, se puede separar el primer pago del análisis, entonces calcular del segundo al último pago como una anualidad ordinaria, pero con (n-1) pagos, y por separado calcular el valor presente o monto acumulado del primer pago y al final sumarlo al valor presente o monto acumulado de los demás.

$P = 1,000$

$r = 2$

$j = 10\%$ trim.

$n = 16$

$$S = \frac{P(1+j)^{n-1}\ (1-r^nV^n)}{(1-rV)}$$

$$= \frac{1,000(1+.10)^{15}(1-(2)^{16}\left(\frac{1}{1.10}\right)^{16})}{1-2\left(\frac{1}{1.10}\right)}$$

$$= \frac{(4,177,248)(-14,261.543)}{-.8181818}$$

$= \$72,812,670.69$

## 5. ANUALIDADES VALUADAS CON TASAS NOMINALES DE INTERES.

En muchos problemas de anualidades o de amortización con pago total constante ocurre que la frecuencia con que se deben efectuar los pagos (P), es diferente de la frecuencia con que la tasa de interés es convertible (m).

El problema puede ser resuelto transformando la tasa de interés efectiva original($j_1$) en otra tasa efectiva ($j_2$) cuya frecuencia de convertibilidad sea P y que sea financieramente equivalente a la anterior.

Sea R el monto periódico de que consta una anualidad ordinaria cuya perioricidad es P veces al año. Sea $i^{(m)}$ la tasa anual nominal de interés convertible m veces al año, entonces caben 4 posibilidades:

$\alpha$) $m = p$

$\beta$) $m > p$ con $m = kp$ donde k es un entero positivo

$\gamma$) $m < p$ con $p = km$ donde k es un entero positivo

$\delta$) $\left.\begin{array}{l} m > p \\ m < p \end{array}\right\}$ pero sin relación entera entre ambas frecuencias.

$\alpha$) En el caso de que la convertibilidad de la tasa ocurra con la misma frecuencia que aquélla con la que deberán hacerse los pagos que constituyen la anualidad, deberá escogerse como periodo básico aquél que separa dos pagos consecutivos.

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{p}$$

Este caso es simplemente una generalización del caso anual con una tasa anual efectiva, es decir (m=p=1). Como tasa efectiva por periodo deberá seleccionarse:

$$j = \frac{i^{(m)}}{m}$$

Ejemplo:

Determinar el valor presente y el monto de una serie de pagos trimestrales, cada uno de los cuales es de \$45,000.00 pagándose durante 15 años a la tasa anual nominal convertible trimestralmente del 16%.

R = 45,000
n = 60
j = .04

$A = R\,a_{\overline{n}|}\,j$
$= 45{,}000\,a_{\overline{60}|}\,.04$
$= 45{,}000\,(22.62349)$
$= 1'018{,}057.05$

$S = R\,s_{\overline{n}|}\,j$
$= 45{,}000\,s_{\overline{60}|}\,.04$
$= 45{,}000\,(237.9906853)$
$= 10'709{,}580.84$

β) En el caso de que la convertibilidad de la tasa ocurra con mayor frecuencia que aquélla de los pagos, es decir $(m > P)$, y que además haya una relación entera entre m y p de tal manera que un número exacto de periodos base de la convertibilidad constituya un periodo base de los pagos; lo que más conviene es elegir el periodo de los pagos como periodo básico del problema y obtener la tasa efectiva por periodo equivalente a la tasa original de la siguiente manera:

$$(1+j) = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{K}$$

donde:

$k = m/p$

Ejemplo:
Calcular el valor presente y el monto final de una anualidad que consta de pagos trimestrales de \$50,000.00 cada uno durante 3 años, si la tasa es del 15% anual convertible mensualmente.

$R = 50{,}000$ $\qquad (1+j) = (1+\frac{i^{(m)}}{m})^K$

$m = 12$

$p = 4$ $\qquad 1+j = (1+\frac{.15}{12})^3$

$K = 3$

$i = 15\%$ $\qquad j = 1.0379707 - 1$

$j = 3.79707\%$ $\qquad = .0379707$

$$A = R\,a_{\overline{n}|}\,j$$
$$= 50{,}000\,a_{\overline{12}|}.0379707$$
$$= 50{,}000\,(9.4965543)$$
$$= 474{,}827.71$$
$$S = R\,s_{\overline{n}|}\,j = R\,a_{\overline{n}|}\,j\,(1+j)^n$$
$$= 50{,}000\,(a_{\overline{12}|}.0379707)(1+.0379707)^{12}$$
$$= 50{,}000\,(9.4965543)(1.563938)$$
$$= 742{,}603.87$$

$\gamma$) En el caso de que los pagos que constituyen la anualidad deban hacerse con mayor frecuencia que aquélla con que la tasa de interés se convierte, es decir ($m < p$) y que además exista una relación entera entre p y m, convendrá obtener una tasa de interés efectiva de frecuencia p, equivalente a la tasa de interés nominal convertible m veces y hecho ésto, tomar como periodo básico el lapso que separa 2 pagos consecutivos.

Para la conversión de la tasa se utiliza la misma fórmula tratada en el inciso anterior.

Ejemplos:

1) ¿Qué cantidad será necesario depositar en una institución financiera para asegurar obtener una renta mensual de \$12,000.00 durante 5 años, si la tasa de interés es del 18% anual convertible trimestralmente?

$R = 12,000$ $\qquad (1+j) = (1+\frac{i^{(m)}}{m})$

$i = .18$ $\qquad 1+j = (1+\frac{.18}{4})1/3$

$m = 4$

$p = 12$ $\qquad j = 1.0147805-1$

$k = 1/3$

$j = 1.47805\%$ $\qquad = ..0147805$

$$A = R\,a_{\overline{n}|j}$$
$$= 12,000\,a_{\overline{60}|}\,.0147805$$
$$= 12,000(39.6034407)$$
$$= 475,241.29$$

2) a) Durante cuánto tiempo podrá recibirse una renta mensual de \$15,000.00 a partir de un capital inicial de \$600,000.00, si la tasa nominal convertible bimestralmente es del 18% anual?

b) Suponer que después de n pagos enteros de: - - \$15,000.00 cada uno, se efectúa un pago incompleto cuyo monto es W un mes después, al final del (n+1)-ésimo mes. Determinar el monto de W.

$R = 15{,}000$ $\qquad\qquad$ $(1+j) = (1+ \frac{i^{(m)}}{m})^{K}$

$A = 600{,}000$ $\qquad\qquad$ $1+j = (1+\frac{.18}{6})^{\frac{1}{2}}$

$m = 6$

$p = 12$

$i = .18$ $\qquad\qquad$ $j = 1.01489-1$

$j = .01489$ $\qquad\qquad$ $= .01489$

$$A = R\, a_{\overline{n}|\, j}$$

$$600{,}000 = 15{,}000\frac{(1-v^{n})}{j}$$

$$\frac{600{,}000}{15{,}000}(.01489) = 1-V^{n}$$

$$40\ (.01489) = 1 - V^{n}$$

$$.59556628 = 1 - V^{n}$$

$$V^{n} = .40443372$$

como $V = \frac{1}{1+i}$, $(1+i)^{n} = \frac{1}{.40443372}$

$$(1.01489)^{n} = 2.472593037$$

$$n\ln\ (1.01489) = \ln\ 2.472593037$$

$$n = \frac{0.905267413}{0.014780232}$$

$$= 61.24852423$$

b) $\quad A' = 15{,}000\ \frac{(1 - V^{61})}{.01489}$

$$= 598{,}466.72$$

$$A - A' = 600{,}000 - 598{,}466.72$$
$$= 1{,}533.28$$
$$W = 1{,}533.28\,(1+j)^{62}$$
$$= 1{,}533.28\,(1+.01489)^{62}$$
$$= 3{,}833.52$$

$\delta$) En el caso de que la frecuencia con que la tasa de interés nominal se convierta y la frecuencia con que se deben efecturar los pagos sean diferentes, ($m \neq p$) y además no exista ninguna relación entera entre una y otra, se tienen 2 opciones:

- Obtener la tasa de interés efectiva por periodo equivalente a la tasa original $i^{(m)}$ y una vez hecho ésto, utilizar como periodo básico el intervalo comprendido entre 2 pagos consecutivos.

- Acumular una cantidad predeterminada de pagos (aunque no sea entera) en cada fecha de convertibilidad de la tasa y hecho ésto, proceder a la evaluación.

Ejemplos:

1) Calcular el monto final que se acumulará al cabo de 8 años si se depositan $24,000.00 bimestralmente a la tasa de interés anual convertible trimestralmente del 16%.

$R = 24{,}000$ $\qquad (1+j) = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^K$

$m = 4$

$p = 6$ $\qquad 1+j = \left(1+\frac{.16}{4}\right)^{2/3}$

$i^{(m)} = .16$ $\qquad 1+j = 1.026491978$

$j = 2.6491978\%$ $\qquad j = .026491978$

$$S = R\, S_{\overline{n}|}\, j$$

$$= 24{,}000 \frac{(1+.026491978)^{48}-1)}{.026491978}$$

$$= 24{,}000\ (94.67238803)$$

$$= 2{,}272{,}137.31$$

2) Calcular durante cuánto tiempo alcanzará un capital inicial de \$1'000,000.00 a proporcionar una renta bimestral de \$40,000.00 si la tasa anual convertible trimestralmente es del 16%. Obtener el pago roto que deberá hacerse al término del (n +1) -ésimo trimestre.

$A = 1'000{,}000$
$R = 40{,}000$
$i = 16\%$

$m = 4$
$p = 6$
$K = 2/3$

$$(1+j) = (1+\frac{i^{(m)}}{m})^{K}$$

$$j = (1+\frac{.16}{4})^{2/3}$$

$$j = 1.026491978-1$$

$$j = .026491978$$

$$A = R\, a_{\overline{n}|}\, j = R\ \frac{(1-V^{n})}{j}$$

$$1'000{,}000 = \frac{40{,}000\ (1-V^{n})}{.026491978}$$

$$\frac{1'000{,}000}{40{,}000}\ (.026491978) = 1-V^{n}$$

$$25(.026491978) = 1-V^{n}$$

$$.66229945 = 1-V^{n}$$

$$V^{n} = 1-.66229945$$

$$V^{n} = .33770055$$

Como $V = \frac{1}{1+i}$

$$(1+i)^{n} = \frac{1}{.33770055}$$

$$(1.026491978)^n = 2.96120335$$

$$n\ln(1.026491978) = \ln 2.96120335$$

$$n = \frac{1.085595723}{0.026147143}$$

$$= 41.51871362$$

$$A' = 40{,}000 \left(\frac{1-V^{41}}{.026491978}\right)$$

$$= 993{,}037.30$$

$$-A-A' = 1'000{,}000 - 993{,}037.30$$

$$= 6{,}962.70$$

$$W = 6{,}962.70\,(1+j)^{42}$$

$$= 6{,}962.70\,(1.026491978)^{42}$$

$$= 20{,}879.07$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Una constructora desea un crédito a largo plazo - para financiar parcialmente la construcción de un edificio. Un banco ofrece financiar el proyecto otorgando un periodo de gracia de 4 años y recuperando el capital desde el 5o. año hasta el 12o. inclusive. Si la tasa es del 20% anual convertible trimestralmente y la compañía pagará como máximo $7'000,000.00 trimestrales; encontrar cuál es el mayor crédito que puede otorgársele.

2.- Una compañía se compromete a pagar pagos crecientes en forma geométrica cuya razón será compuesta por un - 3% anual de crecimiento real y un 15% anual para compensar la inflación. Si la tasa de interés es del 21% anual efectivo y el primer pago es de $375,000.00, construir una función que describa la perpetuidad y calcular el valor presente del conjunto de las obligaciones durante los primeros 10 años.

3.- Calcular el valor presente de una deuda, si la tasa anual efectiva es del 25% y los pagos son de $600,000.00, $640,000.00 y $680,000.00 y así sucesivamente durante 27 - años.

4.- Calcular qué pago inicial P será necesario hacer y en qué cantidad Q será posible disminuirlo para liquidar un adeudo de $1'000,000.00 en 40 pagos semestrales si la tasa de interés es del 21% anual efectivo y se desea que los pagos formen una serie aritmética con $Q = \frac{-P}{100}$.

5.- Calcular el valor presente de una pensión cuya duración es de 20 años y se paga mediante un pago anual vencido creciente geométricamente al 23%. El primer pago es de

$350,000.00 y la tasa de interés anual efectiva es del 29%.

6.- Calcular el valor presente de una perpetuidad cuyo primer pago anual es de $851,000.00 crecientes al 30% -- anual, si la tasa de interés es del 47% anual efectivo.

7.- ¿Cuánto dinero se acumulará en una cuenta bancaria si se depositan $2,000.00 al final del primer semestre, $5,000.00 al final del segundo semestre y así sucesivamente durante 5 años? La tasa de interés es del 21% semestral -- efectivo.

8.- Calcular el valor presente y el monto futuro de - una serie de pagos anuales, cada uno de los cuales es de - $275,000.00, pagándose durante 17 años a la tasa anual del 45%.

9.- Calcular el valor presente y el monto final de -- una anualidad que consta de pagos bimestrales de $100,000.00 cada uno, durante 4 años, si la tasa de interés es del 16% anual convertible mensualmente.

10.- Calcular durante cuánto tiempo podrá proporcionar un capital inicial de $2'500,000.00 una renta bimestral de $80,000.00 si la tasa de interés es del 18% anual convertible trimestralmente. Encontrar el pago roto que deberá hacerse al término del (n+i) -ésimo trimestre.

# VIII. AMORTIZACION.

## 1. DEFINICION.

La expresión amortizar se utiliza para denominar un proceso financiero mediante el cual se liquida una deuda por medio de pagos periódicos que contienen una parte del capital y otra de intereses, de tal manera que en el plazo previsto la deuda quede saldada.

Se conocen dos tipos fundamentales de métodos regulares de amortización:

- Pago constante.
- Abono a capital constante.

Las demás formas son consideradas amoritzaciones irregulares o híbridas.

A continuación se presentan las definiciones de los términos utilizados en el capítulo:

+ Saldo insoluto ($SI_{(t)}$): es la parte del capital que permanece como deuda al final de cada periodo, una vez cubiertos los pagos cuyos vencimientos son anteriores o iguales.

+ Pago total (PT): es el monto total que debe exhibirse al final de cada periodo. Se descompone en abono a capital e intereses.

+ Intereses ($I_{(t)}$): son los montos diferentes que resultan de aplicar la tasa de interés efectiva por periodo a los saldos insolutos del periodo anterior.

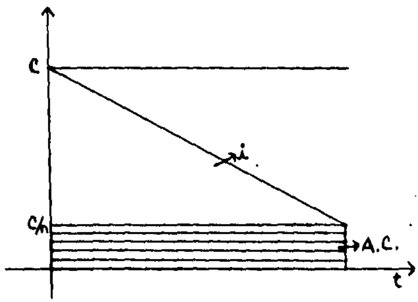
+ Abono a capital ($AC_{(t)}$): es la cantidad que resta de cada pago una vez descontados los intereses. El saldo insoluto anterior disminuye en una cantidad igual para dar el saldo insoluto final del periodo.

## 2. METODOS DE AMORTIZACION REGULARES.

a) Método de abono a capital constante.

En este método se abona un n-ésimo del capital (c/n) en cada pago, calculándose además los intereses sobre el saldo insoluto (al principio del periodo) a la tasa de interés efectiva por periodo (j). Esto produce un pago decreciente en serie aritmética o en línea recta, ya que los intereses se pagan sobre saldos que decrecen en la misma forma.

Gráfica:




Como en este caso el abono a capital es constante, su valor se obtiene dividiendo el capital inicial entre el número de periodos en que se va a amortizar la deuda:

$$AC = \frac{C}{n} \qquad \text{(VIII.1)}$$

El saldo insoluto en el primer periodo es lo mismo que el capital inicial:

$$SI_{(0)} = C \qquad \text{(VIII.2)}$$

Así como para obtener el saldo insoluto en el último periodo, se sigue:

$$SI_{(n)} = SI_{(n-1)} - AC_{(n)} = 0 \qquad \text{(VIII.3)}$$

Para el cálculo de los intereses y del pago total se utilizan las siguientes fórmulas:

$$I_{(n)} = j(SI_{(n-1)}) \qquad (VIII.4)$$

$$PT_{(1)} = \frac{C}{n} + jC = \frac{C+jnC}{n}$$

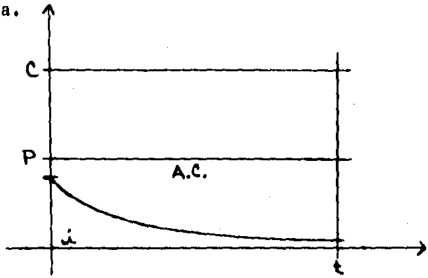
$$PT_{(n)} = \frac{C}{n} + j\left(\frac{C}{n}\right) = (1+j)\frac{C}{n} \qquad (VIII.5)$$

b) Método de pago total constante:

El método de amortización descrito en el inciso anterior, tiene el inconveniente para el deudor de que los primeros pagos son considerablemente más elevados que los últimos, produciendo un desfinanciamiento del deudor a corto plazo.

El problema anterior puede salvarse mediante la amortización con pago total constante, ya que este concepto es inverso a un problema de valor presente de una anualidad.

Gráfica.




Como en este caso el pago periódico total es constante, su valor se obtiene a partir de la siguiente relación:

$$C = Pa_{\overline{n}|j}$$

$$P = \frac{C}{a_{\overline{n}|j}} = Ca^{-1}_{\overline{n}|j} \qquad (VIII.6)$$

Debido a que el saldo insoluto decrece en forma geométrica en este método, los intereses también lo hacen y siguen siendo válidas las siguientes fórmulas:

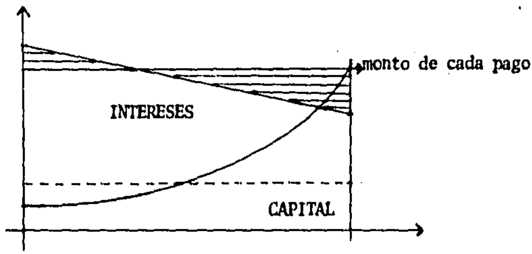
$$I_{(n)} = j(SI_{(n-1)})$$

$$SI_{(n)} = SI_{(n-1)} - AC_{(n)}$$

$$AC_{(n)} = PT_{(n)} - I_{(n)}$$

Comparando este método con el anterior puede observarse que la suma total pagada por el deudor es ligeramente mayor por los intereses de la parte desplazada.

Gráfica:




La suma de los intereses pagados en los dos métodos no es igual, sino que en el segundo se pagan más intereses porque el adeudo promedio es más alto, ya que el capital se paga más lentamente al principio; en cambio la suma de los abonos a capital en ambos métodos si es la misma.

Cabe aclarar que ambos métodos son financieramente equivalentes y que en ambos, los intereses están correctamente calculados a la misma tasa efectiva por periodo. El hecho de que se paguen más intereses en el método de pago constante es el precio de que los primeros pagos sean menos pesados.

## 3. TABLAS DE AMORTIZACION.

Para efectos del registro contable tanto del acreedor como del deudor es necesario descomponer cada pago de una amortización entre abono a capital e intereses.

La descomposición anterior suele presentarse en forma de una tabla llamada "tabla de amortización", la cual generalmente contiene información adicional que se considera relevante como el saldo insoluto de la deuda al principio del periodo o después del pago o ambos. Por último, también es frecuente mostrar las sumas aritméticas de las diferentes columnas de la información presentada en la tabla. Cabe aclarar que para cada método de amortización de un adeudo puede calcularse su correspondiente tabla.

a) Tablas de amortización bajo el método de abono a capital constante (pago decreciente en forma aritmética).

| t | S.I.(t-1) | I(t) | A.C.(t) | P(t) | S.I.(t) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | C | jC | C/n | $\frac{c}{n}$ + jC | C-c/n |
| 2 | c-c/n | jC-jc/n | C/n | $\frac{c}{n}$ + jC- $\frac{jC}{n}$ | C-2c/n |
| 3 | c-2c/n | jC-2jc/n | C/n | $\frac{c}{n}$ + JC- $\frac{2jC}{n}$ | C-3c/n |
| 4 | c-3c/n | jC-3jc/n | C/n | $\frac{c}{n}$ + JC - $\frac{3jC}{n}$ | C-4c/n |
| 5 | c-4c/n | jC-4jc/n | C/n | $\frac{c}{n}$ + jC-$\frac{4jC}{n}$ | C-5c/n |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| t | c-(t-1)c/n | jC- $\frac{j(t-1)C}{n}$ | C/n | $\frac{c}{n}$ + JC- $\frac{j(t-1)C}{n}$ | C-tc/n |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| n-1 | 2c/n | 2jC/n | C/n | $\frac{c}{n}$ + $\frac{2jC}{n}$ | c/n |
| n | c/n | jC/n | C/n | $\frac{c}{n}$ + $\frac{jC}{n}$ | 0 |
| $\Sigma$ | $\frac{C(n+1)}{2}$ * | $\frac{jC(n+1)}{2}$ | C | C+$\frac{jC(n+1)}{2}$ | $\frac{nC-C}{2}$ ** |

Para el renglón de totales conviene recordar que varias columnas forman series aritméticas:

$$* \quad \frac{(n)}{2}\left(C+\frac{C}{n}\right) = \frac{(\cancel{n})}{2}\,\frac{(nC+C)}{\cancel{n}} = \frac{nC+C}{2} = \frac{C(n+1)}{2}$$

$$** \quad \frac{n(C-C/n+0)}{2} = \frac{nC-C}{2} = \frac{(n-1)C}{2}$$

Como la última columna repite la primera con desfasamiento de un periodo, es muy común eleminar una de las dos columnas de saldo insoluto (generalmente la última), presentando solamnente la tabla de amortización reducida.

Ejemplo:

Construir la tabla de amortización completa para un deudor que pide $240,000.00 a pagar mediante 6 mensualidades según el método de amortización con abono a capital constante si la tasa de interés mensual efectiva es del 4%

C = 240,000 n=6 j=.04

| t | SALDO INSOLUTO AL PRINCIPIO. | INTERESES J | ABONO A CAPITAL. | PAGO TOTAL | SALDO INSOLUTO DESPUES DEL PAGO. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 240,000 | 9,600 | 40,000 | 49,600 | 200,000 |
| 2 | 200,00 | 8,000 | 40,000 | 48,000 | 160,000 |
| 3 | 160,000 | 6,400 | 40,000 | 46,400 | 120,000 |
| 4 | 120,000 | 4,800 | 40,000 | 44,800 | 80,000 |
| 5 | 80,000 | 3,200 | 40,000 | 43,200 | 40,000 |
| 6 | 40,000 | 1,600 | 40,000 | 41,600 | -0- |
| Σ | 840,000 | 33,600 | 240,000 | 273,600 | 600,000 |

b) Tabla de amortización bajo el método de pago total - constante (abono a capital creciente en serie geométrica).

| $t$ | SALDO INSOLUTO AL PRINCIPIO | INTERESES $j$ | ABONO A CAPITAL | PAGO TOTAL | SALDO INSOLUTO DESPUES DEL PAGO. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $C$ | $P(1-V^{n})$ | $PV^{n}$ | $P$ | $Pa_{\overline{n-1}\rceil j}$ |
| 2 | $Pa_{\overline{n-1}\rceil j}$ | $P(1-V^{n-1})$ | $PV^{n-1}$ | $P$ | $Pa_{\overline{n-2}\rceil j}$ |
| 3 | $Pa_{\overline{n-2}\rceil j}$ | $P(1-V^{n-2})$ | $PV^{n-2}$ | $P$ | $Pa_{\overline{n-3}\rceil j}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $t$ | $Pa_{\overline{n-t+1}\rceil j}$ | $P(1-V^{n-t+1})$ | $PV^{n-t+1}$ | $P$ | $Pa_{\overline{n-t}\rceil j}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n-1$ | $Pa_{\overline{2}\rceil j}$ | $P(1-V^{2})$ | $PV^{2}$ | $P$ | $PVj$ |
| $n$ | $P\,Vj$ | $P(1-V)$ | $PV$ | $P$ | 0 |
| $\sum$ | $\frac{nP-C}{j}$ | $nP-C$ | $C$ | $nP$ | $\frac{nP-C}{j} - C$ |

Conviene recordar las siguientes ecuaciones para la compresión de las fórmulas contenidas en la tabla anterior:

$$P = \frac{C}{a_{\overline{n}\rceil j}}$$

$$SI_{(t)} = Pa_{\overline{n-t}\rceil j} = \frac{C\,a_{\overline{n-t}\rceil j}}{a_{\overline{n}\rceil j}}$$

Porque el saldo insoluto debe ser cubierto con el valor presente de los pagos que faltan por cubrir.

$$I_{(t)} = j\ (SI_{t-1}) = j(Pa_{\overline{n+1-t}\rceil j})$$

$$I_{(t)} = \frac{j(C\,a_{\overline{n+1-t}\rceil j})}{a_{\overline{n}\rceil j}}$$

$$I_{(t)} = \frac{jP(1-V^{n+1-t})}{j}$$

$$\therefore\ I_{(t)} = P(1-V^{n+1-t})$$

$$AC_{(t)} = P-I_{(t)}$$

$$AC_{(t)} = P - P(1-V^{n+1-t})$$

$$AC_{(t)} = P(1-1+V^{n+1-t})$$

$$\therefore\ AC_{(t)} = P(V^{n+1-t})$$

Ejemplo:

Calcular el pago mensual constante que amortizará una deuda de $240,000.00 en 6 mensualidades iguales, si - la tasa de interés mensual efectiva es del 4%. Construir la tabla de amortización completa.

$C = 240,000$

$n = 6$

$j = .04$

$$P = \frac{C}{a_{\overline{n|}\,j}}$$

$$P = \frac{240,000}{5.242136857}$$

$$P = 45,782.8566$$

| t | S.I.(t-1) | I(t) | A.C.(t) | P(t) | S.I.(t) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 240,000.00 | 9,600.00 | 36,182.8566 | 45,782.8566 | 203,817.1434 |
| 2 | 203,817.1434 | 8,152.6857 | 37,630.1709 | 45,782.8566 | 166,186.9725 |
| 3 | 166,186.9725 | 6,647.4789 | 39,135.3777 | 45,782.8566 | 127,051.5998 |
| 4 | 127,051.5948 | 5,082.0638 | 40,700.7928 | 45,782.8566 | 86,350.8020 |
| 5 | 86,350.8020 | 3,454,0321 | 42,328.8245 | 45,782.8566 | 44,021.9775 |
| 6 | 44,021.9775 | 1,760.8791 | 44,021.9775 | 45,782.8566 | 0 |
| $\Sigma$ | 867,428.49 | 34,697.1396 | 240,000.00 | 274,697.1396 | 627,428.49 |

Comparando con el ejemplo anterior:

- La suma de los intereses ($\Sigma I_{(t)}$) es más alta.
- El financiamiento promedio ($\Sigma SI_{(t-1)}/6$) es mayor.
- La suma de los pagos totales ($\Sigma$ P) también es mayor.

Forma abreviada para calcular el t-ésimo renglón de una tabla de amortización bajo el método de pago total constante sin calcular la tabla completa.

Para el método de amortización con pago constante, la columna de abono a capital forma una serie geométrica cuya razón es $1/V = (1+j)$.

Puede aprovecharse esta circunstancia para calcular más rápidamente la tabla, calculando independientemente la columna de abono a capital, hecho lo cual se procederá a calcular la columna de intereses contenidos en el pago por diferencia (restando el abono a capital del pago constante).

Este método es más rápido para calcular una tabla de amortización completa que el procedimiento secuencial por renglones.

Ejemplo:
Una deuda cuyo monto es de $750,000.00 se va a amortizar en un plazo de 2 años mediante pagos trimestrales iguales. Si la tasa de interés es del 20% anual convertible trimestralmente, construir la tabla de amortización correspondiente.

| n | SALDO INSOLUTO | INTERESES | ABONO A CAPITAL | PAGO TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 750,000.00 | 37,500.00 | 78,541.36 | 116,041.36 |
| 2 | 671,458.64 | 33,572.93 | 82,468.43 | |
| 3 | 588,990.21 | 29,449.51 | 86,591.85 | |
| 4 | 502,398.36 | 25,119.92 | 90,921.44 | |
| 5 | 411,476.92 | 20,573.84 | 95,467.52 | |
| 6 | 316,009.40 | 15,800.47 | 100,240.89 | |
| 7 | 215,768.51 | 10,788.43 | 105,252.93 | |
| 8 | 110,515.58 | 5,525.78 | 110,515.58 | |
| $\Sigma$ | 3'566,617.62 | 178,330.88 | 750,000.00 | 928,330.88 |

$$i^{(4)} = \frac{.20}{4} = 5\%$$

$$P = C\,a^{-1}_{\overline{n}|j}$$

$$P = 750,000\ (.1547218) = 116,041.36$$

$P\ V^{n}$ = abono a capital.

En ocasiones no se requiere construir toda la tabla de amortización, sino que solamente se desea conocer un término de la tabla o bien un renglón específico de ella; en este caso el enfoque por columnas es inadecuado y debe construirse el renglón a partir de las fórmulas indicadas en la tabla para el renglón t.

Otra forma alternativa es:

| | t | SI (t-1) | I(t) | AC(t) | P(t) | SI(t) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1a. forma | t | $Pa_{\overline{n-t+1}\|j}$ | $P(1-v^{n-t+1})$ | $Pv^{n-t+1}$ | P | $Pa_{\overline{n-t}\|j}$ |
| 2a. forma | t | $Pa_{\overline{n-t+1}\|j}$ | $jPa_{\overline{n-t+1}\|j}$ | $P-jPa_{\overline{n-t+1}\|j}$ | P | $Pa_{\overline{n-t}\|j}$ |

**Ejemplo:**

**Suponer que una persona compra un condominio cuyo valor es \$3'450,000.00, pagando al contado \$2'200,000.00 y el resto mediante una hipoteca que se amortizará en 120 mensualidades iguales. Si la tasa de interés mensual efectiva es del 4.25%, calcular el monto de cada mensualidad, así como el saldo insoluto inmediatamente después de efectuado el 78°. pago y el renglón correspondiente (renglón 79).**

$C = 3'450,000 - 2'200,000 = 1'250,000$

$j = .0425$

$P = ?$

$SI_{(78)} = ?$

$$P = \frac{C}{a_{\overline{n}|j}} = \frac{1'250,000}{a_{\overline{120}|j}}$$

$$\frac{1'250,000}{\frac{1-(1/1.0425)^{120}}{.0425}}$$

$$P = \$53,487.35$$

**Pagos faltantes: 120 - 78 = 42**

$t = 79$

$S_{(t-1)} = S_{(78)} = Pa_{\overline{42}|}$

$$SI_{(78)} = (53,487.35)\frac{(1-(1/1.0425)^{42})}{.0425}$$

$$SI_{(78)} = \$1'039,413.22$$

(En el periodo 79 pero antes de empezar o en el perio do 78 después del pago)

$I_{(79)} = (.0425)(1'039,413.22)$

$$I_{(79)} = \$44,175.06$$

$$AC_{(79)} = \$\ 9,312.29$$

$$SI_{(79)} = \$1'030,100.93$$

(Inmediatamente después de efectuado el pago 79).

4. TABLAS DE AMORTIZACION CON UN PAGO CONSTANTE PREDETERMINADO Y UN PAGO FINAL IRREGULAR (W).

En ocasiones se quiere amortizar una deuda mediante el pago de (n-1) exhibiciones cuyo monto sea igual a cierta cantidad predeterminada x, dejando al final un n-ésimo pago de monto irregular W.

Ejemplo:

Una deuda de \$100,000.00 va a ser amortizada mediante 12 pagos mensuales. Se desea que los 11 primeros sean de \$10,000.00 cada uno, sabiendo que la tasa efectiva es del 2.5% mensual. Determinar el monto del duodécimo pago W y construir la tabla de amortización correspondiente.

$C = 100,000.00$

$P = 10,000.00$

$j = 2.25\%$

$$W = \frac{C - P(a_{\overline{n-1}|})}{v^n}$$

$$W = \frac{100,000 - 10,000\ (a_{\overline{11}|})}{.765667}$$

$$W = \$4,582.78$$

El construir la tabla de amortización con pago final irregular utilizando las fórmulas de los dos métodos regulares puede ocasionar errores, razón por la cual es recomendable construirla en forma de renglones secuenciales.

| t | SI(t) | I(t) | AC(t) | P(t) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100,000.00 | 2,250.00 | 7,750.00 | 10,000.00 |
| 2 | 92,250.00 | 2,075.63 | 7,924.37 | |
| 3 | 84,325.63 | 1,897.33 | 8,102.67 | |
| 4 | 76,222.96 | 1,715.02 | 8,284.98 | |
| 5 | 67,937.98 | 1,528.60 | 8,471.40 | |
| 6 | 59,466.58 | 1,338.00 | 8,662.00 | |
| 7 | 50,804.58 | 1,143.10 | 8,856.90 | |
| 8 | 41,947.68 | 943.82 | 9,056.18 | |
| 9 | 32,891.50 | 740.06 | 9,259.94 | |
| 10 | 23,631.56 | 531.71 | 9,468.29 | |
| 11 | 14,163.27 | 318.67 | 9,681.33 | |
| 12 | 4,481.94 | 100.84 | 4,481.94 | 4,582.78 |
| $\Sigma$ | 648,123.68 | 14,582.78 | 100,000.00 | 114,582.78 |

5. FONDOS DE AMORTIZACION.

Con frecuencia ocurre que para finiquitar un crédito el deudor prefiere constituir un fondo llamado de amortización que le permita programar sus pagos de manera que al final pueda cubrir el adeudo con el monto acumulado en el fondo de amortización.

Aunque puede darse el caso de que la tasa de interés que gana el fondo sea exactamente igual a la tasa de interés cargada por el acreedor, el caso más general contempla diferentes tasas (i,j) efectivas cargadas por el acreedor y ganadas por el fondo (r,q). En tales casos es posible construir tablas de amortización independientes para el fondo y para la deuda. Se analizarán dos casos:

- Se pagan periódicamente los intereses de la deuda.
- Se acumulan los intereses en forma compuesta para ser pagados al final junto con el capital.

1) Deuda en la cual se pagan periódicamente los intereses devengados (vencidos) y el capital se paga al final mediante un pago único junto con los intereses del último periodo:

Deuda:


Fondo de amortización:


$$S = x\, s_{\overline{n}|q}$$

$$S = C$$

$$C = x\, s_{\overline{n}|q}$$

$$x = \frac{C}{s_{\overline{n}|q}}$$

$$P = jC + \frac{C}{s_{\overline{n}|q}} \qquad \text{(VIII.7)}$$

Cada pago al acreedor es jC y cada pago al fondo es

$\frac{C}{s_{\overline{n}|q}}$.

Si se desea saber cuánto hay acumulado en el fondo de amortización después de t periodos se procede la siguiente forma:

$$S_{(t)} = x\, s_{\overline{t}|q} = \frac{C}{s_{\overline{n}|q}} (s_{\overline{t}|q}) \qquad \text{(VIII.8)}$$

Análisis del monto total del pago periódico:

+) si $q > j \Rightarrow P < \frac{C}{a_{\overline{n}|j}}$

++) si $q = j \Rightarrow P = \frac{C}{a_{\overline{n}|j}}$

+++) si $q < j \Rightarrow P > \frac{C}{a_{\overline{n}|j}}$

En el primer caso si la tasa que produce el fondo es mayor que la de la deuda, se necesitan cantidades menores cada periodo que si se pagara la deuda mediante el pago constante de amortización.

Ejemplo:

a) Calcular el pago mensual total que deberá hacer una empresa que debe \$20'000,000.00 sobre los cuales se paga el 3.5% mensual efectivo si deberá pagar el capital al cabo de 5 años y si puede constituir un fondo de amortización que gana el 4.5% mensual efectivo.

C = 20'000,000.00

j = 3.5% mensual

t = 5 años $\Rightarrow$ n = 60 periodos

q = 4.5% mensual

P = ?

$$P = jC + \frac{C}{s_{\overline{n}|q}}$$

$$P = (.035)(20'000,000) + \frac{(20,000,000)}{s_{\overline{60}|q}}$$

$$S_{\overline{60}|q} = \frac{(1+q)^n - 1}{q} = \frac{(1.045)^{60} - 1}{.045} = 289.49795$$

$\therefore$ P = 769,085.12

b) Desglosar el pago entre intereses y aportación al fondo de amortización.

$P = I + x$

$I = jC = (.035)(20'000,000) = 700,000$

$$x = \frac{C}{S_{\overline{n}|q}} = \frac{20'000,000}{289.49795} = 69,085.1169$$

Intereses = I = \$700,000.00

Depósito al fondo = x = \$69,085.12

c) ¿Cuánto dinero se habrá acumulado en el fondo después de efectuado el pago número 29?

Sabemos que: x = 69,085.113

$$S_{\overline{29}|q} = 57.42303316$$

$$S_{(t)} = \frac{C}{S_{\overline{n}|q}} (S_{\overline{t}|q}) = x\, S_{\overline{t}|q}$$

$$S_{(29)} = (69,085.1169)(57.42303316)$$

$$S_{(29)} = \$3'967,076.96$$

**d) Comparar el pago periódico obtenido contra el que se tendría que hacer bajo una amortización mensual normal con el método de pago total constante.**

como $q > j \implies P < \dfrac{C}{a_{\overline{n}|j}}$

$$P' = \frac{C}{a_{\overline{n}|j}} = \frac{20'000,000}{a_{\overline{60}|.035}} = \frac{20'000,000}{29.94473411} = \$801,772.4267$$

El pago combinado entre intereses directos y depósito al fondo era menor: \$769,085.12.

$\therefore$ Ahorro mensual = 801,772.43 - 769,085.12
= \$32,687.31

2) Deuda en la cual los intereses no se pagan periódicamente sino que se acumulan a interés compuesto al capital y se hará un pago único al final.


$$P = \frac{C(1+j)^n}{s_{\overline{n}|q}}$$


$$S = x\, s_{\overline{n}|q}$$

$$S = C(1+j)^n$$

$$C(1+j)^n = x\, s_{\overline{n}|q}$$

$$x = \frac{C(1+j)^n}{s_{\overline{n}|q}} = P$$

y como no se están pagando intereses:

$$P = I + x = 0 + x = x$$

El monto acumulado en el fondo de amortización después de haber efectuado el t-éximo pago es:

$$S_t = P\, s_{\overline{t}|q}$$

$$S_t = \frac{C(1+j)^n\, s_{\overline{t}|q}}{s_{\overline{n}|q}} \qquad \text{(VIII.9)}$$

Análisis del monto total del pago periódico:

+) si $q > j \Rightarrow P < \dfrac{C}{a_{\overline{n}|j}}$

++) si $q = j \Rightarrow P = \dfrac{C}{a_{\overline{n}|j}}$

+++) si $q < j \Rightarrow P > \dfrac{C}{a_{\overline{n}|j}}$

En el primer caso es mucho menor porque también se gana sobre los intereses acumulados.

En el tercer caso es mucho mayor porque también se pierde en los intereses.

Ejemplo:

a) Calcular el pago periódico que deberá hacer una empresa que debe \$20'000,000.00 sobre los cuales se paga el 3.5% mensual efectivo, si deberá pagar el capital al cabo de 5 años y si puede constituir un fondo de amortización que gana el 4.5% mensual efectivo. Los intereses se pagan al final.

C = 20'000,000

j = 3.5% mensual

n = 60

q = 4.5% mensual

P = ?

$$P = \frac{C(1+j)^n}{s_{\overline{n}|q}}$$

$$P = \frac{20'000,000\ (1.035)^{60}}{\dfrac{(1+q)^{60} - 1}{q}}$$

$$P = \frac{20'000,000\ (1.035)^{60}}{\dfrac{(1.045)^{60} - 1}{.045}}$$

P = \$544,258.83

b) ¿Cuánto se habrá acumulado en t = 29?

$$S_t = P\, S_{\overline{t|}q}$$

$$S_{29} = (544{,}258.83)(57.423033)$$

$$S_{29} = \$31'252{,}992.76$$

Comparándolo con el pago del ejemplo anterior:

Ahorro mensual = 801,772.42 - 544,258.83 = $257,513.59

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Una deuda de $200,000.00 con interés del 8% convertible trimestralmente debe ser amortizada en cuotas de $50,000.00 por trimestre vencido. Elaborar la tabla de amortización.

2. Una deuda de $500,000.00 debe amortizarse con pagos semestrales en 2 años y medio, a una tasa del 16% convertible semestralmente. Hallar el pago semestral.

3. Demostrar que la suma de capitales insolutos es igual a: $\frac{n - a_{\overline{n}|i}}{i}$ .

4. Una deuda de $250,000.00 devenga interés del 8% anual y va a ser amortizada mediante pagos iguales de $35,000.00 al fin de cada año. Encontrar cuántos pagos completos deben efectuarse y qué pago incompleto deberá cubrirse un año después del último completo. Elaborar la tabla de amortización.

5. Se amortiza una deuda de $90,073.45 por medio de pagos mensuales iguales durante 10 años a una tasa de interés del 6% anual convertible mensualmente. Encontrar el 90° renglón de la tabla.

6. Una persona adeuda $100,000.00 que causan intereses a una tasa anual nominal convertible trimestralmente del 28%. Tanto el adeudo como los intereses acumulados deberán pagarse dentro de 10 años. El deudor desea amortizar trimestralmente la deuda mediante un fondo de amortización que gana el 20% anual nominal convertible trimestralmente. Calcular el monto que deberá aportarse trimestralmente; comparar con el monto que habría que desenvolsar si no se constituyera el fondo y construir la tabla de amortización.

# IX. DEPRECIACION

## 1. GENERALIDADES.

Depreciación es la pérdida de valor de un bien por el uso o por el simple paso del tiempo.

Hay tres clases de depreciación:

a) Depreciación de mercado.
b) Depreciación de valor en libros.
c) Depreciación fiscal.

Ejemplo: Un automóvil después de un año de uso tiene un valor en el mercado (lo que se obtendría por él si se vendiera), este valor de mercado generalmente difiere del valor considerado por su propietario. La diferencia entre el valor original y el valor de mercado es la depreciación acumulada de mercado.

La mayoría de las veces las empresas registran de alguna manera la depreciación que sufren sus bienes materiales (conocidos como activos); muchas veces lo hacen de acuerdo a una fórmula preestablecida que da como resultado un cierto valor en libros para cada bien en un determinado momento. La diferencia entre este valor en libros en que la empresa tiene registrado un bien y el costo original de ese bien constituye la llamada depreciación acumulada de valor en libros.

Debido a que generalmente para efectos de los impuestos que una compañía debe pagar los gobiernos solamente aceptan que la depreciación del valor en libros se calcule de cierta manera específica, a ésta se le llama depreciación fiscal.

## 2. DEFINICIONES.

A continuación se introducen los conceptos y términos más usados en el transcurso del capítulo.

+ Precio de compra (A). Es el precio original paga do por el bien (aunque no sea nuevo en el momento de su - adquisicion). En el caso de construcciones se considera - como adquisición la fecha de terminación de la construcción.

+ Depreciación acumulada ($D_i$). Es la suma de todas las depreciaciones por periodo desde la fecha de adquisición hasta el i-ésimo periodo.

$$D_i = \sum_{t=1}^{i} dt \qquad \text{(IX.1)}$$

+ Valor en Libros (V.L.). Es el valor en que se -- tiene registrado en la contabilidad de una empresa el bien después de transcurridos i periodos, tomando en cuenta su precio de compra y su depreciación acumulada.

$$V.L.i = A-Di \qquad \text{(IX.2)}$$

+ Valor de mercado (V.M.). Es el valor que puede - obtenerse por un bien vendiéndolo después de i periodos. Puede ser mayor, igual o menor que el valor en libros.

+ Valor de rescate (R). Es el valor residual que - se considera tendrá el bien al término de su vida útil, - puede ser mayor, igual o menor a cero. (Este último caso se presenta cuando el costo de desmontar o deshacerse de un bien es mayor que su valor al final).

+ Vida útil(n). Es el número de periodos que se - considera durará el bien (o estará productivo) a partir - del momento de su instalación.

3. METODOS PARA REGISTRAR LA DEPRECIACION.

La naturaleza de la depreciación de un bien material ha hecho que sea conveniente registrar la depreciación de los bienes materiales de una empresa de una manera sistemática que evite la posibilidad de valuaciones subjetivas del valor de los bienes en cualquier momento dado.

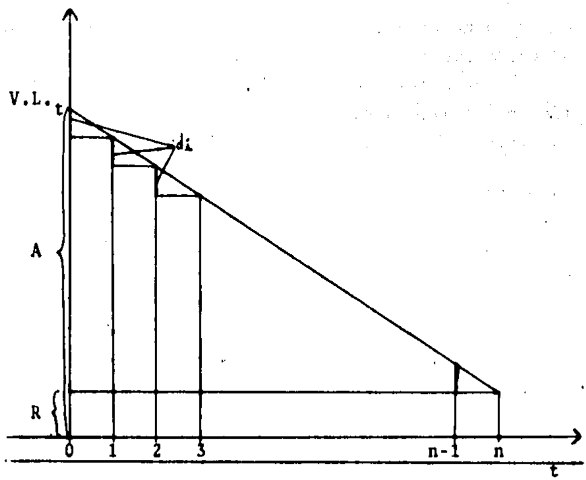
Las empresas y algunas personas físicas consideran necesario registrar la depreciación por periodo que sufren sus activos fijos de manera de poder absorber gradualmente el costo que significará en un futuro la reposición del valor de adquisición de dichos bienes. De no hacerlo así, llegado el momento en que el bien se acaba habría que absorber toda la pérdida (de valor que el bien ha sufrido) en el periodo final de su vita útil; lo cual castigaría las utilidades de ese periodo por una cifra muy elevada.

En cambio al reconocer en cada periodo la pérdida del valor de los bienes se va constituyendo una reserva que permitirá recuperar el costo de adquisición del bien.

Cabe precisar que la reserva mencionada se constituye con recursos sustraídos a las utilidades pero que no han sido gastados realmente.

a) Método de la línea recta:
Este método es el más sencillo y en consecuencia el más ampliamente utilizado. Se decide la vida útil (n) que tendrá el bien y simplemente se deprecia un n-ésimo de la diferencia (A-R) depreciable cada periodo.

Gráfica:




$$di = \frac{(A-R)}{n} \qquad Di = \frac{i}{n}(A-R) \qquad (IX.3)$$

Con este método pueden construirse tablas de depreciación de la siguiente forma:

| t | dt | Dt | V.L.T. |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/n(A-R) | 1/n(A-R) | A-1/n(A-R) |
| 2 | | 2/n(A-R) | A-2/n(A-R) |
| 3 | | 3/n(A-R) | A-3/n(A-R) |
| ⋮<br>n-1 | | ⋮<br>n-1/n(A-R) | ⋮<br>1/n(A-R)+R |
| n | | (A-R) | R |
| $\Sigma$ | (A-R) | $\frac{(n+1)}{2}(A-R)$ * | $\frac{(n-1)A+(n+1)R}{2}$ ** |

$$* \quad \left((A-R) + \frac{1}{n}(A-R)\right)\frac{n}{2} \qquad ** \quad \left(A-1/n(A-R)+R\right)\frac{n}{2}$$

$$= \left((A-R)(1+1/n)\right)\frac{n}{2} \qquad = \frac{(nA-(A-R)+R)}{n}\frac{n}{2}$$

$$= (A-R)(n/2+n/2n) \qquad = \frac{(n\ A-A+R+nR)}{\cancel{n}}\frac{\cancel{n}}{2}$$

$$= \frac{(n+1)}{2}(A-R) \qquad = \frac{(n-1)A+(n+1)R}{2}$$

Ejemplo:

Una compañía adquiere una máquina nueva cuyo valor ya instalada es de 4 millones de pesos y que se supone durará 10 años, al cabo de los cuales podrá venderse a un deshuesadero en $100,000.00. Determinar el monto anual a cargar a resultados por concepto de depreciación en línea recta y construir la tabla.

$A = 4'000,000 \qquad d_t = \frac{(A-R)}{n}$

$n = 10$ años

$R = 100,000 \qquad d_t = \frac{4'000,000-100,000}{10} = 390,000$

| $t$ | $d_t$ | $D_t$ | $V.L._t$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 390,000 | 390,000 | 3'610,000 |
| 2 | ↓ | 780,000 | 3'220,000 |
| 3 | | 1'170,000 | 2'830,000 |
| 4 | | 1'560,000 | 2'440,000 |
| 5 | | 1'950,000 | 2'050,000 |
| 6 | | 2'340,000 | 1'660,000 |
| 7 | | 2'730,000 | 1'270,000 |
| 8 | | 3'120,000 | 880,000 |
| 9 | | 3'510,000 | 490,000 |
| 10 | | 3'900,000 | 100,000 |
| $\Sigma$ | 3'900,000 | 21'450,000 | 18'550,000 |

$V.L. = A - D_i$

b) Método de la depreciación decreciente en forma aritmética conocido como suma de los dígitos:

En este método primero se decide la vida útil (n) que tendrá el bien y se determina el número de fracciones en que se dividirá la diferencia depreciable (A-R) sumando los números naturales desde 1 hasta n.

$$f = \sum_{i=1}^{n} i$$

Posteriormente se determina el cargo periódico por depreciación según la fórmula.

$$di = \frac{(n+1-i)}{f}(A-R) \qquad (IX.4)$$

Este método tiene como ventaja que los cargos por depreciación van decreciendo, de tal manera que durante los primeros periodos se hacen cargos de monto mayor, lo que corresponde de una manera más aproximada a la realidad. A este efecto se le llama "depreciación acelerada".

Ejemplo:
Una compañía adquiere un bien en $160,000.00. Considera que el valor residual al cabo de una vida útil de 5 años será de $10,000.00. Decide aprovechar la ventaja fiscal de su zona económica que le permite depreciarlo en forma aritmética decreciente. Determinar el monto a cargar cada año y construir la tabla correspondiente.

$A = 160,000$ $\qquad$ $A-R = 150,000$

$R = 10,000$

$n = 5$ $\qquad$ $f = \sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5 = 15$

$f = 15$

$$d_1 = \left(\frac{5}{15}\right) 150,000 = 50,000$$

$$d_2 = \left(\frac{4}{15}\right) 150,000 = 40,000$$

$$d_3 = \left(\frac{3}{15}\right) 150,000 = 30,000$$

$$d_4 = \left(\frac{2}{15}\right) 150,000 = 20,000$$

$$d_5 = \left(\frac{1}{15}\right) 150,000 = 10,000$$

| t | $d_t$ | $D_t$ | $V.L._t$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 50,000 | 50,000 | 110,000 |
| 2 | 40,000 | 90,000 | 70,000 |
| 3 | 30,000 | 120,000 | 40,000 |
| 4 | 20,000 | 140,000 | 20,000 |
| 5 | 10,000 | 150,000 | 10,000 |
| $\Sigma$ | 150,000 | 550,000 | 250,000 |

c) Método de depreciación decreciente en serie geométrica.

Este método es un refinamiento respecto al anterior; en el que se decide la vida útil del bien y el valor residual que tendrá que alcanzarse al final de ella.

A continuación se escoge una razón (r) según la cual los cargos por depreciación correspondiente a cada periodo irán decreciendo en forma que al final de la vida útil (n) se haya alcanzado el valor residual (R).

$0 < r < 1$

$$\begin{aligned} &d_1 \\ &d_2 = d_1 r \\ &d_3 = d_2 r = d_1 r^2 \\ &\vdots \\ &d_n = d_{n-1} r = d_1 r^{n-1} \end{aligned} \qquad \text{(IX.5)}$$

$$(A-R) = d_1+d_2+d_3+ \dots + d_n$$

$$(A-R) = d_1+d_1r+d_1r^2 \dots + d_1r^{n-1}$$

$$(A-R) = d_1(1+r+r^2 + \dots + r^{n-1})$$

$$(A-R) = d_1\frac{(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow d_1 = \frac{(A-R)(1-r)}{(1-r^n)} \qquad (IX.6)$$

**Ejemplo:**

Una compañía adquiere una máquina envasadora cuya duración será de 10 años a un costo de $4'500,000.00 y que al final de su vida útil tendrá un valor de $300,000.00. Calcular los cargos que han de hacerse cada año si se utiliza el método de depreciación decreciente en serie geométrica, si el límite autorizado para r es 0.9 y construir la tabla.

$N = 10 \qquad di = \frac{(A-R)(1-r)}{(1-r^n)}$

$A = 4'500,000$

$R = 300,000 \qquad d_1 = \frac{(4'200,000)(.1)}{(1-.9^{10})} = \frac{420,000}{.65132} = 644,842.7718$

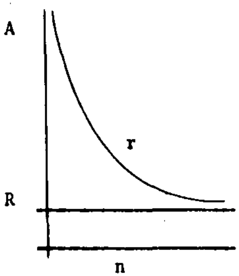
$r = .9$

| t | $d_t$ | $D_t$ | V.L.t |
|---|---|---|---|
| 1 | 644,842.77 | 644,842.77 | 3'855,157.23 |
| 2 | 580,358.49 | 1'225,201.26 | 3'274,798.74 |
| 3 | 522,322.65 | 1'747,523.91 | 2'752,476.09 |
| 4 | 470,090.38 | 2'217,614.29 | 2'282,385.71 |
| 5 | 423,081.34 | 2'640,695.63 | 1'859,304.37 |
| 6 | 380,773.21 | 3'021,468.84 | 1'478,531.16 |
| 7 | 342,695.89 | 3'364,164.73 | 1'135,835.27 |
| 8 | 308,426.30 | 3'672,591.03 | 827,408.97 |
| 9 | 277,583.67 | 3'950,174.70 | 549,825.30 |
| 10 | 249,825.30 | 4'200,000.00 | 300,000.00 |
| $\Sigma$ | 4'200,000.00 | 26'684,277.16 | 18'315,722.84 |

d) Método de depreciación decreciente con el valor en libros formando una serie geométrica.

En este método se determina la vida útil del bien y el valor residual que alcanzará al final de ella (opción 1); o bien se selecciona el número de periodos y la razón (r-1) de la serie geométrica, dejando abierto el valor residual. (opción 2).

Opción 1.




$$R = Ar^n$$

$$\frac{R}{A} = r^n$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[n]{\frac{R}{A}} \qquad \text{(IX.7)}$$

$$dt = V.L.(t) - V\,L.(t+1)$$

$$D_t = A - V\,L(t)$$

Ejemplo:

Una compañía adquiere una máquina remachadora en $2'500,000.00 cuya vida útil será de 8 años, al cabo de los cuales tendrá un valor de rescate de $100,000.00. Calcular la tabla correspondiente al valor en libros y a la depreciación anual y acumulada por el monto de valor en libros decreciente en forma geométrica.

A - 2'500,000

n = 8 años

r = 100,000

$$r = \sqrt[8]{\frac{100,000}{2'500,000}}$$

$$r = 0.6687403$$

| t | dt | $D_t$ | VLt |
|---|---|---|---|
| 1 | 828,149.24 | 828,149.24 | 1'671,850.76 |
| 2 | 553,816.77 | 1'381,966.91 | 1'118,033.99 |
| 3 | 370,359.60 | 1'752,325.61 | 747,674.39 |
| 4 | 247,674.39 | 2'000,000.00 | 500,000.00 |
| 5 | 165,629.85 | 2'165,629.85 | 334,370.15 |
| 6 | 110,763.35 | 2'276,393.20 | 223,606.80 |
| 7 | 74,071.92 | 2'350,465.12 | 149,534.88 |
| 8 | 49,534.88 | 2'400,000.00 | 100,000.00 |
| $\Sigma$ | 2'400,000.00 | 15'154,929.03 | 4'845,070.97 |

Opción 2.

En esta opción se conoce el valor inicial (A) del bien y se propone la razón (r), $0 < r < 1$ según la cual irá decreciendo el valor en libros durante la vida útil del bien (n). El valor en libros después de t periodos viene expresado según la fórmula:

$$VL(t) = Ar^t \qquad \text{(IX.8)}$$

Como podrá observarse, si se selecciona una r arbitraria, no puede controlarse que el valor en libros después de n periodos sea un valor pre-especificado, así que simplemente dejamos a R tomar el valor que le corresponde:

$$R = VL_{(n)} = Ar^n \qquad \text{(IX.9)}$$

En estos métodos del valor en libros formando una serie geométrica no importa el número de periodos que haya pasado, el bien siempre conservará algún valor en libros y siempre habrá un cargo por depreciación a resultados, aunque su valor disminuye tanto que se hace periódicamente depreciable.

Ejemplo:

Una compañía adquiere una máquina envasadora de --- $2'000,000.00 con una vida útil de 10 años. Suponiendo que el valor de mercado queda descrito por una - curva geométrica de razón 0.8; calcular la tabla del valor en libros y la depreciación anual y acumulada.

A = 2'000,000 R = $Ar^n$

r = 0.8 R = 2'000,000 $(0.8)^{10}$

n = 10 R = 214,748.36

| t | V.L. | dt | Dt |
|---|---|---|---|
| 0 | 2'000,000.00 | | |
| 1 | 1'600,000.00 | 400,000.00 | 400,000.00 |
| 2 | 1'280,000.00 | 320,000.00 | 720,000.00 |
| 3 | 1'024,000.00 | 256,000.00 | 976,000.00 |
| 4 | 819,200.00 | 204,800.00 | 1'180,800.00 |
| 5 | 655,360.00 | 163,840.00 | 1'344,640.00 |
| 6 | 524,288.00 | 131,072.00 | 1'475,712.00 |
| 7 | 419,430.40 | 104,857.60 | 1'580,569.60 |
| 8 | 335,544.32 | 83,886.08 | 1'664,455.68 |
| 9 | 268,435.46 | 67,108.86 | 1'731,564.54 |
| 10 | 214,748.36 | 53,687.10 | 1'785,251.64 |
| $\sum$ | 9'141,006.54 | 1'785,251.64 | 12'858,993.46 |

## 4. EFECTO DE LA DEPRECIACION SOBRE LAS NECESIDADES DE FINANCIAMIENTO DE UNA EMPRESA.

Para analizar a una empresa o proyecto es necesario tomar en cuenta los ingresos y egresos de fondos que la - empresa o proyecto produce, considerando el momento en -- que ocurren, de manera que se pueda aplicar una tasa de - interés compuesto al medir su rentabilidad.

Ahora bien, es muy importante recordar que al adquirir o construir activos fijos su costo se eroga desde el principio, pero no se carga inmediatamente a las utilidades en su totalidad, sino en pequeñas partes cada periodo por concepto de depreciación; por consiguiente la medición financiera que pretenda hacerse de la empresa o proyecto no debe de considerar simplemente las utilidades netas, sino que debe también corregir la distorsión de las mismas que se produjo al sustituir la inversión original por la depreciación. Lo anterior se logra sumando a la utilidad neta de cada periodo la depreciación que se le restó en el estado de resultados, y restando la inversión que se hizo desde el principio (o cualquier otro momento en que haya ocurrido).

Por último, para incluir la recuperación que se puede obtener el último año considerado en el análisis por concepto del valor en libros que todavía tengan los bienes se suma otra columna llamada "residuo", la cual es cero para todos los años a excepción del último y es igual al valor en libros de los bienes para el último año.

## 5. ESTADO DE FLUJO DE FONDOS SIMPLIFICADO.

Como se mencionó en el inciso anterior, la medición financiera del efecto de la depreciación, tomando en cuenta una tasa anual efectiva de interés (i), debe tomar en cuenta los desembolsos reales en los momentos en que ocurren contra los beneficios reales en los momentos en que ocurren. Para sistematizar las correcciones de las utilidades netas, se concentra toda la información en una tabla llamada flujo de fondos simplificada (se llama flujo de fondos simplificado porque solamente aplica las correcciones a la utilidad neta por el efecto de las inversiones y depreciación y para distinguirlo de otros más completos que aplican otras correcciones).

Ejemplo:

Una compañía adquiere una máquina en \$1'100,000.00, cuyo valor residual será de \$100,000.00 al cabo de una vida útil de 10 años, durante cada uno de los cuáles producirá un ahorro de \$250,000.00 anuales. Considerando que se debe depreciar en línea recta en 10 años y que la tasa de impuesto y participación de utilidades de la empresa es del 50% y que la tasa de interés es del 20% anual efectivo, valuar el beneficio neto a valor presente que rendirá la máquina.

$$A = 1'100{,}000 \qquad dt = \frac{1'100{,}000 - 100{,}000}{10}$$

$$r = 100{,}000$$

$$n = 10 \qquad dt = 100{,}000$$

| t | Utilidad Neta | + dt | -Inversión | + Residuo | Flujo de Fondos | V.P. F.F. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1'100,000 | 0 | -1'100,000 | -1'100,000 |
| 1 | 75,000 | 100,000 | 0 | | 175,000 | 145,833 |
| 2 | | | 0 | | | 121,527 |
| 3 | | | 0 | | | 101,273 |
| •<br>•<br>•<br>•<br>• | | | 0 | | | 84,394<br>70,328<br>58,607<br>48,839<br>40,699 |
| 9 | | | 0 | 0 | 175,000 | 33,916 |
| 10 | 75,000 | 100,000 | 0 | 100,000 | 275,000 | 44,414 |
| $\Sigma$ | 750,000 | 1'000,000 | 1'100,000 | 100,000 | 750,000 | (350,170) |

| t | INGRESO MARGINAL | COSTO MARGINAL | CONTRIB. MARGINAL | dt | UTILIDAD BRUTA | IPU | UTILIDAD NETA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | - | - | - | - |
| 1 | 0 | - 250,000 | 250,000 | 100,000 | 150,000 | 75,000 | 75,000 |
| 2 | 0 | | | | | | |
| 3 | 0 | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | | |
| 9 | 0 | | | | | | |
| 10 | 0 | | | | | | |
| Σ | 0 | -2'500,000 | 2'500,000 | 1'000,000 | 1'500,000 | 750,000 | 750,000 |

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Una compañía adquiere equipo nuevo, cuyo valor ya instalado es de $6'000,000.00. Se supone que durará 10 años, al cabo de los cuáles podrá venderse a un deshuesadero en $400,000.00. Determinar el monto anual a cargar a resultados por concepto de depreciación en línea recta y construir la tabla.

2. Una compañía constructora adquiere maquinaria con valor de $800,000.00. Considera que el valor residual al cabo de una vida útil de 4 años, será de $90,000.00. Decide aprovechar la ventaja fiscal de su zona económica que le permite depreciarlo en forma aritmética decreciente. Determinar el monto a cargar cada año y construir la tabla correspondiente.

3. Una compañía adquiere un aparato electrónico cuya duración será de 12 años, a un costo de $2'500,000.00 y que al final de su vida útil tendrá un valor de rescate de $250,000.00. Calcular los cargos que han de hacerse cada año si se utiliza el método de depreciación decreciente en serie geométrica, si el límite autorizado para el valor residual es de 0.9. Construir la tabla correspondiente.

4. Una fábrica adquiere equipo modelador con valor de $3'500,000.00, cuya vida útil será de 7 años, al cabo de los cuáles tendrá un valor residual de $350,000.00. Calcular el monto a cargar cada año y construir la tabla correspondiente al valor en libros y a la depreciación anual y acumulada por el método de valor en libros decreciente en serie geométrica.

5. Una empresa adquiere un conjunto de máquinas de agricultura con valor de $1'800,000.00 cada una. La primera de ellas en el momento cero y agrega una de ellas cada año durante 10 años.

Suponiendo que el valor de mercado queda descrito por una serie geométrica de razón 0.8, calcular la tabla individual y de conjunto, para la depreciación anual y el valor en libros.

# X. BONOS

## 1. GENERALIDADES.

Los bonos financieros, junto con otros valores de renta fija, constituyen un mecanismo de captación de recursos ampliamente difundido y que es utilizado tanto por empresas públicas y privadas, como por sociedades de crédito nacional.

Cabe aclarar que durante la exposición del presente Capítulo, se ha utilizado la expresión "bono", para designar tanto a los bonos financieros propiamente dichos como a las obligaciones quirografarias o hipotecarias, así también al papel comercial y otros títulos de crédito de renta fija empleados comunmente en la práctica comercial, ya que sus características financieras son iguales, distinguiéndose entre sí solamente por razones de garantía y plazo.

En lo que respecta a las letras de cambio y pagarés, es posible incluírlas en esta modalidad, siempre y cuando el análisis financiero desee hacerse bajo interés compuesto o descuento compuesto.

Por último, es conveniente establecer que todos los análisis se han realizado desde el punto de vista de los compradores, vendedores o poseedores de los bonos y no de las entidades colocadoras, las cuáles tienen un análisis más sencillo.

## 2. DEFINICIONES.

Un bono es un título de crédito que representa una promesa escrita de pago de:

- Una suma específica llamada valor de redención (V) pagadera en una fecha específica llamada fecha de redención.

- Pagos periódicos llamados "cupones" que representan pagos de intereses generalmente en forma vencida, hasta la fecha de redención inclusive.

La descripción de un bono especifica:

α) Su denominación o valor nominal (F). Casi invariablemente es un múltiplo de $100.00.

β) La tasa nominal de interés del bono, su convertibilidad y las fechas anuales en las cuales es pagadero.
Ejemplo:
El 12% de interés pagadero trimestralmente el 15 de enero, el 15 de abril, el 15 de julio y el 15 de octubre de cada año, hasta su vencimiento.

γ) La fecha de redención o fecha en la cual se paga el valor de redención al expirar el plazo del bono.
Normalmente se redime un bono en la última fecha de pago de intereses o cupones.

δ) El valor de redención (V), es el valor que se pagará al final por el bono mismo. Cuando el valor de redención y el valor nominal son iguales ($V=F$), se dice que el bono es redimible a la par. Cuando el valor de redención es mayor que el valor nominal ($V > F$), se dice que es redimible sobre par o con premio. Cuando el valor de redención es menor que el valor nominal ($V < F$), se dice que el bono es redimible bajo par o con castigo.

Generalmente cuando el valor de redención y el valor nominal son diferentes, se expresa como un porcentaje del valor nominal, frecuentemente omitiéndose la palabra por ciento.

Ejemplos:

1) Un bono de \$1,000.00 redimible a 105, significa que su valor de redención es de \$1,050.00 o sea 105% de \$1,000.00.

2) Un bono cuyo valor nominal es de \$10,000.00 redimible a 102, significa que su valor de redención son \$10,200.00, es decir, el 102% de ----- \$10,000.00.

3) Un bono cuyo valor nominal es de \$1,000.00 será redimible dentro de 10 años a 103 suponiendo -- que el bono produce intereses a una tasa nominal del 12% anual convertible trimestralmente. Encontrar el precio que deberá pagar un inversionista que desea un rendimiento anual del 16% - convertible trimestralmente. Suponer que lo -- compra faltando 5 años para su vencimiento.

$F = 1{,}000$

$V = (1{,}000)(103\%) = 1030$

$r = .03$

$i = .04$

$c = 1{,}000(.03) = 30$

$P = (30\ a_{\overline{20}|.04}) + 1030V^{20}{}_{.04}$

$= 30\ (13.59033) + 1030(.456387)$

$= 407.7099 + 470.07$

$P = 877.78$

Nota: Para distinguir entre la tasa de interés propia del bono y la del rendimiento buscado, se suele denotar:

| | Tasa efectiva anual | Tasa anual nominal | Tasa efectiva por periodo |
|---|---|---|---|
| Propia del bono. | $r$ | $r^{(m)}$ | $q$ |
| Rendimiento buscado por el inversionista | $i$ | $i^{(m)}$ | $j$ |

## 3. PRECIO DE UN BONO EN UNA FECHA EXACTA DE PAGO DE INTERESES.

Si un inversionista compra un bono en una fecha cualquiera de pago de intereses adquiere el derecho de recibir cierto número de pagos futuros; no recibirá el pago de intereses que se vence en la fecha de compra del bono.

$$P = (V)\, V_j^{\,n} + (F.q)\, a_{\overline{n}|j} \qquad (X.1)$$

$$= V(1+j)^{-n} + (F_q)\left(\frac{1-V^n_j}{j}\right)$$

$$= V(1+j)^{-n} + \frac{F_q}{j} - \frac{F_q}{j}(1+j)^{-n}$$

$$= \frac{F_q}{j} + \left(V-\frac{F_q}{j}\right)(1+j)^{-n}$$

$$= V + \left(\frac{F_q}{j} - \frac{V_j}{j}\right)\left(1-(1+j)^{-n}\right)$$

$$P = V+(F_q - V_j)\, a_{\overline{n}|j} \qquad (X.2)$$

La fórmula (X.1) puede deducirse de inmediato a partir de la ecuación de valor, mientras que la fórmula (X.2) tiene la ventaja de requerir para su cálculo solamente de un valor de la correspondiente tabla financiera.

Compra de un bono a premio (sobre par) o a descuento (bajo par).

Se dice que un bono es comprado "a premio" o "sobre par" si su precio de compra es mayor que el valor nominal.

(En ocasiones también si es mayor que el valor de redención, cuando éste es mayor que el valor nominal).

Se dice que un bono es comprado "a descuento" o "bajo par" si su precio de adquisición es menor que su valor nominal. (En ocasiones también si es menor que el valor de redención, cuando éste es diferente que el valor nominal).

Ejemplos:

1) Calcular el precio de adquisición y el descuento que deberá pagar un inversionista por un bono, cuyo valor nominal es de $1'000,000.00 redimible a 101 dentro de 5 años 6 meses y que produce intereses a la tasa del 17% convertible semestralmente, si el inversionista desea un rendimiento anual efectivo del 21%.

$F = 1'000{,}000$ $\qquad (1+i) = (1+j)^m$

$V = (101)1'000{,}000 = 1'010{,}000$ $\qquad 1.21 = (1+j)^2$

$\sqrt{1.21} - 1 = j$

$q = .085$ $\qquad j = .10$

$i = .21$ anual

$$P = (V)\, v_j^{\,n} + (F_q)\, a_{\overline{n}|\, j}$$

$$P = (1'010{,}000)\, v^{11}_{;10} + (1'000{,}000)(0.85)\, a_{\overline{11}|\,.10}$$

$$= 1'010{,}000(.350494) + 85{,}000(6.49506)$$

$$= 353{,}998.94 + 552{,}080.10$$

$$= 906{,}079.04$$

$$D = F - P$$

$$= 1'000{,}000 - 906{,}079.0239$$

$$= 93{,}920.96$$

$$D^1 = V - P$$

$$= 1'010{,}000 - 906{,}079.0239$$

$$= 103{,}920.96$$

2) Calcular el rendimiento de un bono cuyo valor nominal es de \$1,000.00 adquirido bajo par a 98 con valor de redención a 102 dentro de 6 años y que produce intereses a la tasa anual del 18% convertible semestralmente.

$F = 1,000$ $\qquad$ $P = (V)V_j^n + (Fq)\,a_{\overline{n}|\,j}$

$V = (102)(1,000) = 1020$

$$980 = 1020\left(\frac{1}{1+j}\right)^{12} + 90\,\frac{1-\left(\frac{1}{1+j}\right)^{12}}{j}$$

$P = 98(1,000) = 980$

$r = .18 \Longrightarrow q = .09$

Interpolando: $j_1 = .08$ $\quad f(j_1) = 1,083.3031$

$j = ?$ $\quad f(j) = 980$

$j_2 = .15$ $\quad f(j_2) = 678.5010$

$$j = \frac{j_2 - j_1}{f(j_2) - f(j_1)}\,(f(j) - f(j_1)) + j_1$$

$$j = \frac{.15 - .08}{(678.501 - 1083.3031)}\,(980 - 1083.3031) + .08$$

$$j = 9.79\%$$

4. PRECIO DE UN BONO EN UNA FECHA INTERMEDIA ENTRE DOS FECHAS DE PAGO DE INTERESES.

Para determinar el precio de un bono entre dos fechas de pago de intereses de manera que produzcan un rendimiento j especificado debe seguirse un procedimiento de dos etapas:

1) Se calcula el precio de compra en la última fecha (anterior) en que el bono pagó intereses.

2) Se acumula el precio encontrado en el inciso anterior (1) hasta la fecha de compra intermedia

empleando uno de los siguientes 3 métodos:

a) Reparto proporcional del cupón. El interés correspondiente al cupón que se va a recibir se reparte proporcionalmente según el número de días que cada uno de los inversionistas tuvo o tendrá al bono en su poder. Este reparto proporcional se hace a la tasa nominal del bono, por consiguiente desvirtúa el rendimiento efectivo que el comprador quiere obtener.

b) Se acumula el precio obtenido en el inciso (1) a interés simple a la tasa del comprador (j) según el número de días. Este método aunque todavía inexacto ya representa una mejor aproximación.

c) Se acumula el precio encontrado en el inciso (1) a la tasa del comprador según el número de días que lo tuvo el anterior inversionista pero a la tasa de interés compuesto. La principal desventaja de este método consiste en que es más difícil de calcular, razón por la cual su práctica comercial ha sido limitada. Es el único de los tres métodos que garantiza que el rendimiento del comprador sobre todo el del periodo será exactamente el deseado (j).

1 : $P^1$

2 : a) $$P = P^1 + \frac{t_1}{t_2} C \qquad (X.3)$$

b) $$P = P^1 \left(1+j(t_1/t_2)\right) \qquad (X.4)$$

c) $$P = P^1 (1+j)^{t_1/t_2} \qquad (X.5)$$

donde:

$t_1$ = Tiempo transcurrido desde la última fecha de pago de cupón.

$t_2$ = Intervalo que separa dos cupones consecutivos.

Ejemplo:

Calcular el precio de adquisición que deberá pagar una inversionista por un bono cuyo valor nominal es de $1'000,000.00 redimible a 102 dentro de 7 años 6 meses y que produce intereses a la tasa del 16% convertible semestralmente, si la inversionista desea un rendimiento anual efectivo del 21% y han transcurrido 4 meses desde el pago del último cupón.

1'000,000          1'020,000

0              15

F = 1'000,000

V = 1'020,000

c = 80,000

i = 21% = 10% sem.

q = 8%

$$P^1 = V(V_j^n) + F_q\,(a_{\overline{n}|}\,j)$$

$$= 1'020{,}000(V^{15}.10) + 80{,}000\,a_{\overline{15}|}.10$$

$$= 1'020{,}000\,(.239392) + 80{,}000(7.60608)$$

$$= 244{,}179.84 + 608{,}486.40$$

$$= 852{,}666.24$$

en la última fecha de pago del cupón.

a) $$P = P^1 + C\left(\frac{t1}{t2}\right)$$

$$= 852{,}666.24 + 80{,}000\,(4/6)$$

= 905,999.57 en la fecha de compra según el método a).

b) $$P = P^1\,(1+j(t1/t2))$$

$$= 852{,}666.24\,(1+(.10)(4/6))$$

= 909,510.66 en la fecha de compra según el método b).

c) $P = P^1 (1+j)^{t1/t2}$

$= 852,666.24 (1+.10)^{4/6}$

$= 908,603.05$ en la fecha de compra según el método c).

## 5. VALOR EN LIBROS DE UN BONO.

Cuando un bono es comprado a premio o a descuento puede resultar necesario elaborar una tabla que contiene el rendimiento y el valor en libros del mismo para poder seguir la trayectoria y comprobar que el rendimiento obtenido por el inversionista sea el deseado.

| | Valor en libros P | Intereses Cj | Cupón C q | Diferencia. | Nuevo V. L |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 852,666.25 | 85,266.625 | 80,000 | 5,266,625 | 857,932.875 |
| 2 | 857,932.875 | 85,793.287 | 80,000 | 5,793.2875 | 863,726.16 |
| ⋮<br>t<br>⋮ | $VL_{(t-1)}$+Dif. | $VL_{(t)}j$ | | $I_{(t)}-Cq$ | $VL_{(t)}$+Dif. |
| n | $VL_{(n-1)}$+Dif. | $VL_{(n)}$ | | $I_{(n)}-Cq$ | |

Forma abreviada de obtener la columna de valor en libros.

Generalmente no es indispensable conocer todo el desglose de una tabla de bonos sino que solamente se desea observar la columna de valor en libros. Podemos observar que el valor en libros inicial es el valor presente del valor de redención del bono n periodos antes, más el valor presente de una anualidad formada por n cupones.

Similarmente, el siguiente valor en libros del bono viene dado por el valor presente del valor de redención cuando faltan (n-1) periodos más el valor presente de una anualidad formada por (n-1) cupones.

Ejemplo:

**Determinar el valor en libros de un bono comprado hace 4 años cuando faltan todavía 6 años por transcurrir si paga cupones trimestralmente sobre su valor nominal de $1,000.00, redimible a la par si la tasa del bono es del 20% anual convertible trimestralmente pero el inversionista desea obtener un rendimiento del 40% anual convertible trimestralmente.**

$f = 1{,}000$

$q = 5\%$

$j = 10\%$

$n = 24$

$V = \$1{,}000$

$F_q = 1{,}000(.05) = 50$

$$V.L = V\,v_j^n + F\,q\,a_{\overline{n}|j}$$

$$= 1{,}000\,v_{.10}^{24} + 50\,a_{\overline{24}|.10}$$

$$= 1{,}000\,(0.1015256) + 50(8.984744)$$

$$= 101.53 + 449.24$$

$$= \$550.77$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Un bono cuyo valor nominal es de $5,000.00 será redimible dentro de 10 años a 102. Suponiendo que el bono produce intereses a una tasa del 15% convertible semestralmente, encontrar el precio que deberá pagar un inversionista que desea un rendimiento neto del 18% anual convertible semestralmente, sabiendo que los cupones y únicamente los cupones, pagan un impuesto del 21%.

2. Un bono cuyo valor nominal es de $10,000.00 será redimible dentro de 8 años a 105 suponiendo que el bono produce intereses a una tasa nominal del 16% anual convertible semestralmente. Encontrar el precio que deberá pagar un inversionista que desea un rendimiento anual del 20% convertible semestralmente. Suponer que lo compra faltando 4 años para su vencimiento.

3. Calcular el precio de adquisición, que deberá pagar un inversionista por un bono cuyo valor nominal es de $5'000,000.00 redimible a 102 dentro de 3 años y que produce intereses a la tasa del 20% convertible trimestralmente, si el inversionista desea un rendimiento anual efectivo del 24%.

4. Calcular el rendimiento de un bono cuyo valor nominal es de $3,000.00 adquirido bajo par a 98 con valor de redención a 104 dentro de 5 años y que produce intereses a la tasa anual del 24% convertible semestralmente.

5. Calcular el precio de adquisición que deberá pagar una inversionista por un bono cuyo valor nominal es de $4'000,000.00 redimible a 103 dentro de 5 años y que

produce intereses a la tasa del 18% anual convertible semestralmente, si la inversionista desea un rendimiento anual efectivo del 25% y han transcurrido 3 meses desde el pago del último cupón, utilizando los tres métodos mencionados en el Capítulo.

# XI. TASA REAL DE INTERES

## 1. CONCEPTO E IMPORTANCIA.

En el Capítulo I se hizo referencia a los factores económicos que inciden en la fijación de tasas de interés en los diferentes mercados de dinero o mercados de capital. Lugar preponderante entre los factores económicos lo ocupa la tasa de inflación que esté operando en las sociedades durante los intervalos considerados.

Queda al margen de los temas estrictamente financieros definir un fenómeno económico como lo es la inflación, ni aún las diversas formas de medirla, ya que éstas caen dentro del campo de la econometría; razón por la cual se tratará de la inflación como un fenómeno ya conocido y del cual únicamente interesa comprender plenamente sus efectos financieros independientemente de sus causas y naturaleza.

El tema de la tasa real de interés cobra gran importancia en sociedades que están sufriendo un fenómeno inflacionario agudo, ya que los intereses y el capital se pactan sobre términos monetarios de diferentes tiempos y consecuentemente con diferentes poderes de compra; es decir, que el inversionista recibe su capital y los intereses generados por éste, en unidades monetarias (por ejemplo pesos) de un momento posterior a aquél en que fueron invertidas y por lo tanto, su poder de compra se ha visto reducido por la inflación durante el periodo transcurrido.

La tasa real de interés mide la tasa efectiva de interés que se obtiene de una inversión, pero descontándole el efecto de la inflación por el tiempo transcurrido. La manera más correcta de hacer lo anterior es reexpresar las unidades monetarias que se reciben en momentos posteriores a la inversión original en términos de unidades monetarias originales, es decir, con el mismo poder adquisitivo del momento de la inversión.

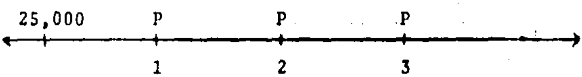
Por ejemplo: Supongamos un inversionista que invierte hoy $100.00 y al que se le ofrece una tasa anual efectiva del 80% si su inversión dura un año. Supóngase además que durante ese año la tasa promedio de inflación medida por alguna fuente confiable para el inversionista es del 50%. El inversionista recibirá al final $180.00 cubriendo su capital y los intereses, pero esos $180.00 no tienen el mismo poder adquisitivo que $180.00 de principio de año. El inversionista desea reexpresar esos $180.00 en términos de poder adquisitivo de principio de año y divide $180.00 entre 1.50 = $120.00, es decir que sus $180.00 del final del año tienen el poder adquisitivo que hubieran tenido $120.00 de principio de año, por lo tanto, la tasa real obtenida por el inversionista es de un 20% en relación al capital original invertido.

Es importante evitar la tentación simplista de restar la tasa de interés anual efectiva menos la tasa de inflación anual, lo que en el ejemplo anterior hubiera proporcionado un resultado falso del 30% que no tiene nada que ver con unidades monetarias originales. A medida que la tasa de interés anual efectiva y la tasa de inflación se elevan, el error que produce esta simplificación es mayor. (Por ejemplo, compruébese en el caso de que la tasa de inflación es del 300% y la tasa anual efectiva de interés es de un 400%; el resultado erróneo produce un 100%, mientras que la tasa real solamente es de un 28% anual).

Merecen especial atención aquellas situaciones donde alguna de las partes involucradas en la transacción financiera o ambas, pagan o reciben dinero en diferentes momentos de tiempo como es el caso de una venta a crédito en abonos. En estos casos la única forma de evaluar co-rrectamente la tasa real de interés consiste en reexpresar cada pago que se haga o que se reciba en términos de poder adquisitivo constante, preferentemente los originales, descontando de esta manera los efectos de la inflación.

Ejemplo:

Suponer que un vendedor de refrigeradores ofrece crédito a 30, 60 y 90 días sobre la compra de un refrigerador que cuesta \$100,000.00 y sobre el cual es necesario pagar un enganche de \$25,000.00. Sobre los restantes \$75,000.00 se carga una tasa de interés mensual efectiva del 7% sobre saldos insolutos, lo que da un pago de amortización mensual de $\frac{\$75,000.00}{a_{\overline{3|}.07}} = \$28,578.87$. Suponiendo que la inflación acumulada del primer mes es de 4%, al segundo mes es de 9% y al tercer mes es de un 15%. Calcular la tasa real de interés anual implícita en la operación.




$$\frac{P}{(1.04)} + \frac{P}{(1.09)} + \frac{P}{(1.15)}$$

Defininiendo la ecuación de valor:

$$100,000 = 25,000 + (27,479.68)\,V_j$$
$$+ (26,219.15)\,V^2_j$$
$$+ (24,851.19)\,V^3_j$$

$$75,000 = \frac{27,479.68}{(1+j)} + \frac{26,219.15}{(1+j)^2} + \frac{24,851.19}{(1+j)^3}$$

Interpolando:

$j_1 = .03 \qquad f(j_1) = 74{,}135.7238$

$j = \ ? \qquad f(j) = 75{,}000$

$j_2 = .02 \qquad f(j_2) = 75{,}559.7226$

$$j = \left(\frac{.02 - .03}{(75{,}559.7226-74{,}135.7238)}\right)(75{,}000-74{,}135.7238)+.03$$

$$j = .0239$$

De lo cual se deduce que la tasa real mensual es de 2.39%, y por lo tanto, la tasa real anual es de $(1+.0239)^{12}-1 = 32.77\%$. Es importante destacar que al comparar tasas de interés efectivas o nominales con tasas de inflación, debe hablarse siempre de un mismo periodo, tanto en longitud como en ubicación en el tiempo, porque de lo contrario se producirán distorciones importantes. También conviene recordar que las tasas de inflación correspondientes a periodos fraccionarios deben de componerse para obtener la tasa correspondiente al periodo unitario, no simplemente sumarse. Por ejemplo, si la tasa de inflación del primer semestre de un año es de un 40% y la tasa de inflación del segundo semestre es de un 35%, la inflación de todo el año no será de un 75% sino de $(1.40)(1.35) - 1 = 0.89$.

Por último, también debe aclararse que es preferible trabajar con tasas promedio de un periodo dado (entre más grande mejor), que con tasas instantáneas o correspondientes a periodos más chicos, que pueden ser el resultado de un desajuste momentáneo en la relación entre tasas de inflación y tasas de interés.

Es conveniente introducir la notación que se utilizará en el resto de este Capítulo, para efectos de uniformidad:

$g$ = tasa anual efectiva de inflación (estimada por una fuente confiable para el inversionista).

$h$ = tasa efectiva de inflación por periodo (ídem).

$u$ = tasa real anual de interés.

$u^{(m)}$ = tasa real nominal anual convertible m veces al año.

$w$ = tasa real efectiva por periodo.

Además de las ya conocidas.

## 2. RELACION ENTRE TASAS EFECTIVAS Y TASAS REALES DE INTERES.

En las transacciones que implican únicamente un pago inicial contra un pago final, el análisis anterior puede simplificarse enormemente ya que solamente juega una tasa de inflación y una tasa efectiva de interés, razón que permite incluso ignorar los montos de los pagos involucrados.

Si el plazo considerado es de un año el problema se reduce al cociente del monto acumulado entre el factor de inflación acumulado, es decir,

$$u = \frac{(1+i)}{(1+g)} - 1$$

$$u = \frac{(1+i) - (1+g)}{(1+g)}$$

$$u = \frac{i-g}{1+g} \qquad \text{(XI.1)}$$

Si el plazo considerado es menor a un año:

$$w = \frac{(1+j)}{(1+h)} - 1$$

$$w = \frac{(1+j) - (1+h)}{(1+h)}$$

$$w = \frac{j-h}{1+h} \qquad \text{(XI.2)}$$

Por último, si el periodo contemplado es mayor a un año conviene trabajar las tasas en forma anual.

$$(1+\bar{u})^n = \frac{(1+\bar{I})^n}{(1+\bar{g})^n}$$

$$(1+\bar{u}) = \frac{(1+\bar{I})}{(1+\bar{g})}$$

$$\bar{u} = \frac{(1+\bar{I})}{(1+\bar{g})}-1$$

$$\bar{u} = \frac{1+\bar{I} - 1-\bar{g}}{1+\bar{g}}$$

$$\bar{u} = \frac{\bar{I} - \bar{g}}{1+\bar{g}} \qquad \text{(XI.3)}$$

Donde la notación:

$\bar{u}$ = tasa real efectiva promedio de interés

$\bar{g}$ = tasa de inflación anual efectiva promedio.

$\bar{I}$ = tasa anual efectiva de interés promedio.

Cuando en un mismo año, una o varias de las tres variables involucradas haya sufrido variaciones considerables es conveniente aplicar la fórmula sobre los promedios anuales para lograr que el cálculo tenga una mayor precisión.

## 3. RELACION ENTRE TASAS REALES DE INTERES Y TASAS NOMINALES.

En el caso anterior de transacciones con un pago único para cada parte y si se contemplan tasas nominales de interés:

$$\bar{u} = \frac{(1+i^{(m)}/m)-1}{1+g}$$

$$w = \frac{(1+i^{(m)}/m)}{1 + h} - 1$$

$$w = \frac{(1+i^{(m)}/m) -1-h}{1 + h}$$

$$w = \frac{i^{(m)}/m-h}{1 + h}$$

$$(1+\overline{w})^n = \frac{(1+\overline{i}^{(m)}/m)^{mn}}{(1+\overline{g})^n} \qquad (XI.4)$$

$$(1+\overline{u})^n = \frac{(1+\overline{i}^{(m)}/m)^{m}}{(1+\overline{g})} \qquad (XI.5)$$

Ejemplos:

1) Calcular la tasa real anual efectiva que significa una tasa anual efectiva de interés del 70% si la tasa anual efectiva de inflación durante el año es del 52.28%.

$i = 70\%$ $\qquad u = \dfrac{i-g}{1+g}$

$g = 52.28\%$ $\qquad u = \dfrac{.70 - .5228}{1 + .5228}$

$$u = \frac{.1772}{1.5228} = .116365$$

$$u = 11.6365\%$$

2) Calcular qué tasa real anual efectiva y mensual efectiva está implícita en una tasa de interés mensual efectiva del 6.75% si la tasa promedio mensual de inflación es del 5.44%

$j = 6.75\%$ $\qquad w = \dfrac{j-h}{1+h}$

$h = 5.44\%$ $\qquad w = \dfrac{0.0675-0.0544}{1.0544} = .012424$

$$w = 1.2424\% \text{ mensual}$$
$$(1+u) = (1+w)^{12}$$
$$(1+u) = (1.012424)^{12} = 1.1597$$
$$u = .1597$$
$$u = 15.97\% \text{ anual.}$$

3). ¿Qué tasa real efectiva obtuvo un inversionista que depositó su dinero a plazo fijo a 2 años, - recibiendo una tasa neta promedio del 56.2% anual si la tasa de inflación promedio durante esos 2 años fue del 95.4%?.

$i = 56.2\%$ $\qquad u = \dfrac{i-g}{1+g}$

$g = 95.4\%$ $\qquad u = \dfrac{.562-.954}{1.954}$

$$u = \frac{-.392}{1.954}$$
$$u = -.200614$$
$$= -20.0614\% \text{ anual.}$$

4. Calcular la tasa real anual efectiva de interés - que significa una tasa nominal convertible mensualmente del 53.4% anual si la tasa anual efectiva de inflación durante - el año es del 48.1%.

$$i^{(12)} = .534 \Longrightarrow j = 0.0445$$
$$(1+i) = (1+j)^{12} = (1.0445)^{12} = 1.6862$$
$$i = .6862$$
$$u = \frac{i-g}{1+g} = \frac{.6862-.481}{1.481} = .1385$$
$$u = 13.85\% \text{ anual.}$$

5. Calcular qué tasa real anual efectiva y mensual - efectiva está implícita en una tasa anual nominal del 47.2% si la tasa de inflación es del 5.29% mensual.

$$i^{(12)} = 0.472 \Longrightarrow j = 0.039333$$

$$w = \frac{j-h}{1+h} = \frac{0.039333-0.0529}{1.0529} = -0.012885$$

$w$ = -1.2885% mensual real

$$(1+u) = (1+w)^{12} = (0.987115)^{12}$$

$$(1+u) = .85588$$

$$u = -0.14412$$

$u$ = -14.412% anual real.

6. ¿Qué tasa real efectiva anual obtuvo una inversionista que invirtió hace 3 años en Petrobonos obteniendo un rendimiento anual efectivo del 84.8%, anual si la tasa de inflación promedio durante esos tres años fue del 79.6%?.

$i = .848$
$g = .796$

$$u = \frac{i-g}{1+g} = \frac{.848-.796}{1.796} = 0.028953$$

$u$ = 2.8953% anual real.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. El dueño de una fábrica de colchones desea comprar una máquina que le cuesta $250,000.00 más un enganche de $50,000.00; le ofrecen crédito a 90 y 180 días sobre la compra de dicha máquina; sobre los $250,000.00 se carga una tasa de interés trimestral efectiva de 22.5% sobre saldos insolutos, lo que le da un pago de amortización trimestral de $168,509.55.

La inflación acumulada del primer trimestre es de un 15% y del 2°. es de un 26%.

Encontrar la tasa anual real de interés implícita en la operación.

2. Calcular qué tasa real anual efectiva y mensual efectiva, está implícita en una tasa anual nominal del 45.26% si la tasa mensual de inflación es del 5.79%.

3. Calcular la tasa real anual efectiva de interés que equivale a una tasa nominal convertible mensualmente del 52.23% anual, siendo la tasa anual efectiva de inflación del 48.53%.

4. Calcular la tasa real anual efectiva que equivale a una tasa anual efectiva de interés del 68.56%, si la tasa de inflación durante el año es del 51.75%.

# APENDICE

# E X P O N E N T E S.

## 1. EXPONENTES POSITIVOS.

Se utiliza la expresión algebraica $X^n$ para denotar el producto abreviado de n factores, donde cada uno de ellos - es X, tal que:

X es un número real y se le denomina con el nombre de base, n es un número entero positivo y se le denomina con el nombre de exponente.

$$X^n = \underbrace{X.X.X.X...X}_{n \text{ veces}}$$

$$2^4 = 2.2.2.2. = 16$$
$$-3^3 = -3.-3.-3 = -27$$

Un número positivo siempre permanecerá positivo des-- pués de ser elevado a cualquier potencia, ya sea par o impar.

$$4^4 = 4.4.4.4 = 256$$
$$3^5 = 3.3.3.3.3. = 243$$

Un número negativo permanecerá negativo si y sólo si, es elevado a una potencia impar.

$$-1^5 = -1.-1.-1.-1.-1 = -1$$
$$-4^3 = -4.-4.-4 = -64$$

y se volverá positivo al ser elevado a una potencia par.

$$-5^2 = -5.-5 = 25$$
$$-2^4 = -2.-2.-2.-2 = 16$$

## 2. EXPONENTES NEGATIVOS.

La expresión algebraica $X^{-n}$, representa el inverso de $X^n$, donde X es un número real diferente de cero y n es un - número entero positivo.

$$X^{-n} = \frac{1}{X^n} \qquad \forall X \neq 0$$

Ejemplo: $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$

$$-2^{-3} = \frac{1}{-2^3}$$

$$-2a^{-2} = \frac{-2}{a^2}$$

Esto es válido para el caso de expresiones algebraicas o trascendentes, siempre y cuando se encuentren definidas en los reales y cuyo valor difiera de cero:

Por ejemplo: $(a^3+b+c^2)^{-n} = \frac{1}{(a^3+b+c^2)^n}$, $a^3+b+c^2 \neq 0$

$$(a^2\cos(hx)-b^3\sqrt{c^4})^{-n} = \frac{1}{(a^2\cos(hx)-b^3\sqrt{c^4})^n},\ a^2\cos(hx)-b^3\sqrt{c^4} \neq 0$$

3. EXPONENTES FRACCIONARIOS.

Se utiliza la expresión algebraica $X^{1/n}$ para definir la raíz n-ésima del número X,

$$X^{1/n} = \sqrt[n]{X} \qquad 4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$$
$$X^{1/3} = \sqrt[3]{X} \qquad 8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

y la expresión algebraica $X^{m/n}$, como la raíz n-ésima del número X elevado a la m-ésima potencia.

$$X^{m/n} = \sqrt[n]{X^m}$$
$$4^{2/3} = \sqrt[3]{4^2}$$

Tal que m x n cumplen con ser enteros positivos.

Estas expresiones tienen soluciones reales siempre -

que la base X sea positiva o siempre que X sea negativa si n es par,

$$4^{6/2} = \sqrt{4096} = 64$$

$$-2^{6/3} = \sqrt[3]{-2^6} = \sqrt[3]{64} = 4$$

y no la tienen cuando X es negativa y n es impar.

$$-5^{3/2} = \sqrt{-5^3} = \sqrt{-125}$$

Aplicando la definición de exponentes negativos a la definición de exponentes fraccionarios se tiene que la expresión algebraica $X^{-m/n}$ es igual al inverso de la expresión $X^{m/n}$, la que a su vez representa la raíz n-ésima del número $X^m$.

$$X^{-m/n} = \frac{1}{X^{m/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{X^m}}$$

Ejemplos:

$$32^{-2/5} = \frac{1}{32^{2/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{32^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1024}} = \frac{1}{4}$$

$$81^{-3/4} = \frac{1}{81^{3/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{531,441}} = \frac{1}{27}$$

4. EXPONENTE CERO.

Aplicando la definición de exponente negativo a la definición de exponente positivo, la expresión $X^n.X^{-n}$, quedaría:

$$X^n.X^{-n} = X^{(n-n)} = X^0 = \frac{X^n}{X^n} = 1$$

para toda $X \neq 0$

Por lo que concluímos que cualquier base diferente de cero elevada a la cero potencia, es igual a 1, ya que el cero elevado a cualquier potencia es cero.

Ejemplos: $0^3 = 0.0.0 = 0$, $3^0 = 1$, $-8^0 = 1$

5. PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES.

Existen ciertas propiedades que es necesario conocer - para la adecuada operación con exponentes.

Sean m y n números enteros positivos, y X,Y expresiones con rango en los reales, tales que se satisfacen las siguientes propiedades:

a) El producto de dos factores, con el mismo número como base, es igual a la base elevada a la suma de sus exponentes.

$$X^m . X^n = X^{m+n}$$
$$X^2 . X^3 = X^5$$
$$3^2 . 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$$
$$2^{1/2} . 2^{3/2} = 2^{1/2+3/2} = 2^2$$

b) El factor X elevado a la m-ésima potencia, elevado a la n-ésima potencia es igual al factor X elevado al producto de sus exponentes.

$$(X^m)^n = X^{mn}$$
$$(x^2)^3 = X^{2.3} = X^6$$
$$(4^3)^2 = 4^{3.2} = 4^6$$
$$(3^{1/2})^{-4} = 3^{1/2.-4} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

c) El cociente de dos factores, con el mismo número como base, es igual a la base elevada a la diferencia de la potencia del dividendo menos la potencia del divisor.

$$\frac{X^m}{X^n} = X^{m-n}$$
$$\frac{X^4}{X^2} = X^{4-2} = X^2$$
$$\frac{5^5}{5^2} = 5^{5-2} = 5^3 = 125$$
$$\frac{4^3}{4^{-2}} = 4^{3-(-2)} = 4^5 = 1,024$$

De esta ley se derivan tres casos según la relación que exista entre los exponentes:

i) $m > n$

$\frac{X^m}{X^n} = X^{m-n}$, donde $m-n > 0$

y resultan exponentes positivos.

ii) $m < n$

$\frac{X^m}{X^n} = X^{m-n}$, donde $m-n < 0$

y resultan exponentes negativos.

iii) $m = n$

$\frac{X^m}{X^n} = X^{m-n} = X^{m-m} = X^0 = 1$

y resulta el exponente cero.

d) El producto de dos bases distintas elevadas a un mismo exponente es igual al producto de cada base elevada al mismo exponente.

$$(X.Y)^n = X^n.Y^n$$

$$(2x)^3 = 2^3x^3 = 8x^3$$

$$(4x)^{-2} = 4^{-2}x^{-2} = \frac{1}{4^2x^2} = \frac{1}{16x^2}$$

e) El cociente de dos bases distintas elevadas a un mismo exponente es igual al cociente de cada base elevada al mismo exponente.

$$(\frac{X}{Y})^n = \frac{X^n}{Y^n}$$

$$(\frac{3}{5})^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$

$$(\frac{2}{5})^{3/2} = \frac{2^{3/2}}{5^{3/2}} = \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{5^3}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{125}}$$

Ejemplos:

$$(\frac{5^3}{2^6})^{-1/3} = \frac{1}{(\frac{5^3}{2^6})^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{125}{64}}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{(3ab)^5}{(4a^2b^3)^3} = \frac{243a^5b^5}{64a^6b^9} = \frac{243a^{-1}b^{-4}}{64} = \frac{243}{64ab^4}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^2b^4}{a^{-1/3}\ b^{4/3}}} = \frac{a^{2/3}\ b^{4/3}}{a^{-1/3}\ b^{4/3}} = a^{2/3-(-1/3)}b^{4/3-4/3} = a^1b^0 = a$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Expresar con exponentes positivos y simplificar las siguientes ecuaciones:

a) $$\frac{3x^{2}y^{-5}z^{-7}}{6x^{-3}y^{-4}z^{-6}}$$

b) $$\frac{5a^{3}b^{0}c}{a^{-4}b^{-1/2}c^{-3/4}}$$

2. Expresar con signo radical y exponente positivo:

a) $$\frac{8a^{-3/4}}{1/b^{4}}$$

b) $(a^{-1/4})^{1/3}$

3. Hallar el valor de:

a) $$\frac{42^{-1/6}}{358}$$

b) $$\frac{a^{2/3}}{b^{-4}} + a^{-1/2}b^{1/3} - a^{0}b^{0} + \frac{a}{b^{5/3}}$$ para a=8 y b=6

4. Expresar con exponentes positivos:

a) $$\frac{2\sqrt[4]{m^{2}}}{3\sqrt[5]{n^{-3}}}$$

b) $\sqrt{x^{-1}} \quad \sqrt[3]{n^{-3}}$

5. Multiplicar:

a) $2b^{2/5}$ por $b^{-4/3}$

b) $x^{-2/3}y^{3/4}$ por $x^{-1/4}y^{2/5}$

6. Dividir.

a) $m^{-1/2}n^{2/3}$ entre $m^{-1/4}n^{-1}$

b) $m^{2/3}$ entre $m^{-1/5}$

7. Simplificar las siguientes expresiones.

a) $(a^{-3/2}b^{0})^{3}$

b) $(3x^{-1/2}y^{-1/3})^{4}$

8. Desarrollar:

a) $(2a^{-4/3} - 3b^{-1/2})^{2}$

b) $(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})^{3}$

# LOGARITMOS.

El conocimiento de las operaciones con logaritmos es de gran importancia para la persona involucrada en el campo financiero, ya que su aplicación permite resolver multiplicaciones, divisiones, potencias, raíces con gran rapidez, despejes que de otra forma resultarían largos y complicados, además de ser muy útil para la resolución de ecuaciones exponenciarias.

## 1. DEFINICION.

El logaritmo de base b del número N, representa el exponente al que hay que elevar la base b para obtener el número N; se denota por:

$$X = \log_b (N)$$

donde:

b es un número positivo diferente de 1

N es un número positivo cualquiera.

Ejemplo:

$$4 = \log_3(81)$$

Para obtener el número 81, se debe elevar la base 3 a la 4a. potencia,

$$3^4 = 3.3.3.3 = 81$$

$$b^x = N$$

Debido a que los logaritmos son una particularidad de los exponentes, se puede expresar esta relación de dos formas:

| FORMA LOGARITMICA | FORMA EXPONENCIAL |
|---|---|
| $X = \log_b(N)$ | $b^x = N$ |

Ejemplo:

| | |
|---|---|
| $4 = \log_3(81)$ | $3^4 = 81$ |

2. CLASIFICACION.

Los logaritmos se pueden clasificar según su base, siendo los más conocidos los decimales o de Briggs y los naturales o de Neper.

- Logaritmos decimales o de Brigs.

Son aquéllos que tienen como base el número 10; por su fácil manejo son los más usados en la práctica. Por convención no se suele especificar el número 10 como subíndice de la palabra log, sobrentiéndese que al no estar especificada la base sobre la que se están definiendo los logaritmos, ésta será decimal.

$$\log_{10} 100 = 2$$

- Logaritmos naturales o de Neper.

Son aquéllos cuya base es el número e, que tiene un valor aproximado de 2.718281.

Por convención de logaritmos,

si $e^X = N$

entonces,

$$X = \log_e(N) = L\ (N)$$

Ejemplo:

$$\log_e 1.035 = L\ (1.035) = 0.0344008$$

El número e es el límite de una expresión contínua de crecimiento aceleradamente creciente y por lo tanto, es muy útil en expresiones de matemáticas superiores.

$$e = \lim_{x} \ 1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$$

## 3. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS.

Las propiedades para trabajar con logaritmos son equivalentes a las de los exponentes, ya que como se mencionó, los logaritmos son una particularidad de los exponentes; dichas propiedades son las siguientes:

i) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_b(MN) = \log_b(M) + \log_b(N)$$

Ejemplo:

$$\log (100 \times 1000) = \log 100 + \log 1000 = 2+3 = 5$$

Esta propiedad se extiende para el caso del logaritmo del producto de n números positivos.

$$\log_g (M_1M_2M_3M_4 \ldots M_n) = \log_b M_1 + \log_b M_2 + \log_b M_3 + \ldots + \log_b Mn$$

ii) El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b(M) - \log_b(N)$$

Ejemplo:

$$\log \frac{10000}{10} = \log 10000 - \log 10 = 4-1 = 3$$

iii) El logaritmo de una potencia r, es igual a r veces el logaritmo del número M.

$$\log_b (M^r) = r \log_b M$$

Ejemplo:

$$\log (1000^3) = 3 \log 1000 = 3(3) = 9$$

iv) El logaritmo de una raíz, r, es igual al logaritmo del número M dividido entre el índice de la raíz.

$$\log_b \sqrt[r]{M} = \frac{1}{r} \log_b(M)$$

Ejemplo:

$$\log_b \sqrt[3]{1000} = \frac{1}{3} \log 1000 = \frac{3}{3} = 1$$

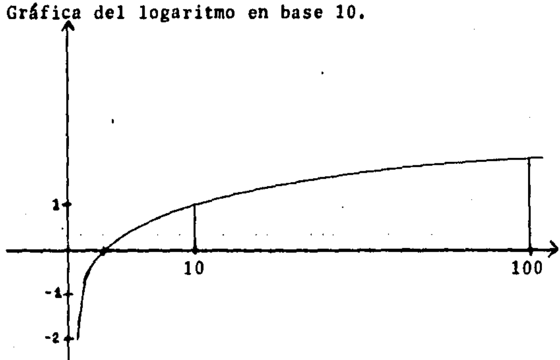
Para cualquier sistema de logaritmos se deben cumplir los siguientes requisitos:

- La base b debe ser mayor que cero, para evitar la alternancia de signos de las potencias de un número negativo.
- Los números N menores que cero no tienen logaritmo, ya que al ser la base positiva, ningún exponente de ésta produciría un número negativo.
- El logaritmo de la unidad es siempre cero para cualquier base.

  $b^{o} = 1, \qquad \log_b 1 = 0$
- El logaritmo de una cantidad igual a la base es 1

  $\log_b b = 1$
- El logaritmo de un número mayor que 1, será positivo; el logaritmo de un número menor que 1, será negativo.

  Gráfica del logaritmo en base 10.




Como puede observarse sobre la curva logarítmica continúa, a valores intermedios entre dos potencias enteras consecutivas de 10, les corresponden números no enteros.

$$\text{Si } 10 < C < 100$$
$$\Rightarrow \log 10 < \log C < \log 100$$
$$1 < \log C < 2$$

Por lo tanto, el logaritmo decimal de un número positivo cualquiera N, se puede expresar como un número real, que puede descomponerse en una parte entera, llamada característica y una parte decimal llamada mantisa.

Propiedad fundamental de los Logaritmos Decimales:

Por propiedades de las potencias del número 10, si un número M puede expresarse como $10^k$ veces otro número N (donde k es un entero), entonces el logaritmo decimal de M puede expresarse como $k+\log N$.

Lo anterior significa que todos los números positivos cuyas cifras significativas sean iguales (no importando la posición del punto decimal), tendrán logaritmos decimales con mantisas iguales, solamente difiriendo entre sí por el valor de la característica.

Ejemplo:

$$\log 5948 = 3.7744$$
$$\log 59.48 = 1.7744$$
$$\log 0.05948 = -1.2256$$

Los valores de las mantisas se encuentran tabulados generalmente bajo entrada de las primeras cuatro cifras significativas.

## 4. PROCEDIMIENTO PARA DETERMINAR EL LOGARITMO DECIMAL DE UN NUMERO POSITIVO.

a) Se determinan cuales son las primeras cuatro cifras significativas del número en cuestión independientemente de su posición relativa al punto decimal.

78,923.48 ------- 7892

0.00635 ------- 6350

b) Se busca la mantisa del logaritmo del número N en las tablas, tomando en cuenta como entrada a las mismas el número formado por los primeros cuatro dígitos significativos.

c) Para determinar la característica del logaritmo N se toma en cuenta la posición de la primera cifra significativa respecto al punto decimal.
Una vez determinada dicha posición:
- Si es antes del punto decimal, es decir $N \geqslant 1$, a dicha posición se le resta 1 y el resultado es la característica. Resultando necesariamente positiva o cero.
- Si es después del punto decimal, es decir $N < 1$, dicha posición con el signo negativo representa la característica del número N y resultará siempre negativa.

Ejemplo:

Dada la tabla de logaritmos que se presenta a continuación resolver los siguientes ejercicios:

TABLA DE MANTISAS

| N. | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Dif. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 135 | 13 | 0334 | 0655 | 0977 | 1298 | 1619 | 1939 | 2260 | 2580 | 2900 | 3219 | 321 |
| 6 | | 3539 | 3858 | 4177 | 4496 | 4814 | 5133 | 5451 | 5769 | 6086 | 6403 | 318 |
| 7 | | 6721 | 7637 | 7354 | 7671 | 7987 | 8303 | 8618 | 8934 | 9249 | 9564 | 316 |
| 8 | | 9879 | °0194 | °0508 | °0822 | °1136 | °1450 | °1763 | °2076 | °2389 | °2702 | 314 |
| 9 | 14 | 3015 | 3327 | 3639 | 3951 | 4263 | 4574 | 4885 | 5196 | 5507 | 5818 | 311 |
| 140 | 14 | 6128 | 6438 | 6748 | 7058 | 7367 | 7676 | 7985 | 8294 | 8603 | 8911 | 309 |
| 1 | | 9219 | 9527 | 9835 | °0142 | °0449 | °0756 | °1063 | °1370 | °1676 | °1982 | 307 |
| 2 | 15 | 2288 | 2594 | 2900 | 3205 | 3510 | 3815 | 4120 | 4424 | 4728 | 5032 | 305 |
| 3 | | 5336 | 5640 | 5943 | 6246 | 6549 | 6852 | 7154 | 7457 | 7759 | 8061 | 303 |
| 4 | | 8362 | 8664 | 8965 | 9266 | 9567 | 9868 | °0168 | °0469 | °0769 | °1068 | 301 |
| 145 | 16 | 1368 | 1667 | 1967 | 2266 | 2564 | 2863 | 3161 | 3460 | 3758 | 4055 | 299 |
| 6 | | 4353 | 4650 | 4947 | 5244 | 5541 | 5838 | 6134 | 6430 | 6726 | 7022 | 297 |
| 7 | | 7317 | 7613 | 7908 | 8203 | 8497 | 8792 | 9086 | 9380 | 9674 | 9968 | 295 |
| 8 | 17 | 0262 | 0655 | 0848 | 1141 | 1434 | 1726 | 2019 | 2311 | 2603 | 2895 | 293 |
| 9 | | 3186 | 3478 | 3769 | 4060 | 4351 | 4641 | 4932 | 5222 | 5512 | 5802 | 291 |

1) Encontrar el logaritmo de 142.80
a) Cifras significativas: 1428
b) Mantisa (se busca en las tablas): 154728
c) Característica: 2

$$\therefore \text{Log } 142.80 = 2.154728$$

2) Encontrar el logaritmo de 0.001374
a) Cifras significativas: 1374
b) Mantisa (se busca en las tablas): 137987
c) Característica: $\bar{3}$

$$\therefore \text{Log } 0.001374 = \bar{3}.137987$$

5. ANTILOGARITMO DE UN NUMERO.

Es el resultado de elevar la base de los logaritmos a ese número.

$$\log_b(N) = X$$
$$b^x = N$$

Consiste en encontrar el número al que corresponde un logaritmo.

$$b^x = N \qquad 3^4 = 81$$
$$\log_b N = X \qquad \log_3 81 = 4$$
$$\text{antilog}_b X = N \qquad \text{antilog}_3 4 = 81$$

Procedimiento para obtener el antilogaritmo de una base decimal.

El procedimiento para obtener el antilogaritmo de un número es el proceso inverso para encontrar el logaritmo de un número y es el siguiente:

a) Se determinan cuáles son las primeras seis cifras decimales del logaritmo, es decir, las primeras seis cifras de la mantisa del logaritmo.
b) De aparecer exacto, se busca dicho número en las tablas de mantisas, sino se determinan aquéllos dos valores entre los cuales queda comprendida la mantisa buscada.

c) Para determinar las primeras cuatro cifras significativas del número N buscado, se obtienen los números que constituyen la entrada a la tabla que darían dicha mantisa.

d) Para determinar la posición relativa de la primera cifra significativa del número N buscado, respecto del punto decimal, se atiende a la característica del logaritmo:

- Si la característica del logaritmo es no negativa, se le suma 1 y el resultado será la posición que deba ocupar la primera cifra significativa del número N antes del punto decimal.
- Si la característica del logaritmo es negativa, se le quita el signo negativo y el resultado será la posición que deba ocupar la primera cifra significativa del número N después del punto decimal.

Ejemplo:

Utilizando la tabla de mantisas que se presenta a continuación, determinar el antilogaritmo de los siguientes números:

TABLA DE MANTISAS

| N. | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Dif. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 685 | 83 | 5691 | 5754 | 5817 | 5881 | 5944 | 6007 | 6071 | 6134 | 6197 | 6261 | |
| 6 | | 6324 | 6387 | 6451 | 6514 | 6577 | 6641 | 6704 | 6767 | 6830 | 6894 | |
| 7 | | 6957 | 7020 | 7083 | 7146 | 7210 | 7273 | 7336 | 7399 | 7462 | 7525 | |
| 8 | | 7588 | 7652 | 7715 | 7778 | 7841 | 7904 | 7967 | 8030 | 8093 | 8156 | |
| 9 | | 8219 | 8282 | 8345 | 8408 | 8471 | 8534 | 8597 | 8660 | 8723 | 8786 | |
| 690 | 83 | 8849 | 8912 | 8975 | 9038 | 9101 | 9164 | 9227 | 9289 | 9352 | 9415 | |
| 1 | | 9478 | 9541 | 9604 | 9667 | 9729 | 9792 | 9855 | 9918 | 9981 | °0043 | |
| 2 | 84 | 0106 | 0169 | 0232 | 0294 | 0357 | 0420 | 0482 | 0545 | 0608 | 0671 | |
| 3 | | 0733 | 0796 | 0859 | 0921 | 0984 | 1046 | 1109 | 1172 | 1234 | 1297 | |
| 4 | | 1359 | 1422 | 1485 | 1547 | 1610 | 1672 | 1735 | 1797 | 1860 | 1922 | |
| 695 | 84 | 1985 | 2047 | 2110 | 2172 | 2235 | 2297 | 2360 | 2422 | 2484 | 2547 | 62 |
| 6 | | 2609 | 2672 | 2734 | 2796 | 2859 | 2921 | 2983 | 3046 | 3108 | 3170 | |
| 7 | | 3233 | 3295 | 3857 | 3420 | 3482 | 3544 | 3606 | 3669 | 3731 | 3793 | |
| 8 | | 3855 | 3918 | 3980 | 4042 | 4104 | 4166 | 4229 | 4291 | 4353 | 4415 | |
| 9 | | 4477 | 4539 | 4601 | 4664 | 4726 | 4788 | 4850 | 4912 | 4974 | 5036 | |

1) Encontrar el antilogaritmo de 4.837281722

   a) Primeras seis cifras de la mantisa: 837282
   b) Se busca el valor en las tablas:
      Está entre: .837273 y .837336
   c) Los números en las tablas que darían estas mantisas son:

      .837273 --- 6875 (es el más cercano)
      .837336 --- 6876

$$\begin{array}{r} .837273 \\ -.837336 \\ \hline .000063 \end{array} \qquad \begin{array}{r} .837282 \\ -.837273 \\ \hline .000009 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1 - .000063 \\ x - .000009 \end{array} \quad 6875+.14=6875.14$$

   d) Características: $4 + 1 = 5$

$$\therefore \text{Antilog } 4.837281722 = 68751.4$$

2) Encontrar el antilogaritmo de $\bar{3}.84273416$

   a) Primeras seis cifras de la mantisa: 842734
   b) Se busca el valor en tablas: 842734
   c) El número que daría esta mantisa es: 6962
   d) Característica: $\bar{3}$

$$\therefore \text{Antilog } \bar{3}.84273416 = 0.006962$$

## 6. LOGARITMOS NEGATIVOS.

Debe observarse que el logaritmo de base b de un número positivo cualquiera (N), siempre es un número real X, por tratarse de un exponente. En el caso de números menores que 1, el logaritmo es un número real negativo, en el cual tanto su parte entera (característica) como su parte decimal (mantisa) son negativas.

Originalmente, las tablas de mantisas de logaritmos decimales fueron preparadas para ambos casos, pero su costo resultó muy elevado, especialmente para las tablas de mayor precisión (10 a 15 decimales). Debido a lo anterior, se simplificaron las tablas de mantisas de logaritmos decimales de manera de solamente presentar mantisas positivas, restando una unidad a la característica.

Es muy importante resaltar que en las expresiones de logaritmos decimales (obtenidos por tablas) solamente la característica puede ser negativa, pero la mantisa siempre es positiva, razón por la cual el signo negativo, en caso de haberlo, se anota sobre la característica.

Ejemplo:

$$\bar{8}.2436$$

La expresión anterior no representa al número real -8.2436, sino al número real -7.7564 (-8+0.2436), que sería el obtenido si se hubieran empleado tablas duales de mantisas o bien, si se hubiese calculado por calculadora o computadora.

Ejemplo:

| | | | |
|---|---|---|---|
| -3.284896 | 0 | = | $\bar{4}.715104$ |
| -3.000000 | -1.000000 | = | -4.000000 |
| -0.284896 + | 1.000000 | | 0.715104 |

Similarmente cuando se tiene un logaritmo en su forma normal formado por una característica negativa y una mantisa positiva, puede expresarse como un logaritmo real negativo mediante la suma algebraica de su característica y su mantisa.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} \underline{\bar{4}.715104} \\ -4.000000 \\ \underline{+0.715104} \\ -3.284896 \end{array}$$

7. OPERACIONES CON LOGARITMOS.

Aplicando las propiedades de los logaritmos pueden resolverse ecuaciones o partes de ecuaciones siempre y cuando no contengan expresiones que impliquen la operación de suma o resta.

Ejemplo:

Encontrar el valor de la siguiente expresión:

$$y = \frac{\log(0.9246)}{2 \log 1.03}$$

$$= \frac{\bar{1}.974327}{2\ (0.012837)}$$

$$= \frac{-0.25673}{0.25673}$$

$$= 1$$

EJERCICIOS.

Efectuar las siguientes operaciones resolviendo por logaritmos:

1) $x = \dfrac{836.28}{27.37}$

$\log x = \log 836.28 - \log 27.37$

$\log x = 2.922351 - 1.437274$

$\log x = 1.485077$

$x = \text{antilog}\ (1.485077) = 30.5546$

2) $x = \dfrac{9.18 \times 8.56}{3.62}$

$\log x = \log 9.18 + \log 8.56 - \log 3.62$

$\log x = .962842 + .932473 - .558708$

$\log x = 1.336607$

$x = \text{antilog}\ (1.336607) = 21.7074$

3) $x = 4(5)^3\ (8)^2$

$\log x = \log 4 + 3\log 5 + 2\log 8$

$\log x = .602059 + 2.096910 + 1.806179$

$\log x = 4.505148$

$x = \text{antilog}\ (4.505148) = 32.000$

4) $x = \sqrt[3]{1236.47}$

$\log x = \dfrac{1}{3} \log 1236.47$

$\log x = \dfrac{3.092183}{3}$

$\log x = 1.030727$

$x = \text{antilog}\ (1.030727) = 10.7331$

5) $x = (1.2836)^{-4}$

$\log x = -4 \log 1.2836$

$\log x = -4\ (.108429)$

$\log x = -.433716 \quad x = \text{antilog}(-.433716) = 0.36837$

6) $x = \dfrac{(3.1322 \times 2.2789)^3}{\sqrt[2]{4.8632}}$

$\log x = \left(\dfrac{3(\log 3.1322 + \log 2.2789)}{\frac{1}{2} \log 4.8632}\right) \log$

$$\log x = \left( \frac{3(.495849 + .357725)}{\frac{.686922}{2}} \right) \log$$

$$\log x = 2.560722 - 0.343461 = 2.217261$$

$$x = \text{antilog}\ (2.217261) = 164.9153$$

7) Calcular $S = P\ (1+i)^n$ si $P = 809{,}000$, $i = 21\%$, $n = 1/20$ año.

$S = 809{,}000\ (1+.21)^{1/20}$

$\log S = \log 809{,}000 + \log\ (1.21)^{1/20}$

$\log S = \log 809{,}000 + \frac{1}{20}\ (\log 1.21)$

$\log S = 5.9079485 + .00413925$

$\log S = 5.9120877$

antilog $5.9120877 = 816{,}747.46$

## 8. OBTENCION DEL LOGARITMO NATURAL DE UN NUMERO N A PARTIR DEL LOGARITMO DECIMAL DEL MISMO NUMERO.

Como se definió el logaritmo natural es aquél que tiene como base el número $e = 2.718281$.

Es difícil encontrar las tablas con las mantisas correspondientes de base e y además no existe una fórmula sencilla para determinar la característica del logaritmo neperiano de un número n en base a la posición relativa al punto decimal del primero de sus dígitos significativos.

A continuación se desarrollará la fórmula que se utiliza para obtener un logaritmo natural a partir de un logaritmo decimal.

$$e^x = N$$

$$\log_{10}\ (e^x) = \log_{10}(N)$$

$$x\log_{10} e = \log_{10}(N)$$

$$x = \frac{\log_{10}(N)}{0.43429}$$

$$x = \log_{10}(N)\ (2.302585)$$

Donde x representa el logaritmo natural del número N, por la definición $e^x = N$.

Similarmente si se quisiera el logaritmo decimal de un número a partir del logaritmo natural, se tendría:

$$10^y = M$$
$$L(10^y) = L(M)$$
$$y\,L(10) = L(M)$$
$$y = \frac{L(M)}{L(10)}$$
$$y = \frac{L(M)}{2.302585}$$
$$y = L(M)\ (0.43429)$$

Puede concluirse que para obtener el logaritmo natural de un número dado, se multiplica su logaritmo decimal por 2.302585 y para obtener el logaritmo decimal de un número dado, se multiplica su logaritmo natural por 0.43429.

Ejemplos:

- Encontrar el logaritmo natural de 1.035

$\log(1.035) = 0.014940$

$L(1.035) = (0.014940349)(2.302585)$

$L(1.035) = 0.034401425$

- Encontrar el logaritmo decimal de 1.0245

$L(1.0245) = 0.024204688$

$\log(1.0245) = (0.024204688)(0.43429)$

$\log(1.0245) = 0.010511854$

## 9. ECUACIONES EXPONENCIARIAS.

Una ecuación en la cual la incógnita o la variable independiente se encuentra formando parte del exponente de alguno de sus términos se dice que es una ecuación exponenciaria. Es decir:

$C^x = K$      C y K son conocidas

$$\log C^x = \log K$$
$$x \log C = \log K$$
$$x = \frac{\log K}{\log C}$$

Ejemplo:

Encontrar el valor de t que resuelve la ecuación $2 = (1.045)^t$

$$\log 2 = t \log 1.045$$

$$0.301030 = t\,(0.019116)$$

$$\frac{0.301030}{0.019116} = t$$

$$t = 15.75$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. ¿De cuántas maneras se representan los lagaritmos? Dar un ejemplo de cada una.

2. Resolver por medio de logaritmos:

a) $$\frac{(75)\ (568)}{(25)\ (270)}$$

b) $$\frac{(50)\ (175)^2}{\sqrt{42}\ (20)}$$

c) $$\frac{\sqrt[4]{799}\ (28)^{14}}{(572)^6\ (0.0078)}$$

d) $$\frac{\sqrt[5]{1752}\ (478)^4}{(971)^2\ (0.932)^2}$$

e) $$\frac{\sqrt{962}\ (271)^3}{(875)(0.0075)}$$

f) $$\frac{(235)^5\ \sqrt[6]{540}}{(0.099)^3\ \sqrt{848}}$$

g) $$\frac{(972)(95)^5\ \sqrt[9]{875}}{(128)^3\ (0.894)}$$

h) $$\frac{\sqrt[4]{7843}\ (762)^8}{(18)^3\ (0.0098)\ (\sqrt{91})}$$

i) $$\frac{(995)^3\ (4)\ (\sqrt[7]{897})}{(450)(0.993)\ (84)^4}$$

j) $$\frac{(9)^6\ (768)\sqrt{896}}{(375)(\sqrt[5]{240})(0.0943)}$$

3. Encontrar el logaritmo natural de:

a) 1.0645

b) 1.08972

4. Encontrar el valor de x, dadas las siguientes expresiones:

a) $L(x) = 0.029372641$

b) $L(x) = 0.80432538$

5. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales utilizando logaritmos:

a) $2{,}300\ e^{t} = 849.35$

b) $2 + (1.0625)^{3t} = 4{,}219$

c) $1{,}800 = \dfrac{(3.2737)^{28t}}{4.2619}$

6. Resolver por logaritmos naturales la ecuación exponencial:

$$2{,}300 = 30.25\ \frac{1+(1.0284)^{-2t}}{0.02895}$$

# PROGRESIONES Y SERIES

## 1. DEFINICION.

Progresion es el conjunto ordenado de términos (Un) para cada uno de los cuales se sigue una ley de formación.
Ejemplos:

$$P = (U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n)$$
$$P = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13)$$
$$P = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

Serie es la suma algebraica indicada de los términos de una progresión. Así como la progresión, la serie puede ser finita o infinita, según el número de términos que la forman.
Ejemplos:

$$\text{Si } P = (U_1, U_2, U_3, \ldots U_n)$$
$$S = U_1 \pm U_2 \pm U_3 \pm \ldots \pm U_n$$
$$S = 1+3+5+7+9+11+13$$
$$S = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

## 2. CLASIFICACION.

Según la relación que existe entre los elementos consecutivos en una progresión o en una serie, se pueden definir diferentes clases de ellas:

Progresión Aritmética:

Es el conjunto ordenado de términos que guardan una diferencia constante entre cualesquiera dos términos consecutivos.

Si se designa por (a) al primer término y por (d) a la diferencia constante, la progresión será la siguiente:

$$P = a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots, a+(n-1)d$$

Ejemplo:

$$a = 3,\ n = 6,\ d = 5$$
$$P = 3,\ 3+5,\ 3+5(2),\ 3+5(3),\ 3+5(4),\ 3+5(5)$$
$$P = 3, 8, 13, 18, 23, 28$$

Serie aritmética:

Es la suma algebraica indicada de los términos de una progresión aritmética.

Ejemplo:

Dado $P = 3,8,13,18,23,28$

$S = 3+8+13+18+23+28$

$S = 93$

Muchas veces es necesario calcular la suma de los "n" primeros términos de una serie aritmética, para eso utilizamos la siguiente fórmula, deducida a partir de la definición:

$$S = (a+(a+d)+(a+2d)+\ldots +(a+(n-2)d)+(a+(n-1)d)$$

Invirtiéndola;

$$S = ((a+(n-1)d)+(a+(n-2)d)+\ldots+(a+d)+a)$$

$$2S = (a+(a+(n-1)d))+(a+(a+(n-1)d))+(a+(a+(n-1)d))+ \ldots \text{ n veces}$$

$$S = \frac{(2a + (n-1)d)\ n}{2}$$

donde: $a$ = primer término de la serie

$n$ = número total de términos

$d$ = diferencia constante entre dos términos.

Ejemplo:

Encontrar la suma de los 10 primeros términos de la progresión: 5,10,15,20,25, ....

Como se ve es una progresión aritmética, con $a = 5$, $d = 5$, $n = 10$; entonces:

$$S = \frac{(2(5) + (10-1)\ 5)10}{2}$$

$$S = \frac{(10+45)10}{2}$$

$$S = \frac{550}{2}$$

$$S = 225$$

Si se conoce el término, de la forma $(a+(n-1)d) = 1$, se puede simplificar la fórmula de la siguiente manera:

$$S = \frac{(a+1)n}{2}$$

Por lo que al aplicar la fórmula para resolver el ejemplo anterior se tiene que:

$$l = a+(n-1)d \qquad S = \frac{(a+l)n}{2}$$

$$l = 5+(9)5 \qquad S = \frac{(5+50)10}{2}$$

$$l = 50 \qquad S = \frac{(55)10}{2} = \frac{550}{2}$$

$$S = 225$$

Progresión Geométrica:

Es el conjunto ordenado de los términos que guardan una razón constante entre cualesquiera dos términos consecutivos.

Las progresiones geométricas aparecen con mucha frecuencia en situaciones de crecimiento geométrico o de interés compuesto.

Si se designa al primer término por a y la razón constante por r, la progresión geométrica será la siguiente:

$$P = a,\ ar,\ ar^2,\ \ldots,\ ar^{n-1}$$

Ejemplo:

Sea $a = 4$, $r = 2$, $n = 7$

$$P = 4,\ 4(2),\ 4(2)^2,\ 4(2)^3,\ 4(2)^4,\ 4(2)^5, 4(2)^6$$

$$P = 4,8,16,32,64,128,256$$

Serie Geométrica:

Es la suma algebraica indicada de los términos de una progresión geométrica.

Ejemplo:

Donde $P = 4,8,16,32,64,128,256$

$$S = 4+8+16+32+64+128+256$$

$$S = 508$$

Si se quiere obtener el valor de una serie geométrica finita, puede aplicarse la fórmula que se deduce a continuación:

$$S = a+ar+ar^2+ar^3+\ \ldots\ +ar^{n-1}$$

Multiplicando ambos miembros por la razón r,

$$rS = ar+ar^2+ ar^3+ar^4+\ \ldots\ + ar^n$$

Restando miembro a miembro,

$$S - rS = a - ar^n$$

$$S\ (1-r) = a\ (1-r^n)$$

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad \text{si } r < 1$$

$$S = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \qquad \text{si } r > 1$$

Ejemplo:

Encontrar la suma de la progresión geométrica 2,6,18,54 ... hasta el séptimo término.

$a = 2 \qquad S = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r = 3 \qquad S = \frac{2(3^7-1)}{3-1}$

$n = 7 \qquad S = \frac{2(2186)}{2}$

$S = 2{,}186$

Progresión Armónica:

Es el conjunto ordenado de los términos tales que cada uno es el producto de una constante k por el inverso de la posición que ocupa el término en la serie.

$$P = \frac{K}{1}, \frac{K}{2}, \frac{K}{3}, \ldots, \frac{K}{n}$$

Ejemplo:

Sea K = 2, n = 8

$$P = \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{8}$$

Serie Armónica:

Es la suma algebraica indicada de los términos de una progresión armónica.

Ejemplo:

$$S = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \frac{2}{7} + \frac{2}{8}$$

$$S = 5.43571$$

Progresión Factorial y Factorial Inversa:

Progresión factorial es el conjunto ordenado de términos, cada uno de los cuales es una constante multiplicada por el factorial de la posición que ocupa el término en la serie.

$$P = K,\ K(2!),\ K(3!),\ldots,\ K(n!)$$

Ejemplo:

Sea $K = 2,\ n = 6$

$$P = 2,\ 2(2!),\ 2(3!),\ 2(4!),\ 2(5!),\ 2(6!)$$

$$P = 2,4,12,48,240,1440$$

La progresión factorial inversa es el conjunto ordenado de los términos cada uno de los cuales es el producto de una constante por el inverso del factorial de la posición que ocupa.

$$P = \frac{K}{1!},\ \frac{K}{2!},\ \frac{K}{3!},\ \ldots,\ \frac{K}{n!}$$

Ejemplo:

Sea $K = 2, n = 6$

$$P = 2,\ \frac{2}{2!},\ \frac{2}{3!},\ \frac{2}{4!},\ \frac{2}{5!},\ \frac{2}{6!}$$

$$P = 2,\ \frac{2}{4},\ \frac{2}{6},\ \frac{2}{24},\ \frac{2}{120},\ \frac{2}{720}$$

Serie Factorial y Factorial Inversa:

Es la suma algebraica indicada de los términos de una progresión factorial y factorial inversa respectivamente.

$$S = 1+4+12+48+240+1440$$

$$S = 1745$$

Las series factoriales inversas ocupan un lugar muy destacado en las matemáticas superiores, ya que los desarrollos del binomio de Newton, de funciones en series de Taylor y de Fourier y la base de los logaritmos naturales tienen su orígen en series factoriales inversas.

Ejemplos:

Sea S la serie factorial inversa clásica:

$$S = \frac{K}{1!} + \frac{K}{2!} + \frac{K}{3!} + \dots + \frac{K}{n!}$$

$$S = \lim_{x \to \infty} \sum_{n=1}^{x} \frac{k}{n!}$$

$$S = \lim_{x \to \infty} k \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n!}$$

$$S = k \lim_{x \to \infty} \sum_{n=0}^{x} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!}$$

$$S = k \lim_{x \to \infty} \sum_{n=0}^{x} \frac{1}{n!} - 1$$

y como

$$e = \lim_{x \to \infty} \sum_{n=0}^{x} \frac{1}{n!}$$

$$S = k\ (e-1)$$

$$S = ek - k$$

$$\lim_{n \to \infty} S = (e-1)k$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Encontrar la suma de los 18 primeros términos de la progresión: 1, 1.25, 1.50, 1.75,...

2. Encontrar la suma de los 8 primeros términos de la progresión: 3, -6, 12, -24, ...

3. Encontrar la suma de los 10 primeros términos de - la progresión: $1, (1+i), (1+i)^2, (1+i)^3, \ldots$

4. Encontrar la suma de los 4 primeros términos de la progresión: $(1+.03)^{-1}, (1+.03)^{-2}, (1+.03)^{-3}, \ldots$

5. El 15o. término de una progresión aritmética es 20 y la razón 2/7. Hallar el primer término.

6. Hallar la razón entre 3 y entre 8, donde 8 es el 6o. término.

7. Hallar el primer término de una progresión aritmética si se sabe que el 11o. término es 10 y la razón es 1/2.

8. Hallar la razón de una progresión aritmética cuyo - primer término es -3/4 y el 8o. término es $3\frac{1}{8}$.

9. ¿Cuántos términos tiene la siguiente progresión?
4, 6, ..., 30.

10. Encontrar el 8o. término de la siguiente progresión:
2, 14, 98, 686,...

11. El 6o. término de una progresión aritmética es 1/16 y la razón 1/2. Hallar el primer término.

12. El primer término de una progresión es 3 y el 6o. término es -729. Hallar la razón.

13. Se sabe que los 2 primeros y el 5o. términos de una serie son: 3/2, 1, y 8/27 respectivamente. Encontrar la razón y la suma de los 10 primeros términos.

14. El tercero, quinto y el sexto términos de una serie son: 3, 9, $27/\sqrt{3}$. Encontrar el primer término y la razón.

# CONVERGENCIA

## 1. GENERALIDADES.

Como series de diversos tipos aparecen con frecuencia en problemas de crecimiento geométrico o de interés compuesto, es muy importante saber si se pueden evaluar numéricamente o no, particularmente cuando el número de términos de la serie es infinito.

En la serie:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

la variable $S_n$ es una función de n. Si el número de términos (n) tiende a infinito, pueden ocurrir dos cosas:

a) Que $S_n$ tienda hacia un límite L, es decir:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = L$$

En este caso se dice que la serie infinita es convergente y que converge al valor L. Las series finitas generalmente son convergentes.

Ejemplo:

$$S = 1+1.5+2+2.5+3+3.5+4+4.5$$

b) Que $S_n$ no tienda a ningún límite y se dice que la serie es divergente. Una serie puede ser divergente cuando su límite no exista, es decir:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \pm \infty$$

o bien, porque conforme n aumenta, el valor de $S_n$ alternativamente crece o decrece sin aproximarse a un límite.

Ejemplo:

$$S = 2-2+2-2+2-2+2-2 \pm \dots$$

Para el caso de una serie geométrica:

$$S = a+ar+ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

en la que ya se demostró que:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{si } r < 1 \qquad S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad \text{si } r > 1$$

- Si $|r| < 1$, entonces $r^n$ disminuye en valor numérico cuando n aumenta y tiende a un límite $\frac{a}{1-r}$, por lo que la serie es convergente.
- Cuando $|r|>1$, $r^n$ se hace infinito a medida que n aumenta, por lo que $S_n$ se hace infinita, no pudiendo encontrarse el límite y la serie será divergente.
- Si $r = -1$, la serie será de la forma:

  $a - a + a - a + a - a + a - a \pm \ldots$

  Donde si n es par la suma es cero, si n es impar la suma es a. A medida que n aumenta, la suma no aumenta y no tiende hacia un límite.

  Por lo que se puede concluir, que en una serie geométrica con razón r, y con término inicial a, diferente de cero:

  $|r|>1$, el límite de $r^n$ es infinito y la serie diverge.

  $|r|<1$, el límite de $r^n$ es cero y la serie converge al valor $\frac{a}{r-1}$

  $r = \pm 1$, el límite de $r^n$ es uno y la serie diverge.

Ejemplos:

Decidir sobre la convergencia de las siguientes series geométricas:

a) $S_1 = 1+1.05+(1.05)^2+ (1.05)^3+\ldots+\ldots$

$r = 1.05 \Rightarrow r > 1 \Rightarrow$ diverge

b) $S_2 = 1+\frac{1}{1.05} + (\frac{1}{1.05})^2+ (\frac{1}{1.05})^3+\ldots+\ldots$

$r = 0.95 \Rightarrow r < 1 \Rightarrow$ converge

c) $S_3 = 3+6+12+24+ \ldots$

$r = 2 \Rightarrow r > 1 \Rightarrow$ diverge

d) $S_4 = -5 -\frac{5}{2} -\frac{5}{4} -\frac{5}{8} -\frac{5}{16} - \ldots$

$r = \frac{1}{2} \Rightarrow r < 1 \Rightarrow$ converge

e) $S_5 = 4+4+4+4+...$

$r = 1 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow$ diverge

2. CRITERIOS DE COMPRACION PARA DECIDIR LA CONVERGENCIA DE UNA SEIRE.

a) Si una serie es menor o igual término a término que otra serie que sabemos converge, entonces la primera también converge.
b) Si una serie es mayor o igual término a término que otra serie que sabemos diverge, entonces la primera serie también diverge.
c) En los otros dos casos, no es posible decidir sobre la convergencia o divergencia de una serie por criterio de compración.
d) Una serie $S_1$ formada por el producto de una escalar $\alpha$, tal que $\alpha \neq 0$ por otra serie $S_2$ que sabemos diverge, también diverge.

**Razón de D'Alembert.**

Es el valor absoluto del cociente del n-ésimo + 1 término entre el anterior.

- Es condición necesaria pero no suficiente para la convergencia de una serie, el que su razón de D'Alembert tenga como límite un valor menor que 1, cuando $n \longrightarrow \infty$.

$$\lim_{n \to \infty} Rn < 1$$

Razón del n-ésimo término $\qquad Rn = \left| \frac{U(n+1)}{Un} \right|$

Es también condición necesaria pero no suficiente para la convergencia de una serie que el límite de su término general sea cero cuando $n \longrightarrow \infty$

$$\lim_{n \to \infty} Un = 0$$

## 3. CONVERGENCIA DE SERIES CONOCIDAS.

1) Una serie aritmética cuya diferencia constante (d) sea diferente de cero, diverge.

Ejemplo:

$d = 2 \quad S = 1+3+5+7+9+11 + \ldots$

2) Toda serie aritmética cuya d sea igual a cero y cuya a sea diferente de cero, diverge.

Ejemplo:

$S = 2+2+2+2+2+2+2+2+2 \ldots$

3) Solamente la serie aritmética con a = 0 y d = 0, converge y S = 0.

$S = 0+0+0+0+0+0+0+0 + \ldots$

4) Una serie geométrica para la cual $r < 1$, converge y $S = \dfrac{a}{1-r}$

Ejemplo:

$r = 0.5 \quad S = 1+0.5+0.25+0.16 + \ldots \; S = \dfrac{1}{1-0.5}$

5) Una serie geométrica para la cual $a \neq 0$ y $r > 1$, diverge.

Ejemplo:

$r = 2 \quad S = 1+2+4+8+16 + \ldots$

6) Una serie geométrica para la cual $a \neq 0$ y $r = 1$, diverge.

Ejemplo:

$S = 2+2+2+2+2+2+2+2+\ldots$

7) Una serie geométrica para la cual a = 0 y r = 1, converge y S = 0.

Ejemplo:

$S = 0+0+0+0+0+0+0+0 + \ldots$

8) La serie armónica diverge.

Sean: $S_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots$

La serie $S_2$ es una serie aritmética con $a \neq 0$ y $d = 0$, si agrupamos los términos en la forma adecuada. Si diverge $S_2$ entonces $S_1$ diverge por criterio de comparación a). Por consiguiente la serie armónica ($S_1$) diverge.

9) La serie formada por los inversos de los factoriales converge y su límite es $S = (e-1)$.

$$S = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

10) La suma intercalada de dos series que convergen, converge.

Ejemplo:

$S = 1+0+0.5+0+0.25+0+0.16 + \ldots$

y el límite es la suma de los límites.

11) La suma algebráica intercalada de una serie que converge y otra que diverge, diverge.

Ejemplo:

$S = 1 \pm 1 \pm 3 \pm 0.5 \pm 5 \pm 0.25 \pm \ldots.$

12) No se puede decidir sobre la suma intercalada de dos series que divergen: puede ser convergente o divergente, aunque la gran mayoría de las veces diverge.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Decidir sobre la convergencia de la serie:

$$\sqrt{2} + 2/3\sqrt{3} + 1+2/3 + \ldots$$

y en caso de que converja, encontrar el valor.

2. Decidir sobre la convergencia de la siguiente serie:

$$95 + \frac{98}{100} + 107 + \frac{93}{100} + \frac{927}{1000} + \frac{916}{1000} + \frac{9047}{10000} + \frac{8987}{10000} + \ldots$$

y explicar su respuesta.

3. Decidir sobre la convergencia de la serie:

$$S = 1+1+1/2+1/2+1/4+1/6+1/8+1/24+1/16+1/120+\ldots$$

y en caso de que converja, encontrar el límite.

4. De la serie:

$$a^2(a-1)^2+(a^2-ar)^2+(a^2-(ar)^2)^2+(a^2-(ar)^3)^2+\ldots$$

resuelva para qué valores de a y r converge.

5. De la expresión:

$$a \sum_{t=1}^{\infty} (1-r^t)^2$$

encontrar los valores de a y r para que la serie converja.

6. Un halcón es capaz de volar a una velocidad doble que cada uno de los dos ciclistas A y B que se encuentran inicialmente a una distancia x uno de otro. Los dos ciclistas parten simultáneamente uno hacia el otro y el halcón parte desde el hombro de A hasta el hombro de B, inmediatamente se regresa hasta A y luego hasta B, indefinidamente.

a) Encontrar una expresión para la distancia recorrida en cada viaje del halcón.

b) Encontrar una expresión para la distancia acumulativa.

c) ¿Converge la serie?

d) Si la respuesta es afirmativa, evaluarla.

# SERIES DE POTENCIAS DE UNA VARIABLE.

## 1. GENERALIDADES.

Una serie de potencias de una variable es una expresión de la forma:

$$S = a_0+a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

en la cual los coeficientes $a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, ... son todos ellos independientes de la variable x, aunque no necesariamente constantes. (Si son todos constantes, la serie de potencias define a un polinomio).

Una serie de potencias de x puede converger para todos los valores de x, o para ningún valor con excepción de x = 0, o puede converger para algunos valores de x distintos de cero y ser divergente para otros valores.

El conjunto de todos los valores de x para los que la serie converge forman el campo de convergencia de la serie.
Ejemplo:

Determinar el intervalo de convergencia para la siguiente serie:

$$S = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{10}}{10} + \dots$$

El término general puede expresarse como:

$$\frac{x^{2(n-1)}}{2n}$$

La razón D'Alembert es:

$$R_n = \left| \frac{\dfrac{x^{2n}}{2(n+1)}}{\dfrac{x^{2(n-1)}}{2n}} \right| = \left| \frac{nx^2}{n+1} \right|$$

Por determinar para qué valores la expresión antrior es menor que 1. Cuando $n \longrightarrow \infty$, sólo cuando $|x|$ es menor que 1.

Por lo tanto, el intervalor de convergencia para esta serie de potencias es: $-1 < x < 1$.

## 2. DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIE DE MacLAURIN.

En muchas ocasiones es útil desarrollar expresiones en serie de potencias de una variable que se aproximen a una función trascendente de la misma variable, cuando el número de términos que se evalúan es lo suficientemente grande. De hecho estas aproximaciones son ampliamente utilizadas por las calculadoras y las computadoras en sus algoritmos internos para calcular funciones trascendentes.

Por teoremas del cálculo puede demostrarse que cualquier función de una variable que sea contínua y tenga derivadas contínuas, puede expresarse como una serie de potencias de ésta variable.

Sea $f(x)$ una función contínua y cuyas derivadas sean contínuas y siempre estén definidas por el valor $x = 0$.

Se desea obtener una expresión de la forma

$$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2 + \dots + a_nx^x + \dots$$

en la cual los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, son las incógnitas.

Derivando la expresión se tiene:

$$f'(x) = a_1+2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2+ 6a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2}+\dots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^n(x) = n!a_n+(n+1)!\ a_{n+1}x+\dots$$

Si valuamos todas las funciones anteriores en $x = 0$:

$f\ \ (0) = a_0$

$f'\ \ (0) = a_1$

$f''\ \ (0) = 2a_2$

$f'''(0) = 3!a_3 = 6a_3$

$\vdots$

$f^{n+1}(0) = (n+1)!a_{n+1}$

Despejando los coeficientes $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$

$a_0 = f(0)$

$a_1 = f'(0)$

$a_2 = \dfrac{f''(0)}{2!}$

$a_3 = \dfrac{f'''(0)}{3!}$

$\vdots$

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$a_{n+1} = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$

Sustituyendo los coeficientes en la función original:

$$f(x) = \cancel{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots} + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \ldots \frac{f^n(0)x^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(0)x^{(n+1)}}{(n+1)!} + \ldots$$

Esta serie se ha llamado expansión de $f(x)$ en serie de MacLaurin.

Ejemplos:

Expresar $e^x$ en serie de MacLaurin ($f(x) = e^x$)

$f(x) = e^x \Longrightarrow f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \Longrightarrow f'(0) = e^0 = 1$

$f''(x) = e^x \Longrightarrow f''(0) = e^0 = 1$

$f'''(x) = e^x \Longrightarrow f'''(0) = e^0 = 1$

$\vdots$

$f^n(x) = e^x \Longrightarrow f^n(0) = e^0 = 1$

$f^{n+1}(x) = e^x \Longrightarrow f^{n+1}(0) = e^0 = 1$

$$f(x) = e^x = 1+1x + \frac{1x^2}{2} + \frac{1x^3}{3!} + \dots + \frac{1x^n}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Desarrollar la función $f(x) = (a+x)^n$

$f(x) = (a+x)^n$

$f'(x) = n(a+x)^{n-1}$

$f''(x) = n(n-1)(a+x)^{n-2}$

$f'''(x) = n(n-1)(n-2)(a+x)^{n-3}$

$f(0) = a^n$

$f'(0) = na^{n-1}$

$f''(0) = n(n-1)a^{n-2}$

$f'''(0) = n(n-1)(n-2)a^{n-3}$

Aplicando la serie de MacLaurin se tiene:

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots$$

la cual se conoce como la serie binómica.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Desarrollar en seire de potencias la función $e^{nx}$.

2. Desarrollar en serie de potencias la función $e^{-\delta}$, utilizando las series de MacLaurin.

3. Desarrollar en series de potencias la función:

$$L(91 + x)$$

4. Demostrar las siguientes relaciones por medio del desarrollo de MacLaurin.

a) $(1+i)^{-1} = 1 - i + i^2 - i^3 \pm \ldots.$

b) $(1-d)^{1/2} = 1 - 1/2d - 1/8d^2 - \ldots$

c) $(1-d)^n = 1 - nd + \frac{n(n-1)d^2}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)d^3}{3!} + \ldots$

d) $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \qquad i = \sqrt{-1}$

5. Demostrar:

$$(1+i)^{1/m} = 1 + \frac{1/m\, i + 1/m(1/m - 1)i^2}{2!} + \ldots$$

por medio del desarrollo en serie de MacLaurin.

# TEOREMA DEL BINOMIO.

## 1. DEFINICION.

Sabemos que:

$(a+b) = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+ b^4$

$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

Si se analizan estos desarrollos, pueden concluirse algunas características que presentan en común, tales como:

- El primer término de $(a+b)^n$ es de la forma $a^n$
- El segundo término de $(a+b)^n$ es de la forma $na^{n-1}b$
- Hay $n+1$ términos en el desarrollo $(a+b)^n$.
- Los coeficientes de los términos a igual distancia de los extremos del desarrollo son iguales.
- El exponente de a, disminuye en 1 de un término al siguiente, mientras que el exponente de b aumenta en 1 de un término a otro. La suma de los exponentes de a y b en cada uno de los términos es igual a n.
- Para obtener el coeficiente del término siguiente, se multiplica el coeficiente del término anterior por el exponente de a(en ese mismo término) y el resultado se divide entre el número de órden de ese término.

Si se aplican estas propiedades al desarrollo del binomio $(a+b)^n$, donde a y b son dos números reales y n es un número entero positivo, se obtiene la siguiente expresión:

$$(a+b)^n = a^n+na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \ldots + nab^{n-1} + b^n.$$

Lo que comunmente es conocido por Teorema del desarrollo del Binomio de Newton, cuya demostración no es materia de este - texto. Sin embargo, su aplicación es de gran utilidad debido a que hace posible el cálculo de potencias elevadas sin necesidad de una calculadora.

La expresión está compuesta de (n+1) términos, cada - uno de los cuales es de la forma:

$$U_i = C_i a^{n-i} b^i$$

donde:

$i$ = número de término, donde $i = 0$ a $N$

$U_i$ = i-ésimo término de la expresión.

$C_i$ = coeficiente del i-ésimo término.

a y b = primero y segundo elemento del binomio.

Ejemplo:

Desarrollar la siguiente expresión, utilizando el Binomio de Newton.

$$(2a+3b)^5 = (2a)^5 + 5(2a)^4(3b) + \frac{5x4}{2!}(2a)^3(3b)^2 + \frac{5x4x3}{3!}(2a)^2(3b)^3 + \frac{5x4x3x2}{4!}(2a)(3b)^4 + \frac{5x4x3x2x1}{5!}(3b)^5$$

$$= 32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5$$

Es interesante observar que todo término posterior al primero, puede obtenerse a partir del término que le precede.

Si interesa conocer un sólo término del desarrollo, es necesario obtener una expresión general para el coeficiente $C_i$:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,i!} a^{n-i} b^i$$

## 2. POTENCIAS NEGATIVAS Y FRACCIONARIAS DEL BINOMIO DE NEWTON.

También se puede desarrollar $(a+b)^{-n}$, aplicando el Teorema del Binomio, pero la serie solamente convergirá si el va lor absoluto de b es menor que el de a, ya que la aplicación de la fórmula del Binomio de Newton con una n negativa tiene un inconveniente, que la serie es infinita y en este caso se pueden despreciar los últimos términos que son muy pequeños y casi insignificantes, al cumplirse la condición especificada.

Ejemplo:

$$(3x+5)^{-4} = (3x)^{-4}+(-4)(3x)^{-5}(5)+\frac{(-4)(-5)(3x)^{-6}(5)^2}{2}+$$
$$+\frac{(-4)(-5)(-6)(3x)^{-7}(5)^3}{6}+\ldots$$

Cuando se tiene una n que no es entera, es decir, fraccionaria, también se le puede aplicar la fórmula del Binomio de Newton, sólo que se presenta el mismo inconveniente del caso anterior, por lo que la resolución de los primeros k términos de la fórmula solamente dará cuando mucho una aproximación, la cual converge siempre y cuando el valor absoluto de b sea menor que 1.

Ejemplo:

$$(4+2a)^{1/2} = 4^{1/2}+(1/2)(4)^{-1/2}(2a) + \frac{(1/2)(-1/2)(4)^{-3/2}(2a)^2}{2}$$
$$+\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(4)^{-5/2}(2a)^3}{6}+\ldots$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Valuar $(1.01)^{20}$ con cinco decimales exactos, desarrollando como Binomio de Newton.

2. Encontrar el valor de $(3.02)^{8}$ con cuatro decimales.

3. Desarrollando el Binomio de Newton, calcular el valor de las siguientes expresiones, con 5 decimales:

a) $(1.04)^{6}$

b) $(3.25)^{-7}$

c) $(1+0.37)^{1/4}$

d) $(3+0.82)^{-4/9}$

e) $(2-3/2)^{-3/5}$

f) $(0.85)^{-7}$

# CRECIMIENTO GEOMETRICO Y FUNCION EXPONENCIAL.

## 1. INTRODUCCION.

Al observar a intervalos regulares los valores de una serie de fenómenos comunes tales como el número de individuos que componen una población grande o el saldo de una cuenta bancaria con reinversión de intereses puede comprobarse que dichos valores forman una sucesión geométrica, según se definió en el apéndice. Lo anterior significa que dos valores sucesivos cualesquiera guardan entre sí una razón constante r, por lo cual es posible expresar:

$$\begin{aligned} f(0) &= U_0 = a \\ f(1) &= U_1 = ar \\ f(2) &= U_2 = ar^2 \\ f(3) &= U_3 = ar^3 \\ &\vdots \\ f(n) &= U_n = ar^n \end{aligned}$$

Por la razón anterior se dice que los fenómenos que guardan un comportamiento similar tienen un crecimiento geométrico.

Ahora bien, puede interesar conocer valores en puntos intermedios para los cuales la sucesión geométrica no está definida hasta ahora, por lo que se hace necesario estudiar una función contínua que tenga un comportamiento idéntico al de una sucesión geométrica para los valores enteros y que además esté definida para los valores no enteros.

## 2. TASA DE CRECIMIENTO.

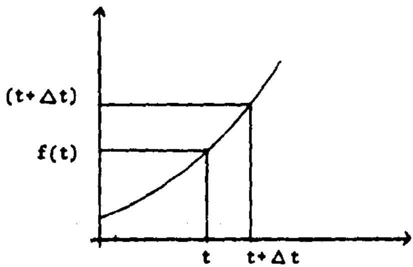
Sea f(t) una función contínua de la variable t, entonces la pendiente promedio en un intervalo $(t, t + \Delta t)$ está dada por:

$$m(t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Si se obtiene el límite cuando $t \longrightarrow 0$ se tiene la pendiente instantánea de f(t):

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t)$$

GRAFICA:




La pendiente de una función f(t) expresa la velocidad con la que crece o decrece la función al aumentar infinitesimalmente el valor de la variable t. Esta velocidad de crecimiento viene expresada en unidades de la función por unidad de la variable. Por ejemplo, si la función representa la cantidad de dinero que se tiene en el banco en un momento t, la pendiente se expresará en pesos por unidad de tiempo.

Sin embargo, en muchas ocasiones el valor de la pendiente por sí mismo no proporciona suficiente información para apreciar si el crecimiento de la función es grande o pequeño, o si es satisfactorio o no, ya que si la pendiente se expresa en unidades por unidad de tiempo no considera el valor original del que se parte.

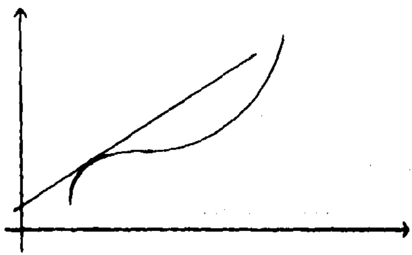
Lo anterior hace necesaria una medida de la pendiente f(t) pero relativa al valor inicial de la función. Se define la tasa instantánea de crecimiento de f(t) como la pendiente m(t) dividida entre el valor de la función f(t) y se designa a esta tasa instantánea de crecimiento por $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \frac{m(t)}{f(t)}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{f(t)}\left(\frac{d}{dt}\, f(t)\right) = \frac{1}{f(t)}\, f'(t)$$

La tasa de crecimiento $\delta(t)$ mide la velocidad de crecimiento de la función relativa al valor de f(t); es decir, mide la pendiente m(t) como una fracción del valor de la función f(t), lo que ya permite una mejor apreciación de su significado.

GRAFICA:



Ejemplo:

Suponer que a dos inversionistas se les ofrecen $100.00 de intereses anuales. Pero el primer inversionista tiene invertidos $2,000.00, mientras que el segundo inversionista tiene solamente $200.00.

La pendiente es la misma para ambos inversionistas ---- ($100.00 por año), sin embargo, es difícil pensar que ambos estarán igualmente satisfechos con el trato, ya que la tasa de -

crecimiento para el primero representa un 5% anual, mientras que para el segundo representa un 50% anual.

## 3. FUNCION EXPONENCIAL.

La función exponencial viene expresada por la fórmula:

$$f(t) = ae^{bt}$$

y tiene dos propiedades interesantes:

a) Su tasa instantánea de crecimiento $\delta(t)$ es constante a lo largo de toda la función y es igual al parámetro b de la fórmula.

$$\delta(t) = \frac{1}{f(t)}\, abe^{bt}$$

$$= \frac{1}{ae^{bt}}\, abe^{bt}$$

$$= b$$

Por lo tanto $\delta(t) = \delta = b$

b) El valor inicial de f(t) cuando $t=0(f(0))$, es igual al otro parámetro de la fórmula y este valor debe ser diferente de cero para que la curva tenga algún sentido.

$$f(0) = a, \text{ tal que } a \neq 0$$

Por lo tanto:

$$f(t) = f(o)e^{\delta t}$$

donde:

f(0) representa el valor inicial de la función en $t = 0$ y $\delta$ representa la tasa instantánea de crecimiento de la curva exponencial en cualquier punto t y se llama por ésto, fuerza de crecimiento.

Si $$f(t) = f(0)e^{\delta t}$$

$$\frac{f(t)}{f(0)} = e^{\delta t}$$

$$\mathrm{Ln}\ \frac{f(t)}{f(0)} = \mathrm{Ln}\ e^{\delta t}$$

por lo tanto:

$$\delta = \frac{1}{t}\left(\mathrm{Ln}\ \frac{f(t)}{f(0)}\right) \text{ ó } \quad \delta = \frac{1}{t}\ (\mathrm{Ln}(f(t)) - \mathrm{Ln}\ (f(0)))$$

Ejemplo:

La población de una ciudad en 1970 era de 247,000 habitantes. En 1980 subió hasta 297,000 habitantes. Encontrar la fuerza de crecimiento $\delta$ que operó en 10 años.

$f(0) = 247{,}000$

$f(10) = 297{,}000$

$t = 10$

$$\delta = \frac{1}{t}\ \mathrm{Ln}\ \frac{f(t)}{f(0)}$$

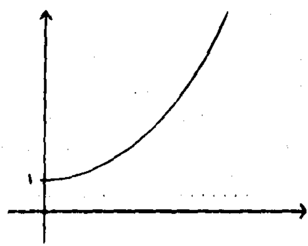
$$= \frac{1}{10}\ \mathrm{Ln}\ \frac{297{,}000}{247{,}000}$$

$$= \frac{1}{10}\ \mathrm{Ln}\ (1.202439)$$

$$= \frac{1}{10}\ (0.184344)$$

$$= 0.0184344$$

GRAFICA DE LA FUNCION EXPONENCIAL.

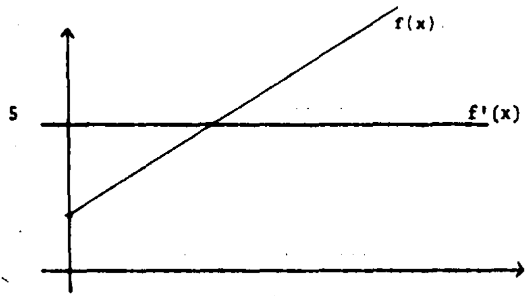


Ejemplos:

1) Calcular la ecuación que describe la tasa instantánea de crecimiento $\delta(x)$ de una recta cuya ecuación es $y = 5x+2$. Evaluar la tasa instantánea en el punto $x = 4$.

$$f(x) = 5x + 2$$
$$f'(x) = 5$$
$$\delta(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{5x + 2}$$
$$\delta(4) = \frac{5}{5(4) + 2} = \frac{5}{22}$$
$$\delta(4) = .227272 = 22.7272\%$$

Analizando el ejemplo gráficamente se tiene:




2) Calcular en qué tiempo habrá aumentado la población de protozoarios hasta 1'250,000 si se sabe que en un principio era de 180,000 y estaban creciendo con una fuerza instantánea de crecimiento $\delta = .20$ por minuto.

$f(t) = 1'250,000$ $\qquad$ $f(t) = f(0)\, e^{\delta t}$

$f(0) = 180,000$ $\qquad$ $1'250,000 = 180,000\, e^{(.20)(t)}$

$\delta = .20$ por minuto $\qquad$ $\text{Ln}\, \dfrac{1'250,000}{180,000} = \text{Ln}\; e^{(.20)(t)}$

$$\text{Ln}\;(6.94) = .20\ t$$

$$t = \frac{1.937942}{.20}$$

$$t = 9.68971 \text{ minutos}$$

4. RELACION ENTRE LA CURVA EXPONENCIAL Y LA SUCESION GEOMETRICA.

Como se recordará del Apéndice, una sucesión geométrica es el conjunto ordenado de los términos tales que el cociente que resulta de dividir cualquier término entre el anterior, es una constante llamada razón (r).

$$r = \frac{Un}{Un-1}$$

$$s = (U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots)$$

Si se denota al primer término por la letra "a" y se llama razón a $r = (1+i)$, entonces:

$$U_0 = a$$

$$U_1 = ar = a(1+i)$$

$$U_2 = ar^2 = a(1+i)^2$$

$$U_3 = ar^3 = a(1+i)^3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$U_n = ar^n = a(1+i)^n$$

Existe una analogía entre una sucesión geométrica y una curva exponencial, pero solamente en los valores enteros de t, ya que la curva exponencial es una función contínua de t y por consiguiente existe para valores no enteros de t.

Por otra parte, las sucesiones geométricas han sido definidas para un dominio discreto de n, es decir, que las potencias sucesivas de r están separadas a intervalos regulares unitarios.

Para establecer la analogía es necesario forzar a ambas curvas a pasar por los mismos puntos. Esto se logra definiendo la misma ordenada en el orígen ($f(0) = a$) y forzando a $f(t)$ a ser igual a $f(n)$, de la siguiente manera:

$f(n) = U_n = ar^n = a(1+i)^n$

$f(t) = f(0)\ e^{\delta t} = ae^{\delta t}$

Si forzamos $n = t$, entonces:

$f(n) = f(t)$

$ar^n = a(1+i)^n = ae^{\delta n}$

$ar^t = a(1+i)^t = ae^{\delta t}$

Si se divide entre a:

$r^t = (1+i)^t = e^{\delta t}$

Sacando raíz t-esima:

$r = (1+i) = e^{\delta}$

$Ln\ (r) = Ln(1+i) = \delta$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Un automóvil, partiendo del reposo, recorrió 1km en 3 minutos. Calcular su aceleración.

2. A un especulador se le presentó una oportunidad de invertir su dinero en determinado tipo de valores; originalmente metió $1,000.00 a una tasa instantánea de crecimiento del 4.5% por hora; al final de las 4 primeras horas tuvo necesidad de disponer de $150.00, pero el resto lo reinvirtió en una nueva inversión, obteniendo al final de 4 días $4,000.00. Calcular:

a) La cantidad reinvertida.
b) La tasa involucrada en la segunda inversión.
c) ¿Cuánto hubiera obtenido al final de los 4 días de no haber dispuesto de los $150.00?.

3. En condiciones normales de desarrollo, una población de amibas se duplica cada 24 horas. Se hizo un experimento con una rata, aplicándole una solución de 1/1,000 de amibas por $cm^3$ en la sangre. Las defensas normales de una rata son capaces de eliminar al 10% de los nacimientos. ¿En cuánto tiempo moriría la rata si no se le aplica ningún tratamiento extra, sabiendo que ésto ocurre cuando la proporción de amibas en su sangre es del 10%?.

## INTERPOLACION LINEAL.

En algunas ocasiones es muy difícil o materialmente imposible despejar algebraícamente la incógnita en un problema. Ejemplos de particular interés para nuestro estudio son los problemas de ecuación de valor a interés compuesto y en especial aquéllos en los cuales la incógnita es la tasa de interés y más aún si están involucradas varias transacciones simultáneas.

Para resolver estos problemas que se presentan con frecuencia en la práctica, se hace necesario recurrir a métodos llamados numéricos, que no pretenden despejar analíticamente la incógnita sino que van aproximándose a la solución mediante hipótesis sucesivas sobre el valor de la incógnita, observando en cada caso la diferencia entre ambos lados de la ecuación en la que aparece la incógnita y tratando de reducir la diferencia lo más posible.

El más sencillo de los métodos numéricos es el llamado método de la interpolación lineal, el cual busca una diferencia positiva y otra negativa al restar el lado derecho de una ecuación del lado izquierdo y si se verifica que los dos valores hipotéticos de la incógnita están lo suficientemente próximos entre sí, procede a calcular el valor aproximado de la incógnita bajo el supuesto de que la función se comporta como una recta en el intervalo acotado por los dos valores asignados a la incógnita.

Bajo estas condiciones puede obtenerse un valor aproximado de la incógnita, mediante una fórmula que se deducirá a continuación:

Sean los puntos conocidos:

$x_1,\ f(x_1),\ x_2,\ f(x_2)$

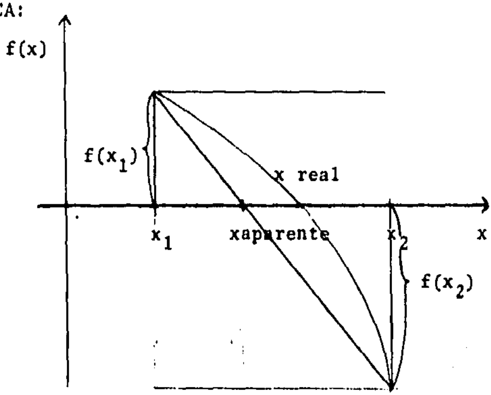
Desea conocerse el punto x, tal que $x_1 < x < x_2$ y para el cual se cumple un cierto valor f(x) tal que una de las dos siguientes ecuaciones es verdadera:

$$f(x_1) < f(x) < f(x_2)$$

ó

$$f(x_1) > f(x) > f(x_2)$$

GRAFICA:




Por Trigonometría:

$$\frac{x_2 - x_1}{f(x_2)-f(x_1)} = \frac{x - x_1}{f(x)-f(x_1)}$$

De esta ecuación puede despejarse el valor de x (aparente):

$$x = \frac{(x_2 - x_1)(f(x)-f(x_1))}{(f(x_2) - f(x_1))} + x_1$$

Ejemplo:

Encontrar la tasa de interés que resuelve la siguiente ecuación de valor:

$$20(1+j)^5 = 5(1+j)^2 + 23$$

Sea $j = 0.08$

$$29.39 \overset{?}{=} 5.83 + 23$$
$$\overset{?}{=} 28.83$$

Sea $j = 0.07$

$$28.05 \overset{?}{=} 5.72 + 23$$
$$\overset{?}{=} 28.72$$

Sea $j = 0.075$

$$28.71 \overset{?}{=} 5.78 + 23$$
$$\overset{?}{=} 28.78$$

La solución se encuentra en el intervalo $0.075 < j < 0.08$

$$j = \frac{((j_2 - j_1)(f(j) - f(j_1))}{(f(j_2) - f(j_1))} + j_1$$

$j_1 = 0.075$
$j_2 = 0.08$
$f(j) = 0$
$f(j_1) = 28.71 - 28.78 = -0.07$
$f(j_2) = 29.39 - 28.83 = 0.56$

$$j = \frac{((0.08 - 0.075)(0 - (-0.07))}{(0.56 - (-0.07))} + 0.075$$

$$j = \frac{(0.005)(0.07)}{(0.56 + 0.07)} + 0.075$$

$$j = 0.000556 + 0.075$$

$$j = 0.075556 = 7.5556\%$$

SOLUCION A EJERCICIOS PROPUESTOS.

I. Interés Simple.

1. $76,8000.00
2. 2.78% mensual
3. 1° de Octubre
4. $263,736.26
5. $3,750.00
6. $205,295.32
7. $151,333.33
8. $394,637.01
9. $170,983.87
10. $158,032.39 y $237,048.58

II. Descuento Simple.

1. 16.07%
2. D = $72,900.00
   P = $467,100.00
3. P = $19,250.00
   i = 49.09% anual
4. $345,920.00
5. S = $1'063,734.94
   i = 20.92% anual
   i = 5.23% trimestral
6. a) $144,312.59
   b) $144,293.48
   Es mejor (b)
7. $302,400.00

III. Interés Compuesto.

2. 6.99%
3. 3.72%
4. $1'070,452.12

5. a) 19.9025%
   b) 27.4429%
   c) 45.3693%
6. 1.9068%
7. 2.05380%
8. \$6'854,605.46
9. $j = 1.5026\%$ $\quad i^{(12)} = 18.0307\%$
10. Trimestralmente i = 41.1582%
11. 6.7207%
12. 2.254249 años
13. 25,616 habitantes
14. 14.26 años
15. 19.7 meses
16. \$52.43
17. 1.907%

## IV. Valor Presente y Descuento Compuesto.

4. \$532,544.38
5. \$341,689.91
6. \$435,964.41
7. 3.2616 años
8. a) \$1'002,864.83
   b) \$825,241.14
   c) 27.54%

## V. Ecuación de Valor

1. x = \$116,636.87
2. 3.4344 trimestres
3. 14.0122 meses
4. 4.0661 meses

## VI. Anualidades.

1. \$2'971,954.62
2. \$1'238,704.40

3. \$6'142,039.54
4. \$871,843.37
5. \$4'039,697.54
6. $P = \$100,427.92$
   $S = \$91,824,698.26$
7. \$2'945,329.67
8. \$7,624.84
9. 45 pagos completos
   $P_{46} = \$146,290.17$
10. $P_{13} = \$\ 9,329.06$

VII. Anualidades Especiales.

1. \$50'675,717.82
2. $A = a\left(\frac{1-r^{\infty}}{1-r}\right)$
   \$2'821,187.52
3. \$3,022,204.61
4. $P = \$112,491.95$
   $Q = -1,124.92$
5. \$3'583,114.18
6. \$5'005,882.35
7. \$14'775,218.09
8. $A = \$610,007.38$
   $S = \$337'746,708.80$
9. $A = \$1'785,415.20$
   $S = \$3'241,162.15$
10. $n = 90.92$ años
    $w = \$73,528.77$

VIII. Amortización.

2. \$125,228.23
4. 11 pagos completos
   $w = \$317.69$
5. $SI_{(89)} = 28,650.80$
   $I_{(90)} = 143.25$
   $AC_{(90)} = 856.75$
   $SI_{(90)} = 27,794.05$

6. $P = \$5,500.91$

   $P' = \$5,827.82$

   $P' - P = \$326.91$

IX. Depreciación.

1. \$560,000.00
2. $d_1 = \$284,000.00$

   $d_2 = \$213,000.00$

   $d_3 = \$142,000.00$

   $d_4 = \$\ 71,000.00$
3. $d_1 = \$313,558.06$

   $d_2 = \$282,202.25$

   $d_3 = \$253,982.03$

   $d_4 = \$228,583.83$

   $d_5 = \$205,725.44$

   $d_6 = \$185,152.90$

   $d_7 = \$166,637.61$

   $d_8 = \$149,973.85$

   $d_9 = \$134,976.46$

   $d_{10} = \$121,478.82$

   $d_{11} = \$109,330.94$

   $d_{12} = \$\ 98,397.84$
4. $d_1 = \$981,100.14$

   $d_2 = \$706,083.71$

   $d_3 = \$508,158.33$

   $d_4 = \$365,714.27$

   $d_5 = \$263,199.32$

   $d_6 = \$189,420.78$

   $d_7 = \$136,323.42$

X. Bonos.

1. \$3,614.33
2. \$8,544.07
3. \$4'826,526.89

4. 1.37%
5. a) \$3'491,293.885
   b) \$3'501,632.055
   c) \$3'497,474.92

XI. Tasa Real
1. 8.10%
2. w =-1.9466% mensual real
   u =-21.0137% anual real
3. 12.2587%
4. 11.0774%

APENDICE:

**Exponentes.**

1. a) $\frac{1}{2} x^5 y^{-1} z^{-1}$
   b) $5a^7 b^{1/2} c^{7/4}$

2. a) $\frac{2^3 b^4}{\sqrt[4]{a^3}}$
   b) $\sqrt[12]{a}$

3. a) 1.43
   b) 5,184.04

4. a) $\frac{2}{3} m^{1/2} n^{3/5}$
   b) $\frac{1}{x^{1/2} n}$

5. a) $\frac{2}{b^{14/15}}$
   b) $\frac{y^{23/20}}{x^{11/12}}$

6. a) $\frac{n^{5/3}}{m^{1/4}}$

b) $m^{13/15}$

7. a) $\frac{1}{a^{9/2}}$

b) $\frac{81}{x^2\ y^{4/3}}$

8. a) $\frac{4}{a^{8/3}} - \frac{12}{a^{4/3}b^{1/2}} + \frac{a}{b}$

b) $x^{3/2} - 3xy^{1/3} + 3x^{1/2}\ y^{2/3} - y$

Logaritmos.

1. Exponencial $2^4 = 16$
   Logarítmica $4 = \log_2 16$
2. a) 6.31
   b) 11,813.85
   c) 3'543,058.79
   d) 283,888.71
   e) 94'065,573.85
   f) 7.24
   g) 8'515,431.26
   h) 1.96
   i) 0.47
   j) 115'447,643.60
3. a) 0.0625
   b) 0.0859
4. a) 1.069972562
   b) 6.372727965
5. a) -.996
   b) 45.89378
   c) .2694
6. -3.272461

Progresiones y Series.

1. 56.25
2. -255
3. $\frac{(1+i)^{10}-1}{i}$
4. 3.7171
5. $a = 16$
6. $d = 1$
7. $a = 5$
8. $d = .5536$
9. $n = 14$
10. 1'647,086
11. $a = 2$
12. $r = -3$
13. $r = 2/3$

    $S = 4.421963$
14. $a = 1$

    $r = \frac{3}{\sqrt{3}}$

Convergencia.

1. Diverge
2. Diverge
3. Converge y el límite es $(e+1)$
4. +) $a = 1$ y $r = 1$

   +) $a = 0$ y $r$ toma cualquier valor real
5. $a = 0$ y $r$ toma cualquier valor real
6. a) $2/3x$, siendo $x$ la distancia entre a y b

   b) $2/3x + 2/9x + 2/27x + \ldots$

   c) Si

   d) Converge al valor X

Series de Potencias de una Variable.

1. $f(x) = 1 + \frac{n}{1!} x + \frac{n^2 x^2}{2!} + \ldots \frac{n^n}{n!} x^n + \ldots$

2. $f(x) = 1 + nx + \frac{n^2 x^2}{2!} + \frac{n^3 x^3}{3!} + \ldots$

3. $e^{-\delta} = 1 - \delta + \frac{\delta^2}{2!} - \frac{\delta^3}{3!} \pm \ldots$

Teorema del Binomio

1. 1.22019
2. 6,919.1946
3. a) 1.26532
   b) 0.00026
   c) 1.08188
   d) .55119
   e) 1.51572
   f) 3.11937

Crecimiento Geométrico y Función Exponencial.

1. $\frac{1 \text{ km}}{3 \text{ min}}$

2. a) \$1,197.22
   b) 1.46%
   c) \$4,574.69
3. 1 hora 38 min.

# B I B L I O G R A F I A.

- Alcaraz Segura, L.
  Cálculos Financieros
  Fondo de Cultura Económica, 1958

- Ayres Frank
  Teoría y Problemas de Matemáticas Financieras
  MacGraw-Hill, 1971

- Corbman Bernard P.
  Mathematics of Retail Merchandising
  Wiley & Sons.

- Cueva G. Benjamín de la
  Matemáticas Financieras
  UNAM, 1971

- Ernest John W.
  Basic Business Mathematics
  Collier MacMillan, 1977

- Fernández Garza Francisco Javier.
  Matemáticas Financieras e Introducción a la Toma de Decisiones.
  Universidad Anáhuac,
  Escuela de Administración y Contaduría, 1978.

- Gil Peláez Lorenzo
  Tablas Financieras y Actuariales
  Dossat, 1959

- González Gate José
  Intereses y Anualidades Ciertas
  Macchi, 1973.

- Grapes Jean E.
  Mathematical Analysis: Business and Economic Applicati
  Harper & Row, 1972.

- Morales Selgueses Carlos
  Elementos de Matemáticas Financieras
  Edit. Contables y Administrativos, 1973.

- Portus Govinden Lincoyan
  Matemáticas Financieras
  MacGraw-Hill, 1982.