Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE LA DIMENSION GLOBAL EN ANILLOS NETERIANOS

T E S I S

Que para obtener el título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

Juan Jacobo Simón Pinero

México, D. F. 1987

Índice

PRESENTACIÓN

Dado un anillo conmutativo, R, y un subconjunto S de R, cerrado bajo la multiplicación, siempre es posible construir el anillo de cocientes de R con respecto a S (al cual denotaremos con $S^{-1}R$). A partir de la formación de cocientes se realiza el proceso de localización.

En el estudio del Álgebra homológica se definen varias dimensiones: las dimensiones inyectiva y proyectiva, a partir de las cuales se definen las dimensiones inyectiva y proyectiva fuertes, y la dimensión global. También se define, en Álgebra conmutativa, la dimensión de Krull de un anillo.

El estudio de los anillos de cocientes -junto con las propiedades locales- y las dimensiones son dos temas fundamentales del Álgebra moderna. Cuando se trata de anillos neterianos conmutativos, la combinación de estos dos temas nos conduce a resultados muy interesantes; algunos de ellos nos recuerdan a las propiedades locales. Por ejemplo, resulta que las dimensiones homológicas y la dimensión de Krull son cada una igual al supremo de las respectivas dimensiones de sus localizaciones.

Pues bien, de eso se trata este trabajo. Veremos aquellos resultados que mencionamos antes y los aplicaremos para demostrar un teorema sobre cambio de anillos; para obtener una caracterización de los anillos locales regulares cuya dimensión de Krull es finita, y finalmente algunas condiciones para módulos con dimensión inyectiva fuerte finita. También se verán algunos pequeños resultados que relacionan a todas las dimensiones cuando éstas son finitas.

El material de este trabajo está compuesto, fundamentalmente, por fragmentos de dos artículos, uno de H. Bass (cuarta referencia) y otro de Z. Papp (séptima referencia).

CAPÍTULO I

LA DIMENSIÓN INYECTIVA EN ANILLOS NETERIANOS

1. Anillos neterianos y anillos de cocientes

Los módulos inyectivos pocas veces son finitamente generados, así que, cuando los consideremos, los usos convencionales de condiciones de cadena en el anillo no son aprovechables. El teorema 1 nos provee formulaciones de la condición de la cadena ascendente que están mejor adaptadas para nuestros propósitos. El teorema es más fuerte que necesario para nuestras aplicaciones, pero puede ser de interés para sugerir posibles definiciones útiles de la condición de la cadena en categorías abelianas más generales.

Comenzaremos recordando lo básico acerca de las cápsulas inyectivas. Sea R un anillo y consideremos la categoría R-mód de los R-módulos izquierdos.

Un monomorfismo $0 \to A \to E$ de R-módulos se llama <u>esencial</u> (sólo diremos que A es un submódulo esencial de E) si $A \cap B = 0$ implica $B = 0$ para todo B submódulo de E. Si, además, E es inyectivo, decimos que $0 \to A \to E$ es una cápsula inyectiva y lo indicaremos escribiendo E(A) para E (la inclusión quedará sobreentendida).

Utilizando el Lema de Zorn, es posible demostrar que todo R-módulo tiene cápsula inyectiva, lo cual nos garantiza la existencia de resoluciones inyectivas de la siguiente manera:

Sea $A \in R$-mód, entonces existe Q_0 inyectivo tal que la sucesión $0 \to A \to Q_0 \to Q_0/_A \to 0$ es exacta. Llamemos Q'_n al cociente $Q_n/_{Q'_{n-1}}$ y formemos

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & 0 \arrow[r] & Q'_1 \arrow[r] \arrow[dr] & 0 & & & \cdots \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & Q_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q_1 \arrow[rr] \arrow[ur] & & Q_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q_3 \arrow[r] \arrow[ur] & \cdots \\
 & & 0 \arrow[r] & Q'_0 \arrow[r] \arrow[ur] & 0 & & 0 \arrow[r] & Q'_2 \arrow[r] \arrow[ur] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

donde cada Q_i es el módulo inyectivo del cual, como dijimos anteriormente, tenemos garantizada la existencia.

De aquí se sigue que todo $A \in R$-mód tiene una resolución inyectiva de la foma, $0 \to A \to E_0 \to \ldots \to E_n \xrightarrow{d} \ldots$ donde E_{n+1} es la cápsula inyectiva de $d(E_n)$, y se construye igual que las resoluciones inyectivas en general.

A esta resolución la llamaremos <u>resolución inyectiva mínima</u>. Escribiremos $Di_R(A)$ para referirnos a la dimensión inyectiva de un R-módulo A. Es fácil verificar que, para una resolución inyectiva mínima de A como la anterior, $Di_R(A) < n$ si y sólo si $E_n = 0$.

Efectivamente, si $Di_R(A) < n$ ent. existe $r < n$ tal que $d(E_{r-1})$ es inyectivo, así que $E_r = d(E_{r-1})$ y por lo tanto $E_{r+1} = 0$, y como $r+1 \leq n$ tenemos que $E_n = 0$. Recíprocamente se desprende de inmediato del hecho de que Ext es independiente de la resolución inyectiva que se considere.

<u>Teorema 1</u> : Sea R un anillo, son equivalentes,

1) R es neteriano izquierdo

2) La suma directa de R-módulos inyectivos es nuevamente inyectivo

3) El límite directo de R-módulos inyectivos es nuevamente inyectivo

4) El límite directo de R-módulos cuya dimensión inyectiva es $\leq n$, tiene dimensión inyectiva $\leq n$

5) El límite directo de monomorfismos esenciales es un monomorfismo esencial.

<u>Demostración</u>

$(1 \Longrightarrow 3)$

Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in(X,\leq)}$ junto con $\varphi_{\alpha\beta} : M \longrightarrow M$ si $\alpha \leq \beta$, un sistema directo con cada M inyectivo, y consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & R \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ & & \varinjlim M_\alpha & & \end{array}$$

con renglón exacto.

Como R es neteriano entonces I es finitamente generado, así que $f(I) \subset \varinjlim M_\alpha$ es finitamente generado. Sea entonces $f(I) = \langle \bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n \rangle$. Como el conjunto de generadores es finito entonces existe $\alpha \in X$ tal que cada $\bar{m}_i$ tiene un representante en M_α, es decir, $\{m_1, \ldots, m_n\} \subset M$ tal que $u_\alpha(m_i) = \bar{m}_i$. Consideremos ahora a Ker $u_{\alpha|\langle m_1,\ldots,m_n\rangle}$.

Como R es neteriano Ker $u_{\alpha|\langle m_1,\ldots,m_n\rangle}$ es fin. gen.; sean

$\{x_1,\ldots,x_r\}$ los generadores. Como $u_\alpha(x_i) = 0$ entonces para cada i, existe $\gamma_i \in X$ tal que $\varphi_{\alpha\gamma_i}(x_i) = 0$ y como también tenemos un número finito de γ_i entonces existe $\gamma \in X$ tal que $\varphi_{\alpha\gamma}(x_i) = 0$. Es decir, $\varphi_{\alpha\gamma}(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle) = 0$, lo cual implica que si $\varphi_{\alpha\gamma}(m_i) = m'_i$ entonces $u_\alpha|\langle m'_1,\ldots,m'_n\rangle$ es un monomorfismo. Por tanto podemos definir $g : I \longrightarrow M_\gamma$ tal que $g(I) = \langle m'_1,\ldots,m'_n\rangle$ y así obtenemos el diagrama,

$$
f = u_\gamma \circ g \qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & R \arrow[dl, "\bar{g}"'] \arrow[ddl] \\
 & M_\gamma \arrow[d, "u_\gamma"'] & \\
 & \varinjlim M_\gamma &
\end{tikzcd}
\qquad u_\gamma \circ \bar{g} = \bar{f}
$$

Como M_γ es inyectivo, existe $\bar{g} : R \longrightarrow M_\gamma$ tal que $\bar{g}|_I = g$, y en consecuencia podemos definir $\bar{f} : R \longrightarrow \varinjlim M_\alpha$ como $\bar{f} = u_\gamma \circ \bar{g}$. Es claro que $\bar{f}|_I = u_\gamma \circ \bar{g}|_I = u_\gamma \circ g = f$, y por lo tanto, $\varinjlim M_\alpha$ es inyectivo.

(3 $\Longrightarrow$ 4) Sea $E = E(\bigoplus S_i)$ tal que S_i es simple y si $i \neq j$ entonces $S_i \not\cong S_j$. Como E es un cogenerador inyectivo, para todo $M \in R$-mód, existe un monomorfismo $M \longrightarrow E^{\mathrm{Hom}_R(M,E)}$ así que podemos formar la siguiente resolución inyectiva.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 \\
 & & & & & M_1/M_0 = M'_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & M_3/M'_2 \arrow[ur] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & M_0 = E^{\mathrm{Hom}(M,E)} \arrow[rr] \arrow[dr] & & M_1 = E^{\mathrm{Hom}(M'_0,E)} \arrow[rr] \arrow[ur] & & M_2 = E^{\mathrm{Hom}(M'_1,E)} \arrow[rr] \arrow[dr] & & M_3 = E^{\mathrm{Hom}(M'_2,E)} \arrow[rr] \arrow[ur] & & \cdots \arrow[dr] & \\
 & & & M_0/M = M'_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & M_2/M'_1 = M'_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & {} \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd}
$$

mejor denotamos a la resolución anterior de esta manera $0 \longrightarrow M \longrightarrow M^1 \longrightarrow M^2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow M^r \longrightarrow \ldots$

Observemos ahora que si $M, N \in R$-mód y existe un morfismo $f : M \longrightarrow N$, éste induce $F(f) : E^{\mathrm{Hom}(M,E)} \longrightarrow E^{\mathrm{Hom}(N,E)}$ tal que, si $(e_\alpha) \in E^{\mathrm{Hom}(M,E)}$, $F(f)\left[(e_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Hom}(M,E)}\right] = (e_\beta)$ tq si $f'(\beta) = \alpha$ ent. $e_\beta = e_\alpha$.
donde $f' : \mathrm{Hom}(N,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,E)$.

Ahora lo que se afirma es que $F(f)$ es un morfismo,

$$F(f)((e_\alpha) + (e'_\alpha)) = F(f)((e_\alpha + e'_\alpha)) = (e_\beta + e'_\beta) =$$
$$= (e_\beta) + (e'_\beta) = F(f)((e_\alpha)) + F(f)((e'_\alpha)).$$

Además, si $r \in R$, $F(f)(r(e_\alpha)) = F(f)((re_\alpha)) = (re_\beta) = r(e_\beta) = rF(f)((e_\alpha))$;
y hace conmutar el cuadrado,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "f"'] & E^{\mathrm{Hom}(M,E)} \arrow[d, "F(f)"] \\ N \arrow[r, "i_N"] & E^{\mathrm{Hom}(N,E)} \end{tikzcd}$$

ya que si $m \in M$ ent. $i_M(m) = (e_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Hom}(M,E)}$ tal que $\alpha(m) = e_\alpha$ y $F(f)((e_\alpha)) = (e_\beta)$ tal que si $f'(\beta) = \alpha$ ent. $e_\beta = e_\alpha$. Sea $i_N(f(m)) = (e'_\beta)$ tal que $\beta(f(m)) = e'_\beta$; supongamos que $f(\beta) = \alpha$, ent. $e_\beta = e_\alpha = e_{f(\beta)} = \alpha(m) = (f' \cdot \beta)(m) = \beta(f(m)) = e'_\beta$ $\therefore$ $e_\beta = e'_\beta$ y $\therefore$ el cuadrado conmuta.

Ahora podemos definir el funtor $(F, E^{\mathrm{Hom}(M,E)})$. Verificar que efectivamente tenemos un funtor es cuestión de hacer las cuentas, utilizando las propiedades que tienen las funciones inducidas f', así como la identidad $1'_M$.

Ahora vamos a combiar los dos resultados a los que hemos llegado: la posibilidad de formar ésas resoluciones y el funtor que definimos.

Sea $\{M_i\}_{i \in X}$ un sistema directo de R-módulos izquierdos y para cada $i \in X$, formemos una resolución inyectiva como al principio. $0 \longrightarrow M_i^1 \longrightarrow M_i^2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_i^n \longrightarrow \ldots$ Mostraremos entonces, por inducción, que para cada n $\{M_i^n\}_{i \in X}$ forma un sistema directo.

Para $n = 1$, sean $i, j \in X$ tales que $i \leq j$, ent. existe $\varphi_{ij}^0 : M_i \longrightarrow M_j$; ent. tenemos el morfismo inducido $F(\varphi_{ij}^0) : M_i^1 \longrightarrow M_j^1$: definimos, $\varphi_{ij}^1 = F(\varphi_{ij}^0)$. Veamos si cumple las propiedades del sistema directo.

$\varphi_{ii}^1 = F(\varphi_{ii}^0) = F(1_{M_i}) = 1_{M_i^1}$.

Si $i \leq j$ y $j \leq k$ ent. $\varphi_{jk}^1 \varphi_{ij}^1 = F(\varphi_{jk}^0)\, F(\varphi_{ij}^0) =$

$$F(\varphi_{jk}^0 \varphi_{ij}^0) = F(\varphi_{ik}^0) = \varphi_{ik}^1.$$

Supongamos válido para n, y para demostrarlo para $n+1$ definamos igual, $\varphi_{ij}^{r+1} = F(\varphi_{ij}^r)$ y análogamente se demuestra que $\{M^{r+1}\}$ es un sistema directo.

$\therefore$ $\{M_i^r\}_{i \in X}$ es un sistema directo para toda n.

Podemos entonces formar la siguiente sucesión exacta de sistemas directos de módulos inyectivos,

$$0 \longrightarrow \{M_i\} \longrightarrow \{M_i^1\} \longrightarrow \{M_i^2\} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \{M_i^n\} \longrightarrow \ldots$$

pero como la dimensión inyectiva de cada M_i es n, ent. $\{M_i^n\} = 0$, y como el límite directo es un funtor exacto, ent. la sucesión $0 \longrightarrow \varinjlim M_i \longrightarrow \varinjlim M_i^1 \longrightarrow \varinjlim M_i^2 \longrightarrow \dots \longrightarrow \varinjlim M_i^r \longrightarrow \dots$ es exacta y además $\varinjlim M_i^n$ es inyectivo por hipótesis, por lo tanto es una resolución inyectiva para $\varinjlim M_i$; donde, además, $\varinjlim M_i^n = 0$ $\therefore$ $Di(\varinjlim M_i) \leq n$.

<u>$(4 \Rightarrow 3)$</u>

Sea $\{M_i\}_{i \in X}$ un sistema directo donde cada M_i es inyectivo. Como M_i es inyectivo entonces su dimensión inyectiva $Di(M_i) \leq 1$, así que por hipótesis $Di(\varinjlim M_i) \leq 1$, y $\therefore$ $\varinjlim M_i$ es inyectivo.

<u>$(3 \Rightarrow 2)$</u>

Sea $\{M_i\}_{i \in X}$ una familia de R-módulos izquierdos. Definimos: $I = \{Y \subset X \ / \ Y \text{ es finito}\}$, con el siguiente orden, si $x, y \in I$, $x \leq y \iff x \subseteq y$.

y sea $M_x = \bigoplus_{i \in x} M_i = \prod_{i \in x} M_i$.

Obsérvese que $\{M_x\}_{x \in I}$ es un sistema directo de R-módulos inyectivos, con $f_{xy} : M_x \longrightarrow M_y$ la inclusión. Ahora vamos a demostrar que el límite directo de este sistema directo es precisamente la suma directa de $\{M_i\}_{i \in X}$.

Sea $i_x : M_x \longrightarrow \bigoplus_i M_i$ la inclusión natural; es claro que

el triángulo
$$\begin{tikzcd} M_y \arrow[dr] & \\ & \bigoplus_i M_i \\ M_x \arrow[uu] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$
conmuta,

así que sólo nos falta probar que cumple la propiedad universal del límite directo.

Sean $u_x : M_x \longrightarrow K$ tq
$$\begin{tikzcd} M_y \arrow[dr, "u_y"] & \\ & K \\ M_x \arrow[uu, "f_{xy}"] \arrow[ur, "u_x"'] & \end{tikzcd}$$
conmuta

entonces están definidos $u_i : M_i \longrightarrow K$ cuando $x = \{i\}$,

$\therefore$ existe una única $F : \bigoplus_i M_i \longrightarrow K$ tal que

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_i M_i \arrow[dr, "F"] & \\ & K \\ M_i \arrow[uu] \arrow[ur, "u_i"'] & \end{tikzcd}$$
es conmutativo, es más,

para cada $x \in X$, existe una única $F_x : M_x \longrightarrow K$ tal que este

nuevo triángulo
$$\begin{tikzcd} M_x \arrow[dr, "F_x"] & \\ & K \\ M_i \arrow[uu] \arrow[ur, "u_i"'] & \end{tikzcd}$$
es conmutativo,

y por lo tanto tenemos que $u_x = F_x$: pero por la manera como se definieron F y F_x, se verifica la igualdad $F_x = F \cdot i_x$

y por lo tanto, el diagrama
$$\begin{tikzcd} \bigoplus_i M_i \arrow[dr, "F"] & \\ & K \\ M_x \arrow[uu, "i_x"] \arrow[ur, "F_x = u_x"'] & \end{tikzcd}$$
conmuta

así obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M_y \arrow[dr] \arrow[drr, "u_y = F_y"] & & \\ & \bigoplus_i M_i \arrow[r, "F"] & K \\ M_x \arrow[uu, "f_{xy}"] \arrow[ur] \arrow[urr, "u_x = F_x"'] & & \end{tikzcd}$$
y podemos concluir que

$$\therefore \quad \bigoplus_i M_i = \varinjlim M_x$$

y como por hip. $\varinjlim M_x$ es inyectivo $\therefore$ $\bigoplus_i M_i$ es inyectivo.

<u>(2 $\Rightarrow$ 1)</u>

Que toda suma directa de R-módulos inyectivos es nuevamente un R-módulo inyectivo es una caracterización muy conocida de los anillos neterianos, así que omitiremos su demostración.

<u>(1 $\Rightarrow$ 5)</u>

Sea $(M_\alpha, f_{\alpha\beta})$ un sistema directo y $\{B_\alpha\}$ un subsistema donde cada B_α es submódulo esencial en M_α. (Debemos probar que si $\overline{x} \in \varinjlim M_\alpha$ tal que $R\overline{x} \cap \varinjlim B_\alpha = 0$ ent. $\overline{x} = 0$.)

Sea, pues, $\overline{x} \in \varinjlim M_\alpha$ ent. existe $\alpha \in X$ tal que $x \in M_\alpha$ y $u_\alpha(x) = \overline{x}$. Consideremos $u_{\alpha|Rx} : Rx \longrightarrow R\overline{x}$ donde $u_\alpha(rx) = ru_\alpha(x) = r\overline{x}$, para $r \in R$.

Como R es neteriano izquierdo y Rx es finitamente generado ent. Rx también es neteriano y por tanto $\operatorname{Ker} u_{\alpha|Rx}$ también es finitamente generado.

Sea entonces $\operatorname{Ker} u_{\alpha|Rx} = \langle a_1x, \ldots, a_nx \rangle$. ent. $u_\alpha(a_ix) = a_iu_\alpha(x) = a_i\overline{x} = 0$. De lo anterior, y por la definición de límite directo, podemos concluir que $a_i\overline{x} = 0$, para toda $i = 1, \ldots, n$. Como $a_i\overline{x} = 0$, por definición, existe M_{γ_i} tal que $f_{\alpha\gamma_i}(a_ix) = 0$. Por ser X un conjunto dirigido y $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ también finito, existe $\gamma \in X$, tal que $\gamma_i \leq \gamma$ para $i = 1, \ldots, n$; además, $f_{\alpha\gamma}(a_ix) = a_if_{\alpha\gamma}(x) = 0$.

Sea $f_{\alpha\gamma}(x) = x' \in M_\gamma$, por definición $u_\gamma(x') = \overline{x}$. Ahora demostraremos que $u_{\gamma|Rx'} : Rx' \longrightarrow R\overline{x}$ es un monomorfismo.

Sea $bx' \in \mathrm{Ker}\, u_{\gamma|Rx'}$, entonces
$0 = u_\gamma(bx') = bu_\gamma(x') = bu_\gamma(f_{\alpha\gamma}(x)) = bu_\alpha(x) = u_\alpha(bx)$, ent. $bx \in \mathrm{Ker}\, u_\alpha$ ent. $bx = m_1a_1x + \ldots + m_na_nx$, y entonces $f_{\alpha\gamma}(bx) = f_{\alpha\gamma}(m_1a_1x + \ldots + m_na_nx) = f_{\alpha\gamma}(m_1a_1x) + \ldots + f_{\alpha\gamma}(m_na_nx) = 0$ $\therefore$ $bf_{\alpha\gamma}(x) = 0$; $\therefore$ $bx' = 0$, y $\therefore$ $u_{\gamma|Rx'}$ es un monomorfismo. Entonces, como $u_\gamma(Rx' \cap B_\gamma) \subset (R\overline{x} \cap \underrightarrow{\lim}\, B_\alpha)$ y este último es $= 0$, se tiene que $Rx' \cap B_\gamma = 0$ y como B_γ es esencial en M_γ ent. $Rx' = 0$, por tanto, $x' = 0$
$\therefore$ $\overline{x} = 0$, $\therefore$ $\underrightarrow{\lim}\, B_\alpha$ es esencial en $\underrightarrow{\lim}\, M_\alpha$.

<u>(5 $\Longrightarrow$ 1)</u>

Esta última implicación la demostraremos por reducción al absurdo. Supongamos que R no es neteriano entonces existe una cadena de ideales izquierdos de R, $\{A_n\}$ la cual es estrictamente creciente.
Supongamos, además, que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Para cada n, definimos

$$\mathcal{F}_n = \{ I \text{ ideal de } R \;/\; A_n \subset I \;\text{ e }\; I \cap A = A_n \} ;$$

observemos que $\mathcal{F}_n \neq \emptyset$ ya que $A_n \in \mathcal{F}_n$; además, el conjunto $(\mathcal{F}_n, \leqslant)$ es parcialmente ordenado. Demostraremos que satisface las hipótesis del Lema de Zorn.

Sea $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_k \ldots$ una cadena en $\mathcal{F}_n$, y sea $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k = I$. Lo primero que podemos observar es que I es un ideal de R porque los ideales I_k están encadenados; además, como $I_k \subset I$, ent. $A_n \subset I$. También se tiene

que $I \cap A = A_n$ ya que si existiera $x \in (I \cap A) - A_n$ ent., por estar x en I, $x \in I_j$, para alguna $j \in \mathbb{N}$, así que $A_n \subsetneq (I_j \cap A)$, lo cual contradice la definición de $\mathcal{F}_n$.
$\therefore$ la cadena tiene un máximo,
$\therefore$ $\mathcal{F}_n$ satisface las hipótesis del Lema de Zorn, y
$\therefore$ $\mathcal{F}_n$ tiene máximos para toda $n = 1,2,\dots$

Otra propiedad de $\mathcal{F}_n$ que nos es útil aquí es que para toda $I_n \in \mathcal{F}_n$, $\left(I_n + A_{n+1}\right) / A_{n+1} \cap A / A_{n+1} = 0$ veamos la demostración, $A_n \subset (I_n \cap A_{n+1}) \subset (I_n \cap A) = A_n$ por tanto, $I_n \cap A_{n+1} = A_n$, y por el segundo teorema de isomorfismos, $\left.I_n + A_{n+1}\right) / A_{n+1} \cong I_n / (I_n \cap A_{n+1}) = I_n / A_n$.
Como $I_n \in \mathcal{F}_n$ ent. $I_n / A_n \cap A / A_n = 0$. Por otro lado, por el tercer teo. de isom., $A / A_{n+1} \cong \left(A / A_n\right) / \left(A_{n+1} / A_n\right)$, es decir, A / A_{n+1} es un cociente de A / A_n, y podemos decir que $\therefore$ $I_n / A_n \cap A / A_{n+1} = 0$; y

$$\therefore \left(I_n + A_{n+1}\right) / A_{n+1} \cap A / A_{n+1} = 0 .$$

Ahora vamos a construir una cadena ascendente $\{B_n\}$. Sea B_0 un máximo en $\mathcal{F}_0$. Entonces, B_0 verifica que:

1) $B_0 \;\; A = A_0$ y 2) $^{B_0}/_{A_0}$ es un submódulo máximo en $^{R}/_{A_0}$, con la propiedad de que $^{B_0}/_{A_0} \cap {}^{A}/_{A_0} = 0$. Todo esto se desprende a partir de la manera como se definió $\mathcal{F}_n$ y del hecho de que $\mathcal{F}_n$ satisface las hipótesis del Lema de Zorn; además, como $B_0 \in \mathcal{F}_0$, ent. verifica la propiedad para cocientes que demostramos arriba y en consecuencia, $(B_0 + A_1) \cap A = A_1$; por lo tanto $B_0 + A_1 \in \mathcal{F}_1$, entonces existe un máximo en $\mathcal{F}_1$ tal que $B_0 + A_1 \subset B_1$.

Así, inductivamente, podemos construir la cadena $B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_n \subset \dots$ la cual, como $B_i \cap A = A_i$, es estrictamente creciente. Definimos $B = \bigcup_n B_n$. Y ahora, consideremos los sistemas directos $\left\{ {}^{B}/_{B_n} \right\}$ y $\left\{ {}^{R}/_{B_n} \right\}$. Ahora vamos a probar que $\varinjlim {}^{B}/_{B_n} = 0$ y $\varinjlim {}^{R}/_{B_n} = {}^{R}/_{B}$. Consideremos las sucesiones $0 \longrightarrow B_n \longrightarrow B \longrightarrow {}^{B}/_{B_n} \longrightarrow 0$ y

$0 \longrightarrow B_n \longrightarrow R \longrightarrow {}^{R}/_{B_n} \longrightarrow 0$ las cuales son ambas exactas. Como $\varinjlim$ __ es un fiuntor exacto, entonces las dos sucesiones

$0 \longrightarrow \varinjlim B_n \longrightarrow \varinjlim B \longrightarrow \varinjlim {}^{B}/_{B_n} \longrightarrow 0$ y

$0 \longrightarrow \varinjlim B_n \longrightarrow \varinjlim R \longrightarrow \varinjlim {}^{R}/_{B_n} \longrightarrow 0$, son exactas.

Es claro que $\varinjlim B_n = B$ pues se tiene la unión dirercta y también es claro que $\varinjlim B = B$ y $\varinjlim R = R$, por lo tanto, tenemos las siguientes sucesiones exactas,

$0 \longrightarrow B \longrightarrow B \longrightarrow \varinjlim B/B_n \longrightarrow 0 \quad$ y $\quad 0 \longrightarrow B \longrightarrow R \longrightarrow \varinjlim R/B_n \longrightarrow 0$

$\therefore \quad \varinjlim B/B_n = 0 \quad$ y $\quad \varinjlim R/B_n = R/B$.

Además, vamos a ver que B/B_n es submódulo esencial en R/B_n.

Como $B_n/A_n \cap A/A_n = 0$ y B_n/A_n es máximo en R/A_n con esta propiedad (en general, si N es submód. de M y K es maximo con la propiedad: $K \cap N = 0$, ent. $(N + K)/K$ es esencial en M/K: esto se sigue de inmediato del hecho de que si K es un pseudocomplemento de N en M ent. N es isomorfo a un submódulo esencial en M/K) se tiene que:

$$\left(A/A_n + B_n/A_n\right) \Big/ \left(B_n/A_n\right) \text{ es esencial en } \left(R/A_n\right) \Big/ \left(B_n/A_n\right) \cong R/B_n,$$

pero, por el segundo teorema de isomorfismos

$$\left(A/A_n + B_n/A_n\right) \Big/ \left(B_n/A_n\right) \cong \left(A/A_n\right) \Big/ \left(B_n/A_n \cap A/A_n\right) \cong \left(A/A_n\right) \Big/ 0 = A/A_n$$

$\therefore \quad A/A_n$ es esencial en R/B_n , y como

$A/A_n = A/(A \cap B_n) \cong (A + B_n)/B_n \subset B/B_n$ podemos concluir que B/B_n es esencial en R/B_n.

Además, como $B_n \cap A = A_n$ la cadena $\{B_n\}$ es estrictamente creciente y $\bigcup_n B_n$ no puede ser igual a R, ya que si $B = R$ ent. $1 \in B$ ent. $1 \in B_n$ para alguna n, lo cual es imposible.

$\therefore$ B/B_n es esencial en R/B_n y $B \neq R$.

Por hipótesis, tenemos que el límite directo de monomorfismos esenciales es esencial, así que en este caso si B/B_n es esencial en R/B_n entonces sus límites directos, que mostramos que son 0 y R/B, verifican la propiedad, es decir, 0 es esencial en R/B y $\therefore$ $B = R$ lo cual es absurdo; esto significa que no se puede elegir una cadena creciente en sentido estricto en R, y $\therefore$ R es neteriano.

Con esto terminamos la demostración del teorema.

Uno de los principales usos de este teorema se da en los anillos de cocientes. Veremos que las resoluciones inyectivas mínimas se preservan en los módulos de cocientes. Éste es un resultado muy importante dentro de la localización, el cual utilizaremos en los siguientes capítulos.

<u>Observación</u> : Para abordar los módulos de cocientes, algunos autores construyen el módulo de cocientes de manera análoga a la de anillos y despúes demuestran la equivalencia, $S^{-1}M \simeq S^{-1}R \otimes M$ (con $\frac{r}{s} \otimes m \longrightarrow \frac{rm}{s}$), donde R es un anillo, $M \in$ R-mód y $S \subset R$ cerrado bajo la multiplicación; otros autores lo hacen alrevés. Para la primera forma véase la segunda referencia; para la otra, véase la última.

Veremos muchas propiedades del funtor S^{-1}__ (o $S^{-1}R \otimes$ __), algunas de ellas conocidas, pero todas muy interesantes cuando se trata de anillos neterianos; la primera que mencionaremos, y que es muy conocida, es que preserva exactitud en las sucesiones.

<u>LEMA 1</u> : Sea R un anillo conmutativo, A una R-álgebra y $S \subset R$ cerrado bajo la multiplicación.

<u>a)</u> Si E es un $S^{-1}A$-módulo entonces E es A-inyectivo si y sólo si E es $S^{-1}A$-inyectivo.

<u>b)</u> Si A es neteriana y E es A-inyectivo entonces $S^{-1}E$ es, a la vez, A y $S^{-1}A$ -inyectivo.

<u>Demostración (a)</u> : Sea $M \in$ R-mód y $E \in S^{-1}A$-mód. Para demostrar esta parte, primero vamos a probar las equivalencias: $\mathrm{Hom}_A(M,E) \simeq \mathrm{Hom}_A(S^{-1}M,E) = \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M,E)$.

Definimos $F : \mathrm{Hom}_A(M,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(S^{-1}M,E)$ tal que si $f \in \mathrm{Hom}_A(M,E)$, $F(f)(\frac{m}{s}) = \frac{1}{s}\cdot f(m) = \frac{f(m)}{s}$, donde $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$.

<u>Afirmación 1</u> : F está bien definida

<u>dem.</u> $F(f)(\frac{m}{s}) = \frac{1}{s}f(m) \in E$; además, si $\frac{a}{s} = \frac{b}{r}$, ent. existe $u \in S$ tal que $u(ra-sb) = 0$, entonces $f(u(ra-sb)) = 0$ así que $u(rf(a)-sf(b)) = 0$, esto implica que $\frac{f(a)}{s} = \frac{f(b)}{r}$ y en consecuencia $F(f)(\frac{a}{s}) = F(f)(\frac{b}{r})$. Así que $F(f)$ es función. Es más, como $F(f)(\frac{m}{s}+\frac{n}{r}) = F(f)(\frac{rm+sn}{sr}) = \frac{1}{sr}f(rm+sn) =$

$$= \frac{1}{sr}(rf(m)+sf(n)) = \frac{1}{s}f(m)+\frac{1}{r}f(n) = F(f)(\frac{m}{s})+F(f)(\frac{n}{r}).$$

así que $F(f) \in \mathrm{Hom}_A(S^{-1}M,E)$, y $\therefore$ F está bien definida.

<u>Afirmación 2</u> : F es isomorfismo

<u>dem.</u> sean $f,g \in \mathrm{Hom}_A(M,E)$ tales que $f = g$ ent. $f(m) = g(m)$ para toda $m \in M$, entonces $\frac{1}{r}f(m) = \frac{1}{r}g(m)$ para toda $r \in S$ y $m \in M$, ent. por definición $F(f)(\frac{m}{r}) = F(g)(\frac{m}{r})$ para toda $r \in R$ y $m \in M$, y por lo tanto, $F(f) = F(g)$. Con la suma, $F(f+g)(\frac{m}{s}) = \frac{1}{s}(f+g)(m) = \frac{1}{s}(f(m)+g(m)) =$ $= \frac{1}{s}f(m)+\frac{1}{s}g(m) = F(f)(\frac{m}{s})+F(g)(\frac{m}{s})$. Con la multiplicación, $F(rf)(\frac{m}{s}) = \frac{1}{s}(rf)(m) = \frac{1}{s}(rf(m)) = \frac{1}{s}(\frac{r}{1}f(m)) =$

$$= \frac{r}{1}\cdot\frac{1}{s}f(m) = \frac{r}{1}F(f)(\frac{m}{s}) = rF(f)(\frac{m}{s}) .$$

Y por lo tanto F es morfismo.

Para mostrar que f es monomorfismo consideremos un elemento $f \in \operatorname{Ker} F$, ent. $F(f)(\frac{m}{s}) = 0$ para toda $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$, en particular $F(f)(\frac{m}{1}) = 0$ para toda $\frac{m}{1} \in S^{-1}M$, así que para toda $m \in M$, $\frac{1}{1}f(m) = 0$ ent. $f(m) = 0$ para toda $m \in M$ $\therefore$ f es la constante cero y $\therefore$ F es monomorfismo.

Sólo falta ver que es epimorfismo; para eso observemos primero que si $f \in \operatorname{Hom}_A(S^{-1}M, E)$, entonces $f(a\cdot\frac{m}{s}) = af(\frac{m}{s})$, es decir, $f(\frac{a}{1}\cdot\frac{m}{s}) = \frac{a}{1}f(\frac{m}{s})$. Ahora bien,

$$f(\frac{am}{rs}) = \frac{r}{r}f(\frac{am}{rs}) = \frac{1r}{r1}f(\frac{am}{rs}) = \frac{1}{r}f(\frac{ram}{1rs}) = \frac{1}{r}f(\frac{a}{1}\cdot\frac{m}{s}) =$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\frac{a}{1}f(\frac{m}{s}) = \frac{a}{r}f(\frac{m}{s}) .$$

Esto nos muestra, de entrada, la segunda igualdad que tenemos que demostrar; pero de todas maneras la veremos despúes. Por lo pronto, sea $g \in \operatorname{Hom}_A(S^{-1}M, E)$, y definimos, $f : M \longrightarrow E$ tal que $f(m) = g(\frac{m}{1}) \in E$. Si $f(m) \neq f(n)$ ent. $g(\frac{m}{1}) \neq g(\frac{n}{1})$, entonces, como g es morfismo, $\frac{m}{1} \neq \frac{n}{1}$ y en consecuencia, $m \neq n$; es fácil verificar el resto de las propiedades que muestran que f es un morfismo, además,
$F(f)(\frac{m}{s}) = \frac{1}{s}f(m) = \frac{1}{s}g(\frac{m}{1}) = g(\frac{m}{s})$ (la última igualdad se desprende de la observación), por lo tanto F es epimorfismo y $\therefore$ F es un isomorfismo.

Sólo falta ver que $\operatorname{Hom}_A(S^{-1}M, E) = \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, E)$. La contención de izquierda a derecha es evidente y la otra se desprende de inmediato de la observación. Nótese que la propiedad que mencionamos depende del hecho de que $E \in S^{-1}A$.

Con esto hemos demostrado las equivalencias, así que $\mathrm{Hom}_A(M,E) \cong \mathrm{Hom}_A(S^{-1}M,E) = \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M,E)$.

A partir de estas identificaciones podremos probar esta parte del lema utilizando el hecho de que un módulo E es inyectivo si y sólo si $\mathrm{Hom}(\_,E)$ es un funtor exacto. Para eso, vamos a probar antes dos afirmaciones sencillas,

<u>Afirmación 3</u> : Si $M \in S^{-1}A$-mód ent. $M \cong S^{-1}M$.

<u>dem.</u> definimos $f : M \longrightarrow S^{-1}M$ tal que $f(m) = [\frac{m}{1}]$ es decir, la clase de $(m,1)$ que hemos escrito simplemente como $\frac{m}{1}$ (o también, $\frac{1}{1}\otimes m$). Para ver que es monomorfismo, sea $m \in \mathrm{Ker}\ f$ ent. $f(m) = 0$, como $\frac{0}{1}$ es un representante de la clase del neutro respecto de la suma en $S^{-1}A$, ent. $\frac{m}{1} = \frac{0}{1}$ ent. existe $u \in S$ tal que $u \cdot m = 0$; como $M \in S^{-1}A$-mód, entonces $\frac{u}{1} \cdot m = 0$ ent. $\frac{1}{u} \cdot \frac{u}{1} \cdot m = \frac{1}{u} \cdot 0 = 0$, ent., como $\frac{1}{u} \cdot \frac{u}{1}$ es la identidad. $\frac{1}{1}m = 0$, $\therefore$ $m = 0$, $\therefore$ f es monomorfismo. Para mostrar que es epimorfismo consideremos un elemento $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$. Como este elemento se puede expresar como $\frac{1}{s} \cdot \frac{m}{1}$, ent. $f(\frac{1}{s}m) = \frac{1}{s}f(m) = \frac{1}{s} \cdot \frac{m}{1} = \frac{m}{s}$, y $\therefore$ f es epimorfismo.

$\therefore$ f es isomorfismo.

A partir de lo anterior, las igualdades que vimos, y el hecho de que $S^{-1}\_$ es exacto, se desprende de inmediato que si $D,B,C \in S^{-1}A$-mód ent. $0 \longrightarrow D \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es exacta en

$S^{-1}A$-mód si y sólo si la sucesión es exacta en A-mód.

Finalmente, vamos a demostrar que $Hom_A(\_,E)$ es exacto si y sólo si $Hom_{S^{-1}A}(\_,E)$ es exacto.

Supongamos que $Hom_A(\_,E)$ es exacto y sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta en $S^{-1}A$-mód, ent. también es sucesión exacta en A-mód, así que, por hipótesis, $0 \to Hom_A(M'',E) \to Hom_A(M,E) \to Hom_A(M',E) \to 0$ es exacta en A-mód, y $\therefore$ $0 \to Hom_{S^{-1}A}(M'',E) \to Hom_{S^{-1}A}(M,E) \to Hom_{S^{-1}A}(M',E)$ es exacta en $S^{-1}A$-mód, $\therefore$ $Hom_{S^{-1}A}(\_,E)$ es exacto.

Recíprocamente, sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta en A-mód, ent. $0 \to S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}M'' \to 0$ es exacta en $S^{-1}A$-mód, si aplicamos Hom, la sucesión $0 \to Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}M'',E) \to Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}M,E) \to Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}M',E) \to 0$ es exacta en $S^{-1}A$-mód, así que también es exacta en A-mód y $\therefore$ $0 \to Hom_A(M'',E) \to Hom_A(M,E) \to Hom_A(M',E) \to 0$ es exacta en A-mód, $\therefore$ $Hom_A(\_,E)$ es exacto.

$\therefore$ E es A-inyectivo si y sólo si E es $S^{-1}A$-inyectivo.

<u>Demostración (b)</u> : Sea, pues, $E \in$ A-mód, inyectivo, por la parte (a), si demostramos que también $S^{-1}E$ es A-inyectivo tendremos de inmediato el recíproco.

Sea $M \in$ A-mód, finitamente generado y consideremos el homomorfismo $F : S^{-1}Hom_A(M,E) \to Hom_A(M,S^{-1}E)$, dado por

$F(\frac{f}{s})(m) = \frac{f(m)}{s}$, donde $f \in \mathrm{Hom}_A(M,E)$, $s \in S$, y $m \in M$. Lo que vamos a demostrar es que F es un isomorfismo. Consideremos un elemento $\frac{f}{s} \in \mathrm{Ker}\, F$, ent. $F(\frac{f}{s})(m) = 0$ para toda $m \in M$, así que $\frac{f(m)}{s} = 0$ para toda $m \in M$, ent. existe $u \in S$ tal que $u \cdot f$ es la constante cero, y por lo tanto, $\frac{f}{s} = 0$.
$\therefore$ F es un monomorfismo.

Demostrar que es epimorfismo requiere de más trabajo. Primero, observemos que $S^{-1}\mathrm{Hom}_A(A,E) \cong \mathrm{Hom}_A(A,S^{-1}E)$ claramente, así que $S^{-1}\mathrm{Hom}_A(A^n,E) \cong \mathrm{Hom}_A(A^n,S^{-1}E)$, cuando n es finito, es también claro. Como A es neteriana, ent. si M es finitamente generado, M es finitamente presentado y en consecuencia, existe una sucesión $0 \to K \to A^n \to M \to 0$ exacta, donde K es un A-módulo finitamente generado. A partir de esta sucesión, podemos formar el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M,E) \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & S^{-1}\mathrm{Hom}_A(A^n,E) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & S^{-1}\mathrm{Hom}_A(K,E) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,S^{-1}E) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A^n,S^{-1}E) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(K,S^{-1}E) &
\end{tikzcd}$$

A partir del diagrama, por la conmutatividad, es claro que F es un epimorfismo, y por tanto un isomorfismo.
$\therefore$ $S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M,E) \cong \mathrm{Hom}_A(M,S^{-1}E)$, para todo M fin. gen.

Consideremos entonces una sucesión exacta en A-mód $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ con M finitamente generado, ent. como E es inyectivo, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M'',E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M',E) \longrightarrow 0$$

también es exacta; así que, como $S^{-1}\_$ es exacto, la sucesión $0 \longrightarrow S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M'',E) \longrightarrow S^{-1}\mathrm{Hom}(M,E) \longrightarrow S^{-1}\mathrm{Hom}(M',E) \longrightarrow 0$ es también exacta, y como M es finitamente generado, y en consecuencia M' y M'' también porque A es neteriana, $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M'',S^{-1}E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,S^{-1}E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M',S^{-1}E) \longrightarrow 0$ es, a su vez, una sucesión exacta. De aquí se concluye que $\mathrm{Hom}_A(\_,S^{-1}E)$ es exacto para A-módulos finit. generados.

Ahora bien, sea I un ideal de A, entonces la sucesión $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/_I \longrightarrow 0$ es exacta, como A es neteriana ent. I y $A/_I$ son finit. generados (neterianos) $\therefore$ $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A/_I,S^{-1}E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,S^{-1}E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I,S^{-1}E) \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta, lo cual implica que todo diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[dl, dotted] \\ & S^{-1}E & \end{tikzcd}$$

con renglón exacto se puede completar.

$\therefore$ $S^{-1}E$ es inyectivo, y por la parte (a)

$\therefore$ $S^{-1}E$ es, a la vez, A y $S^{-1}A$ -inyectivo.

Esto completa la demostración del lema.

<u>Corolario 1</u> : Sea A una R-álgebra neteriana y $S \subset R$ cerrado bajo la multiplicación. Entonces $S^{-1}\_$ (o $S^{-1}A \otimes \_$) es un funtor exacto, de A-mód a $S^{-1}A$-mód, el cual preserva monomorfismos esenciales y módulos inyectivos, y por lo tanto resoluciones inyectivas mínimas.

<u>Demostración</u> : Ya hemos mencionado el hecho de que $S^{-1}\_$ es un funtor exacto. La parte (b) del lema nos muestra que $S^{-1}\_$ preserva módulos inyectivos; así que sólo nos resta demostrar que preserva monomorfismos esenciales. Para demostrar esto, primero veremos que si definimos $S_x = \{x^r \ / \ r > 0, \ x \in S\}$, podemos formar el sistema directo $\{(S_x)^{-1}M\}$ el cual tiene como límite directo a $S^{-1}M$. A partir de esto, y utilizando la parte (5) del teorema 1, podremos concluir la demostración.

Consideremos entonces el sistema directo formado por $\{(S_x)^{-1}M \ / \ x \in S\}$ junto con la contención; donde asumimos que cada $(S_x)^{-1}M$ está indicado por él mismo. Además, si tenemos $(S_x)^{-1}M$ y $(S_y)^{-1}M$ ent. $(S_{xy})^{-1}M$ los contiene a los dos, ya que $\frac{m}{x^r} = \frac{y^r m}{(xy)^r} \in (S_{xy})^{-1}M$. Vamos a ver que $S^{-1}M$ verifica la propiedad universal para este límite directo. Supongamos que existe $K \in S^{-1}A$-mód junto con los morfismos $u_x \colon (S_x)^{-1}M \longrightarrow K$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} (S_y)^{-1}M \arrow[dr, "u_x"] & \\ & K \\ (S_x)^{-1}M \arrow[uu, "i"] \arrow[ur, "u_y"'] & \end{tikzcd}$$ conmuta.

Sea $f : S^{-1}M \longrightarrow K$ tal que $f(\frac{m}{x}) = u_x(\frac{m}{x})$. Es claro que f cumple con la propiedad universal, así que

$$\therefore \quad \varinjlim (S_x)^{-1}M = S^{-1}M.$$

Consideremos ahora $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M$ esencial y al conjunto S_x , y formemos el siguiente sistema directo: sea $n=1,2,\ldots$: $M_n = M$, y $M_n \xrightarrow{x} M_{n+1}$ la multiplicación por x . Vamos a ver que $(S_x)^{-1}M$ junto con $u_n : M_n \longrightarrow M_{n+1}$ tal que $u_n(m) = \frac{m}{x^n}$ es el límite directo de este sistema. Denotemos por $[x]_{nr}$ el morfismo que asocia $m \longmapsto x^{r-n}m$, es decir, la multiplicación por x r-n veces. Sea $m \in M_n$, ent. $u_r([x]_{nr}(m)) = u_r(x^{r-n}m) = \frac{x^{r-n}m}{x^r} = \frac{m}{x^n} = u_n(m)$, lo cual

significa que el diagrama $$\begin{tikzcd} M_r \arrow[dr, "u_r"] & \\ & (S_x)^{-1}M \\ M_n \arrow[uu, "{[x]_{nr}}"] \arrow[ur, "u_n"'] & \end{tikzcd}$$ conmuta.

Además, si suponemos que existe un A-módulo K junto con los morfismos $v_n : M_n \longrightarrow K$ tal que forman un triángulo conmutativo, ent. el morfismo $f : (S_x)^{-1}M \longrightarrow K$ tal que $f(\frac{m}{x^r}) = v_r(m)$ es el único que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_r \arrow[dr, "u_n"] \arrow[drr, "v_r"] & & \\
& (S_x)^{-1}M \arrow[r, "f"] & K \\
M_n \arrow[uu, "{[x]_{nr}}"] \arrow[ur, "u_r"'] \arrow[urr, "v_n"'] & &
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto

$(S_x)^{-1}M$ verifica la propiedad universal, y

$$\therefore \quad \varinjlim M_n = (S_x)^{-1}M \ .$$

Es más, definimos $M'_n = M' \subset M$ esencial, ent. $0 \longrightarrow M'_n \longrightarrow M_n$ es esencial; por la parte (5) del teorema 1 $0 \longrightarrow \varinjlim M'_n \longrightarrow \varinjlim M_n$ también es esencial, y por lo tanto $0 \longrightarrow (S_x)^{-1}M' \longrightarrow (S_x)^{-1}M$ es esencial, así que, otra vez por el teorema 1, $0 \longrightarrow \varinjlim (S_x)^{-1}M' \longrightarrow \varinjlim (S_x)^{-1}M$ es esencial; como $\varinjlim (S_x)^{-1}M = S^{-1}M$ ent. $0 \longrightarrow S^{-1}M' \longrightarrow S^{-1}M$ es esencial, $\therefore$ $S^{-1}\_$ preserva monomorfismos esenciales.

En conclusión, si $M \in A$-mód y tenemos $0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E_n \longrightarrow \ldots$ una resolución inyectiva mínima para M, ent. $0 \longrightarrow S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}E_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow S^{-1}E_n \longrightarrow \ldots$ es una resolución inyectiva mínima para $S^{-1}M$, porque es exacta, $S^{-1}E_i$ es inyectivo para toda i, y $S^{-1}(d_i(E_i))$ es esencial en $S^{-1}E_{i+1}$ para toda i.

A continuación veremos otro corolario que nos permite ver a la dimensión inyectiva de cualquier A-módulo como algo muy semejante a una propiedad local.

<u>Corolario 2</u> : En la situación del lema 1, con A neteriana, si $M \in$ A-mód entonces $Di_{S^{-1}A}(S^{-1}M) \leq Di_A(M)$ y $Di_A(M) = \sup \left\{ Di_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) \;/\; \mathfrak{m} \text{ es ideal máximo de } R \right\}$.

<u>Demostración</u> : Consideremos una resolución inyectiva mínima para M, sea $X = (0 \longrightarrow M \longrightarrow Q_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_n \longrightarrow \cdots)$ entonces, por el lema y el corolario anteriores, $S^{-1}X$ es una resolución inyectiva mínima para $S^{-1}M$ y de aquí se desprende de inmediato que $\therefore \; Di_{S^{-1}A}(S^{-1}M) \leq Di_A(M)$.

Ahora supongamos que $Di_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) < n$ para todo $\mathfrak{m}$ ideal máximo de R. Como $X_{\mathfrak{m}}$ es una resolución inyectiva mínima para $M_{\mathfrak{m}}$ y como $Di_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) < n$ ent. $(Q_n)_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo ideal máximo de R. Pero $(Q_n)_{\mathfrak{m}} = 0$ si y sólo si $Q_n = 0$ porque es una propiedad local, así que $Q_n = 0$ y $\therefore \; Di_A(M) < n$ y junto con la primera parte

$$\therefore \quad Di_A(M) = \sup \left\{ Di_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) \;/\; \mathfrak{m} \text{ es ideal máximo en } R \right\}.$$

2. Un teorema sobre cambio de anillos

Lema 2 : Sea I un ideal de A. Entonces $Hom(^A/_I,\_)$ es un funtor exacto por la izquierda, de A-mód en $^A/_I$-mód, que preserva monomorfismos esenciales y módulos inyectivos.

Demostración : En general, es conocido que el funtor $Hom(M,\_)$ es exacto por la izquierda.

Para ver que preserva monomorfismos esenciales, consideremos $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M$ un monomorfismo esencial, ent. la sucesión $0 \longrightarrow Hom(^A/_I,M') \longrightarrow Hom(^A/_I,M)$ es exacta, la identificación $Hom(^A/_I,M) \cong \{x \in M \ / \ Ix = 0\}$ nos ayudará mucho. Sea $F : Hom(^A/_I,M) \longrightarrow \{x \in M \ / \ Ix = 0\}$, tal que si $f \in Hom(^A/_I,M)$, $F(f) = f(\bar{1})$. Para ver que está bien definida, sea $j \in I$ ent. $jf(\bar{1}) = f(j\bar{1}) = f(\bar{j}) = f(\bar{0}) = 0$. Para ver que es monomorfismo, sea $f \in Ker\ F$ ent. $F(f) = 0$ ent. $f(\bar{1}) = 0$ y por lo tanto f es la constante cero. Finalmente, sea $m \in M$ tal que $Im = 0$, ent. consideremos a $g \in Hom(^A/_I,M)$ tal que $g(\bar{1}) = m$, ent. $F(g) = m$, así que es epimorfismo y $\therefore$ F es isomorfismo.

Para mostrar que es esencial, sea N un submódulo de $Hom(^A/_I,M)$, debemos ver que $Hom(^A/_I,M') \cap N = M' \cap N$. La contención de izquierda a derecha es clara al restringir el dominio de F a $Hom(^A/_I,M')$. Recíprocamente, sea $x \in M' \cap N$ ent. $x \in M'$ e $Ix = 0$ ent. $x \in Hom(^A/_I,M')$ por el isomorfismo, y $\therefore$ $x \in Hom(A/_I, M') \cap N$. Esto quiere decir que si $Hom(A/_I, M') \cap N = 0$ ent. $M' \cap N = 0$ ent. $N = 0$.

$$\therefore \quad 0 \longrightarrow Hom(A/_I, M') \longrightarrow Hom(A/_I, M) \quad \text{es esencial.}$$

Nos falta demostrar que preserva inyectividad. Sea Q un A-módulo inyectivo y M un $A/_I$-módulo. Observemos que $A/_I$ es un A-módulo izquierdo y un $A/_I$-módulo derecho lo cual implica que los funtores $Hom(A/_I, \_)$ y $A/_I \otimes \_$ forman un par adjunto; esto significa que existe un isomorfismo, $Hom_{A/_I}(M, Hom_A(A/_I, Q)) \cong Hom_A(A/_I \otimes_{A/_I} M, Q)$

[el isomorfismo está dado por G : izq.$\longrightarrow$der., tal que $(G(g))(\bar{a} \otimes m) = (g(m))(\bar{a})$ y F : der.$\longrightarrow$izq. tal que, $(F(f(m)))(\bar{a}) = f(\bar{a} \otimes m)$, los cuales son morfismos inversos]

y como $A/_I \otimes_{A/_I} M \cong M$, tenemos el isomorfismo

$Hom_{A/_I}(M, Hom_A(A/_I, Q)) \cong Hom_A(M, Q)$ a partir del cual se desprende de inmediato que si Q es inyectivo entonces $Hom_A(A/_I, Q)$ también lo es. Lo cual termina la demostración.

Este lema y el teorema que sigue son resultados parecidos a los que vimos en el parágrafo anterior. El teorema siguiente se refiere precisamente a la dimensión inyectiva; nótese la analogía que tiene con el corolario 2.

<u>Teorema 2</u> : Sea A una R-álgebra neteriana, $x \in R$ y $S = \{x^r \,/\, r > 0\}$. Asumimos que x no es unidad ni divisor de cero en A y tampoco divisor de cero de $M \in A$-mód. Entonces $Di_A(M) < n$ si y sólo si $Di_{A/_{xA}}(M/_{xM}) < n-1$ y $Di_{S^{-1}A}(S^{-1}M) < n$.

<u>Demostración</u> : Como x no es divisor de cero de A ent. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{x} A \longrightarrow A/_{xA} \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta. Sea $E \in A$-mód inyectivo y $f : xA \longrightarrow E$ tal que $f(x) = e$ para alguna $e \in E-(0)$ arbitraria, y observemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & xA \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Como E es inyectivo, ent.

existe $\bar{f} : A \longrightarrow E$ tal que $\bar{f} \circ i = f$. Supongamos que $\bar{f}(1) = e'$, ent. $e = f(x) = \bar{f}(x) = x\bar{f}(1) = xe'$. Por lo tanto, para todo $e \in E$, existe $e' \in E$ tal que $e = xe'$,

$\therefore$ $E = xE$ para todo $E \in A$-mód, inyectivo.

Sea $0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0 \longrightarrow D \longrightarrow 0$ una sucesión exacta, con E_0 cápsula inyectiva de M. Como x no es divisor de cero de M ent. $M \cap Ker(E_0 \xrightarrow{x} E_0) = 0$, ya que $M \subset E_0$ y si $e \in M$ y $xe = 0$ entonces $e = 0$. Como M es esencial en E_0 entonces $Ker(E_0 \xrightarrow{x} E_0) = 0$ y $\therefore$ $E_0 \xrightarrow{x} E_0$ es monomorfismo.

Y como $E_0 = xE_0$ porque E_0 es inyectivo,

$\therefore$ $E_0 \xrightarrow{x} E_0$ es un isomorfismo.

Más aún, $E_0 \xrightarrow{x} E_0$ induce el isomorfismo $D = {}^{E_0}/_{M} \cong {}^{E_0}/_{xM}$ ya que si $g : {}^{E_0}/_{M} \longrightarrow {}^{E_0}/_{xM}$ es tal que $g(\bar{e}) = x\bar{e} = \overline{xe}$, ent. si $\bar{e} \in \operatorname{Ker} g$ ent. $x\bar{e} = 0$ ent. $xe \in xM$ ent. $xe = xm$ para alguna $m \in M$ ent. $x(e-m) = 0$; como e, $m \in E_0$ ent. $e-m \in E_0$ ent. $e-m \in \operatorname{Ker}(E_0 \xrightarrow{x} E_0)$: $\therefore$ $e-m = 0$, $\therefore$ $e = m \in M$

$\therefore$ $\bar{e} = 0$ y $\therefore$ g es monomorfismo.

Si $\bar{e} \in {}^{E_0}/_{xM}$, $\bar{e} \neq 0$ ent. $e \neq xm$ para toda $m \in M$; como $e \in E_0$ y $xE_0 = E_0$ ent. existe $e' \in E_0$ tal que $e = xe'$ ent. $\bar{e}' \in {}^{E_0}/_{M}$ y $g(\bar{e}') = x\bar{e}' = \overline{xe'} = \bar{e}$; por lo tanto g es epimorfismo, $\therefore$ g es un isomorfismo.

Nuevamente, como x no es divisor de cero en E_0 vemos que $\operatorname{Hom}_A({}^{A}/_{xA}, {}^{E_0}/_{xM}) \cong {}^{\{e \in E_0 \,/\, xe \in xM\}}/_{xM} = {}^{M}/_{xM}$ ya que si $F : \operatorname{Hom}_A({}^{A}/_{xA}, {}^{E_0}/_{xM}) \longrightarrow {}^{\{e \in E_0 \,/\, xe \in xM\}}/_{xM}$ está definido como $F(f) = f(\bar{1})$, ent. F es un isomorfismo y si $e \in E_0$ tal que $xe \in xM$ ent. $xe = xm$ para alguna $m \in M$ ent. $e = m$, y $\therefore$ $e \in M$.

Ahora, sea $X = (0 \longrightarrow D \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow E_n \longrightarrow \dots)$ una resolución inyectiva mínima para D y obsérvese la siguiente situación,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E_0 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr] & & E_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[r] & E_n \arrow[r] & \cdots \\
& & & D = E_0/_M \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

Aquí tenemos dos resoluciones inyectivas mínimas, una para M y otra para D.

Recordemos ahora que $xE_0 = E_0$, así que $xD = D$ ya que $D = {}^{E_0}/_{M} \cong {}^{E_0}/_{xM}$ [por el isomorfismo que se definió] y de aquí, podemos concluir que $xX = X$.

Consideremos ahora el complejo,

$$\mathrm{Hom}({}^{A}/_{xA},X) = (0 \longrightarrow \mathrm{Hom}({}^{A}/_{xA},D) \longrightarrow \mathrm{Hom}({}^{A}/_{xA},E_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}({}^{A}/_{xA},E_n) \longrightarrow \cdots)$$

<u>Afirmación</u> : $\mathrm{Hom}({}^{A}/_{xA},X)$ es una resolución inyectiva mínima para $\mathrm{Hom}({}^{A}/_{xA},D)$.

<u>dem.</u> Primero veremos que es una sucesión exacta. Para eso, basta probar que $\mathrm{Ker}\ d''_n \subset \mathrm{Im}\ d''_{n-1}$ para toda n; la otra contención se verifica por propiedad de Hom. Vamos a demostrar entonces que si $e_n \in \mathrm{Ker}(E_n \xrightarrow{x} E_n) \cap \mathrm{Ker}\ d_n$, ent. existe $e'_{n-1} \in \mathrm{Ker}(E_{n-1} \xrightarrow{x} E_{n-1})$ tq. $d_{n-1}(e'_{n-1}) = e_n$.

El camino para encontrar a e'_{n-1} lo podemos ver en el diagrama conmutativo con renglones y columnas exactos que aparece a continuación,

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathrm{Ker}(E_{n-2} \xrightarrow{x} E_{n-2}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(E_{n-1} \xrightarrow{x} E_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(E_n \xrightarrow{x} E_n) \arrow[d] & & \\
\cdots \arrow[r] & E_{n-2} \arrow[r, "d_{n-2}"] \arrow[d, "x"'] & E_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "x"'] & E_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "x"'] & d_n(E_n) \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & E_{n-2} \arrow[r, "d_{n-2}"] \arrow[d] & E_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d] & E_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d] & d_n(E_n) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

es decir, sea $e_n \in \mathrm{Ker}(E_n \xrightarrow{x} E_n) \cap \mathrm{Ker}\, d_n$ ent. $e_n \in \mathrm{Im}\, d_{n-1}$ ent. existe $e_{n-1} \in E_{n-1}$ tal que $d_{n-1}(e_{n-1}) = e_n$. Además, $xd_{n-1}(e_{n-1}) = d_{n-1}(xe_{n-1}) = 0$ [porque el diagrama conmuta] ent. $xe_{n-1} \in \mathrm{Ker}\, d_{n-1} = \mathrm{Im}\, d_{n-2}$ ent. existe $e_{n-2} \in E_{n-2}$ tal que $d_{n-2}(e_{n-2}) = xe_{n-1}$. Como $E_{n-2} = xE_{n-2}$ entonces $e_{n-2} = xe'_{n-2}$ para alguna $e'_{n-2} \in E_{n-2}$ entonces $d_{n-2}(xe'_{n-2}) = xd_{n-2}(e'_{n-2}) = d_{n-2}(e_{n-2}) = xe_{n-1}$, así que $\therefore$ $xd_{n-2}(e'_{n-2}) = xe_{n-1}$. Ent. $x(e_{n-1} - d_{n-2}(e'_{n-2})) = 0$. Sea $e_{n-1} - d_{n-2}(e'_{n-2}) = e'_{n-1}$ ent. $xe'_{n-1} = 0$ ent. $e'_{n-1} \in \mathrm{Ker}(E_{n-1} \xrightarrow{x} E_{n-1})$ y además,

$$d_{n-1}(e'_{n-1}) = d_{n-1}(e_{n-1} - d_{n-2}(e'_{n-2})) =$$

$$= d_{n-1}(e_{n-1}) - d_{n-1}(d_{n-2}(e'_{n-2})) = d_{n-1}(e_{n-1}) = e_n$$

$$\therefore \quad d_{n-1}(e'_{n-1}) = e_n \ .$$

Ahora sí vamos a ver que $\operatorname{Ker} d''_n \subset \operatorname{Im} d''_{n-1}$. Sea $g \in \operatorname{Hom}(A/_{xA}, E_n)$ tal que $g \in \operatorname{Ker} d''_n$ ent. $d''_n(g) = 0$; supongamos que $g(\bar{1}) = e_n$ ent. $xe_n = 0$ y $d_n(e_n) = 0$ ent. $e_n \in \operatorname{Ker}(E_n \xrightarrow{x} E_n) \cap \operatorname{Ker} d_n$; así que, por lo anterior, existe e'_{n-1} tal que $d_{n-1}(e'_{n-1}) = e_n$ y $xe'_{n-1} = 0$. Consideremos $f \in \operatorname{Hom}(A/_{xA}, E_{n-1})$ tal que $f(\bar{1}) = e'_{n-1}$, es claro que $d''_{n-1}(f) = g$, y $\therefore$ $g \in \operatorname{Im} d''_{n-1}$.

$$\therefore \quad \operatorname{Hom}(A/_{xA}, X) \text{ es una sucesión exacta.}$$

Además, por el lema 2, $\operatorname{Hom}(A/_{xA}, E_n)$ es inyectivo para toda n; $\therefore$ $\operatorname{Hom}(A/_{xA}, X)$ es una resolución inyectiva. Para ver que es mínima, primero mostraremos la igualdad: $d''_{n-1}(\operatorname{Hom}(A/_{xA}, E_{n-1}) = \operatorname{Hom}(A/_{xA}, d_{n-1}(E_{n-1}))$. La contención de izquierda a derecha es clara. Recíprocamente, tomemos $f \in \operatorname{Hom}(A/_{xA}, d_{n-1}(E_{n-1}))$ entonces $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} d_{n-1} = \operatorname{Ker} d_n$ ent. $d_n f = 0$ ent. $f \in \operatorname{Ker} d''_n$, lo cual implica que $\operatorname{Hom}(A/_{xA}, d_{n-1}(E_{n-1})) \subset \operatorname{Ker} d''_n = d''_{n-1}(\operatorname{Hom}(A/_{xA}, E_{n-1})$. Ahora bien, por el lema 2 sabemos que $\operatorname{Hom}(A/_{xA}, E_n)$ es una extensión esencial de $\operatorname{Hom}(A/_{xA}, d_{n-1}(E_{n-1}))$ porque E_n lo es de $d_{n-1}(E_{n-1})$ y por la igualdad anterior tenemos que $Hom(^A/_{xA}, E_n)$ es extensión esencial de $Im\, d''_{n-1}$, y $\therefore$ $Hom(^A/_{xA}, X)$ es una resolución inyectiva mínima para $Hom(^A/_{xA}, D) \cong {}^M/_{xM}$. Lo cual prueba la afirmación.

Consideremos ahora la situación,

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow E_n \longrightarrow \cdots \qquad y$$

$$0 \longrightarrow {}^M/_{xM} \longrightarrow Hom(^A/_{xA}, E_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Hom(^A/_{xA}, E_{n-1}) \longrightarrow Hom(^A/_{xA}, E_n) \longrightarrow \cdots$$

Si $Di(M) < n$ ent. $E_n = 0$ ent. $Hom(^A/_{xA}, E_n) = 0$ y notemos que $Hom(^A/_{xA}, E_n)$ ocupa el lugar $n-1$ en la sucesión, $\therefore$ $Di(^M/_{xM}) < n-1$. Es más, por el corolario 2 $Di_{S^{-1}A}(S^{-1}M) \leqslant Di_A(M) < n$; $\therefore$ $Di_{S^{-1}A}(S^{-1}M) < n$. Esto prueba el teorema en una dirección.

Recíprocamente, supongamos que $Di(^M/_{xM}) < n-1$ y $Di_{S^{-1}A}(S^{-1}M) < n$ y consideremos la misma situación de las resoluciones inyectivas mínimas. Como $Di(^M/_{xM}) < n-1$ ent. $Hom(^A/_{xA}, E_n) = 0$. Al principio de la demostración del lema 2 vimos que $Hom(^A/_{xA}, E_n) \cong \{e \in E_n \ / \ xe = 0\}$ así que si $Hom(^A/_{xA}, E_n) = 0$ ent. x no es divisor de cero de E_n y por lo tanto $E_n \xrightarrow{x} E_n$ es un isomorfismo. Éste a su vez, hace que $f : S^{-1}E_n \longrightarrow E_n$ tal que $f(\frac{e}{x^t}) = x^t \cdot e$ también sea un isomorfismo. Como $Di_{S^{-1}A}(S^{-1}M) < n$ ent. $S^{-1}E_n = 0$ y por lo tanto $E_n = 0$.

$$\therefore \quad Di(M) < n .$$

Esto concluye la demostración del teorema y con ella también concluye este parágrafo.

3. La dimensión inyectiva de un anillo

<u>Definición</u> : A un anillo R se le conoce como anillo quasi Frobenius si es neteriano izquierdo y derecho y además es autoinyectivo izquierdo

Como consecuencia inmediata del teorema 2 tenemos:

<u>Corolario 3</u> : Si R es un anillo neteriano izquierdo y derecho, con $Di_R(R) \leq 1$ y x un elemento del centro de R el cual no es unidad ni divisor de cero, entonces $R/_{xR}$ es un anillo quasi Frobenius.

<u>Demostración</u> : Como R es neteriano izquierdo y derecho y además $R \longrightarrow R/_{xR} \longrightarrow 0$ es exacta ent. $R/_{xR}$ es también neteriano izquierdo y derecho. Sólo falta probar que es autoinyectivo.

Para ello, podemos aplicar el teorema 2 si hacemos a R, trivialmente, una Cen(R)-álgebra; de esta manera, como $Di_R(R) \leq 1$ ent. $Di_{R/_{xR}}(R/_{xR}) \leq 0$ y en consecuencia $R/_{xR}$ es autoinyectivo, $\therefore$ es un anillo quasi Frobenius.

En lo que sigue ofreceremos una caracterización de los anillos con dimensión inyectiva ≤ 1 . Para ello primero mencionaremos, sin demostrar, un teorema de J. P. Jans.

<u>Definición</u> : Sea $M \in$ R-mód. El dual de M, M^*, es el R-módulo derecho $\mathrm{Hom}_R(M,R)$. Donde el producto está dado por, $(f\cdot r)(m) = f(m)\cdot r$.

Análogamente se define, para $M \in$ mód-R, M^*, como el R-módulo izquierdo, donde el producto está dado por $(r\cdot f)(m) = r\cdot f(m)$. [Existe una generalización de este concepto cuando se trata de bimódulos.]

Una vez que tenemos formado el dual, M^*, de un módulo, M, podemos formar el doble dual, $M^{**} = (M^*)^*$ de M. Existe un homomorfismo natural de M a M^{**}, $\sigma : M \longrightarrow M^{**}$ tal que $[\sigma(m)](f^*) = f^*(m)$, donde $m \in M$ y $f^* \in M^*$.

<u>Definición</u> : Decimos que M es sin torsión, si σ es monomorfismo, y que es reflexivo si σ es isomorfismo. Además, a un submódulo N de M se le conoce como cerrado en M si $M/_N$ es sin torsión.

<u>Teorema</u> : Sea R un anillo neteriano izquierdo y derecho. Si $M \in$ R-mód es fin. gen. y sin torsión, entonces existe $N \in$ mód-R sin torsión, tal que las sucesiones,

$$0 \longrightarrow M^* \longrightarrow P^* \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow N^* \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M^{**} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(N,R) \longrightarrow 0 \qquad \text{y}$$

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N^{**} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M,R) \longrightarrow 0$$

son todas exactas, donde P y P^* son proyectivos y fin. gen.

Casi como un corolario, tenemos esta caracterización.

<u>Teorema 3</u> : Sea R un anillo neteriano izquierdo y derecho. Son equivalentes,

<u>a</u>) $Di_R(R) \leq 1$.

<u>b</u>) $Ext_R^1(M,P) = 0$, donde $M,P \in$ R-mód son fin. gen.; M es sin torsión, y P es proyectivo.

<u>c</u>) Un submódulo cerrado, proyectivo, de un R-módulo finitamente generado, es sumando directo.

<u>d</u>) Todo R-módulo finitamente generado y sin torsión es reflexivo.

<u>Demostración</u> :

<u>(a $\Longleftrightarrow$ b)</u> Si $Di_R(R) \leq 1$ ent. $Ext_R^2(N,R) = 0$ para todo $N \in$ R-mód; sea $M \in$ R-mód, fin. gen. y sin torsión, ent. existe un R-módulo libre, fin. gen. y un monomorfismo $0 \longrightarrow M \longrightarrow F$ a partir de lo cual podemos formar la siguiente sucesión exacta, $0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow {}^F/_M \longrightarrow 0$; ent., como F es proyectivo y por la exactitud en la primera variable de Ext, tenemos que $0 = Ext_R^2({}^F/_M,R) = Ext_R^1(M,R)$. Como $Ext(X,\oplus R) = \oplus Ext(X,R)$ ent. si P es fin. gen. y proyectivo, $Ext_R^1(M,R) = 0$ si y sólo si $Ext_R^1(M,P) = 0$, lo cual concluye la demostración de izquierda a derecha.

Recíprocamente, si M es cíclico ent. existe una sucesión exacta $R \longrightarrow M \longrightarrow 0$; el núcleo de ese morfismo es un ideal de R, finitamente generado y sin torsión, así que por hipótesis, $Ext_R^1(I,R) = 0$ ent. por la exactitud de Ext en la primera variable, $Ext_R^2(M,R) = 0$ para todo R-módulo cíclico, y $\therefore$ $DI_R(R) \leq 1$.

<u>(b $\Leftrightarrow$ d)</u>

Sea, pues, $M \in R$-mód fin. gen. y sin torsión ent. por el teorema, existe $N \in R$-mód, sin torsión, tal que la sucesión $0 \longrightarrow M \longrightarrow M^{**} \longrightarrow Ext_R^1(N,R) \longrightarrow 0$ es exacta, pero por hipótesis $Ext_R(N,R) = 0$, y $\therefore$ M es reflexivo.

Recíprocamente, si M es fin. gen. y sin torsión ent. nuevamente por el teorema, existe $N \in R$-mód, sin torsión, tal que $0 \longrightarrow N \longrightarrow N^{**} \longrightarrow Ext_R(M,R) \longrightarrow 0$ es exacta; por hipótesis, N sin torsión implica que es reflexivo, así que $\therefore$ $Ext_R^1(M,R) = 0$.

<u>(b $\Leftrightarrow$ c)</u>

Esta equivalencia se desprende de inmediato del hecho de que $Ext_R^1(M,P) = 0$ si y sólo si cualquier extensión de P por M [es decir cualquier sucesión exacta $0 \longrightarrow P \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$] se escinde.

CAPÍTULO II

LAS DIMENSIONES INYECTIVA Y PROYECTIVA FUERTES

1. La dimensión inyectiva fuerte

Sea R un anillo arbitrario y consideremos a la categoría R-mód. Cuando tenemos el valor de la dimensión inyectiva de un R-módulo, M, éste valor nunca determina ni limita la dimensión inyectiva de los submódulos o de imágenes homomórficas de M. Un concepto más restringido se puede obtener por medio de la siguiente definición.

Definición : La dimensión inyectiva fuerte de un R-módulo, M, [denotamos con $\mathrm{Dif}_R(M)$] es:

$$\mathrm{Dif}_R(M) = \sup \{ \mathrm{Di}(N) \ / \ N \text{ es submódulo de } M \} \ .$$

El objetivo de este parágrafo es estudiar las propiedades de las siguientes clases de R-módulos.

$\mathcal{I}_n = \{ M \in R\text{-mód} \ / \ \mathrm{Dif}(M) \leq n \}$, $n=0,1,\ldots$ Es fácil verificar que $\mathcal{I}_0$ corresponde a los módulos semisimples inyectivos. Veamos, si $\mathrm{Dif}(M) = 0$ ent. para todo submódulo $N \subset M$, $\mathrm{Ext}^1(X,N) = 0$ lo cual implica que N es inyectivo, y como sabemos todo módulo inyectivo es sumando directo de cada módulo que lo contiene, entonces N es sumando directo de M para todo N; es decir, cualquier submódulo de M es sumando directo, lo cual implica que M es semisimple, y como en particular $\mathrm{Ext}^1(X,M) = 0$, entonces M es semisimple e inyectivo. Recíprocamente, si M es semisimple e inyectivo entonces, si N es submódulo de M, es sumando directo [por que M es semisimple] y como todo sumando directo de un inyectivo es inyectivo, tenemos que para todo N submódulo de M, N es inyectivo, y en consecuencia Dif(M) = 0. Observemos también que $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{L}_n \subset \ldots$

Definición : Una teoría de torsión para R-mód [o en general para cualquier categoría abeliana] es un par $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ de clases de objetos de R-mód tal que

i) Hom(T,L) = 0 para todo $T \in \mathcal{T}$ y $L \in \mathcal{L}$.

ii) Si Hom(X,L) = 0 para todo $L \in \mathcal{L}$ entonces $X \in \mathcal{T}$

iii) Si Hom(T,X) = 0 para todo $T \in \mathcal{T}$ entonces $X \in \mathcal{L}$

A $\mathcal{T}$ se le conoce como *clase de torsión* cuyos objetos son *objetos de torsión*, y a $\mathcal{L}$ como *clase libre de torsión* cuyos objetos son *objetos libres de torsión.*

La siguiente proposición (que enunciaremos sin demostrar [véase la última referencia]) caracteriza a las clases de torsión.

Proposición : Las siguientes propiedades de una clase de objetos $\mathcal{T}$ son equivalentes,

a) $\mathcal{T}$ es una clase de torsión para alguna teoría de torsión.

b) $\mathcal{T}$ es cerrada bajo cocientes, suma directa y extensiones.

Si además, $\mathcal{T}$ es cerrada bajo submódulos, decimos que es hereditaria y, también, que $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ es hereditaria.

De aquí en adelante, siempre que digamos "teoría de torsión", nos estaremos refiriendo a "teoría de torsión hereditaria". El siguiente teorema nos muestra que cuando el anillo es neteriano, las clases $\mathcal{L}_n$ son clases de torsión.

Teorema 4 : Sea R un anillo neteriano. Las clases $\mathcal{L}_n$ ($n=0,1,\ldots$) son las clases de torsión de las respectivas teorías de torsión $(\mathcal{L}_n,\mathcal{F}_n)$.

Demostración

1) Sea $A \in \mathcal{L}_n$ y B un submódulo de A; si B' es submódulo de B entonces también lo es de A, por lo tanto, $\sup \{ Di(B') \,/\, B' \text{ es submód. de } B\} \leq \sup \{ Di(B) \,/\, B \text{ es submód. de } A\}$. De aquí se concluye que $Dif(B) \leq n$ y en consecuencia $B \in \mathcal{L}_n$.

2) Con isomorfismos es evidente.

Antes de probar que es cerrada bajo cocientes y extensiones consideremos una sucesión exacta arbitraria $0 \to B \to A \to C \to 0$ y $X \in R\text{-mód}$. Por la exactitud de Ext, esta sucesión induce la siguiente sucesión exacta,

$$\ldots \to Ext^{n+1}(X,B) \to Ext^{n+1}(X,A) \to Ext^{n+1}(X,C) \to Ext^{n+2}(X,B) \to \ldots$$

Si $A \in \mathcal{L}_n$ entonces $Dif(A) \leq n$; si B es submódulo de A, se tiene que $Di(B) \leq n$, en particular, $Di(A) \leq n$, así que $Ext^{n+1}(X,A) = 0 = Ext^{n+1}(X,B)$, por lo tanto $Ext^{n+1}(X,C) = 0$ y en consecuencia $Di(C) \leq n$; además, si B y C son objetos de $\mathcal{L}_n$ entonces $Di(A) \leq n$.

3) Para cocientes, supongamos que $A \in \mathcal{L}_n$ y sea $0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta. Debemos mostrar que $C \in \mathcal{L}_n$. Sea C' un submódulo de C; como existe una correspondencia biyectiva entre los submódulos de C y los submódulos de A que contienen a B, podemos formar, a partir de C' la siguiente sucesión exacta, $0 \longrightarrow B \longrightarrow A' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$. Como A' es submódulo de A entonces $A' \in \mathcal{L}_n$ y por lo que vimos en el párrafo anterior, tenemos que $Di(C') \leq n$, $\therefore$ $C \in \mathcal{L}_n$.

4) Para extensiones, con la misma sucesión exacta $0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow C \longrightarrow 0$ supongamos ahora que $B, C \in \mathcal{L}_n$ entonces si A' es submódulo de A, $0 \longrightarrow B \cap A \longrightarrow A' \longrightarrow A'/(B \cap A') \longrightarrow 0$ es exacta, así que, como $Di(B \cap A') \leq n$ y $Di\left(A'/(A' \cap B)\right) = Di\left((A'+B)/B\right) \leq n$, porque $(A'+B)/B$ es submódulo de $A/B = C$, tenemos que $Di(A') \leq n$, y $\therefore$ $A \in \mathcal{L}_n$.

5) Para demostrar que es cerrada bajo sumas directas, observemos primero que si una clase es cerrada bajo extensiones, también lo es bajo sumas directas finitas. Es fácil ver esto por inducción. Así que la demostración del teorema estará completada si mostramos que la unión de una cadena ascendente de módulos de $\mathcal{L}_n$ está en $\mathcal{L}_n$, porque si $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, ent. A es el límite directo de sumas finitas que forman una cadena ascendente y podemos aplicar el teorema 1 .

<u>Demostración</u> : De izquierda a derecha se sigue de inmediato del hecho de que $\mathcal{L}_n$ es teoría de torsión. Recíprocamente, si B es submódulo de A entonces, como B es el límite directo de sus submódulos finitamente generados y éstos por ser también submódulos de A tienen dimensión inyectiva $\leq$ n, entonces por el teorema 1, Di(B) $\leq$ n y

$\therefore$ Dif(A) $\leq$ n .

Sea, pues, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_i \subset \ldots$ $(i \in I)$ una cadena ascendente de módulos tales que $A_i \in \mathcal{L}_n$ para toda i, y sea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Dado B submódulo de A, $B = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$ y $Di(B \cap A_i) \leq n$ para toda i. Es claro que B es el límite directo del sistema directo $(B \cap A_i)$, así que, por el teorema 1 [$1 \Leftrightarrow 4$], $Di(B) \leq n$; $\therefore$ $A \in \mathcal{L}_n$.

Esto concluye la demostración del teorema.

<u>Corolario 4</u> : Sea R un anillo neteriano. Entonces $Dif(R) = Dgi(R)$, donde Dgi denota la dimensión global izquierda.

<u>Demostración</u> : La desigualdad $Dif(R) \leq Dgi(R)$ es clara por definición. Ahora supongamos que $Dif(R) = n$ y sea $A \in R$-mód; como todo R-módulo es cociente de un libre ent. $A = L/B$ donde L es libre, así que $L \cong R^{(X)}$, lo cual implica que $L \in \mathcal{L}_n$ y que $L/B \in \mathcal{L}_n$, por el teorema. De aquí se sigue que $Dif(A) = n$ para todo $A \in R$-mód ent. $Di(A) \leq n$ para todo $A \in R$-mód, $\therefore$ $Dgi(R) \leq n$; $\therefore$ $Dif(R) = Dgi(R)$.

<u>Corolario 5</u> : Sea R un anillo neteriano y A un R-módulo. $Dif(A) \leq n$ si y sólo si $Dif(A') \leq n$ para todo A' submódulo de A, finitamente generado.

<u>Demostración</u> : De izquierda a derecha se sigue de inmediato del hecho de que $\mathcal{T}_n$ es teoría de torsión. Recíprocamente, si B es submódulo de A entonces, como B es el límite directo de sus submódulos finitamente generados y éstos por ser también submódulos de A tienen dimensión inyectiva $\leqslant n$, entonces por el teorema 1, $Di(B) \leqslant n$ y

$\therefore$ $Dif(A) \leqslant n$.

2. La dimensión proyectiva fuerte

La noción dual de la dimensión inyectiva fuerte de un módulo, M, se puede definir como sigue; $Dp_R(M)$ denota la dimensión proyectiva de $M \in R$-mód.

<u>Definición</u> : La dimensión proyectiva fuerte de un R-módulo, M [denotada por $Dpf_R(M)$] es,

$Dpf_R(M) = \sup \{ Dp(M'') \ / \ M''$ es imagen homomórfica de A $\}$.

Consideremos ahora las siguientes clases de R-módulos, $\mathcal{U}_n = \{ M \in R\text{-mód} \ / \ Dpf(M) \leq n \}$. Como en el parágrafo anterior, tenemos que $\mathcal{U}_0$ es la clase de los módulos semisimples proyectivos. Si $Dpf(M) = 0$ entonces $Dp(M'') = 0$ para toda $M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ exacta, entonces $Ext^n(M'',X) = 0$ para todo $X \in R$-mód. $\therefore$ M'' es proyectivo; ahora bien, si $K \subset M$ entonces $M/_K$ es proyectivo, así que K es sumando directo de M, lo cual implica que M es semisimple y como existe $M \longrightarrow M \longrightarrow 0$ exacta, $\therefore$ M es proyectivo semisimple.

Además, las clases $\mathcal{U}_n$ también forman una cadena ascendente, $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{U}_n \subset \ldots$ De alguna manera, el siguiente teorema es el dual del anterior.

<u>Teorema 5</u> : Sea R un anillo arbitrario. Las clases $\mathcal{U}_n$ (n=0,1,...) son clases de torsión de sus respectivas teorías de torsión $(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}_n)$.

<u>Demostración</u>

Consideremos, como en el teorema anterior, una sucesión exacta $0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow C \longrightarrow 0$ y $X \in$ R-mód. Esta sucesión, por la exactitud de Ext en la segunda variable, induce la siguiente sucesión exacta,

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n(B,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}(C,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}(A,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}(B,X) \longrightarrow \ldots$$

Si $A \in \mathcal{U}_n$ entonces $Dp(A) \leq n$ y $Dp(C) \leq n$, entonces $Dp(B) \leq n$, y si $B, C \in \mathcal{U}_n$ ent. $Dp(B) \leq n$ y $Dp(C) \leq n$, así que $Dp(A) \leq n$.

1) Sea $A \in \mathcal{U}_n$, B submódulo de A y consideremos $0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$ exacta. Como $B'' = B/B' \subset A/B'$, y $A/B' \in \mathcal{U}_n$ entonces, por lo que vimos en el párrafo anterior, $Dp(B'') \leq n$, $\therefore$ $\mathcal{U}_n$ es cerrada bajo submódulos.

2) Con isomorfismos es evidente.

3) Como la composición de dos epimorfismos es nuevamente un epimorfismo, tenemos de inmediato que es cerrada bajo cocientes.

4) Para extensiones, sea $0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow C \longrightarrow 0$ exacta con $B, C \in \mathcal{U}_n$ debemos ver que $A \in \mathcal{U}_n$. Sea $f : A \longrightarrow B$ un epimorfismo y consideremos el siguiente diagrama,

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & f'(B) \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & A'' \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & A''/_{f'(B)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

donde f' es la restricción de f en B. Definimos ahora $f'': C \longrightarrow A''/_{f'(B)}$ tal que si $c \in C$ ent. existe $a \in A$ tal que $h(a) = c$, así que, $f''(c) = h'f(a)$. Siguiendo el diagrama podemos ver fácilmente que f'' está bien definida y que el cuadrado derecho conmuta. Además, como $h'f$ es epimorfismo y $h'f = f''h$ entonces $f''h$ es epimorfismo, lo cual implica que f'' también lo es. Entonces, como $B, C \in \mathcal{U}_n$, tenemos que $f'(B)$ y $A''/_{f'(B)} \in \mathcal{U}_n$ y por lo que vimos en el primer párrafo de la demostración, tenemos que $Dp(A'') \leq n$, $\therefore$ $A \in \mathcal{U}_n$ y $\therefore$ $\mathcal{U}_n$ es cerrada bajo extensiones.

5) Finalmente, demostraremos que es cerrada bajo suma directa. Sea $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ con $A_i \in \mathcal{U}_n$ para toda i, y supongamos que hemos dado un buen orden al conjunto de índices, I. Es más, supongamos que I es el conjunto de los ordinales menores que algún k. Demostraremos que $A \in \mathcal{U}_n$ por inducción. Si k es finito entonces se sigue del hecho de que $\mathcal{U}_n$ es cerrada bajo extensiones.

Consideremos entonces el caso en que k es ordinal transfinito. Si k no es límite (es decir, es sucesor) entonces $k-1$ existe y por hipótesis de inducción, tenemos que $\bigoplus_{j<k-1} A_j = A' \in \mathcal{U}_n$, así que $A = A' \oplus A_{k-1}$ y por lo tanto $A \in \mathcal{U}_n$ porque $\mathcal{U}_n$ es cerrada bajo sumas finitas. Si k es límite, para $j<k$ sea $B_j = \bigoplus_{i<j} A_i$, entonces $A = \bigcup_{j<k} B_j$, donde $B_h \subset B_i$ si $h \leq i$, y por hipótesis de inducción, $B_j \in \mathcal{U}_n$. Dado un epimorfismo f de A, tenemos que $f(A) = \bigcup_{j<k} f(B)$ y $f(B_h) \subset f(B_i)$ si $h \leq i$. Como $f(B_j) \in \mathcal{U}_n$, si $j<k$ y la sucesión $0 \longrightarrow \bigcup_{i<j} f(B_i) \longrightarrow f(B_j) \longrightarrow f(B_j)/\bigcup_{i<j} f(B_i) \longrightarrow 0$ es exacta entonces, nuevamente por lo que vimos en el primer párrafo de la demostración, $Dp[f(B_j)/\bigcup_{i<j} f(B_i)] \leq n$.

A partir de esta situación, vamos a demostrar que $Dp(f(A)) \leq n$; por inducción sobre n. Sea $\bigcup_{i<j} f(B_i) = f(B_j)'$.

Si $n = 0$ entonces para todo $j<k$, $Dp[f(B_j)/f(B_j)'] \leq 0$, así que $f(B_j)/f(B_j)'$ es proyectivo. Esto significa que cada $0 \longrightarrow f(B_j)' \longrightarrow f(B_j) \longrightarrow f(B_j)/f(B_j)' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta que se escinde; entonces existen submódulos $C_j \subset f(B_j)$ tales que $\underline{i})$ $f(B_j) = f(B_j)' \oplus C_j$; $\underline{ii})$ $C_j \cong f(B_j)/f(B_j)'$ y en consecuencia C_j es proyectivo.

Por ($\underline{i}$) existe un monomorfismo $C_j \longrightarrow f(B_j)$, y como $f(B_j) \subset f(A)$ entonces se puede definir como $C_j \longrightarrow f(A)$. Entonces existe un único morfismo $\oplus C_j \longrightarrow f(A)$ tal que el

diagrama
$$\begin{tikzcd} \bigoplus C_j \arrow[r] \arrow[dr] & f(A) \arrow[d] \\ & f(B_j)/f(B_j)' \end{tikzcd}$$
es conmutativo.

Obsérvese que si $a \in f(A)$ entonces $a \in \bigcup_{j<k} f(B_j)$ y existe una única $j < k$ tal que la clase de x en C_j no es cero; así que el morfismo $C_j \longrightarrow f(A)$ es isomorfismo, y como cada C_j es proyectivo, $f(A)$ es proyectivo, $\therefore$ $Dp(f(A)) = 0$.

Supongamos válido para $n-1$, $n > 0$. Ahora sea L el módulo libre generado por los elementos de $f(A)$, y L_j, L_j' por $f(B_j)$, $f(B_j)'$ respectivamente. Todavía más, sea $K = Ker(L \longrightarrow f(A))$, $K_j = L_j \cap K$, y $K_j' = L_j' \cap K$. A partir de que $f(B_j)' \subset f(B_j)$: $L_j' \subset L_j$, y $K_j' \subset K_j$ y las sucesiones exactas $0 \to K_j \to L_j \to f(B_j) \to 0$ y $0 \to K_j \to L_j \to f(B_j)' \to 0$ podemos formar el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & K_j' \arrow[r] \arrow[d] & L_j' \arrow[r] \arrow[d] & f(B_j)' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_j \arrow[r] \arrow[d] & L_j \arrow[r] \arrow[d] & f(B_j) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_j/K_j' \arrow[r] \arrow[d] & L_j/L_j' \arrow[r] \arrow[d] & f(B_j)/f(B_j)' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

con renglones y columnas exactos. Como L'_j está generado por un subconjunto de la base de L_j entonces la columna del centro se escinde y por lo tanto L_j/L'_j es proyectivo, y como el último renglón es exacto, nuevamente por la exactitud en la primera variable de Ext, tenemos que $\mathrm{Ext}^n(X, K_j/K'_j) = \mathrm{Ext}^{n+1}\left(X, f(B_j)/f(B_j)'\right)$, lo cual implica que si $\mathrm{Dp}\left(f(B_j)/f(B_j)'\right) \leq n$ entonces $\mathrm{Dp}(K_j/K'_j) \leq n-1$.

Ahora veremos que la familia $\{K_j\}_{j<k}$ cumple la hipótesis inicial. Obsérvese que como K es submódulo de L entonces cualquiera de sus elementos se escribe como $(x_a)_{a\in f(A)}$ donde para casi toda a $f(A)$, $x_a = 0$. Además, cada $a \in f(B_j)$; llamémosle a_j. Como las $a_j \neq 0$ forman un conjunto finito, existe un índice, i, mayor que todos los otros, así que $(x_a)_{a\in f(A)} \in K_i \subset \bigcup_{j<k} K_j$. Análogamente, si $(x_a)_{a\in f(B_j)} \in K'_j$ entonces $(x_a)_{a\in f(B_j)} \in K_h$ para alguna h mayor; así que $K'_j \subset \bigcup_{h<j} K_h$. A partir de esto se verifica que esta familia cumple las hipótesis, y en consecuencia, si $\mathrm{Dp}(K_j/K_j) \leq n-1$ entonces $\mathrm{Dp}(K) \leq n-1$.

Como la sucesión $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow f(A) \longrightarrow 0$ es exacta entonces $0 = \mathrm{Ext}^n(X,K) = \mathrm{Ext}^{n+1}(X, f(A))$ para todo $X \in R$-mód y por lo tanto $\mathrm{Dp}(f(A)) \leq n$.

$\therefore$ $A \in \mathcal{U}_n$, lo cual completa la demostración.

<u>Corolario 6</u> : Sea R un anillo arbitrario, entonces $Dpf(R) = Dg(R)$.

<u>Demostración</u> : Sabemos que para todo anillo R, la igualdad $Dg(R) = \sup\{Dp(M) \ / \ M \in R\text{-mód es cíclico}\}$, se verifica, así que si M es cíclico entonces es imagen de R, y por lo tanto $Dg(R) = Dpf(R)$.

<u>Corolario 7</u> : Sea $M \in R$-mód. $Dpf(M) \leq n$, si y sólo si $Dpf(M') \leq n$ para todo M' submódulo fin. gen. de M.

<u>Demostración</u> : De izquierda a derecha es inmediato del teorema. Recíprocamente, como $Rm \in \mathcal{U}_n$ para toda $m \in M$, entonces $\bigoplus_{m \in M} Rm \in \mathcal{U}_n$ y como $\bigoplus_{m \in M} Rm \longrightarrow A \longrightarrow 0$ es exacta entonces $M \in \mathcal{U}_n$.

Nótese que en la demostración de este último corolario se ve que con los submódulos cíclicos basta.

CAPÍTULO III

LAS DIMENSIONES INYECTIVA Y PROYECTIVA FUERTES EN ANILLOS NETERIANOS CONMUTATIVOS

1. Las dimensiones inyectiva y proyectiva fuertes en anillos locales

Teorema 6 : Sea R un anillo neteriano conmutativo. Entonces, si M R-mód,

a) $\mathrm{Dif}_R(M) = \sup \{ \mathrm{Dif}_{R_{\mathfrak{M}}}(M_{\mathfrak{M}}) \ / \ \mathfrak{M}$ es ideal máximo de $R \}$.

b) $\mathrm{Dpf}_R(M) = \sup \{ \mathrm{Dpf}_{R_{\mathfrak{M}}}(M_{\mathfrak{M}}) \ / \ \mathfrak{M}$ es ideal máximo de $R \}$.

Demostración (a) : Dado $\mathfrak{P}$ un ideal primo de R y N un submódulo de $M_{\mathfrak{P}}$ entonces $M' = \{ m \in M \ / \ \frac{m}{1} \in N \}$ es un submódulo de M tal que $M'_{\mathfrak{P}} = N$. Por el corolario 2 sabemos que $\mathrm{Di}_{R_{\mathfrak{P}}}(M_{\mathfrak{P}}) \leq \mathrm{Di}_R(M)$ entonces $\mathrm{Di}_{R_{\mathfrak{P}}}(N) = \mathrm{Di}_{R_{\mathfrak{P}}}(M'_{\mathfrak{P}}) \leq \mathrm{Di}_R(M') \leq \mathrm{Dif}_R(M)$.

$\therefore$ $\mathrm{Dif}_{R_{\mathfrak{P}}}(M_{\mathfrak{P}}) \leq \mathrm{Dif}_R(M)$, para todo $\mathfrak{P}$, ideal primo de R, en particular, $\mathrm{Dif}_R(M) \geq \sup \{ \mathrm{Dif}_{R_{\mathfrak{M}}}(M_{\mathfrak{M}}) \ / \ \mathfrak{M}$ es máximo de $R \}$.

Recíprocamente, sea $\sup \{ \mathrm{Dif}_{R_{\mathfrak{M}}}(M_{\mathfrak{M}}) \ / \ \mathfrak{M}$ es máximo de $R \} = n$.

Si $n = \infty$ entonces $\mathrm{Dif}_R(M) = \infty$ por la desigualdad anterior. Supongamos entonces que $n < \infty$, y sea N un submódulo de M. Por el mismo corolario, $\mathrm{Di}_R(N) = \sup \{ \mathrm{Di}_{R_{\mathfrak{M}}}(N_{\mathfrak{M}}) \ / \ \mathfrak{M}$ es máximo$\}$ pero $\mathrm{Di}_{R_{\mathfrak{M}}}(N_{\mathfrak{M}}) \leq \mathrm{Dif}_{R_{\mathfrak{M}}}(M_{\mathfrak{M}}) \leq n$, para todo ideal máximo $\mathfrak{M}$. por lo tanto $\mathrm{Di}_R(N) \leq n$, y la igualdad se verifica.

<u>Demostración (b)</u> : Sea $\mathfrak{P}$ un ideal primo de R y $N \in R_{\mathfrak{P}}$-mód, tal que $M_{\mathfrak{P}} \longrightarrow N \longrightarrow 0$ es exacta. Si $N' = \mathrm{Ker}(M_{\mathfrak{P}} \longrightarrow N)$ entonces, como en la parte (a) existe M' submódulo de M, tal que $M'_{\mathfrak{P}} = N'$. Como la sucesión $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ es exacta, ésta produce $0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{P}} \longrightarrow M_{\mathfrak{P}} \longrightarrow M''_{\mathfrak{P}} \longrightarrow 0$ exacta, y por lo tanto $M''_{\mathfrak{P}} \cong N$.

Demostraremos ahora que $Dp_{R_{\mathfrak{P}}}(M''_{\mathfrak{P}}) \leqslant Dp_R(M'')$. Sea $\ldots \longrightarrow P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ una resolución proyectiva para M'', apliquemos $S^{-1}\_$ y veamos qué ocurre. Ya hemos visto que $S^{-1}\_$ es exacto; además, observemos que si $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en $S^{-1}R$-mód, y P es proyectivo, el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P,A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P,C) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \wr\Vert & & \wr\Vert & & \wr\Vert & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}P,A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}P,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}P,C) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

nos muestra que si el renglón superior es exacto, también lo es el inferior, y en consecuencia, $S^{-1}P$ es proyectivo. Esto significa que la sucesión,

$\ldots \longrightarrow S^{-1}P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow S^{-1}P_1 \longrightarrow S^{-1}P_0 \longrightarrow S^{-1}M'' \longrightarrow 0$ es una resolución proyectiva para $S^{-1}M''$. A partir de esto se desprende de inmediato que $Dp_{R_{\mathfrak{P}}}(M''_{\mathfrak{P}}) \leqslant Dp_R(M'')$.

Por tanto $Dp_{R_{\mathfrak{P}}}(N) = Dp_{R_{\mathfrak{P}}}(M''_{\mathfrak{P}}) \leqslant Dp_R(M'') \leqslant Dpf_R(M)$, así que $Dpf_{R_{\mathfrak{P}}}(M_{\mathfrak{P}}) \leqslant Dpf_R(M)$, lo cual implica la desigualdad $Dpf_R(M) \geqslant \sup \{ Dpf_{R_{\mathfrak{M}}}(M_{\mathfrak{M}}) \ / \ \mathfrak{M}$ es ideal máximo de $R \}$.

Recíprocamente, supongamos que para $M \in R$-mód, $\sup \{ Dpf_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) \ / \ \mathfrak{m}$ es ideal máximo de $R \} = n$. Si $n = \infty$, la desigualdad anterior implica que $Dpf_R(M) = \infty$. Supongamos entonces que $n < \infty$. Por el corolario 7, basta probar que $Dpf_R(N) \leq n$ para N submódulo de M finitamente generado. Dada cualquier sucesión exacta $N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ y cualquier ideal máximo de R, sabemos que $N_{\mathfrak{m}} \longrightarrow N''_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$ es exacta, así que $Dp_{R_{\mathfrak{m}}}(N''_{\mathfrak{m}}) \leq Dpf_{R_{\mathfrak{m}}}(N_{\mathfrak{m}}) \leq Dpf_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) \leq n$, ya que $N_{\mathfrak{m}} \subset M_{\mathfrak{m}}$ y que $\mathcal{U}_n$ es clase de torsión.

Hemos demostrado entonces que $Dp_{R_{\mathfrak{m}}}(N''_{\mathfrak{m}}) \leq n$, para todo ideal máximo de R. Lo que queremos demostrar es que $Dp_R(N'') \leq n$. Si demostramos la siguiente igualdad habremos terminado: $Dp_R(N'') = \sup \{ Dp_{R_{\mathfrak{m}}}(N''_{\mathfrak{m}}) \ / \ \mathfrak{m}$ es máximo de $R \}$. Esta igualdad se desprende de inmediato de la siguiente:

<u>Afirmación</u> : $S^{-1}Ext^n_R(N'',M) \cong Ext^n_{S^{-1}R}(S^{-1}N'',S^{-1}M)$

<u>dem.</u> Observemos primero el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "S^{-1}\_"'] & N \arrow[d, "S^{-1}\_"] \\ S^{-1}M \arrow[r, "S^{-1}f"] & S^{-1}N \end{tikzcd}$$

Es fácil verificar que $S^{-1}\_$ hace conmutar el diagrama. Esto, junto con el hecho de que es un funtor exacto, nos muestra la equivalencia.

$$S^{-1}\mathrm{Ext}^n_R(N'',M) = S^{-1}\left(\mathrm{Ker}\ d'_{n+1}/_{\mathrm{Im}\ d'_n}\right) = S^{-1}\mathrm{Ker}\ d'_{n+1}/_{S^{-1}\mathrm{Im}\ d'_n} =$$

$$= \mathrm{Ker}\ S^{-1}d'_{n+1}/_{\mathrm{Im}\ S^{-1}d'_n} \cong \mathrm{Ker}(S^{-1}d_{n+1})'/_{\mathrm{Im}(S^{-1}d_n)'} = \mathrm{Ext}^n_{S^{-1}R}(S^{-1}N'',S^{-1}M)$$

El isomorfismo se desprende del siguiente cuadrado,

$$\begin{array}{ccc}
S^{-1}\mathrm{Hom}_R(P_{i-1},M) & \xrightarrow{S^{-1}d'_i} & S^{-1}\mathrm{Hom}_R(P_i,M) \\
\wr\|\ & & \wr\|\ \\
\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}P_{i-1},S^{-1}M) & \xrightarrow{(S^{-1}d_i)'} & \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}P_i,S^{-1}M)
\end{array}$$

es fácil verificar que $S^{-1}d'_i$ es equivalente a $(S^{-1}d_i)'$.

Finalmente, como $\mathrm{Ext}^n_R(N'',M) \in R$-mód, usaremos una propiedad local para módulos, $\mathrm{Ext}^n_R(N'',M) = 0$ si y sólo si $\mathrm{Ext}^n_R(N'',M)_{\mathfrak{M}} = 0$, para todo $\mathfrak{M}$ ideal máximo de R; es decir, si y sólo si $\mathrm{Ext}^n_{R_{\mathfrak{M}}}(N''_{\mathfrak{M}},M_{\mathfrak{M}}) = 0$ para todo ideal máximo de R, y de aquí se desprende la igualdad del principio a partir de la cual se demuestra que $\mathrm{Dp}_R(N'') \leq n$; esto completa la demostración.

2. Las dimensiones inyectiva y proyectiva fuertes en anillos regulares

Sea R un anillo neteriano conmutativo, y sea $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n$ una cadena de ideales primos de R de longitud n. La dimensión de Krull de R [$Kdim(R)$] es el supremo de todas las longitudes de las cadenas de ideales primos de R. Es claro que $0 \leq Kdim(R) \leq \infty$.

Supongamos además que R es un anillo local y sea $\mathfrak{M}$ su ideal máximo, entonces $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ es un $R/\mathfrak{M}$-módulo (más aún, un espacio vectorial); sea d su dimensión. Entonces $\mathfrak{M}$ está generado por d elementos y cualquier cadena de ideales primos tendrá longitud $\leq d$. Es decir, $Kdim(R) \leq d$. Cuando $Kdim(R) = d$, decimos que R es un anillo local regular.

Si R es un anillo neteriano conmutativo y $R_{\mathfrak{M}}$ es un anillo local regular para todo $\mathfrak{M}$ ideal máximo de R, entonces decimos que R es regular.

Existe una caracterización homológica de los anillos localez regulares, dada por J.P. Serre.

Teorema : Un anillo R es local regular si y sólo si $Dg(R) < \infty$. Es más, en este caso, $Dg(R) = Kdim(R) = d$.

El lema que demostraremos a continuación está muy a tono con el resto de los resultados sobre localización que hemos visto a lo largo de este trabajo.

<u>Lema 3</u> : Sea R un anillo regular. Entonces, $Kdim(R) = \sup \{Kdim(R_{\mathfrak{M}}) / \mathfrak{M}$ es ideal máximo de $R\}$.

<u>Demostración</u> : Para la desigualdad de derecha a izquierda, consideremos a $\mathfrak{M}$ un ideal máximo de R, entonces R es un anillo local regular así que $Kdim(R_{\mathfrak{M}}) = n < \infty$.

Sea $(I_0)_{\mathfrak{M}} \subsetneq (I_1)_{\mathfrak{M}} \subsetneq \cdots \subsetneq (I_n)_{\mathfrak{M}}$ una cadena máxima de ideales primos de $R_{\mathfrak{M}}$. Escribimos $(I_j)_{\mathfrak{M}}$ porque si K es un ideal primo de $R_{\mathfrak{M}}$ entonces existe K' un ideal de R tal que $K'_{\mathfrak{M}} = K$. Recordemos que si denotamos por f la extensión de R en $R_{\mathfrak{M}}$, K' será precisamente $\{r \in R \ / \ f(r) \in K\}$; es fácil verificar que K' es un ideal de R, pero, además, es un ideal primo, ya que si $r \cdot s \in K'$ entonces $\frac{r \cdot s}{1} \in K$ lo cual implica que $\frac{r}{1} \in K$ ó $\frac{s}{1} \in K$ y por lo tanto $r \in K'$ ó $s \in K'$. Otra propiedad que mencionaremos es que si $K_{\mathfrak{M}}$ y $J_{\mathfrak{M}}$ son ideales de $R_{\mathfrak{M}}$ tales que $K_{\mathfrak{M}} \subset J_{\mathfrak{M}}$ entonces $K' \subsetneq J'$. A partir de esto es claro que dada nuestra cadena de ideales primos de $R_{\mathfrak{M}}$ que vimos al principio, tenemos que existe una cadena $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \cdots \subsetneq I_n$ de ideales primos de R, y así demostramos la primera desigualdad.

Para la otra desigualdad, observemos primero que los recíprocos de los resultados que vimos sobre ideales primos en la parte anterior, también son verdaderos; es decir, si K, J son ideales primos de R tales que $K \subsetneq J \subset \mathfrak{M}$ entonces $K_{\mathfrak{M}} \subsetneq J_{\mathfrak{M}}$ (la contención propia se desprende de que si $x \in J$ y $x \notin K$ entonces $sx \neq 0$ para toda $s \in R - \mathfrak{M}$ y además, si $sx \in K$ entonces $x \in K$ por ser K ideal primo lo cual es imposible); además, los dos son ideales primos de R.

Si $\sup \{ \mathrm{Kdim}(R_{\mathfrak{M}}) / \mathfrak{M}$ es ideal máximo de $R \} = \infty$ ent. por la desigualdad anterior $\mathrm{Kdim}(R) = \infty$ y así se tendría la igualdad. Supongamos entonces que es menor o igual a un entero n. Sea $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_m$ una cadena de ideales primos en R tal que I_m es máximo, llamémosle $I_m = \mathfrak{M}$, entonces $(I_0)_{\mathfrak{M}} \subsetneq (I_1)_{\mathfrak{M}} \subsetneq \dots \subsetneq (I_m)_{\mathfrak{M}}$ es una cadena de ideales primos de $R_{\mathfrak{M}}$ de longitud m. Por hipótesis tenemos que $m \leq n$, a partir de lo cual se desprende la otra desigualdad.

<u>Observación</u> : Si R es un anillo regular entonces tenemos las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned} \mathrm{Dg}(R) &= \mathrm{Dif}_R(R) = \sup \{ \mathrm{Dif}_{R_{\mathfrak{M}}}(R_{\mathfrak{M}}) / \mathfrak{M} \text{ es maximo de } R \} = \\ &= \sup \{ \mathrm{Dg}_{R_{\mathfrak{M}}}(R_{\mathfrak{M}}) / \mathfrak{M} \text{ es máximo de } R \} = \\ &= \sup \{ \mathrm{Kdim}(R_{\mathfrak{M}}) / \mathfrak{M} \text{ es máximo de } R \} = \mathrm{Kdim}(R). \end{aligned}$$

Las igualdades las obtenemos a partir del corolario 4, el teorema 4, y el lema que acabamos de demostrar.

El siguiente teorema es una caracterización de los anillos regulares cuya dimensión de Krull es finita.

<u>Teorema 8</u> : Sea R un anillo neteriano conmutativo. R es regular con $Kdim(R) < \infty$ si y sólo si todo R-módulo tiene dimensiones inyectiva y proyectiva fuertes finitas.

<u>Demostración</u> : En sentido de izquierda a derecha, si R es regular y $Kdim(R) = n$ entonces por la observación $Dg(R) = Kdim(R) = n < \infty$ y de aquí que $Dif_R(M) < \infty$ para todo R-módulo, M.

Recíprocamente, si $Dif_R(R) = n < \infty$ entonces, por el teorema 6, $Dif_{R_{\mathfrak{M}}}(R_{\mathfrak{M}}) \leq n < \infty$ para todo ideal máximo $\mathfrak{M}$ de R y por el corolario 4, $Dg_{R_{\mathfrak{M}}}(R_{\mathfrak{M}}) = Dif_{R_{\mathfrak{M}}}(R_{\mathfrak{M}}) \leq n < \infty$. Esto, junto con el hecho de que $R_{\mathfrak{M}}$ es anillo local, cumple las hipótesis del teorema de Serre, así que $R_{\mathfrak{M}}$ es local regular y por lo tanto R es regular, lo cual implica la igualdad $Kdim(R) = Dr(R) = n < \infty$. Lo cual prueba el teorema.

Finalmente, un teorema para módulos con dimensión inyectiva fuerte finita. Denotemos por Sop(M) a todos los ideales primos, $\mathfrak{P}$ de R, para los cuales $M_{\mathfrak{P}} \neq 0$.

<u>Teorema 9</u> : Sea R un anillo neteriano conmutativo y $M \in$ R-mód. Si $R_{\mathfrak{P}}$ es regular con $Kdim(R_{\mathfrak{P}}) \leq n$, para todo Sop(M) entonces $M \in \mathcal{L}_n$.

<u>Demostración</u> : Sea $\mathfrak{M}$ un ideal máximo tal que $M_{\mathfrak{M}} \neq 0$ [si $M_{\mathfrak{M}} = 0$ ent. $\mathrm{Dif}(M_{\mathfrak{M}}) = 0$]. Como $M_{\mathfrak{M}} \neq 0$ entonces $\mathfrak{M} \in \mathrm{Sop}(M)$ y por hipótesis $R_{\mathfrak{M}}$ es regular, con $\mathrm{Kdim}(R_{\mathfrak{M}}) \leq n$. Por el teorema de Serre, sabemos que $\mathrm{Dg}(R_{\mathfrak{M}}) = \mathrm{Kdim}(R_{\mathfrak{M}}) \leq n$, puesto que $R_{\mathfrak{M}}$ es local regular, así que $\mathrm{Dif}_{R_{\mathfrak{M}}}(M_{\mathfrak{M}}) \leq n$, y

$$\therefore \quad M \in \mathcal{L}_n$$

Bibliografía

Anderson, Frank W. y Kent R. Fuller, Rings and Categories of Modules, Nueva York, Editorial Springer.

Atiyah, M.F. e I.G. Macdonald, Introducción al Álgebra conmutativa, Barcelona, Ed. Reverté.

Auslander, Maurice, "On the dimension of modules and algebras, III. Global dimensión", en Nagoya Math. Journal, núm. 9, 1955, pp. 67-77.

Bass, Hyman, "Inyective dimension in noetherian rings", en Trans. Amer. Math. Soc., núm. 102, 1962, pp. 18-29.

Cartan, H. y S. Eilemberg, Homological Algebra, Princeton, Princeton University Press.

Cárdenas, H. y E. Lluis, Módulos semisimples y representación de grupos finitos, México, Ed. Trillas.

Jans, James P., Rings and Homology, Nueva York, Holt, Rinehart and Winston.

Papp, Zoltan, "On the Strong proyective (inyective) dimension of modules", en Arch. Math., vol. XXV, 1974, pp. 355-360.

Rotman, Joseph J., Notes on Homological Algebra, Nueva York, Van Nostrand.

Stenström, Bo, Rings of Quotients, Berlín, Editorial Springer, 1975.