

14
2ej.



**Universidad Nacional Autónoma
de México**

Facultad de Ingeniería

**CALCULO NUMERICO DE LA TRANSFORMADA
DE HANKEL**

Tesis Profesional

Que para obtener el Título de
INGENIERO GEOFISICO

p r e s e n t a

CLAUDIO MANUEL RUBIO PEREZ

México, D. F.

1987



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

	Pág.
PROLOGO	i.
CAPITULO 1. TRANSFORMADAS INTEGRALES	1.
1.1. Las transformadas integrales y su relación con los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales .	1.
1.2. La transformada de Fourier	3.
CAPITULO 2. LA TRANSFORMADA DE HANKEL	16.
2.1. La transformada de Hankel y su relación con la transformada de Fourier en dos variables	16.
2.2. Cálculo de la transformada de Hankel a partir de la transformada de Fourier en una variable ...	19.
CAPITULO 3. CALCULO NUMERICO DE LA TRANSFORMADA DE HANKEL	34.
3.1. Detalles del cálculo numérico	34.
3.2. Resultados obtenidos	43.
CAPITULO 4. APLICACIONES	44.
4.1. Introducción	44.
4.2. Aplicación de la transformada de Hankel a gravimetría y magnetometría	44.
4.3. Aplicaciones al procesamiento de datos sísmicos .	58.
4.4. Aplicación a la prospección geoelectrica	76.
CONCLUSIONES	81.
APENDICE 1. FUNCIONES BESSEL	1.a.
APENDICE 2. LA TRANSFORMADA INVERSA DE HANKEL	2.a.
APENDICE 3. POLINOMIOS DE CHEBYCHEV	3.a.
APENDICE 4. RESISTIVIDAD APARENTE DIPOLAR COMO TRANSFORMADA DE HANKEL	4.a.
BIBLIOGRAFIA	5.a.

PROLOGO

Durante toda su historia el hombre ha mejorado su vida continuamente gracias a la adquisición de mejores herramientas. En efecto, el nivel tecnológico de una sociedad lo de terminan los límites de sus riquezas, el logro de sus objetivos sociales, la realización de sus aspiraciones... El punto central es que ninguna civilización puede obtener sus fines más allá de las posibilidades de su tecnología.

La situación de la economía internacional obliga al país a impulsar su industria, transformando las materias primas que obtiene de sus recursos naturales. Esta es la importancia de la exploración geofísica: la mejor localización y cuantificación de la riqueza natural, eslabón primario de la producción y de nuevas y mejores posibilidades de vida. La exploración geofísica se compone intrínsecamente de un ciclo bien definido: a) instrumentación, b) colección de datos, c) procesamiento de datos, d) interpretación; partes, que indudablemente determinan por igual y en forma dependiente el buen éxito de una campaña de exploración. Hoy día, el empleo de las computadoras digitales permite el desarrollo y superación de técnicas para el procesamiento de datos en geofísica. Este aspecto constituye el tema cen tral del presente trabajo, que se refiere en particular a un tópico del análisis lineal: las transformadas integrales, destacando entre éstas a la transformada de Hankel como una herramienta genérica para el procesamiento de datos en geofísica. El análisis lineal es, cuando se ve como una entidad, una de las creaciones más profundas de la mente hu mana, un poderoso método de análisis y una herramienta de relevancia física fundamental en la ciencia.

1. TRANSFORMADAS INTEGRALES

1.1. LAS TRANSFORMADAS INTEGRALES Y SU RELACION CON LOS SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES.

Comúnmente las transformaciones integrales se emplean como herramientas matemáticas para comprender mejor y facilitar la solución de problemas en diferentes ramas de la ciencia.

Con objeto de tener una idea simple que permita intuir el concepto de transformadas integrales, se consideran ahora transformaciones de tipo bien conocido, como son:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots &\dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned} \quad 1.1.1$$

El sistema de ecuaciones (1.1.1), se puede escribir utilizando la multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y simbólicamente

$$Y = AX$$

donde los vectores X se transforman en los vectores Y por

medio de la matriz \mathbf{A} , lo que también se representa

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad 1.1.2$$

expresión que se puede considerar como función de los índices i y j que la gobiernan.

Si ahora se denotan los valores involucrados en la ecuación (1.1.2) como:

$$a_{ij} = k(s_i, t_j); \quad x_j = f(t_j); \quad y_i = F(s_i) \quad 1.1.3$$

siendo s_i y t_j $n = m$ valores discretos de las variables continuas s y t . Es decir sustituyendo (1.1.3) en (1.1.2) se obtiene:

$$F(s_i) = \sum_{j=1}^n k(s_i, t_j) f(t_j); \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Si $k(s_i, t_j)$, $f(t_j)$ y $F(s_i)$ adquieren todos los valores que les corresponden al variar t de manera continua entre dos extremos a y b , e indicándose con $k(s, t)$ una función determinada y con $f(t)$ a una función no específica, se obtiene la generalización del sistema (1.1.2) quedando expresado:

$$F(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt \quad 1.1.4$$

donde $k(s, t)$ se denomina el núcleo de la transformación integral y representa una matriz de renglones y columnas etiquetados por los índices continuos s y t que transforma la función $f(t)$ en $F(s)$. Es decir, en un espacio de

Hilbert se pueden elegir bases, donde ciertos operadores de relevancia física, permiten considerar la transformación de las coordenadas de un vector (función) ante un cambio de base. De manera sucinta ésta es la esencia de las transformadas integrales. Entre las más utilizadas en el análisis matemático y la física se encuentran:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)t^{s-1} dt \quad \text{transformada de Mellin} \quad 1.1.5$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{transformada de Laplace} \quad 1.1.6$$

$$F(s) = 2 \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{|s| [1-(s/t)^2]^{1/2}} dt \quad \text{transformada de Abel} \quad 1.1.7$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st} dt \quad \text{transformada de Fourier} \quad 1.1.8$$

$$F(s) = 2\pi \int_0^{\infty} f(t)J_m(2\pi st)t dt \quad \text{transformada de Hankel} \quad 1.1.9$$

Aunque de hecho los tipos posibles de transformadas integrales son ilimitados en la matemática teórica.

1.2. LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

La transformada de Fourier es una técnica bien conocida para la solución de problemas en sistemas lineales, consiste fundamentalmente en descomponer o separar una señal o forma de onda arbitraria en una suma de sinusoides de frecuencias, amplitudes y fases variables. Permitiendo examinar una relación particular desde puntos de vista diferentes, al tener una función y su transformada, es decir la representación de la señal en dos bases diferentes de su espacio vectorial.

rial. Matemáticamente, esta relación se establece como:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad 1.2.1$$

y su transformada inversa, como:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{i2\pi ft} df \quad 1.2.2$$

simbólicamente el par de transformadas se representa por la notación

$$h(t) \xrightarrow{F} H(f)$$

donde

$$k(f, t) = e^{-i2\pi ft}$$

y

$$k(t, f) = e^{i2\pi ft}$$

son los respectivos núcleos de transformación de las ecuaciones (1.2.1) y (1.2.2) y que corresponden a la expresión general (1.1.4) para las transformaciones integrales.

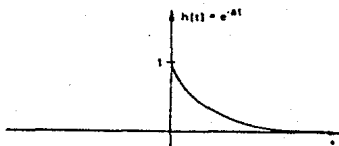
En general la transformada de Fourier es una cantidad compleja:

$$H(f) = R(f) + iI(f) = |H(f)|e^{i\theta(f)}$$

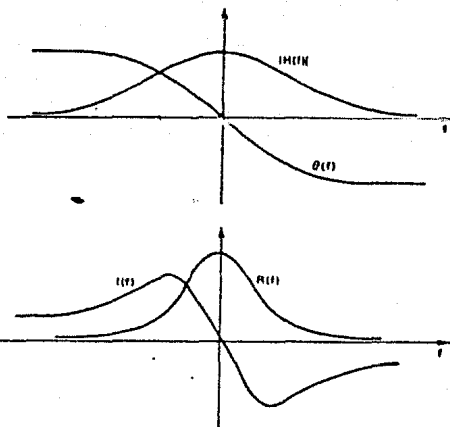
donde $R(f)$ e $I(f)$ son respectivamente la parte real e imaginaria de la transformada de Fourier,

$$|H(f)| = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)} \quad \text{es el espectro de amplitud de } h(t),$$

$$\theta(f) = \text{tg}^{-1}[I(f)/R(f)] \quad \text{es el ángulo de fase de la transformada de Fourier (La fig. 1.1 ilustra estos conceptos).}$$



$$h(t) = \begin{cases} \beta e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$H(f) = \frac{\beta}{\alpha + i2\pi f} = \frac{\beta\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - i \frac{2\pi f\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

$$H(f) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}} e^{i \operatorname{tg}^{-1}(-2\pi f/\alpha)}$$

por tanto

$$R(f) = \frac{\beta\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

$$I(f) = \frac{-2\pi f\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

$$|H(f)| = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}}$$

$$\theta(f) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-2\pi f}{\alpha} \right)$$

Figura 1.1. REPRESENTACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

Con objeto de investigar el mecanismo de la transformada de Fourier y de tener una representación gráfica del mismo, se escoge una función $g(t)$ que sea real y par, con lo que la ecuación (1.2.1) queda

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cos(2\pi ft) dt \quad 1.2.3$$

si se escoge

$$h(t) = \text{rect}(t) = \begin{cases} 0 & ; |t| > 1/2 \\ 1/2 & ; |t| = 1/2 \\ 1 & ; |t| < 1/2 \end{cases}$$

Su transformada de Fourier será

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) \cos(2\pi ft) dt = \frac{\text{sen}(\pi f)}{\pi f} \quad 1.2.4$$

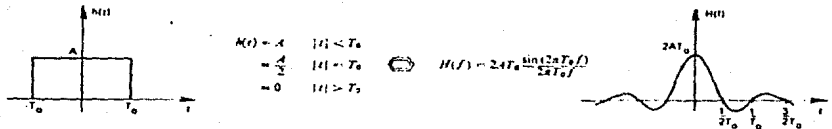


Figura 1.2. TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCION REAL Y PAR $\text{rect}(t)$.

La expresión (1.2.4) puede ser interpretada como sigue:

para cualquier valor particular de f , el valor de $G(f)$ es exactamente igual al área del producto $\text{rect}(t) \cos(2\pi ft)$. Por ejemplo, para $f = f_1$, se tiene

$$H(f_1) = \int_{-1/2}^{1/2} \text{rect}(t) \cos(2\pi f_1 t) dt$$

mientras que para $f = f_2$

$$H(f_2) = \int_{-1/2}^{1/2} \text{rect}(t) \cos(2\pi f_2 t) dt$$

y así, para $f = f_i$

$$H(f_i) = \int_{-1/2}^{1/2} \text{rect}(t) \cos(2\pi f_i t) dt$$

donde f_i es cualquier número real.

El integrando $\text{rect}(t) \cos(2\pi ft)$ se puede considerar como una función de dos variables y representar gráficamente como una superficie, donde la función rectángulo $h(t, f) = h(t) = \text{rect}(t)$ actúa como una envolvente y es modulada por una función coseno, como lo ilustra la figura (1.3).

Si se hacen cortes a esta superficie a lo largo de líneas perpendiculares al eje f , para cada f_i , los perfiles generados serán funciones cosenoidales cuya frecuencia dependerá de la localización del corte, y su extensión en la dirección t estará gobernada por la función rectángulo $h(t, f) = h(t) = \text{rect}(t)$. Entonces, para cualquier frecuencia

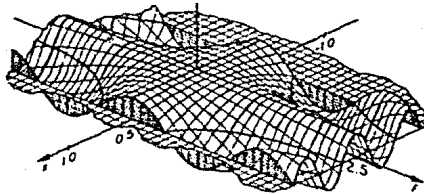


Figura 1.3. REPRESENTACION DEL INTEGRANDO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE $h(t) = \text{rect}(t)$.

particular f , corresponde un corte determinado, donde, el valor de $G(f)$ es el área del perfil asociado. Este punto de vista está ilustrado en la figura (1.4), la cual muestra varios perfiles de $\text{rect}(t) \cos(2\pi ft)$ y su relación con la transformada resultante $H(f) = \frac{\text{sen}(\pi f)}{\pi f}$.

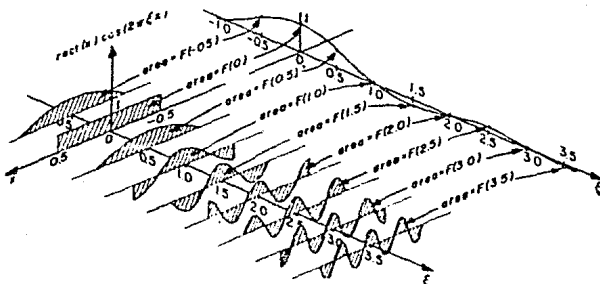


Figura 1.4. REPRESENTACION GRAFICA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE $h(t) = \text{rect}(t)$, UTILIZANDO EL CONCEPTO DE CORTES PARAMETRICOS.

Si se considera la transformada inversa de Fourier de la función $H(f) = \frac{\text{sen}(\pi f)}{\pi f}$ que es real y par, se pueden invocar los argumentos previamente usados y mostrar que:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(\pi f)}{\pi f} \cos(2\pi ft) df = \text{rect}(t) \quad 1.2.5a$$

también puede explicarse utilizando el concepto de cortes paramétricos, como lo ilustran las figuras (1.5) y (1.6).

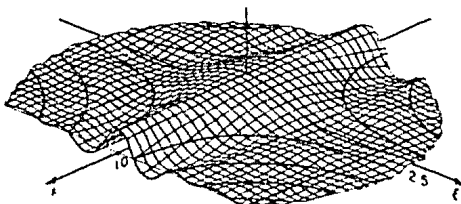


Figura 1.5. REPRESENTACION DEL INTEGRANDO DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER DE $H(f) = \frac{\text{sen}(\pi f)}{\pi f}$.

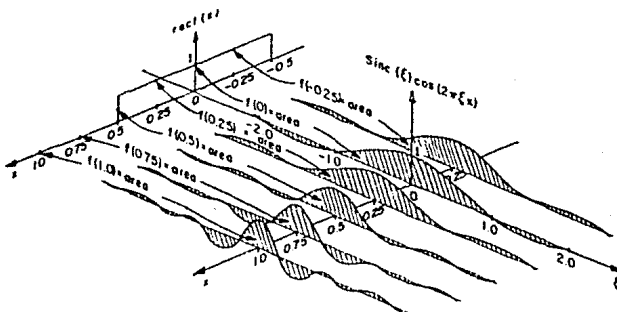


Figura 1.6. REPRESENTACION GRAFICA DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER DE $H(f) = \frac{\text{sen}(\pi f)}{\pi f}$, UTILIZANDO EL CONCEPTO DE CORTES PARAMÉTRICOS.

De lo anterior se asume, respecto a la transformada de Fourier, que algunas funciones de interés pueden ser expresadas analíticamente por varias fórmulas matemáticas bien conocidas, sin embargo, en ocasiones es necesario el cálculo de la transformada de Fourier de funciones definidas únicamente por una adquisición de datos experimentales, en este caso se requiere de técnicas numéricas asociadas a la computación digital. La naturaleza del problema dicta que esta función sea considerada como un segmento finito y muestreado de alguna función periódica y que la longitud del segmento sea igual al período de la función periódica.

En consecuencia la transformada de Fourier que resulta, consiste de un conjunto de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la función periódica, referidos frecuentemente como transformada discreta.

Debido a la capacidad limitada para el manejo de datos en computadoras, ambos, el número de valores muestreados que se van a procesar y el número de coeficientes que se calculan deben ser finitos.

En ocasiones no es posible obtener una buena aproximación de una función periódica por medio de un número finito de componentes de Fourier, y el efecto neto será consecuencia del truncamiento de la serie antes de que sus términos lleguen a ser insignificantes, provocando el fenómeno del rizado en la función transformada. Rizado que se suaviza con la utilización de una adecuada ventana de corte. El efecto también puede ser visto como consecuencia de un muestreo

inadecuado, lo que provoca el "aliasing" y que puede ser minimizado con la selección conveniente del intervalo de muestreo.

Cuando el número de los valores muestreados a ser procesados en una computadora es muy grande, el tiempo de cómputo y el costo, pueden ser también muy grandes si se emplean métodos directos de cálculo. Con objeto de reducir significativamente tanto el tiempo como el número de cálculos numéricos para evaluar la transformada de Fourier se han desarrollado una serie de algoritmos entre los que destaca el conocido como transformada rápida de Fourier (FFT). Para ilustrar esto se comparará el número de cálculos requeridos por los métodos directos y el algoritmo de la transformada rápida al procesar una función definida por N muestras equiespaciadas, la matriz de Fourier estará representada por un arreglo de orden $N \times N$. Los métodos directos de cálculo requieren N^2 multiplicaciones complejas y $N(N - 1)$ sumas complejas, mientras que el algoritmo de la transformada rápida con $N = 2^k$, donde k es un número entero, requiere únicamente de $kN/2$ (figura 1.7) multiplicaciones complejas y de kN sumas complejas. Si se asume que el tiempo de cálculo es proporcional al número de multiplicaciones complejas requeridas, se encuentra que la reducción es significativa, incluso para valores modestos de k . Por ejemplo, para $N = 1024 = 2^{10}$, es decir $k = 10$, se tiene que la razón entre la transformada directa y la transformada rápida está dada por $\frac{N^2}{(Nk/2)} = \frac{2N}{k} = 204.8$

que representa una reducción de cálculos de más de 200 a 1

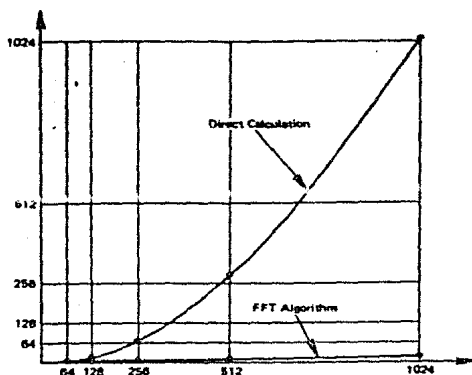


Figura 1.7. COMPARACION DE LAS MULTIPLICACIONES REQUERIDAS POR EL CALCULO DIRECTO Y EL ALGORITMO DE LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER FFT.

Este notable mejoramiento deriva del hecho de que el algoritmo de la transformada rápida de Fourier permite la factorización de una matriz de $N \times N$ en k matrices, también de $N \times N$, de tal manera que cada una de estas matrices factorizadas requieren de un número mínimo de multiplicaciones y sumas complejas.

Es preciso enfatizar que las diferencias entre las transformadas de Fourier continuas y discretas surgen por los requerimientos de truncamiento y muestreo que demanda la

transformada discreta.

En la práctica es conveniente contar con el par de expresiones para la transformada discreta que se puedan adaptar para su uso en los computadores digitales, así que las expresiones equivalentes a (1.2.1) y (1.2.2) son:

$$G\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} g(kT) e^{-i2\pi nk/N}; \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad 1.2.5$$

$$g(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G\left(\frac{n}{NT}\right) e^{i2\pi nk/N}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad 1.2.6$$

estas expresiones representan funciones periódicas tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, siendo NT el período y N el número de muestras.

Como una extensión de las ecuaciones (1.2.1) y (1.2.2) se pueden intuir fácilmente las expresiones matemáticas para el par de transformadas de Fourier en dos variables, que por definición se representan como:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux + vy)} dx dy \quad 1.2.7$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(xu + yv)} du dv \quad 1.2.8$$

y simbólicamente

$$F(u, v) \stackrel{FF}{\rightleftharpoons} f(x, y)$$

es de interés particular para las conclusiones de este trabajo, contar con las expresiones para las transformadas discretas correspondientes a las ecuaciones (1.2.7) y (1.2.8). Las

transformadas discretas de Fourier en dos variables son una clara generalización del par de transformadas discretas en una variable, ecuaciones (1.2.5) y (1.2.6) y están definidas por:

$$F\left(\frac{m}{MT}, \frac{n}{NT}\right) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} f(kT, \ell T) e^{-i2\pi\left(\frac{k m}{M} + \frac{\ell n}{N}\right)}$$

$$m = 0, 1, \dots, M-1$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$
1.2.9

$$f(kT, \ell T) = \frac{1}{MN} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} F\left(\frac{m}{MT}, \frac{n}{NT}\right) e^{i2\pi\left(\frac{k m}{M} + \frac{\ell n}{N}\right)}$$

$$k = 0, 1, \dots, M-1$$

$$\ell = 0, 1, \dots, N-1$$
1.2.10

donde las funciones a transformar ($f_{k\ell}$) y F_{mn}) representan arreglos en dos dimensiones de orden $M \times N$ muestras, y T es el intervalo de muestreo.

El par de transformadas (1.2.9) y (1.2.10) pueden ser calculadas utilizando la transformada discreta de Fourier en una variable, ecuación (1.2.5) o (1.2.6) según sea el caso. Por ejemplo (1.2.9) puede calcularse como:

$$F\left(\frac{m}{MT}, \frac{n}{NT}\right) = \sum_{\ell=0}^{N-1} F\left(\frac{m}{MT}, \ell T\right) e^{-i2\pi n \ell / N}$$

$$m = 0, 1, \dots, M-1$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$
1.2.11

donde:

$$F\left(\frac{m}{MT}, \ell T\right) = \sum_{k=0}^{M-1} f(kT, \ell T) e^{-i2\pi mk/MT}$$

$$m = 0, 1, \dots, M-1$$

$$\ell = 0, 1, \dots, N-1$$
1.2.12

La ecuación (1.2.12) corresponde al cálculo de la transformada discreta de Fourier en una variable para todos los valores de ℓ , es decir, cuando la transformada discreta interior o sumatoria en k , ecuación (1.2.9), ha sido calculada, se efectúa la sumatoria exterior, que corresponde nuevamente al cálculo de otra transformada discreta en una variable.

Asumiendo que $M = N = 2^k$, donde k es un número entero, el cálculo directo aplicando la fórmula (1.2.9) requiere N^4 multiplicaciones complejas, aplicando sucesivamente el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT), en el sentido de las ecuaciones (1.2.12) y (1.2.11), el número de multiplicaciones complejas es proporcional a $(2Nk)(2N) = 4N^2 \log_2 N$. Por ejemplo, para $N = 1024 = 2^{10}$, es decir $k = 10$, se tiene que la razón entre la transformada directa y la transformada rápida, está dada por:

$$\frac{N^4}{4N^2 k} = \frac{N^2}{4k} = 26214.4$$

lo que representa una reducción de cálculos de más de 26000 a 1.

2. LA TRANSFORMADA DE HANKEL

2.1. LA TRANSFORMADA DE HANKEL Y SU RELACION CON LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN DOS VARIABLES.

La transformada de Hankel se puede establecer a partir de su relación con la transformada de Fourier en dos variables, por lo que resulta conveniente reescribir las ecuaciones (1.2.7) y (1.2.8) que definen a este par de transformadas, es decir:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad 1.2.7$$

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{i2\pi(xu+yv)} du dv \quad 1.2.8$$

a partir de (1.2.7) expresada en coordenadas polares

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta & \theta &= \operatorname{tg}^{-1}(y/x) & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ u &= \rho \cos \phi & v &= \rho \sin \phi & \phi &= \operatorname{tg}^{-1}(v/u) & \rho &= \sqrt{u^2 + v^2} \end{aligned} \quad 2.1.1$$

se tiene

$$\int_D f(x,y) dx dy = \int_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| dr d\theta$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

$$ux + vy = \rho r \cos \phi \cos \theta + \rho r \sin \phi \sin \theta = \rho r \cos(\theta - \phi)$$

$$F(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r \cos \theta, r \sin \theta) e^{-i2\pi \rho r \cos(\theta - \phi)} r dr d\theta \quad 2.1.2$$

Si se define la función Bessel de orden n , $J_n(z)$, por medio del desarrollo en serie

$$e^{1/2z(t - 1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n \quad 2.1.3$$

(consultar el apéndice 1 para una explicación de la ecuación (2.1.3))

haciendo $t = ie^{i\theta}$

$$e^{1/2z(ie^{i\theta} - 1/ie^{i\theta})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) i^n e^{in\theta}$$

$$e^{iz \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) i^n e^{in\theta}$$

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) i^n e^{in\theta} \quad 2.1.4$$

sustituyendo (2.1.4) en (2.1.2)

$$e^{\pm i2\pi\rho r \cos(\theta - \phi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(2\pi\rho r) i^n e^{\pm in(\theta - \phi)}$$

$F(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) =$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(2\pi\rho r) e^{-in(\theta - \phi)} \right] r \, dr \, d\theta \quad 2.1.5$$

expresando

$$f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(r) e^{im\theta} \quad 2.1.6$$

y sustituyendo en (2.1.5), se tiene:

$$F(\rho \cos \phi, \rho \operatorname{sen} \phi) =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(r) e^{im\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(2\pi\rho r) e^{-in(\theta - \phi)} r \, dr \, d\theta$$

reordenando

$$F(\rho \cos \phi, \rho \operatorname{sen} \phi) =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} g_m(r) r \, dr \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(2\pi\rho r) e^{in\phi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} \, d\theta$$

cuando $m = n$

$$F(\rho \cos \phi, \rho \operatorname{sen} \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{im\phi} 2\pi \int_0^{\infty} g_m(r) J_m(2\pi\rho r) r \, dr$$

2.1.7

de manera similar, a partir de (1.2.7) se obtiene:

$$f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{im\theta} 2\pi \int_0^{\infty} G_m(\rho) J_m(2\pi r \rho) \rho \, d\rho$$

2.1.8

(para seguir el desarrollo de (1.2.8) a (2.1.8), consultar el apéndice 2)

donde

$$G_m(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} g_m(r) J_m(2\pi r \rho) r \, dr \quad 2.1.9$$

y

$$g_m(r) = 2\pi \int_0^{\infty} G_m(\rho) J_m(2\pi r \rho) \rho \, d\rho \quad 2.1.10$$

son definidas como el par de transformadas de Hankel de orden m , lo que verifica que la transformada de Hankel es en sí misma su recíproca, porque el núcleo de transformación

para la transformada directa y para la transformada inversa es el mismo. Las ecuaciones (2.1.7) y (2.1.8) muestran la relación entre el par de transformadas de Fourier en dos variables y las transformadas de Hankel de orden m .

2.2. CALCULO DE LA TRANSFORMADA DE HANKEL A PARTIR DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN UNA VARIABLE.

De las ecuaciones (2.1.7) y (2.1.9) del apartado anterior y de la igualdad

$$i^{\pm m} = e^{\pm im\pi/2} \quad 2.2.1$$

se puede expresar de manera condensada la transformada de Fourier en dos variables y coordenadas polares, como un desarrollo en serie de Fourier acorde a (2.1.6) como:

$$F(u,v) = F(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) = F(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m(\rho) e^{im(\phi + \pi/2)} \quad 2.2.2$$

donde los coeficientes de esta serie corresponden a las componentes radiales que a su vez son las respectivas transformadas de Hankel de orden m .

Si en la ecuación (1.2.7), se hace $v = 0$

$$F(u,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \right] e^{-i2\pi ux} dx \quad 2.2.3$$

y se define

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \quad 2.2.4$$

sustituyendo (2.1.6) en (2.2.4)

$$p(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_m(\sqrt{x^2 + y^2}) [\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta] dy$$

6

$$p(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_m(\sqrt{x^2 + y^2}) \left[T_m\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + iV_m\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right] dy$$

2.2.5

donde

$$T_m(\cos \theta) = \cos m\theta$$

$$V_m(\cos \theta) = \operatorname{sen} m\theta$$

son los polinomios de Chebychev de tipo I y de tipo II modificado (ver apéndice 3).

La expresión (2.2.4) puede ser interpretada de manera similar a la (1.2.4) o (1.2.5) del apartado 1.2, es decir, el integrando $f(x,y)$ puede ser representado gráficamente por una superficie (figura 2.1).

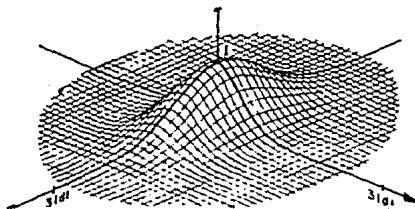


Figura 2.1. GRAFICA DEL INTEGRANDO DE $p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy$

$$\text{PARA } f(x,y) = e^{-\left[\left(\frac{x}{2d}\right)^2 + \left(\frac{y}{d}\right)^2\right]}$$

Si esta superficie se corta a lo largo de líneas perpendiculares al eje x (figura 2.2), el perfil generado en cualquier punto x_1 tiene una área igual al valor de $p(x_1)$ en ese punto.

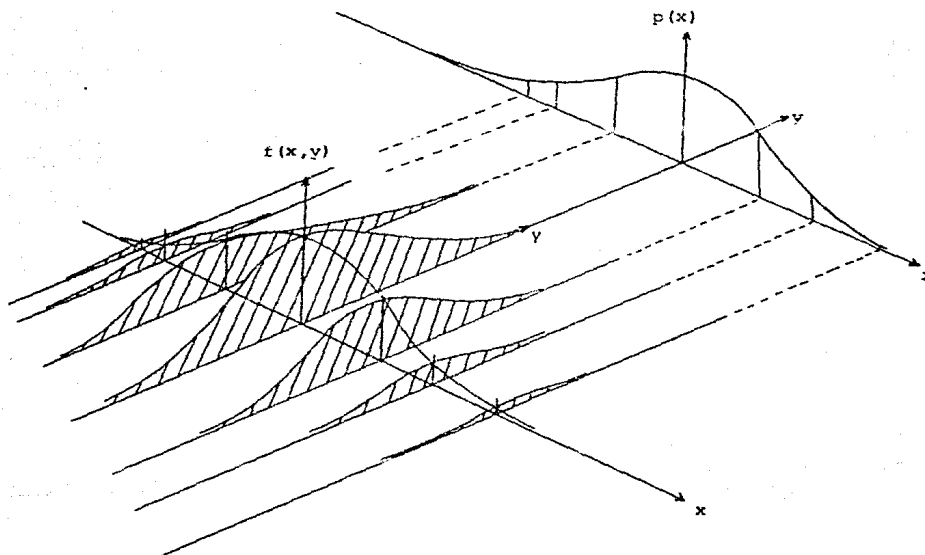


Figura 2.2. REPRESENTACION GRAFICA DE

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \text{ UTILIZANDO EL CONCEPTO DE CORTES PARAMETRICOS.}$$

Sustituyendo (2.2.4) en (2.2.3) se tiene

$$F(u, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-i2\pi ux} dx = P(u) \quad 2.2.6$$

que es la transformada de Fourier en una variable de $p(x)$.

De la consideración que $v = 0$ y las ecuaciones (2.1.1) de transformación entre coordenadas polares y rectangulares, se deduce:

$$v = 0 \Rightarrow \phi = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases} \Rightarrow u = \rho \neq 0 \quad 2.2.7$$

por tanto (2.1.7)

$$F(u, 0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m 2\pi \int_0^{\infty} g_m(r) J_m(2\pi \rho r) r dr \quad 2.2.8$$

igualando (2.2.6) y (2.2.8), y tomando en cuenta (2.2.5), para m fija se obtiene:

$$i^m 2\pi \int_0^{\infty} g_m(r) J_m(2\pi \rho r) r dr = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-i2\pi ux} dx \quad 2.2.9$$

con

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_m(\sqrt{x^2 + y^2}) \left[T_m\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + i v_m\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right] dy \quad 2.2.10$$

Puesto que:

a) $g_m(\sqrt{x^2 + y^2})$ es una función con simetría radial o circular, sus cortes paralelos al eje y o al eje x son funciones con simetría par. La figura (2.3) muestra un ejemplo de función de simetría circular,

b) los cortes paralelos al eje y de la función $T_m\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$, son funciones con simetría par, y

g(r)

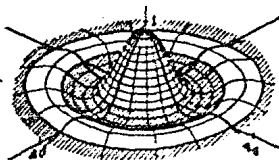


Figura 2.3. FUNCION DE SIMETRIA CIRCULAR $g(r) = J_1(\sqrt{x^2 + y^2})$

c) los cortes paralelos al eje y de la función $V_m\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$, son funciones con simetría impar, entonces la integral (2.2.10) queda expresada como:

$$p(x) = 2 \int_0^{\infty} g_m(\sqrt{x^2 + y^2}) T_m\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dy \quad 2.2.11$$

tomando en cuenta que los cortes paralelos al eje x de la función $T_m\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ son funciones con simetría par, cuando m es un número par, y son funciones con simetría impar, cuando m es un número non, se deduce que:

$$p(x) = \begin{cases} \text{función de simetría par; para } m \text{ par} \\ \text{función de simetría impar; para } m \text{ non} \end{cases}$$

reescribiendo (2.2.9)

$$2\pi \int_0^{\infty} g_m(r) J_m(2\pi\rho r) r dr = i^{-m} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-12\pi\rho x} dx \quad 2.2.12$$

y de las propiedades de simetría de la transformada de Fourier

para funciones reales $p(x)$

$p(x) \xrightarrow{F} P(\rho)$	
real y par	real y par
real e impar	imaginario e impar

se concluye que: $i^{-m} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-i2\pi\rho x} dx =$

$$= \begin{cases} P(\rho), & \text{real y par;} \\ & m=0,4,8,\dots \\ P(\rho), & \text{real e impar;} \\ & m=1,5,9,\dots \\ -P(\rho), & \text{real y par;} \\ & m=2,6,10,\dots \\ -P(\rho), & \text{real e impar;} \\ & m=3,7,11,\dots \end{cases} - 2\pi \int_0^{\infty} J_m(x) J_m(2\pi\rho r) r dr \quad 2.2.13$$

Las ecuaciones (2.2.11) y (2.2.13) permiten el cálculo de la transformada de Hankel como transformada de Fourier en una variable.

Puesto que la transformada de Hankel es en sí misma su inversa, el método descrito es válido para evaluar la transformada directa o inversa de Hankel.

Con objeto de ilustrar el desarrollo teórico anterior, se presentan los siguientes ejemplos analíticos:

EJEMPLO 1

Cálculo analítico de la transformada de Hankel de orden cero de la función

$$f(x,y) = e^{-a(x^2 + y^2)} \quad 2.2.14$$

puesto que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$f(x,y) = e^{-ar^2} = g(r)$$

es decir, se trata de una función que tiene simetría circular, entonces de las ecuaciones (2.2.13)

$$2\pi \int_0^{\infty} g_m(r) J_m(2\pi\rho r) r dr = i^{-m} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-i2\pi\rho x} dx$$

y (2.2.4)

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy$$

se tiene:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2 + y^2)} dy$$

como la integral es sobre la variable y , se puede escribir

$$p(x) = e^{-ax^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy$$

de tablas integrales se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \quad 2.2.15$$

por tanto

$$p(x) = \sqrt{\pi/a} e^{-ax^2} \quad 2.2.16$$

es interesante hacer notar que $g(r) = e^{-ar^2}$ tiene la misma forma algebraica que $p(x) = \sqrt{\pi/a} e^{-ax^2}$, excepto por un factor constante $\sqrt{\pi/a}$. En general, cuando $f(x,y) = g(r)$, ocurre que:

$$g(r) \approx kp(x)$$

donde k es una constante.

Calculando la transformada de Fourier en una variable

de $p(x)$, se tiene:

$$P(\rho) = \sqrt{\pi/a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i2\pi\rho x} dx = \sqrt{\pi/a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2 + \frac{i2\pi\rho x}{a})} dx \quad 2.2.17$$

completando cuadrados

$$\begin{aligned} P(\rho) &= \sqrt{\pi/a} e^{-\frac{\pi^2 \rho^2}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x + \frac{i\pi\rho}{a})^2} dx \\ &= \sqrt{\pi/a} e^{-\frac{\pi^2 \rho^2}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[\sqrt{a}(x + \frac{i\pi\rho}{a})]^2} dx \end{aligned}$$

de la ecuación (2.2.15), y de $z = \sqrt{a}(x + \frac{i\pi\rho}{a})$;

$$dz = \sqrt{a} dx \Rightarrow dx = 1/\sqrt{a} dz$$

$$P(\rho) = \pi/a e^{-\frac{\pi^2 \rho^2}{a}} \quad 2.2.17a$$

o sea:

$$2\pi \int_0^{\infty} [e^{-ar^2}] J_0(2\pi\rho r) r dr = \pi/a e^{-\frac{\pi^2 \rho^2}{a}} \quad 2.2.18$$

simbólicamente

$$\pi/a e^{-\frac{\pi^2 \rho^2}{a}} \stackrel{H_0}{\rightleftharpoons} e^{-a\rho^2} \quad 2.2.19$$

y gráficamente como lo muestra la figura (2.4).

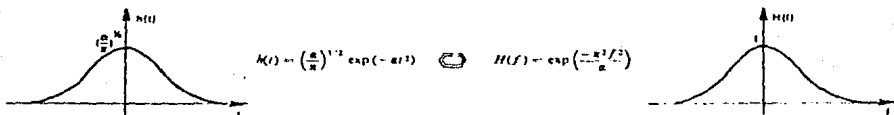


Figura 2.4. GRAFICA DE LA TRANSFORMADA DE HANKEL DE ORDEN CERO DE LA FUNCION $q(r) = e^{-ar^2}$.

también se puede afirmar que:

$$\pi/a e^{-\frac{\pi^2(u^2+v^2)}{a}} \stackrel{FF}{=} e^{-a(x^2+y^2)} \quad 2.2.20$$

cuando $f(x,y) = g(r)$.

DEMOSTRACION:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

La función $F(u,v)$ también puede ser expresada como una cascada de dos transformadas de Fourier en una variable, (ver la figura 2.5), es decir:

$$F(u,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i2\pi ux} dx \quad 2.2.21$$

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u,y) e^{-i2\pi vy} dy \quad 2.2.22$$

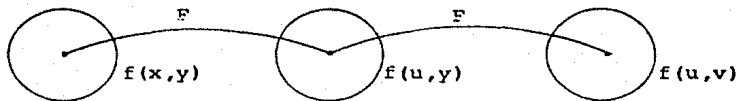


Figura 2.5. DESARROLLO GRAFICO QUE MUESTRA LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN DOS VARIABLES COMO UNA CASCADA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER EN UNA VARIABLE.

de (2.2.14) y (2.2.21), se tiene:

$$\begin{aligned} \Gamma(u, y) &= e^{-ay^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i2\pi ux} dx \\ &= e^{-ay^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2 + i \frac{2\pi ux}{a})} dx \end{aligned} \quad 2.2.23$$

de manera similar a (2.2.17), se obtiene:

$$F(u, y) = \sqrt{\pi/a} e^{-\frac{\pi^2 u^2}{a}} e^{-ay^2} \quad 2.2.24$$

aplicando la fórmula (2.2.22)

$$F(u, v) = \sqrt{\pi/a} e^{-\frac{\pi^2 u^2}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} e^{-i2\pi vy} dy \quad 2.2.25$$

resolviendo según (2.2.23), se obtiene:

$$F(u, v) = \pi/a e^{-\frac{\pi^2(u^2 + v^2)}{a}} \quad 2.2.26$$

lo que demuestra (2.2.20)

$$\pi/a e^{-\frac{\pi^2(u^2 + v^2)}{a}} \stackrel{FF}{\rightleftharpoons} e^{-a(x^2 + y^2)}$$

EJEMPLO 2

Cálculo analítico de la transformada de Hankel de orden cero de la función

$$f(x, y) = e^{-a[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} \quad 2.2.27$$

que es la misma expresión (2.2.14) pero desplazada al nuevo origen $P(x_0, y_0)$, (ver la figura 2.6).

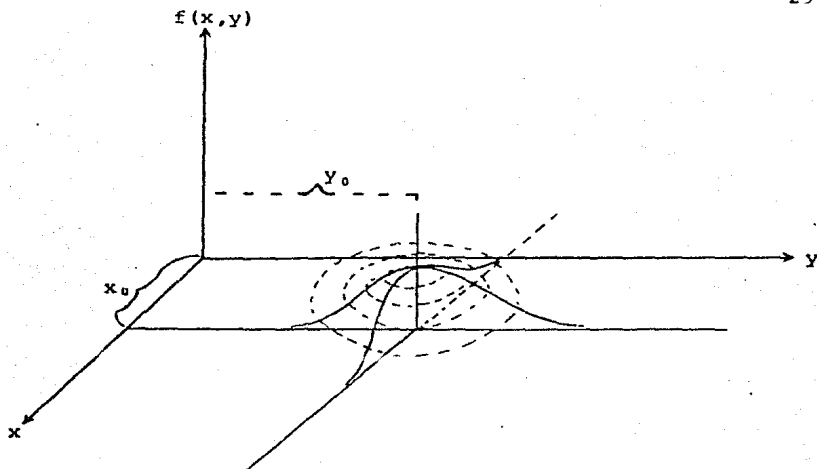


Figura 2.6. GRAFICA DE LA FUNCION

$$f(x,y) = e^{-a[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]}$$

De la propiedad de la transformada de Fourier para el desplazamiento en (x,y) por valores constantes se tiene:

$$F(u,v) \stackrel{FF}{\rightleftharpoons} f(x,y)$$

entonces se verifica, que

$$F(u,v) e^{-i2\pi(ux_0 + vy_0)} \rightleftharpoons f(x-x_0, y-y_0)$$

Por tanto, del resultado (2.2.20) del ejemplo anterior, resulta que:

como

$$\pi/a e^{-\frac{\pi^2(u^2+v^2)}{a}} \stackrel{FF}{\Leftrightarrow} e^{-a(x^2+y^2)}$$

entonces

$$\pi/a e^{-\frac{\pi^2(u^2+v^2)}{a}} e^{-12\pi(ux_0+vy_0)} \stackrel{FF}{\Leftrightarrow} e^{-a[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]}$$

donde

$$|F(u,v)| = \pi/a e^{-\frac{\pi^2(u^2+v^2)}{a}}$$

$$\theta(u,v) = -12\pi(ux_0+vy_0)$$

(ver la figura 2.7).

La transformada de Hankel de orden cero, estará dada por:

$$2\pi \int_0^{\infty} g(r) J_0(2\pi r \rho) r dr = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-12\pi \rho x} dx = P(\rho)$$

con

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy$$

entonces:

$$p(x) = e^{-a(x-x_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(y-y_0)^2} dy = \sqrt{\pi/a} e^{-a(x-x_0)^2}$$

por lo que su transformada de Fourier

$$P(\rho) = \sqrt{\pi/a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-x_0)^2} e^{-12\pi \rho x} dx$$

de

$$\pi/a e^{-\frac{\pi^2 \rho^2}{a}} \stackrel{F}{\Leftrightarrow} e^{-ax^2}$$

y la propiedad de desplazamiento en x por una constante

$$F(\rho) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} f(x)$$

$$F(\rho) e^{-12\pi \rho x_0} \stackrel{F}{\Leftrightarrow} f(x-x_0)$$

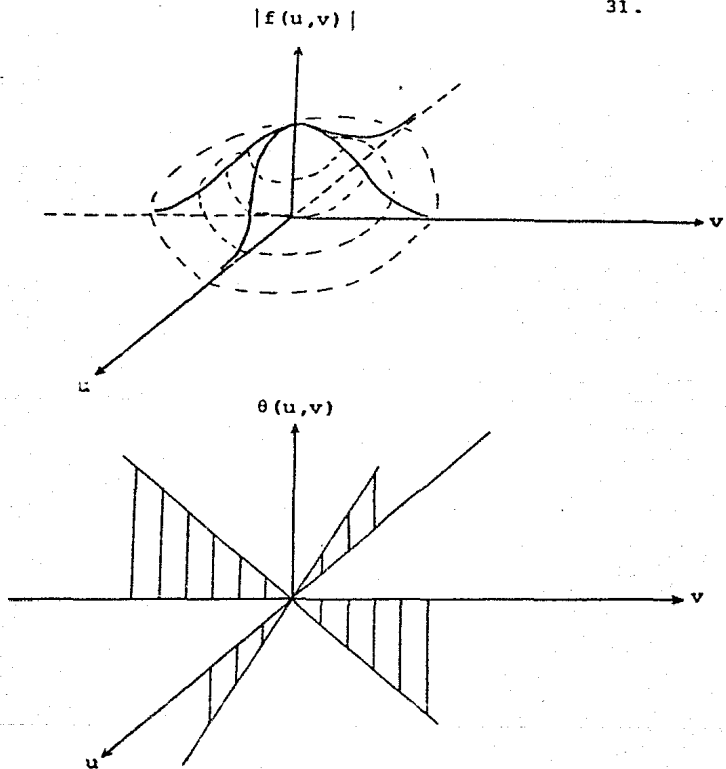


Figura 2.7. Gráficas de los espectros de amplitud y de fase de $f(x,y) = e^{-a[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]}$

se tiene:

$$P(\rho) = \pi/a e^{-\frac{\pi^2 \rho^2}{a}} e^{-12\pi \rho x_0}$$

es decir

$$\pi/a e^{-\frac{\pi^2 \rho^2}{a}} e^{-12\pi \rho x_0} \stackrel{H_0}{=} e^{-a[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]}$$

donde

$$G_0(\rho) = \pi/a e^{-\frac{\pi^2 \rho^2}{a}} e^{-12\pi \rho x_0}$$

es la transformada de Hankel de orden cero de

$$f(x,y) = e^{-a[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]}$$

$$|G_0(\rho)| = \pi/a e^{-\frac{\pi^2 \rho^2}{a}}$$

es el espectro de amplitud y corresponde a la transformada de Hankel de orden cero de la función $f(x,y) = e^{-a(x^2+y^2)}$ ecuación (2.2.19) del ejemplo 1

$$\theta(\rho) = -2\pi \rho x_0$$

es el espectro de fase (ver figura 2.8 que ilustra gráficamente lo anterior).

Al efectuar un desplazamiento horizontal de una función $f(x,y) = g(r)$ en (x,y) , se rompe la simetría circular tanto en el dominio del espacio como en el dominio del número de onda, manifestándose en este último como la transformada de Hankel de la función $f(x,y) = g(r)$ sin desplazar acompañada de un espectro de fase $\theta(\rho)$.

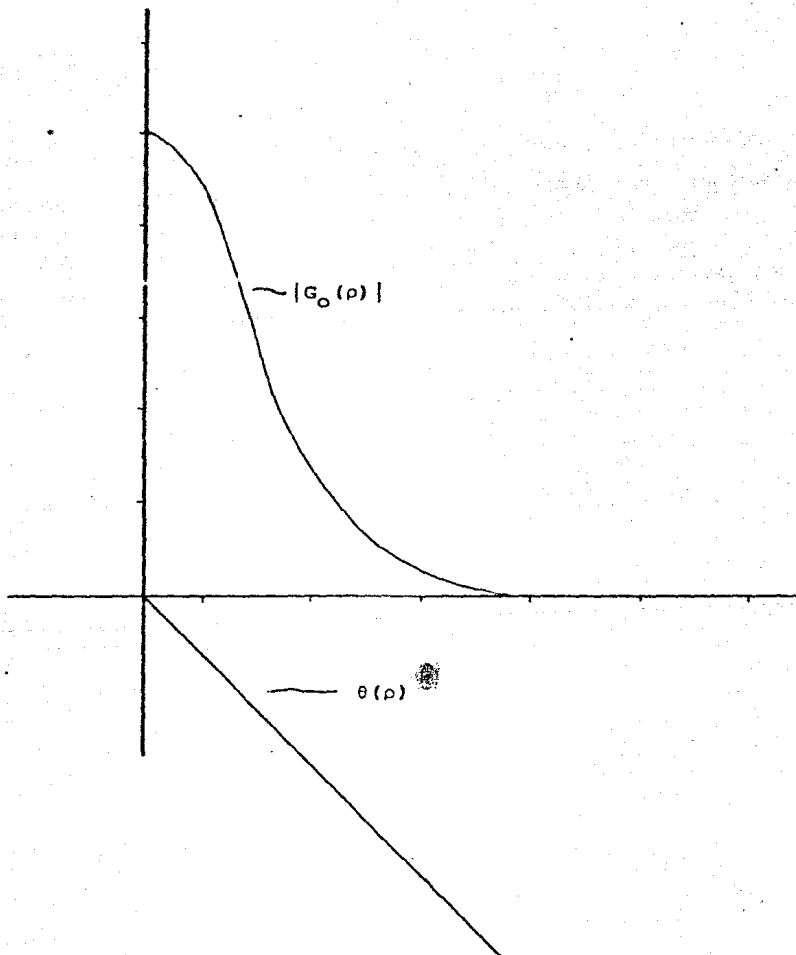


Figura 2.8. Gráfica de los espectros de amplitud y fase de la función $f(x,y) = e^{-a[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]}$.

3. CALCULO NUMERICO DE LA TRANSFORMADA DE HANKEL

3.1. DETALLES DEL CALCULO NUMERICO.

En el capítulo anterior se han mostrado los desarrollos teóricos y algunos ejemplos analíticos que fundamentan a las expresiones:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} g_m(r) J_m(2\pi r x) r dr = i^{-m} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-i2\pi r x} dx \quad 3.1.1$$

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad 3.1.2$$

para el cálculo de las transformadas continuas de Hankel de orden m de funciones en dos variables definidas analíticamente por fórmulas matemáticas. Ahora se continuará con este análisis de manera conducente al cálculo de la transformada discreta de Hankel, lo que permitirá efectuar los cálculos numéricos tanto para funciones analíticas muestreadas como para aquellas funciones definidas únicamente por una adquisición de datos experimentales, lo que en consecuencia requiere de técnicas numéricas asociadas a la computación digital.

La ecuación (3.1.1) muestra que la transformada de Hankel de una función continua $g(r)$ es igual a i^{-m} veces la transformada de Fourier en una variable de una función continua $p(x)$, definida por la ecuación (3.1.2).

Para el cálculo de la transformada discreta de Hankel, es decir, en el caso en que la función $g(r)$ es una función discreta $\hat{g}(k\Delta r)$, la expresión matemática equivalente a la

ecuación (3.1.1) es:

$$\hat{G}_m(n\Delta\rho) = i^{-m} \left[\Delta X \sum_{k=0}^{N-1} \hat{p}(k\Delta X) e^{-i2\pi nk / N} \right]; \quad n=0,1,\dots,N-1 \quad 3.1.3$$

donde

$\Delta\rho = \frac{1}{N\Delta X}$; es el intervalo de muestreo en el dominio de la transformada.

ΔX ; es el intervalo de muestreo en el dominio de la función a transformar.

$n = N$; el número de muestras en ambos dominios.

m ; el orden de la transformada de Hankel a calcular.

La aproximación numérica para el cálculo de la integral (3.1.2), se establece a partir de la ecuación (2.2.1)

$$p(x) = 2 \int_0^{\infty} g_m(\sqrt{x^2+y^2}) T_m\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dy$$

por algún método de integración numérica. De manera objetiva y como una buena aproximación, para el caso en que $f(x,y)$ sea una función de banda limitada, es decir:

$$F(u,v) \xrightarrow{FF} f(x,y)$$

$$\text{con } F(u,v) = 0 \quad \text{para } |u| > u_c \quad |v| > v_c$$

donde u_c y v_c son las frecuencias de corte, se puede considerar la expresión (3.1.2) como:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \approx \Delta y \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{f}(x, l\Delta y)$$

donde $y < \frac{1}{v_c}$ que escrita en términos de (2.2.1), queda como:

$$\hat{p}(k\Delta X) = 2\Delta y \sum_{\ell=0}^{\infty} \hat{g}\left[\sqrt{(k\Delta X)^2 + (\ell\Delta y)^2}\right] \hat{T}_m\left[\frac{k\Delta X}{\sqrt{(k\Delta X)^2 + (\ell\Delta y)^2}}\right] \quad 3.1.4$$

con

$$\Delta y \leq 1/v_c$$

$$\Delta X \leq 1/2u_c$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

donde $\Delta X \leq 1/2u_c$ es la regla de Nyquist que establece el máximo intervalo de muestreo para la función $p(x)$ de manera que su transformada discreta de Fourier, expresión (3.1.3), resulte una buena aproximación.

Con objeto de realizar el cálculo numérico de la transformada de Hankel, se diseñó un programa para computadora digital en lenguaje Fortran, llamado Hankel, que emplea en una subrutina un algoritmo de transformada rápida de Fourier (FFT) de base 2. De tal suerte que el programa Hankel se puede considerar como un algoritmo de transformada "rápida" de Hankel.

En general, la mayoría de las funciones $f(x,y)$ definidas por alguna expresión matemática o por algún conjunto de datos muestreados, no son, por naturaleza, funciones de banda limitada, lo que implica que el cálculo de su transformada discreta de Hankel, ecuaciones (3.1.3) y (3.1.4), resulte afectada por los fenómenos de "rizado" y "aliasing", inherentes al cálculo de la transformada discreta de Fourier, ecuación (1.2.5).

Una función de truncamiento particularmente buena y que se emplea en el programa Hankel, es la ventana de Hanning, dada por la expresión:

$$w(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left[\frac{2\pi x}{N\Delta x} + \pi \right] \quad 3.1.5$$

$$|x| = \frac{N\Delta x}{2}$$

y cuyo espectro de amplitudes de Fourier está dado por:

$$|W(u)| = \frac{1}{2} Q(u) + \frac{1}{4} \left[Q\left(u + \frac{1}{N\Delta x}\right) + Q\left(u - \frac{1}{N\Delta x}\right) \right] \quad 3.1.6$$

donde $Q(u) = \text{sen} \frac{(\pi N \Delta x u)}{\pi u}$ como se muestra en las gráficas de la figura 3.1.

El programa Hankel puede subdividirse en tres subprogramas:

- a) El programa principal Hankel.
- b) El programa FORK del tipo subrutina.
- c) Los subprogramas HAN y HANN del tipo función.

A continuación se describen en forma breve las principales componentes del programa Hankel y se muestra un esquema del mismo en la figura 3.2.

* Programa Principal

Este corresponde a una sección fundamental del programa, sus características son de control y ejecución, es decir, coordina los subprogramas, recopila los resultados y ejecuta instrucciones de cálculo y comunicación de datos. A grosso modo,

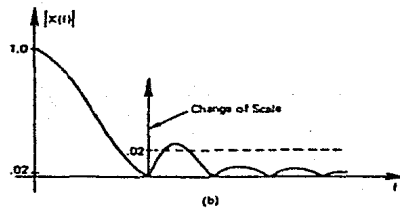
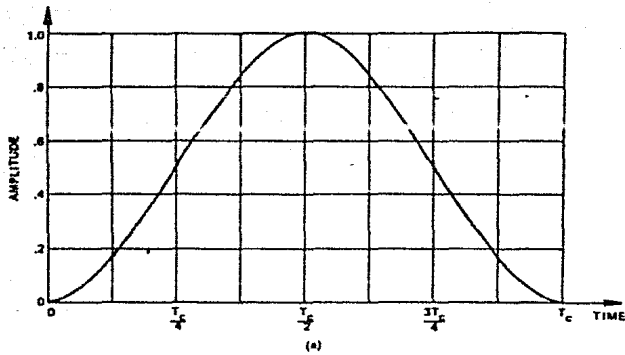


Figura 3.1. GRAFICAS DEL PAR DE TRANSFORMADAS DE FOURIER DE LA VENTANA DE HANNING.

se pueden describir sus funciones como:

1) Lectura de datos.

En esta etapa tiene lugar la admisión de datos, tales como:

N = número de muestras en x .

K = número de muestras en y .

$\text{DELTA}X$ = intervalo de muestreo en x .

$\text{DELTA}Y$ = intervalo de muestreo en y .

$\text{FT}(J)$ = vector para los valores discretos o muestreados sobre el eje x de la función a transformar $g(r)$.

m = orden de la transformada de Hankel.

2) Cálculo de $p(x)$.

En este periodo se genera una función de simetría radial $g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ y si es conveniente se multiplica por su correspondiente ventana de Hanning, utilizando para ello los sub programas de función HAN y HANN.

3) Se reordena $p(x)$ como función par o impar dependiendo del orden (m) de la transformada de Hankel que se desea calcular.

4) Se forma el arreglo complejo $(X(J))$ a partir de la $p(x)$ obtenida y servirá como argumento de entrada para la subrutina FORK.

5) Obtención de la transformada de Fourier de $p(x)$.

Se obtiene la transformada de Fourier del arreglo complejo $CX(J)$ a través del subprograma FORK que entrega como

resultado o argumento de salida el vector complejo $CX(J)$ ahora con los valores transformados.

6) Se genera la transformada de Hankel a partir de los valores $CX(J)$ obtenidos, al multiplicarlos por 1 ó -1 según corresponda, dependiendo del valor de m (orden de la transformada de Hankel que se calcula).

7) Impresión.

Esta es la última etapa del programa principal, y en ella se imprimen los datos de entrada N , K , $DELTA X$, $DELTA Y$, $FT(J)$ y los resultados o valores calculados.

$RADIOX$ = longitud o abscisa mayor sobre el eje x de la función a transformar.

$RADIOY$ = longitud o abscisa mayor sobre el eje y de la función a transformar.

$RADIOR$ = longitud o abscisa mayor de la transformada de Hankel calculada.

$DELTRHO$ = intervalo de muestreo en el dominio de la transformada.

$ABSX$ = valores de las abscisas sobre el eje x para las funciones $FT(J)$ y $\hat{p}(kx)$.

$ABSR$ = valores de las abscisas en el dominio de la función transformada $\hat{G}(n\Delta\rho)$.

$\hat{G}(n\Delta\rho)$ = valores discretos de la transformada de Hankel.

* Función HAN y función HANN

Los subprogramas de función HAN y HANN calculan los va-

lores correspondientes de la ventana de Hanning que multiplican a los valores discretos de la función a transformar $\hat{g}(k\Delta x)$ y $\hat{g}\left[\sqrt{(k\Delta x)^2 + (\ell\Delta y)^2}\right]$ con objeto de que su espectro de frecuencias discretas $\hat{G}_m(n\Delta\rho)$ sea menos afectado por el fenómeno de rizamiento.

* Subrutina FORK

El programa de subrutina FORK es un algoritmo de transformada rápida de Fourier de base 2, que resulta ser una eficiente técnica para el cálculo numérico de las transformadas discretas de Fourier, por lo que esta subrutina representa un ciclo importante del programa Hankel.

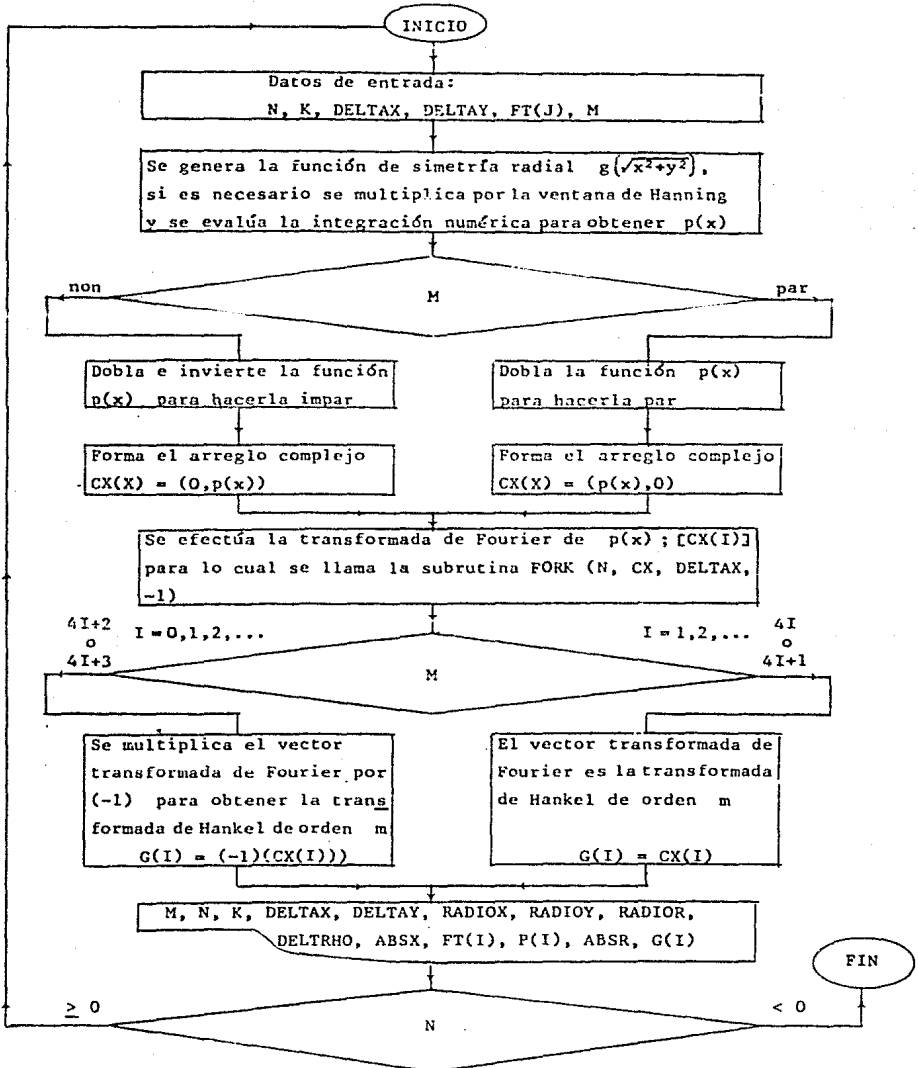


Figura 3.2. DIAGRAMA DEL PROGRAMA HANKEL.

3.2. RESULTADOS OBTENIDOS.

Con objeto de ilustrar las bondades de convergencia del programa Hankel, se comparan los valores exactos, obtenidos a partir de expresiones matemáticas de algunos pares de transformadas de Hankel de orden cero, con los respectivos valores de las transformadas calculadas. También se muestran las gráficas superpuestas de los valores exactos y calculados, así como las gráficas del error relativo en por ciento de los mismos, definido por:

$$\text{ERROR (I)} = \left| \frac{G(I) - \text{FEX (I)}}{\text{FEX (I)}} \right| \times 100 \quad 3.2.1.$$

donde

G (I) = transformada de Hankel calculada.

FEX (I) = transformada de Hankel exacta.

ERROR (I) = error relativo en por ciento.

Las figuras 4.3.a. a 4.3.h. ilustran algunos pares de transformadas de Hankel en donde se muestran las transformadas exactas y las calculadas por el algoritmo Hankel diseñado para este fin y cuyo diagrama de flujo simplificado se muestra en la figura 3.2.

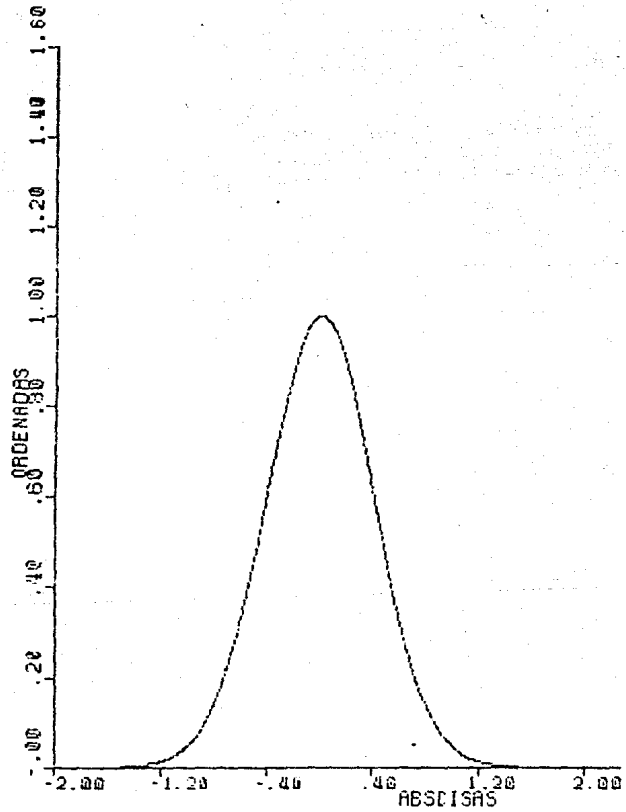


Figura 3.3. Gráficas del par de transformadas de Hankel

$$g(r) = e^{-\pi r^2} \xrightarrow{H_0} e^{-\pi \rho^2}$$

transformada de Hankel exacta y calculada.

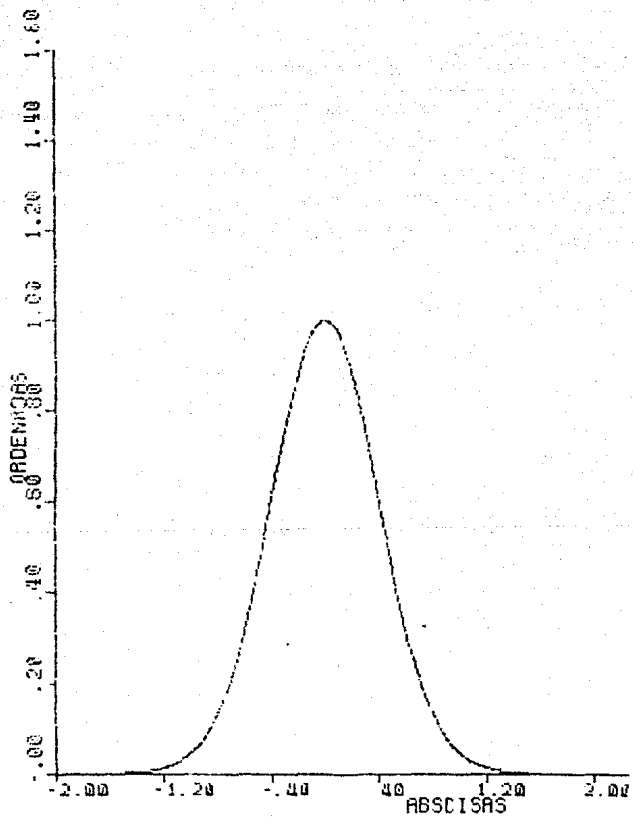


Figura 3.3.a. Gráfica de $G_0(\rho) = e^{-\pi \rho^2}$

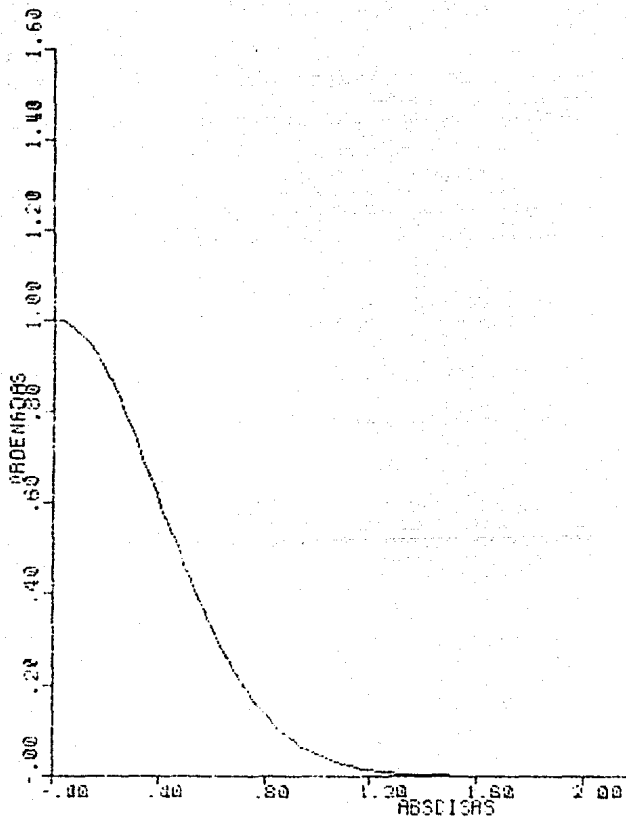


Figura 3.3.b. Gráficas superpuestas de la transformada exacta y la Calculada $G_0(\rho) = e^{-\pi\rho^2}$

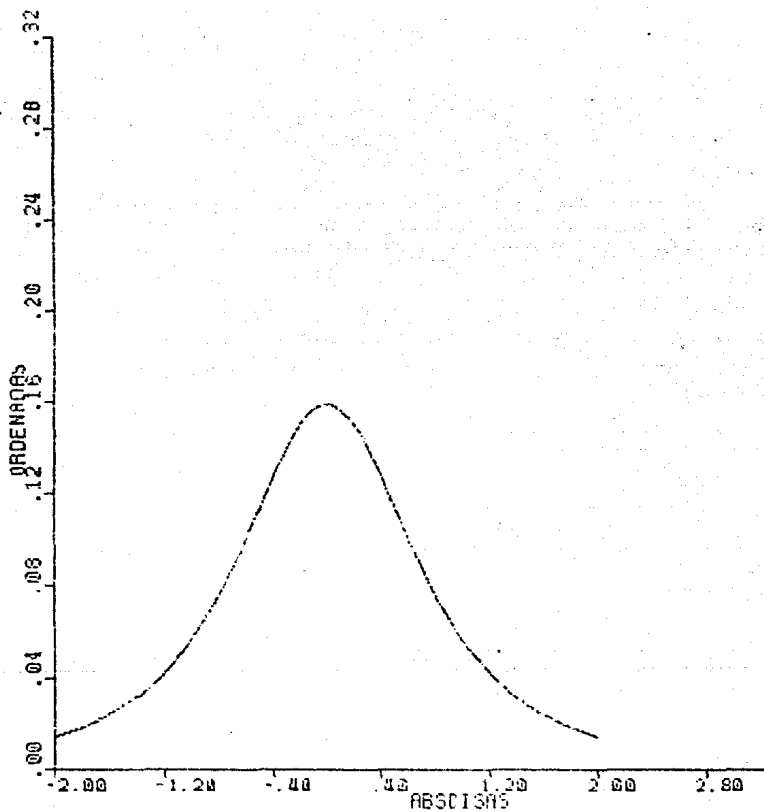


Figura 3.5. Gráficas del par de transformadas de Hankel

$$g(r) = \frac{1}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \xleftrightarrow{H_0} G(\rho) = \frac{2\pi e^{-2\pi a \rho}}{a}$$

transformada de Hankel exacta y calculada.

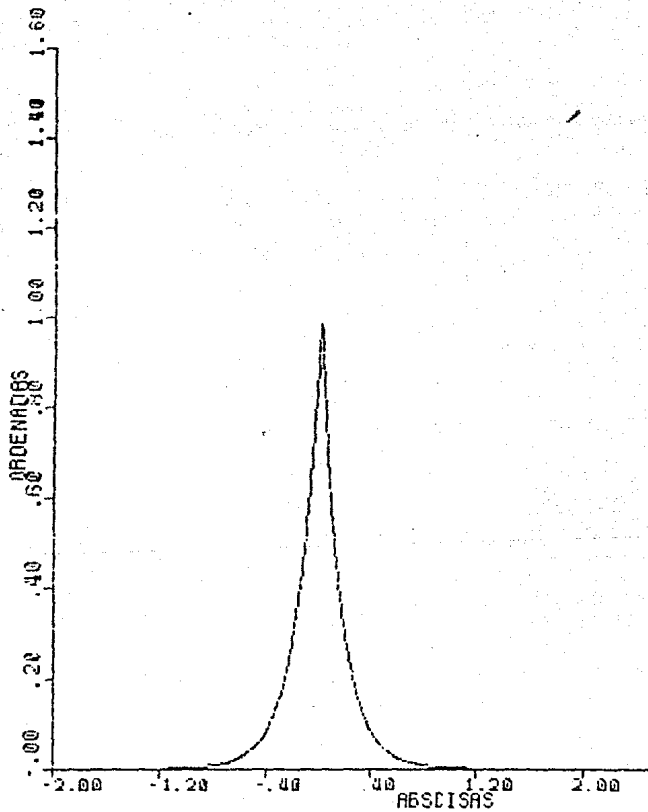


Figura 3.5.a. Gráfica de $G_0(\rho) = \frac{2\pi e^{-2\pi a\rho}}{a}$

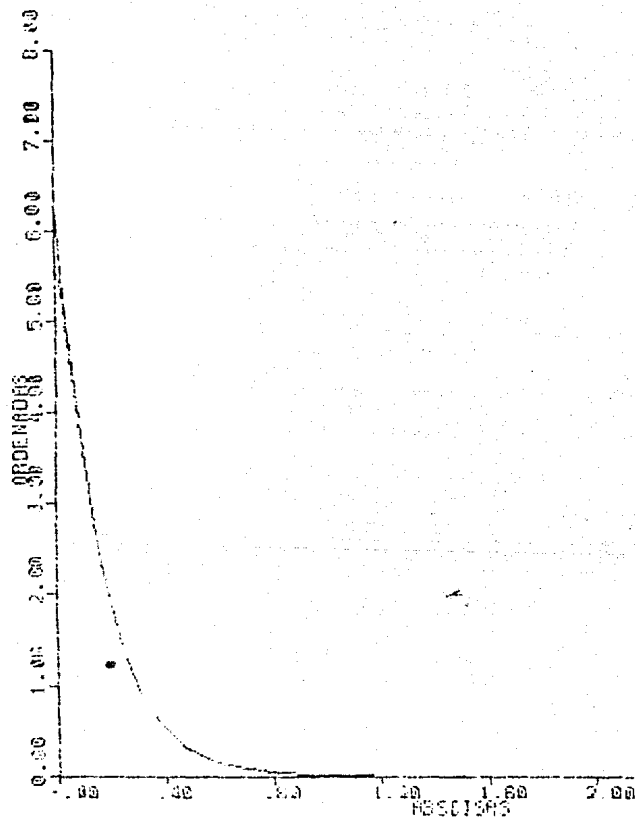


Figura 3.5.b. Gráficas superpuestas de la transformada exacta y calculada

$$G_0(p) = \frac{2\pi c^{-2\pi ap}}{a}$$

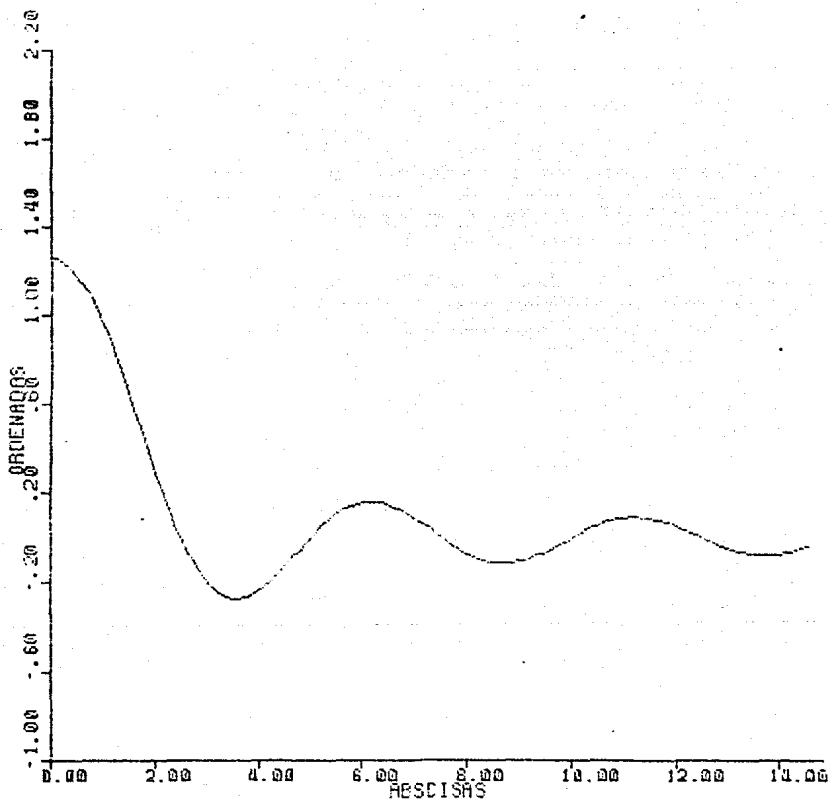


Figura 3.9. Gráficas del par de transformadas de Hankel

$$g(r) = \frac{\text{sen}(0.2r)}{r} \xleftrightarrow{H_0} G(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{[(0.2)^2 - \rho^2]^{1/2}} & ; 0 < \rho \leq 0.2 \\ 0 & ; 0.2 < \rho \end{cases}$$

transformada de Hankel exacta y calculada.

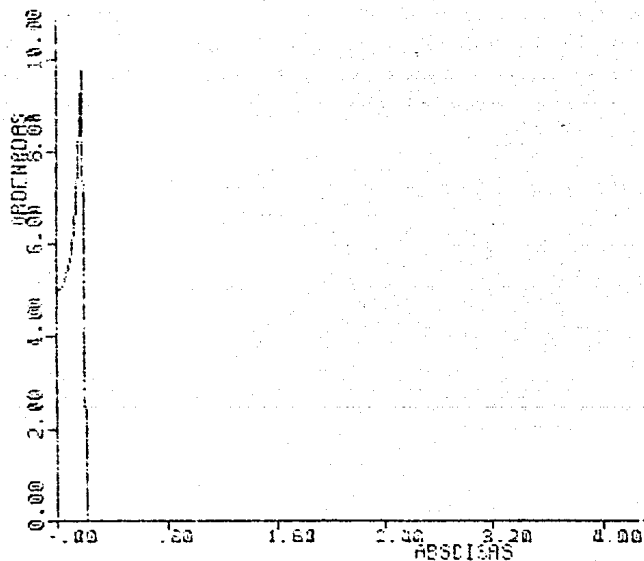


Figura 3.9.a. Gráfica de:

$$G_0(p) = \begin{cases} \frac{1}{[(0.2)^2 - p^2]^{\frac{1}{2}}} & ; \quad 0 < p \leq 0.2 \\ 0 & ; \quad 0.2 < p \end{cases}$$

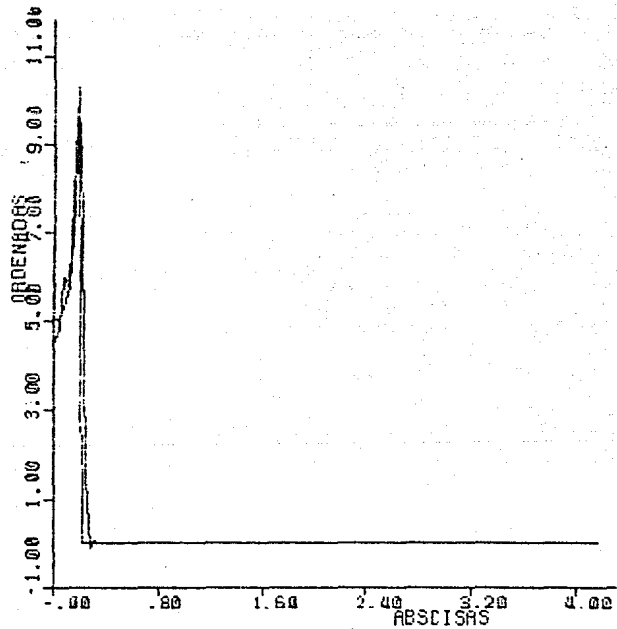


Figura 3.9. Gráficas superpuestas de la transformada exacta y calculada:

$$G_0(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{[(0.2)^2 - \rho^2]^{\frac{1}{2}}} & ; \quad 0 < \rho \leq 0.2 \\ 0 & ; \quad 0.2 < \rho \end{cases}$$

4. APLICACIONES

4.1. INTRODUCCION.

A partir de una variedad de aplicaciones en los campos de la óptica, acústica, electromagnetismo y física de las ondas se plantea la necesidad para el cálculo numérico de la transformada de Hankel. Su utilidad destaca actualmente en las siguientes áreas específicas:

Oceanografía, difracción y propagación de ondas, incluyendo el análisis del modo laser, holografía óptica como elemento de diseño, procesamiento bidimensional de imágenes, biología molecular, tomografía y sismología.

En este capítulo se plantean de manera breve algunas aplicaciones a geofísica sin ser exhaustivas, pues hacerlo equivaldría a investigaciones profundas que no corresponden al objetivo del presente trabajo.

4.2. APLICACION DE LA TRANSFORMADA DE HANKEL A GRAVIMETRIA Y MAGNETOMETRIA.

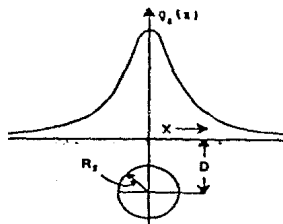
El propósito de este apartado es mostrar cómo la inversión de datos gravimétricos puede ser tratada utilizando el teorema de la transformada de Hankel. El enfoque del problema consiste en analizar el efecto del campo gravitacional de cuerpos de formas geométricas simples, en particular se analiza el de la esfera enterrada y el de la barra vertical enterrada. Cómo el carácter de la anomalía gravimétrica debida a un cuerpo regular está determinada por la profundidad a

la que se encuentra, densidad y forma de éste; el espectro de frecuencia de su anomalía proporcionará información respecto a estas mismas variables, como se muestra enseguida.

a) Esfera: El efecto gravimétrico debido a una esfera de densidad homogénea o de capas concéntricas de densidad parcialmente homogéneas, equivale a considerar toda la masa de la esfera concentrada en un punto y localizada en su centro. Por tanto, el efecto gravitacional para la esfera (figura 4.1) de masa m sobre un punto p en la superficie del terreno, a una distancia r de su centro, está dado por:

$$g = \gamma \frac{m}{r^2}$$

donde γ es la constante de la gravitación universal.



$$G. \quad q_g(x) = \sigma_0(D^2 + x^2)^{-3/2}$$

Figura 4.1. NOTACION PARA EL CALCULO DEL EFECTO GRAVITACIONAL DEBIDO A UNA ESFERA ENTERRADA.

En prospección geofísica generalmente importa la componente vertical de la gravedad q_z , la cual queda expresada como:

$$g_z = g \cos \theta = g \frac{z}{r} = \gamma \frac{mz}{r^3}$$

Si R es el radio de la esfera y σ su densidad (o contraste de densidad), su masa anómala estará dada por:

$$m = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma$$

y

$$g_z = \frac{\gamma 4 \pi R^3 \sigma}{3} \frac{z}{r^3}$$

y como $r = (z^2 + q^2)^{1/2} = (D^2 + q^2)^{1/2}$

$$g_z(q) = \frac{\gamma 4 \pi R^3 \sigma}{3} \frac{D}{(D^2 + q^2)^{3/2}} = \alpha \frac{D}{(D^2 + q^2)^{3/2}} \quad 4.2.1$$

donde

$$\alpha = \frac{\gamma 4 \pi R^3 \sigma}{3}$$

y

$$q = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La expresión (4.2.1) representa el efecto de la componente vertical de la gravedad en cada punto de la superficie a lo largo de un perfil que pase sobre el centro de la esfera enterrada.

A partir de la identidad

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda} J_0(q\lambda) \lambda \, d\lambda = \frac{z}{(q^2 + z^2)^{3/2}} \quad 4.2.2$$

o

$$2\pi \int_0^{\infty} e^{-z\lambda} J_0(2\pi q\lambda) \lambda \, d\lambda = \frac{2\pi z}{[(2\pi q)^2 + z^2]^{3/2}} \quad 4.2.3$$

(Gröbner y Hofreiter, 1966, págs. 59-18b y Bracewell 1978, pág. 249). La ecuación (4.2.1) se puede expresar en forma integral como:

$$g_z(q) = \int_0^{\infty} \alpha e^{-D\lambda} J_0(q\lambda) \lambda d\lambda \quad 4.2.4$$

Como la transformada de Hankel es en sí misma su inversa (ver apéndice 2), es decir

$$h(q) = \int_0^{\infty} H(\lambda) J_n(q\lambda) \lambda d\lambda \quad 4.2.5$$

y

$$H(\lambda) = \int_0^{\infty} h(q) J_n(q\lambda) q dq \quad 4.2.6$$

entonces, aplicando este teorema a (4.2.4), se obtiene:

$$G_0^z(\lambda) = \int_0^{\infty} g_z(q) J_0(\lambda q) q dq = \frac{4\pi\gamma R^3 \sigma}{3} e^{-D\lambda} \quad 4.2.7$$

donde λ , es la frecuencia en ciclos por unidad de longitud.

Tomando logaritmos a la expresión (4.2.7), queda:

$$\ln G_0^z(\lambda) = \ln \left[\frac{4\pi\gamma R^3 \sigma}{3} \right] - D\lambda \quad 4.2.8$$

que representa la ecuación de una recta, con pendiente igual a la profundidad D (con signo negativo) y su intersección con el eje de ordenadas, relacionada con la densidad y tamaño de la esfera. La figura (4.2) muestra la gráfica en escala semilogarítmica de la ecuación (4.2.7).

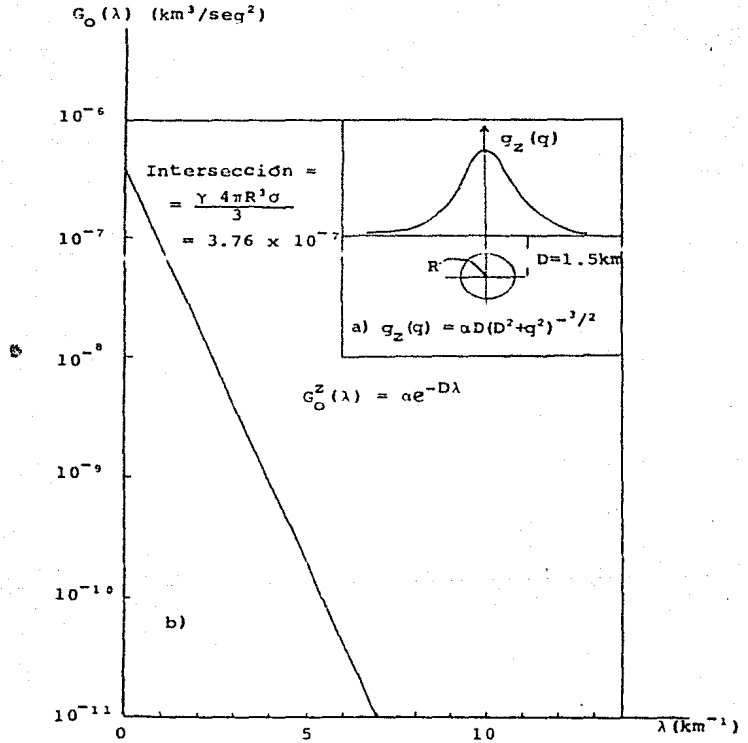


Figura 4.2. a) gravedad vertical, $g_z(q)$, sobre una esfera, contra la distancia radial q .
 b) transformada de Hankel de orden cero de la gravedad vertical de la esfera, $G_0(\lambda)$, contra la frecuencia λ .

b) Barra cilíndrica vertical: El efecto de la componente vertical de la gravedad en cada punto de la superficie a lo largo de un perfil que pase sobre el eje de una barra vertical enterrada, con su extremo superior a una profundidad D y de longitud "infinita", está dado por la expresión (Nettleton 1976; Telford, Geldart, Sheriff y Keys 1976):

$$g_z = \gamma \frac{m}{r} \quad \text{la notación correspondiente a la figura (4.3).}$$

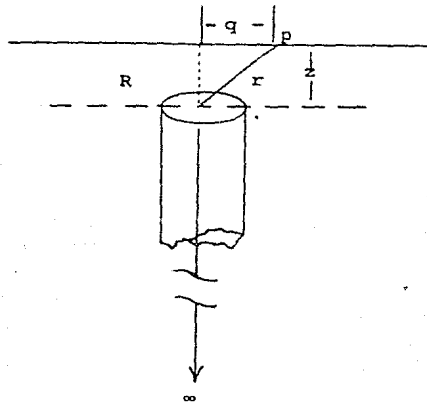


Figura 4.3. La barra vertical enterrada con la notación correspondiente a la expresión para la componente vertical de la gravedad.

donde, γ es la constante de la gravitación universal, m es la masa por unidad de longitud, la cual, para la "barra"

de radio R , es

$$m = \pi R^2 \sigma$$

siendo σ su densidad (o contraste de densidad), con

$$r = \sqrt{q^2 + z^2} \quad \text{y} \quad D = z.$$

Quedando finalmente expresada como:

$$g_z(q) = \alpha (q^2 + D^2)^{-1/2} \quad 4.2.9$$

donde $\alpha = \gamma \pi R^2 \sigma$.

A partir de la identidad

$$\int_0^{\infty} [\lambda^{-1} e^{-z\lambda}] J_0(q\lambda) \lambda \, d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda} J_0(q\lambda) \, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{q^2 + z^2}} \quad 4.2.10$$

o

$$2\pi \int_0^{\infty} [\lambda^{-1} e^{-z\lambda}] J_0(2\pi q\lambda) \, d\lambda = \frac{2\pi}{[(2\pi q)^2 + z^2]^{1/2}} \quad 4.2.11$$

(Gröbner y Hofreiter, 1966, pág. 59-18a y Bracewell 1978, pág. 249).

La ecuación (4.2.9) se puede expresar en forma integral como:

$$g_z(q) = \int_0^{\infty} [\alpha \lambda^{-1} e^{-D\lambda}] J_0(q\lambda) \lambda \, d\lambda \quad 4.2.12$$

y de acuerdo a (4.2.5) y (4.2.6) se tiene que:

$$G_0(\lambda) = \alpha \lambda^{-1} e^{-D\lambda} = \int_0^{\infty} g_z(q) J_0(\lambda q) q \, dq \quad 4.2.13$$

para facilitar la interpretación se considera la transformada

asociada

$$H_0(\lambda) = \lambda G_0(\lambda) = \alpha e^{-D\lambda} \quad 4.2.14$$

la cual, graficada en una escala semilogarítmica es una recta, con la pendiente igual a $-D$ (negativo de la profundidad) y cuya intersección con el eje de ordenadas está relacionado con la masa. Tomando logaritmos a la expresión (4.2.14), lo anterior resulta claro;

$$\ln H_0(\lambda) = \ln(\gamma \pi R^2 \sigma) - D\lambda \quad 4.2.15$$

La figura 4.5 muestra la gráfica de la expresión (4.2.14) en escala semilogarítmica.

Los resultados anteriores se pueden extender para el caso de una barra vertical finita, en donde D_1 y D_2 son las profundidades respectivas de los extremos superior e inferior de la barra (fig. 4.4), $g_z(q)$ está dada por (Nettleton 1976; Telford, Geldart, Sheriff y Keys 1976):

$$g_z(q) = g_{z_2}(q) - g_{z_1}(q) \quad 4.2.16$$

$$g_z(q) = \alpha [(D_1^2 + q^2)^{-1/2} - (D_2^2 + q^2)^{-1/2}] \quad 4.2.17$$

Como la transformada de Hankel es un operador lineal se tiene que:

Si $g_{z_1}(q)$ y $g_{z_2}(q)$ tienen como sus transformadas respectivas a $G_{O_1}(\lambda)$ y $G_{O_2}(\lambda)$, se establece que:

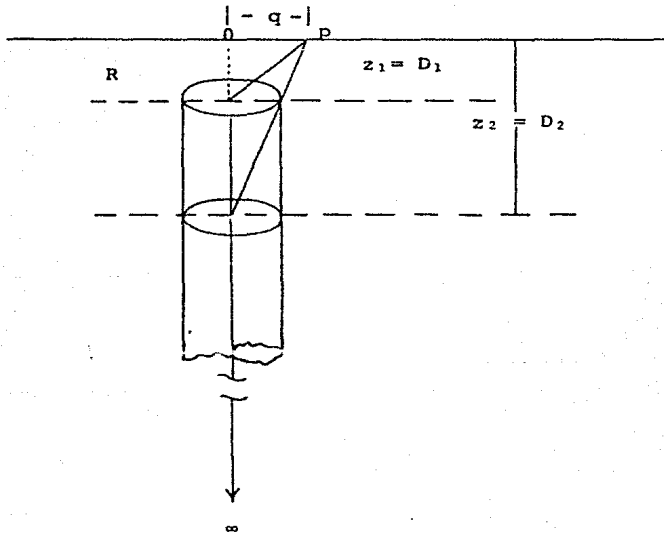


Figura 4.4. Modelo que muestra la notación para la barra vertical finita.

$$\begin{aligned}
 & 2\pi \int_0^{\infty} g_{z_1}(q) - g_{z_2}(q) J_n(2\pi\lambda q) q \, dq = \\
 & = 2\pi \int_0^{\infty} g_{z_1}(q) J_n(2\pi\lambda q) q \, dq - 2\pi \int_0^{\infty} g_{z_2}(q) J_n(2\pi\lambda q) q \, dq = \\
 & = G_{O_1}(\lambda) - G_{O_2}(\lambda) = G_O(\lambda) \qquad \qquad \qquad 4.2.18
 \end{aligned}$$

y como

$$G_{O_1}(\lambda) = \alpha \lambda^{-1} e^{-D_1 \lambda} = \int_0^{\infty} g_{z_1}(q) J_0(\lambda q) q \, dq \qquad \qquad \qquad 4.2.19$$

y

$$G_{O_2}(\lambda) = \alpha \lambda^{-1} e^{-D_2 \lambda} = \int_0^{\infty} g_{Z_2}(q) J_0(\lambda q) q \, dq \quad 4.2.20$$

se tiene:

$$G_O(\lambda) = \alpha \lambda^{-1} [e^{-D_1 \lambda} - e^{-D_2 \lambda}] \quad 4.2.21$$

de manera similar a (4.2.14) se obtiene la transformada asociada

$$H_O(\lambda) = \alpha [e^{-D_1 \lambda} - e^{-D_2 \lambda}] \quad 4.2.22$$

La interpretación puede llevarse a cabo en términos del espectro de doble decaimiento radiactivo (Sargent, B.W.; Geiger, H. y Nuttall, I.M.; Kaplan, 1955).

El análisis anterior muestra que la aplicación del teorema de la transformada de Hankel para la inversión de datos gravimétricos, puede ser considerada como una herramienta matemática poderosa para la correcta derivación de los parámetros de cuerpos enterrados. Este análisis se restringió a la esfera y a la barra vertical, con el objeto de obtener soluciones exactas para las transformadas de Hankel.

Como una extensión de lo anterior se hace mención de la inversión de datos magnéticos:

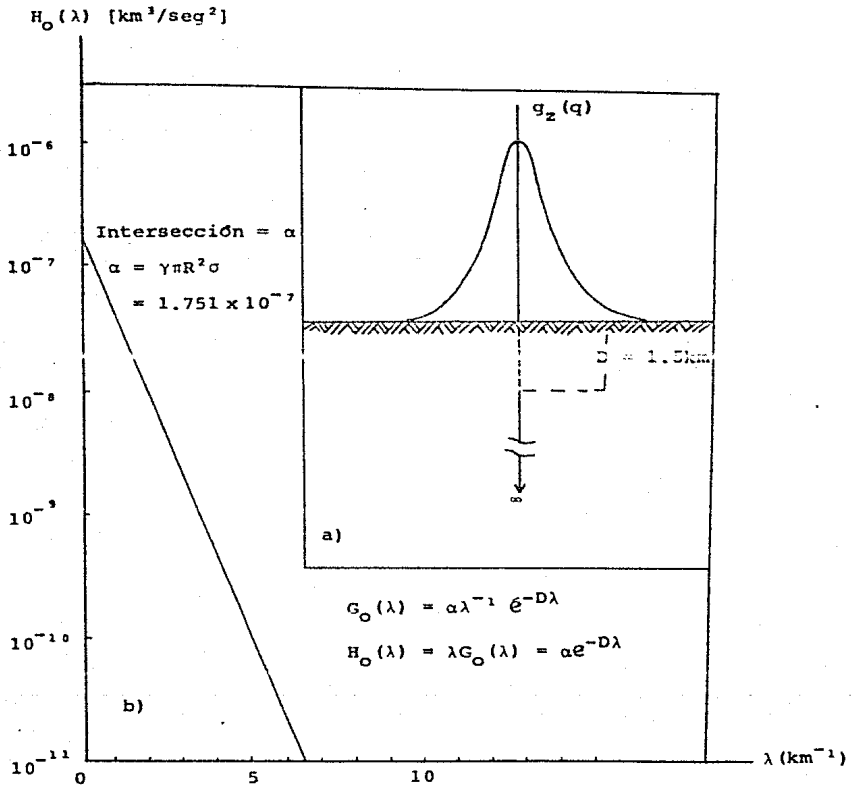


Figura 4.5. Gráfica en escala semilogarítmica de la transformada de Hankel de orden cero del efecto de gravedad debido a una barra cilíndrica vertical enterrada.

Considere el dipolo vertical enterrado (figura 4.6), verticalmente magnetizado. Su efecto magnético está dado por (Telford, Geldart, Sheriff y Keys 1976, pág. 157)

$$Z(q) = \beta \left[\frac{z}{(z^2 + q^2)^{3/2}} - \frac{z + l}{[(z + l)^2 + q^2]^{3/2}} \right] \quad 4.2.23$$

con $\beta = kz_0 s$

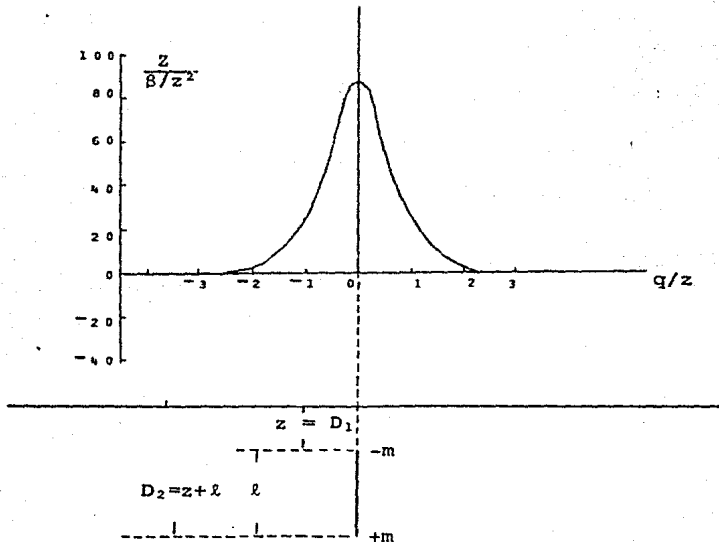


Figura 4.6. Efecto magnético debido al dipolo vertical.

donde s es el área de la sección transversal, z_0 es el campo magnético terrestre y k la susceptibilidad magnética del dipolo.

A partir de la identidad

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda} J_0(q\lambda) \lambda \, d\lambda = \frac{z}{(q^2 + z^2)^{3/2}} \quad 4.2.24$$

(Gröbner, Hofreiter 1966, páq. 59-18b).

Haciendo $D_1 = z$ y $D_2 = z + \epsilon$ la ecuación (4.2.23) se puede escribir en su forma integral como:

$$z(q) = \beta \left[\int_0^{\infty} e^{-D_1\lambda} J_0(q\lambda) \lambda \, d\lambda - \int_0^{\infty} e^{-D_2\lambda} J_0(q\lambda) \lambda \, d\lambda \right] \quad 4.2.25$$

utilizando la propiedad de linealidad de la transformada de Hankel, queda

$$z(q) = \beta \int_0^{\infty} \left[e^{-D_1\lambda} - e^{-D_2\lambda} \right] J_0(q\lambda) \lambda \, d\lambda \quad 4.2.26$$

aplicando la transformada inversa

$$\alpha (e^{-D_1\lambda} - e^{-D_2\lambda}) = \int_0^{\infty} z(q) J_0(\lambda q) q \, dq = G_0(\lambda) \quad 4.2.27$$

donde $\alpha = \frac{1}{\beta}$ que es un caso similar al de gravimetría, ecuación (4.2.22) (Sargent, B.W.; Geiger, H. y Nuttall, I.M.; Kaplan, 1955).

Otra aplicación a gravimetría y magnetometría corresponde al diseño de operadores o filtros bidimensionales. Para

ilustrar esto se describe el siguiente ejemplo:

Continuación analítica: Este problema se conoce también como primer problema de contorno de la teoría del potencial o problema de Dirichlet para el plano. La solución puede ser obtenida por el teorema de Green y expresarse como (Chávez Castellanos 1987):

$$g_2(x, y) = g_2(x, y, z) \Big|_{z=h} =$$

$$= \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(\epsilon, \eta, 0)}{[(x - \epsilon)^2 + (y - \eta)^2 + h^2]^{3/2}} d\epsilon d\eta$$

4.2.28

que es una integral de convolución y por tanto se puede escribir como:

$$g_2(x, y) = \left[\frac{1}{2\pi} \frac{h}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \right] * g_1(x, y) \quad 4.2.29$$

siendo la función de peso

$$s(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \quad 4.2.30$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ entonces, la función de transferencia puede obtenerse como la transformada de Hankel de orden cero de la función de peso, esto es:

$$S_{asc}(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} s(r) J_0(2\pi\rho r) r dr = e^{-2\pi h\rho} \quad 4.2.31$$

Para la continuación analítica ascendente los espectros

del campo original $G_1(\rho, \phi)$ y el continuado $G_2(\rho, \phi)$, están relacionados por:

$$G_2(\rho, \phi) = S_{asc}(\rho)G_1(\rho, \phi) = e^{-2\pi h\rho}G_1(\rho, \phi) \quad 4.2.32$$

con $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ y $\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$ de manera que la continua ción analítica descendente se expresa como:

$$G_1(\rho, \phi) = \frac{1}{S_{asc}(\rho)} G_2(\rho, \phi) = e^{2\pi h\rho} G_2(\rho, \phi) \quad 4.2.33$$

es decir, la función de transferencia descendente es la recí proca de la función de transferencia de la continuación ana- lítica ascendente

$$S_{desc}(\rho) = \frac{1}{S_{asc}(\rho)} = e^{2\pi h\rho} \quad 4.2.34$$

Las figuras (4.7) y (4.8) muestran las vistas en pers- pectiva de las funciones de transferencia teóricas de los filtros de continuación ascendente y descendente.

4.3. APLICACIONES AL PROCESAMIENTO DE DATOS SISMICOS.

En 1971, Gerhard Müller publicó un trabajo en la Zeitschrift für geophysik titulado "Inversión directa de las ob- servaciones sísmicas". En este trabajo estudió la posibili- dad de invertir las respuestas de reflexión de un medio es- tratificado debidas a una fuente puntual de energía. La idea básica de Müller fué "reducir" las grabaciones debidas a un campo de ondas esféricas (fuente puntual), en un conjunto equivalente de registros de ondas planas, las cuales, cuando son combinadas adecuadamente, pueden aproximarse a los datos

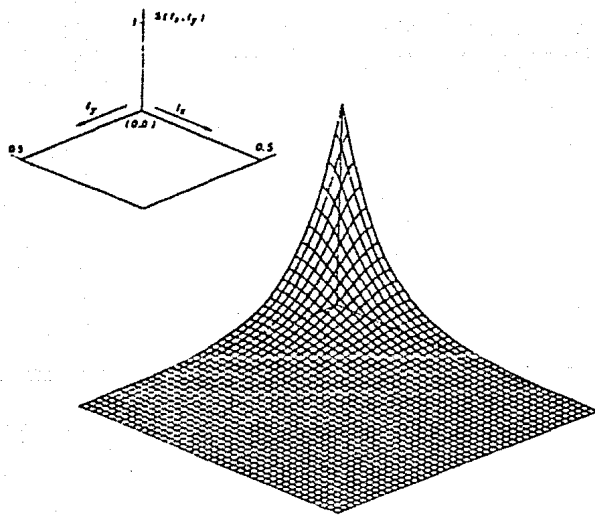


Figura 4.7. VISTA EN PERSPECTIVA DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA TEORICA PARA LA CONTINUACION ANALITICA ASCENDENTE.

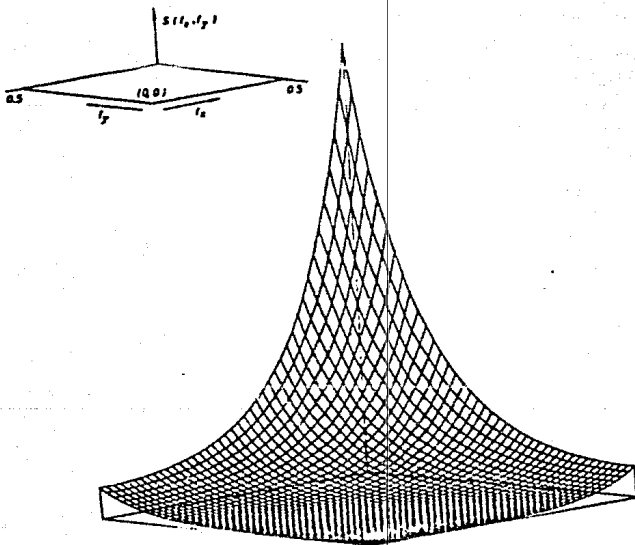


Figura 4.8. VISTA EN PERSPECTIVA DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA TEORICA PARA LA CONTINUACION ANALITICA DESCENDENTE.

de campo observados. Para esto, Müller presenta una solución formal al problema de reducción en ondas planas y que se sintetiza en la expresión:

$$U(f,r) = 2\pi \int_0^{\infty} R(f,k_r) J_0(2\pi r k_r) k_r dk_r \quad 4.3.1$$

que corresponde a una transformada de Hankel; donde

$U(f,r)$ = transformada de Fourier de las ondas sísmicas reflejadas (campo de ondas esféricas) ó transformada de Fourier del sismograma de onda esférica.

$R(f,k_r)$ = transformada de Fourier de la función de reflectividad de onda plana ó transformada de Fourier del sismograma de onda plana.

k_r = número de onda

f = frecuencia lineal

r = distancia de la fuente al detector.

Los resultados obtenidos por Müller son de importancia fundamental en sismología, pues existen numerosas técnicas para el procesamiento en computadora digital de los datos de ondas planas.

Muchos autores, apoyados en el trabajo de Müller han desarrollado una serie de aplicaciones, llamando a este proceso fundamental con diferentes nombres: transformada de apilamiento inclinado (Schultz y Claerbout 1978), transformada $r - p$ (Benoliel y demás 1987, Taltham y demás 1982), descomposición en ondas planas (Wilson 1986, Treitel y demás 1982) y transformada radon (Chapman 1981).

Wilson (1986), propone un método para el cálculo de sismogramas sintéticos y para la descomposición en ondas planas de los sismogramas observados (Sismogramas de Campo).

Básicamente es una extensión del trabajo de Müller, en él considera un espacio determinado por la atmósfera (capa 0) y el subsuelo, éste último compuesto de capas elásticas horizontales, individualmente homogéneas e isotrópicas. Una fuente puntual de energía y receptores, localizados en la interfase capa 0 - capa 1 y sólo considera la componente vertical del movimiento de las partículas del medio. Designa la velocidad de la onda P, en la i -ésima capa, por α_i , la velocidad de la onda S por β_i y la densidad por ρ_i . La figura 4.9 muestra el esquema del modelo de tierra empleado para el cálculo del sismograma sintético.

		α	β	ρ
	atmósfera	m/seg	m/seg	gr/cm ³
fuelle	receptores	2,000	800	2
VVV				
	400 m	2,000	800	2
	210 m	2,100	1,050	2.3
		2,000	800	2
	⋮			
	∞			

Figura 4.9. Esquema del modelo de tierra utilizado en el cálculo del sismograma sintético.

La expresión (4.3.1) constituye la base de los cálculos para el sismograma sintético por el método de reflectividad (Fuchs y Müller 1971), donde

$$U(f,r) = \int_0^{\infty} u(t,r) e^{-i2\pi ft} dt \quad 4.3.2$$

siendo $u(t,r)$ las ondas sísmicas reflejadas (Sismograma de fuente puntual) que se observan a una separación r y tiempo t de la fuente-receptor. A la transformada inversa de Hankel de la ecuación (4.3.1)

$$R(f,k_r) = 2\pi \int_0^{\infty} U(f,r) J_0(2\pi k_r r) r dr \quad 4.3.3$$

se le define como el proceso de descomposición en ondas planas. La función de reflectividad $R(f,k_r)$ describe la interacción de una onda plana con una tierra estratificada. Como $k_r = 2\pi p f$, donde p es el retraso o parámetro de rayo de las ondas planas, la función de reflectividad se puede escribir como $R(f,p)$, cuya transformada inversa de Fourier

$$\underline{r}(\tau,p) = \int_0^{\infty} R(f,p) e^{i2\pi f \tau} df \quad 4.3.4$$

donde

$\tau = t - pr$ es el tiempo de intersección y $\underline{r}(\tau,p)$ es el sismograma de onda plana.

Las figuras 4.10 a 4.16 muestran los resultados obtenidos por Wilson (1986).

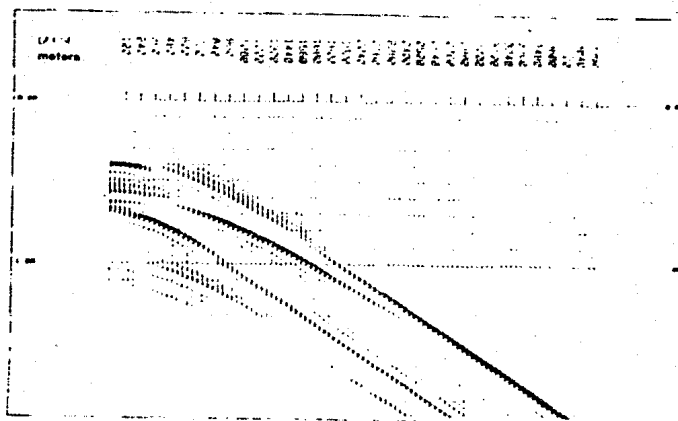


Figura 4.10. Sismograma sintético para el modelo de tierra figura (4.9) debido a una fuente lineal, generado por el programa comercial Solid, algoritmo diseñado por la corporación de desarrollo geofísico de la Universidad de Texas.

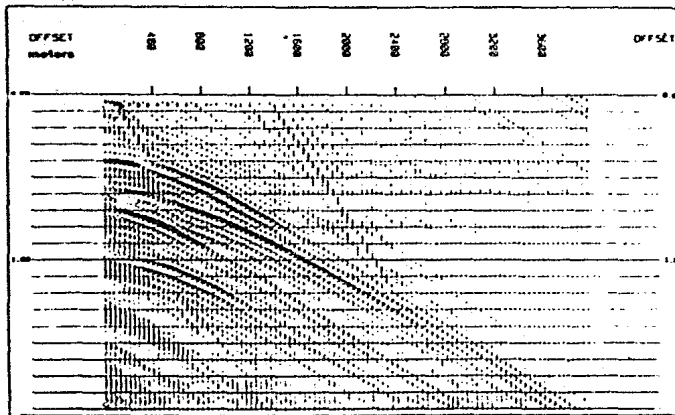


Figura 4.11. Sismograma sintético del modelo de tierra figura (4.9) generado por un método que se fundamenta en el cálculo numérico de la transformada de Hankel.

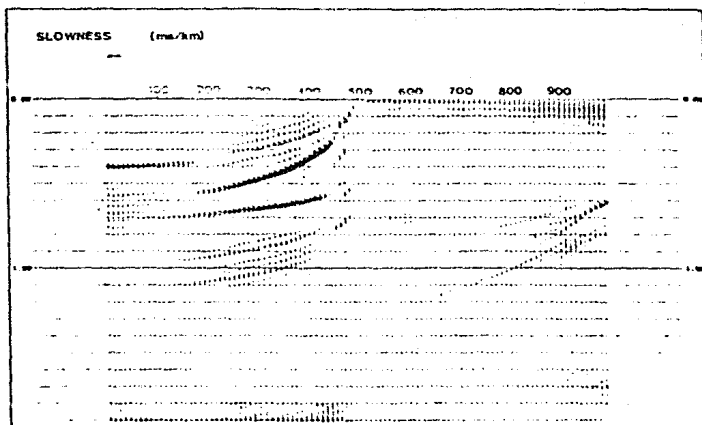


Figura 4.12. Sección $\tau - p$ para el modelo de tierra, figura (4.9) generada a partir de la subrutina RECOPS.

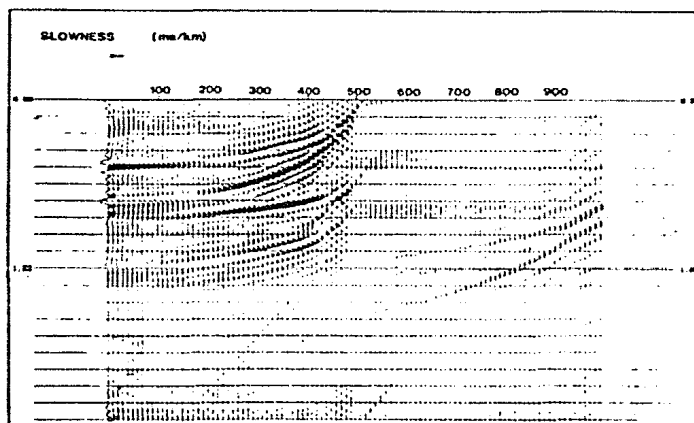


Figura 4.13. Sección $\tau - p$ obtenida a partir del sismograma sintético figura (4.10).

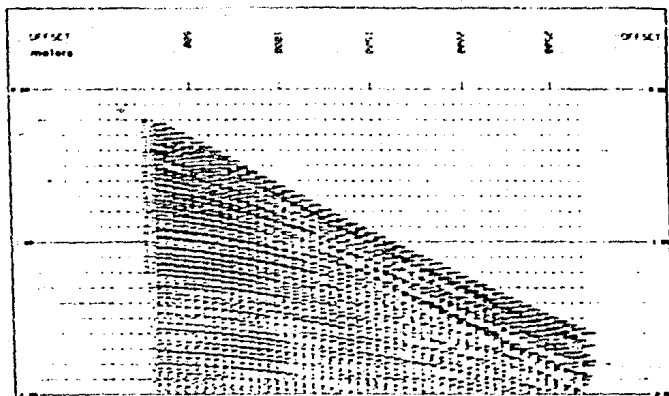


Figura 4.14. Sismograma de una zona marina poco profunda constituida por material clástico del terciario. (Wilson 1986, tomado de Backus y Chen 1975).

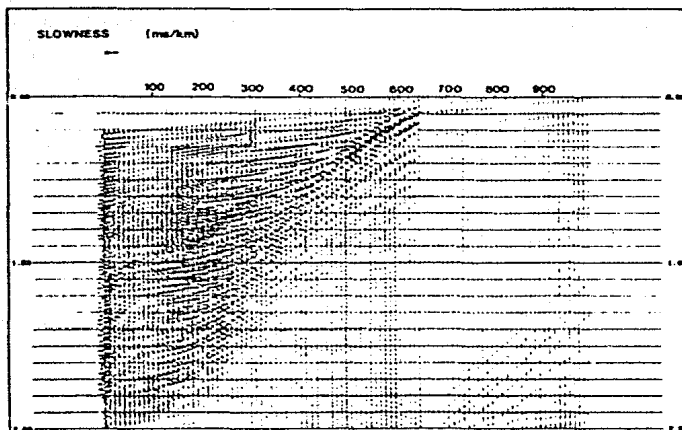


Figura 4.15. Sección de coeficientes de reflexión $r - p$, obtenida a partir del sismograma de campo figura (4.14).

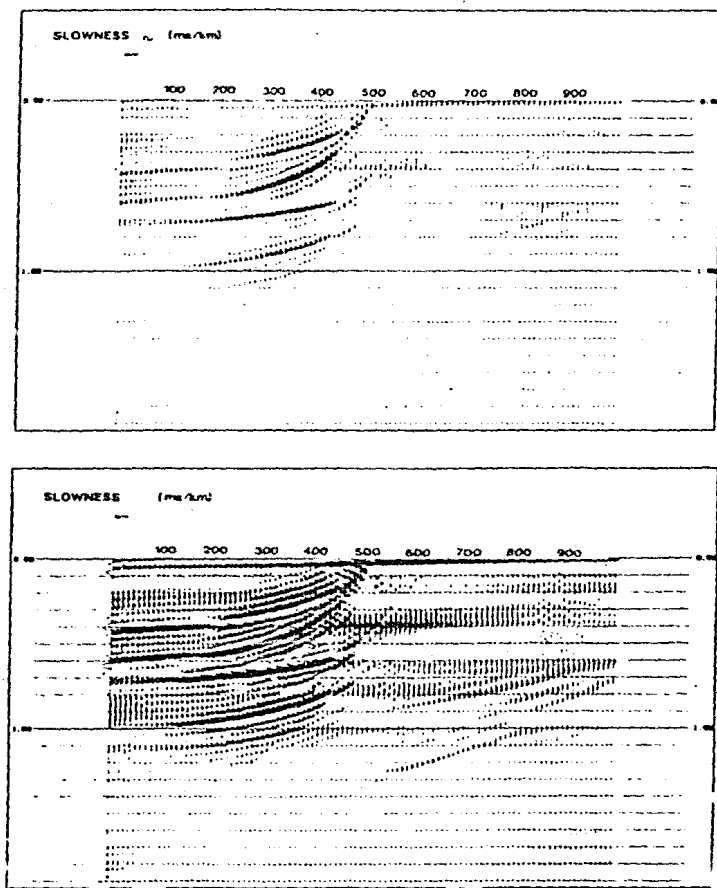


Figura 4.16. Sección de reflectividad $\tau - p$ obtenida del sismograma de campo figura (4.14) por el método de apilamiento inclinado.

Benoliel, Schneider y Shurtlef (1987) mencionan otras aplicaciones al procesamiento de datos sísmicos de lo que llaman transformada $\tau - p$ y que corresponde al proceso definido por la ecuación (4.34), éstas son:

a) La transformada $\tau - p$ como una herramienta para atacar el ruido coherente. Esta técnica permite comparar el filtro $\tau - p$ con el filtro frecuencia-número de onda, que es el que comúnmente se utiliza. Lo anterior se ilustra en la figura 4.17.

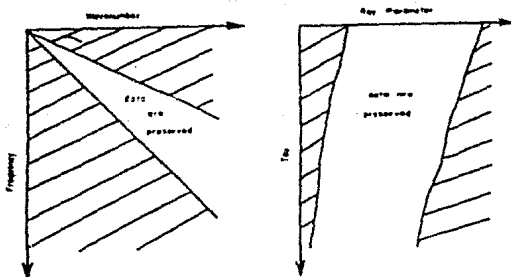


Figura 4.17. Comparación entre los filtros $f - k_r$ y $\tau - p$.

El filtrado $\tau - p$ puede ser considerado como el $f - k_r$ (o de velocidad) que varía en el tiempo. Otra ventaja del filtrado $\tau - p$ es que el analista puede ver directamente las reflexiones en un dominio temporal (es decir, τ) de manera que el ruido coherente a amortiguar se puede escoger más fácilmente.

b) Supresión de múltiples por deconvolución en el espacio $\tau - p$.

Puesto que los múltiples son exactamente periódicos en el dominio $\tau - p$, para un subsuelo estratificado y para un parámetro de rayo particular (Alam y Austin 1981, Diebold y Stoffa 1981), la deconvolución en el espacio $\tau - p$ es más efectiva. Comúnmente los múltiples dependen de un ángulo de incidencia. Consecuentemente se pueden suprimir amortiguándolos en el dominio $\tau - p$. Este proceso es análogo al filtrado de velocidad en el dominio $f - k_r$.

Las figuras 4.18 a 4.20 ilustran estas aplicaciones.

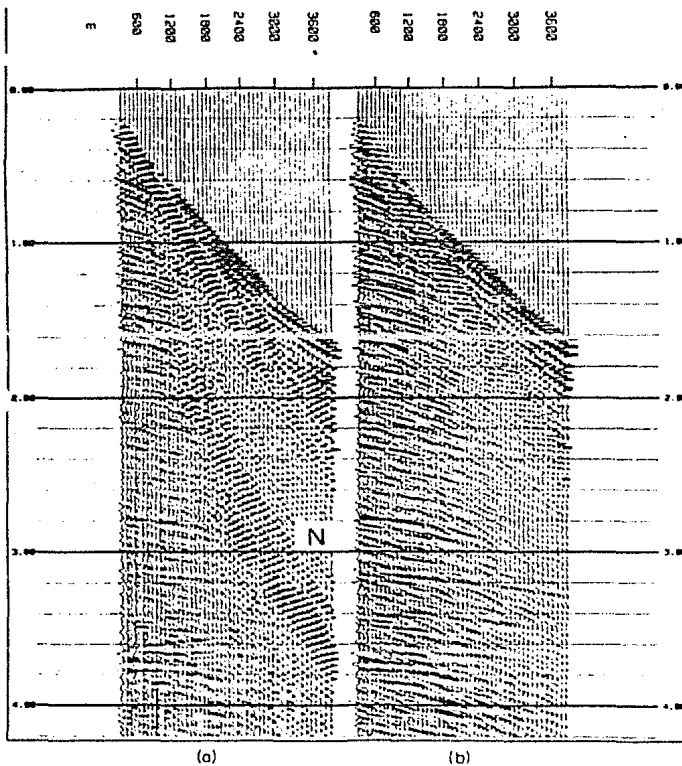


Figura 4.18. a) Muestra el registro de una grabación marina contaminada con ruido coherente (N) debido al cable de grabación. b) El mismo registro procesado con el filtro $r - p$. Note que el ruido coherente (N) ha sido completamente eliminado.

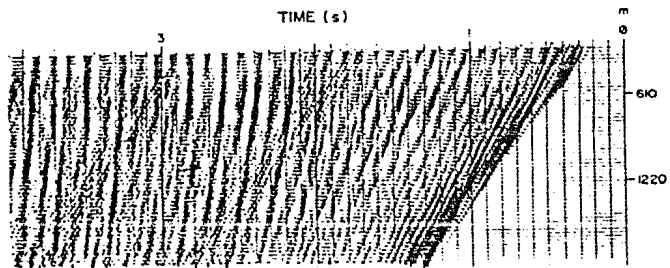


Figura 4.19. Registro de una grabación marina contaminada por reverberaciones del fondo oceánico.

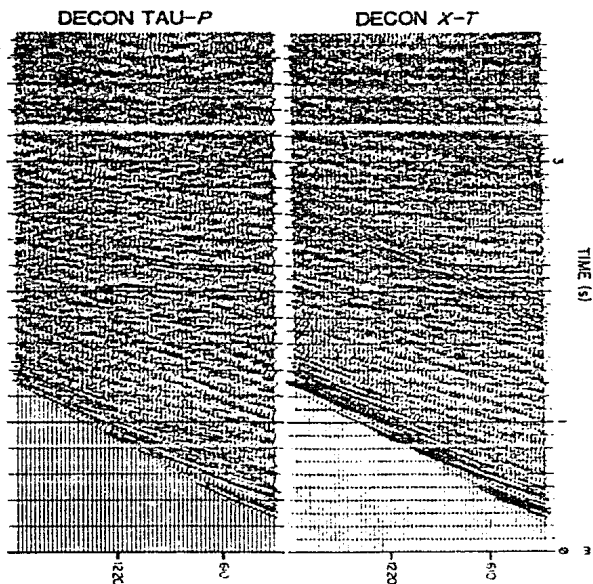


Figura 4.20. Comparación entre los procesos de deconvolución practicados al registro de la figura (4.19) a) convencional b) en el dominio $\tau - p$.

Las aplicaciones muestran que la transformada $r - p$ puede ser utilizada como un filtro de echado. Otras aplicaciones del proceso $r - p$, incluyen: simulación de arreglos, análisis de trayectorias (rayos), análisis de velocidades en el dominio $r - p$ y análisis de la amplitud de offset.

4.4. APLICACION A LA PROSPECCION GEOELECTRICA.

En el estudio del método de resistividad en prospección geoelectrónica con corriente continua, se asume generalmente, como modelo de tierra un medio horizontalmente estratificado, parcialmente homogéneo, de extensión lateral indefinida y con el espesor de la capa más profunda, infinito. La figura 4.21 ilustra el esquema para el modelo de tierra.

El potencial para el medio estratificado está dado por (Koefoed 1970):

$$u(r) = \frac{I}{2\pi} \int_0^{\infty} T_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad 4.4.1$$

donde $T_1(\lambda)$ es la función transformada de resistividades y está dada por la fórmula de recurrencia (Koefoed 1970):

$$T_i = \frac{T_{i+1} + \rho_i \operatorname{tgh}(\lambda h_i)}{1 + \frac{T_{i+1} \operatorname{tgh}(\lambda h_i)}{\rho_i}} \quad 4.4.2$$

con

$$T_n = \rho_n \quad 4.4.3$$

siendo ρ_i y h_i la resistividad y espesor de la capa correspondiente (parámetros del corte geoelectrónico).

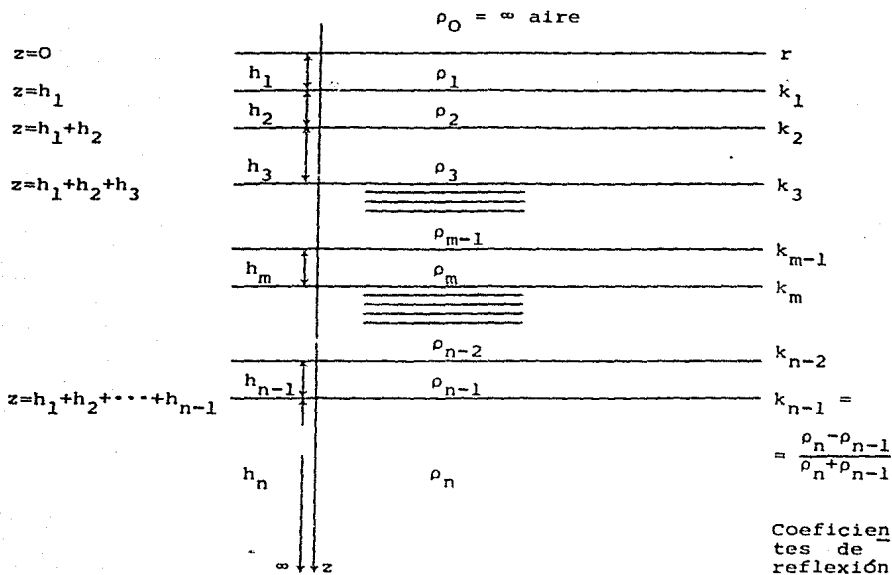


Figura 4.21. Modelo de tierra estratificada.

En la teoría del sondeo eléctrico vertical, las expresiones para la función de resistividad aparente están dadas por (Koefoed 1970, Anguiano y Amador 1985):

a) Dispositivo Wenner

$$\rho_a^W(r) = 2a \int_0^{\infty} T_1(\lambda) [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] \lambda \, d\lambda \quad 4.4.4$$

b) Dispositivo Schlumberger

$$\rho_a^S(r) = r^2 \int_0^{\infty} T_1(\lambda) J_1(r\lambda) \lambda \, d\lambda \quad 4.4.5$$

Patella (1980) propone para los sondeos dipolares, la expresión

c) Dispositivos dipolares

$$\rho_a^D(r) = r^2 \int_0^{\infty} T_1^D(\lambda) J_1(r\lambda) \lambda \, d\lambda \quad 4.4.6$$

y

$$T_1^D(\lambda) = T_1^S(\lambda) + \frac{\lambda}{\alpha} \frac{dT_1^S(\lambda)}{d\lambda} \quad 4.4.7$$

la ecuación (4.4.7) se define como transformada de resistividad dipolar (consultar el apéndice 4) con:

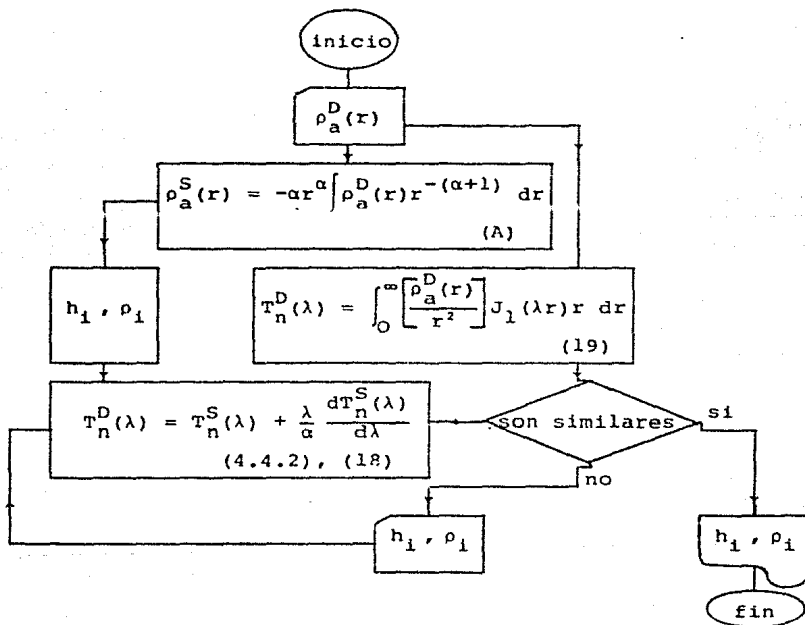
$\alpha = 2$, para el dispositivo radial

$\alpha = 3$, para el dispositivo perpendicular, y

$\alpha = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta}$, para el dispositivo paralelo

La figura 4.22 ilustra la geometría de los dispositivos mencionados.

Patella (1980), sugiere una aplicación práctica para la interpretación cuantitativa de las funciones de resistividad aparente dipolar, que expresada como diagrama de flujo es:



(Consultar apéndice 4).

En general los problemas directo e inverso de la prospección eléctrica con corriente continua y fuentes puntuales estarán relacionados con la transformada de Hankel, por lo que resulta atractivo conocer mecanismos para su cálculo numérico.

CONCLUSIONES

Descritas en forma muy breve las conclusiones generales que es posible establecer a partir del presente trabajo son las siguientes:

- 1.- La transformada de Hankel es una transformación lineal utilizable con fines prácticos gracias al empleo de computadoras digitales.
- 2.- El cálculo numérico de la transformada de Hankel a partir de un algoritmo de transformada de Fourier permite al ingeniero geofísico reafirmar y ampliar su concepto del análisis espectral.
- 3.- A partir de 1970 la transformada de Hankel deja de aparecer en la literatura de geofísica como una fórmula resolutiva de interés puramente teórico, gracias a técnicas como el método de filtros lineales digitales. El presente trabajo muestra otra alternativa indudablemente prometedora.
- 4.- El proceso de datos así como la labor de interpretación cuantitativa en geofísica es un arte que no puede reducirse a una labor puramente mecánica, realizable por aplicación automática de ciertos criterios ó fórmulas matemáticas, sino que requiere necesariamente de la aportación de un ser inteligente. Es preciso por tanto que el ingeniero geofísico amplíe y profundice en forma permanente su cultura profesional a fin de poder resolver exitosamente los problemas relacionados con la prospección geofísica.

APENDICE 1

FUNCIONES BESSEL

Las funciones Bessel fueron introducidas por primera vez en 1824, por el astrónomo alemán Federico Bessel, en la discusión de un problema de astronomía dinámica, el cual puede ser descrito como sigue: Si P es un planeta y se está moviendo en una trayectoria elíptica cuyo foco S es el Sol y cuyo centro y eje mayor son C y AA' respectivamente (ver la figura Nº 1)

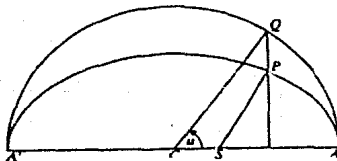


Figura Nº 1

El ángulo ASP es llamado la anomalía verdadera del planeta. Resulta que en los cálculos astronómicos, la anomalía verdadera no es un ángulo muy conveniente para trabajar.

En su lugar se utiliza la anomalía media γ , que se define como 2π veces la razón del área del sector elíptico ASP entre el área de la elipse. Otro ángulo de significancia es la anomalía excéntrica μ , del planeta, definida como el ángulo ACQ, donde Q es el punto en el cual la ordenada a través de P interseca el círculo auxiliar de la elipse. Siendo e la excentricidad de la elipse, la relación entre la anomalía media y la anomalía excéntrica, es:

$$\gamma = \mu - e \sin \mu \quad (1)$$

El problema establecido por Federico Bessel, fué el de expresar la diferencia $\mu - \gamma$, como una serie de senos de múltiplos de la anomalía media γ

$$\mu - \gamma = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \sin (r\gamma) \quad (2)$$

es decir, la determinación de los coeficientes C_r .

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (2) por $\sin (r\gamma)$ e integrando respecto a γ de 0 a π :

$$\int_0^{\pi} (\mu - \gamma) \sin (s\gamma) d\gamma = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \int_0^{\pi} \sin (r\gamma) \sin (s\gamma) d\gamma \quad (3)$$

donde

$$\int_0^{\pi} \sin (r\gamma) \sin (s\gamma) d\gamma = \frac{1}{2} \delta_{r,s}$$

Una integración por partes muestra que:

$$\int_0^{\pi} (\mu - \gamma) \operatorname{sen} (s\gamma) d\gamma =$$

$$= \frac{1}{s} [(\gamma - \mu) \operatorname{cosec} (s\gamma)]_0^{\pi} + \frac{1}{s} \int_0^{\pi} \left[\frac{d\mu}{d\gamma} - 1 \right] \cos (s\gamma) d\gamma \quad (4)$$

de (2), cuando $\gamma = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$

$$\gamma - \mu = 0$$

de manera que la cantidad entre corchetes cuadrados en (4) se hace 0, obteniéndose que:

$$\int_0^{\pi} (\mu - \gamma) \operatorname{sen} (s\gamma) d\gamma = \frac{1}{s} \int_0^{\pi} \cos (s\gamma) d\mu$$

sustituyendo estos resultados en (3) y tomando en cuenta (1), se obtiene:

$$C_s = \frac{2}{\pi s} \int_0^{\pi} \cos [s(\mu - c \operatorname{sen} \mu)] d\mu \quad (5)$$

expresión a partir de la cual Federico Bessel, definió:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (x \operatorname{sen} \theta - n\theta) d\theta \quad (6)$$

donde se hizo el cambio de variables $n = s$, $x = sc = n c$, $\theta = \mu$ de las ecuaciones (2), (5) y (6) se sigue:

$$\mu - \gamma = 2 \sum_{r=1}^{\infty} J_r(c r) \frac{\operatorname{sen}(r\gamma)}{r} \quad (7)$$

con objeto de obtener una expresión más general de la definición de funciones Bessel (6), ahora se puede mostrar que:

$$e^{1/2x(t - 1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \quad (8)$$

que es la definición de funciones Bessel empleada en el capítulo 2 y en el apéndice 2, haciendo $t = e^{\pm i\theta}$

$$e^{x \left(\frac{e^{\pm i\theta} - e^{\mp i\theta}}{2} \right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{\pm in\theta}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i \operatorname{sen} \theta \quad \frac{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{2} = -i \operatorname{sen} \theta$$

por tanto se tiene que:

$$e^{\pm ix \operatorname{sen} \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{\pm in\theta} \quad (9)$$

Si se multiplican ambos miembros de (9) por $e^{\pm im\theta}$ e integrando respecto a θ de 0 a 2π para $m = n$, se tiene:

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\mp im\theta} e^{\pm ix \operatorname{sen} \theta} d\theta$$

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(m\theta - x \operatorname{sen} \theta)} d\theta$$

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m\theta - x \operatorname{sen} \theta)} d\theta$$

por tanto

l.e.

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m\theta - x \operatorname{sen} \theta)} d\theta \quad (10)$$

que es una definición muy útil para las funciones Bessel.

Desarrollando la expresión (10) en términos de cosenos y senos, se tiene:

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m\theta - x \operatorname{sen} \theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(m\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

y

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(m\theta - x \operatorname{sen} \theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(m\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta \end{aligned} \quad (12)$$

Sumando las ecuaciones (11) y (12) se obtiene:

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \operatorname{sen} \theta - m\theta) d\theta \quad (13)$$

que corresponde a la expresión (6) definida por Federico Bessel.

Por lo tanto se concluye que la ecuación (8) se puede considerar como otra definición de las funciones Bessel.

APENDICE 2

LA TRANSFORMADA INVERSA DE HANKEL Y SU RELACION CON
LA TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER EN DOS VARIABLES

A partir de la expresión matemática que define a la transformada inversa de Fourier en dos variables:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(ux + vy)} du dv$$

expresada en coordenadas polares, como:

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) =$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} F(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) e^{i2\pi\rho r \cos(\theta - \phi)} \rho d\phi d\rho$$

y considerando

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) i^n e^{in\theta}$$

(consultar el apéndice 1)

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) =$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} F(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(2\pi r \rho) e^{in(\theta - \phi)} \right] \rho d\phi d\rho$$

si se expresa

$$F(u, v) = F(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m(\rho) e^{im\phi}$$

como un desarrollo en serie de Fourier y se sustituye en la expresión anterior, quedará:

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) =$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m(\rho) e^{im\phi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(2\pi r \rho) e^{in(\theta - \phi)} \rho d\phi d\rho$$

reordenando

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} G_m(\rho) \rho \, d\rho \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(2\pi r \rho) e^{in\theta} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\phi} \, d\phi$$

cuando $m = n$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{im\theta} 2\pi \int_0^{\infty} G_m(\rho) J_m(2\pi r \rho) \rho \, d\rho$$

expresión que relaciona a la transformada inversa de Fourier en dos variables $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ y la transformada de Hankel inversa de una función radial

$$2\pi \int_0^{\infty} G_m(\rho) J_m(2\pi r \rho) \rho \, d\rho$$

APENDICE 3

POLINOMIOS DE CHEBYCHEV

Las funciones especiales de la física matemática como los polinomios de Chebychev, las funciones Coseno, los polinomios de Legendre y otros, resultan en la solución de algunas ecuaciones diferenciales parciales (de segundo orden), sujetas a satisfacer ciertas condiciones límites, entonces, del análisis de Sturm-Liouville se sabe que estas soluciones serán ortogonales en su intervalo de definición. Dos funciones $q_m(x)$ y $q_n(x)$ se dice que son ortogonales con respecto a una función de peso $w(x)$ en el intervalo $[a, b]$ si

$$\int_a^b w(x) q_m(x) q_n(x) dx = 0$$

$$\int_a^b w(x) [q_m(x)]^2 dx = c(m) \neq 0$$

en general, c depende de m . Si estas relaciones se cumplen para toda m , la familia de funciones $\{q_k(x)\}$ constituye un conjunto de funciones ortogonales respecto a $w(x)$.

Las ecuaciones de Chebychev del tipo I

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + m^2 y = 0$$

y del tipo II

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + m(m+2)y = 0$$

admiten a $T_m(x)$ y $U_m(x)$ (polinomios de Chebychev) como

sus soluciones respectivas.

Los polinomios de Chebychev se definen como:

a) Del tipo I

$$T_m(x) = \cos [m \cos^{-1}(x)]$$

si $x = \cos \theta$

$$T_m(\cos \theta) = \cos m\theta$$

y también como:

$$T_m(x) = m/2 \sum_{n=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^{\lfloor \frac{m-n}{2} \rfloor} \frac{m!}{n!(m-2n)!} (2x)^{m-2n} =$$

$$x^m - \binom{m}{2} x^{m-2} (1-x^2) + \binom{m}{4} x^{m-4} (1-x^2)^2 - \binom{m}{6} x^{m-6} (1-x^2)^3 + \dots$$

o a partir de la definición, según la fórmula de recurrencia

$$T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x) \quad \text{con } T_0(x) = 1 \text{ y } T_1(x) = x$$

de la que se obtienen las expresiones

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

⋮

$$T_m(x)$$

las m raíces de $T_m(x)$ son reales, ocurren en el intervalo $[-1, 1]$ y están dados por:

$$\alpha_i = \cos \left[\frac{(2i-1)\pi}{2m} \right], \quad i = 1, 2, \dots, m$$

y las correspondientes raíces para $T_{m+1}(x)$, por:

$$x_i = \cos \left[\frac{(2i+1)\pi}{2m+2} \right]; \quad i = 0, 1, \dots, m$$

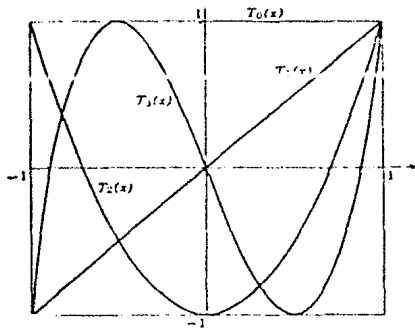


Figura 1. POLINOMIOS DE CHEBYCHEV DEL TIPO I.

b) Del tipo II

$$u_m(x) = \frac{\text{sen} [(m+1) \cos^{-1}(x)]}{\text{sen} [\cos^{-1}(x)]}$$

si $x = \cos \theta$

$$u_m(\cos \theta) = \frac{\text{sen} [(m+1)\theta]}{\text{sen } \theta}$$

y también como:

$$\begin{aligned} u_m(x) &= \sum_{n=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^n \frac{(m-n)!}{n!(m-2n)!} (2x)^{m-2n} \\ &= \binom{m}{1} x^{m-1} - \binom{m}{3} x^{m-3} (1-x^2) + \binom{m}{5} x^{m-5} (1-x^2)^2 - \dots \end{aligned}$$

o por la fórmula de recurrencia

$$u_{m+1}(x) = 2x u_m(x) - u_{m-1}(x) \quad \text{con } u_0(x) = 1 \quad \text{y} \quad u_1(x) = 2x$$

que determina las expresiones:

$$u_0(x) = 1$$

$$u_1(x) = 2x$$

$$u_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$u_3(x) = 8x^3 - 4x$$

$$u_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$u_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$

$$u_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$$

$$\vdots$$

$$u_m(x)$$

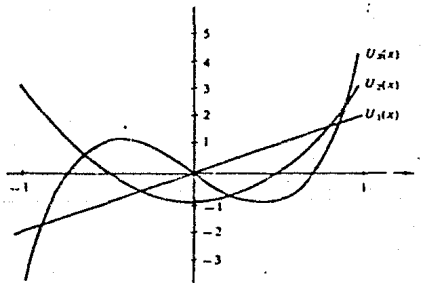


Figura 2. POLINOMIOS DE CHEBYCHEV DEL TIPO II $u_m(x)$.

c) Del tipo II modificados

$$v_{m+1}(x) = \sqrt{1-x^2} u_m(x)$$

es decir:

$$v_m(x) = \text{sen } [m \cos^{-1}(x)]$$

si $x = \cos \theta$

$$v_m(\cos \theta) = \text{sen } m\theta$$

también como:

$$v_m(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{n=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^n \frac{(m-n)!}{n!(m-2n)!} (2x)^{m-2n} =$$

$$\sqrt{1-x^2} \left\{ \binom{m}{1} x^{m-1} - \binom{m}{3} x^{m-3} (1-x^2) + \binom{m}{5} x^{m-5} (1-x^2)^2 - \dots \right\}$$

o por la fórmula de recurrencia

$$v_{m+1}(x) = 2x v_m(x) - v_{m-1}(x) \quad \text{con } v_0(x) = 0 \quad \text{y } v_1(x) = \sqrt{1-x^2}$$

es decir:

$$v_0(x) = 0$$

$$v_1(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$v_2(x) = 2x \sqrt{1-x^2}$$

$$v_3(x) = (4x^2 - 1) \sqrt{1-x^2}$$

$$v_4(x) = (8x^3 - 4x) \sqrt{1-x^2}$$

$$v_5(x) = (16x^4 - 12x^2 + 1) \sqrt{1-x^2}$$

$$v_6(x) = (32x^5 - 32x^3 + 6x) \sqrt{1-x^2}$$

$$\vdots$$

$$v_m(x)$$

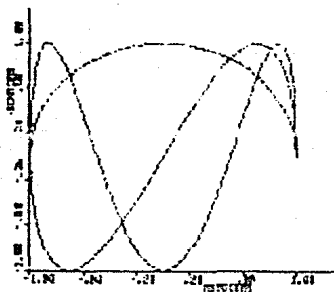


Figura 3. GRAFICA DE LOS POLINOMIOS DE CHEBYCHEV DEL TIPO II MODIFICADO.

ORTOGONALIDAD.

De la forma auto adjunta de las ecuaciones diferenciales de Chebychev se obtiene el factor de peso

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

para los polinomios de Chebychev del tipo I y del tipo II modificados y

$$w(x) = \sqrt{1-x^2}$$

para los polinomios de Chebychev del tipo II.

Las integrales de ortogonalidad resultantes son:

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) (1-x^2)^{-1/2} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \pi/2 & m = n \neq 0, \\ \pi & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 V_m(x) V_n(x) (1-x^2)^{-1/2} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \pi/2 & m = n \neq 0, \\ 0 & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 u_m(x) u_n(x) (1-x^2)^{1/2} dx = \pi/2 \delta_{m,n}$$

Una forma simple y más útil para la evaluación numérica de las funciones $\cos m\theta$ en el intervalo de $0 \leq \theta \leq \pi$ lo proporcionan el conjunto de polinomios de Chebychev del tipo I

$$T_m(x) = \cos m\theta, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

generados de las secuencias de las funciones coseno utilizando la transformación

$$\theta = \cos^{-1}(x)$$

Claramente $T_0(x) = \cos(0) = 1$.

Si $m = 1$, se puede escribir

$$T_1(x) = \cos \theta = \cos [\cos^{-1}(x)] = x$$

para encontrar $T_2(x)$, el polinomio de Chebychev de grado

dos se aplica la identidad trigonométrica,

$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ y se obtiene:

$$\cos 2\theta = \cos [2 \cos^{-1}(x)] = 2 \cos^2 [\cos^{-1}(x)] - 1$$

6

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

En general, aplicando repetidamente la identidad trigonométrica

$$\cos m\theta = 2 \cos \theta \cos (m-1)\theta - \cos (m-2)\theta$$

Se pueden calcular los polinomios de Chebychev del tipo I de orden m , obteniéndose la fórmula de recurrencia

$$T_m(x) = 2x T_{m-1}(x) - T_{m-2}(x)$$

APENDICE 4

RESISTIVIDAD APARENTE DIPOLAR
COMO TRANSFORMADA DE HANKEL

A partir de la expresión (Alpin 1966, Patella 1974):

$$\rho_a^D(r) = \rho_a^S(r) - \frac{r}{\alpha} \frac{d\rho_a^S(r)}{dr} \quad A$$

se obtiene (Patella 1975, Das y Ghosh 1973, Patella y Schiavone 1976):

$$\rho_a^D(r) = \frac{r^2}{\alpha} \int_0^{\infty} T_1^S(\lambda) [(\alpha - 1)J_1(r\lambda) - \lambda r J_0(\lambda r)] \lambda \, d\lambda \quad 1$$

Patella, 1980 propone un desarrollo para expresar la ecuación anterior como

$$\rho_a^D(r) = r^2 \int_0^{\infty} T_1^D(\lambda) J_1(r\lambda) \lambda \, d\lambda \quad 2$$

para la cual siempre es posible encontrar un función kernel $T_n^D(\lambda)$, a continuación se describe tal desarrollo matemático:

Expresando la ecuación (1) en dos partes, como sigue:

$$\begin{aligned} \rho_a^D(r) &= \\ &= \frac{r^2}{\alpha} \int_0^{\infty} T_1^S(\lambda) (\alpha - 1) J_1(\lambda r) \lambda \, d\lambda - \frac{r^2}{\alpha} \int_0^{\infty} \lambda r T_1^S(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda \, d\lambda \quad 3 \end{aligned}$$

$$A(r) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2 r^2 \int_0^{\infty} T_n^S(\lambda) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad 4$$

y

$$B(r) = -(r^3/\alpha) \int_0^{\infty} \lambda T_n^S(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad 5$$

entonces

$$\rho_a^D(r) = A(r) + B(r) \quad 6$$

de (4) y (5) se obtiene:

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) \frac{A(r)}{r^2} = \int_0^{\infty} T_n^S(\lambda) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad 7$$

y

$$-\alpha \frac{B(r)}{r^3} = \int_0^{\infty} [\lambda T_n^S(\lambda)] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad 8$$

La aplicación del teorema de la transformada de Hankel, que establece:

$$\text{si} \quad G(r) = \int_0^{\infty} g(\lambda) J_n(\lambda r) \lambda d\lambda \quad 9$$

entonces

$$g(\lambda) = \int_0^{\infty} G(r) J_n(\lambda r) r dr \quad 10$$

da, para (7) y (8):

$$T_n^S(\lambda) = \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) \frac{A(r)}{r^2} \right] J_1(\lambda r) r dr \quad 11$$

y

$$\lambda T_n^S(\lambda) = \int_0^{\infty} \left[-\alpha \frac{B(r)}{r^3} \right] J_0(\lambda r) r dr \quad 12$$

tomando la derivada respecto a λ en ambos miembros de (12) y recordando que:

$$\frac{d}{dx} \left[x^{-n} J_n(x) \right] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad 13$$

El resultado es:

$$T_n^S(\lambda) + \lambda \frac{dT_n^S(\lambda)}{d\lambda} = \int_0^\infty \alpha \frac{B(r)}{r} J_1(\lambda r) dr \quad 14$$

Entonces, de (11) se obtiene:

$$\left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right] T_n^S(\lambda) = \int_0^\infty \frac{A(r)}{r} J_1(\lambda r) dr \quad 15$$

y de (14)

$$\frac{T_n^S(\lambda)}{\alpha} + \frac{\lambda}{\alpha} \frac{dT_n^S(\lambda)}{d\lambda} = \int_0^\infty \frac{B(r)}{r} J_1(\lambda r) dr \quad 16$$

sumando (15) y (16), se obtiene:

$$T_n^S(\lambda) + \frac{\lambda}{\alpha} \frac{dT_n^S(\lambda)}{d\lambda} = \int_0^\infty \left[\frac{A(r) + B(r)}{r} \right] J_1(\lambda r) dr \quad 17$$

Considerando (6), y poniendo:

$$T_n^D(\lambda) = T_n^S(\lambda) + \frac{\lambda}{\alpha} \frac{dT_n^S(\lambda)}{d\lambda} \quad 18$$

se obtiene:

$$T_n^D(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\rho_a^D(r)}{r} J_1(\lambda r) dr \quad 19$$

aplicando el teorema de la transformada de Hankel (9) y (10) a (19), se tiene:

$$\rho_a^D(r) = r^2 \int_0^\infty T_n^D(\lambda) J_1(r\lambda) \lambda \, d\lambda \quad 20$$

que es igual a la expresión (2), con lo que el teorema queda demostrado.

Al nuevo kernel $T_n^D(\lambda)$ se le define "función de transformada de resistividad dipolar".

BIBLIOGRAFIA

1. Anderson W. L. 1979, Computer program. Numerical integration of the related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital fitting, Geoph. 44, 7, 1287-1305.
2. Apostol T. 1967, Cálculo, v. 1.
3. Apuntes de álgebra. 1976, Facultad de Ingeniería, UNAM.
4. Arfken George. 1970, Mathematical methods for Physicists.
5. Arsac J. 1966, Fourier transforms & the theory of distributions.
6. Aseltine, J. A. Les méthodes de transformation dans L'analyse des systemes lineaires.
7. Ayres F. Teoría y problemas de matrices. Schaum's.
8. Backus M. and Chen R. 1975, Flat spot exploration. Geoph. Pros. 23, 533-577.
9. BenOliel S. D., Schneider W. A. and Shurtleff R. N. 1987, Frequency wave number approach of the τ - p transform: some applications in seismic data processing.
10. Birkhoff G., et. al. Ordinary Differential equations.
11. Bracewell R. 1978, The Fourier transforms & its applications.
12. Brigham E. O. 1974, The fast Fourier transform.

13. Candel S. M. 1981, An algorithm for the Fourier-Bessel transform. Computer physics communications 23, 343-353.
14. Candel S. M. Dual algorithms for fast calculations of the Fourier-Bessel transform. IEEE trans. acoust. speech and signal processing 29, 5.
15. Cavanagh E. and Bill D. 1979, Numerical evaluation of Hankel transforms via Gaussian-Laguerre polynomial expansions. IEEE trans. on acoust. speech and signal processing.
16. Chávez Castellanos Héctor. 1987, Continuación analítica ascendente a través de la integral de Neuman.
17. Chave Alan D. 1983, Numerical integration of related Hankel transforms by quadrature and continued fraction expansion. Geoph. 48 Nº 12, 1671-1686.
18. Churchill Ruel Vance. 1972, Operational Mathematics.
19. Colombo Serge. 1959, Les transformations de Mellin et de Hankel.
20. Crowther, et. al. 1970, Three dimensional reconstructions of spherical viruses by Fourier Synthesis from electron micrographs. Nature vol. 226, May 2, 1970.
21. Davis. Integral Transforms and their applications.
22. Davis Harry. Fourier series and orthogonal functions.
23. Duff G. and Naylor D. 1966, Differential equations and applied mathematics.

24. Frisk G., Oppenheim A., Martínez D. R. 1980, A technique for measuring the plane-wave reflection coefficient of the ocean bottom. Jour. Acoust. Soc. Am., Vol. 68 N° 2.
25. Fuchs K. 1971, The method of stationary phase applied to the reflection of spherical waves, Zeitschrift für Geophysik 37, 89-117.
26. Fuchs and Müller G. 1971, Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations. Geoph. Jour. of the Roy. Ast. Soc., vol. 23, 417-433.
27. Gaskill. 1978, Linear systems, Fourier transforms & Optics.
28. Geiger N. and Nutall J. M. The ranges of the α particles from various radioactive substances and a relation between range and period of transformation. Phil. Mag. 22, 613 (1911).
23, 439 (1912).
24, 647 (1912).
29. Ghosh D. P. 1970, Ph. D. The application of linear filter theory to the direct interpretation of Geoelectrical resistivity measurements.
30. Goodman, Joseph. Introduction to Fourier optics.
31. Gröbner W. and Hofreiter N. 1966, Integrallafel, Zweiter Teil: Bestimmte Integrale, Springer-Verlag, Wien, New York, vol. 2.
32. Hammermesh M. Group theorie and its applications to physical problems.

33. Hansen Erick W. 1983, New algorithm for Abel inversions and Hankel transforms. Proc. of IEEE international conference on acoustics, speech and signal processing.
34. Hansen Erik. 1985, Fast Hankel transform Algorithm. IEEE trans. acoust. speech and signal processing, vol. 33 No 3.
35. Herman G. Image reconstruction from projections.
36. Kaplan J. 1955, Nuclear Physics. Adison wesley.
37. Hsu Hwei P. 1973, Análisis de Fourier. Fondo Educativo Interamericano.
38. Hatz Miron Bernard. Image reconstruction from projections.
39. Levi Enzo. 1965, Teorías y métodos de las matemáticas aplicadas.
40. Otto Koefoed. 1979, Geosoundings Principles I.
41. Kind R. 1976, Computation of Reflection Coefficients for layered media. Jour. of Geoph. 42, 191-200.
42. Kreider Donald. An introduction to linear analysis.
43. Lee Y. W. 1967, Statical theory of communications. John Wiley.
44. Meskó. 1984, Digital filtering applications in Geophysical exploration of oil.
45. Miles John W. Integral transforms in applied mathematics.

46. Muller G. 1971, Direct inversion of seismic observations. Zeit. für Geophys, vol. 37, 225-235.
47. Nettleton L. L. 1976, Gravity and magnetics in oil prospecting.
48. Odegard M. E. and Gerg J. W. 1965, Gravity interpretation using the Fourier integral. Geoph. 30, 424-438.
49. Oppenheim A. V., Frisk G. V. and Martínez D. R. 1978, An algorithm for the numerical evaluation of the Hankel transform. Proceedings of the IEEE 66, 264-265.
50. Oppenheim, et. al. 1980, Jour. Acoust. Soc. Amer. 68 Nº 2.
51. Orellana E. 1982, Prospección geoelectrica en corriente continua.
52. Papoulis A. Systems and transforms with applications in optics, 1968.
53. Papoulis A. 1984, Signal analysis.
54. Patella D. 1974, On the transformation of dipole to Schlumberger sounding curves. Geoph. Prosp. vol. 22, 315-329.
55. Patella D. 1975, A numerical computation procedure for the direct interpretation of geoelectrical soundings. Geoph. Prosp. vol. 23, 335-362.
56. Patella D. 1980, The quantitative interpretation of dipole soundings by means of the resistivity transform function. Geoph. Prosp. 28, 956-960.

57. Patella D. 1980, The interpretation of the vertical fault problem in geoelectrics using Hankel integral. Geoph. Prosp. vol. 28, 961-966.
58. Patella D. 1980, Gravity interpretation using the Hankel transform. Geoph. Prosp. vol. 28, 744-749.
59. Ramos Ramos María Bricia. Análisis sobre una generación de transformadas lineales vectoriales y funcionales. Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM, 1972.
60. Rattey Paul A. and Lindgreen A.G. 1981, Sampling the 2-D Radon transform. IEEE trans. acoust. speech and signal processing, vol. 29 Nº 5.
61. Relton F. E. Applied Bessel Functions.
62. Robinson E. and Silvia Manuel. 1981, Digital foundations of time series analysis, vol. 2.
63. Rojas Anguiano Pedro y Terrazas Amador E. H. 1985, Interpretación automática de sondeos eléctricos verticales en el dominio de la función Kernel. Tesis, Facultad de Ingeniería, UNAM.
64. Sargent B. W. 1933, The maximum energy of the β rays from uranium X and other bodies. Proc. Roy. Soc. (London) A139 G59 (1933).
65. Sheriff R. 1984, Encyclopedia dictionary of exploration. Geophysics, S.E.G.
66. Sheriff R. and Geldart. 1985, Exploration seismology. vol. 1 and vol. 2.
67. Snnedon Ian. Fourier transform.

68. Snnedon Ian. The use of integral transforms.
69. Snnedon Ian N. 1980, Special functions of mathematical Physical and Chemistry.
70. Telford M., Geldart P., Sheriff E. and Keys D. 1981, Applied Geophysics. Cambridge University Press.
71. Tranter C. J. 1961, Integral transforms in mathematical physics. Methven & Co. Ltd. (London) John Wiley & Sons Inc. (New York).
72. Treitel S., Gutowsky P. R. and Wagner D. E. 1982, Plane wave decomposition of seismograms. Geoph. 47, 1375-1401.
73. Vladimir Baranov. 1975, Potential fields an their transformations in applied Geophysics.
74. Watson G. N. A treatise of the theory of Bessel functions.
75. Weinberger. 1965, A first course in partial equations with complex variables and transform methods. Blaisdell Publishing company.
76. Wilson C. R. 1986, The Abel-Fourier method of Hankel transformation: Applications to seismic data. Geoph. Prosp. 34, 545-568.
77. Wolf Bernardo. 1971, Funciones especiales y transformadas integrales. Vol. 1 y vol. 2. CIMASS, Facultad de Ciencias, UNAN.
78. Wolf Bernardo. 1979, Integral transforms in Science and engineering. Plenum Press, New York and London.