

01168
lej. 1

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
SECCION DE INVESTIGACION DE OPERACIONES

TESIS QUE PRESENTA EL
ING. JOSE VILLANUEVA LEDESMA
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA (INVESTIGACION DE OPERACIONES)
CREDITOS POR TESIS 12

JURADO:

PRESIDENTE: DR. FELIPE OCHOA ROSSO *F. Ochoa*

VOCAL DR. SERGIO FUENTES MAYA *S. Fuentes*

SECRETARIO DR. JOSE DE J. ACOSTA FLORES *J. Acosta*

SUPLENTE M. en I. FUHED SUCAR SUCAR *F. Sucar*

SUPLENTE M. en I. MANUEL SANCHEZ VALDENEGRO *M. Sanchez*

JEFE DE LA SECCION

G. Rocha Beltran
M. en I. GUSTAVO ROCHA BELTRAN

EL SECRETARIO ACADEMICO

S. Tirado Ledesma
ING. SERGIO TIRADO LEDESMA

Ciudad Universitaria, Julio de 1981.

01168
1981

VALIDO CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

CAPITULO I. CONCEPTOS GENERALES.

Objetivo	2
Introducción	5
Problema de optimización.	7
Programación no lineal	8

CAPITULO II. INTRODUCCION A LA PROGRAMACION GEOMETRICA.

Introducción	11
Desigualdades	13
Teorema de las medias con peso	17
Aplicación a problemas de máximos y mínimos	22
Fórmulas particulares	25
Formulación matemática de la programación geométrica	33
Conceptos básicos y técnicas de la programación geométrica	37
Programa primal y programa dual	37 - 38

CAPITULO III. BASES MATEMATICAS.

Programación Lineal	47
Lema de Farkas	51
Demostración geométrica del Lema de Farkas	56
Teorema de Tucker	59
Programa Lineal primal	65
Programa Lineal dual	66
Teorema de dualidad en la programación lineal	76
Conjuntos convexos	78
Conjuntos conexos	80
Hiperplano	86
Envolvente convexa. Poliedro convexo	89
Funciones convexas	90
Comportamiento de una superficie en un punto	92
Máximos y mínimos. Punto silla	97
Condiciones suficientes para un extremo local en E^n	100
Valores característicos y teoremas básicos	101
Método de los multiplicadores de Lagrange	110

CAPITULO IV. INTRODUCCION A LA DUALIDAD EN PROGRAMACION GEOMETRICA (FASE INFORMATIVA).

Consistencia y Superconsistencia	114
Primer teorema de dualidad. Teorema 34	115
Segundo teorema de dualidad. Teorema 35	117
Programa primal transformado (P P A z)	118
Teorema de convexidad	120
Programa dual transformado (P D B r)	124
Teorema de concavidad	126
Procedimientos sistemáticos	129
Apéndice I	143
Apéndice II	234

C A P I T U L O I

CONCEPTOS GENERALES.

OBJETIVO

En el ejercicio de la docencia, dentro de área de las matemáticas aplicadas, sobre todo en los cursos propedeúticos de las maestrías en ciencias o en ingeniería, profesores y alumnos advierten la falta de textos de nivel más elevado al considerado en los programas de las licenciaturas, pero sin llegar a ser verdaderos tratados. La carencia más sentida es la relativa a la exposición de los métodos deductivos de prueba. La lógica se considera la base donde descansan las otras ciencias, ya que en todo razonamiento intervienen conceptos del dominio de la lógica: toda conclusión correcta se halla de acuerdo con las leyes de esta disciplina; no por esto el conocimiento exhaustivo de la lógica es condición necesaria para el recto pensar. Sin embargo no cabe la más remota duda de que el conocimiento de los métodos deductivos de prueba posee gran importancia práctica para aquel que anhele (o su ejercicio profesional lo requiera) pensar y concluir correctamente, pues perfecciona las facultades innatas o adquiridas y permite evitar errores en casos especialmente críticos. Conocer los métodos empleados en la edificación de la matemática es de suma importancia: sin su conocimiento es imposible aprender la naturaleza de dicha ciencia.

Con arreglo a un plan puramente tentativo, se elabora este trabajo con la finalidad de poner de relieve la estructura lógica que subyace en las compactas explicaciones de los tratados acerca de las materias consideradas básicas en la programación no lineal. En la mayoría de los textos muy acreditados se soslayan las aclaraciones acerca de la urdimbre lógica, entre la que se traman los desarrollos de las demostraciones, las explicaciones o las interpretaciones, porque los especialistas -- acostumbrados a escribir para especialistas, suponen que la organización lógica, no sólo es evidente, sino que ocuparse de ta

les asuntos es bajar a niveles de lo trivial.

Lo amplio del tema obligó a seguir el ejemplo de Béla -- Martos en su magnífica obra: Non Linear Programming Theory And - Methods, en la que sólo se ocupa del aspecto determinista; además se reconoce que para lograr un verdadero texto es preciso agregar le una gran cantidad de ejemplos y ejercicios de los cuales apenas se desarrolla una mínima parte. Tal vez con más optimismo - que fundamento, se espera que este ensayo pueda servir de base - para elaborar un verdadero texto.

I N T R O D U C C I O N

INTRODUCCION

Opinan algunos filósofos que una de las más notables -- características del comportamiento humano, es la de establecer ciertas líneas de conducta (que en el lenguaje científico se conocen con el nombre de cursos de acción) reputadas como las más idóneas para lograr determinados resultados considerados como los más prometedores. Otra forma de conceptualizar esta particularidad se refiere a la capacidad de un individuo o una corporación planificadora de examinar un conjunto de soluciones factibles propuestas para resolver un problema con el propósito de elegir (del conjunto factible) las que se piensa permitirán el cumplimiento de condiciones que ayudan a lograr ventajas, quizá por mucho tiempo anheladas.

El conjunto de personas encargadas de indicar la sucesión de acciones a seguir, recurriendo a los métodos que la ciencia aconseja, en ocasiones tienen la facultad de tomar decisiones por lo que brevemente se hará referencia a ellas con el nombre de "el elector" quien tiende a maximizar la utilidad esperada o a minimizar los perjuicios derivados de circunstancias adversas implicadas en el proceso de efectuar el curso de acción elegido.

Obviamente los contenidos de los conceptos de utilidad y daño, contienen fuertes matices subjetivos debido a que la utilidad de un bien o servicio consiste en su capacidad de satisfacer alguna necesidad humana que bien puede ser de índole subjetiva. Examine con detenimiento los ejemplos: algunos hombres para realizarse plenamente, para cristalizar sus deseos de perfección optan por seguir una conducta que, según su criterio, maximiza el bien o minimiza el mal, lo cual significa que observan una conducta óptima. Análogamente, cuando el gerente de una empresa arriesga una decisión acerca de la forma de satisfacer

una demanda, debe elegir el mejor curso de acción, según su criterio, la mayoría de las veces considerando la presencia de factores restrictivos y el impacto del azar.

En ambos ejemplos de inmediato afloran las interrogantes ¿cuál es el contenido del concepto "el mejor curso de acción" ?- ¿cómo descubrir los mejores procedimientos para alcanzar los estados anhelados? Evidentemente en las respuestas se deben excluir todos los aspectos subjetivos; para lograrlo y evitar posturas personales se ofrece como respuesta el procedimiento:

1. Postular un conjunto de objetivos y metas, que es una de las formas de declarar ciertas finalidades, determinados propósitos, que al cumplirse se espera sirvan de ayuda para que los beneficios esperados dejen de ser anhelos y se conviertan en bienes tangibles permanentes.
2. Se construye el conjunto de todas las soluciones viables considerando los factores restrictivos. Hay investigadores que al conjunto de soluciones o conjunto de factibilidad acorde con los factores restrictivos les llaman, soluciones restringidas.
3. Se establece un método cuantitativo que permita valorar la intensidad o grado en el cual cristalizan las citadas finalidades en cada una de las opciones factibles, en otras palabras resulta indispensable contar con un método que permita obtener una medida de la utilidad en relación a los objetivos, que reporta cada uno de los cursos de acción factibles. Desde el punto de vista matemático es una función que asigna a cada curso de acción un número real, el coeficiente de mérito, que mide la bondad de cada curso de acción factible respecto al logro de objetivos y metas.

- 4.-En base de la información anterior el elector se halla en posición de seleccionar la opción en la cual se realizan en la mayor cuantía los objetivos y metas que se persiguen.

En resumen una teoría cuantitativa aplicable a la toma -- óptima de decisiones se ocupa del estudio de los métodos matemáticos para hallar los óptimos de cierta función objetivo con la condición de satisfacer un conjunto de restricciones.

PROBLEMA DE OPTIMIZACION

A partir de un conjunto de soluciones factibles, tal vez infinito, asociado a cierta problemática, se da el nombre de problema de optimización al planteado a un elector para que determine la línea de conducta a seguir, que maximice el coeficiente de mérito. Algunos autores, a la formulación matemática de un problema de optimización le dan el nombre de programación, de aquí - los nombres de programación lineal, programación geométrica, programación estocástica, etc.

En las aplicaciones los objetivos más comunes son minimizar costos (o pérdidas) o maximizar utilidades.

La mayoría de los problemas de optimización no resultan sencillos, los hay de estructuras complicadísimas y completamente diferentes por lo cual es imposible resolverlos todos con un sólo método matemático. Las técnicas analíticas empleadas en su solución además de respetar las restricciones, toman en cuenta el carácter incontrolable del azar o incertidumbre que numéricamente - matiza la probabilidad; de acuerdo con este concepto se clasifican los problemas en probabilistas o deterministas.

Asimismo hay veces que se debe tomar en cuenta el número-

de variables implicadas en el planteo del problema así como su número de términos, factores que estructuran la complejidad del problema. En muchas aplicaciones la problemática se debe contemplar desde el punto de vista estático, cuando no se toma en consideración al tiempo y el dinámico cuando se le considera. En otras ocasiones se examinan los problemas bajo condiciones de competencia perfecta o imperfecta. Por su formulación cuantitativa el problema puede ser lineal o no lineal. En particular los problemas de programación geométrica son modelos de programación no lineal que pueden ser de optimización restringida o irrestricta.

PROGRAMACION NO LINEAL (PNL)

Los problemas de PNL se presentan en muchísimas formas, sus aplicaciones se encuentran en los campos de la física, la ingeniería, la economía, la administración, las matemáticas y otros más. En el contexto matemático su planteo toma la configuración:

1. La función $f : V_1 \rightarrow V_2$ tiene su dominio en el espacio R^n y su codominio en el espacio R^m ; cuando $n=m=1$ la función se halla valuada en los reales. Si $n=1$ y $m > 1$ se trata de una función vectorial de variable real. Cuando $n > 1$ y $m = 1$ entonces, se tiene un campo escalar o función de punto; con este tipo de funciones se expresan las funciones objetivo (aquellas que expresan las finalidades deseadas) $f(\bar{x})$ donde $\bar{x} \in R^n$ con $n > 1$
2. La finalidad del problema de PNL es determinar el conjunto $\{\bar{x}^*\}$ cuyos elementos maximizan a $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$

3. No siempre se pueden elegir $\bar{x}^*$ irrestrictamente, en la mayoría de los casos los elementos $\bar{x}^*$ son puntos de la intersección de los conjuntos definidos por funciones $g_i(\bar{x})$, $i = 1, \dots, m$ en las que $g_i: R^n \rightarrow R^1$ de forma que

$$g_i(\bar{x}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

desigualdades que constituyen el conjunto de restricciones y los puntos $\bar{x}^*$ reciben el nombre de óptimos.

4. En resumen el planteo de un programa de PNL toma la conformación prototípica

$$\text{Maximizar} \quad f(\bar{x})$$

$$\text{Sujeta a} \quad g_i(\bar{x}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

5. La intersección de los conjuntos $g_i(\bar{x}) \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ se llama región factible a la que se hace referencia con el signo R_f y se le impone la condición $R_f \neq \emptyset$

La definición anterior de un problema de PNL pone de relieve el principal objetivo: determinar los métodos para calcular los puntos óptimos $\bar{x}^*$ dentro de la región de factibilidad. Los métodos encaminados al logro de este fin requieren exponer ciertos principios matemáticos, que poco a poco se van intercambiando en el texto, después de advertir la necesidad de la teoría, ya que sin su auxilio es imposible lograr las soluciones óptimas que exige la práctica, en particular el moderno diseño de ingeniería.

C A P I T U L O I I

INTRODUCCION A LA PROGRAMACION GEOMETRICA

INTRODUCCION.

De primera intención puede suponerse que al iniciar un posible texto introductorio sobre programación geométrica, el punto de partida obligado es la definición clara, precisa, recortada de esta técnica de optimización; pero, según el criterio del maestro Manuel García Morente, resulta inútil comenzar con una definición que los neófitos atentos y perseverantes no puedan entender plenamente. De nada vale fijar de antemano en qué consiste un método cuya finalidad es optimizar; como en general resulta vano definir una ciencia o cualquier disciplina, antes de entrar directamente en el trabajo de hacerla.

Una ciencia, un arte toda actividad que los humanos desarrollan recibe su concepto cierto, su noción exacta cuando el hombre ha dominado ese hacer. Sólomente se sabrá qué son las matemáticas aplicadas cuando se tenga la vivencia del cotidiano hacer matemáticas con el propósito de resolver los problemas que aquejan a nuestros semejantes.

Se podía presentar, como una buena justificación, para estudiar la programación geométrica el dictamen de algunos de los más destacados profesionales del diseño de ingeniería, quienes opinan que los métodos clásicos para optimizar, indudablemente los más conocidos, no se ajustan bien a los problemas prácticos de diseño, a causa de las restricciones que la realidad impone, las cuales lejos están de ser lineales; pero a continuación informan, quizá con entusiasmo bien fundado, que la programación geométrica ha cambiado el panorama porque uno de sus principales atributos es transformar un problema de programación matemática con desigualdades restrictivas no lineales, en otro problema restringido solamente por igualdades lineales. En la práctica este atributo tiene un significado profundo: ya no es necesario simplificar los modelos empleando sólo restricciones lineales, la mayoría de las veces muy cuestionables, ahora se pueden mejorar los citados modelos, sometiéndolos a restricciones no linea-

les sin incrementar en gran cuantía la complejidad de la solución.

Estas importantes consideraciones de los más respetables profesionales dejan en el principiante cierto vacío; al no contar con los conocimientos suficientes para valorarlas se sienten inmersos en una situación confusa; tal vez les parezcan estas opiniones hijas de la pasión, acaso de la reserva o la cautela y resulte aún más útil la programación geométrica. En este punto es cuando vemos la imperiosa necesidad de seguir el pensamiento del maestro -- García Morente y se deja la definición de la programación para después de haber concluido cierto recorrido conceptual y en esta forma, ya en posesión de suficientes conocimientos, sea obvio su pleno sentido a los iniciados perseverantes. De inmediato se emprende la labor expositiva.

P O S I N O M I O S .

El campo escalar $g: E^p \rightarrow E^1$ determinado con la ecuación.

$$g = u_1 + \dots + u_n \text{ donde } u_i = a_i x_1^{b_{i1}} x_2^{b_{i2}} \dots x_p^{b_{ip}}, \quad i=1, \dots, n$$

los coeficientes a_i son números reales positivos y los exponentes b_{ij} simplemente reales. Además el dominio de g se restringe a valores positivos de las variables x_j , $j=1, \dots, p$. En estas condiciones la función g recibe el nombre de posinomio.

En un sentido muy amplio, la programación geométrica trata de minimizar un posinomio g , sujeto a ciertas restricciones; a este problema se le da el nombre de programa primal, más adelante se mostrarán las relaciones que tiene este problema con otro llamado programa dual.

La teoría de la programación geométrica utiliza muchas de las propiedades de las desigualdades con fines optimizantes investigación que viene de lejos. Desde los tiempos de Pedro de Fermat (1601-1665) muchos investigadores notables observaron que algunas desigualdades se podían utilizar en la solución de problemas de optimización pero no formularon una teoría a este respecto.

DESIGUALDADES

TEOREMA 1: DE WEIERSTRASS.

Hipótesis: Los números positivos $a_1, \dots, a_n$ son menores que 1 y $S_n = a_1 + \dots + a_n$.

Afirmación: $1 - S_n < (1 - a_1) \dots (1 - a_n) < \frac{1}{1 + S_n}$

$$1 + S_n < (1 + a_1) \dots (1 + a_n) < \frac{1}{1 - S_n}$$

donde $S_n < 1$.

Demostración

De inmediato se ve que

$$(1 - a_1)(1 - a_2) = 1 - a_1 - a_2 + a_1 a_2 > 1 - (a_1 + a_2)$$

$$(1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3) > (1 - a_1 a_2)(1 - a_3) > 1 - (a_1 + a_2 + a_3)$$

Si se utiliza el método de la inducción matemática, fácilmente se prueba que

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n) > 1 - S_n.$$

Análogamente

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) > 1 + S_n$$

Por otra parte, es evidente que $(1 - a_i)(1 + a_i) = 1 - a_i^2$ por consiguiente, si $0 < a_i < 1$, entonces se tiene

$$1 - a_1 < \frac{1}{1 + a_1}, \text{ análogamente, } 1 + a_1 < \frac{1}{1 - a_1}$$

$$1 - a_2 < \frac{1}{1 + a_2}, \text{ asimismo, } 1 + a_2 < \frac{1}{1 - a_2}$$

.....

$$1 - a_n < \frac{1}{1 + a_n}, \text{ también } 1 + a_n < \frac{1}{1 - a_n}$$

Según la hipótesis, se pueden multiplicar miembro a miembro estas desigualdades, en consecuencia

$$\begin{aligned} (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) &< \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} < \frac{1}{1+s_n} \\ \text{y si } s_n < 1 \\ (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) &< \frac{1}{(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)} < \frac{1}{1-s_n} \end{aligned}$$

□ DET

TEOREMA 2: DE LAS MEDIAS ARITMÉTICA Y GEOMÉTRICA.

Hipótesis 1: Los números $T_1 = \{a_1, \dots, a_n\}$ son reales positivos diferentes

Hipótesis 2: $A_1 = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$, $B_1 = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$ son respectivamente la media aritmética y la geométrica.

Afirmación: $A_1 > B_1$

Demostración

Por el axioma de completitud en los reales, hay una frontera superior a_1 y una inferior a_2 en el conjunto T_1 , por consiguiente

$$na_1 > a_1 + a_2 + \dots + a_n > na_2, \text{ o bien, } a_1 > A_1 > a_2$$

Obviamente $a_1 + a_2 > A_1$, luego $b_1 = a_1 + a_2 - A_1 > 0$ (1)

Se considera ahora el conjunto $T_2 = \{A_1, b_1, a_3, \dots, a_n\}$

donde se cumple $A_1 b_1 - a_1 a_2 = A_1(a_1 + a_2 - A_1) - a_1 a_2 =$

$$\begin{aligned} &= A_1 a_1 + a_2 A_1 - A_1^2 - a_1 a_2 = a_1(A_1 - a_2) - A_1(A_1 - a_2) \\ &= (a_1 - A_1)(A_1 - a_2) \end{aligned}$$

Como $a_1 > A_1 > a_2$ resulta $A_1 b_1 - a_1 a_2 > 0$ (2)

De (1) y (2) resulta $a_1 + a_2 = A_1 + b_1$, $A_1 b_1 > a_1 a_2$ en consecuencia los conjuntos T_1 y T_2 tienen la misma media aritmética A_1 , pero la media geométrica B_2 de T_2 es mayor que B_1 , la media geométrica de T_1

Si los números de T_2 no son iguales, se repite el proceso; el mayor se sustituye por la media aritmética A_1 y el menor por $M_2 + m_2 - A_1$, donde M_2 es el número mayor y m_2 el menor de T_2 , al final de estas operaciones se tiene un nuevo conjunto T_3 donde hay dos números iguales a la media A_1 . En este conjunto T_3 , la media aritmética es A_1 y la geométrica B_3 es mayor que B_2 : $B_1 < B_2 < B_3$.

Al repetir este procedimiento n veces se obtiene el conjunto $T_{n+1} = \{A_1, A_1, \dots, A_1\}$ cuyos elementos son todos iguales a la media A_1 del conjunto original y cuya media geométrica B_{n+1} es mayor que la media geométrica B_n del conjunto anterior T_n ; pero $B_{n+1} = A_1$ en consecuencia

$$B_1 < B_2 < B_3 < \dots < B_n < B_{n+1} = A_1, \text{ ó bien } B_1 < A_1,$$

EDET.

TEOREMA 3

Hipótesis: Se conoce la suma de los n sumandos

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

Afirmación: $n^n > 1(3)5(7)\dots(2n-1)$

Demostración

Por el teorema de las medias

$$\frac{1+3+5+\dots+2n-1}{n} > \sqrt[n]{1(3)5(7)\dots(2n-1)}$$

Conforme a la hipótesis, $n > \sqrt[n]{1(3)5(7)\dots(2n-1)}$
en consecuencia $n^n > 1(3)5(7)\dots(2n-1)$

EDET.

TEOREMA 4.

Hipótesis: Los n números $a_1, \dots, a_n$ son positivos y

$$b = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n-1} = \frac{S}{n-1}$$

Afirmación: $a_1 a_2 \dots a_n \geq (n-1)^n (b-a_1)(b-a_2) \dots (b-a_n)$

Demostración

Conforme a la hipótesis

$$b - a_1 = \frac{S}{n-1} - a_1, \quad b - a_2 = \frac{S}{n-1} - a_2, \dots, \quad b - a_n = \frac{S}{n-1}$$

por consiguiente

$$(b-a_1) + (b-a_2) + \dots + (b-a_n) = \frac{nS}{n-1} - S = \frac{nS - (n-1)S}{n-1} = b.$$

o bien

$$(b-a_2) + (b-a_3) + \dots + (b-a_n) = a_1$$

De acuerdo con el teorema de las medias,

$$\frac{(n-1)b - (a_2 + a_3 + \dots + a_n)}{n-1} > \sqrt[n-1]{(b-a_2)(b-a_3) \dots (b-a_n)}$$

$$\frac{(n-1)b - (S-a_1)}{n-1} = \frac{a_1}{n-1} > \sqrt[n-1]{(b-a_2)(b-a_3) \dots (b-a_n)}$$

Análogamente

$$\frac{a_2}{n-1} > \sqrt[n-1]{(b-a_1)(b-a_3) \dots (b-a_n)}$$

$$\dots \dots \dots \frac{a_n}{n-1} > \sqrt[n-1]{(b-a_1)(b-a_2) \dots (b-a_{n-1})}$$

Al multiplicar estas desigualdades se obtiene

$$\frac{a_1 \dots a_n}{(n-1)^n} > \sqrt[n-1]{(b-a_1)^{n-1} \dots (b-a_n)^{n-1}}, \text{ o bien, } a_1 \dots a_n > (n-1)(b-a_1) \dots (b-a_n)$$

TEOREMA 5: DE LAS MEDIAS CON PESO

Hipótesis: $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ son dos conjuntos de números positivos, en particular los elementos de B son racionales.

Afirmación:
$$\left[\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \right]^{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \geq a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_n^{b_n}$$

Demostración

Como los números b_i son racionales, se tiene, $b_i = \frac{e_i}{d}$, $\dots$, $b_n = \frac{e_n}{d}$ donde $e_1, \dots, e_n$ y d son números enteros. Con esta transformación la afirmación cambia a la expresión

$$\frac{a_1 e_1 + \dots + a_n e_n}{e_1 + \dots + e_n} \geq [a_1^{e_1} a_2^{e_2} \dots a_n^{e_n}]^{\frac{1}{e_1 + \dots + e_n}}$$

pero esta afirmación corresponde al teorema de las medias cuando a_1 se repite e_1 veces, a_2 se halla e_2 veces... y a_n se encuentra e_n veces

EDET.

TEOREMA 6

Hipótesis 1: El número $a \neq 1$ es positivo.

Hipótesis 2: Los números u y v son dos racionales positivos y $u > v$.

Afirmación:
$$\frac{a^u - 1}{u} > \frac{a^v - 1}{v}$$

Demostración

Cuando u y v son enteros y $u > 1$

$$A = \frac{a^u - 1}{u} - \frac{a^{u-1} - 1}{u-1} = \frac{u a^u - a^u - u + 1 - (u-1)a^{u-1} + (u-1)}{u(u-1)}$$

$$A = \frac{(u-1)a^u - ua^{u-1} + 1}{u(u-1)} = \frac{P(a)}{u(u-1)}$$

Si en el numerador se hace $a=1$ resulta

$$(u-1)(1)^u - u(1)^{u-1} + 1 = 0$$

Este resultado significa que el polinomio $P(a)$ tiene como factor al binomio $a-1$

$$P(a) = (a-1)((u-1)a^{u-1} - a^{u-2} - a^{u-3} - \dots - 1)$$

$$P(a) = (a-1)[(a^{u-1} - a^{u-2}) + (a^{u-2} - a^{u-3}) + \dots + (a^{u-1} - 1)]$$

por consiguiente

$$A = \frac{(a-1)}{u(u-1)} [(a^{u-1} - a^{u-2}) + (a^{u-2} - a^{u-3}) + \dots + (a^{u-1} - 1)]$$

Cada uno de los términos $a^{u-1} - a^{u-i}$, $i=2, \dots, u$, de la suma entre corchetes es positivo cuando $a > 1$ y negativo en caso contrario; pero en ambos casos $A > 0$,

$$\text{así, } \frac{a^u - 1}{u} - \frac{a^{u-1} - 1}{u-1} > 0, \text{ ó bien, } \frac{a^u - 1}{u} > \frac{a^{u-1} - 1}{u-1}$$

El valor de la función $f(u) = \frac{a^u - 1}{u}$ decrece cuando u decrece:

$$\frac{a^u - 1}{u} > \frac{a^v - 1}{v}, \text{ si } u > v.$$

Si u y v son fracciones $u = \frac{e_1}{d}$, $v = \frac{e_2}{d}$, entonces

$$\frac{a^{\frac{e_1}{d}} - 1}{\frac{e_1}{d}} > \frac{a^{\frac{e_2}{d}} - 1}{\frac{e_2}{d}} \text{ si } e_1 > e_2$$

Si $b = a^{\frac{1}{d}} \neq 1$, entonces

$$\frac{b^{e_1} - 1}{e_1} > \frac{b^{e_2} - 1}{e_2} \text{ si } e_1 > e_2$$

COROLARIO

Si en $\frac{a^u-1}{u} > \frac{a^v-1}{v}$, $u > v$, se hace $u=x$ y x varía tomando los valores de los racionales positivos, entonces los valores de la función $\frac{a^x-1}{x}$ aumentan a medida que x crece. Si en lugar de a se toma $\frac{1}{a}$, entonces $\frac{a^{-x}-1}{x}$ aumenta con x , por consiguiente $\frac{1-a^{-x}}{x}$ decrece cuando x crece; pero hay más, si en lugar de x se toma $\frac{1}{x}$, se infiere que los valores de $x(a^{\frac{1}{x}}-1)$ disminuyen cuando x crece, por lo cual los valores de $x(1-a^{-\frac{1}{x}})$ aumentan cuando x crece.

E D E C.

TEOREMA 7.

Hipótesis: Los números $a \neq b$ son positivos y x es un racional distinto de 1.

Afirmación: $x a^{x-1}(a-b) > a^x - b^x > x b^{x-1}(a-b)$, a no ser que $0 < x < 1$, en cuyo caso $x a^{x-1}(a-b) < a^x - b^x < x b^{x-1}(a-b)$.

Demostración

En los dos casos señalados en la afirmación, la validez de una de las desigualdades implica la de la otra, por ejemplo si $x a^{x-1}(a-b) > a^x - b^x$, entonces $x b^{x-1}(b-a) > b^x - a^x$ de lo cual se infiere $a^x - b^x > x b^{x-1}(a-b)$; por consiguiente basta con demostrar una de las desigualdades en cada caso.

Si x es positivo y $a \neq b$, entonces por el teorema anterior $\frac{b^x-1}{x} \geq \frac{b^1-1}{1}$ según sea $x \geq 1$

o bien $\frac{a^x}{b^x} - 1 \geq x \left(\frac{a}{b} - 1 \right)$ con $x \geq 1$ consiguientemente

$$a^x - b^x \geq x b^{x-1} (a - b) \text{ según } x \geq 1.$$

Si x es negativa, igual a $-u$, entonces a juzgar por el teorema anterior, según se tenga $u+1 \geq 1$, resulta

$$\frac{p^{u+1} - 1}{u+1} \geq \frac{p-1}{1}, \text{ por consiguiente } p^{u+1} - 1 \geq p(u+1) - (u+1)$$

$$\text{o bien, } p^{u+1} - 1 \geq pu + p - u - 1, \text{ por lo cual } -up + u \geq p - p^{u+1}$$

consecuentemente $-u(p-1) \geq p^{u+1}(p^{-u} - 1)$, de lo que

$$\text{infiere } -u p^{-u-1} b^{-u} (p-1) \geq b^{-u} (p^{-u} - 1)$$

$$-u p^{-u-1} b^{-u-1} (pb - b) \geq p^{-u} b^{-u} - b^{-u}, \text{ si } u+1 \geq 1$$

$$x a^{x-1} (a - b) > a^x - b^x \quad \text{si } x < 0$$

EDET.

COROLARIO

Cuando $b=1$ resulta $a^x - 1 > x(a-1)$ si $x < 0$ ó $x > 1$

$$a^x - 1 < x(a-1) \quad \text{si } 0 < x < 1$$

Si $x=n$ y $a=1+x$, entonces cuando n es cualquier racional excepto 1, $x > -1$ y $x \neq 0$, resulta

$$(1+x)^n > 1+nx \quad \text{si } n < 0 \text{ ó } n > 1$$

$$(1+x)^n < 1+nx \quad \text{si } 0 < n < 1$$

Si se cambia el signo de x , se consideran $x < 1$ y $x \neq 0$, entonces

$$(1-x)^n > 1-nx \quad \text{si } n < 0 \text{ ó } n > 1$$

$$(1-x)^n < 1-nx \quad \text{si } 0 < n < 1$$

EDEC.

TEOREMA 8

Hipótesis: Los n números $a_1, \dots, a_n$ son positivos diferentes y p es un número racional distinto de 1 y cero.

Afirmación: $\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \geq \left[\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right]^p$ donde $<$ corresponde

al caso $0 < p < 1$ y $>$ cuando $p < 0$, ó, $p > 1$

Demostración

Recuerde que si $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n}$, entonces

$$b_1 + \dots + b_n = n. \text{ Además } \left[\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right]^p = \frac{a_1^p}{b_1^p} = \dots = \frac{a_n^p}{b_n^p} = \frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{b_1^p + \dots + b_n^p}$$

por lo tanto $\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \geq \left[\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right]^p$ según se

tenga $b_1^p + \dots + b_n^p \geq n$.

Primer caso: si $p < 0$, ó, $p > 1$, entonces por el corolario anterior: p

$b_1^{p-1} > p(b_1 - 1), \dots, b_n^{p-1} > p(b_n - 1)$, al sumar estas

desigualdades miembro a miembro $b_1^p + \dots + b_n^p - n > p(b_1 + \dots + b_n - n)$ pero $b_1 + \dots + b_n - n = 0$ de aquí que resulta la desigualdad

si $p < 0$, ó, $p > 1$, entonces $b_1^p + \dots + b_n^p > n$

Segundo caso: si $0 < p < 1$, entonces $b_1^{p-1} < p(b_1 - 1), \dots$

$b_n^{p-1} < p(b_n - 1)$, por consiguiente $b_1^p + \dots + b_n^p < n$.

EDET.

COROLARIO

Hipótesis 1: Los elementos de $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ son positivos diferentes y en particular los de B son racionales.

Hipótesis 2: El número p es un racional distinto de 1 y cero.

Afirmación: $\frac{b_1 a_1^p + \dots + b_n a_n^p}{b_1 + \dots + b_n} \gtrless \left[\frac{b_1 a_1 + \dots + b_n a_n}{b_1 + \dots + b_n} \right]^p$, donde

el signo $<$ corresponde al caso $0 < p < 1$ y el $>$ cuando $p < 0$, o $p > 1$

Demostración

Conforme a la hipótesis $b_1 = \frac{e_1}{d}, \dots, b_n = \frac{e_n}{d}$ donde $e_1, \dots, e_n$ y d son números enteros

con las transformaciones indicadas, la afirmación

es $\frac{e_1 a_1^p + \dots + e_n a_n^p}{e_1 + \dots + e_n} \gtrless \left[\frac{e_1 a_1 + \dots + e_n a_n}{e_1 + \dots + e_n} \right]^p$ donde $<$ corres-

pone a $0 < p < 1$ y $>$ al caso $p < 0$, o $p > 1$; pero este nuevo enunciado corresponde al teorema anterior cuando a_1 se repite e_1 veces, ..., a_n se halla e_n veces,

$\square \Rightarrow \square \Rightarrow \square$.

APLICACIÓN A PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

1. La media aritmética es mayor que la geométrica.

2. En los conjuntos de racionales positivos $\{a_i\}$, $\{b_i\}$

se cumple $\left[\frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{b_1 + \dots + b_n} \right]^{b_1 + \dots + b_n} \geq a_1^{b_1} \dots a_n^{b_n}$

3. En los conjuntos de racionales positivos $\{a_i\}$, $\{b_i\}$

se cumple $\frac{a_1^p b_1 + \dots + a_n^p b_n}{b_1 + \dots + b_n} \gtrless \left[\frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{b_1 + \dots + b_n} \right]^p$ donde $<$

corresponde a $0 < p < 1$ y $>$ a $p < 0$, o $p > 1$.

En estos tres teoremas cuando los números a_i son iguales y lo mismo acontece con los b_i , los signos se convierten en igualdades por consiguiente se concluye:

1. Si $a_1 + \dots + a_n = C$, entonces el máximo valor del producto $a_1 \dots a_n$ es $(\frac{C}{n})^n$ y se obtiene cuando $a_1 = \dots = a_n = \frac{C}{n}$

2. Si $a_1, \dots, a_n = c$, entonces el valor mínimo de $a_1 + \dots + a_n$ se obtiene cuando $a_1 = \dots = a_n$ y es $n\sqrt[n]{c}$.

Cuando es p un racional distinto a 0 y 1 resulta
3. Si $a_1 + \dots + a_n = c$, entonces según $p \notin (0, 1)$ ó $p \in (0, 1)$ el mínimo o máximo valor de $a_1 + \dots + a_n$ ocurre respectivamente cuando $a_1 = \dots = a_n$ y este valor es $n^{1-p} c^p$.

4. Si $a_1^p + \dots + a_n^p = c$, entonces según $p \notin (0, 1)$ ó $p \in (0, 1)$ el máximo o el mínimo valor de $a_1 + \dots + a_n$ ocurre cuando $a_1 = \dots = a_n$ y este valor es $n^{1-\frac{1}{p}} c^{\frac{1}{p}}$.

PROBLEMA

Calcular el valor máximo del volumen $V = abc$ sujeto a la restricción $ab + bc + ca = 12$

SOLUCIÓN

Como $ab + bc + ca$ es constante, el valor máximo de $(ab)(bc)(ca)$ es máximo se obtiene cuando $ab = bc = ca$, $a = b = c$, por esto $a = 2$ y $V^* = 8$

PROBLEMA

El perímetro de un triángulo es $2p$ ¿cuál es el área mayor?

SOLUCIÓN

Si los lados del triángulo son a, b y c con los que $a + b + c = 2p$, entonces el cuadrado de su área es $A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ y el semiperímetro es $(p-a) + (p-b) + (p-c) = p = \text{constante}$; por consiguiente el máximo de $(p-a)(p-b)(p-c)$ se obtiene cuando $p-a = p-b = p-c$, esto es, cuando el triángulo es equilátero y $(A^*)^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^3$, ó bien, $A^* = \sqrt{3} \frac{a^2}{4}$

PROBLEMA

Investigar cual es el valor mínimo de $g = 5x + 2u$, con la restricción $x^2 u^3 = 6$.

SOLUCIÓN

Si a y b son dos constantes, entonces

$$(ax)(ax)(bu)(bu)(bu) = a^2 b^3 x^2 u^3 = 6 a^2 b^3$$

consecuentemente $ax + ax + bu + bu + bu$ adquiere su valor mínimo cuando $ax = bu = (6 a^2 b^3)^{\frac{1}{5}} = 5$

pero $2ax + 3bu = 5x + 2u$ luego $a = \frac{5}{2}$ y $b = \frac{2}{3}$

por consiguiente $x = \frac{5}{2}$, $u = \frac{2}{3}$ por lo que

$$5x + 2u = 5 \left(\frac{5}{2} \right) (6 a^2 b^3)^{\frac{1}{5}} + 2 \left(\frac{2}{3} \right) (6 a^2 b^3)^{\frac{1}{5}} = 5 (6 a^2 b^3)^{\frac{1}{5}}$$

$$g^* = 5 \left[(5) \frac{5^2}{4^2} \frac{2^3}{3^3} \right]^{\frac{1}{5}} = 5 \left[\frac{2(3) 2^3 (5)^2}{2^4 (3)^3} \right]^{\frac{1}{5}} = 5 \left(\frac{5}{3} \right)^{\frac{2}{5}}$$

PROBLEMA

El teorema de los medios se puede utilizar para hallar las fronteras inferiores de posinomios; por ejemplo el valor mínimo del posinomio $g = 9x + \frac{16}{x}$.

SOLUCIÓN

Se considera que g es una media aritmética, así que $g(x) = \frac{1}{2} (9x) + \frac{1}{2} \left(\frac{32}{x} \right)$; este valor es mayor o igual que su media geométrica

$$g(x) \geq \sqrt{9x \left(\frac{32}{x} \right)} = \sqrt{2(9) 2(16)} = 2(3) 4 = 24$$

consecuentemente es la frontera inferior de los valores

que toma $g(x)$, por esto $9x + \frac{16}{x} = 24$, ó, $9x^2 - 24x + 16 = 0$

$$\text{así que } x = \frac{24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4(9)16}}{2(9)} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{18}$$

en consecuencia $x = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$. Observe que para este

valor el primer sumando vale 12 y el segundo sumando vale 12.

FORMULAS PARTICULARES

El corolario de las medias con peso afirma que

$$\frac{e_1}{e_1 + \dots + e_n} a_1 + \dots + \frac{e_n}{e_1 + \dots + e_n} a_n \geq \left[a_1^{e_1} \dots a_n^{e_n} \right]^{\frac{1}{e_1 + \dots + e_n}}$$

Se acostumbra la notación $w_i = \frac{e_i}{e_1 + \dots + e_n}$; observe que

$w_1 + \dots + w_n = 1$. Al cociente w_i se le da el nombre de peso de la variable a_i . Con esta notación el corolario toma la forma

$$w_1 a_1 + \dots + w_n a_n \geq a_1^{w_1} \dots a_n^{w_n}$$

Con el cambio de variable $u_1 = w_1 a_1, \dots, u_n = w_n a_n$ se tiene

$$g = u_1 + \dots + u_n \geq \left[\frac{u_1}{w_1} \right]^{w_1} \dots \left[\frac{u_n}{w_n} \right]^{w_n}$$

donde g es un posinomio; desde este punto de vista a la función $g = u_1 + \dots + u_n$ se le da el nombre de función primal y la función

$$V = \left[\frac{u_1}{w_1} \right]^{w_1} \cdots \left[\frac{u_n}{w_n} \right]^{w_n}$$

es la función predual, donde $u_i = a_i x_1^{b_{i1}} \cdots x_p^{b_{ip}}$ por consiguiente

$$V = \left[\frac{a_1}{w_1} \right]^{w_1} x_1^{w_1 b_{11}} \cdots x_p^{w_1 b_{1p}} \cdots \left[\frac{a_n}{w_n} \right]^{w_n} x_1^{w_n b_{n1}} \cdots x_p^{w_n b_{np}}$$

$$V = \left[\frac{a_1}{w_1} \right]^{w_1} \cdots \left[\frac{a_n}{w_n} \right]^{w_n} x_1^{w_1 b_{11} + \cdots + w_n b_{n1}} \cdots x_p^{w_1 b_{1p} + \cdots + w_n b_{np}}$$

Para facilitar la escritura se hace $d_i = w_1 b_{i1} + \cdots + w_n b_{in}$ por tanto

$$V = \left[\frac{a_1}{w_1} \right]^{w_1} \cdots \left[\frac{a_n}{w_n} \right]^{w_n} x_1^{d_1} \cdots x_p^{d_p}$$

Si hay una solución distinta a la trivial en el sistema,

$$d_1 = w_1 b_{11} + w_2 b_{21} + \cdots + w_n b_{n1} = 0$$

$$d_p = w_1 b_{1p} + w_2 b_{2p} + \cdots + w_n b_{np} = 0$$

(C1)

entonces los valores de V no dependen de las variables x_i y la función V se reduce a

$$U = \left[\frac{a_1}{w_1} \right]^{w_1} \cdots \left[\frac{a_n}{w_n} \right]^{w_n}, \text{ llamada función dual.}$$

El sistema de ecuaciones lineales (C1) son las condiciones de ortogonalidad y la ecuación $w_1 + \cdots + w_n = 1$, es la condición de normalidad

En la resolución de los problemas de optimización de posinomios sencillos es conveniente contar con fórmulas particulares; en el caso de dos variables se dan los ejemplos

$$\frac{1}{3} a_1 + \frac{2}{3} a_2 \geq a_1^{\frac{1}{3}} a_2^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{4} a_1 + \frac{3}{4} a_2 \geq a_1^{\frac{1}{4}} a_2^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{1}{5} a_1 + \frac{4}{5} a_2 \geq a_1^{\frac{1}{5}} a_2^{\frac{4}{5}}$$

$$\frac{2}{5} a_1 + \frac{3}{5} a_2 \geq a_1^{\frac{2}{5}} a_2^{\frac{3}{5}}$$

Análogamente con tres variables se pueden componer las fórmulas

$$\frac{1}{4} a_1 + \frac{1}{4} a_2 + \frac{1}{2} a_3 \geq a_1^{\frac{1}{4}} a_2^{\frac{1}{4}} a_3^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{5} a_1 + \frac{1}{5} a_2 + \frac{3}{5} a_3 \geq a_1^{\frac{1}{5}} a_2^{\frac{1}{5}} a_3^{\frac{3}{5}}$$

$$\frac{1}{5} a_1 + \frac{2}{5} a_2 + \frac{2}{5} a_3 \geq a_1^{\frac{1}{5}} a_2^{\frac{2}{5}} a_3^{\frac{2}{5}}$$

Se puede continuar con este procedimiento indefinidamente y aumentar el número de variables considerando tan solo las restricciones impuestas en la prueba de los teoremas o corolarios.

PROBLEMA

Determine el valor mínimo del posinomio $g = 400x^2 + \frac{100}{x}$.

SOLUCION

$$g(x) = \frac{1}{3} (1200x^2) + \frac{2}{3} \left(\frac{300}{2x} \right) \text{ luego } g(x) \geq (1200x^2)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{150}{x} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$g(x) \geq \left[\frac{1200 (22500 x^2)}{x^2} \right]^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27(10)^6} = 300$, por esto la frontera inferior de los valores de $g(x)$ es 300, luego $400x^2 + \frac{100}{x} = 300$, $4x^3 - 3x + 1 = 0$; pero $4x^3 - 3x + 1 = 4(x+1)(x-\frac{1}{2})^2$.

Por definición quedan excluidos los valores negativos de x por consiguiente $x = \frac{1}{2}$ minimiza a $g(x)$ y $g(\frac{1}{2}) = 300$.

PROBLEMA

Determinar el valor mínimo del posinomio $g = 16x^{10} + \frac{2}{x^2}$.

SOLUCIÓN

De primera intención se puede suponer $g = \frac{1}{2}(32x^{10}) + \frac{1}{2}(\frac{4}{x^2})$ con lo cual

$$g(x) \geq (32x^{10})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ así } g(x) \geq \sqrt{128x^8} = 8\sqrt{2}x^4$$

expresión que al depender de x no fija una frontera; pero si se recurre a la fórmula

$$\frac{1}{5}a_1 + \frac{4}{5}a_2 \geq a_1^{\frac{1}{5}} a_2^{\frac{4}{5}}$$

resulta

$$g(x) = \frac{1}{5}(16(5)x^{10}) + \frac{4}{5}\left(\frac{5}{4}\frac{2}{x^2}\right), \text{ por consiguiente}$$

$$g(x) \geq (16(5)x^{10})^{\frac{1}{5}} \left(\frac{5}{4}\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{4}{5}} = \left[16(5)x^{10} \frac{5^4(2)^4}{4^4x^{10}}\right]^{\frac{1}{5}}$$

$$\text{por consiguiente se obtiene } g(x) \geq \sqrt[5]{5^5} = 5$$

expresión que fija la frontera inferior de la que se obtiene la ecuación

$$16x^{10} + \frac{2}{x^2} = 5$$

$$\text{o bien, } 16x^{12} - 5x^2 + 2 = 0$$

Con el cambio de variable $x^2 = u$ se obtiene una ecuación reducida de sexto grado

$$f(u) = 16u^6 - 5u + 2 = 0 \quad (1)$$

con este tipo de ecuaciones no se cuenta con una fórmula general de solución, se debe recurrir al análisis numérico.

En la solución de la ecuación (1) se recurre al método numérico que estableció Newton para hallar las raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$, a partir de la fórmula de Taylor

$$f(\mu) = f(x_{n-1}) + (\mu - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) + \frac{1}{2}(\mu - x_{n-1})^2 f''(\theta)$$

en la que conservo solo la parte lineal y sustituí $f(\mu) = 0$, con lo cual se obtuvo la fórmula de aproximaciones sucesivas

$$f(x_{n-1}) + (\mu - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) = 0$$

por consiguiente $\mu = x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$.

En el caso que nos ocupa $x_n = x_{n-1} - \frac{16 x_{n-1}^6 - 5 x_{n-1} + 2}{96 x_{n-1}^5 - 5}$

Si el punto de partida es $x_0 = 0.1000$, entonces los valores sucesivos de la aproximación son

n	1	2	3
x_n	0.40	0.4163	0.4168

consecuentemente $\mu = 0.4163$ y $x = \sqrt{0.4163} = 0.64530$

$$x^{12} = 0.0052428, \quad 16x^{12} = 0.0838845$$

$$-5x^2 = -2.0339763$$

$$16x^{12} - 5x^2 + 2 = 0.0838845 - 2.0339763 + 2 = 0.0001123$$

El error cometido es del orden

$$e_4 = \frac{f''(x_{n-1})}{2f'(x_{n-1})} e_3^2 = \frac{240 x_{n-1}^4}{96 x_{n-1}^5 - 5} e_3^2$$

TEOREMA 9

Hipótesis: La función $g(x_1, \dots, x_p) = u_1 + \dots + u_n$ donde
 $u_i = a_i x_1^{b_{i1}} \dots x_p^{b_{ip}}$, $i=1, \dots, n$, es un posinomio
 que tiene un mínimo en el punto $(x'_1, \dots, x'_p) = x_0$
 cuyas coordenadas son todas positivas

Afirmación: Existen los pesos positivos $w_1, \dots, w_n$, tales que
 satisfacen a las condiciones de ortogonalidad
 y normalidad

Demostración

En los cursos elementales de cálculo diferencial en E^n ,
 se probó que en los puntos estacionarios de g se cumple
 $\text{grad } g(x'_1, \dots, x'_p) = 0$ y como estos puntos pueden ser
 extremos o puntos silla, conforme a la hipótesis en
 el punto $(x'_1, \dots, x'_p)$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g(x'_1, \dots, x'_p) = \frac{\partial g}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial g}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_p} g(x'_1, \dots, x'_p) = \frac{\partial g}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_p} + \dots + \frac{\partial g}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_p} = 0$$

o bien $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_p} + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_p} = 0$

Por otra parte

$$\log u_1 = \log a_1 + b_{11} \log x_1 + \dots + b_{1p} \log x_p$$

$$\log u_n = \log a_n + b_{n1} \log x_1 + \dots + b_{np} \log x_p$$

por consiguiente

$$\frac{1}{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = b_{11} \frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_p} = b_{1p} \frac{1}{x_p}$$

$$\frac{1}{u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_1} = b_{n1} \frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_p} = b_{np} \frac{1}{x_p}$$

De estas igualdades se infiere

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g(x_i) = b_{i1} \frac{u_1^*}{x_i^*} + \dots + b_{in} \frac{u_n^*}{x_i^*} = 0 \quad \text{donde } x_i^* > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_p} g(x_0) = b_{1p} \frac{u_1^*}{x_0'} + \dots + b_{np} \frac{u_n^*}{x_p'} = 0 \quad \text{donc } x_p' > 0$$

En consecuencia

$$b_{11} \frac{\mu_1^*}{\mu_1^* + \dots + \mu_n^*} + \dots + b_{n1} \frac{\mu_n^*}{\mu_1^* + \dots + \mu_n^*} = 0$$

$$b_{1p} \frac{\mu_1^*}{\mu_1^* + \dots + \mu_n^*} + \dots + b_{np} \frac{\mu_n^*}{\mu_1^* + \dots + \mu_n^*} = 0$$

(51)

donde $u_1^*, \dots, u_n^*$ son los respectivos valores de las funciones $u_1, \dots, u_n$ en el punto $x_0 = (x_1, \dots, x_p)$

Si ahora se escribe $w_i = \frac{u_i^*}{u_i^* + \dots + u_n^*}$, el sistema

(51) toma la forma

$$w_1' b_{11} + \dots + w_n' b_{n1} = 0$$

$$w_1' b_{1n} + \dots + w_n' b_{nn} = 0$$

que son las condiciones de ortogonalidad.

Obvianzite

$w_1' + \dots + w_n' = 1$, que es la condición de normalidad.

150

TEOREMA 10

TEOREMA 10
Hipótesis: La función $g(x_1, \dots, x_n) = u_1 + \dots + u_n$ donde $u_i = a_i x_1^{b_{i1}} \dots x_n^{b_{in}}$ es
un mínimo en $(x_1^0, \dots, x_n^0) = x_0$ son todas las $x_i^0 > 0$.

Afirmación: $\text{Min } f(x'_1, \dots, x'_n) = \text{Máx } v(w_1, \dots, w_n).$

Demstración

Conforme al teorema anterior

$$\left[\frac{a_1}{w_1} \right]^{w_1} = \left[\frac{a_1}{\mu_1^*} g(x_0) \right]^{w_1} = \frac{g(x_0)^{w_1}}{x_1'^{w_1 b_{11}} \dots x_p'^{w_1 b_{1p}}}$$

$$\left[\frac{a_n}{w_n} \right]^{w_n} = \left[\frac{a_n}{\mu_n^*} g(x_0) \right]^{w_n} = \frac{g(x_0)^{w_n}}{x_1'^{w_n b_{n1}} \dots x_p'^{w_n b_{np}}}$$

Por consiguiente

$$\left[\frac{a_1}{w_1} \right]^{w_1} \dots \left[\frac{a_n}{w_n} \right]^{w_n} = \frac{g(x_0)^{w_1 + \dots + w_n}}{x_1'^{w_1 b_{11} + \dots + w_n b_{n1}} \dots x_p'^{w_1 b_{1p} + \dots + w_n b_{np}}}$$

De acuerdo con el teorema anterior $w_1 + \dots + w_n = 1$ y los exponentes de $x_1', \dots, x_p'$ son nulos, por consiguiente

$$g(x_0) = \left[\frac{a_1}{w_1} \right]^{w_1} \dots \left[\frac{a_n}{w_n} \right]^{w_n} = v(w_0) \text{ donde } w_0 = (w_1, \dots, w_n)$$

en el punto x_0

EDET.

COROLARIO

El posiconvexo g tiene una frontera inferior M que a su vez es frontera superior de la función dual, cuando se eligen los pesos w_i de forma que se cumplan las condiciones de ortogonalidad y de normalidad:

$$g(x_0) \geq M \geq v(w_0)$$

Siguiendo el método de la programación geométrica se halla el valor mínimo de la función g , sin recurrir a las coordenadas $x_1', \dots, x_p'$ del punto extremo x_0 , situación que contrasta con la teoría clásica de máximos y mínimos en E^n . En la programación geométrica se orientan los esfuerzos hacia el cálculo

del vector $W_0 = (w_1, \dots, w_n)$ sujeto a las condiciones de ortogonalidad y normalidad.

EDEC

CALCULO DE LAS COORDENADAS DE x_0

COROLARIO

De las formulas $w_i' = \frac{w_i^*}{g(x_0)}$ y $g(x_0) = U(W_0)$ se obtiene

$$w_i^* = a_i x_1^{b_{i1}} \dots x_p^{b_{ip}} = U(W_0) w_i' \quad , \quad i=1, \dots, n$$

consecuentemente

$$\log a_i + b_{i1} \log x_1' + \dots + b_{ip} \log x_p' = \log U(x_0) + \log w_i'$$

o bien, si $t_1 = \log x_1', \dots, t_n = \log x_p'$, entonces,

$$b_{i1} t_1 + \dots + b_{ip} t_n = \log U(x_0) + \log w_i' - \log a_i \quad (s1)$$

$$b_{n1} t_1 + \dots + b_{np} t_n = \log U(x_0) + \log w_n' - \log a_n$$

Con este sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas se calculan los valores de $t_1, \dots, t_n$ y con sus antilogaritmos se determinan las coordenadas del punto extremo $x_0 = (x_1', \dots, x_n')$.

EDEC.

FORMULACIÓN MATEMÁTICA DE LA PROGRAMACIÓN GEOMÉTRICA

La forma más general de un problema de programación geométrica se expresa en la configuración:

Minimizar $g_0(x_1, \dots, x_p)$

sujeta a $g_k(x_1, \dots, x_p) \leq 1, \quad k=1, \dots, r$

La presencia de restricciones obliga al abandono del requisito de normalidad; en estas condiciones si $P_1, \dots, P_n$ son los pesos y S su suma: $P_1 + \dots + P_n = S$ entonces

$\frac{P_1}{S} + \dots + \frac{P_n}{S} = 1$ por lo cual $w_1 = \frac{P_1}{S}, \dots, w_n = \frac{P_n}{S}$, y la

desigualdad $u_1 + \dots + u_n \geq \left[\frac{u_1}{w_1} \right]^{w_1} \dots \left[\frac{u_n}{w_n} \right]^{w_n}$

se transforma en

$$u_1 + \dots + u_n \geq S^{w_1} \left[\frac{u_1}{P_1} \right]^{\frac{P_1}{S}} \dots S^{w_n} \left[\frac{u_n}{P_n} \right]^{\frac{P_n}{S}}$$

$$u_1 + \dots + u_n \geq S^{\frac{P_1}{S}} \left[\frac{u_1}{P_1} \right]^{\frac{P_1}{S}} \dots S^{\frac{P_n}{S}} \left[\frac{u_n}{P_n} \right]^{\frac{P_n}{S}}$$

o bien

$$(u_1 + \dots + u_n)^S \geq S^S \left[\frac{u_1}{P_1} \right]^{P_1} \dots \left[\frac{u_n}{P_n} \right]^{P_n}$$

A este respecto opina Duffin: "La capacidad de resolver problemas con restricciones eleva a la programación geométrica de la situación de un ingenioso artificio para resolver problemas especiales, al nivel de una disciplina científica aplicable a la solución de una amplia gama de problemas".

Ahora fácilmente se ve que una de las principales virtudes de la programación geométrica es transformar un problema donde se minimiza un posinomio, en otro donde se obtiene el punto óptimo con un sistema de ecuaciones lineales; pero esta es un propiedad trivial de la función logarítmica, ciertamente, cuando se intenta optimizar un producto de exponenciales, por ejemplo

$$\text{Optimizar } f = x_1^{2x_1 - 3x_2 + 1} x_2^{2x_1 - x_2 - 3} \quad (1)$$

El extremo de f se alcanza en el mismo punto donde se halla el extremo de $\text{Log } f$, por tanto el problema (1) se sustituye por

$$\text{Optimizar } \text{Log } f = (2x_1 - 3x_2 + 1) \text{Log } x_1 + (2x_1 - x_2 - 3) \text{Log } x_2$$

Recuerde que en los puntos extremos de la función $f: E^2 \rightarrow E^1$, $\text{grad } f = 0$, principio que suministra las ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \text{Log } f = (a_1 - 3a_2 + 1) \frac{1}{x_1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \text{Log } f = (2a_1 - a_2 - 3) \frac{1}{x_2} = 0$$

De imponer la restricción de soluciones acotadas optimizar f se reduce al sistemas de ecuaciones lineales

$$a_1 - 3a_2 = -1$$

$$2a_1 - a_2 = 3$$

consecuentemente $a_1 = 2$ y $a_2 = 1$

En este problema el determinante hessiano de f es

$$\begin{vmatrix} 0 & (a_1 - 3a_2 + 1)(2a_1 - a_2 - 3) \\ (a_1 - 3a_2 + 1)(2a_1 - a_2 - 3) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

y la prueba no lleva a una conclusión pero esto sugiere que si se logra transformar el planteo de problemas cuyos modelos contengan sumas en otro modelo que solo comprenda productos, entonces es posible aminorar la complejidad implicada en la solución del problema inicial.

Esta propiedad la aprovechó muy brillantemente el Dr. Clarence Zener, el primero en concebir la programación geométrica en 1961, idea que en 1962 desarrolló Richard J. Duffin conjuntamente con Zener. Poco tiempo después se unió a estas investigaciones Elmor L. Peterson cuyas inscripciones se reunieron en el libro *Geometric*

Programming publicado por la editora John Wiley and Sons en 1961.

En el mismo año Passy, U., y D.J. Wilde publicaron un artículo, "Generalized Polynomial Optimización" en SIAM Appl. Math., Vol. 15, N° 5 (Sep., 1967) p.p. 1344-1356.

Las investigaciones prosiguen pero la Geometric Programming de Duffin, Peterson y Zener contiene todo el material teórico fundamental. Los especialistas consideraran su publicación de acontecimiento sobresaliente en la historia de la programación matemática. No deje de estudiar ese texto modelo, estas notas le ayudarán.

Dado que el vicio de la computación crece desahoradamente, a veces con fines ajenos a la genuina investigación científica, se recuerda que David G. Luenberger, investigador de la Stanford University, afirmó que el conocido aforismo de Confucio en una de sus formas modernas puede enunciarse: Una buena teoría es mucho más meritoria que mil corridas en la computadora. Una teoría claramente explicada, es uno de los instrumentos que dan acceso al conocimiento de la naturaleza interna más íntima de los fenómenos, conocimiento que obviamente posibilitará la elaboración de algoritmos adecuados; estos a su vez servirán de base a la elaboración de programas para computadora eficaces en todos los aspectos.

CONCEPTOS BÁSICOS Y TÉCNICAS DE LA PROGRAMACIÓN GEOMÉTRICA. PROGRAMAS PRIMALES Y PROGRAMAS DUALES.

El programa primal más general es de la forma
PROGRAMA PRIMAL A (PPA)

Determinar el valor mínimo de la función $g_0(\bar{t})$ sujeto a las restricciones $t_1 > 0, \dots, t_m > 0$ (restricciones naturales) (1)

$$g_1(\bar{t}) \leq 1, \dots, g_p(\bar{t}) \leq 1 \text{ (restricciones de eficacia)} \quad (2)$$

donde

$$g_k(\bar{t}) = \sum_{i \in J[k]} c_i t_1^{a_{i1}} \dots t_m^{a_{im}}, \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (3)$$

$$J[k] = \{m_k, m_k+1, m_k+2, \dots, n_k\}, \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (4)$$

$$m_0 = 1, \quad m_1 = n_0 + 1, \quad m_2 = n_1 + 1, \dots, \quad m_p = n_{p-1} + 1, \quad n_p = n \quad (5)$$

Los exponentes a_{ij} son números reales cualesquiera, pero los coeficientes c_i son siempre positivos. Observe que las funciones $g_k(\bar{t})$ son posinomios.

La función primal $g_0(\bar{t})$ es el posinomio que se va a minimizar y las variables $t_1, \dots, t_m$ son las variables primales. A las restricciones (1) se les denominan restricciones naturales en tanto que las impuestas en (2) se llaman restricciones de eficacia. Conjuntamente reciben el nombre de restricciones primales.

La tabla de los índices i definidos con la función $J[k]$ es

k	$J[k]$				
0	1	2	3	...	n_0
1	n_0+1	n_0+2	n_0+3	...	n_1
...	...	...	...	...	...
p	$n_{p-1}+1$	$n_{p-1}+2$	$n_{p-1}+3$	...	$n_p = n$

$i = 1, \dots, n_0, \dots,$
 $n_1, \dots, n$

Esta tabla notifica que la estructura de los posinomios

$$\begin{aligned}
 g_0(\bar{t}) &= u_1 + \dots + u_{n_0} = \sum_{i=1}^{n_0} u_i \\
 g_1(\bar{t}) &= u_{n_0+1} + \dots + u_{n_1} = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} u_i \\
 g_2(\bar{t}) &= u_{n_1+1} + \dots + u_{n_2} = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} u_i \\
 &\dots \dots \dots \\
 g_p(\bar{t}) &= u_{n_{p-1}+1} + \dots + u_{n_p} = \sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} u_i
 \end{aligned}$$

En la tabla que sigue se registran los exponentes y se construye su matriz

k	a_{ij}	
0	$a_{1,1}, \dots, a_{1,m}$	$\dots, a_{n_0,1}, \dots, a_{n_0,m}$
1	$a_{n_0+1,1}, \dots, a_{n_0+1,m}$	$\dots, a_{n_1,1}, \dots, a_{n_1,m}$
2	$a_{n_1+1,1}, \dots, a_{n_1+1,m}$	$\dots, a_{n_2,1}, \dots, a_{n_2,m}$
...	...	...
p	$a_{n_{p-1}+1,1}, \dots, a_{n_{p-1}+1,m}$	$\dots, a_{n_p,1}, \dots, a_{n_p,m}$

$$\begin{bmatrix}
 a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n_0,1} & \dots & a_{n_0,m} \\
 a_{n_0+1,1} & \dots & a_{n_0+1,m} \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n_1,1} & \dots & a_{n_1,m} \\
 a_{n_1+1,1} & \dots & a_{n_1+1,m} \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n_2,1} & \dots & a_{n_2,m} \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n_{p-1},1} & \dots & a_{n_{p-1},m} \\
 a_{n_{p-1}+1,1} & \dots & a_{n_{p-1}+1,m}
 \end{bmatrix}$$

Obviamente la matriz $[a_{ij}]$ se llama matriz de exponentes, $n \times m$

PROGRAMA DUAL B (PDB)

Calcular el valor máximo de un producto de funciones
llamado función dual

$$v(\bar{d}) = \left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{d_i} \right)^{d_i} \right] \prod_{k=1}^p e_k(\bar{d})^{\bar{e}_k(\bar{d})} \quad (6)$$

$$\text{donde } e_k(\bar{d}) = \sum_{i \in J[k]} d_i, \quad k=1, \dots, p \quad (7)$$

$$J[k] = \{ m_k, m_k + 1, \dots, n_k \}, \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (8)$$

$$m_0 = 1, m_1 = n_0 + 1, m_2 = n_1 + 1, \dots, m_p = n_{p-1} + 1, n_p = n \quad (9)$$

Los factores c_i son números reales positivos y las componentes del vector $\bar{d} = (d_1, \dots, d_n)$ deben cumplir con las restricciones

$$d_i \geq 0, \dots, d_n \geq 0 \quad (\text{no negatividad}) \quad (10)$$

$$\sum_{i \in J[0]} d_i = 1 \quad (\text{normalidad}) \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} d_i = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{ortogonalidad}) \quad (12)$$

En esta última sumatoria los coeficientes a_{ij} son números reales.

Al calcular el producto de funciones $v(\bar{d})$, se debe entender que $x^x = x^{-x} = 1$ cuando $x = 0$, acuerdo con el que se logra la continuidad de $v(\bar{d})$ sobre el dominio de su definición.

El producto de funciones $v(\bar{d})$ se llama función dual y las variables $d_1, \dots, d_n$ son las variables duales, las cuales cumplen las restricciones (10) que globalmente reciben el nombre de condición de positividad, a la que complementa la condición de normalidad especificada con la sumatoria (11). A las restricciones (10) y (11) se les adiciona la condición de ortogonalidad detallada con las ecuaciones (12). El conjunto de las restricciones (10), (11) y (12) se denomina restricciones duales.

Un punto del mayor interés es saber formar el PDB a partir de su correspondiente PPA; se observa

que los factores c_i en $U(\bar{d})$ son los coeficientes de los binomios $g_k(\bar{t})$, $k=0,1,\dots,p$. La componente d_i está asociada al i -ésimo término

$$c_i t_1^{a_{i1}} \dots t_m^{a_{im}}$$

del programa primal, de esta suerte, a cada término de los binomios $g_k(\bar{t})$, $k=0,1,\dots,p$ le corresponde una y sólo una de las k variables d_i . Cada factor $e_k(\bar{d})$

de $U(\bar{d})$ viene de las restricciones de eficacia $g_k(\bar{t}) \leq 1$

Se observa que factor de este tipo no proviene de la función primal porque las condiciones de normalidad obligan a $e_0(\bar{d}) = 1$. Para lograr una mayor claridad conviene escribir en forma explícita las igualdades 7:

$$e_0(\bar{d}) = d_1 + \dots + d_{n_0} = 1$$

$$e_1(\bar{d}) = d_{n_0+1} + \dots + d_{n_1}$$

$$e_2(\bar{d}) = d_{n_1+1} + \dots + d_{n_2}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$e_p(\bar{d}) = d_{n_{p-1}+1} + \dots + d_{n_p=n}$$

La condición de normalidad es la única parte del PDE que distingue entre la función primal $g_0(\bar{t})$ y los otros binomios $g_k(\bar{t})$, $k=1,\dots,p$. que se encuentran en las restricciones (2) de eficacia. Finalmente, con la matriz de exponentes traspuesta del programa se tienen las condiciones de ortogonalidad

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}, \dots, a_{n_0,1}, a_{n_0+1,1}, \dots, a_{n_1,1}, a_{n_1+1,1}, \dots, a_{n_2,1}, \dots, a_{n,p-1,1}, a_{n,p-1+1,1}, \dots, a_{n,p,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Para aclarar ideas conviene trabajar unos ejemplos numéricos.

EJEMPLO

A partir del problema primal que enseguida se enuncia, plantear el problema dual.

Minimizar la función primal

$$g_0(t_1, t_2, t_3) = 40 t_1^{-1} t_2^{-\frac{1}{2}} t_3^{-1} + 20 t_1 t_3 + 20 t_1 t_2 t_3$$

Sujeto a las restricciones primales:

Naturales: $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, $t_3 > 0$

$$\text{Eficiencia: } g_1(\bar{t}) = \frac{1}{3} t_1^{-2} t_2^{-2} + \frac{4}{3} t_2^{\frac{1}{2}} t_3^{-1} \leq 1$$

SOLUCIÓN

Primariamente $k = 0, 1$, $J[k] = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline k=0 & & & k=1 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \right\}$

La tabla de coeficientes y exponentes se escribe en la forma

$i=1$	$c_1 = 40$	$a_{11} = -1$	$a_{12} = -1/2$	$a_{13} = -1$
$i=2$	$c_2 = 20$	$a_{21} = 1$	$a_{22} = 0$	$a_{23} = 1$
$i=3$	$c_3 = 20$	$a_{31} = 1$	$a_{32} = 1$	$a_{33} = 1$
$i=4$	$c_4 = 1/3$	$a_{41} = -2$	$a_{42} = -2$	$a_{43} = 0$
$i=5$	$c_5 = 1/3$	$a_{51} = 0$	$a_{52} = 1/2$	$a_{53} = -1$

La matriz de coeficientes traspuesta completa los datos

$$\begin{bmatrix} -1, & 1, & 1, & -2, & 0 \\ -\frac{1}{2}, & 0, & 1, & -2, & \frac{1}{2} \\ -1, & 1, & 1, & 0, & -1 \end{bmatrix}$$

La construcción de programa dual principia con el cálculo de las condiciones de ortogonalidad

$$\begin{bmatrix} -1, & 1, & 1, & -2, & 0 \\ -\frac{1}{2}, & 0, & 1, & -2, & \frac{1}{2} \\ -1, & 1, & 1, & 0, & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 5} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} -d_1 + d_2 + d_3 - 2d_4 + 0 \\ -\frac{1}{2}d_1 + 0 + d_3 - 2d_4 + \frac{1}{2}d_5 \\ -d_1 + d_2 + d_3 + 0 - d_5 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

Las funciones e_k en este problema son sólo dos:

$$e_0 = d_1 + d_2 + d_3 \quad \dots$$

$$e_1 = d_4 + d_5$$

consecuentemente la condición de normalidad es $d_1 + d_2 + d_3 = 1$.

En conclusión, el programa dual pedido, asociado al programa primal propuesto se enuncia ahora de inmediato

Maximizar la función dual

$$v(\bar{d}) = \left[\frac{40}{d_1} \right]^{d_1} \left[\frac{20}{d_2} \right]^{d_2} \left[\frac{20}{d_3} \right]^{d_3} \left[\frac{1/3}{d_4} \right]^{d_4} \left[\frac{4/3}{d_5} \right]^{d_5} (d_4 + d_5)^{d_4 + d_5}$$

sujeito a las restricciones duales

$$(\text{No negatividad}) \quad d_1 \geq 0, d_2 \geq 0, d_3 \geq 0, d_4 \geq 0, d_5 \geq 0$$

$$(\text{Normalidad}) \quad d_1 + d_2 + d_3 = 1$$

$$(\text{Ortogonalidad}) \quad \begin{aligned} -d_1 + d_2 + d_3 - 2d_4 + 0 &= 0 \\ -\frac{1}{2}d_1 + 0 + d_3 - 2d_4 + \frac{1}{2}d_5 &= 0 \\ -d_1 + d_2 + d_3 + 0 - d_5 &= 0 \end{aligned} \quad (S1)$$

Como se sabe, el sistema S1 es de rango 3 porque

$$\text{en la submatriz} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{el determinante vale 2}$$

luego se puede transformar el sistema (S1) en el (S2)

$$\begin{aligned} d_2 + d_3 - 2d_4 &= d_1 \\ 0 + d_3 - 2d_4 &= \frac{1}{2}d_1 - \frac{1}{2}d_5 \\ d_2 + d_3 + 0 &= d_1 + d_5 \end{aligned} \quad (S2)$$

El sistema (S2) se diagonaliza por medio del método de Gauss; con lo cual se obtiene el sistema (S3)

$$d_2 + d_3 - 2d_4 = d_1$$

$$d_3 - 2d_4 = \frac{1}{2} d_1 - \frac{1}{2} d_5 \quad (s3)$$

$$2d_4 = d_5$$

de este sistema en seguida se obtiene la solución

$$d_2 = \frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{2} d_5$$

$$d_3 = \frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{2} d_5 \quad (s4)$$

$$d_4 = \frac{1}{2} d_5$$

Ahora con la condición de normalidad resulta

$$d_1 + d_2 + d_3 = d_1 + (\frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{2} d_5) + (\frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{2} d_5) = 1$$

$$2d_1 + d_5 = 1, \quad d_5 = 1 - 2d_1 \quad (1)$$

Con este resultado se tiene una solución que satisface simultáneamente las condiciones de normalidad y ortogonalidad.

$$d_1 = k$$

$$d_2 = \frac{1}{2} k + \frac{1}{2} - k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} k$$

$$d_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} k$$

$$d_4 = \frac{1}{2} - k$$

$$d_5 = 1 - 2k$$

En este punto solamente falta imponer las condiciones de no negatividad:

$$k \geq 0, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} k \geq 0, \quad \frac{1}{2} - k \geq 0, \quad 1 - 2k \geq 0$$

estas restricciones a tres

$$k \geq 0, \quad 1 \geq k, \quad \frac{1}{2} \geq k,$$

que a su vez se resumen en $\frac{1}{2} \geq k \geq 0$

En este lugar se hace presente la necesidad de más teoría que oriente a dar los pasos siguientes, en particular la teoría de la dualidad en la programación geométrica; ciertamente, supongase que se recurre a la tabulación numérica y se hace por ejemplo $K = \frac{4}{10}$, con esto resulta

$$d_1 = \frac{4}{10}, d_2 = \frac{3}{10}, d_3 = \frac{3}{10}, d_4 = \frac{1}{10}, d_5 = \frac{3}{10}, \text{portanto}$$

$$v(\bar{d}) = \left[\frac{40(10)}{4} \right]^{\frac{4}{10}} \left[\frac{20(10)}{3} \right]^{\frac{3}{10}} \left[\frac{20(10)}{3} \right]^{\frac{3}{10}} \left[\frac{1(10)}{3(1)} \right]^{\frac{1}{10}} \left[\frac{4(10)}{3(2)} \right]^{\frac{3}{10}} \left[\frac{3}{10} \right]^{\frac{3}{10}}$$

$$v(\bar{d}) = \left[100 \right]^{\frac{4}{10}} \left[\frac{200}{3} \right]^{\frac{6}{10}} \left[\frac{10}{3} \right]^{\frac{1}{10}} \left[\frac{20}{3} \right]^{\frac{2}{10}} \left[\frac{3}{10} \right]^{\frac{3}{10}}$$

Supongase que con este método numérico se logra establecer el valor óptimo v^* de $v(\bar{d})$; pero en seguida surge la interrogante: ¿cómo pasar de los valores del vector $\bar{d}^*$ que optimiza a $v(\bar{d})$ a los valores t^* que optimizan a $g_0(\bar{t})$?

Conviene hacer otro ejemplo de dualización.

EJEMPLO

Plantear el problema dual del siguiente programa primal
Minimizar el polinomio

$$g_0(t_1, t_2) = 8t_1^3 t_2^{-1} + 4t_1^{-4} + 3t_2^4$$

sujeito a las restricciones

$$t_1 > 0, \quad t_2 > 0$$

$$g_1(t_1, t_2) = \frac{1}{4} t_1^{-3} t_2^{-1} + \frac{1}{3} t_1^{0.2} + \frac{1}{5} t_2^{0.4} \leq 1$$

$$g_2(t_1, t_2) = \frac{1}{3} t_1^2 + 7t_2^{-1.5} + 3t_1^{0.6} t_2^{1.3} \leq 1$$

SOLUCIÓN

La amplitud de variación de k es $k = 0, 1, 2$, luego

$$J[k] =$$

$k=0$			$k=1$			$k=2$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ahora coeficientes y exponentes se registran en tabla

$i=1$	$C_1 = 8$	$a_{11} = 3$	$a_{12} = -1$
$i=2$	$C_2 = 4$	$a_{21} = -4$	$a_{22} = 0$
$i=3$	$C_3 = 2$	$a_{31} = 0$	$a_{32} = 4$
$i=4$	$C_4 = 1/4$	$a_{41} = -3$	$a_{42} = -1$
$i=5$	$C_5 = 1/5$	$a_{51} = 0.2$	$a_{52} = 0$
$i=6$	$C_6 = 1/6$	$a_{61} = 0$	$a_{62} = 0.4$
$i=7$	$C_7 = 1/3$	$a_{71} = 2$	$a_{72} = 0$
$i=8$	$C_8 = 1/7$	$a_{81} = 0$	$a_{82} = -1.5$
$i=9$	$C_9 = 3$	$a_{91} = 0.6$	$a_{92} = 1.3$

Condiciones de ortogonalidad

$$\begin{bmatrix} 3, -4, 0, -3, 0.2, 0, 2, 0, 0.6 \\ -1, 0, 4, -1, 0, 0.4, 0, -1.5, 1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Funciones e_k : $e_0 = d_1 + d_2 + d_3$

$$e_1 = d_4 + d_5 + d_6$$

$$e_2 = d_7 + d_8 + d_9$$

Condición de normalidad $d_1 + d_2 + d_3 = 1$

Programa dual pedido

Maximizar la función dual

$$v(\bar{d}) = \left[\frac{8}{d_1} \right] \left[\frac{4}{d_2} \right] \left[\frac{3}{d_3} \right] \left[\frac{1/4}{d_4} \right] \left[\frac{1/5}{d_5} \right] \left[\frac{1/6}{d_6} \right] \left[\frac{1/3}{d_7} \right] \left[\frac{1/7}{d_8} \right] \left[\frac{3}{d_9} \right] \cdot$$

$$\cdot (d_4 + d_5 + d_6) (d_7 + d_8 + d_9)$$

sujeito a

$$d_1 \geq 0, d_2 \geq 0, d_3 \geq 0, d_4 \geq 0, d_5 \geq 0, d_6 \geq 0, d_7 \geq 0, d_8 \geq 0, d_9 \geq 0$$

$$d_1 + d_2 + d_3 = 1$$

$$3d_1 - 4d_2 + 0d_3 - 3d_4 + 0.2d_5 + 0d_6 + 2d_7 + 0d_8 + 0.6d_9 = 0$$

$$-d_1 + 0d_2 + 4d_3 - d_4 + 0d_5 + 0.4d_6 + 0d_7 - 1.5d_8 + 1.3d_9 = 0$$

La resolución de estos ejemplos requiere de pocos conocimientos de álgebra lineal en particular de la resolución de las ecuaciones simultáneas lineales. Asimismo de la teoría de la dualidad en la programación geométrica. Al desarrollo de la teoría de la programación geométrica le sirven de modelos la teoría de la programación lineal y la teoría de la programación convexa; pero la piedra angular de todo este inferir es el teorema de Farkas. En la mayoría de los textos se presenta como una conclusión de la teoría de la dualidad de la programación lineal, aquí es el punto de partida y su demostración por medio de la inducción matemática, quizá un tanto laboriosa, se acompaña de una pseudo demostración geométrica, cuya misión aclaratoria pretende la plena asimilación del contenido general del teorema. Se inicia el desarrollo teórico con un breve recordatorio de los teoremas fundamentales relativos a la teoría de la dualidad en la programación lineal.

C A P I T U L O I I I

B A S E S M A T E M A T I C A S

PROGRAMACIÓN LINEAL.

Se puede considerar que la teoría de la programación geométrica descansa en muchos teoremas de la programación lineal y la convexa; esta es una de las razones por las que exponen estos fundamentos.

TEOREMA 11.

Hipótesis 1: El vector $(x_1, \dots, x_p)$ de E^p donde $x_j \neq 0$, $j=1, \dots, p$ es una solución del sistema lineal homogéneo real

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p = 0, \quad i=1, \dots, r \quad (1)$$

Hipótesis 2: Toda solución del sistema (1) es una solución de la ecuación homogénea

$$b_1x_1 + \dots + b_px_p = 0.$$

Afirmación: Existen números reales $u_1, \dots, u_r$ no todos nulos tales que el sistema lineal real

$$a_{ij}y_j + \dots + a_{rp}y_r = b_j, \quad j=1, \dots, p. \quad (2)$$

admite la solución $(u_1, \dots, u_r)$.

Demostración

La hipótesis 1 significa

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = 0 \quad (3)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{r1}x_1 + \dots + a_{rp}x_p = 0$$

Si $u_1, \dots, u_r$ son números reales, descorados, no ambos nulos, entonces se multiplica por u_i a la i -ésima ecuación del sistema (3) con lo cual se obtiene el nuevo sistema

$$a_{11}x_1u_1 + \dots + a_{1p}x_pu_1 = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{r1}x_1u_r + \dots + a_{rp}x_pu_r = 0$$

sumando estas ecuaciones y considerando la hipótesis 2 resulta

$$(a_{11}v_1 + \dots + a_{r1}v_r)x_1 + \dots + (a_{1p}v_1 + \dots + a_{rp}v_r)x_p = b_1x_1 + \dots + b_px_p$$

consecuentemente

$$(a_{11}v_1 + \dots + a_{r1}v_r - b_1)x_1 + \dots + (a_{1p}v_1 + \dots + a_{rp}v_r - b_p)x_p = 0$$

Conforme a la hipótesis 1, $x_j \neq 0$, por consiguiente

$$a_{11}v_1 + \dots + a_{r1}v_r = b_1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{1p}v_1 + \dots + a_{rp}v_r = b_p$$

EDET.

TEOREMA 12: recíproco del anterior

Hipótesis 1: El vector real $(x_1, \dots, x_p)$ donde $x_j \neq 0$, $j=1, \dots, p$ es una solución del sistema lineal homogéneo real

$$a_{1j}x_1 + \dots + a_{pj}x_p = 0, \quad j=1, \dots, r \quad (1)$$

Hipótesis 2: El sistema lineal real

$$a_{1j}y_1 + \dots + a_{rj}y_r = b_j, \quad j=1, \dots, p \quad (2)$$

admite la solución $(v_1, \dots, v_r)$ en la que $v_1 \neq 0, \dots, v_r \neq 0$.

Afirmación: El vector $(x_1, \dots, x_p)$ es una solución de la ecuación homogénea $b_1x_1 + \dots + b_px_p = 0$.

Demostración

La hipótesis 2 afirma que $a_{11}v_1 + \dots + a_{r1}v_r = b_1$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{1p}v_1 + \dots + a_{rp}v_r = b_p$$

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ son los números reales de la hipótesis 1, y la i -ésima ecuación de (z) se multiplica por $-\alpha_i$, entonces

$$\begin{aligned} a_{11} v_1 x_1 + \dots + a_{r1} v_r x_1 &= b_1 x_1 \\ \vdots & \\ a_{1p} v_1 x_p + \dots + a_{rp} v_r x_p &= b_p x_p \end{aligned}$$

Al sumar miembro a miembro estas igualdades, se tiene

$$(a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p)u_1 + \dots + (a_{r1}x_1 + \dots + a_{rp}x_p)u_p = b_1x_1 + \dots + b_px_p.$$

De acuerdo con la hipótesis 1, el coeficiente de v_i es cero por consiguiente

$$b_1 x_1 + \dots + b_p x_p = 0$$

EDBT.

d'oro 18 ct.

Toda solución de
$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \cdot \bar{x} = 0$$

$$\begin{matrix} r \times p & p \times 1 & r \times 1 \end{matrix}$$

es solución de

$$\begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_p \end{bmatrix}_{1 \times p} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \end{bmatrix}_{p \times 1} = 0, \quad \bar{b} \cdot \bar{x} = 0$$

Consecuentemente el sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1r} & \dots & a_{rp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{bmatrix}, \quad A^t \bar{y} = \bar{b}$$

tiene colada.

ma's

TEOREMA 13

Hipótesis 1: Los números $x_1, \dots, x_p$ son reales diferentes de cero que satisfacen al sistema de desigualdades

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1p}x_p &\geq 0 \\ &\vdots \\ \alpha_{r1}x_1 + \dots + \alpha_{rp}x_p &\geq 0 \end{aligned} \quad (A)$$

Hipótesis 2: Los números reales $y_i \geq 0, i=1, \dots, m$ satisfacen al sistema de igualdades lineales

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + \dots + a_{r1}y_r &= b_1 \\ \dots & \\ a_{1p}y_1 + \dots + a_{rp}y_r &= b_p \end{aligned} \quad (B)$$

Afirmación.

$$b_1 x_1 + \dots + b_p x_p \geq 0$$

Demonstración

Conforme a la teoría de las desigualdades y la hipótesis Z , se obtiene al multiplicar la i -ésima desigualdad de (A) por y_i ,

$$\begin{aligned} & a_{11} x_1 y_1 + \dots + a_{1p} x_p y_1 \geq 0 \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 y_r + \dots + a_{rp} x_p y_r \geq 0 \end{aligned}$$

Siendo miembro a miembro estas desigualdades se obtiene

$$(\bar{a}_{11}y_1 + \dots + \bar{a}_{p1}y_p)x_1 + \dots + (\bar{a}_{1p}y_1 + \dots + \bar{a}_{pp}y_p)x_p \geq 0$$

De acuerdo con la hipótesis 2,

$$b_1 x_1 + \dots + b_p x_p \geq 0$$

TEOREMA 14: Lema de Farkas:

Afirmación: Existen los números reales $y_1 \geq 0, \dots, y_p \geq 0$ tales que

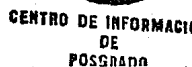
Observe que otra forma de enunciar este lema es,

Hipótesis: Toda solución $(x_1, \dots, x_p)$ de las desigualdades

es una solución de la desigualdad.

Afirmación: Existen las constantes $y_1, \dots, y_r$, no negativos con las que se cumplen las igualdades

$$a_{1p} y_1 + \dots + a_{rp} y_r = b_p.$$



Un enunciado más general del lema de Farkas es
TEOREMA 15: GENERALIZADO DE FARKAS.

Hipótesis: Las funciones $f_i: E^p \rightarrow E^1$, $i=1, \dots, r$ y $g_j: E^p \rightarrow E^1$, $j=1, \dots, s$ son funciones lineales homogéneas del punto $\bar{x} = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$, que llenan los requisitos

$$f_1(\bar{x}) \geq 0, \dots, f_r(\bar{x}) \geq 0$$

los cuales implican

$$g_1(\bar{x}) \geq 0, \text{ ó }, \dots, \text{ ó }, g_s(\bar{x}) \geq 0$$

Afirmación: Existen las constantes no negativas $y_1, \dots, y_r$

$w_1, \dots, w_s$, con alguna y_i y alguna w_j diferente de cero tales que se cumple la identidad

$$y_1 f_1(\bar{x}) + \dots + y_r f_r(\bar{x}) = w_1 g_1(\bar{x}) + \dots + w_s g_s(\bar{x})$$

Demostración por inducción matemática sucesiva.

Cuando $f_i: E^1 \rightarrow E^1$ y $g_j: E^1 \rightarrow E^1$, el teorema es trivial; ciertamente, si $f_1(x_1) = a_{11} x_1 \geq 0, \dots, f_r(x_1) = a_{r1} x_1 \geq 0$, $a_{i1} > 0$ y obligatoriamente $g_1(x_1) = b_{11} x_1 \geq 0, \text{ ó }, \dots, \text{ ó }, g_s(x_1) = b_{s1} x_1 \geq 0$ donde $b_{j1} > 0$, entonces $y_1 > 0$, $y_2 = \dots = y_r = 0$, $w_1 > 0$, $w_2 = \dots = w_s = 0$ implican que $a_{11} y_1 x_1 = w_1 b_{11} x_1$ es una identidad cuando $y_1 = \frac{w_1}{a_{11}} b_{11}$ ya que a_{11} y b_{11} son del mismo signo.

Ahora se supone válido el teorema cuando se consideran $m < M$ variables y $s=1$, por ejemplo

$$y_1 f_1(\bar{x}_{M-1}) + \dots + y_r f_r(\bar{x}_{M-1}) = w_1 g_1(\bar{x}_{M-1}), \text{ donde}$$

$\bar{x}_{M-1} = (x_1, \dots, x_{M-1})$; se analiza el caso $m=M$ y se pretende probar la identidad $y_1 f_1(\bar{x}_M) + \dots + y_r f_r(\bar{x}_M) = w_1 g_1(\bar{x}_M)$ (1) donde $\bar{x}_M = (x_1, \dots, x_M)$

Para facilitar la escritura se conviene en hacer

$$t = g_i(\bar{x}_M) = b_1 x_1 + \dots + b_{M-1} x_{M-1} + b_M x_M \quad (2)$$

Además las funciones f_i son de M variables $x_1, \dots, x_{M-1}, x_M$ que se consideran componentes del vector $\bar{x}_M = (x_1, \dots, x_M)$

$$f_i(\bar{x}_M) = a_{i,1} x_1 + \dots + a_{i,M-1} x_{M-1} + a_{i,M} x_M \quad (3)$$

Si en (2) se supone $b_1 = \dots = b_{M-1} = b_M = 0$ el teorema es evidente porque se cumple (1) con $y_1 = \dots = y_t = 0$, consecuentemente se admite que por lo menos uno de los coeficientes $b_k \neq 0$, para fijar ideas se acepta $b_M \neq 0$,

hipótesis que permite despejar la incógnita x_M de la ecuación (2); en esta forma se obtiene

$$x_M = -\frac{b_1}{b_M} x_1 - \dots - \frac{b_{M-1}}{b_M} x_{M-1} + t$$

Al sustituir este valor de x_M en la ecuación (3) se obtiene

$$\begin{aligned} f_i(\bar{x}_M) &= F_i(\bar{x}_{M-1}) + a_{i,M} t = a_{i,1} x_1 + \dots + a_{i,M-1} x_{M-1} - \\ &\quad - \frac{a_{i,M} b_1}{b_M} x_1 - \dots - \frac{a_{i,M} b_{M-1}}{b_M} x_{M-1} + \\ &\quad + a_{i,M} t \geq 0 \end{aligned}$$

o bien, reuniendo los coeficientes de las variables x_i , se obtiene la nueva expresión

$$\begin{aligned}
 f_i(\bar{x}_M) &= F_i(\bar{x}_{M-1}) + a_{i,M} t = \frac{a_{i,1} b_M - a_{i,M} b_1}{b_M} x_1 + \\
 &+ \dots + \\
 &+ \frac{a_{i,M-1} b_M - a_{i,M} b_{M-1}}{b_M} x_{M-1} + \\
 &+ a_{i,M} t \geq 0 \quad (4)
 \end{aligned}$$

Se distinguen ahora tres clases de funciones:

$$a_{i,M} < 0, \quad a_{i,M} = 0, \quad a_{i,M} > 0$$

La primera clase se supone que cuenta con p_1 elementos, la segunda con p_2 y la tercera con p_3 elementos.

Cuando $a_{i,M} \neq 0$, las desigualdades (4) se pueden dividir entre el valor absoluto $|a_{i,M}|$ de $a_{i,M}$, por esta razón no cambia el sentido de las desigualdades y se obtiene

$$F_q^-(\bar{x}_{M-1}) - t \geq 0, \quad q=1, \dots, p_1, \text{ donde } a_{i,M} < 0 \quad (5)$$

$$F_v^0(\bar{x}_{M-1}) \geq 0, \quad v=1, \dots, p_2, \text{ donde } a_{i,M} = 0 \quad (6)$$

$$F_\mu^+(\bar{x}_{M-1}) \geq 0, \quad \mu=1, \dots, p_3, \text{ donde } a_{i,M} > 0 \quad (7)$$

Si se ha de cumplir $y_1 f_1(\bar{x}_M) + \dots + y_r f_r(\bar{x}_M) = w_1 t$, entonces por hipótesis w_1 no puede ser negativo, luego ϕ_3 no puede ser cero, y para no violentar el caso general se supone que también $\phi_1 \neq 0$.

Si se suman una desigualdad de (5) con una de (7) resulta

$$F_q^-(\bar{x}_{M-1}) + F_u^+(\bar{x}_{M-1}) \geq 0, \quad q=1, \dots, p_1, \quad u=1, \dots, p_3 \quad (3)$$

Si $t_0 = -\min \{ F_u^+(\bar{x}_{M-1}) \}$, entonces existe un valor ℓ de u para el cual $t_0 = -F_\ell^+(\bar{x}_{M-1})$, por consiguiente

$$F_q^-(\bar{x}_{M-1}) - t_0 = F_q^-(\bar{x}_{M-1}) + F_\ell^+(\bar{x}_{M-1})$$

$$\text{De acuerdo con las relaciones (3)} \quad F_q^-(\bar{x}_{M-1}) \geq t_0 \quad (4)$$

$$\text{y según la definición de } t_0 \text{ resulta } F_u^+(\bar{x}_{M-1}) \geq -t_0 \quad (10)$$

$$\text{De (4) y (10) se concluye } F_q^-(\bar{x}_{M-1}) \geq t_0 \geq F_u^+(\bar{x}_{M-1}) \quad (11)$$

Por otra parte

$$F_q^-(\bar{x}_{M-1}) \geq t \quad \text{de (5)}$$

$$t \geq F_u^+(\bar{x}_{M-1}) \quad \text{de (7)}$$

consecuentemente

$$F_q^-(\bar{x}_{M-1}) \geq t \geq F_u^+(\bar{x}_{M-1}) \quad (12)$$

Al comparar (11) con (12) se infiere que t_0 satisface a todas las relaciones (5), (6) y (7) por consiguiente $t_0 \geq 0$. Asimismo de (7) resulta $t \geq t_0$. También de la definición de $t_0 = -F_\ell^+(\bar{x}_{M-1})$ se deduce que

$$F_1^+(\bar{x}_{M-1}) \leq 0, \dots, F_2^+(\bar{x}_{M-1}) \leq 0, \dots, 0, \dots, 0, F_{p_3}^+(\bar{x}_{M-1}) \leq 0$$

En este momento se ha logrado establecer: las funciones $F_s^0: E^{M-1} \rightarrow E', s=1, \dots, p_2, F_q^- + F_u^+: E^{M-1} \rightarrow E' \text{ y } F_u^+: E^{M-1} \rightarrow E'$

donde $q=1, \dots, p_1$ y $u=1, \dots, p_3$ son funciones homogéneas del punto $\bar{x}_{M-1} = (x_1, \dots, x_{M-1}) \in E^p$, que llenan los requisitos

$$F_U^0(\bar{x}_{M-1}) \geq 0, U=1, \dots, p_2, \quad F_q^-(\bar{x}_{M-1}) + F_u^+(\bar{x}_{M-1}) \geq 0,$$

$q=1, \dots, p_1$, $u=1, \dots, p_3$ los cuales implican $-F_1^+(\bar{x}_{M-1}) \geq 0$ ó, $-F_2^+(\bar{x}_{M-1}) \geq 0$, ó, ..., ó, $-F_{p_3}^+(\bar{x}_{M-1}) \geq 0$

De la hipótesis de inducción se infiere: existen constantes no negativas b_U , b_u y $b_{q,u}$, donde $q=1, \dots, p_1$, $u=1, \dots, p_3$, tales que se cumple la identidad

$$\sum_{U=1}^{p_2} b_U F_U^0(\bar{x}_{M-1}) + \sum_{u=1}^{p_3} \sum_{q=1}^{p_1} b_{q,u} [F_q^-(\bar{x}_{M-1}) + F_u^+(\bar{x}_{M-1})] = \sum_{u=1}^{p_3} F_u^+(\bar{x}_{M-1}) b_u$$

Se puede suponer $b_1 + \dots + b_{p_3} = w_1$ por consiguiente

$$\sum_{U=1}^{p_2} b_U F_U^0(\bar{x}_{M-1}) + \sum_{u=1}^{p_3} \sum_{q=1}^{p_1} b_{q,u} [F_q^-(\bar{x}_{M-1}) - t + F_u^+(\bar{x}_{M-1}) + t] + \sum_{u=1}^{p_3} b_u [F_u^+(\bar{x}_{M-1}) + t] = w_1 t$$

o bien

$$y_1 f_1(\bar{x}_M) + y_2 f_2(\bar{x}_M) + \dots + y_r f_r(\bar{x}_M) = w_1 g_1(\bar{x}_M)$$

Esta identidad prueba el teorema cuando $m=M$ y $s=1$.

Para levantar la restricción $s=1$, nuevamente se utiliza el método de la inducción matemática, lo cual significa que el teorema es válido cuando $s < S$ y se estudia el caso $s=S$

Con el estudio anterior se probó que cuando $f_1(\bar{x}) \geq 0$, $f_2(\bar{x}) \geq 0, \dots, f_r(\bar{x}) \geq 0$ implican $g_1(\bar{x}) \geq 0$, ó, ..., ó, $g_s(\bar{x}) \geq 0$ entonces se cumple la identidad

$$y_1 f_1(\bar{x}) + \dots + y_r f_r(\bar{x}) = w_1 g_1(\bar{x}) + \dots + w_s g_s(\bar{x})$$

cuando $w_1 \neq 0$ y $w_2 = \dots = w_s = 0$

El problema se reduce a una situación en la que existe $\bar{x}_0$ tal que $f_1(\bar{x}_0) \geq 0, \dots, f_r(\bar{x}_0) \geq 0$ y $-g_1(\bar{x}_0) \geq 0$ (13)

con la disyunción

$$g_2(\bar{x}_0) \geq 0, \dots, g_s(\bar{x}_0) \geq 0 \quad (14)$$

válida según la hipótesis del teorema.

Si (13) se cumple en $\bar{x}_1$ pero $g_1(\bar{x}_1) = 0$, entonces $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \epsilon \bar{x}_0$ donde $\epsilon > 0$.

A causa de la linealidad de las funciones

$$f_i(\bar{x}_2) = f_i(\bar{x}_1) + \epsilon f_i(\bar{x}_0) \text{ en consecuencia } f_i(\bar{x}_2) \geq 0.$$

$$g_1(\bar{x}_2) = g_1(\bar{x}_1) + \epsilon g_1(\bar{x}_0) = \epsilon g_1(\bar{x}_0) < 0$$

Estos resultados prueban que (13) y (14) valen en $\bar{x}_2$ y si $\epsilon \rightarrow 0$, entonces (14) vale en $\bar{x}_1$ consecuentemente (13) implica (14)

Al aplicar el Teorema al caso $s = S - 1$, se obtiene

$$y_1 f_1(\bar{x}) + \dots + y_r f_r(\bar{x}) + w_1 [-g_1(\bar{x})] = w_2 g_2(\bar{x}) + \dots + w_s g_s(\bar{x})$$

$$\text{o bien } y_1 f_1(\bar{x}) + \dots + y_r f_r(\bar{x}) = w_1 g_1(\bar{x}) + w_2 g_2(\bar{x}) + \dots + w_s g_s(\bar{x})$$

EDET.

TEOREMA 16 : Demostración Geométrica del Lema de Farkas.

Es importante intuir plenamente el aspecto geométrico del lema de Farkas, cuyo enunciado en forma matricial ayuda a visualizarlo.

Hipótesis : Toda solución del sistema de desigualdades

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$r \times m \qquad m \times 1 \qquad r \times 1$

es una solución de la desigualdad

$$b_1 x_1 + \dots + b_m x_m \geq 0$$

Afirmación: Existen los números reales $y_1 \geq 0, \dots, y_r \geq 0$ tales que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$m \times r \quad r \times 1 \quad m \times 1$

La geometría visualizable obliga a tomar $m=3$, con lo cual, si toda solución del sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\bar{x} \geq 0, \text{ es}$$

$r \times 3 \quad 3 \times 1 \quad r \times 1$

solución de

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \bar{b}^t \cdot \bar{x} \geq 0, \text{ entonces}$$

$1 \times 3 \quad 3 \times 1$

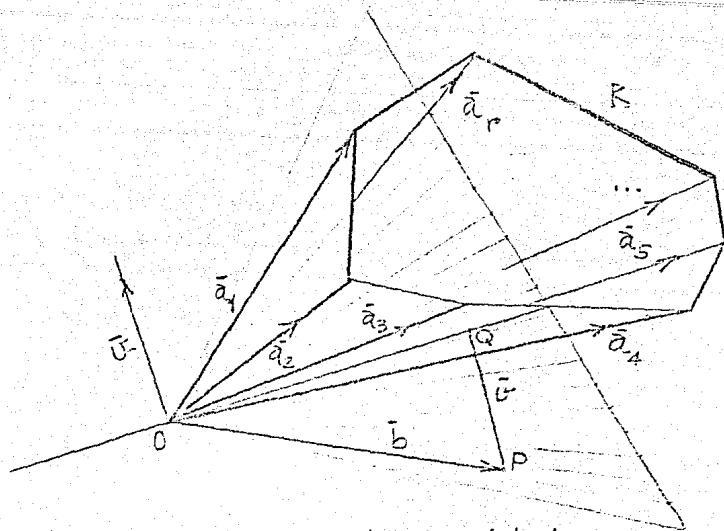
hay r reales $y_i \geq 0$ tales que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad A^t \bar{y} = \bar{b}$$

$3 \times r \quad r \times 1 \quad 3 \times 1$

El i -ésimo vector fila de A es $\bar{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$ con esta notación la afirmación toma la forma

$$\bar{a}_1 y_1 + \bar{a}_2 y_2 + \dots + \bar{a}_r y_r = \bar{b}$$



El significado de esta igualdad es: el vector $\bar{b}$ se halla en el cono poliédrico K , cuyos elementos son los vectores

$$\bar{C} = \bar{a}_1 y_1 + \dots + \bar{a}_r y_r, \text{ cuando } y_i \geq 0, i=1, \dots, r$$

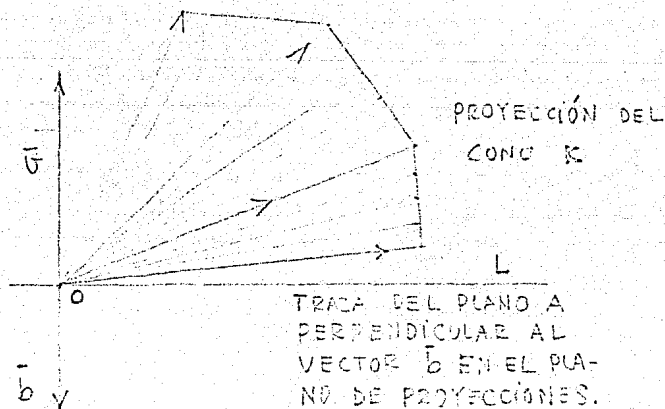
Al seguir el método por reducción al absurdo, contra la afirmación del lema de Farkas se supone que $\bar{b}$ no se halla en K y que Q es el punto más cercano al punto P extremo de $\bar{b}$. Hay tres posibilidades para la posición de Q : 1. se halla en una cara del cono, 2. es un punto de una arista y 3. coincide con el origen O . En los dos primeros casos se proyecta el cono K sobre el plano OPQ . La recta OQ es la proyección de un plano A perpendicular al vector $\bar{U}$ y se observa que todos los puntos de la proyección se hallan a un lado de A y el vector $\bar{b}$ en el otro porque de otra forma Q no sería el punto más cercano a P .

Por otra parte como

$$a_{i1}U_1 + a_{i2}U_2 + a_{i3}U_3 = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) \cdot (U_1, U_2, U_3) \geq 0, \quad i=1, \dots, r, \quad (1)$$

$$\text{resulta } b_1U_1 + b_2U_2 + b_3U_3 < 0 \quad (2)$$

contra la hipótesis del lema de Farkas. Cuando Q coincide con el origen, si A es un plano perpendicular al vector $\bar{b}$, se proyecta el cono K sobre un plano perpendicular al plano A , que contiene al vector



$\vec{b}$ y cuya traza en el plano A es la recta OL. Nuevamente la proyección de $\vec{b}$ y la de K se hallan en lados opuestos respecto a la recta OL, pues de otro modo el vértice O del cono no sería el más cercano a P, por consiguiente $\vec{b}$ y K se hallan en lados opuestos respecto al plano A; esta situación significa que el vector $\vec{b} = -\vec{b}$ satisface las relaciones (1) y (2) contra la hipótesis del lema de Farfán.

De estos resultados se concluye que el vector $\vec{b}$ debe ser un punto del cono K EDET.

TEOREMA 17: DE TUCKER.

Hipótesis: Se consideran los sistemas homogéneos lineales duales

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_p \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$n \times p$ $p \times 1$ $n \times 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$y_1 \geq 0, \dots, y_n \geq 0$$

Afirmación: Los sistemas (1) y (2) tienen soluciones particulares z^* y y^* respectivamente, tales que

$$\begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p} \\ \vdots \\ a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip} \\ \vdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{np} \end{bmatrix}_{n \times p} \begin{bmatrix} z_1^* \\ z_2^* \\ \vdots \\ z_p^* \end{bmatrix}_{p \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Demostración.

Los sistemas (1) y (2) admiten la solución trivial. Si F es el conjunto de enteros i tales que el sistema (1) tiene una solución $\bar{z}$ para la cual

$$\begin{bmatrix} a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_p \end{bmatrix} = a_{i1}\bar{z}_1 + a_{i2}\bar{z}_2 + \dots + a_{ip}\bar{z}_p > 0$$

si se escogen estas soluciones para cada entero $i \in F$ al sumar estos vectores se tiene una solución z^* del sistema (1) en la cual

$$a_{i1}z_1^* + a_{i2}z_2^* + \dots + a_{ip}z_p^* > 0 \text{ cuando } i \in A; \quad (3)$$

pero si $i \notin A$ entonces el producto $\bar{a}_i \cdot \bar{z}$ no es positivo para toda solución $\bar{z}$ del sistema (1), esto es

$$a_{q1}\bar{z}_1 + a_{q2}\bar{z}_2 + \dots + a_{qp}\bar{z}_p \leq 0.$$

cuando

$$a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \dots + a_{ip}z_p \geq 0, \quad i=1, \dots, n, \quad i \neq q$$

En este punto de la demostración se observa que se puede aplicar el lema de Farkas con el cual se afirma que existen los números $y_i \geq 0, i=1, \dots, n, i \neq q$ tales que

$$a_{q1} + \sum_{i=1}^n y_i a_{ij} = 0, \quad j=1, \dots, p$$

Por consiguiente el vector $\bar{y}$ cuya i -ésima componente es

$$y_i = \begin{cases} y_i & \text{cuando } i=1, \dots, n, i \neq q \\ 1 & \text{cuando } i=q \end{cases}$$

satisface al sistema (2), conclusión que prueba la existencia de un vector solución con cada entero $q \notin A$. Al seleccionar uno de estos vectores para cada $q \notin A$ y a continuación sumarlos, se obtiene una solución y^* del sistema (2) para el cual

$$y_i^* > 0, \text{ cuando } i \notin A \quad (4)$$

Los vectores solución z^* y y^* cuyas propiedades se muestran en (3) y (4), respectivamente, prueban el teorema

EDET.

COROLARIO

Con las hipótesis del teorema de Tucker se afirma: si hay un entero h con el que se cumple $a_{h1}z_1^* + \dots + a_{hp}z_p^* > 0$, entonces $y_h = 0$, para toda solución $\bar{y}$ de (2).

Demostración

Si $\bar{y}$ es una solución cualquiera del sistema (2), entonces

$$\sum_{i=1}^n y_i a_{ij} = 0, \quad j=1, \dots, p,$$

por consiguiente $\sum_{j=1}^p z_j^* \left(\sum_{i=1}^n y_i a_{ij} \right) = 0$, donde se puede

intercambiar el orden de las sumatorias, con lo cual se tiene

$$\sum_{i=1}^n y_i \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} z_j^* \right) = 0$$

en consecuencia si $N = a_{h1} z_1^* + \dots + a_{hp} z_p^* > 0$, entonces $y_h = 0$ porque los números y_i y N son todos no negativos

EDET

Del lema de Farkas y el teorema de Tucker se deducen todas las propiedades de las desigualdades lineales necesarias para desarrollar la teoría de la dualidad en la programación geométrica, a la cual sirve de paradigma la teoría de la dualidad de la programación lineal.

La trascendencia del teorema de Tucker obliga a presentar por lo menos un ejemplo numérico que ayude a una mejor intelección de su afirmación.

Ejemplo

Se tienen los sistemas homogéneos lineales duales

$$-3z_1 + z_2 \geq 0$$

$$z_1 + z_2 \geq 0 \quad (1)$$

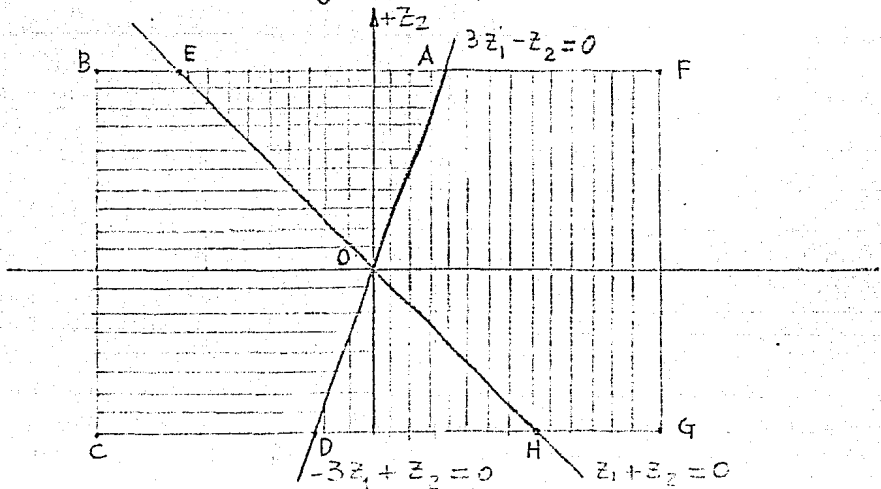
$$3z_1 - z_2 \geq 0$$

$$-3y_1 + y_2 + 3y_3 = 0$$

$$y_1 + y_2 - y_3 = 0 \quad (2)$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

El sistema (1) es la intersección de tres semiplanos en E^2 cuyas respectivas fronteras son $-3z_1 + z_2 = 0$, $z_1 + z_2 = 0$ y $3z_1 - z_2 = 0$. Las soluciones del sistema (1) constituyen un conjunto que recibe el nombre de región de factibilidad.



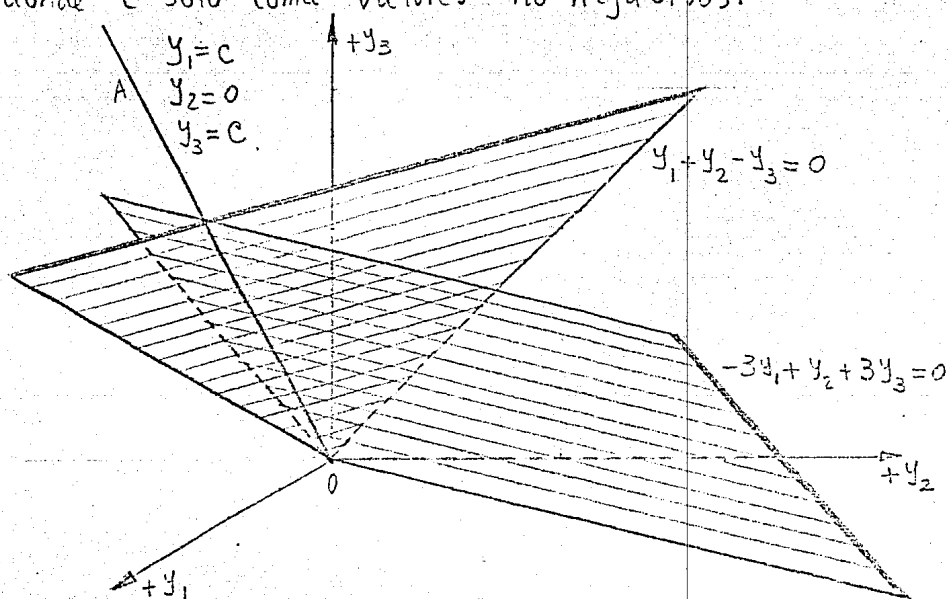
El conjunto de puntos $-3z_1 + z_2 \geq 0$ es un semiplano que en la figura se representa con el trapecio ABCD pero se debe recordar que se trata de un conjunto no acotado.

El conjunto $z_1 + z_2 \geq 0$ no acotado en la figura es el trapecio EFGH. El semiplano $3z_1 - z_2 \geq 0$ se indica con el trapecio AFGD consecuentemente la región de factibilidad del sistema (1) es la semirrecta OA.

En cuanto al sistema (2) se ve que su región factible es la recta obtenida con la intersección de los planos $-3y_1 + y_2 + 3y_3 = 0$ y $y_1 + y_2 - y_3 = 0$. La ecuación paramétrica de esta recta es

$$y_1 = c \quad y_2 = 0 \quad y_3 = c.$$

donde c sólo toma valores no negativos.



El teorema de Tucker afirma que hay un punto y^* de la recta A que al sumarle la imagen de un punto z^* de la región factible OEA se obtiene un vector con todas sus componentes positivas; ciertamente el punto $z_1^* = 1, z_2^* = 3$ es una solución del sistema (1). Su imagen

$$\text{es } \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cuando $C=2$, se obtiene la solución $y_1^* = 2, y_2^* = 0, y_3^* = 2$ del sistema (2). Ahora bien, si a esta solución se le suma la imagen obtenida resulta el vector

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con todas sus componentes positivas.

A continuación se presentan los teoremas fundamentales de la teoría de la programación lineal.

PROGRAMACIÓN LINEAL

El problema general normalmente se describe con un conjunto de n restricciones cuyos elementos pueden ser ecuaciones o desigualdades lineales a las que deben satisfacer las variables $x_1, \dots, x_p$ cuyos valores deben ser reales no negativos que minimizan o maximizan una función lineal

$Z = b_1 x_1 + \dots + b_p x_p$ que recibe en las aplicaciones el nombre de función objetivo y las constantes $b_1, \dots, b_p$ son los coeficientes de costo.

La forma matemática de expresar esta definición es

Minimizar la función

$$Z = b_1 x_1 + \dots + b_p x_p$$

y cumplir con las restricciones

$$a_{i1} x_1 + \dots + a_{ip} x_p \{ \geq, =, \leq \} C_i, \quad i=1, \dots, n$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_p \geq 0$$

Cada restricción es un conjunto de puntos y el siste-

mo de restricciones es la intersección de estos conjuntos, intersección que toma el nombre de región factible. Se observa que toda restricción de la forma

$$a_{k1}x_1 + \dots + a_{kp}x_p = b_k$$

equivale a las dos desigualdades

$$\text{a. } x_1 + \dots + x_p \leq b_k \quad \text{u.} \quad \text{a. } x_1 + \dots + x_p \geq b_k$$

Asimismo, las restricciones de la forma $a_{r1}x_1 + \dots + a_{rp}x_p \leq b_r$ se pueden escribir como

$$(-a_{r1})x_1 + \dots + (-a_{rp})x_p \geq -b_r$$

Si se presenta el caso de variables x_i que toman valores positivos y negativos, entonces estas se pueden sustituir por la diferencia de dos variables que toman valores no negativos. También maximizar $g(x_1, \dots, x_p)$ es minimizar $f(x_1, \dots, x_p) = -g(x_1, \dots, x_p)$, consecuentemente todo programa lineal se puede reducir al tipo

PROGRAMA LINEAL PRIMAL (PLP)

Minimizar
sujeto a

$$z = b_1 x_1 + \dots + b_p x_p$$

$$Z = b^{-t} \bar{X}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p \geq c_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p \geq c_n \end{array} \right\} [A]\bar{x} \geq \bar{c}$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_p \geq 0, \quad \bar{x} \geq \bar{0}$$

que matricialmente se le da la forma P

$$\begin{array}{c|c} a_{11}, \dots, a_{1p} & C_1 \\ \dots & \vdots \\ a_{n1}, \dots, a_{np} & C_n \\ \hline b_1, \dots, b_p & * \end{array}$$

(D)

Maximize $g = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$

$$g = \bar{C}^t \bar{Y}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}y_1 + \dots + a_{n1}y_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{1p}y_1 + \dots + a_{np}y_n \leq b_p \\ y_1 \geq 0, \dots, y_n \geq 0 \end{array} \right\} [A]\bar{Y} \leq \bar{b} \quad \bar{Y} \geq 0$$

que se obtiene con una transposición de la forma P y la sustitución de $\geq$ por $\leq$

$a_{11}, \dots, a_{n1}$	b_1
$\dots \dots \dots$	$\dots$
$a_{1p}, \dots, a_{np}$	b_p
$c_1, \dots, c_n$	$*$

$\leq$

(D)

Ahora es el momento de recordar algunos conceptos de álgebra lineal.

En el sistema de ecuaciones lineales

$$[A] \bar{X} = \bar{b} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}, \quad p < n \quad (1)$$

si el rango de $[A]$ es p , entonces existe un conjunto de p columnas que son vectores L-in; para facilitar la notación se supone que son las p primeras, con las cuales se forma la matriz rector

$$[B] = \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1p} \\ \dots \dots \dots \\ a_{1p}, \dots, a_{pp} \end{bmatrix} \quad \text{donde } \det[B] \neq 0$$

Con esta matriz se obtiene la solución única del sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1p} \\ \dots \dots \dots \\ a_{1p}, \dots, a_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_p \end{bmatrix}, \quad X_p = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \end{bmatrix}$$

consecuentemente se cumple

$$\left[\begin{array}{c|c} a_{11}, \dots, a_{1p} & a_{1,p+1}, \dots, a_{1n} \\ \hline \dots & \dots \\ a_{1p}, \dots, a_{pp} & a_{p,p+1}, \dots, a_{pn} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \\ \hline 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_p \\ \hline 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$p \times n \quad n \times 1 \quad p \times 1$

El vector $\bar{X}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \\ \hline 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ se llama solución básica del sistema (1), y

las variables $x_1, \dots, x_p$ son las variables básicas. Si una o más de estas es cero, entonces la solución básica $\bar{X}_B$ es degenerada. Si $\bar{X}$ es solución del sistema $[A]\bar{X} = \bar{b}$, $\bar{X} \geq \bar{0}$, entonces $\bar{X}$ es solución factible; también hay soluciones básicas factibles y básicas factibles degeneradas.

TEOREMA 18

Hipótesis 1: En el programa lineal primal (PLP)

Minimizar $C^T \bar{X}$

sujeito a $[A]\bar{X} = b$, $\bar{X} \geq 0$ (P)

la matriz A es de orden $p \times n$ y su rango es p.

Hipótesis 2: El PLP admite una solución factible.

Afirmación: El PLP admite una solución básica factible.

Demostración

Si $\bar{a}_j, j=1, \dots, n$ son las columnas de $[A]$, según la hipótesis 2 existe la solución factible $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ que satisface a las ecuaciones

$$\bar{a}_1 x_1 + \dots + \bar{a}_n x_n = \bar{b}$$

Si existen q variables x_i mayores que cero, por conveniencia las q primeras, entonces

$$a_1 x_1 + \dots + \bar{a}_q \bar{x}_q = \bar{b} \quad (1)$$

Se observan dos casos: 1.) $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_q$ es un conjunto de vectores L-in. 2.) $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_p$ es L-dep.

Primer caso: $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_q\}$ es L-in. Claramente $q \leq p$; cuando $q=p$ la solución es básica y la afirmación está probada. Si $q < p$ como A tiene rango p , los $p-q$ vectores pueden hallarse entre los restantes $n-p$ de forma que se tengan los p vectores L-in. Al asignar el valor cero a las correspondientes variables $p-q$ se tiene una solución básica factible, posiblemente degenerada.

SEGUNDO CASO: Si $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_p\}$ es L-dep, entonces existe una combinación no trivial de estos vectores igual al vector cero, por esto en

$$y_1 \bar{a}_1 + \dots + y_p \bar{a}_p = \bar{0} \quad (2)$$

existe por lo menos una positiva, consecuentemente de (1) y (2)

$$(x_1 - \epsilon y_1) \bar{a}_1 + \dots + (x_p - \epsilon y_p) \bar{a}_p = \bar{b} \text{ para toda } \epsilon.$$

los coeficientes $x_i - \epsilon y_i$ son una solución de las igualdades pero algunos pueden no cumplir con $x_i - \epsilon y_i \geq 0$.

Si $\bar{Y} = (y_1, \dots, y_p, 0, \dots, 0)$, entonces es una solución de las ecuaciones para todo valor de ϵ y cuando $\epsilon=0$, esta solución coincide con la solución factible original.

Cuando ϵ aumenta a partir de cero, las distintas componentes aumentan, disminuyen o permanecen constan-

tes, según las y_i correspondientes sean negativas, positivas o cero. Se partió de la hipótesis que afirma la positividad por lo menos de una y_i , en consecuencia por lo menos una de las componentes decrece cuando ϵ aumenta. Se sigue aumentando el valor de ϵ hasta que una o más de las componentes sean cero. Específicamente se acepta

$$\epsilon = \min \left\{ \frac{x_i}{y_i} : y_i > 0 \right\}$$

Con este valor de ϵ , la solución $\bar{x} - \epsilon \bar{y}$ es factible y tiene cuando más $p-1$ variables positivas. El proceso se repite si es necesario y se van eliminando variables positivas hasta lograr una solución factible cuyas columnas forman un conjunto L-in. Al llegar a este punto se aplica el caso 1.

E.O.E.T.

TEOREMA 19.

Hipótesis 1: En el PLP, $b^T \bar{x}$, $[A] \bar{x} = b$, $\bar{x} \geq 0$, la matriz A es de orden $p \times n$ y rango p .

Hipótesis 2: EL PLP admite una solución óptima factible
Afirmación: EL PLP admite una solución óptima básica factible.

Demostración

Si $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ es una solución óptima factible, como en el primer caso del teorema anterior, se supone que hay exactamente p variables positivas, $x_1, \dots, x_p$. Se presentan dos casos: la independencia lineal y la dependencia lineal. El primer caso se trata como su correspondiente del teorema anterior. El segundo caso sigue los pasos de su correspondiente pero se debe mostrar que la solución $\bar{x} - \epsilon \bar{y}$ es óptima. Para probar la optimidad, se observa que el valor de la solución $\bar{x} - \epsilon \bar{y}$ es $\bar{c} \bar{x} - \epsilon \bar{c} \bar{y}$ (1)

Cuando ϵ es suficientemente pequeña, $\bar{x} - \epsilon \bar{y}$ es una solución factible para valores positivos, o negativos de

ϵ ; de esta forma se concluye que $\bar{C}\bar{y} = 0$, ya que de ser $\bar{C}\bar{y} \neq 0$, se puede determinar un pequeño valor de ϵ con el signo adecuado con la finalidad de lograr que $\bar{C}\bar{x} - \epsilon\bar{C}\bar{y}$ tenga un valor más pequeño que $\bar{C}\bar{x}$ para conservar la factibilidad. Esta situación es posible que viole la hipótesis de optimalidad de $\bar{x}$ y en consecuencia se debe tener $\bar{C}\bar{y} = 0$.

Se ha establecido que la nueva solución factible con pocas componentes positivas es también óptima. En este punto la prueba se completa como en el primer caso. EDET.

CONCEPTOS IMPORTANTES.

Un programa lineal es consistente, cuando existe por lo menos un punto que satisface a las restricciones.

El ínfimo del PLP es la frontera inferior restringida MP de la función objetivo $Z = b_1 x_1 + \dots + b_p x_p$, cuando el PLP es consistente. El ínfimo M_P recibe el nombre de valor mínimo del PLP si hay un vector $\bar{x}'$ que además de cumplir con las restricciones del programa P cumple con $b \cdot \bar{x}' = M_P$.

Si el PLD es consistente, el supremo restringido MD de $g = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ se llama supremo del PLD; este supremo se llama valor máximo del PLD si existe un vector $\bar{y}'$ que satisface las restricciones del programa D y además $c_1 y'_1 + \dots + c_n y'_n = MD$.

TEOREMA 20

Hipótesis: El punto $\bar{x}$ satisface las restricciones del PLP y $\bar{y}$ satisface las restricciones del PLD.

Afirmación: $b_1 x_1 + \dots + b_p x_p \geq c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ donde la igualdad vale cuando

$$x_j = 0, \text{ ó, } y_1 a_{1j} + \dots + y_n a_{nj} = b_j, \quad j=1, \dots, p.$$

$$\bar{y}_1 = 0, \text{ ó, } \bar{a}_{11} \bar{x} + \dots + \bar{a}_{1p} \bar{x} = c_1, \text{ ó, } \bar{a}_{21} \bar{x} + \dots + \bar{a}_{2p} \bar{x} = c_2, \text{ ó, } \dots$$

Por la hipótesis

Por la hipótesis

$$b_1 \geq y_1 a_{11} + \dots + y_n a_{n1}$$

$$\vdots$$

$$b_p \geq y_1 a_{1p} + \dots + y_n a_{np}.$$

Como $x_1 \geq 0, \dots, x_p \geq 0$, la j -ésima desigualdad se multiplica por x_j y se suman los resultados:

$$b_1 x_1 + \dots + b_p x_p \geq (y_1 a_{11} + \dots + y_n a_{n1}) x_1 + \dots + (y_1 a_{1p} + \dots + y_n a_{np}) x_p \quad (1)$$

$$b_1 x_1 + \dots + b_p x_p \geq (a_{11} x_1 + \dots + a_{1p} x_p) y_1 + \dots + (a_{n1} x_1 + \dots + a_{np} x_p) y_n \quad (2)$$

Nuevamente por la hipótesis

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p & \geq & c_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mp}x_p & \geq & c_m \end{array}$$

Por consiguiente

$$b_1 x_1 + \dots + b_p x_p \geq c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

Cuando en el PLD $a_{11} y_1 + \dots + a_{n1} y_n = b_1$

$$a_{1p} y_1 + \dots + a_{np} y_n = b_p$$

de (1) resulta $b_1 x_1 + \dots + b_p x_p = b_1' x_1 + \dots + b_p' x_p$.

Si en el PLP

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = c_1$$

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = c_n$$

de (2) resulta

$$b_1 x_1 + \dots + b_p x_p = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

TEOREMA 21.

Hipótesis : EL PLP es consistente y tiene un ínfimo finito MP

Afirmación : EL PLD es consistente y tiene un valor máximo MD = MP.

Demostración.

Según la hipótesis $b_1 x_1 + \dots + b_p x_p \geq MP$

y cada vector $\bar{x}$ satisface a las restricciones

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1p} x_p \geq c_1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n1} x_1 + \dots + a_{np} x_p \geq c_n$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_p \geq 0$$

Con el cambio de variable $x_1 = \frac{1}{t} X_1, \dots, x_p = \frac{1}{t} X_p$

se obtiene

$$\frac{1}{t} (b_1 X_1 + \dots + b_p X_p) \geq MP$$

o bien

$$b_1 X_1 + \dots + b_p X_p - t MP \geq 0 \quad (1)$$

$$a_{11} X_1 + \dots + a_{1p} X_p - c_1 t \geq 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n1} X_1 + \dots + a_{np} X_p - c_n t \geq 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} a_{11} X_1 + \dots + a_{1p} X_p - c_1 t \geq 0 \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1} X_1 + \dots + a_{np} X_p - c_n t \geq 0 \end{matrix}} \right\} (2)$$

$$X_1 \geq 0, \dots, X_p \geq 0 \quad (3)$$

$$t > 0 \quad (4)$$

Si en (4) se tuviera $t \geq 0$ se podría aplicar el lema de Farkas; vale la pena investigar si esto es posible.

Si $t=0$, entonces de (2) se obtiene

$$a_{11} X_1 + \dots + a_{1p} X_p \geq 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n1} X_1 + \dots + a_{np} X_p \geq 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} a_{11} X_1 + \dots + a_{1p} X_p \geq 0 \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1} X_1 + \dots + a_{np} X_p \geq 0 \end{matrix}} \right\} (5)$$

$$X_1 \geq 0, \dots, X_p \geq 0 \quad (6)$$

Ahora se elige un vector X^* que satisfaga las restricciones de PLP, esto es,

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{11} X_1^* + \dots + \bar{a}_{1p} X_p^* - c_1 &\geq 0 \\ \bar{a}_{n1} X_1^* + \dots + \bar{a}_{np} X_p^* - c_n &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$X_1^+ \geq 0, \dots, X_p^+ \geq 0 \quad (8)$$

Por otra parte, se tienen las identidades

$$\begin{aligned} (1-s) a_{i1} X_1 + s a_{i1}^* X_1^* &= a_{i1} (X_1 + s[X_1^* - X_1]) \\ + (1-s) a_{ip} X_p + s a_{ip}^* X_p^* &= a_{ip} (X_p + s[X_p^* - X_p]) \end{aligned}$$

Al sumar miembro a miembro se obtiene:

$$(1-\varepsilon) \sum_{j=1}^p a_{ij} X_j + \varepsilon \sum_{j=1}^p a_{ij} X_j^* = \sum_{j=1}^p a_{ij} (X_j + \varepsilon [X_j^* - X_j]) \quad (7)$$

Analogamente $X_j + s[X_j^* - X_j] = (1-s)X_j + sX_j^*$ (10)

De (5), (6), (7) y (8) cuando $1 \leq s \leq 5$ se infiere

$$\sum_{j=1}^p a_{ij} (\bar{X}_j + s[X_j^* - \bar{X}_j]) - c_i s \geq 0, \quad i=1, \dots, p$$

$$\bar{X}_j + s[X_j^* - \bar{X}_j] \geq 0 \quad (11)$$

De (10) se tiene

$$\sum_{j=1}^p b_j (X_j + s [X_j^* - X_j]) = (1-s) \sum_{j=1}^p b_j X_j + s \sum_{j=1}^p b_j X_j^*$$

en consecuencia cuando $1 \geq s > 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sum_{j=1}^p b_j (X_j + s [X_j^* - X_j]) - (MP)s \geq 0$$

o bien $\sum_{j=1}^p b_j X_j \geq 0$, que es la desigualdad

(1) cuando $t=0$, por consiguiente se ha probado que la desigualdad

$$\sum_{j=1}^p b_j X_j - (MP)t \geq 0 \quad (13)$$

vale cuando $\bar{X}$ y t satisfacen a las restricciones

$$\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j - c_i t \geq 0, \quad i=1, \dots, n$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_p \geq 0, \quad t \geq 0.$$

En estas condiciones fácilmente se ve que directamente se puede aplicar el teorema de Farkas:

Si toda solución de las desigualdades

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & -c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & -c_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \\ t \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(p \times (p+1)) \quad (n+p+1) \times 1$
 $(n+p+1) \times (p+1)$

es una solución de la desigualdad

$$b_1 x_1 + \dots + b_p x_p - (MP) t \geq 0,$$

entonces existen las constantes $y_1, \dots, y_{n+p+1}$ no negativas con las que se cumplen las igualdades

$$y_1 a_{11} + \dots + y_n a_{n1} + y_{n+1} (1) = b_1$$

$$\dots \dots \dots y_1 a_{1p} + \dots + y_n a_{np} + y_{n+p} (1) = b_p$$

$$-y_1 c_1 - \dots - y_n c_n + y_{n+p+1} (1) = -MP$$

A causa de la no negatividad de las constantes y_k , resulta

$$\left. \begin{aligned} b_1 &\geq y_1 a_{11} + \dots + y_n a_{n1} \\ &\dots \dots \dots \\ b_p &\geq y_1 a_{1p} + \dots + y_n a_{np} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$MP \leq y_1 c_1 + \dots + y_n c_n \quad (14)$$

$$y_1 \geq 0, \dots, y_n \geq 0 \quad (15)$$

Las desigualdades (13) y (15) prueban que el PLD es consistente y la desigualdad (14) prueba que el supremo del PLD es mayor o igual que el infimo del PLP.

Por otra parte se probó que

$$b_1 x_1 + \dots + b_p x_p \geq c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

Consecuentemente $MP = MD$.

De las relaciones (13), (14) y (15) se concluye que MD se obtiene en un punto $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ finito, por consiguiente es el valor máximo del PLD.

TEOREMA 22: De dualidad en la programación lineal.

El PLP es consistente y tiene un valor mínimo MP, si y solo si, su PLD es consistente y tiene un valor máximo MD. Si ambos prog^{as} 23 son consistentes el PLP tiene un mínimo MP y el PLD tiene un máximo MD. Además $MP = MD$.

Demostración:

Se supone que el PLP es consistente y tiene un valor mínimo M_p , consecuentemente el PLP tiene un ínfimo finito M_p , así que por el teorema 21, el programa dual es consistente y tiene un valor máximo M_p . Con estas consideraciones queda probada la primera parte del teorema.

Se acepta ahora que los PLP y PLD son consistentes. Según el teorema 20 el PLP tiene un ínfimo finito y el PLD un supremo finito. Las conclusiones restantes de este teorema son consecuencias directas del teorema 21 y las definiciones de los PLP y PLD.

Las desigualdades $p \geq 0$ y $q \geq 0$ ^{EDET} forman una holgura complementaria, cuando por lo menos una es una igualdad.

TEOREMA 23: principio de la holgura complementaria de Dantzing

Hipótesis 1: El punto $\bar{x}$ satisface las restricciones del PLP y el punto $\bar{y}$ las restricciones del PLD.

Hipótesis 2: $x_j = 0$, ó, $a_{1j}\bar{x}_j + \dots + a_{nj}\bar{x}_j = b_j$, $j = 1, \dots, p$
y $y_i = 0$, ó, $a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{ip}\bar{x}_p = c_i$, $i = 1, \dots, n$

Afirmación: $b_1\bar{x}_1 + \dots + b_p\bar{x}_p$ es el valor mínimo del PLP y $c_1\bar{y}_1 + \dots + c_n\bar{y}_n$ es el valor máximo del PLD y recíprocamente.

Demostración:

La afirmación de este teorema es una consecuencia inmediata del teorema 20 y del teorema 22.

^{EDET}

Este teorema aporta un método adecuado para analizar todos

los vectores óptimos en PL a partir de un punto óptimo de su PLD. Además como los conceptos de la PL en la construcción de la estructura conceptual de la programación geométrica (PG) consecuentemente el principio de la holgura complementaria de la PL tiene un análogo en la PG que permite calcular todos los puntos óptimos de un programa geométrico primal (PGP) a partir de una solución del programa geométrico dual (PGD).

CONJUNTOS CONVEXOS.

FUNCIÓN DISTANCIA.

En el espacio E^n un punto es el conjunto ordenado de n reales $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y la métrica es la generalización del teorema de Pitágoras, consecuentemente si $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ es otro punto de E^n , la distancia entre los puntos $\bar{u}$ y $\bar{x}$ es:

$$|\bar{x} - \bar{u}| = [(x_1 - u_1)^2 + \dots + (x_n - u_n)^2]^{\frac{1}{2}}$$

Asimismo conviene recordar que si a es un número real

$$a\bar{x} = (ax_1 + \dots + ax_n) \text{ además } (x + \mu) = (x_1 + \mu_1 + \dots + x_n + \mu_n)$$

$$\bar{x} - \bar{u} = \bar{x} + (-1)\bar{u} = (x_1 - u_1, \dots, x_n - u_n)$$

$$\bar{x} \cdot \bar{u} = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n.$$

SEGMENTO RECTILÍNEO

Con el signo $\bar{x}\bar{u}$ se representa el conjunto cerrado

$$\bar{x}\bar{u} = \bigcup (a\bar{x} + b\bar{u}) \text{ donde } a \geq 0, b \geq 0, a + b = 1.$$

al que se da el nombre de segmento rectilíneo cerrado que une los puntos $\bar{x}$ y $\bar{u}$.

PROPIEDADES GENERALES DE LA FUNCIÓN DISTANCIA.

$$|\bar{x} - \bar{u}| \geq 0, \quad |\bar{x} - \bar{u}| = 0, \text{ si y solo si, } \bar{x} = \bar{u}$$

$$|\bar{x} - \bar{u}| + |\bar{u} - \bar{v}| \geq |\bar{x} - \bar{v}|$$

$$|\bar{x} - (\bar{u} + \bar{v})| = |(\bar{x} - \bar{u}) - \bar{v}|$$

$$|a\bar{x} - a\bar{v}| = a|\bar{x} - \bar{v}|, \text{ si y solo si, } a > 0$$

LA ESFERA ABIERTA Y LA CERRADA

La esfera abierta de centro $\bar{x}$ y radio r , es el conjunto de puntos de E^n definidos con la fórmula

$$E_a(\bar{x}, r) = \{ \bar{u} : |\bar{x} - \bar{u}| < r \}$$

La correspondiente esfera cerrada de centro $\bar{x}$

y radio r , es el conjunto de puntos de E^n , definidos con la fórmula

$$E_c(\bar{x}, r) = \{ \bar{u} : |\bar{x} - \bar{u}| \leq r \}.$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN CONJUNTO

La distancia de un punto $\bar{x}$ de E^n a un subconjunto A de E^n se define con la fórmula

$$d(\bar{x}, A) = \min \{ |\bar{x} - \bar{u}| \text{ con todo punto } \bar{u} \in A \}$$

CONJUNTO ACOTADO

Un subconjunto A de E^n se halla acotado si existe una esfera abierta que lo contiene

VECINDAD DE UN CONJUNTO

Una vecindad $V(A, r)$ del conjunto A contenido en E^n de radio r , es el conjunto de puntos de E^n , cuya distancia al conjunto A es menor que r . La definición formal es

$$V(A, r) = \{ \bar{x} : d(\bar{x}, A) < r \}.$$

En este estudio se sostienen las cuestiones acerca de la mensurabilidad; los conjuntos que se utilizan en esta disquisición son mensurables por definición, consecuentemente no aducen pruebas que lo justifiquen.

HIPERPLANO

La función $f: E^n \rightarrow E^1$ definida con la fórmula

$$f(\bar{x}) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n - b$$

donde existe por lo menos una $a_i \neq 0$ define al hiperplano $H = \{ \bar{x} : f(\bar{x}) = 0 \}$

Los conjuntos abiertos

$$A_1 = \{ \bar{x} : f(\bar{x}) > 0 \}, \quad A_2 = \{ \bar{x} : f(\bar{x}) < 0 \}$$

son los semiespacios abiertos cuya frontera es H

Si dos subconjuntos S_1 y S_2 de E^n se hallan contenidos en los semiespacios abiertos A_1 y A_2 respectivamente, entonces se dice que H separa rigurosamente a los conjuntos S_1 y S_2 .

Análogamente los conjuntos

$$C_1 = \{ \bar{x} : f(\bar{x}) \geq 0 \} , \quad C_2 = \{ \bar{x} : f(\bar{x}) \leq 0 \}$$

son los semiespacios cerrados cuya frontera es H .

Si dos subconjuntos S_1 y S_2 de E^n se hallan contenidos en los semiespacios cerrados C_1 y C_2 respectivamente, entonces sólo se dice que H separa a los conjuntos S_1 y S_2 .

HIPERRECTA

La hiperrecta que pasa por los puntos $\bar{x}$ y $\bar{u}$ de E^n es el conjunto de puntos definido con la igualdad

$$X = \{ \bar{x} : \bar{x} = a\bar{x} + (1-a)\bar{u} , \text{ para todo real } a \}$$

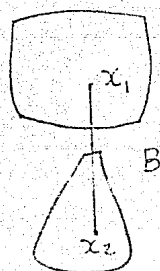
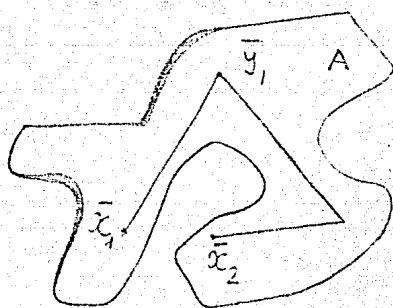
Se observa que el segmento $\bar{x}\bar{u}$ lo define una ecuación muy parecida.

$$\bar{x}\bar{u} = \{ \bar{v} : \bar{v} = a\bar{x} + (1-a)\bar{u} , 0 \leq a \leq 1 \}.$$

Este concepto es fundamental en la definición de los conjuntos conexos.

CONJUNTOS CONEXOS

La base intuitiva del concepto de conexidad es: un conjunto conexo es de una sola pieza; si a este conjunto se le aplican transformaciones que lo deforman sin llegar a la ruptura, entonces permanece de una pieza. Desde el punto de vista formal un conjunto conexo es un conjunto abierto A en el cual dos de sus puntos se pueden unir con una trayectoria poligonal contenida totalmente contenida en A .



Una trayectoria poligonal es un conjunto de segmentos rectilíneos construida como sigue: se escogen los puntos $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{x}_2$ donde $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son los puntos extremos y $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ son los puntos intermedios y se unen con segmentos rectilíneos $\bar{x}_1 \bar{y}_1, \bar{y}_1 \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n-1} \bar{y}_n, \bar{y}_n \bar{x}_2$.

El conjunto B no es conexo.

Definición

Una región de E^n es un conjunto convexo de E^n .

CONJUNTO CONVEXO

Un conjunto A de puntos de E^n es convexo si siempre que los puntos $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ están en A, también lo están todos los puntos del segmento rectilíneo $\bar{x}_1 \bar{x}_2$, esto es, los puntos $\bar{p}$ definidos con la ecuación

$$\bar{p} = a \bar{x}_1 + b \bar{x}_2, \text{ donde } a \geq 0, b \geq 0, a + b = 1.$$

En lenguaje geométrico: A es convexo si contiene a los segmentos determinados por todos los pares de sus puntos; en el laconismo lógico: A es convexo, si y solo si, $\bar{x}, \bar{u}$ en A implica $\bar{x}\bar{u}$ contenido en A. Ejemplos de conjuntos convexos son: el conjunto vacío, el compuesto por un solo punto, una esfera y un polígono regular. Sin embargo, con el propósito de estar más trivialmente pero excepcionalmente, se postula que el conjunto vacío es convexo, consecuentemente, el conjunto

"conjunto convexo" equivale al de conjunto convexo no vacío.

Observe que la definición de conjunto convexo es independiente de la dimensión del espacio E^n aunque en los ejemplos se hizo referencia solo a conjuntos de E^2 y E^3 donde las figuras se hallan en el marco de la geometría visualizable.

COMBINACION CONVEXA DE PUNTOS DE E^n .

Una combinación convexa de un número finito de puntos $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ es el punto

$$\bar{p} = a_1 \bar{x}_1 + \dots + a_n \bar{x}_n$$

donde los números reales a_i cumplen con las restricciones $a_i \geq 0, i=1, \dots, n$ $a_1 + \dots + a_n = 1$.

Si se tienen n números reales b_i no negativos entonces con n puntos dados del espacio E^n $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ se forma la combinación convexa

$$\bar{p} = \frac{b_1}{b_1 + \dots + b_n} \bar{x}_1 + \dots + \frac{b_n}{b_1 + \dots + b_n} \bar{x}_n \quad (1)$$

En la Física, si b_i es una masa asociada al punto $\bar{x}_i$ el centro de masas de las n masas está dado por la fórmula (1).

TEOREMA 24

Hipótesis: Los vectores $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ son puntos del conjunto convexo C .

Afirmación: Toda combinación convexa $\bar{p} = a_1 \bar{x}_1 + \dots + a_n \bar{x}_n$ de los puntos $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, es punto de C .

Demostración por inducción matemática.

Cuando $n=2$, toda combinación convexa de los puntos $\bar{x}_i, \bar{x}_j$ donde $i \neq j, i, j=1, \dots, n$, según la defini-

ción de conjunto convexo, son puntos de C

En seguida se acepta la hipótesis de inducción que afirma la validez del teorema cuando $n=k$: todo punto de la forma $\bar{q} = b_1 \bar{x}_1 + \dots + b_k \bar{x}_k$, $b_i \geq 0$, $i=1, \dots, k$, $b_1 + \dots + b_k = 1$

es un punto de C . A partir de esta hipótesis se considera el punto

$$\bar{r} = d_1 \bar{x}_1 + \dots + d_k \bar{x}_k + d_{k+1} \bar{x}_{k+1} \quad \text{donde}$$

$$d_1 \geq 0, \dots, d_{k+1} \geq 0, \quad d_1 + \dots + d_{k+1} = 1.$$

Si $d_1 + \dots + d_k = 0$, entonces $d_{k+1} = 1$ y $\bar{r} = \bar{x}_{k+1}$

y no hay nada que probar, consecuentemente se supone $d_1 + \dots + d_k > 0$

$$\bar{r} = \left[\frac{d_1}{d_1 + \dots + d_k} \bar{x}_1 + \dots + \frac{d_k}{d_1 + \dots + d_k} \bar{x}_k \right] (d_1 + \dots + d_k) + d_{k+1} \bar{x}_{k+1}$$

De acuerdo con la hipótesis de inducción el vector

$$\bar{Y} = \frac{d_1}{d_1 + \dots + d_k} \bar{x}_1 + \dots + \frac{d_k}{d_1 + \dots + d_k} \bar{x}_k$$

es un punto de C , por consiguiente el punto

$$\bar{r} = (d_1 + \dots + d_k) \bar{Y} + d_{k+1} \bar{x}_{k+1} \quad \text{donde}$$

$$d_1 + \dots + d_k > 0, \quad d_{k+1} > 0 \quad \text{y} \quad (d_1 + \dots + d_k) + d_{k+1} = 1$$

Conforme a la hipótesis, A es convexo y tanto $\bar{Y}$ como $\bar{x}_{k+1}$ son puntos de A , por tanto $\bar{r}$ es punto de A .

TEOREMA 25.

Hipótesis 1: A es un conjunto de índices y para cada a en A , el conjunto P_a es convexo.

Hipótesis 2: El conjunto $B = \bigcap_a P_a \neq \emptyset$

Afirmación: B es un conjunto convexo.

Demostración

Si los puntos $\bar{x}, \bar{u}$ son de B , entonces ambos puntos son puntos de los conjuntos P_a , para toda a en A .

Como cada conjunto P_a es convexo, el segmento $\bar{x}\bar{u}$ se halla contenido en cada conjunto P_a , para toda a en A ; por consiguiente $\bar{x}\bar{u}$ se halla contenido en B .

EDET.

COROLARIO

Cuando en el teorema 25, $A = \{1, 2\}$, y P_1, P_2 son conjuntos convexos, resulta que si $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, entonces $P_1 \cap P_2$ es un conjunto convexo.

Las otras operaciones básicas de la teoría de conjuntos — uniones y complementaciones — no convierten la convexidad.

SOMA DE CONJUNTOS DE E^n

Si A y B son subconjuntos de E^n , la suma de estos conjuntos se define con la igualdad

$$A + B = \{ \bar{x} : \bar{x} = \bar{u} + \bar{v}, \bar{u} \in A \text{ y } \bar{v} \in B \}$$

PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UN CONJUNTO DE E^n

Si A es un subconjunto de E^n y a es un número real entonces el producto aA de un número a por un conjunto A es el conjunto

$$aA = \{ \bar{x} : \bar{x} = a\bar{u}, \bar{u} \in A \}$$

TEOREMA 26

Hipótesis: Los conjuntos A y B son convexos.

Afirmación: El conjunto $A+B$ es convexo.

Demostración

Si se consideran los puntos $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ en A , $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ en B , entonces por definición $\bar{x}_1 + \bar{u}_1$, $\bar{x}_1 + \bar{u}_2$, $\bar{x}_2 + \bar{u}_1$ y $\bar{x}_2 + \bar{u}_2$ están en $A+B$.

Conforme a la hipótesis

$a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2$, donde $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_1 + a_2 = 1$,
es un punto de A y

$b_1 \bar{u}_1 + b_2 \bar{u}_2$, donde $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, b_1 + b_2 = 1$
es un punto de B , por consiguiente

$$a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 + b_1 \bar{u}_1 + b_2 \bar{u}_2$$

es un punto de $A+B$.

Por otra parte se tiene la identidad

$$a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 + b_1 \bar{u}_1 + b_2 \bar{u}_2 = (-a_2 + b_1 + C_4)(\bar{x}_1 + \bar{u}_1) + (b_2 - C_4)(\bar{x}_1 + \bar{u}_2) + (a_2 - C_4)(\bar{x}_2 + \bar{u}_1) + C_4(\bar{x}_2 + \bar{u}_2)$$

$$\text{donde } a_1 + a_2 = 1, b_1 + b_2 = 1 \text{ y se cumple} \\ (-a_2 + b_1 + C_4) + (b_2 - C_4) + (a_2 - C_4) + C_4 = b_1 + b_2 = 1 \quad (1)$$

Como C_4 es una constante cuyo valor no altera la suma (1), se puede elegir su valor de forma tal, que se cumplan las desigualdades,

$$-a_2 + b_1 + C_4 \geq 0, \quad b_2 - C_4 \geq 0, \quad a_2 - C_4 \geq 0$$

$$\text{o bien } C_4 \geq a_2 - b_1, \quad b_2 \geq C_4, \quad a_2 \geq C_4$$

$$\text{Como } b_1 = 1 - b_2, \text{ resulta } C_4 \geq a_2 + b_2 - 1; \quad \frac{a_2 + b_2}{2} \geq C_4$$

$$\text{por consiguiente se puede elegir } 0 \leq C_4 \leq \frac{a_2 + b_2}{2}$$

EDET.

TEOREMA 26 a.

Hipótesis 1: El conjunto A es convexo y a es un número real

Afirmación: El conjunto aA es convexo.

Demostración

Si $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son puntos de A , entonces $a\bar{x}_1$ y $a\bar{x}_2$ son puntos de aA .

Conforme a la hipótesis: $b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2$ donde $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$ y $b_1 + b_2 = 1$ es un punto de A por consiguiente $a(b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2)$ es un punto de aA ; pero $b_1(a\bar{x}_1) + b_2(a\bar{x}_2)$ es una combinación convexa de los puntos $a\bar{x}_1$ y $a\bar{x}_2$.

EDET

Debido a que el concepto de hiperplano se halla en todos los temas de la teoría de la optimización, conviene definirlo en términos algebraicos más útil en los cálculos y en las interpretaciones geométricas.

VARIEDAD LINEAL

Un subconjunto V de E^n se llama variedad lineal, si $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ son puntos de V , entonces el conjunto de puntos de E^n $a\bar{x}_1 + (1-a)\bar{x}_2$ para todos los números reales a , es un subconjunto de V .

Observe que la única diferencia entre la definición de variedad lineal y conjunto convexo es que en la variedad lineal la recta completa que pasa por dos puntos es uno de sus subconjuntos en tanto que en los conjuntos convexos sólo son subconjuntos los segmentos que determinan las parejas de puntos. Solamente con fines aclaratorios se menciona que en E^3 las variedades lineales pueden ser puntos, rectas, planos bidimensionales y todo el espacio: el punto es una variedad lineal de dimensión cero, la recta es una variedad lineal de dimensión uno, el plano, una de dimensión dos y todo el espacio una de dimensión 3.

HIPERPLANO

Un hiperplano en E^n es una variedad lineal de dimensión $n-1$.

Si se toma como referencia el plano bidimensional en el espacio tridimensional, entonces se ve con claridad que un hiperplano generaliza al concepto de plano bidimensional: Son las variedades lineales de más alta, después de la del propio espacio. Obviamente el hiperplano $H = \{ \bar{x} \in E^n : \bar{p} \cdot \bar{x} = c \}$ donde $\bar{p}$ es un vector de E^n y c un número real, es una variedad lineal porque si $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son puntos de H , entonces $\bar{p} \cdot \bar{x}_1 = c$, $\bar{p} \cdot \bar{x}_2 = c$.

Si $\bar{y} = a\bar{x}_1 + (1-a)\bar{x}_2$, entonces $\bar{p} \cdot \bar{y} = a\bar{p} \cdot \bar{x}_1 + (1-a)\bar{p} \cdot \bar{x}_2$ consecuentemente $\bar{p} \cdot \bar{y} = c$, esta igualdad significa que la combinación lineal $\bar{y}$ de $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ es un punto de H . Por otra parte el hiperplano paralelo al H , que pasa por el origen es $\bar{p} \cdot \bar{x} = 0$, pero esta ecuación representa a todos los puntos $\bar{x}$ de E^n ortogonales a $\bar{p}$ por consiguiente la dimensión de este conjunto es $n-1$.

PUNTO EXTREMO

Un punto $\bar{x}$ es un punto extremo de un conjunto convexo A , si y solo si, no existen en A dos puntos $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ tales que

$$\bar{x} = a\bar{x}_1 + (1-a)\bar{x}_2, \quad 0 < a < 1 \quad (1)$$

Observe que al número a se le imponen desigualdades estrictas. Además la igualdad (1) significa que un punto extremo no puede hallarse entre dos puntos del conjunto convexo A , consecuentemente un punto extremo es un punto de la frontera de A .

POLÍTOPO CONVEXO. POLIEDRO.

Los hiperplanos y los semiespacios son conjuntos convexos y como se probó que la intersección de un número finito de convexos es un conjunto convexo, resulta que la intersección finita de hiperplanos o de semiespacios es un conjunto convexo.

Estos conceptos se han manejado en la programación

lineal donde el conjunto de las soluciones factibles es un conjunto convexo cerrado.

Un polítopo convexo es un conjunto que puede expresarse como la intersección de un número finito de semiespacios cerrados, por consiguiente es el conjunto de puntos que son las soluciones de desigualdades de la forma

$$\bar{p}_1 \cdot \bar{x} \leq b_1, \bar{p}_2 \cdot \bar{x} \leq b_2, \dots, \bar{p}_n \cdot \bar{x} \leq b_n$$

y a que cada desigualdad por separado representa un semiespacio y la solución de la familia de desigualdades es la intersección de esos semiespacios.

Un polítopo no vacío y acotado recibe el nombre de poliedro; aunque notables investigadores prefieren el de hiperpoliedro.

Análogamente, el conjunto de soluciones de un sistema de p ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}_{p \times n} \begin{bmatrix} \bar{x} \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}_{p \times 1}, \quad \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \vdots \\ a_{p1}, \dots, a_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} \quad (1)$$

es un conjunto convexo cerrado, porque el sistema (1) se puede escribir como la intersección de p hiperplanos

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i=1, \dots, p. \quad (2)$$

Por consiguiente el conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente a las p ecuaciones es la intersección de los p hiperplanos dados en (2); en caso de que la intersección no sea vacía, es un conjunto convexo cerrado. Asimismo el conjunto de los soluciones no negativos de $A\bar{x} = \bar{b}$, $\bar{x} \geq 0$ es un conjunto cerrado.

ENVOLVENTE CONVEXA. POLIEDRO CONVEXO

La envolvente convexa de un subconjunto A no convexo de E^n , es el más pequeño conjunto convexo que contiene al conjunto A , necesariamente la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen al conjunto A , porque esta intersección es un conjunto convexo.

EJEMPLO

La envolvente convexa X de un número finito de puntos $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de los citados puntos, en signos

$$X = \{ \bar{x} : \bar{x} = a_1 \bar{x}_1 + \dots + a_n \bar{x}_n, a_1, \dots, a_n \geq 0, a_1 + \dots + a_n = 1 \}$$

este conjunto se llama cono polédrico convexo cerrado; concepto que se utilizó en la demostración geométrica del teorema de Farkas; en general, la envolvente convexa de n puntos es el poliedro convexo generado por los n puntos. Obviamente este poliedro convexo tiene a lo más n puntos extremos: los citados $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ puntos generadores del cono convexo, porque algunos pueden ser puntos interiores. Si $\bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_p^*$ son los puntos extremos, todo punto $\bar{x}$ del cono convexo es una combinación convexa de los puntos extremos,

$$\bar{x} = a_1 \bar{x}_1^* + \dots + a_p \bar{x}_p^*$$

pero no es cierto que todo conjunto convexo con sólo un número finito de puntos extremos tenga esta propiedad; sin embargo un conjunto convexo cerrado y acotado con un número finito de puntos extremos, es la envolvente convexa de tales puntos.

SIMPLEJO

La envolvente convexa de cualquier conjunto de $n+1$

de E^n que no están todos en un mismo hiperplano, se llama simplejo. En E^2 un triángulo y sus puntos interiores es un simplejo, E^3 es un tetraedro macizo. Evidentemente un simplejo es un caso particular de un poliedro convexo.

FUNCIONES CONVEXAS

Una función $f: E^n \rightarrow E^1$ cuyo dominio es un subconjunto convexo D de E^n es una función convexa si satisface la desigualdad

$$f(a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2) \leq a_1 f(\bar{x}_1) + a_2 f(\bar{x}_2) \quad (1)$$

en todo punto del segmento $\bar{x}_1 \bar{x}_2$ contenido en D esto es cuando $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ son puntos de D , $a_1, a_2 \geq 0$, y $a_1 + a_2 = 1$

Una función convexa f es estrictamente convexa si se satisface la desigualdad

$$f(a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2) < a_1 f(\bar{x}_1) + a_2 f(\bar{x}_2) \quad (2)$$

cuando $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ y $a_1, a_2 \neq 0$, o bien $a_1 > 0, a_2 > 0$

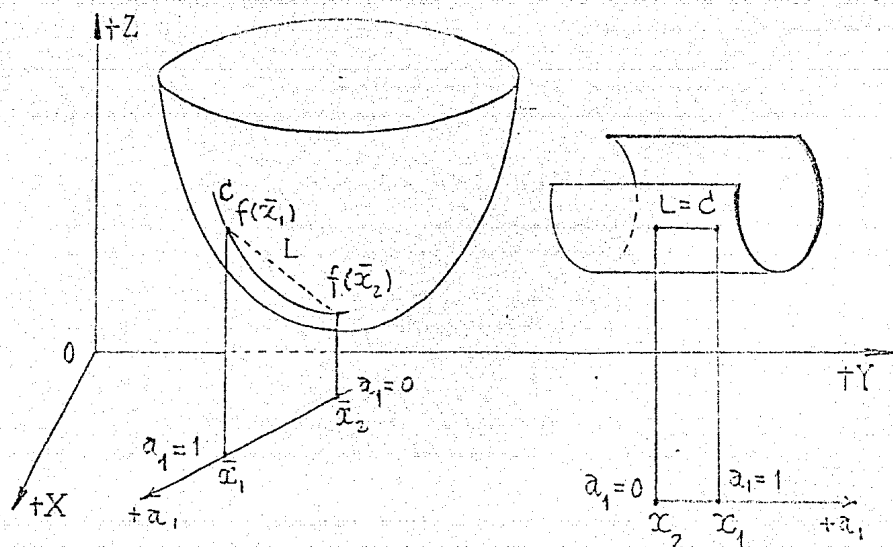
Intuitivamente los atributos más notables de las funciones convexas se destacan con plenitud, examinando su comportamiento a lo largo de un segmento fijo $\bar{x}_1 \bar{x}_2$ contenido en su dominio D , elegido al azar. Con el fin de utilizar un solo parámetro se escribe la definición en la forma

$$f[a_1 \bar{x}_1 + (1-a_1) \bar{x}_2] \leq a_1 f(\bar{x}_1) + (1-a_1) f(\bar{x}_2) \quad (3)$$

donde

$$0 \leq a_1 \leq 1$$

Ambos miembros de la desigualdad (3) son susceptibles de interpretación geométrica; si f es una función convexa definida en un subconjunto convexo A de E^2 , como se indica en la figura, el primer miembro de (3) representa los valores de la función en los distintos puntos del segmento $\bar{x}_1 \bar{x}_2$, donde $a_1 = 0$ significa que se calcula el valor de f en el punto $\bar{x}_2$ y $a_1 = 1$ que el valor de f se toma en $\bar{x}_1$, por



consiguiente la gráfica de los valores de f en los puntos intermedios colocados entre $\bar{x}_2$ y $\bar{x}_1$ es la curva C .

El segundo miembro de (3) representa una recta donde el valor en $a_1=0$ es $f(\bar{x}_2)$ y en $a_1=1$ es $f(\bar{x}_1)$, consecuentemente su gráfica para los puntos comprendidos entre $\bar{x}_2$ y $\bar{x}_1$ es el segmento L que en $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ coincide con los valores de la curva C .

Con estas consideraciones es fácil ver que la desigualdad (3) declara que los puntos del segmento L se hallan arriba de los puntos de la curva C ; en el caso estricto, de acuerdo con el cual se ha hecho el dibujo, en cada par de puntos distintos $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ del dominio, el segmento L se halla estrictamente arriba de la curva C . Cuando la función es convexa pero no estrictamente convexa, existen puntos del dominio, $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$, para los cuales el segmento L coincide con la curva C como en el caso de los cilindros.

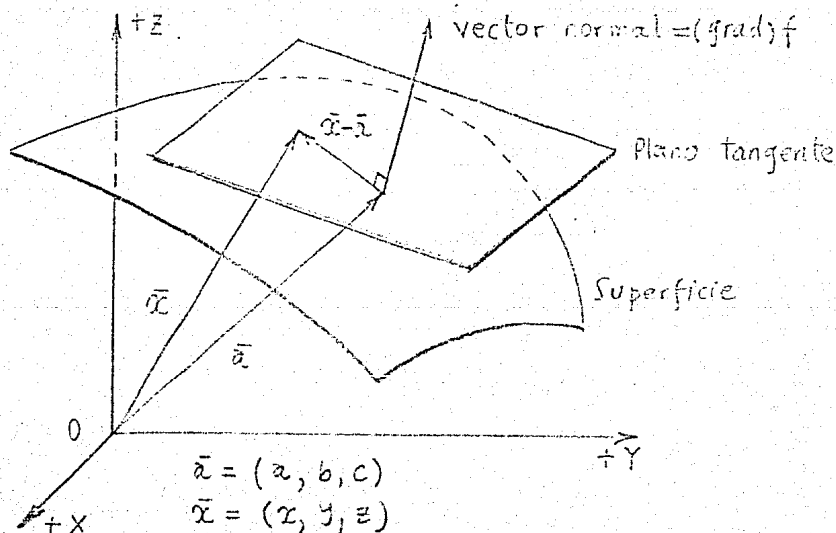
COMPORTAMIENTO DE UNA SUPERFICIE EN UN PUNTO.

Antes de abordar algunos teoremas de la teoría de las funciones convexas, conviene tener una idea general del comportamiento de las superficies en la vecindad de un punto, razón por la cual se prescinde del rigor lógico para ganar un buen grado de objetividad, consecuentemente se presentan las consideraciones dentro del ámbito visualizable.

Se supone que la ecuación $z = f(x, y)$ representa una superficie y que existen las derivadas parciales

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

en el dominio de f . El gradiente $(\text{grad})f$ es el vector normal en cada punto de la superficie, en consecuen-



cia la ecuación del plano tangente es

$$(\text{grad})f \cdot (x - a) = 0$$

En el caso que se estudia, $(\text{grad})f = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right)$ y el plano tangente es

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial z}{\partial y}(y-b) - (z-c) = 0$$

y las ecuaciones de la normal a la superficie en el punto $\bar{a}$ son

$\bar{x} = \bar{a} + k(\text{grad})f$, o bien, $(x, y, z) = (a, b, c) + k\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right)$
por consiguiente

$$\frac{x-a}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{y-b}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{z-c}{-1} = k$$

A continuación se investiga el comportamiento de la superficie en los puntos de una vecindad $V(\bar{u}, e)$ de centro en el punto $\bar{u} = (a, b)$ del plano XOY y radio e . El punto de partida de este estudio es el desarrollo en serie de Taylor de $f(x, y)$

$$f(x, y) = f(a, b) + p(x-a) + q(y-b) +$$

$$+ \frac{1}{2} [r(x-a)^2 + 2s(x-a)(y-b) + t(y-b)^2] + R \quad (1)$$

donde $f(a, b) = c$

La fórmula (1) es la distancia del plano XOY a la superficie $f(x, y)$ y la distancia del plano XOY al plano tangente a la superficie en el punto $\bar{a}$ es

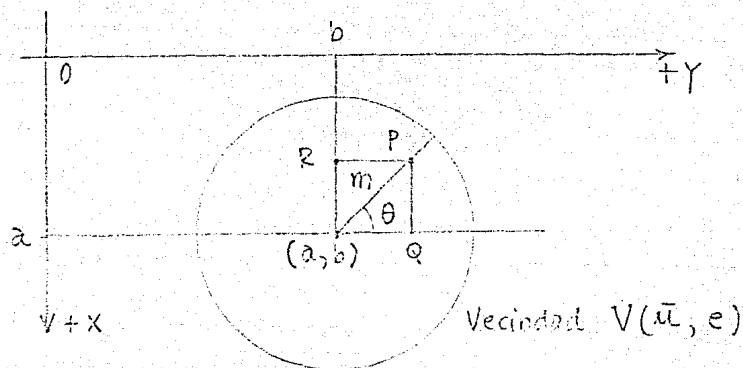
$$z_T = c + p(x-a) + q(y-b) \quad (2)$$

por consiguiente, la distancia del plano tangente a la superficie es $f(x, y) - z_T$, esto es

$$d = \frac{1}{2} [r(x-a)^2 + 2s(x-a)(y-b) + t(y-b)^2] + R \quad (3)$$

Si se supone que $f(x, y)$ es continua sobre $V(\bar{u}, r)$, entonces si d tiene un mismo signo, la superficie se halla del mismo

lado del plano tangente y si el signo de d cambia, en ciertas regiones la superficie esta en un lado del plano tangente y en otras se halla del otro lado.



En un punto $P(x, y)$ de la vecindad $V(\bar{u}, e)$, se tiene

$$x - a = m \sin \theta, \quad y - b = m \cos \theta$$

consecuentemente el valor de las distancias del plano tangente a la superficie esta dado por

$$d = \frac{1}{2} m^2 [r \sin^2 \theta + 2s \sin \theta \cos \theta + t \cos^2 \theta] + \frac{1}{3!} m^3 R' \quad (4)$$

porque en R se hallan $(x-a)$ y $(y-b)$ elevadas al cubo.

Ahora se estudian las variaciones de los signos en el trinomio de segundo grado.

$$h = r \sin^2 \theta + 2s \sin \theta \cos \theta + t \cos^2 \theta \quad (5)$$

si de su ecuación asociada $h=0$ se despeja $\sin \theta$ se obtiene

$$\sin \theta = \frac{-2s \cos \theta \pm \sqrt{4s^2 \cos^2 \theta - 4rt \cos^2 \theta}}{2r}$$

o bien

$$\tan \theta = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{r} \quad (6)$$

En (5) se distinguen tres casos

Caso 1: $s^2 - rt < 0$ o bien, $rt - s^2 > 0$

Los valores de θ son imaginarios, por consiguiente h no tiene raíces reales y el coeficiente de m^2 en (4) siempre tiene el mismo signo; el de r ó el de t porque $rt > s^2$. Como en este caso h nunca es cero, tampoco lo es d ; en cuanto al signo, se ve que el signo de r es el de h y este signo es el de la distancia d , en resumen: si $rt - s^2 > 0$, la superficie se halla totalmente colocada de un lado de su plano tangente, arriba si r es positiva, abajo en caso contrario.

Al hacer un cambio de ejes: el origen al punto $\bar{A} = (a, b, c)$ y como plano XOY el tangente; con esta transformación la ecuación de la superficie es

$$\bar{z} = \frac{1}{2} (rx^2 + 2sxy + ty^2) + R$$

donde R contiene términos del tercer y mayor grado en x y y . Si ahora la superficie se corta con el plano $\bar{z} = \bar{c}$ entonces la sección es aproximadamente la elipse $rx^2 + 2sxy + ty^2 = 2\bar{c}$

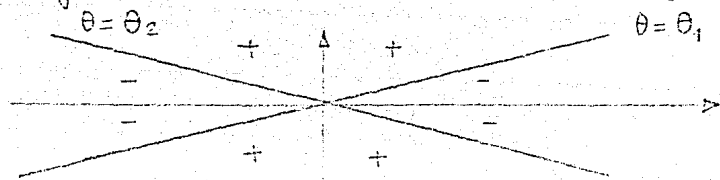
Por esta razón algunos autores al punto (a, b, c) le dan el nombre de punto elíptico y a la ecuación

$$rx^2 + 2sxy + t^2y^2 = 1$$

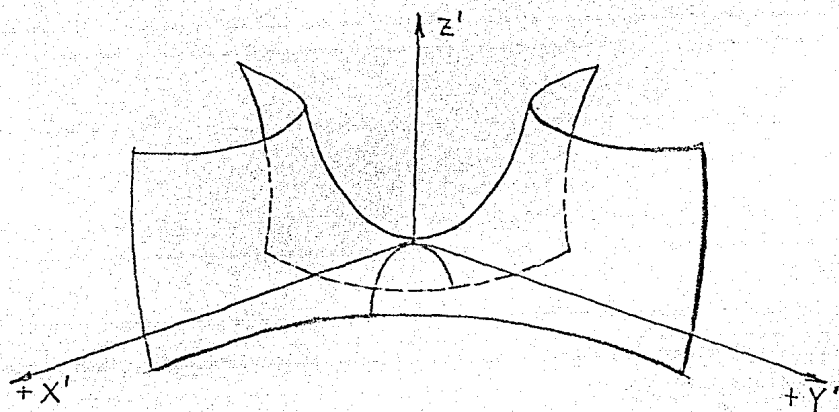
el de indicatriz del comportamiento de la superficie.

Caso 2. $s^2 - rt > 0$, o bien, $rt - s^2 < 0$

En este caso hay dos valores θ_1 y θ_2 de θ que se calculan con la fórmula (6) con los cuales h vale cero; pero las rectas $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ dividen al plano tangente en cuatro



donde los valores de h son alternativamente positivos y negativos, consecuentemente si $rt - s^2 < 0$, entonces la superficie se halla parte arriba del plano tangente y



parte abajo. Si nuevamente se efectúa el cambio de ejes indicado, la ecuación de la superficie es

$$Z = \frac{1}{2} (rx^2 + 2sxy + ty^2) + E$$

y la sección con el plano $Z = E$ es aproximadamente la hipérbola

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 2E$$

razón por la cual al punto (a, b, c) se le da el nombre de punto hiperbólico, ahora evidentemente con menos elegancia le llaman punto silla. La indicatriz también en este caso es la curva $rx^2 + 2sxy + ty^2 = 1$.

Caso 3. $s^2 - rt = 0$, o bien, $rt - s^2 = 0$.

En este caso h es un cuadrado perfecto y las raíces son iguales, por consiguiente ninguno de los argumentos presentados en los casos 1 y 2 tiene validez; la superficie puede hallarse arriba o abajo del plano tangente o cortarlo; el caso es ambiguo. La sección con el plano $Z = 2E$ aproximadamente son dos rectas paralelas, caso especial de la parábola y (a, b, c) es un punto parabólico

Antes de estudiar los máximos y los mínimos resultan muy provechosos los conceptos que de inmediato se explican.

El trinomio $h = r \sin^2 \theta + 2s \sin \theta \cos \theta + t \cos^2 \theta$ es la forma cuadrática

$$\begin{bmatrix} \sin \theta, \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r, s \\ s, t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} = h$$

la matriz $H = \begin{bmatrix} r, s \\ s, t \end{bmatrix}$ es la matriz hessiana de $f(x, y)$

en el punto (a, b) del dominio; el determinante de la matriz hessiana, el hessiano $\det H = rt - s^2$ es quien caracteriza el comportamiento de $f(x, y)$ en un punto (a, b) de su dominio. Con estos conceptos el estudio anterior se reduce a

1. Si $\det H > 0$ en (a, b) , el punto (a, b, c) de la superficie es un punto elíptico y la superficie se halla colocada totalmente en un lado del plano tangente.

2. Si $\det H < 0$ en (a, b) el punto (a, b, c) de la superficie es un punto hiperbólico y la superficie se halla en ambos lados del plano tangente.

3. Si $\det H = 0$ el caso es ambiguo y el punto (a, b, c) de la superficie es un punto parabólico.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS. PUNTO SILLA.

La función $f(x, y)$ tiene un máximo en el punto (a, b) de su dominio si $f(a+k, b+l) < f(a, b)$ cuando los valores de k y l son "suficientemente pequeños".

Análogamente $f(x, y)$ tiene un mínimo en (a, b) si $f(a+k, b+l) > f(a, b)$

cuando los valores de k y l son "suficientemente pequeños".
Geométricamente los argumentos presentados en el texto

anterior son válidos con la consideración adicional de la horizontalidad del plano tangente o verticalidad de la normal cuyas ecuaciones son

$$x-a = k p, \quad y-b = k q,$$

La condición de verticalidad declara que $x=a$, $y=b$, por consiguiente las condiciones necesarias para la existencia de un máximo o un mínimo son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q = 0. \quad (1)$$

Además deben agregarse las condiciones de suficiencia: si el punto (a,b,c) de la superficie es elíptico, entonces z tiene un máximo o un mínimo según que la superficie se halle localmente abajo del plano tangente o arriba de él respectivamente.

Si el punto (a,b,c) es hiperbólico, z no tiene un valor ni máximo ni mínimo, es una generalización del concepto de punto de inflexión.

Si el punto (a,b,c) de la superficie es parabólico el caso es dudoso.

Estas conclusiones se pueden resumir en la afirmación: Las condiciones necesarias para que la superficie $f(x,y)$ tenga un valor máximo o mínimo en el punto (a,b) de su dominio son $p=0$, $q=0$.

Además cuando en el punto (a,b) $\det H = rt - s^2 > 0$, entonces la función $f(a,b)$ tiene un máximo cuando $r < 0$ y un mínimo cuando $r > 0$.

Si $\det H = rt - s^2 < 0$ con certeza se afirma que no hay ni máximo ni mínimo.

Si $\det H = rt - s^2 = 0$ el caso es dudoso.

EJEMPLO

Ubique y clasifique los puntos estacionarios si existen en la superficie

$$z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 2x + y + 1$$

SOLUCIÓN

Las componentes del gradiente son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + 3y - 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y + 1$$

Los puntos estacionarios cumplen con
$$\begin{aligned} 6x + 3y &= 2 \\ 3x + 2y &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{luego } x = \frac{7}{3}, \quad y = -\frac{12}{3}.$$

Los elementos de la matriz hessiana son

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \text{luego } H = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det H = 12 - 9 = 3$. Como $\det H > 0$ y $p > 0$, en el punto $(\frac{7}{3}, -\frac{12}{3})$ del dominio existe z^* valor mínimo de z ,

$$z^* = 3\left(\frac{49}{9}\right) + 3\left(\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{12}{3}\right) + \left(-\frac{12}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{7}{3}\right) + \left(-\frac{12}{3}\right) + 1$$

$$z^* = \frac{49}{3} - 28 + 16 - \frac{14}{3} - 4 + 1 = \frac{25}{3} - 15 = -\frac{12}{3}.$$

EJEMPLO

Ubique y clasifique los puntos estacionarios en la superficie

$$z = x^2 - xy - 3y^2 - x + 7y + 4$$

SOLUCIÓN

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 1 = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 6y + 7 = 0, \quad p = 2, \quad q = -1, \quad l = -6$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} = -12 - 1 = -13.$$

Del sistema $\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ -x - 6y &= -7 \end{aligned}$ resulta $x = 1, y = 1$

Consecuentemente en el punto $(1, 1, 7)$ hay un punto silla

VALORES EXTREMOS Y PUNTOS ESTACIONARIOS

Generalizar los conceptos anteriores a las funciones $f: E^n \rightarrow E^1$ nos deja fuera de la geometría visualizable y obliga a adentrarnos a niveles puramente lógicos, pero no es aquí el lugar de desarrollar la teoría, sólo se presentan algunas definiciones y se enuncia sin prueba el teorema de las condiciones suficientes para un extremo local.

Si un número a puede ser un mínimo o un máximo local, entonces se dice que a es un extremo de f .

Si la función $f: E^n \rightarrow E^1$ tiene un extremo en un punto interior de su dominio y en este punto es diferenciable, entonces todas sus primeras derivadas parciales $D_1 f, \dots, D_n f$ son nulas, esta afirmación manifiesta que $(\text{grad})f = 0$.

Si la función $f: E^n \rightarrow E^1$ es diferenciable en el punto $\bar{a}$ de su dominio y $(\text{grad})f(\bar{a}) = 0$, entonces el punto $\bar{a}$ es un punto estacionario de f , que puede ser un punto extremo o un punto silla.

CONDICIONES SUFICIENTES PARA UN EXTREMO LOCAL EN E^n .

Si la función $f: E^n \rightarrow E^1$ tiene sus segundas derivadas parciales continuas en una vecindad $V(\bar{a}, r)$ contenida en el dominio de f y las primeras derivadas parciales satisfacen las condiciones $D_1 f(\bar{a}) = 0, \dots, D_n f(\bar{a}) = 0$, entonces

1. Si todos los valores característicos de la matriz hessiana $H(\bar{a})$ son positivos, entonces la función f tiene un mínimo local en $\bar{a}$.
2. Si todos los valores característicos de la matriz hessiana $H(\bar{a})$ son negativos, entonces la función f tiene un máximo local en $\bar{a}$.
3. Si la matriz $H(\bar{a})$ tiene valores característicos positivos y negativos, entonces la función f tiene un punto silla en $\bar{a}$.

VALORES CARACTERÍSTICOS Y TEOREMAS BÁSICOS.

Con una matriz cuadrada se puede plantear el problema hallar los vectores $\bar{x}$ que satisfagan a la ecuación

$$[A] \bar{x} = c \bar{x} \quad (1)$$

donde c es un escalar. Las constantes c_i que satisfacen la condición (1) son los valores característicos de $[A]$ y los vectores $\bar{x}$ que la cumplen los los vectores característicos de $[A]$.

EJEMPLO

Calcule los valores característicos de $[A] = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

SOLUCION

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix} \text{ o bien } \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - cx_1 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - cx_2 = 0 \end{cases} \quad (S1)$$

El sistema de ecuaciones lineales simultáneas producido al plantear el problema, es un sistema homogéneo y en este caso para que exista solución diferente a la trivial es necesario que el determinante del sistema valga cero:

$$\det \begin{bmatrix} 3-c & 7 \\ 1 & -(3+c) \end{bmatrix} = -(3-c)(3+c) - 7 = -(9-c^2) - 7 = 0$$

consecuentemente se tiene la ecuación $c^2 - 16 = 0$ con la cual se calculan los valores característicos que evidentemente son $c_1 = 4$, $c_2 = -4$.

El correspondiente vector característico al valor $c_1 = 4$ se obtiene en (S1)

$$-x_1 + 7x_2 = 0$$

$$x_1 - 7x_2 = 0$$

consecuentemente si $x_2 = u$, $x_1 = 7u$

de esto se infiere que el vector buscado es $X_1 = u \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

Análogamente, el cálculo del vector característico X_2 correspondiente al valor característico $C_2 = -4$, se obtiene al sustituir C por -4 en (S1)

$$7x_1 + 7x_2 = 0$$

$x_1 + x_2 = 0$, si $x_2 = v$, entonces $x_1 = -v$, por lo que

$$X_2 = v \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se acostumbra a normalizar a los vectores característicos

$$|X_1| = \sqrt{49u^2 + u^2} = u\sqrt{50} = 1$$

de esta igualdad se obtiene

$$u = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{50}}{50} = \frac{5\sqrt{2}}{50} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

En forma semejante

$$|X_2| = \sqrt{v^2 + v^2} = \sqrt{2} \cdot v = 1,$$

al despejar v resulta

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Los vectores característicos normalizados son las direcciones propias; en este problema las citadas direcciones propias son los vectores

$$d_1 = \begin{bmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{10} \\ \frac{\sqrt{2}}{10} \end{bmatrix}$$

$$d_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

ESPECTRO DE UNA MATRIZ CUADRA

Se da el nombre de espectro de la matriz cuadrada $[A]$ de orden n , a la sucesión de sus n valores característicos $\{C_1, \dots, C_n\}$.

MATRIZ MODAL

La matriz modal $[M]$ de una matriz cuadrada $[A]$ de orden n , es la matriz cuyas columnas son los n vectores característicos $[M] = \{X_1, \dots, X_n\}$

EJEMPLO

Construya la matriz modal de la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

SOLUCION

Conforme a la definición y los cálculos anteriores:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad \text{por esto } [M] = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El espectro correspondiente a $[M]$ es $E = \{4, -4\}$

MATRIZ DIAGONAL CARACTERÍSTICA

Se dice que la matriz diagonal $[D]$, cuya diagonal principal la forman los valores característicos $c_1, \dots, c_n$ de la matriz $[A]$ de orden n , es la diagonal característica de la matriz $[A]$, consecuentemente

$$[D] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

TEOREMA 27

Hipótesis: $[A]$ es una matriz cuadrada, $[M]$ su modal y $[D]$ su diagonal característica.

Afirmación: $[A][M] = [M][D]$

Demostración

De acuerdo con la definición de vectores y valores característicos

$$\begin{aligned} [A] X_1 &= c_1 [I] X_1 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$[A] X_n = c_n [I] X_n$$

(S1)

El sistema (S1) se puede escribir en forma matricial

$$[A][X_1, \dots, X_n] = [c_1[I] X_1, \dots, c_n[I] X_n]$$

El segundo factor del primer miembro es la modal, por consiguiente

$$[A][M] = [X_1 c_1, \dots, X_n c_n] = [X_1, \dots, X_n] \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

Otra forma de esta igualdad de acuerdo con las definiciones es

$$[A][M] = [M][D]$$

EDET.

TEOREMA 28

Hipótesis: La matriz $[A]_{n \times n}$ es regular, sus valores característicos son $c_1, \dots, c_n$ y sus correspondientes vectores característicos son $X_1, \dots, X_n$ respectivamente.

Afirmación: Los valores característicos de $[A]^{-1}$ son $\frac{1}{c_1}, \dots, \frac{1}{c_n}$ y sus respectivos vectores característicos son $X_1, \dots, X_n$

Demostración

Por definición $[A]X_i = c_i[I]X_i$, $i=1, \dots, n$

conforme a la hipótesis existe $[A]^{-1}$, por consiguiente

$$[A]^{-1}[A]X_i = c_i[A]^{-1}[I]X_i, \quad i=1, \dots, n$$

De esta igualdad se concluye

$$[A]^{-1}X_i = \frac{1}{c_i}X_i, \quad i=1, \dots, n$$

EDET

COROLARIO

La matriz inversa de la diagonal característica $[D]$ de $[A]$ es $[D]^{-1}$.

TEOREMA 2.9

Hipótesis: $X_1, \dots, X_n$ son los vectores característicos de la matriz $[A]_{n \times n}$; los correspondientes valores característicos $c_1, \dots, c_n$, todos son distintos.

Afirmación: El conjunto de vectores $\{X_1, \dots, X_n\}$ es L-in.

Demostración por reducción al absurdo.

Se parte de la negación de la afirmación: $\{X_1, \dots, X_n\}$ es L-dep, luego existe un vector X_{k+1} de la sucesión que

es combinación lineal de una subsucesión de vectores característicos linealmente independientes, por ejemplo,

$$X_{k+1} = t_1 X_1 + \dots + t_i X_i + \dots + t_k X_k, \quad t_i \neq 0 \quad (1)$$

Al premultiplicar los dos miembros de (1) por $[A]$, resulta

$$[A] X_{k+1} = t_1 [A] X_1 + \dots + t_i [A] X_i + \dots + t_k [A] X_k = t_1 c_1 X_1 + \dots + t_i c_i X_i + \dots + t_k c_k X_k$$

asique

$$c_{k+1} X_{k+1} = t_1 c_1 X_1 + \dots + t_i c_i X_i + \dots + t_k c_k X_k \quad (2)$$

Ahora se multiplica (1) por c_{k+1} , se obtiene

$$c_{k+1} X_{k+1} = t_1 c_{k+1} X_1 + \dots + t_i c_{k+1} X_i + \dots + t_k c_{k+1} X_k \quad (3)$$

Si de (2) se resta (3), entonces

$$0 = t_1 (c_1 - c_{k+1}) X_1 + \dots + t_i (c_i - c_{k+1}) X_i + \dots + t_k (c_k - c_{k+1}) X_k$$

Como la subsucesión $X_1, \dots, X_k$ es L-in y se sabe que $t_i \neq 0$ entonces

$$c_i = c_{k+1}$$

contra la hipótesis.

EDET.

COROLARIO

Si los valores característicos son todos distintos, entonces la matriz modal es regular y por tanto tiene inversa, así que de la igualdad

$$[A][M] = [M][D] \quad \text{se infiere} \quad [D] = [M]^{-1}[A][M]$$

MATRICES SEMEJANTES

Una matriz $[A]_{n \times n}$ es semejante a la matriz $[B]_{n \times n}$ si existe una matriz regular $[P]_{n \times n}$, tal que, $[B] = [P]^{-1}[A][P]$.

Según esta definición, si los valores característicos $c_1, \dots, c_n$ de $[A]_{n \times n}$ son todos distintos, entonces su diagonal característica $[D]$ es semejante a la matriz $[A]$.

TEOREMA 30

Hipótesis: $[A]$ y $[B]$ son dos matrices semejantes

Afirmación: Sus ecuaciones características son iguales

Demostración

Según la hipótesis $[B] = [P]^{-1}[A][P]$ (1)

La ecuación característica de $[B]$ es por definición

$$f_B(c) = \det[B - c[I]] = \det[P]^{-1}[A][P] - c[P]^{-1}[I][P] = 0$$

Conforme a la distributividad matricial

$$f_B(c) = \det([P]^{-1}[A - c[I]][P]) = \det[P]^{-1} \det[A - c[I]] \det[P] =$$

De acuerdo con la teoría de determinantes

$$f_B(c) = \frac{1}{\det[P]} \det[P] \det[A - c[I]] = \det[A - c[I]] = 0 = f_A(c)$$

E D E T.

TEOREMA 31

Hipótesis 1: $[A]$ y $[B]$ son dos matrices semejantes

Hipótesis 2: X_1 es el vector característico de $[A]$ correspondiente al valor característico c_1 de $[A]$

Afirmación: $Y_1 = [P]^{-1} X_1$ es el vector característico correspondiente al valor característico c_1 de $[B]$.

Demostración

Por la hipótesis 2, $[A] X_1 = c_1 X_1$ (1)

Según la hipótesis 1, $[A] = [P][B][P]^{-1}$ (2)

De (1) y (2) $[P][B][P]^{-1} X_1 = c_1 X_1$

por consiguiente $[B]([P]^{-1} X_1) = c_1 ([P]^{-1} X_1)$

o bien $[B] Y_1 = c_1 Y_1$ donde $Y_1 = [P]^{-1} X_1$

EDET.

COROLARIO

Si dos matrices son semejantes sus valores característicos son respectivamente iguales, pero no los vectores característicos correspondientes.

TEOREMA 32

Hipótesis: $[A]$ es una matriz simétrica y X_1, X_2 son los vectores característicos pertenecientes a los valores característicos $c_1 \neq c_2$.

Afirmación: X_1 y X_2 son ortogonales

Demostración

El punto de partida es la identidad

$$(c_1 - c_2) X_1^t X_2 = (c_1 X_1)^t X_2 - X_1^t (c_2 X_2)$$

Por la hipótesis $[A]^t = [A]$, $c_1 X_1 = [A] X_1$ y $c_2 X_2 = [A] X_2$

por consiguiente

$$(c_1 - c_2) X_1^t X_2 = ([A] X_1)^t X_2 - X_1^t [A] X_2 = X_1^t [A]^t X_2 - X_1^t [A] X_2$$

$$(c_1 - c_2) X_1^t X_2 = X_1^t [A] X_2 - X_1^t [A] X_2 = 0$$

como $c_1 \neq c_2$, resulta $X_1^t X_2 = 0$
EDET.

COROLARIOS

1. Si $[A]_{n \times n}$ es simétrica y todos sus valores característicos son distintos, entonces su modal $[M]$ está formada por vectores columna X_i ortogonales entre sí.
2. Si $[A]_{n \times n}$ es simétrica y todos sus valores característicos son distintos, entonces el conjunto $\{X_1, \dots, X_n\}$ de sus vectores característicos es una base en E^n .

TEOREMA 33

Hipótesis: $[A]$ es una matriz simétrica con elementos reales

Afirmación: Los valores característicos de $[A]$ son reales.

Demostración

Si c es un valor característico de $[A]$, entonces existe el vector característico $X \neq 0$, tal que

$$[A] X = c X \quad (1)$$

Al conjugar (1) la matriz $[A]$ no sufre cambio por la hipótesis

$$[A] X^* = c^* X^* \quad (2)$$

$$\text{De (1)} \quad X^{*t} [A] X = c X^{*t} X \quad (3)$$

$$\text{De (2)} \quad X^t [A] X^* = c^* X^t X^* \quad (4)$$

Si se resta (4) de (3) resulta considerando la simetría de $[A]$

$$X^{*t}[A]X - X^t[A]^tX^* = (c - c^*)X^tX^*$$

Si se aplica el teorema de la trasposición de matrices,

$$X^{*t}([A]X) - ([A]X)^tX^* = (c - c^*)X^tX^*$$

De acuerdo con la definición de vector y valor característicos se obtiene

$$cX^{*t}X - cX^tX^* = (c - c^*)X^tX^*$$

Según la teoría de la conjugación $X^{*t}X = X^tX^*$ por consiguiente

$$(c - c^*)X^tX^* = 0$$

donde el factor X^tX^* es un número positivo, y por tanto se infiere

$$c = c^*$$

lo cual significa que c es un número real.

EDET

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

La dificultad que encierran los problemas en los que se buscan los puntos extremos sujetos a restricciones, supera a todos los métodos de solución hasta ahora conocidos, no se sabe como resolverlos en su plena generalidad. Cuando los conjuntos restrictores dan lugar a intersecciones de estructura muy sencilla se cuenta con métodos especiales entre los que destaca el método de los multiplicadores de Lagrange el cual se enuncia, se ejemplifica en algunas aplicaciones; pero se soslaya su demostración, (un resultado importante del análisis matemático) porque requiere antecedentes que en este trabajo no se han contemplado. Se inicia su enunciado:

Si la función $f: E^n \rightarrow E^1$ tiene un extremo relativo sujeto a las p restricciones

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_p(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (1)$$

donde $p < n$, entonces existen p escalares $m_1, \dots, m_p$, tales que

$$(\text{grad}) f = m_1 (\text{grad}) g_1 + \dots + m_p (\text{grad}) g_p \quad (2)$$

se cumple en cada punto extremo.

Las incógnitas en este problema son las componentes $x_1, \dots, x_n$ y las constantes $m_1, \dots, m_p$; para determinarlas se tienen las p ecuaciones (1) y las n ecuaciones (2).

Cuando $n=2$ el enunciado toma la forma de una regla práctica; para hallar los valores extremos de la función $f(x, y)$ sujetos a la condición adicional $g(x, y) = 0$ se forma la nueva función $F = f + m g$ y se verifican las condiciones necesarias para el óptimo

$$f_x + m g_x = 0, \quad f_y + m g_y = 0$$

las cuales con la restricción $g(x, y) = 0$ forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas para

calcular los valores x_0, y_0 y m

EJEMPLO

Determinar los valores extremos de la función $f(x,y) = xy$ sobre el círculo de radio uno. $x^2 + y^2 = 1$

SOLUCIÓN

Se forma la función $F = xy + m(x^2 + y^2 - 1)$

Las conocidas condiciones del óptimo son

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2mx = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x + 2my = 0 \quad (1)$$

que debe cumplir también $x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (2)$
por consiguiente del sistema:

$$\begin{aligned} y + 2mx &= 0 & 2my + 4m^2x &= 0 \\ 2my + x &= 0 & \text{, o bien, } 2my + x &= 0 \end{aligned}$$

se obtiene $(4m^2 - 1)x = 0$

Como x no puede ser cero porque de serlo $y=0$ y la condición (2) resulta absurda, luego

$4m^2 - 1 = 0$, de aquí se obtienen las soluciones

$$m_1 = +\frac{1}{2}, \quad m_2 = -\frac{1}{2}$$

De $m_1 = \frac{1}{2}$ se obtiene en (1) $y + 2(\frac{1}{2})x = 0$, $x + 2(\frac{1}{2})y = 0$

esto es $y = -x$, substituyendo en (2) resulta $x^2 + x^2 = 1$, luego $x_1 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

en consecuencia $y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$

Análogamente De $m_2 = -\frac{1}{2}$ de (1) resulta $y = x$, solución que al satisfacer a (2) produce $2x^2 = 1$

por consiguiente

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}, & x_4 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}, & y_4 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

En resumen hay cuatro puntos solución

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

De esto se infiere que

$$f(P_1) = -\frac{1}{2}, f(P_2) = -\frac{1}{2}, f(P_3) = \frac{1}{2}, f(P_4) = \frac{1}{2}$$

De lo cual se concluye que en P_1 y P_2 existe un valor mínimo de f y en P_3 y P_4 un máximo.

Observe que el sistema (1), (2), es el mismo que el formado por $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial m} = 0$.

EJEMPLO

Minimizar $f(x_1, x_2) = -3x_1 + x_1x_2 + 4x_2$

sujeta a

$$x_1^2 + x_2 = 3, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

SOLUCION

Se forma $F = -3x_1 + x_1x_2 + 4x_2 - m(x_1^2 + x_2 - 3)$

$$F_{x_1} = -3 + x_2 - 2mx_1 = 0,$$

$$F_{x_2} = 4 + x_1 - m = 0$$

$$F_m = x_1^2 + x_2 - 3 = 0$$

$$\text{De (2)} \quad x_1 = m - 4, \quad \text{De (1)} \quad x_2 = 2m(m - 4) + 3$$

$$\text{De (3)} \quad (m - 4)^2 + 2m(m - 4) + 3 - 3 = 0$$

$$(m - 4)[m - 4 + 2m] = 0, \quad \text{luego, } m_1 = 4, \quad m_2 = \frac{1}{3}$$

Si $m = 4$, entonces $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

Si $m = \frac{1}{3}$, entonces $x_1 = -\frac{8}{3}$ por las restricciones de no negatividad se rechaza esta solución.

Ahora $f(x_1, 3) = -3x_1 + 3x_1 + 4(3) = 12$

Para $x_1 = a$, $x_2 = 3 + b$

$$f(a, 3+b) = -3a + a(3+b) + 4(3+b) = 12 + 4b + ab$$

$$f(a, 3+b) = 12 + b(4+a) \quad (1)$$

Para $x_1 = a$, $x_2 = 3 - b$

$$f(a, 3-b) = -3a + a(3-b) + 4(3-b) = 12 - 4b - ab$$

$$f(a, 3-b) = 12 - b(-4+a) \quad (2)$$

Consecuentemente, el análisis anterior muestra que a lo largo de la recta $x_2 = 3$ la función es constante y vale 12, que para valores de x_2 mayores de 3, f tiene un valor superior a 12 y para valores de x_2 menores de 3 la función vale menos de 12.

C A P I T U L O I V

INTRODUCCION A LA DUALIDAD EN PROGRAMA
CION GEOMETRICA. (FASE INFORMATIVA).

INTRODUCCIÓN A LA DUALIDAD EN PROGRAMACIÓN GEOMÉTRICA.

CONSISTENCIA Y SUPERCONSISTENCIA

Un problema de programación geométrica, ya primal, ya dual, es consistente cuando su región de factibilidad no es vacía.

En particular, un programa primal es superconsistente si existe un punto $\bar{t}_0$ tal que sus componentes son positivas y satisface a todas las restricciones de eficiencia en tal forma que

$$g_k(\bar{t}_0) < 1, \quad k=1, \dots, p.$$

Claramente un PPA puede ser consistente sin ser superconsistente; pero todo PPA superconsistente es siempre consistente.

Se recuerda que un PPA es de la forma

Minimizar $g_0(\bar{t})$

Sujeta a las restricciones

$$\text{Naturales} \quad t_1 > 0, \dots, t_m > 0 \quad (\text{positividad}) \quad (1)$$

$$\text{Eficientes} \quad g_1(\bar{t}) \leq 1, \dots, g_p(\bar{t}) \leq 1 \quad (2)$$

donde

$$g_k(\bar{t}) = \sum_{i \in J[k]} c_i t_1^{a_{i1}} \dots t_m^{a_{im}}, \quad k=0, \dots, p \quad (3)$$

$$J[k] = \{m_k, m_k+1, \dots, n_k\}, \quad k=0, \dots, p \quad (4)$$

$$m_0=1, \quad m_1=n_0+1, \dots, m_p=n_{p-1}+1, \quad n_p=n \quad (5)$$

La estructura de un PDB es

$$\text{Maximizar } v(\bar{d}) = \left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{d_i} \right)^{d_i} \right] \prod_{k=1}^p e_k(\bar{d})^{e_k(\bar{d})} \quad (6)$$

$$\text{donde } e_k(\bar{d}) = \sum_{i \in J[k]} d_i, \quad k=1, \dots, p \quad (7)$$

Sujeta a las restricciones de
 No negatividad $d_1 \geq 0, \dots, d_n \geq 0$, (8)

Normalidad $\sum_{i \in J[0]} d_i = 1$, (9)

Ortogonalidad $\sum_{i=1}^n a_{ij} d_i = 0, j=1, \dots, n$ (10)

y se acepta el convenio $x^x = x^{-x} = 1$ cuando $x=0$.

PRIMER TEOREMA DE DUALIDAD. TEOREMA 34.

Hipótesis: El PPA es superconsistente y su función primal $g_0(\bar{t})$ alcanza su valor mínimo restringido en un punto que satisface las restricciones primales (naturales y eficaces).

Afirmación 1: El correspondiente PDB es consistente y la función dual alcanza su valor máximo en un punto que satisface las restricciones duales (no negatividad, normalidad y ortogonalidad).

Afirmación 2: El valor máximo restringido de la función dual es igual al valor mínimo restringido de la función primal.

Afirmación 3: Si $\bar{t}'$ es un punto que minimiza $g_0(\bar{t})$, existen multiplicadores de Lagrange m'_k , $k=1, \dots, p$, tales que la función Lagrangiana

$$L(\bar{t}, \bar{m}) = g_0(\bar{t}) + \sum_{k=1}^p m'_k [g_k(\bar{t}) - 1] \quad (1)$$

tiene la propiedad

$$L(\bar{t}', \bar{m}) \leq g_0(\bar{t}') = L(\bar{t}', \bar{m}') \leq L(\bar{t}, \bar{m}') \quad (2)$$

para valores cualesquiera $t_j > 0$ y cualesquiera valores $m'_k \geq 0$.

Afirmación 4: Existe un vector $\bar{d}$ maximizante del PBD cuyas componentes son

$$d'_i = \begin{cases} \frac{a_{i1} \dots a_{ip}}{c_i t_1 \dots t_p} \cdot \frac{1}{g_0(\bar{t})}, & i \in J[0] \\ \frac{a_{i1} \dots a_{ip}}{m'_k c_i t_1 \dots t_p} \cdot \frac{1}{g_0(\bar{t})}, & i \in J[k], k=1, \dots, p \end{cases} \quad (3)$$

donde $\bar{t} = \bar{t}'$ y $\bar{m} = \bar{m}'$

Afirmación 5: $e_k(\bar{d}') = \frac{m'_k}{j_0(\bar{t}')} , k=1, \dots, p. \quad (4)$

Afirmación 6: Si $\bar{d}'$ es un punto maximizante del PDB, todo punto maximizante del PPA satisface el sistema de ecuaciones

$$c_i t_1 \dots t_p = \begin{cases} \delta'_i v(\bar{d}'), & i \in J[0] \\ \frac{\delta'_i}{e_k(\bar{d}')} , & i \in J[k] \end{cases} \quad (5)$$

donde k toma todos los valores enteros positivos para los cuales $e_k(\bar{d}') > 0$

La relación (3) suministra un método para calcular un vector maximizante $\bar{d}'$ a partir de un vector minimizante $\bar{t}'$ y un juego apropiado de multiplicadores de Lagrange $m'_k, k=1, \dots, p$.

Por otra parte las fórmulas (5), aportan un método para computar un vector minimizante $\bar{t}'$ a partir de un vector maximizante $\bar{d}'$. Además se debe informar que las igualdades (5) se reducen con facilidad a un sistema lineal

de ecuaciones simultáneas en las variables $\text{Log } t_j, j=1, \dots, p$ al tomar logaritmos de ambos miembros de cada ecuación del sistema (5). En esta forma con cierta facilidad se encuentra un punto minimizante $\bar{t}'$ a partir de un punto maximizante $\bar{d}'$.

Para finalizar estas aclaraciones, se observa que según las fórmulas (4), los números e_i ($\bar{d}'$) son proporcionales a los multiplicadores de Lagrange m'_i , del PPA.

El segundo teorema de dualidad, indiscutiblemente complementa al primero, si en éste se supuso que $g_0(\bar{t})$ alcanza su valor mínimo restringido en un punto que satisface las restricciones primales, en el segundo teorema se propone una condición suficiente para que la hipótesis del primer teorema quede plenamente satisfecha.

SEGUNDO TEOREMA DE DUALIDAD. TEOREMA 35.

Hipótesis: Si el PPA es consistente y existe un punto $\bar{d}^*$ de componentes positivas que satisfacen las restricciones del PDB

Afirmación: La función primal $g_0(\bar{t})$ alcanza su valor mínimo restringido en un punto $\bar{t}'$ que satisface las restricciones del PPA.

Las demostraciones de estos teoremas y de los que se van a presentar en el estudio especial de la Teoría de Dualidad de la programación geométrica mediante los multiplicadores de Lagrange.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS PPA Y LOS PDB RELACIONADOS.

Se parte del posinomio

$$g(\bar{t}) = \sum_i c_i t_1^{a_{i1}} \dots t_p^{a_{ip}} \quad (1)$$

Al hacer el cambio de variable $t_j = e^{\bar{z}_j}, j=1, \dots, p$, $t_j = e^{\frac{z_j}{q_j} (1/a_{ij})}$ por consecuencia

$$g(\bar{z}) = \sum_i c_i e^{z_1 a_{i1} + \dots + z_p a_{ip}} \quad (2)$$

Se observa que las nuevas variables primales $\bar{z}_j$ pueden tomar como valor cualquier número real, porque las antiguas variables primales t_j pueden tomar el valor de cualquier número real positivo, en consecuencia el programa primal transformado es

PROGRAMA PRIMAL TRANSFORMADO $A\bar{z}$. (PPAZ).

Hallar el valor mínimo de una función exponencial positiva $g_0(\bar{z})$ sujeta las restricciones eficaces

$$g_1(\bar{z}) \leq 1, \dots, g_p(\bar{z}) \leq 1 \quad (4)$$

donde

$$g_k(\bar{z}) = \sum_{i \in J[k]} c_i e^{a_{i1}\bar{z}_1 + \dots + a_{im}\bar{z}_m} \quad k=0,1,\dots,p \quad (5)$$

$$J[k] = \{m_k, m_k+1, \dots, n_k\} \quad k=0,1,\dots,p \quad (6a)$$

$$m_0=1, m_1=n_0+1, \dots, m_p=n_{p-1}+1, n_p=n \quad (6b)$$

Los exponentes a_{ij} son números reales cualesquiera, pero los coeficientes c_i son siempre reales positivos; en consecuencia las funciones $g_k(\bar{z})$ son exponenciales positivas.

Al observar con detenimiento el PPAZ, muchos de los aspectos del PPA se advierten con mucha facilidad; por ejemplo de PPAZ se concluye que todo PPA se puede formular de modo que la matriz $[a_{ij}]$ siempre sea de rango m . Ciertamente, el programa $A\bar{z}$ una representación libre de coordenadas; a saber: Minimizar

$$\sum_{i \in J[0]} c_i e^{x_i}$$

sujeta a las restricciones

$$\sum_{i \in J[k]} c_i e^{x_i} \leq 1, \quad k=1,\dots,p$$

con el vector $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ restringido al espacio columnas de la matriz de exponentes $[a_{ij}]$. Si el rango de la matriz de exponentes es menor que m , los vectores columnas de la citada matriz de exponentes son L -dep y entonces se pueden separar por una parte los vectores L -in que sirven de base a los restantes, y por la otra los vectores que son combinaciones lineales de los separados en la primera parte. Por supuesto que esta forma de clasificar las columnas de la matriz no es única pero una vez efectuada una clasificación, a causa de la representación libre de coordenadas de aquellas variables z_j correspondientes a los vectores columna que no se hallan en la base, es claro que se les pueden asignar valores arbitrarios, por consiguiente se puede eliminar de su condición relativa sin afectar el valor mínimo del programa Az . En resumen sin pérdida de generalidad se puede siempre aceptar la hipótesis: Todo programa primal no trivial siempre se puede formular de forma que su matriz de exponentes es de rango m , el número de variables primales, con m estrictamente menor que el número total de términos n . El entero $n-m-1$ se llama **grado de dificultad** del citado programa.

El grado de dificultad de un programa es igual al número de variables independientes sobre las cuales se maximiza la función dual, por consiguiente, un programa con grado de dificultad cero fácilmente se resuelve solucionando primeramente su programa dual. Las restricciones de este programa dual tienen la solución 0 o d' . Además se facilita obtener la solución d' porque las restricciones duales son lineales. Como d' es la única solución de las restricciones duales, es el vector maximizante del PD.

Si el grado de dificultad es mayor que cero, hay que desarrollar un esfuerzo mayor para lograr un vector maximizante d' . Con todo se verá que se puede obtener

mucha información del programa dual aún sin hallar d^* . De un punto de vista teórico, la propiedad más importante del programa Az es el contenido del teorema que sigue:

TEOREMA 36 DE CONVEXIDAD.

El programa Az es un programa convexo. Cada función exponencial positiva $g_k(\bar{z})$ en un programa Az es convexa.

Este teorema que más adelante se demostrará, pone de relieve la liga que existe entre la programación convexa y la geométrica e indirectamente acentúa la aplicación del teorema de Kuhn-Tucker, el principal de la programación convexa, en la demostración del primer teorema de dualidad.

Asimismo se insiste en advertir que las restricciones del PPA son en general funciones no lineales, en contraste con las de PDB que son funciones lineales, propiedad que permite varias simplificaciones en la resolución del PDB.

Las restricciones del PDB son de dos clases: desigualdades e igualdades a estas últimas pertenecen las condiciones de ortogonalidad y normalidad y a las primeras las de no negatividad.

Las soluciones a las condiciones de ortogonalidad componen un subespacio vectorial de E^n al que se da el nombre de espacio dual (en un concepto distinto al utilizado con el mismo nombre en álgebra lineal). El espacio primal es el espacio columnas de la matriz de exponentes. La condición de normalidad define un hiperplano en E^n ; el hiperplano de normalidad y las condiciones de no negatividad limitan las soluciones al primer ortante de E^n . Por consiguiente, las restricciones duales es la intersección del espacio dual, el hiperplano de normalidad y el primer ortante de E^n ; intersección que recibe el nombre de plano factible dual.

El plano factible dual de un programa geométrico con grado de dificultad igual a cero, se reduce a un solo punto pero cuando es distinto de cero, se puede construir una base de vectores $\bar{b}_{(j)}$, $j=1, \dots, d$, donde d es el grado de dificultad, por lo que la solución general a las restricciones duales es

$$\bar{d} = \bar{b}_{(0)} + \sum_{j=1}^d r_j \bar{b}_{(j)} \quad (7)$$

donde los r_j son números reales cualesquiera que satisfacen la condición de no negatividad $d_i \geq 0$

$$d_i(\bar{r}) = b_{i(0)} + \sum_{j=1}^d r_j b_{i(j)} \geq 0, i=1, \dots, n \quad (8)$$

En esta relación, el número $b_{i(j)}$ es la i -ésima componente del vector $b_{(j)}$, las variables r_j son las variables básicas y al vector $b_{(0)}$, que llena los requisitos de normalidad y ortogonalidad, se le da el nombre de vector de normalidad. Los vectores $b_{(j)}$, $j=1, \dots, d$, son las soluciones linealmente independientes a la contraparte homogénea de las condiciones de normalidad y ortogonalidad a cuyo conjunto se intitula vectores de nulidad.

La función dual v en términos de las variables básicas toma la forma

$$v = \left\{ \prod_{i=1}^n c_i \left[b_{i(0)} + \sum_{j=1}^d r_j b_{i(j)} \right] \right\} \left(\prod_{i=1}^n \frac{-d_i}{d_i} \right) \prod_{k=1}^p e_k(\bar{d}) e_k(\bar{d}) \quad (9)$$

Obsérvese que el producto entre corchetes, que se indica con A es

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & b_{1(0)} + r_1 b_{1(1)} + \dots + r_d b_{1(d)} \\ C_2 & b_{2(0)} + r_1 b_{2(1)} + \dots + r_d b_{2(d)} \\ \vdots & \vdots \\ C_n & b_{n(0)} + r_1 b_{n(1)} + \dots + r_d b_{n(d)} \end{bmatrix}$$

este producto se puede ordenar en la forma siguiente

$$A = \begin{bmatrix} C_1^{b_{1(0)}} & C_2^{b_{2(0)}} & \dots & C_n^{b_{n(0)}} \\ [C_1^{b_{1(1)}} & C_2^{b_{2(1)}} & \dots & C_n^{b_{n(1)}}]^{r_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [C_1^{b_{1(d)}} & C_2^{b_{2(d)}} & \dots & C_n^{b_{n(d)}}]^{r_d} \end{bmatrix}$$

por consiguiente

$$A = \prod_{i=1}^n C_i^{b_{i(0)}} \left[\prod_{i=1}^n C_i^{b_{i(1)}} \right]^{r_1} \dots \left[\prod_{i=1}^n C_i^{b_{i(d)}} \right]^{r_d} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \text{Log } A = & b_{1(0)} \text{Log } C_1 + b_{2(0)} \text{Log } C_2 + \dots + b_{n(0)} \text{Log } C_n + \\ & + (b_{1(1)} \text{Log } C_1 + b_{2(1)} \text{Log } C_2 + \dots + b_{n(1)} \text{Log } C_n) r_1 + \\ & + \dots + \dots + \dots + \\ & + (b_{1(d)} \text{Log } C_1 + b_{2(d)} \text{Log } C_2 + \dots + b_{n(d)} \text{Log } C_n) r_d. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \text{Log } A = b_{1(j)} \text{Log } C_1 + b_{2(j)} \text{Log } C_2 + \dots + b_{n(j)} \text{Log } C_n.$$

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \text{Log } A = \text{Log } \prod_{i=1}^n C_i^{b_{i(j)}} \quad (9b)$$

Por otra parte se analiza el producto

$$B = d_1^{-d_1} d_2^{-d_2} \cdots d_n^{-d_n}$$

Al tomar logaritmos neperianos de B se obtiene

$$\text{Log } B = -d_1 \text{Log } d_1 - d_2 \text{Log } d_2 - \cdots - d_n \text{Log } d_n$$

De 7 resulta

$$\begin{aligned} \text{Log } B = & - (b_{1(0)} + r_1 b_{1(1)} + \cdots + r_d b_{1(d)}) \text{Log } d_1 - \\ & - (b_{2(0)} + r_1 b_{2(1)} + \cdots + r_d b_{2(d)}) \text{Log } d_2 - \\ & - \cdots - \\ & - (b_{n(0)} + r_1 b_{n(1)} + \cdots + r_d b_{n(d)}) \text{Log } d_n \end{aligned}$$

Esta suma se puede ordenar factorizando las r_j

$$\begin{aligned} \text{Log } B = & - (b_{1(0)} \text{Log } d_1 + b_{2(0)} \text{Log } d_2 + \cdots + b_{n(0)} \text{Log } d_n) - \\ & - r_1 (b_{1(1)} \text{Log } d_1 + b_{2(1)} \text{Log } d_2 + \cdots + b_{n(1)} \text{Log } d_n) - \\ & - \cdots - \\ & - r_j (b_{1(j)} \text{Log } d_1 + b_{2(j)} \text{Log } d_2 + \cdots + b_{n(j)} \text{Log } d_n) - \\ & - \cdots - \\ & - r_d (b_{1(d)} \text{Log } d_1 + b_{2(d)} \text{Log } d_2 + \cdots + b_{n(d)} \text{Log } d_n) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \text{Log } B = - (b_{1(j)} \text{Log } d_1 + b_{2(j)} \text{Log } d_2 + \cdots + b_{n(j)} \text{Log } d_n)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \text{Log } B = - \sum_{i=1}^n b_{i(j)} \text{Log } d_i \quad (9c)$$

Con fines simplificatorios se escribe

$$K_j = \prod_{i=1}^n c_i^{b_i(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, d \quad (10)$$

por consiguiente de (9a) y (10) se obtiene la simplificación

$$v = K_0 \left(\prod_{j=1}^d K_j^{r_j} \right) \left(\prod_{i=1}^n d_i^{-d_i} \right) \prod_{k=1}^p e_k(\bar{d})^{e_k(d)} \quad (11)$$

Observase que la constante K_0 tiene las dimensiones de la función dual, en tanto que las constantes K_j , $j=1, \dots, d$, son adimensionales y se les denomina constantes básicas, que dependen de la base $b_i(j)$, $i,j=0,1,\dots,d$. Estas consideraciones transforman el programa dual B en la siguiente

PROGRAMA TRANSFORMADO DUAL B_r (PDB r)

Determine el valor máximo de una función de productos

$$v(\bar{r}) = K_0 \left(\prod_{j=1}^d K_j^{r_j} \right) \left(\prod_{i=1}^n d_i^{-d_i(\bar{r})} \right) \prod_{k=1}^p e_k(\bar{r})^{e_k(\bar{r})} \quad (12)$$

donde

$$d_i(\bar{r}) = b_{i(0)} + \sum_{j=1}^d r_j b_{i(j)}, \quad i=1, \dots, n \quad (13)$$

asimismo

$$e_k(\bar{r}) = e_{k(0)} + \sum_{j=1}^d r_j e_{k(j)}, \quad k=1, \dots, p \quad (14)$$

El vector $\bar{r}$ se halla sujeto a las restricciones de no negatividad

$$b_{i(0)} + \sum_{j=1}^d r_j b_{i(j)} \geq 0, \quad i=1, \dots, n \quad (15)$$

Además

$$K_j = \prod c_i^{b_{ij}} \quad , \quad j=0, 1, \dots, d \quad (16)$$

También

$$e_{k(j)} = \sum_{i \in J[k]} b_{ij} \quad , \quad \begin{matrix} k=1, \dots, p, \\ j=1, \dots, d \end{matrix} \quad (17)$$

Los factores c_i por hipótesis son positivos, el vector de normalidad $\bar{b}_{(0)}$ satisface la condición de normalidad

$$\sum_{i=1}^{n_0} b_{i(0)} = 1 \quad (18)$$

y la condición de ortogonalidad

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} b_{i(0)} = 0 \quad , \quad j=1, \dots, m \quad (19)$$

Los vectores de nulidad $\bar{b}_{(j)}$, $j=1, \dots, d$ forman una base del espacio de soluciones del sistema lineal homogéneo

$$\sum_{i=1}^{n_0} y_i = 0 \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} y_i = 0 \quad , \quad j=1, \dots, m \quad (21)$$

donde la matriz $[a_{ij}]$ es la de exponentes del PPA.

Se ha mencionado que generalmente a partir del primer dual transformado Bv , aún sin haber maximizado la función dual transformada $v(r)$, se puede lograr información muy útil en relación al PPA, las conclusiones más útiles se reúnen en el teorema que sigue.

TEOREMA 37: DE CONCAVIDAD.

La función $\text{Log } v(\bar{r})$ es cóncava y el programa dual transformado Br es cóncavo cuando la función a maximizar, esto es $v(\bar{r})$, se reemplaza por la función $\text{Log } v(\bar{r})$. Además, las funciones $v(\bar{r})$ y $\text{Log } v(\bar{r})$ tienen el mismo conjunto de puntos maximizantes.

Supongase que $\bar{r}$ es un punto en el cual $d_i(\bar{r}) \geq 0, i=1, \dots, n$. Al tomar el logaritmo neperiano de $v(\bar{r})$ y derivar respecto a r_j de acuerdo con (9b), (9c) y (12) se obtiene

$$\frac{1}{v(\bar{r})} \frac{\partial v}{\partial r_j} = \text{Log } K_j - \sum_{i=1}^n b_{i(j)} \text{Log } d_i(\bar{r}) + \sum_{k=1}^p e_{k(j)} \text{Log } e_k(\bar{r})$$

por consiguiente, el punto $\bar{r}$ es un punto estacionario de $\text{Log } v(\bar{r})$, si y sólo si, se cumplen las igualdades

$$\text{Log } K_j = \sum_{i=1}^n b_{i(j)} \text{Log } d_i(\bar{r}) - \sum_{k=1}^p e_{k(j)} \text{Log } e_k(\bar{r}), j=1, \dots, d$$

$$\text{Log } K_j = \text{Log } \prod_{i=1}^n d_i(\bar{r})^{b_{i(j)}} + \text{Log } \prod_{k=1}^p e_k(\bar{r})^{-e_{k(j)}}, j=1, \dots, d$$

o bien, tomando antilogaritmos

$$K_j = \left(\prod_{i=1}^n d_i(\bar{r})^{b_{i(j)}} \right) \prod_{k=1}^p e_k(\bar{r})^{-e_{k(j)}}, j=1, \dots, d \quad (21a)$$

Si $\bar{r}$ satisface estas ecuaciones, es fácil ver que, al sustituirlo con la fórmula (10) el porqué de la fórmula simplificada

$$v(\bar{r}) = K_0 \left(\prod_{i=1}^n d_i(\bar{r})^{-b_{i(0)}} \right) \prod_{k=1}^p e_k(\bar{r})^{e_{k(0)}}$$

ciertamente, de la fórmula (21a) se infiere

$$K_1^{r_1} = (d_1^{r_1 b_{1(1)}} d_2^{r_1 b_{2(1)}} \dots d_n^{r_1 b_{n(1)}}) \prod_{k=1}^p e_k(\bar{r})^{-r_1} e_{k(1)}^{r_1}$$

$$K_2^{r_2} = (d_1^{r_2 b_{1(2)}} d_2^{r_2 b_{2(2)}} \dots d_n^{r_2 b_{n(2)}}) \prod_{k=1}^p e_k(\bar{r})^{-r_2} e_{k(2)}^{r_2}$$

.....

$$K_d^{r_d} = (d_1^{r_d b_{1(d)}} d_2^{r_d b_{2(d)}} \dots d_n^{r_d b_{n(d)}}) \prod_{k=1}^p e_k(\bar{r})^{-r_d} e_{k(d)}^{r_d}$$

por esto

$$\prod_{j=1}^d K_j^{r_j} = \left[d_1^{\sum_{j=1}^d b_{1(j)} r_j} d_2^{\sum_{j=1}^d b_{2(j)} r_j} \dots d_n^{\sum_{j=1}^d b_{n(j)} r_j} \right] \prod_{k=1}^p e_k(\bar{r})^{-\sum_{j=1}^d r_j} e_{k(j)}^{\sum_{j=1}^d r_j}$$

De este resultado se infiere

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{j=1}^d K_j^{r_j} \right) \left(\prod_{i=1}^n d_i(\bar{r})^{-d_i(\bar{r})} \right) \left(\prod_{k=1}^p e_k(\bar{r})^{e_k(\bar{r})} \right) = \\ & = \left[d_1^{\sum_{j=1}^d r_j b_{1(j)} - d_1} d_2^{\sum_{j=1}^d r_j b_{2(j)} - d_2} \dots d_n^{\sum_{j=1}^d r_j b_{n(j)} - d_n} \right] \prod_{k=1}^p e_k(\bar{r})^{e_k(\bar{r}) - \sum_{j=1}^d e_{k(j)} r_j} \end{aligned}$$

Ahora se utilizan las igualdades (8), (11) y (14) con lo cual

$$U = K_0 \left(\prod_{i=1}^n d_i(\bar{r})^{-b_i(0)} \right) \prod_{k=1}^p e_k(\bar{r})^{e_k(0)}$$

Estos desarrollos y el teorema que afirma: todo punto estacionario de una función cóncava f sobre un dominio cóncavo D es un punto maximizante de f sobre D , son la base de la prueba del teorema que a continuación se enuncia

TEOREMA 3B.

Si el vector $\bar{d}$, con todas sus componentes positivas, satisface a las restricciones del programa dual B, entonces $\bar{d}$ es un punto maximizante del programa dual B, si y solo si

$$K_j = \left(\prod_{i=1}^n d_i^{b_i(j)} \right) \prod_{k=1}^p e_k(d)^{-e_k(j)}, \quad j=1, \dots, d \quad (22)$$

donde
$$K_j = \prod_{i=1}^n c_i^{b_i(j)} \quad j=1, \dots, d \quad (23)$$

Además
$$v(d) = K_0 \left(\prod_{i=1}^n d_i^{-b_i(0)} \right) \prod_{k=1}^p e_k(\bar{d})^{e_k(0)} \quad (24)$$

cuando d satisface ambas restricciones del programa dual B y la relación (22).

Las ecuaciones (22) se llaman ecuaciones de maximización, forman un sistema de d ecuaciones no lineales con d variables básicas r_j . Además, se puede calcular un punto maximizante del programa dual B resolviendo el citado sistema. El valor máximo del PDB lo da la fórmula (24) en términos del mencionado punto maximizante.

Observase que las constantes básicas K_j con el primer miembro de las ecuaciones de maximización y en el segundo miembro de estas ecuaciones se hallan las variables d_i , situación que facilita la investigación de como los puntos óptimos de ambos programas si el PDB y el PPA, dependen de los coeficientes c_i .

PROCEDIMIENTOS SISTEMÁTICOS.

Retomemos el problema

Maximizar la función primal

$$g_0(t_1, t_2, t_3) = 40 t_1^{-1} t_2^{-1/2} t_3^{-1} + 20 t_1 t_3 + 20 t_1 t_2 t_3$$

sujeto a las restricciones.

$$\text{Naturales : } t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0$$

$$\text{Eficaces : } g_1(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{3} t_1^{-2} t_2^{-2} + \frac{4}{3} t_2^{\frac{1}{2}} t_3^{-1} \leq 1$$

$$\text{donde } k=0,1 \text{ y } J[k] = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline k=0 & k=1 & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \right\}$$

y la matriz de coeficientes traspuesta es

$$[a_{i,j}]^t = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [A]^t$$

Las restricciones de ortogonalidad para el PDE son

$$-d_1 + d_2 + d_3 - 2d_4 + 0d_5 = 0$$

$$-\frac{1}{2}d_1 + 0d_2 + d_3 - 2d_4 + \frac{1}{2}d_5 = 0$$

$$-d_1 + d_2 + d_3 + 0d_4 - d_5 = 0$$

Las funciones e_p son $e_0 = d_1 + d_2 + d_3$

$$e_1 = d_4 + d_5$$

La restricción de normalidad es $d_1 + d_2 + d_3$ Las restricciones de no negatividad son $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 \geq 0$

La función dual a maximizar es

$$v(\bar{d}) = \left[\frac{40}{d_1} \right]^{d_1} \left[\frac{20}{d_2} \right]^{d_2} \left[\frac{20}{d_3} \right]^{d_3} \left[\frac{1/2}{d_4} \right]^{d_4} \left[\frac{1/3}{d_5} \right]^{d_5} (d_4 + d_5)$$

Para obtener una base vectorial para el espacio dual

se aplica el algoritmo de Gauss-Jordan a las restricciones de ortogonalidad, operaciones que se registran en la tabla

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	
	-1	1	1	-2	0	
	$-\frac{1}{2}$	0	1	-2	$\frac{1}{2}$	Matriz aumentada original
	-1	1	1	0	-1	
	1	-1	-1	2	0	
	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	Con operaciones elementales se construye un vector unitario en la 1ª columna
	0	0	0	2	-1	
	1	0	-2	4	-1	
	0	1	-1	2	-1	Se logran vectores unitarios en la 1ª y 2ª columnas.
	0	0	0	2	-1	
G_1	1	0	-2	2	0	Se tienen vectores unitarios en la 1ª, 2ª y 5ª columnas
	0	1	-1	0	0	
	0	0	0	-2	1	
F	1	0	0	2	-2	Se intercambia la 3ª columna con la 5ª,
	0	1	0	0	-1	
	0	0	1	-2	0	
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	

A continuación se forma la matriz transpuesta por signo contrario de las últimas columnas y para los vectores de E^5 se completa con una matriz unitaria de 2×2

H	-2	0	2	1	0
	2	1	0	0	1

Por la forma en que se construyeron estos dos últimos vectores, obviamente son ortogonales con los vectores fila de la matriz $[F]$ pero por el intercambio de la tercera columna con la quinta, las componentes no concuerdan con las de los vectores de la matriz $[G_1]$, así que para restaurar la concordancia en la matriz $[H]$ se efectúa un nuevo intercambio de la tercera columna con la quinta y de este modo se obtiene

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
G_2	-2	0	0	1	2
	2	1	1	0	0

matriz cuyos dos vectores filas son ortogonales con los vectores filas de $[G_1]$ y por consiguiente con los vectores filas de la matriz original, traspuesta de la matriz, de exponentes, consecuentemente los vectores columna de la matriz

Matriz de exponentes cuyo orden es 5×3 .	-1	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	Matriz G_3 cuyo orden es 5×2
	1	0	1	0	1	
	1	1	1	0	1	
	-2	-2	0	1	0	
	0	$\frac{1}{2}$	-1	2	0	
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	

son linealmente independientes y constituyen una base del espacio de soluciones de las condiciones de admisibilidad, esto es, del espacio dual.

Del vector V_4 se puede obtener el vector $\bar{a}_0$ dividiendo cada uno de los elementos de V_4 entre la suma de sus tres primeras componentes, de lo cual resulta

$$\bar{b}_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

que además de satisfacer las condiciones de ortogonalidad, llena el requisito de normalidad.

Como la matriz G_3 tiene solamente dos columnas, únicamente hay un vector de nulidad $\bar{b}_{(1)}$ que para formarlo, la suma $2+1+1$ de la tres primeras componentes de V_5 se multiplica por $\bar{b}_{(0)}$, producto que se resta de V_5

$$\bar{b}_{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

La solución general a las condiciones de normalidad y ortogonalidad se da en la igualdad vectorial

$$\bar{d} = \bar{b}_{(0)} + r \bar{b}_{(1)}$$

que desarrollada en componentes es

$$\begin{aligned} d_1 &= 1 - 2r \\ d_2 &= r \\ d_3 &= r \\ d_4 &= -\frac{1}{2} + 2r \\ d_5 &= -1 + 4r \end{aligned} \quad (S1)$$

De estas igualdades se colige que el vector $\bar{d}$ satisface a las condiciones de no negatividad solamente cuando

$$1-2r \geq 0, \quad r \geq 0, \quad -1+4r \geq 0$$

o bien

$$\frac{1}{2} \geq r, \quad r \geq \frac{1}{4}, \quad \text{o su equivalente } \frac{1}{4} \leq r \leq \frac{1}{2}$$

Si $r = \frac{3}{8}$, entonces queda garantizada la existencia de un vector d^* con sus componentes positivas que satisface al conjunto de todas las restricciones del programa dual. Por otra parte, el problema primal es superconsistente, porque con el vector $(2, 1, 2)$ se obtienen los resultados

$$g_1(2, 1, 2) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{1}\right)^2 + \frac{4}{3} (\sqrt{1}) \frac{1}{2}$$

$$g_1(2, 1, 2) = \frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{1+8}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \leq 1$$

Se concluye, por el segundo teorema de dualidad que la función primal $g_0(t)$ alcanza su valor mínimo restringido en un punto $\bar{t}'$ que satisface las restricciones primales. De este modo se cumple: EL PFA es superconsistente y su función primal alcanza su valor máximo en un punto que satisface las restricciones primales, consecuentemente se pueden aplicar a este problema todas las afirmaciones del primer teorema de dualidad.

Si en (S1) se hace sucesivamente $r = \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \frac{7}{20}$ se obtiene según (S1)

r	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

*

$$v(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0) = (80)^{\frac{1}{2}} (80)^{\frac{1}{4}} (80)^{\frac{1}{4}} (1)(1) = 80$$

$$v(\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}) = (100)^{\frac{2}{5}} (\frac{200}{3})^{\frac{6}{10}} (\frac{10}{3})^{\frac{1}{10}} (\frac{20}{3})^{\frac{1}{5}} (\frac{3}{10})^{\frac{3}{10}} = 90,9$$

$$v(\frac{3}{10}, \frac{7}{20}, \frac{7}{20}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}) = 97,14. \quad (S2)$$

Ahora se calcula $g_0(t)$ ensayando valores de t_1, t_2 y t_3 que satisfacen a las restricciones, con lo cual se obtiene

$$g_0(1, 1, 4) = 170, \quad g_0(1, 1, 3) = 133,3,$$

$$g_0(1, 1, \frac{5}{2}) = 116, \quad g_0(1, 1, \frac{17}{8}) = 103,82 \quad (S3)$$

Según el teorema de dualidad $g_0(\bar{t}) \geq g_0(\bar{t}') \geq v(\bar{d})$ donde $\bar{t}'$ es un vector minimizante en el problema propuesto y los vectores $\bar{t}$ y $\bar{d}$ son vectores cualquiera que satisfacen a las restricciones primales y duales respectivamente; consecuentemente (S2) suministra las fronteras inferiores de $g_0(\bar{t}')$, en tanto que (S3) da las fronteras superiores de $g_0(\bar{t}')$, en particular

$$103,82 \geq g_0(\bar{t}') \geq 97,14$$

Se ha logrado un valor mínimo restringido para el valor de g_0 con valor de 100 y un posible error menor a 4 por ciento.

Algunas veces las restricciones duales que se encuentran para un solo punto $\bar{d}'$. Frecuentemente se aplica esto cuando el número de términos en el programa primal es mayor que el número de variables primales y estos problemas tienen grado de dificultad cero y su solución se obtiene resolviendo el sistema lineal de ecuaciones obtenidas de las restricciones duales

EJEMPLO

Minimizar el posinomio

Sujeta a la restricción

$$g_0(\bar{t}) = 40t_1t_2 + 20t_2t_3$$

$$g_1(\bar{t}) = \frac{1}{5}t_1^{-1}t_2^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{5}t_2^{-1}t_3^{-\frac{2}{3}} \leq 1$$

SOLUCIÓN

Se principia con la matriz de exponentes transpuesta y de

1	0	-1	0
-1	1	$-\frac{1}{2}$	-1
0	1	0	$-\frac{2}{3}$

$$\begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

3×4
 4×1

3×1

$d_1 + d_2 - d_3 + d_4 = 0$
 $d_1 + d_2 - \frac{1}{2}d_3 - d_4 = 0$
 $0d_1 + d_2 + 0d_3 - \frac{2}{3}d_4 = 0$
 $d_1 + d_2 = 1$

inmediato se plantean las condiciones de ortogonalidad y normalidad; a continuación se plantea la función dual

$$v(\bar{d}) = \left[\frac{40}{d_1} \right]^{d_1} \left[\frac{20}{d_2} \right]^{d_2} \left[\frac{1}{5d_3} \right]^{d_3} \left[\frac{3}{5d_4} \right]^{d_4} (d_3 + d_4)^{d_3 + d_4}$$

Las condiciones de ortogonalidad y normalidad dan la solución

$$d_1 = d_3, \quad d_2 = \frac{2}{3}d_4, \quad d_1 + d_2 = d_3 + \frac{2}{3}d_4 = 1$$

$$d_3 + \frac{2}{3}d_4 - \frac{1}{2}d_3 - d_4 = 0 \quad d_3 - \frac{2}{3}d_4 = 0$$

por consiguiente $2d_3 = 1$, $\frac{4}{3}d_4 = 1$, así que

$$d_1' = \frac{1}{2}, \quad d_2' = \frac{1}{2}, \quad d_3' = \frac{1}{2}, \quad d_4' = \frac{3}{4}.$$

es la única solución y el correspondiente valor de la función dual es

$$v(\bar{d}') = \left[80 \right]^{\frac{1}{2}} \left[40 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{5} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4}{5} \right]^{\frac{3}{4}} \left[\frac{5}{4} \right]^{\frac{5}{4}} = \left[\frac{80^2}{5} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{64}{25(5)} \right]^{\frac{1}{4}} [1.25]^{1.25}$$

$$v(\bar{d}') = \frac{80\sqrt{5}}{5} \left[\frac{8\sqrt{5}}{25} \right]^{\frac{1}{2}} [1,25]^{1,25} = 16(2,236)(0,8459)(1,3218) = 40,0015$$

Como $\bar{d}'$ es el único punto de la región factible, se concluye, después de advertir que se cumplen las hipótesis de los teoremas de dualidad que el valor mínimo de la función primal es 40 consecuentemente

$$g_0(t'_1, t'_2, t'_3) = 40$$

Vale la pena hacer una observación importante: se ha determinado el mínimo restringido de g_0 antes de conocer el vector minimizante (t'_1, t'_2, t'_3) . Se determinó el vector maximizante (d'_1, d'_2, d'_3, d'_4) de la función dual, lo cual es de una importancia capital, porque una de las conclusiones del primer teorema de dualidad afirma que

$$d'_1 g_0(\bar{t}') = c_1 t'_1 t'_2 t'_3, \quad d'_2 g_0(\bar{t}') = c_2 t'_1 t'_2 t'_3$$

Asimismo si d'_3 y d'_4 no son cero, entonces la restricción $g_1(t)$ es activa, lo cual significa $g_1(t) = 1$, por consiguiente

$$\frac{d'_3}{d'_3 + d'_4} = c_3 t'_1 t'_2 t'_3, \quad \frac{d'_4}{d'_3 + d'_4} = c_4 t'_1 t'_2 t'_3$$

consecuentemente

$$\frac{1}{5} t'_1 t'_2 t'_3 = \frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{5} t'_1 t'_2 t'_3 = \frac{3}{5}$$

$$40 t'_1 t'_2 = \frac{1}{2} 40$$

$$20 t'_2 t'_3 = \frac{1}{2} 40$$

Para despejar de estas ecuaciones, los valores de t'_1, t'_2 y t'_3 , se toman logaritmos para convertir el sistema de

en uno lineal:

$$-\log t'_1 - \frac{1}{2} \log t'_2 + 0 \log t'_3 = \log 2$$

$$+0 \log t'_1 - \log t'_2 - \frac{2}{3} \log t'_3 = 0$$

$$\log t'_1 + \log t'_2 + 0 \log t'_3 = -\log 2$$

$$0 \log t'_1 + \log t'_2 + \log t'_3 = 0$$

Si, $u = \log t'_1$, $v = \log t'_2$, $w = \log t'_3$, entonces

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} & = & \begin{matrix} \log 2 \\ 0 \\ -\log 2 \\ 0 \end{matrix} \\ \vee & \begin{matrix} 4 \times 3 \\ 3 \times 1 \end{matrix} & & & \end{matrix}$$

o bien $-u = \frac{1}{2}v + \log 2$, $-v = \frac{2}{3}w$

$u = v - \log 2$, $v = -w$ sistema que admite

la solución única, $u = -\log 2$, $v = 0$, $w = 0$
de lo cual resulta

$$t'_1 = \frac{1}{2}, \quad t'_2 = 1, \quad t'_3 = 1$$

Este resultado completa la solución del problema.

Se observa que el número de términos $n=4$, el número de variables primales $m=3$ luego el grado de dificultad de este problema es $d=4-3-1=0$.

Cuando el grado de dificultad es cero, el vector maximizante $\bar{d}$ no depende de los coeficientes de los posinomios

PROBLEMA TRANSFORMABLE A PROGRAMACIÓN GEOMÉTRICA.

Hay varios tipos de problemas que se pueden reducir a genuinos problemas de programación geométrica, sea

a estudiar uno de estos problemas que originalmente no se puedan plantear en forma de posinomios

Minimizar la función $G(\bar{t}) = f(\bar{t}) + [q(\bar{t})]^a h(\bar{t})$
 donde $f(t)$, $q(t)$ y $h(t)$ son posinomios, funciones del vector $\bar{t} = (t_1, \dots, t_m)$ y $a > 0$

Se considera la función de equivalencia

$$g(\bar{T}) = f(\bar{t}) + t_0^a h(\bar{t})$$

y la restricción $t_0^{-1} q(\bar{t}) \leq 1$

donde t_0 es una variable independiente adicional y $\bar{T} = (t_0, t_1, \dots, t_m)$.

Es claro que a partir de la construcción de la función de equivalencia $g(\bar{T})$ y la restricción que el vector $(t_0, \dots, t_m)$ minimiza a la función $G(\bar{t})$, si y solo si el vector $(q(\bar{t}), t_0^{-1}, \dots, t_m)$ minimiza a $g(\bar{T})$ sujeto a la nueva restricción.

Asimismo es fácil comprender que el valor mínimo restringido de $g(\bar{T})$ es igual al valor mínimo de $G(\bar{t})$ y consecuentemente se ha transformado el problema de minimizar $G(\bar{t})$ la cual no necesariamente es un posinomio, en un problema equivalente de minimizar el posinomio $g(\bar{T})$ sujeto a una restricción, donde la forma de la citada restricción permite la aplicación de la programación geométrica.

Lo expuesto se ilustra con el ejemplo

$$\text{Minimizar } G(\bar{t}) = t_1^{-\frac{1}{2}} t_2^{\frac{1}{8}} + \left(\frac{4}{5} t_1^{\frac{1}{2}} t_2^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{5} t_1^{\frac{1}{3}} t_2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$$

La función propuesta $G(\bar{t})$ no es un posinomio, por lo que se construye el problema equivalente

Minimizar

$$g(\bar{t}) = t_1^{-\frac{1}{2}} t_2^{\frac{1}{8}} + t_0^{\frac{1}{2}} t_1^{\frac{1}{4}} t_2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{sujeta a } \frac{1}{5} t_0^{-1} t_1^{\frac{1}{2}} t_2^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{5} t_0^{-1} t_1^{\frac{1}{3}} t_2 \leq 1$$

cuya solución permite la aplicación de la programación geométrica.

La función dual es

$$v(\bar{d}) = \left[\frac{1}{d_1} \right]^{d_1} \left[\frac{1}{d_2} \right]^{d_2} \left[\frac{4}{5d_3} \right]^{d_3} \left[\frac{2}{5d_4} \right]^{d_4} (d_3 + d_4)^{d_3 + d_4}$$

Las condiciones de normalidad y ortogonalidad son respectivamente

$$d_1 + d_2 + 0d_3 + 0d_4 = 1$$

0	$\frac{1}{2}$	-1	-1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1

d_1
d_2
d_3
d_4

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0d_1 + \frac{1}{2}d_2 - d_3 - d_4 = 0$$

$$-\frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{2}d_3 + \frac{1}{3}d_4 = 0$$

$$\frac{1}{8}d_1 - \frac{1}{2}d_2 + \frac{2}{3}d_3 + d_4 = 0$$

Se convierten a enteros los coeficientes y se aplica la regla de Cramer, principiando con el determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & 6 & 4 & -6 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -12 & 16 & 24 & 3 & -15 & 8 & 12 \end{vmatrix} \quad (4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 11 \\ -15 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 4(-36 + 7) = 4(41)$$

(2)(2)

A continuación se calculan los determinantes necesarios

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -6 & 0 & 3 & 2 & -6 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 8 & 12 & 3 & 0 & 8 & 12 \end{vmatrix} - 4(3) \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 12 \end{vmatrix} + 12 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 12(8-1) = 12(7)$$

(2)(2)

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 12 \end{vmatrix} \\ (2) \quad (2) \end{array} \quad 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \\ -12 & -4 & 0 \end{vmatrix} \quad 4(20) = 80$$

$$\begin{array}{c} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -6 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & -12 & 0 & 24 \end{vmatrix} \begin{array}{c} (2) \\ (3) \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -12 & 12 \end{vmatrix} \begin{array}{c} (6) \\ (6) \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -12 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{c} (-6) \\ (-6) \end{array} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6(5) = 30$$

$$\begin{array}{c} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -6 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & -12 & 16 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{c} -2(3) \\ -6 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -12 & 8 \end{vmatrix} \begin{array}{c} -6 \\ -6 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & -12 & -4 \end{vmatrix} \begin{array}{c} 12 \\ 12 \end{array} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 12(4-3) = 12$$

Por consiguiente la solución única es

$$d'_1 = \frac{20}{41}, \quad d'_2 = \frac{21}{41}, \quad d'_3 = \frac{15}{82}, \quad d'_4 = \frac{3}{41};$$

Con estos resultados se calcula el valor mínimo de $10-G(\bar{t})$

$$v(\bar{d}') = \left[\frac{41}{20} \right]^{\frac{20}{41}} \left[\frac{41}{21} \right]^{\frac{21}{41}} \left[\frac{4(82)}{5(15)} \right]^{\frac{15}{82}} \left[\frac{2(41)}{5(3)} \right]^{\frac{3}{41}} \left[\frac{21}{82} \right]^{\frac{21}{82}} = 2.048 \checkmark$$

Para el cálculo de t'_0, t'_1, t'_2 se tiene

$$\begin{aligned} \frac{20}{41} (2.048) &= t_0^{-\frac{1}{2}} t_1^{-\frac{1}{8}} t_2^{-\frac{1}{8}} \\ \frac{21}{41} (2.048) &= t_0^{-\frac{1}{2}} t_1^{-\frac{1}{4}} t_2^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{15}{82} &= \frac{4}{5} t_0^{-1} t_1^{-\frac{1}{2}} t_2^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{6}{21} &= \frac{2}{5} t_0^{-1} t_1^{-\frac{1}{3}} t_2^{-1} \end{aligned}$$

si $u = \log t'_0$, $v = \log t'_1$, $w = \log t'_2$, entonces

$$0u - \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}w = \log 20 + \log(2.048) - \log 41$$

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}v - \frac{1}{2}w = \log 21 + \log(2.048) - \log 41$$

$$-u + \frac{1}{2}v + \frac{2}{3}w = \log 15 + \log 5 - \log 21 - \log 4$$

$$-u + \frac{1}{3}v + w = \log 6 + \log 5 - \log 21 - \log 2$$

$$(1) \quad 0u - \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}w = 1.3010 + 0.3114 - 1.6128 = -0.0004$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}v - \frac{1}{2}w = 1.3222 + 0.3114 - 1.6128 = 0.0208$$

$$(3) \quad -u + \frac{1}{2}v + \frac{2}{3}w = 1.1761 + 0.6990 - 1.3222 - 0.6021 = -0.0492$$

$$(4) \quad -u + \frac{1}{3}v + w = 0.7782 + 0.6990 - 1.3222 - 0.3010 = -0.1460$$

$$\text{De (1)} \quad 4v + w = 0.0032 \quad \checkmark \quad 8v + 2w = 0.0064 \quad \checkmark$$

$$\text{De (3)} -4 \quad v - 2w = 0.5808 \quad \checkmark \quad v - 2w = 0.5808$$

$$\text{por esto} \quad 9v = 0.5872$$

$$v = 0.0652 \quad , \quad w = 0.0032 - 0.2608 = -0.2576$$

Al tomar antilogaritmos se obtiene

$$t'_1 = 1.186, \quad t'_2 = 0.5525$$

A P E N D I C E I

TEORIA ELEMENTAL DE LOS METODOS DEDUCTIVOS DE PRUEBA

I N D I C E

CAPITULO I CONCEPTOS GENERALES

Introducción	2
Indefinibles	4
Ejemplo de Concepto Indefinible	6
Sistema Axiomático	6
Ejemplo de Sistema Axiomático	7
Independencia	10
Ejemplo de Sistema Redundante de Postulados	10
Completitud	12
Consistencia	12

CAPITULO II PRINCIPIOS DE LOGICA FORMAL

Afirmación Simple	16
Valores de Verdad	16
Operaciones Lógicas	17
La Conjunción	18
La Disyunción	19
La Negación	20
Constante	20
Variable	20
Función Proposicional	21
Tautología	28
Contradicción	28
Equipotencia	35
Asociatividad	35
Conmutatividad	35
Distributividad	36
Existencia de Neutrales	36

Existencia de Aniquilantes	36
Complementación	36
Teoremas de Morgan	36
Teorema de Dualidad	37
La Condicional	38
La Bicondicional	43
Implicación Lógica	44
Equivalencia Lógica	49

CAPITULO III METODOS DE PRUEBA

Método de la Reducción al Absurdo	52
Ejemplo de Demostración utilizando $p \rightarrow q = (p \wedge q) \rightarrow q$	54
Inducción Matemática	62
Método de Prueba de Inducción Matemática	62
Ejemplo de Demostración Directa	66
Ejemplo de Demostración por Inducción Matemática	68
Ejemplo de Demostración por Reducción al Absurdo	73

CAPITULO IV CUANTIFICADORES

Función Proposicional	79
Dominio de Verdad	79
Tautología en el Dominio	79
Contradicción en el Dominio	80
Cuantificador Universal	80
Cuantificador Existencial	81
Negación de Afirmaciones Cuantificadores	82
Leyes de la Negación	83
Demostración por Contraejemplo	84
Ejemplo de Demostración por Contraejemplo	84
Bibliografía	

CAPITULO I

CONCEPTOS GENERALES

INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo es ofrecer a los estudiantes del área de las matemáticas aplicadas, una explicación elemental del fundamento lógico sobre el que se apoyan los métodos de prueba, que los matemáticos utilizan en la exposición de las teorías matemáticas, comunmente presentadas en forma de teorías axiomáticas, con la finalidad de hacer más comprensibles las demostraciones de los teoremas con los que esta ciencia, de exquisita belleza y enorme aplicabilidad, edifica sus grandiosas construcciones.

Obviamente el punto de partida es la interrogante - ¿qué se entiende por sistemas axiomáticos?. La contestación exhaustiva a esta pregunta nos llevaría demasiado lejos del objetivo enunciado, porque este tema linda con el problema de la fundam^{ta}ntación de las matemáticas.

Presentar debidamente los intentos de solución a este delicado problema implicaría examinar los trabajos de muchos genios: los de ARISTOTELES, sin hipérbole, el primer lógico formal de la historia; de los LEIBNIZ, que anhelaba dotar a filosofía de un sistema de lógica matemática, con la finalidad de que este instrumento le permitiera alcanzar la dignidad de ciencia. Asimismo se estudiaría la obra "Mathematical Analysis of Logic" donde su autor, GEORGE BOOLE, puso las bases de un álgebra de la lógica.

Obligatoriamente, se tendrían que analizar las obras de los egregios GOTTLOB FREGE, GUISEPPE PEANO Y BERTRAND RUSSELL, empeñados en despojar a la lógica de matices gnoseológicos, psicológicos y metafísicos, cuyo afán lo centraron en establecer, las condiciones adecuadas para un proceso deductivo riguroso y exacto, capaz de someter a examen los mismos procedimientos matemáticos.

Seguiría el estudio de las obras de HILBERT y GÖDEL investigadores sistemáticos de los problemas metalógicos; se examinarían los trabajos de los neopositivistas WITTGENSTEIN y CARNAP quienes dentro del planteamiento más rígido del convencionalismo lógico, consideran a los sistemas axiomáticos como un conjunto de fórmulas construidas con signos totalmente carentes de significado e indentifican la lógica de un lenguaje con su sintaxis, establecida ésta en forma completamente convencional, por lo que excluyen a la semántica desde el punto de partida.

Finalmente se pondría mucha atención a la obra de TURING, quien aprovecha las estrechas relaciones entre los cálculos lógicos y las teorías de las máquinas "pensantes", reduci -- bles al funcionamiento puramente automático y mecánico de un sistema formal y de este modo los teoremas metalógicos fundamentales se transforman en teoremas referentes a la posibilidad y limitaciones de las mencionadas máquinas.

De acuerdo con el objetivo propuesto, no es posible dentro del estrecho margen de este trabajo, ni tan solo resumir esta inconclusa aventura del pensamiento científico. A continuación solamente se contemplan desde un punto de vista puramente orientador, algunos de los conceptos fundamentales.

INDEFINIBLES

Cuando se inicia el estudio de cualquier parte de la ciencia, por ejemplo, la dinámica de fluidos es natural que el estudiante se pregunte:

1. ¿qué se entiende con la palabra "dinámica"?
2. ¿qué significado se debe asociar al término "fluidos"?

A estas interrogantes la teoría de la dinámica de los fluidos contesta:

"La dinámica es el estudio de la materia en movimiento, considerando las causas que lo originan; por razones didácticas se divide en dos grandes partes: la dinámica de los cuerpos rígidos y la de los cuerpos deformables; ésta última nuevamente se divide en dos partes: la teoría matemática de la elasticidad y la mecánica de los fluidos".

"En la teoría de la elasticidad se estudian las propiedades de los cuerpos elásticos: aquellos que al sufrir la acción de las fuerzas cambian su forma inicial y al cesar la acción de dichas fuerzas, la recuperan totalmente; el acero es un ejemplo característico de este tipo de materiales, capaces de resistir esfuerzos cortantes y normales de cierta consideración".

"Los fluidos son los líquidos y los gases, sustancias que además de adoptar la forma de los recipientes que los contienen, resisten muy poco la acción de las fuerzas cortantes cuya magnitud es tan pequeña en comparación a la resistencia que ofrecen a las fuerzas normales que en la mayoría de los casos los esfuerzos cortantes no se toman en consideración en los cálculos".

interrogantes

Obviamente después de leer esta respuesta surgen otras: ¿qué es la materia? ¿qué es el movimiento? ¿cómo saber si algo es una causa o un efecto? ¿qué debe entenderse por cuerpo rígido? ¿qué se quiere dar a entender con cuerpo deformable? ¿qué se debe entender por elasticidad?.

Muchas otras preguntas se pueden agregar a la pequeña lista planteada, pero de momento el propósito de lo expuesto se circunscribe solamente a destacar el siguiente hecho: al iniciar el estudio de la mecánica de fluidos, se advierte la imperiosa necesidad de que todas las personas interesadas en el tema, se hallen de común acuerdo en el significado de ciertas palabras definidas con anterioridad: tiempo, fuerza, movimiento, causa, etc., en el ejemplo de la dinámica de fluidos, con cuyo significado se compondrá el de otras palabras que servirán para construir la base firme sobre la que se levantará la estructura lógica de esta parte de la ciencia llamada dinámica de fluidos.

En general, al iniciar el estudio de cualquier parte de la ciencia, se observa que una de las primeras labores consiste en asignar a ciertas palabras un significado único y preciso; pero ¿a qué se debe enfatizar tanto este hecho?. Ciertamente es indispensable aclarar esta situación porque a consecuencia de su dimensión histórica, en el lenguaje común frecuentemente se observan características contrarias. Hay excelentes obras literarias en las que de cierta vaguedad se pasa a la evidente confusión, es posible encontrar pasajes oscuros en los cuales solamente queda la guía ofrecida por contexto; a veces, de este modo, puede el lector conjeturar el significado de lo que el autor desea comunicar, si su propósito es comunicar algo.

Probablemente con toda intención el autor no desea la interpretación única a sus escritos, tal vez se propuso darle a su obra cierto contenido, cambiante de un lector a otro y en esta

forma conseguir que su libro se transforme en una multiplicidad de obras: una para cada lector.

En la esfera de la literatura, es posible que la peculiaridad indicada represente un mérito capaz de dar al libro el nivel de obra de arte extraordinaria, pero en la ciencia esta situación sería la causa de los más perniciosos efectos. Si un científico pretendiera utilizar una palabra portadora de dos o más significados, con ella, le resultaría imposible establecer si logismos que pretendieran fundamentar la validez universal de ciertas implicaciones.

Al acometer la tarea de asignar a ciertas palabras un significado único, de inmediato se nota que esta labor implica un proceso en cadena: un término se define en función de otros de contenido más simple y estos últimos en función de otros nuevos; continuando con esta sucesión de definiciones, al final del proceso se descubre la presencia de términos indefinibles, de los cuales, todos los seres humanos debidamente iniciados infieren el mismo contenido.

EJEMPLO DE CONCEPTO INDEFINIBLE

Con fines aclaratorios, considerese la palabra "conjunto". Obviamente la infraestructura de su significado, se sustenta en la intuición inmediata de "un conjunto de cosas"; pero si a partir de esta intuición se pretende construir una definición, todos los esfuerzos serán vanos, cualesquiera de los caminos que se sigan, desembocarán en la inevitable circularidad, no se adelantará un paso más de la repetición: un conjunto es un conjunto de cosas; no obstante, desde los estudiantes que se inician en estos temas, hasta los más notables investigadores, pueden llegar a un acuerdo unánime en el significado que debe asignarse a la palabra conjunto.

SISTEMA AXIOMATICO

En las teorías matemáticas no solo se encuentran térmi

nos indefinibles con significado, también hay relaciones indefinibles con significado y proposiciones que enlazan los términos indefinibles con las relaciones indefinibles. En general todas las presentaciones axiomáticas de las teorías matemáticas se inician dando a conocer sus tres conjuntos privativos:

1A. Términos indefinibles con significado,

2A. Relaciones indefinibles con significado,

3A. Postulados: afirmaciones aceptadas sin prueba que ligan los términos indefinibles a las relaciones indefinibles.

Los elementos de estos tres conjuntos reciben el nombre de elementos primarios de la axiomatización. Debido a su importancia algunos autores consideran separadamente las leyes de la lógica, pero otros, en un afán de simplicidad, prefieren considerarlas dentro del conjunto 2A. Con propósito aclaratorios, se agrega un ejemplo de sistema axiomático.

EJEMPLO DE SISTEMA AXIOMATICO

El notable matemático Guiseppe Peano, en el año de 1899, formuló una teoría axiomática de la aritmética de los cardinales, en esta labor utilizó términos indefinibles, con la convicción de que todas las personas iniciadas en los niveles elementales de la aritmética, podían darles un mismo significado, estos términos son:

Número

Cero

y agregó la relación indefinible:

"Sucesor inmediato de"

Con estos elementos primarios, Peano estableció los postulados que llevan su nombre:

Postulados de Peano

- 1P. Cero es un número
- 2P. El sucesor inmediato de un número es un número.
- 3P. El cero no es sucesor inmediato de ningún número.
- 4P. No existen dos números diferentes con el mismo sucesor inmediato.
- 5P. Cualquier propiedad que pertenezca a cero y al sucesor inmediato de cualquier número que goce de esta propiedad, es una propiedad de todos los números.

En este sencillo ejemplo se puede observar que el método axiomático presenta dos atributos fundamentales:

1. Eleva al rango de ciencia a un pequeño conjunto de proposiciones.
2. Caracteriza la estructura formal de una teoría deductiva.

De acuerdo con estos puntos, desde los orígenes de la geometría, algunos autores pusieron el acento en la primera propiedad. Consideraron "verdaderas por sí mismas" a ciertas premisas inmediatas y juzgaron que la fuente de toda demostración radicaba en ciertas proposiciones especiales, llamadas axiomas si su validez es general, o postulados cuando la mencionada validez se halla limitada a al ámbito de una ciencia determinada. En resumen, según este punto de vista los axiomas o en su caso, los postulados, son el fundamento "evidente" de la deducción y su punto de partida obligado.

Este parecer, la "evidencia de los axiomas o postulados", sufrió un rudo golpe con la construcción de las geometrías

no euclidianas. De inmediato algunos investigadores empezaron a destacar la importancia del segundo punto del método axiomático: la capacidad que tienen los axiomas de caracterizar la estructura formal de una teoría deductiva.

El desarrollo del álgebra abstracta y de la lógica simbólica intensificaron este proceso de abandono del requisito de la evidencia de los axiomas. Hacia los finales del siglo XIX, la crisis de las paradojas acelera el desenlace: el repudio casi total del concepto de "verdades evidentes por si mismas".

Peano en la aritmética, Hilbert en la geometría y - Russell en todo el ámbito de la matemática, emplean los axiomas PRESCINDIENDO del principio de la evidencia; a estos les atribuyen, sin más el carácter de simples cadenas de símbolos anónimos construidas artificialmente, donde los resultados pueden admitir una interpretación ulterior.

Esta nueva forma de concebir los axiomas dió origen a problemas que la antigua axiomática estaba lejos de plantear. Al considerar los axiomas como fórmulas, ni verdades ni falsas, de inmediato se plantean las interrogantes primordiales:

1. ¿Cómo asegurar la capacidad de los axiomas para demostrar o refutar todas las proposiciones relativas al sistema?
2. ¿Será posible afirmar que no existen proposiciones verdaderas del sistema que no se puedan demostrar a partir de los axiomas adoptados?
3. ¿Es posible afirmar con seguridad que los axiomas elegidos son independientes, qué uno de los axiomas no es consecuencia de otros?
4. ¿Cómo asegurar la consistencia, es decir, como saber si en el conjunto de axiomas propuestos, no es posible demostrar una afirmación y su negación?

A finales del siglo XIX esta última interrogante, conocida como requisito de consistencia era uno de los problemas fundamentales de la ciencia y el principal de la lógica.

Suscintamente, en una exposición elemental se puede decir que el conjunto de postulados propuestos para la fundamentación axiomática de cierta rama de la matemática, debe cumplir con varios requisitos básicos:

- a) Independencia
- b) Completitud
- c) Consistencia

INDEPENDENCIA

El requisito de la independencia pide que en la tabla de postulados se eliminen aquellos deducibles a partir de cualquier subconjunto de postulados, en palabras sencillas: en la lista de postulados se excluyen la presencia de teoremas. Se adiciona el si guiente ejemplo para aclarar lo expuesto.

EJEMPLO DE SISTEMA REDUNDANTE DE POSTULADOS

Al observar los cambios que el mundo presenta, se llega al concepto de fenómenos. Si de estos no interesa su naturaleza y solamente importa si ocurren o no, se obtiene el concepto abs tracto de "evento".

El conjunto E de todos los resultados posibles de un experimento es el espacio de muestras y cada uno de sus elementos es una muestra.

Un campo de Borel de eventos es la familia Z de subconjuntos del espacio de muestras E que cumple con los postulados:

1. La familia Z contiene a E
2. La familia Z contiene al conjunto vacío $\emptyset$

3. Si $A, B \in Z$ entonces $A \cup B \in Z$
4. Si $A, B \in Z$ entonces $A - B \in Z$
5. Si $A, B \in Z$ entonces $A \cap B \in Z$

Este sistema de postulados es defectuoso debido a su redundancia, ciertamente bastan solamente dos postulados, a saber,

- I. Si $A \in Z$ entonces su complemento $\bar{A} \in Z$
- II. Si $A, B \in Z$ entonces $(A \cup B) \in Z$

A continuación se muestra la redundancia del sistema (1, 2, 3, 4, 5).

El postulado 1 es consecuencia directa de los postulados I y II porque

$$\begin{aligned} \text{Si } A \in Z \text{ entonces } \bar{A} \in Z \\ \text{Si } \bar{A}, A \in Z \text{ entonces } A \cup \bar{A} \in Z \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$A \cup \bar{A} = E \in Z$$

También el postulado 2 es consecuencia de I porque

$$\begin{aligned} \text{Si } E \in Z \text{ entonces } \bar{E} \in Z \\ \text{en consecuencia } \bar{E} = \emptyset \in Z \end{aligned}$$

Análogamente el postulado 5 se deduce de los postulados I y II.

$$\begin{aligned} \text{Si } A, B \in Z \text{ entonces } \bar{A}, \bar{B} \in Z \\ \text{Si } \bar{A}, \bar{B} \in Z \text{ entonces } \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \in Z \\ \text{Si } \bar{A} \cup \bar{B} \in Z \text{ entonces } \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \in Z \end{aligned}$$

Por el teorema de De Morgan

$$A \cap B \in Z$$

Finalmente se puede probar que 4 es un teorema demostrable a partir de los postulados I y II,

$$\text{Si } A, B \in Z \text{ entonces } \bar{A}, B \in Z$$

$$\text{Si } \bar{A}, B \in Z \text{ entonces } \bar{A} \cup B \in Z$$

$$\text{Si } \bar{A} \cup B \in Z \text{ entonces } \overline{\bar{A} \cup B} \in Z$$

Por el teorema de De Morgan

$$A \cap \bar{B} \in Z \text{ esto significa que } A - B \in Z.$$

Consecuentemente, de acuerdo con estas demostraciones el sistema de postulados (1, 2, 3, 4, 5) se sustituye por el sistema (I, II).

COMPLETITUD

El requisito de completitud exige que dado un sistema de postulados independientes, con solo el auxilio de estos y las leyes de la lógica se pueda fijar la verdad o falsedad de cualquier teorema del sistema.

CONSISTENCIA

El requisito de consistencia demanda que ninguna partición del conjunto de axiomas o postulados sirva de punto de partida para demostrar la negación de un teorema ya probado a partir de la misma partición o de otra, de los postulados en cuestión.

Esto significa que en un sistema inconsistente de postulados con uno de sus subconjuntos, exclusivamente por medio deductivos, se obtiene la demostración de un teorema con afirmación

p y con otro o el mismo subconjunto del mismo sistema de postulados se obtiene un teorema con afirmación $\bar{p}$, la negación de la afirmación anterior, consecuentemente en los sistemas inconsistentes de postulados se puede probar lo que se quiera; ciertamente con las afirmaciones p y $\bar{p}$, agregadas como hipótesis a otra nueva hipótesis h, se pueden formar los teoremas

$$h \wedge p \wedge \bar{p} \rightarrow q \quad (1)$$

$$h \wedge p \wedge p \rightarrow \bar{q} \quad (2)$$

Observe que en el segundo teorema la afirmación $\bar{q}$ es la negación de la afirmación q del primero, esto significa que los teoremas (1) y (2) son contradictorios. A continuación se muestra el desarrollo de la tabla de verdad que registra los valores de verdad correspondientes a las condicionales (1) y (2).

h	p	q	$\bar{p}$	$p \wedge \bar{p}$	$h \wedge p \wedge \bar{p}$	$h \wedge p \wedge \bar{p} \rightarrow q$	$h \wedge p \wedge \bar{p} \rightarrow \bar{q}$
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V
1	2	3	4	5	6	7	8

Los resultados anotados en las columnas 7 y 8 de la tabla de verdad prueban que de aceptarse como hipótesis $p \wedge \bar{p}$, la estructura de ambos teoremas (1) y (2) es la de una tautología estructuralmente verdadera, independientemente del valor de verdad de la hipótesis h y la afirmación q por lo que también quedan probados los teoremas

$$\bar{h} \wedge p \wedge \bar{p} \rightarrow q$$

$$\bar{h} \wedge p \wedge \bar{p} \rightarrow \bar{q}$$

Acerca de esta situación algunos lógicos han comentado que admitir la conjunción

$$p \wedge \bar{p}$$

como hipótesis, pueden ser muy útil a una oligarquía partidaria fanática de un credo determinado, que basa su derecho al poder total, sobre la infabilidad de un credo impuesto, pero definitivamente no sirve para la construcción de una ciencia deductiva.

En definitiva, un conjunto de postulados es consistente, si no existen contradicciones entre los postulados o entre los teoremas que de ellos se deducen, consecuentemente la prueba de la consistencia de un sistema de postulados, depende de la afirmación: en el conjunto de TODOS los teoremas, CONOCIDOS Y DESCONOCIDOS, no existe una pareja de teoremas contradictorios. En esta afirmación reside el origen de las dificultades que presenta la prueba directa de la consistencia de un sistema de postulados, cuyo problema se plantea en los términos: dado un subconjunto -- cualquiera del conjunto de postulados de un sistema, probar que a partir de él es imposible la construcción de una contradicción.

Después de este breve panorama conceptual, se exponen en la parte que sigue, las bases lógicas en las que se apoyan los métodos de prueba de las teorías matemáticas.

C A P I T U L O I I
P R I N C I P I O S D E L O G I C A F O R M A L

AFIRMACION SIMPLE

En este trabajo a toda masa elocutiva p , considerada como un conjunto de sonidos y silencios ordenados adecuadamente para garantizar su significación, a la cual se valora como verdadera o falsa, recibe el nombre de afirmación simple, esto es, - significa que toda afirmación p , admite con propiedad uno de los predicados:

es verdadera,
es falsa,

pero no simultáneamente ambas valoraciones, por consiguiente, exclusivamente:

p es verdadera, o bien, p es falsa,
pero no ambas, una con exclusión de la otra.

VALORES DE VERDAD

Los predicados, "es verdadera", "es falsa", son los valores de verdad de la afirmación p y se representan por V y F respectivamente. Algunos autores utilizan 1 en lugar de V y cero en vez de F.

EJEMPLOS

Consideremos: El gato y la rosa.

Esta masa elocutiva, no es una afirmación porque su significación no admite una valoración, como verdadera o falsa.

Contrariamente los enunciados:

El gato es animal doméstico

La rosa es un vertebrado

en lógica formal son ambas afirmaciones: la experiencia diaria confirma la veracidad del primero y la botánica se encarga de establecer la falsedad del otro. Observe la necesaria intervención de las ciencias particulares para establecer con propiedad la valoración de las afirmaciones simples.

NOTACION

Se representan las afirmaciones simples con las letras minúsculas, p , q , r , s , llamadas símbolos afirmativos.

OPERACIONES LOGICAS: $\wedge$, $\vee$, $\sim$

Se dijo que las afirmaciones representadas por un solo símbolo afirmativo se llaman afirmaciones simples.

Las afirmaciones obtenidas por la combinación de - afirmaciones simples mediante las operaciones lógicas reciben el nombre de afirmaciones compuestas.

Las operaciones lógicas básicas son:

1. Las conjunciones: $p \wedge q$
2. Las disyunciones: $p \vee q$
3. Las negaciones: $\sim p$

Se distingue una afirmación simple de una compuesta porque el valor de verdad de esta última queda completamente determinado, por los valores de verdad de las afirmaciones simples componentes y de la forma particular en que estas componentes se hallan ligadas.

A continuación se definen cada una de las operaciones lógicas básicas por medio de su tabla de verdad.

LA CONJUNCION

El resultado de unir dos afirmaciones simples p y q por la palabra "y", se llama conjunción de las afirmaciones p y q .

Esta operación se representa con el signo $\wedge$, consecuentemente, la conjunción es

$$p \wedge q$$

signo que se lee p y q y significa ambas afirmaciones simultáneamente.

El valor de verdad de la conjunción $p \wedge q$ debe cumplir con el postulado:

(T_1) $p \wedge q$ es verdadera si ambas p y q son verdaderas, en caso contrario $p \wedge q$ es falsa.

Resulta muy útil resumir el postulado T_1 en una tabla: la tabla de verdad de la conjunción, que registra todos los casos posibles de combinaciones de las valoraciones de p y q .

A este postulado lo resume la tabla de verdad de la disyunción.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fig. 1. Tabla de verdad de la conjunción.

LA DISYUNCION

El resultado de unir dos afirmaciones simples p y q por la palabra, "o", en el sentido inclusivo, se llama disyunción de las afirmaciones p y q . Este resultado se representa con el signo

$$p \vee q,$$

el cual se lee " p ó q " y significa p ó q , o ambas: una , otra o ambas simultáneamente.

El valor de verdad de la disyunción $p \vee q$ satisface al postulado siguiente.

(T₂) $p \vee q$ es verdadera si una o ambas componentes lo son, solo es falsa cuando ambas afirmaciones son falsas.

A este postulado lo resume la tabla de verdad de la disyunción:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fig. 2. Tabla de verdad de la disyunción

La disyunción es falsa, únicamente cuando las dos componentes son falsas, en los tres restantes casos es verdadera porque entonces de acuerdo con la definición, por lo menos una componente es verdadera.

LA NEGACION

La afirmación que niega a la afirmación simple p toma la forma,

No es cierto que p .

Esta negación se representa con el signo $\sim p$, y se lee, "no p "; es evidente su significado:

(T_3) Si p es verdadera entonces $\sim p$ es falsa y si p es falsa entonces $\sim p$ es verdadera

Este postulado resumido en forma de tabla da lugar a la tabla de verdad de la negación:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Fig. 3. Tabla de verdad de la negación

CONSTANTE

Todo signo, con una determinada significación, inalterable en el curso de los razonamientos, recibe el nombre de constante.

VARIABLE

Todo signo sin ninguna significación propia, se llama variable. Generalmente la variable se refiere a los elementos de un conjunto bien definido.

FUNCION PROPOSICIONAL

Existen expresiones que por contener variables no se les puede asignar un valor de verdad: no son afirmaciones; pero al sustituir las variables por ciertas constantes, se convierten en afirmaciones, por ejemplo, si x es una variable, la masa elocutiva:

x es un número entero

en lógica no es una afirmación, porque no se le puede asignar un valor de verdad, como verdadera o falsa, pero al sustituir x por un número como $\sqrt{2}$, $\frac{3}{4}$, 4 , esto es, se ha sustituido la variable x por una constante, se obtienen las afirmaciones:

$\sqrt{2}$ es un número entero

$\frac{3}{4}$ es un número entero,

4 es un número entero

Las dos primeras son falsas y la tercera verdadera. Observe que tácitamente la letra x se refiere a los elementos del conjunto de los reales. En muchos problemas se debe especificar de que conjunto se han de tomar los valores que reemplazarán a las variables.

A toda expresión que contiene variables y que al sustituirlas, por constantes, tomadas de cierto conjunto específico se convierte en una afirmación, se le da el nombre de función proposicional o simplemente, proposición.

El valor de verdad de una proposición depende exclusivamente de las constantes que sustituyen a sus variables. Una forma sencilla de indicar esta dependencia, se mostró en el ejemplo expuesto.

PROBLEMA 1

Construya la tabla de verdad de la proposición

$$\sim(p \wedge \sim q)$$

SOLUCION.

Se sigue paso a paso lo indicado en la proposición, efectuando las operaciones a partir de los paréntesis más interiores. Los distintos pasos se dan a conocer a continuación:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

otra forma más breve es la siguiente: se valora directamente la expresión propuesta conforme a su orden,

$\sim$	(p	$\wedge$	$\sim$	q)
V	V	F	F	V
F	V	V	V	F
V	F	F	F	V
V	F	F	V	F
4	1	3	2	1

Los números de las columnas indican el orden de las operaciones; el resultado se halla anotado en la columna marcada con el número 4.

PROBLEMA 2

Construya la tabla de verdad de la proposición

$$\sim(p \wedge q)$$

SOLUCION.

$\sim$	(p	$\wedge$	q)
F	V	V	V
V	V	F	F
V	F	F	V
V	F	F	F
3	1	2	1

PROBLEMA 3

Construya la tabla de verdad de la proposición

$$\sim p \vee \sim q$$

SOLUCION

$\sim$	p	$\vee$	$\sim$	q
F	V	F	F	V
F	V	V	V	F
V	F	V	F	V
V	F	V	V	F
2	1	3	2	1

Observe que las columnas 3, donde se anota el resultado, de los problemas 2 y 3 son idénticas.

PROBLEMA 4

Construya la tabla de verdad de la proposición

$$\sim(p \vee q)$$

SOLUCION

$\sim$	(p	$\vee$	q)
F	V	V	V
F	V	V	F
F	F	V	V
V	F	F	F
3	1	2	1

PROBLEMA 5

Construya la tabla de verdad de la proposición

$$\sim p \wedge \sim q$$

SOLUCION

$\sim$	p	$\wedge$	$\sim$	q
F	V	F	F	V
F	V	F	V	F
V	F	F	F	V
V	F	V	V	F
2	1	3	2	1

Observe que las columnas 3, donde anotamos los resultados de los problemas 4 y 5 son idénticas.

PROBLEMA 6

Construya la tabla de verdad de la proposición

$$p \wedge (q \vee r)$$

SOLUCION

p	^	(q	∨	r)
V	V	V	V	V
V	V	V	V	F
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	F	V	V	V
F	F	V	V	F
F	F	F	V	V
F	F	F	F	F
1	5	2	4	3

PROBLEMA 7

Construya la tabla de verdad de la proposición

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

SOLUCION

(p	^	q)	∨	(p	^	r)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F
1	4	2	5	1	3	2

Observe las columnas 5 de los problemas 6 y 7. En ellas anotamos los resultados finales, éstos lo hallará idénticos.

PROBLEMA 8.

Construya la tabla de verdad de la proposición

$$(p \wedge q) \wedge r$$

SOLUCION

(p	^	q)	^	r
V	V	V	V	V
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
V	F	F	F	F
F	F	V	F	V
F	F	V	F	F
F	F	F	F	V
F	F	F	F	F
1	4	2	5	3

PROBLEMA 9

Construya la tabla de verdad de la proposición

$$p \wedge (q \wedge r)$$

SOLUCION

p	^	(q	^	r)
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
V	F	F	F	V
V	F	F	F	F
F	F	V	V	V
F	F	V	F	F
F	F	F	F	V
F	F	F	F	F
1	5	2	4	3

Las columnas 5 donde se anotan los resultados de los problemas 8 y 9 son idénticas.

PROBLEMA 10

Construya las tablas de verdad de las proposiciones

$$p \wedge q, \quad q \wedge p$$

y compare sus resultados.

SOLUCION

p	$\wedge$	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	F	F
1	3	2

q	$\wedge$	p
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	F	F
1	3	2

Los resultados finales, anotados en las columnas 3 son idénticos.

PROBLEMA 11

Construya las tablas de verdad de las proposiciones

$$p \vee q, \quad q \vee p \quad \text{y compare los resultados.}$$

SOLUCION

p	$\vee$	q
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F
1	3	2

q	$\vee$	p
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F
1	3	2

TAUTOLOGIA

Se da el nombre de tautología, a las proposiciones $P(p, q, \dots)$, verdaderas para cualquier valor de verdad de sus variables.

CONTRADICCION

Se llaman contradicciones todas las proposiciones $P(p, q, \dots)$ falsas para cualquier valor de verdad de sus variables.

PROBLEMA 12

Construya la tabla de verdad de la proposición

$$p \vee \sim p$$

SOLUCION

p	$\sim$	$\sim$	p
V	V	F	V
F	V	V	F
1	3	2	1

La proposición es una tautología, porque los resultados anotados en la columna final, son únicamente V.

PROBLEMA 13

Construya la tabla de verdad de la proposición.

$$p \wedge \sim p.$$

SOLUCION

P	$\wedge$	$\sim$	P
V	F	F	V
F	F	V	F
1	3	2	1

La proposición es una contradicción, porque los resultados anotados en la columna 3, de las operaciones finales son únicamente F.

TEOREMA

Si la proposición $P(p, q, \dots)$ es una tautología, entonces $\sim P(p, q, \dots)$ es una contradicción y recíprocamente.

DEMOSTRACION

Como la tautología independiente de los valores de verdad de sus proposiciones componentes $p, q, \dots$, siempre es verdadera, su negación siempre resultará falsa, esto es, se obtiene una contradicción.

Como una contradicción independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones componentes $p, q, \dots$, siempre es falsa, su negación siempre es verdadera, por consiguiente se obtiene una tautología.

Esto demuestra el teorema

TEOREMA.

Principio de sustitución

Si $P(p, q, \dots)$ es una tautología, entonces $P(P_1, P_2, \dots)$ es una tautología, para proposiciones cualesquiera $P_1(p, q, \dots)$, $P_2(p, q, \dots), \dots$

DEMOSTRACION

Considere la tautología $P(p, q, \dots)$ y las proposiciones cualesquiera $P_1(p, q, \dots)$, $P_2(p, q, \dots)$, ...

Por definición, el valor de verdad de $P(p, q, \dots)$ siempre es V, independientemente del valor de verdad de sus variables $p, q, \dots$, por consiguiente podemos sustituir a p por P_1 a q por P_2 etc., en la tautología $P(p, q, \dots)$ y el resultado obtenido sigue siendo una tautología.

Esto demuestra el teorema

EQUIVALENCIA LOGICA

Dos proposiciones $P(p, q, \dots)$ y $Q(p, q, \dots)$ son equivalentes lógicamente o iguales, si las columnas finales de sus tablas de verdad son idénticas. Este concepto se representa con el signo

$$P(p, q, \dots) = Q(p, q, \dots)$$

EJEMPLOS

De acuerdo con los problemas 2 y 3

$$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$$

De acuerdo con los problemas 4 y 5

$$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

De acuerdo con los problemas 6 y 7

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

De acuerdo con los problemas 8 y 9

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$$

Del problema 10 se deduce

$$p \wedge q = q \wedge p$$

Finalmente del problema 11, se obtiene

$$p \vee q = q \vee p$$

TEOREMA

Demuestre $\neg\neg p = p$

DEMOSTRACION

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
V	F	V
F	V	F

Observe que la columna de p es idéntica a la de $\neg\neg p$.

Esto demuestra el teorema.

TEOREMA

Si v representa a una variable simple verdadera y f es una siempre falsa, entonces demuestre

$$p \vee f = p \quad , \quad p \vee v = v$$

$$p \wedge v = p \quad , \quad p \wedge f = f$$

DEMOSTRACION

Se construyen las tablas de verdad

p	f	$p \vee f$
V	F	V
F	F	F

p	v	$p \wedge v$
V	V	V
F	V	F

En ambas tablas las últimas columnas son idénticas a la primera; consecuentemente f es un neutral con la operación $\vee$ y v lo es con la operación $\wedge$.

p	v	$p \vee v$
V	V	V
F	V	V

p	f	$p \wedge f$
V	F	F
F	F	F

La primera tabla prueba que $p \vee v$ es una tautología y la segunda que $p \wedge f$ es una contradicción.

Esto demuestra el teorema.

TEOREMA

Demuestre que

$$p \wedge \sim p = f \quad ; \quad p \vee \sim p = v$$

DEMOSTRACION

En el problema 12 se obtuvo $p \vee \sim p = v$

y en el problema 13 resultó $p \wedge \sim p = f$

Esto demuestra el teorema.

TEOREMA

Demuestre que

$$p \vee p = p \quad , \quad p \wedge p = p$$

DEMOSTRACION

Se construye la tabla verdad

P	$p \vee p$	$p \wedge p$
F	F	F
V	V	V

Esto demuestra el teorema.

TEOREMA

Demuestre $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$.

DEMOSTRACION

Se principia con la tabla de verdad del primer miembro de la igualdad

$$(p \vee q) \vee r$$

(P	$\vee$	q)	$\vee$	r
V	V	V	V	V
V	V	V	V	F
V	V	F	V	V
V	V	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	V	V	F
F	F	F	V	V
F	F	F	F	F
1	4	2	5	3

A continuación se construye la tabla de verdad del segundo miembro,

$$p \vee (q \wedge r)$$

p	$\vee$	(q	$\wedge$	r)
V	V	V	V	V
V	V	V	V	F
V	V	F	V	V
V	V	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F
3	5	2	4	1

los resultados anotados en las columnas 5 prueban la validez del teorema.

Esto demuestra el teorema

TEOREMA

$$\text{Demuestre } p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

DEMOSTRACION

Como en el caso anterior, se principia con la construcción de la tabla de verdad del primer miembro de la igualdad propuesta $p \vee (q \wedge r)$,

p	$\vee$	(q	$\wedge$	r)
V	V	V	V	V
V	V	V	F	F
V	V	F	F	V
V	V	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F
F	F	F	F	V
F	F	F	F	F
1	5	2	4	3

Ahora se construye la tabla de verdad del segundo miembro $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$,

$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$(p$	$\vee$	$r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F
F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F
1	4	2	6	1	5	3

los resultados, registrados en la columna 5 de la primera tabla y la 6 de la segunda prueban la validez del teorema

Esto demuestra el teorema.

COLORARIO

Las proposiciones con las operaciones de disyunción, conjunción y negación, presentan la siguiente estructura,

1. EQUIPOTENCIA

$$1a. p \vee p = p \quad 1b. p \wedge p = p$$

2. ASOCIATIVIDAD

$$2a. (p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

$$2b. (p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$$

3. CONMUTATIVIDAD

$$3a. p \vee q = q \vee p \quad , \quad 3b. p \wedge q = q \wedge p$$

4. DISTRIBUTIVIDAD.

4a. $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

4b. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

5. EXISTENCIA DE NEUTRALES

5a. $p \vee f = p$

5b. $p \wedge v = p$

6. EXISTENCIA DE ANIQUILANTES

6a. $p \vee v = v$

6b. $p \wedge f = f$

7. COMPLEMENTACION

7a. $p \vee \neg p = v$

7b. $p \wedge \neg p = f$

7c. $\neg \neg p = p$

7d. $\neg v = f ; \neg f = v$

8. TEOREMAS DE De MORGAN

8a. $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

8b. $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

Al estudiar con detenimiento la tabla de las leyes del álgebra de proposiciones; se observa:

A partir de 1a., se obtiene 1b., si se cambia el signo $\vee$ por el $\wedge$

La fórmula 2b., se obtiene de la 2a., si el signo $\vee$ se cambia por el $\wedge$

Análogamente 3b., es el resultado de cambiar $\vee$ por $\wedge$ en 3a.

La fórmula 4b., se obtiene de la 4a: se cambia $\vee$ por $\wedge$ y recíprocamente $\wedge$ por $\vee$

De 5a., podemos deducir 5b., si cambiamos $\vee$ por $\wedge$ y también f por v .

Del mismo modo, de 6a., se deduce 6b., si se cambia $\vee$ por $\wedge$ y también v por f .

Asimismo 7b., se obtiene de 7a., si cambiamos $\vee$ por $\wedge$ y v por f .

De la primera fórmula de 7d., se puede obtener la segunda si se cambia v en f y recíprocamente f en v .

Finalmente del teorema de De Morgan 8a., se obtiene el 8b., si cambiamos $\vee$ en $\wedge$ y recíprocamente $\wedge$ por $\vee$.

TEOREMA DE DUALIDAD

En todo teorema concerniente a proposiciones, se pueden cambiar $\vee$ por $\wedge$, también f por v y recíprocamente.

Con estos intercambios resulta otro teorema llamado el dual del original y al teorema original se le da el nombre de primal.

EJEMPLOS

1. El teorema dual, del primal

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

de acuerdo con lo expuesto es

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

2. Por dualidad de

$$\neg v = f$$

se obtiene la igualdad

$$\neg f = v$$

3. Dada la igualdad

$$p \vee \sim p = v$$
 su correspondiente dual es

$$p \wedge \sim p = f$$
4. Dado el teorema primal

$$p \vee f = p$$
 el correspondiente teorema dual es

$$p \wedge v = p$$
5. Finalmente si se dualiza la igualdad

$$p \vee v = v$$
 se obtiene el resultado

$$p \wedge f = f$$

LA CONDICIONAL

El resultado de unir dos proposiciones p y q en la forma

si p entonces q

se llama condicional y simbólicamente se escribe

$$p \rightarrow q$$

esto se lee de varias formas, a saber,

- p implica q
- p solo si q
- p es suficiente para que q
- q es necesaria para que p

La afirmación p que sigue a la palabra "si" de la estructura condicional, es el antecedente o la hipótesis; la afirmación q que sigue a la palabra "entonces" de la estructura condi

cional se llama consecuente, conclusión o t  sis.

El valor de verdad de la condicional $p \rightarrow q$ se postula como sigue

(T₄) $p \rightarrow q$ es falsa si p es verdadera y q es falsa, en todos los demás casos es verdadera.

Al tabular las distintas situaciones posibles debido a la combinación de valores de verdad del antecedente y el consecuenta, se obtiene la tabla de verdad de la condicional,

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V
1	2	3

Fig. 4 Tabla de verdad de la condicional.

TEOREMA

La condicional $p \rightarrow q$ es lógicamente equivalente a

$$\neg p \vee q,$$

DEMOSTRACION

Primeramente se construye la tabla de verdad de la proposición

$$\neg p \vee q.$$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V
1	2	3	4

Ahora se comparan los resultados finales de esta tabla, anotados en la columna 4, con los correspondientes a la columna final (columna 3) de la tabla de verdad de la condicional. Se observa que ambas columnas son idénticas.

Esto demuestra el teorema

Con relación al lenguaje común, este teorema generaliza el concepto de condicionalidad: elimina toda referencia a ligas causales, presentes siempre en el lenguaje diario. El contenido lógico de $p \rightarrow q$ es exactamente el de $\sim p \vee q$.

A partir de la condicional

$$p \rightarrow q \quad (1)$$

Se construyen, tres nuevas condicionales, a saber,

$$\text{Si } \sim q \text{ entonces } \sim p \quad (2)$$

$$\text{Si } q \text{ entonces } p \quad (3)$$

$$\text{Si } \sim p \text{ entonces } \sim q \quad (4)$$

La condicional (2) es la contrapuesta de (1), la (3) es la recíproca de la condicional (1) y finalmente (4) es la inversa de (1) y la contrapuesta de (3).

TEOREMA

Toda condicional $p \rightarrow q$ es lógicamente equivalente a su contrapuesta $\sim q \rightarrow \sim p$.

$$(p \rightarrow q) = (\sim q \rightarrow \sim p)$$

DEMOSTRACION

Se construye la tabla de verdad $\sim q \rightarrow \sim p$ y se registran los resultados finales en la columna 5

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
1	2	3	4	5

La columna 5 de esta tabla, es idéntica a la columna (3) de la tabla de verdad de la condicional, luego

$$p \rightarrow q = \sim q \rightarrow \sim p$$

Esto demuestra el teorema

TEOREMA

La recíproca $q \rightarrow p$ de la condicional $p \rightarrow q$ es lógicamente equivalente a la inversa $\sim p \rightarrow \sim q$.

DEMOSTRACION

La inversa de $p \rightarrow q$ es la contrapuesta de la recíproca $q \rightarrow p$, por consiguiente

$$(q \rightarrow p) = (\sim p \rightarrow \sim q)$$

Esto demuestra el teorema

TEOREMA

La recíproca $q \rightarrow p$ de la condicional $p \rightarrow q$, no es lógicamente equivalente a dicha condicional.

DEMOSTRACION

Se construye la tabla de verdad de $p \rightarrow q$ y de $q \rightarrow p$ y se comparan las columnas 3 y 4

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V
1	3	3	4

La columna 4 final de esta tabla, no es idéntica a la columna 3 de esta tabla donde se registran los resultados de la condicional $p \rightarrow q$.

Esto demuestra el teorema.

LA BICONCONDICIONAL

La bicondicional es la conjunción de la condicional $p \rightarrow q$ y su recíproca, $q \rightarrow p$, esto es

Si p entonces q , y si q entonces p .

Simbólicamente se escribe

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) = p \leftrightarrow q$$

El signo $p \leftrightarrow q$ tiene varias formas de leerse, a continuación se indican algunas de ellas

p si, y solo si q ,

si p entonces q , y recíprocamente,
a fin de que p , es necesario y suficiente que q .

Los valores de verdad de la bicondicional ya no se consideran postulado, se pueden deducir de los de la condicional

TEOREMA

La tabla de verdad de la bicondicional es

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fig. 5. Tabla de verdad de la bicondicional.

DEMOSTRACION

Basta construir la tabla de verdad de la proposición

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Utilizando los conceptos de condicionalidad y bicondicionalidad se aclaran los conceptos de implicación lógica y de equivalencia lógica

IMPLICACION LOGICA

La proposición $P(p, q, \dots)$ implica lógicamente a la $Q(p, q, \dots)$ si y solo si toda asignación de valores de verdad que hacen verdadera a $P(p, q, \dots)$ también hacen verdadera a $Q(p, q, \dots)$

EJEMPLOS

1. $P(p, q, \dots)$ implica lógicamente a $P(p, q, \dots)$
2. $P(p, q, \dots)$ implica lógicamente a

$$B = P(p, q, \dots) \vee Q(p, q, \dots) \text{ porque}$$

siempre que $P(p, q, \dots)$ sea verdadera, lo será B.

3. $C = P(p, q, \dots) \wedge Q(p, q, \dots)$ implica lógicamente a $P(p, q, \dots)$, porque siempre que C es verdadera lo es $P(p, q, \dots)$

TEOREMA

$P(p, q, \dots)$ implica lógicamente a $Q(p, q, \dots)$ si y solo si $P(p, q, \dots) \rightarrow Q(p, q, \dots)$ es una tautología.

DEMOSTRACION

Por definición $P(p, q, \dots)$ implica lógicamente a $Q(p, q, \dots)$ si y solo si siempre que $P(p, q, \dots)$ es verdadera lo es $Q(p, q, \dots)$, consecuentemente, cuando $P(p, q, \dots)$ implica lógicamente a $Q(p, q, \dots)$ es imposible el caso de que $P(p, q, \dots)$ sea verdadera y $Q(p, q, \dots)$ sea falsa; pero esta afirmación significa que $P(p, q, \dots) \rightarrow Q(p, q, \dots)$ nunca es falsa, por tanto, la condicional $P(p, q, \dots) \rightarrow Q(p, q, \dots)$ es una tautología.

Esto demuestra el teorema.

Este teorema constituye un método efectivo para revisar cuando la proposición $P(p, q, \dots)$ implica a $Q(p, q, \dots)$: construir la tabla de verdad de la condicional $P(p, q, \dots) \rightarrow Q(p, q, \dots)$ y ver si es una tautología o no.

TEOREMA de la transitividad de la implicación lógica.

Hipótesis 1: P implica lógicamente a Q

Hipótesis 2: Q implica lógicamente a R

Afirmación: P implica lógicamente a R .

DEMOSTRACION

Por la hipótesis 1, siempre que P es verdadera, lo es también Q .

Por la hipótesis 2, cuando Q es verdadera, siempre lo es R, consecuentemente siempre que P es verdadera también lo es R, consecuentemente P implica lógicamente a R

Esto demuestra el teorema.

EJEMPLO

Demostrar que $p \rightarrow q$ implica lógicamente a $\sim q \rightarrow \sim p$.

DEMOSTRACION

Se construye la tabla de verdad de la proposición

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

La tabla de verdad construida, muestra que $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ es una tautología, consecuentemente $p \rightarrow q$ implica lógicamente a $\sim q \rightarrow \sim p$.

EJEMPLO

Investigue si la condicional $p \rightarrow q$ implica lógicamente al antecedente p o al consecuente q.

INVESTIGACION

Se construyen las tablas de verdad de los condicionales

$$(p \rightarrow q) \rightarrow p \quad (1)$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow q \quad (2)$$

para ver cual es una tautología

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Ambos resultados prueban que $p \rightarrow q$ no implica lógicamente ni a p ni a q .

EJEMPLO

Investigue cual de las afirmaciones es verdadera,

$(p \rightarrow q) \rightarrow p$ implica lógicamente a p

$(p \rightarrow q) \rightarrow p$ implica lógicamente a q

$(p \rightarrow q) \rightarrow q$ implica lógicamente a p

$(p \rightarrow q) \rightarrow q$ implica lógicamente a q

INVESTIGACION

Se construyen las tablas de verdad de las condicionales, que a continuación se tabulan,

$$[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$$

$$[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow q$$

$$[(p \rightarrow q) \rightarrow q] \rightarrow p$$

$$[(p \rightarrow q) \rightarrow q] \rightarrow q$$

para establecer cual es tautología. La investigación se principia con la tabla fundamental

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

A partir de esta tabla se construyen las dos siguientes:

tes:

$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	$[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$	$[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow q$
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	V	V

$(p \rightarrow q) \rightarrow q$	$[(p \rightarrow q) \rightarrow q] \rightarrow p$	$[(p \rightarrow q) \rightarrow q] \rightarrow q$
V	V	V
V	V	F
V	F	V
F	V	V

los resultados dan a conocer que solamente es tautología

$$[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$$

consecuentemente $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ implica lógicamente a p .

EQUIVALENCIA LOGICA

Las proposiciones $P(p, q, \dots)$ y $Q(p, q, \dots)$ son equivalentes lógicamente, si y solo si P y Q siempre toman el mismo valor de verdad para cualquier valor de verdad asignados a sus variables.

EJEMPLO

Investigue si la proposición

$$P = \sim p \vee (q \rightarrow \sim r)$$

es equivalente lógicamente a

$$Q = \sim p \vee \sim q \vee \sim r$$

INVESTIGACION

Se construyen las tablas de verdad de P y Q

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$q \rightarrow \sim r$	$\sim p \vee (q \rightarrow \sim r)$	$\sim p \vee \sim q \vee \sim r$
V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

Como las dos últimas columnas son idénticas P es equivalente lógicamente a Q .

CAPITULO III

METODOS DE PRUEBA

TEOREMA

La condicional $p \rightarrow q$ es lógico-equivalente a cada una de las tres condicionales

$$(p \wedge \sim q) \rightarrow q,$$

$$(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$$

$$(p \wedge \sim q) \rightarrow r \wedge \sim r$$

DEMOSTRACION

La prueba consiste en mostrar que son tautologías las bicondicionales

$$[(p \wedge \sim q) \rightarrow q] \leftrightarrow (p \rightarrow q) \quad (1)$$

$$[(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p] \leftrightarrow (p \rightarrow q) \quad (2)$$

$$[(p \wedge \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r)] \leftrightarrow (p \rightarrow q) \quad (3)$$

Prueba de (1)

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \rightarrow q$	$p \rightarrow q$	$[(p \wedge \sim q) \rightarrow q] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

Prueba de (2)

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim q$	$p \rightarrow q$	$(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$	$[(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

Prueba de (3)

p	q	$p \wedge q$	$r \wedge \sim r$	$(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \sim r)$	$p \rightarrow q$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (r \wedge \sim r)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

De las tablas anteriores se concluye

$$p \rightarrow q = (p \wedge \sim q) \rightarrow q \quad (4)$$

$$p \rightarrow q = (p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p \quad (5)$$

$$p \rightarrow q = (p \wedge \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r) \quad (6)$$

Esto demuestra el teorema.

METODO DE LA REDUCCION AL ABSURDO

Las tres igualdades (4), (5) y (6), constituyen el método de demostración conocido como prueba por reducción al absurdo, cuyo fundamento lógico se describe a continuación,

1. Si $p \rightarrow q$ es un teorema donde p es la conjunción de las hipótesis y q la tesis o afirmación, entonces se puede construir un nuevo teorema lógico-equivalente, donde a la conjunción p de las hipótesis se le agrega como nueva hipótesis la negación $\sim q$ de la tesis, esto significa que la nueva conjunción de hipótesis es $p \wedge \sim q$. La tesis del nuevo teorema es la misma que la del teorema inicial.
2. A partir del teorema $p \rightarrow q$, donde p es la conjunción de las hipótesis y q la afirmación, se puede

construir otro teorema equivalente cuyas hipótesis son las anteriores p a las que se les agrega como nueva hipótesis la negación $\neg q$ de la afirmación q . Este nuevo teorema queda probado cuando se concluye la negación $\neg p$ de la conjunción de las hipótesis -- del teorema inicial.

Esto significa que dada la conjunción de las hipóte
sis

$$p = H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$$

entonces, por el teorema de De Morgan,

$$\neg p = \neg H_1 \vee \neg H_2 \vee \dots \vee \neg H_n$$

Consecuentemente, si $p \rightarrow q$ es un teorema, su demostración puede obtenerse cuando a partir de las hipótesis

$$p \wedge \neg q$$

Se concluye la negación de cualquiera de las hipótesis H_i

3. El teorema $p \rightarrow q$ queda probado cuando a partir de las hipótesis

$$p \wedge \neg q$$

Se concluye cualquier contradicción

$$r \wedge \neg r$$

EJEMPLO DE DEMOSTRACION UTILIZANDO LA ESTRUCTURA

$$p \rightarrow q = (p \wedge \neg q) \rightarrow q$$

Un grupo $(G, *)$ es un conjunto G no vacío en el que se define la operación binaria $*$ entre sus elementos, que cumple -- con los postulados:

(G1) Cerradura

$$a, b \in G \rightarrow (a * b) \in G$$

Si dos elementos a, b pertenecen al grupo G entonces el resultado $a * b$ de la operación $*$, es también un elemento de G .

(G2) Asociatividad

$$a, b, c \in G \rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$$

Dado tres elementos a, b, c de G el resultado de las - operaciones $a * (b * c)$ es el mismo que el de $(a * b) * c$.

(G3) Existencia de un elemento neutral

$$\exists i \in G \text{ tal que } a \in G \rightarrow a * i = i * a = a$$

Entre los elementos de G existe i tal que al operarlo con $*$, por la derecha o la izquierda, con cualquier elemento a de G el resultado es a . El elemento i se llama "neutral bajo $*$ en G ".

(G4) Existencia de inversas

$$a \in G \rightarrow \exists a^{-1} \in G \text{ tal que } a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$$

A todo elemento a de G corresponde otro a^{-1} que al operarlo con $*$, por la derecha o la izquierda con a , el resultado es el neutral bajo $*$ en G . El elemento a^{-1} se llama "inversa bajo $*$ de a ".

TEOREMA

Hipótesis : $(G, *)$ es grupo.

Afirmación: El neutral i bajo $*$ en G es único

Demostración

Se niega la afirmación: existen dos neutrales, n e i , en el grupo .

Si n es neutral

$$n * i = i \quad (1)$$

Si i es neutral

$$n * i = n \quad (2)$$

De las igualdades (1) y (2) resulta

$$i = n \quad (3)$$

De (3) se deduce la veracidad de la afirmación del teorema. Observe que de la conjunción $p \wedge q$ se concluye q .

EJEMPLO

Hipótesis : $(G, *)$ es grupo

Afirmación: La inversa a^{-1} bajo $*$ de a , es única

Demostración

Se principia con la negación de la afirmación; existen dos inversas a^{-1} y b^{-1} de a

Si a^{-1} es inversa bajo $*$ de a

$$a^{-1} * a = i \quad (1)$$

Si b^{-1} es inversa bajo $*$ de a

$$b^{-1} * a = i \quad (2)$$

Consecuentemente

$$a^{-1} * a = b^{-1} * a$$

Si en esta última igualdad se posmultiplican ambos miembros por la inversa a^{-1} resulta

$$(a^{-1} * a) * a^{-1} = (b^{-1} * a) * a^{-1}$$

Por asociatividad

$$a^{-1} * (a * a^{-1}) = b^{-1} * (a * a^{-1})$$

Como a^{-1} es inversa de a se tiene $a * a^{-1} = i$ por esto,

$$a^{-1} * i = b^{-1} * i$$

Por definición de elemento neutral bajo $*$ en G , resulta

$$a^{-1} = b^{-1} \quad (3)$$

La igualdad (3) es la afirmación del teorema, consecuentemente de $p \wedge q$ se concluyó q .

EJERCICIOS IMPORTANTES

EJEMPLO 1

Demuestre que $\neg(p \rightarrow q) = p \wedge \neg q$

DEMOSTRACION

Se recordará que $p \rightarrow q = \neg p \vee q$.

La negación de ambos miembros de esta lógica-equivalencia es

$$\neg(p \rightarrow q) = \neg(\neg p \vee q)$$

Por los teoremas de De Morgan y doble negación

$$\neg(p \rightarrow q) = p \wedge \neg q.$$

Esto demuestra lo pedido en el ejercicio.

EJERCICIO 2

Demuestre que

$$\neg(p \leftrightarrow q) = p \leftrightarrow \neg q = \neg p \leftrightarrow q$$

DEMOSTRACION

Se construye directamente la tabla de verdad

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$\neg p$	$\neg p \leftrightarrow q$	$\neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$
V	V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	V	F	V	F
1	2	3	4	5	6	7	8

Los resultados anotados en las columnas 4, 6 y 8 de muestran lo pedido en el ejercicio. Observe que para negar una bicondicional basta con negar únicamente el antecedente ó única mente el consecuente.

EJERCICIO 3

Ley de la simplificación

Demuestre que las condicionales siguientes son tauto logías

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

DEMOSTRACION

Se construye directamente la tabla de verdad

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	$(p \wedge q) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Observe que también son tautologías

$$[(p \wedge q) \rightarrow p] \wedge [(p \wedge q) \rightarrow q]$$

$$[(p \wedge q) \rightarrow p] \vee [(p \wedge q) \rightarrow q]$$

EJERCICIO 4

Demuestre que es tautología la condicional

$$[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$$

DEMOSTRACION

$$\neg p \wedge (p \vee q) = (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q) = f \vee (\neg p \wedge q)$$

o bien

$$\neg p \wedge (p \vee q) = \neg p \wedge q.$$

Consecuentemente por el ejercicio anterior

$$(\neg p \wedge q) \rightarrow q$$

es tautología, por consiguiente

$$[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$$

es tautología.

EJERCICIO 5

Demuestre que es tautología la condicional

$$[p \wedge (\neg p \vee q)] \rightarrow q$$

DEMOSTRACION

$$p \wedge (\neg p \vee q) = (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) = f \vee (p \wedge q)$$

o bien

$$p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q.$$

Por lo probado en el ejercicio 3,

$$p \wedge (\neg p \vee q) \rightarrow q$$

es tautología. Observe que

$$p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge (p \rightarrow q)$$

Consecuentemente es tautología la condicional

$$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$$

A esta última tautología, algunos lógicos le dan el nombre de ley de la separación.

EJERCICIO 6

Investigue si la bicondicional

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

es una tautología

Investigación.

Se sabe que

$$(p \wedge q) \rightarrow r = \sim(p \wedge q) \vee r = \sim p \vee \sim q \vee r \quad (1)$$

Análogamente

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) = \sim p \vee (q \rightarrow r) = \sim p \vee \sim q \vee r \quad (2)$$

De las igualdades (1) y (2) se concluye que

$$(p \wedge q) \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad (3)$$

La igualdad (3) prueba que $(p \wedge q) \rightarrow r$ es lógico-equivalente a $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, consecuentemente la bicondicional

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

es una tautología.

Observe que este resultado significa que ambas condicionales,

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$$

son tautologías.

EJERCICIO 7

Ley del silogismo hipotético.

Demuestre con una tabla de verdad que la condicional

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

es una tautología.

DEMOSTRACION.

Se construye la tabla de verdad de la condicional propuesta

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

La columna final muestra que la condicional propuesta es una tautología.

INDUCCION MATEMATICA.

Hay teoremas donde se debe mostrar su validez cuando un parámetro toma el valor de un entero positivo; en estos casos se recurre al método de prueba, llamado de inducción matemática, cuya base lógica es el postulado de la inducción matemática que dice:

- a. El número 1 es un elemento del conjunto E.
- b. Si el entero K es un elemento del conjunto E, entonces también el entero K+1 es un elemento del conjunto E.

METODO DE PRUEBA DE INDUCCION MATEMATICA

Si la proposición $A(n)$ es la afirmación de un teorema válido para todo entero positivo, el método de demostración - por inducción matemática se puede estructurar en la siguiente forma:

1. Se prueba que $A(n)$ es verdadera cuando $n = 1$.
2. Se postula la hipótesis de inducción donde se afirma sin prueba que $A(n)$ es verdadera cuando $n = K$.
3. A partir de la hipótesis de inducción se prueba directamente que $A(n)$ es verdadera cuando $n = K + 1$.

De acuerdo con el postulado de la inducción matemática, la afirmación $A(n)$ es verdadera para el conjunto E de los enteros positivos; ciertamente se probó que $A(1)$ es verdadera y $A(K + 1)$ es verdadera cuando $A(K)$ lo es, de aquí se sigue que $A(n)$ es verdadera para todo entero positivo n .

EJEMPLO

Demostrar que

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2} \quad (1)$$

DEMOSTRACION

La afirmación $A(n)$ es precisamente la igualdad (1), la demostración se inicia investigando si $A(n)$ es verdadera cuando $n = 1$, ciertamente, en este caso se tiene

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}$$

Este resultado prueba que la afirmación $A(n)$ es verdadera para $n = 1$.

A continuación se supone verdadera la afirmación cuando $n = K$

$$1 + 2 + \dots + K = \frac{K(K+1)}{2} \quad (2)$$

En seguida a partir de (2) se prueba que (1) vale para $n = K + 1$; consecuentemente

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + K + (K+1) &= \frac{K(K+1)}{2} + K + 1 \\ 1 + 2 + \dots + K + (K+1) &= \frac{K(K+1) + 2(K+1)}{2} \\ 1 + 2 + \dots + K + (K+1) &= \frac{(K+1)(K+2)}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

La igualdad (3) muestra que $A(K+1)$ es verdadera; esto demuestra el teorema.

EJEMPLO

Demuestre por el método de la inducción matemática que para todo entero se cumple,

$$4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 2n(n+1) \quad (1)$$

DEMOSTRACION

Cuando $n = 1$ se tiene

$$4 = 2(1+1)$$

Este resultado prueba que (1) se cumple cuando $n = 1$.

Se supone ahora que la igualdad

$$4 + 8 + 12 + \dots + 4K = 2K(K+1) \quad (2)$$

es verdadera.

A continuación, a partir de (2), se probará que (1) vale para $n = K + 1$, por tanto escribimos la sucesión de igualdades,

$$4 + 8 + \dots + 4K + 4(K + 1) = 2K(K + 1) + 4(K + 1)$$

$$4 + 8 + \dots + 4K + 4(K + 1) = (K + 1)(2K + 4)$$

$$4 + 8 + \dots + 4K + 4(K + 1) = 2(K + 1)(K + 2)$$

Esta última igualdad prueba lo pedido en el ejemplo

FACTORIAL

La notación $n!$ se llama factorial n ; su definición es la igualdad

$$n! = 1 (2) 3 \dots (n - 1)n$$

Además se define el factorial cero igual a uno

$$0! = 1.$$

EJEMPLOS

$$\frac{3!}{10!} = \frac{8!}{8!(9)10} = \frac{1}{90}$$

$$\frac{8}{1} \frac{(9)}{(2)} \frac{10}{3} = \frac{7!}{3!} \frac{(8)}{7!} \frac{9}{7!} \frac{(10)}{7!} = \frac{10!}{3! 7!}$$

COEFICIENTE BINOMIAL

El signo $\binom{n}{r}$ se llama coeficiente binomial de "n"

en "r" donde r y n son enteros y $r \leq n$, se define con la igualdad,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

EJEMPLOS

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{4!56}{3!4!} = \frac{56}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\binom{7}{3} = 35$$

$$\binom{10}{1} = \frac{10!}{1!9!} = \frac{9!10}{1!9!} = 10$$

EJEMPLO DE DEMOSTRACION DIRECTA

TEOREMA

Hipótesis: n y r son enteros positivos y $r \leq n$

Afirmación: $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$

Demostración

Por definición

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (1)$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)} \quad (2)$$

Como los segundos miembros de las igualdades (1) y (2) son iguales se tiene

$$\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$$

Esto demuestra el teorema.

EJEMPLO DE DEMOSTRACION DIRECTA

TEOREMA

Hipótesis 1: n y r son enteros positivos y $r \leq n$.

Afirmación:
$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

Demostración

Por definición

$$\binom{n}{r-1} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!(n-r+1)}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!(r)(n-r)!}$$

Dejando las expresiones con un denominador común se obtiene

$$\binom{n}{r-1} = \frac{(r) n!}{(r-1)!(r)(n-r)!(n-r+1)} \quad (1)$$

$$\binom{n}{r} = \frac{(n-r+1)n!}{(r-1)!(r)(n-r)!(n-r+1)} \quad (2)$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (1) y (2) resulta

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n! (r+n-r+1)}{(r-1)! (r) (n-r)! (n-r+1)!}$$

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n! (n+1)}{r! (n-r+1)!}$$

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{(n+1)!}{r! (n+1-r)!} \quad (1)$$

Consecuentemente, por definición de coeficiente binomial y la igualdad (1) se tiene

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

Esto demuestra el teorema

EJEMPLO DE DEMOSTRACION POR
INDUCCION MATEMATICA

TEOREMA DEL BINOMIO DE NEWTON.

Hipótesis 1: n y r son enteros positivos y $r \leq n$.

$$\text{Hipótesis 2: } \binom{K}{S} + \binom{K}{S+1} = \binom{K+1}{S+1}$$

(teorema demostrado)

Afirmación: $(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b +$
 $+ \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 +$
 $+ \dots +$
 $+ \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$

o bien

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \quad (1)$$

Demostración

Para $n = 1$ se tiene

$$(a + b)^1 = \sum_{r=0}^1 \binom{1}{r} a^{1-r} b^r = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1$$

$$(a + b)^1 = a + b.$$

Consecuentemente la afirmación se cumple cuando $n = 1$

Se supone ahora válida la igualdad

$$(a+b)^K = \binom{K}{0} a^K + \binom{K}{1} a^{K-1} b +$$

$$+ \binom{K}{2} a^{K-2} b^2 + \binom{K}{3} a^{K-3} b^3 +$$

$$+ \dots +$$

$$+ \binom{K}{K-1} a b^{K-1} + \binom{K}{K} b^K$$

A partir de esta igualdad se va a probar que (1) es válida para $n = K + 1$. Ciertamente,

$$(a + b)^{K+1} = (a + b)^K (a + b)$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} (a + b)^{K+1} &= \binom{K}{0} a^K (a + b) + \binom{K}{1} a^{K-1} b (a + b) + \\ &+ \binom{K}{2} a^{K-2} b^2 (a + b) + \binom{K}{3} a^{K-3} b^3 (a + b) + \\ &+ \dots + \\ &+ \binom{K}{K-1} a b^{K-1} (a + b) + \binom{K}{K} b^K (a + b) \end{aligned}$$

Efectuando operaciones

$$\begin{aligned} (a + b)^{K+1} &= \binom{K}{0} a^{K+1} + \\ &+ \binom{K}{0} a^K b + \binom{K}{1} a^K b + \binom{K}{1} a^{K-1} b^2 + \binom{K}{2} a^{K-1} b^2 + \\ &+ \binom{K}{2} a^{K-2} b^2 + \binom{K}{3} a^{K-2} b^3 + \\ &+ \dots + \\ &+ \binom{K}{S} a^{K-S} b^{S+1} + \binom{K}{S+1} a^{K-S} b^{S+1} + \\ &+ \dots + \\ &+ \binom{K}{K-1} a b^K + \binom{K}{K} a b^K + \binom{K}{K} b^K \end{aligned}$$

Factorizando cantidades iguales

$$\begin{aligned}
(a+b)^{K+1} &= \binom{K}{0} a^{K+1} + \left[\binom{K}{0} + \binom{K}{1} \right] a^K b + \\
&+ \left[\binom{K}{1} + \binom{K}{2} \right] a^{K-1} b^2 + \left[\binom{K}{2} + \binom{K}{3} \right] a^{K-2} b^3 + \\
&+ \dots + \left[\binom{K}{S} + \binom{K}{S+1} \right] a^{K-S} b^{S+1} + \dots + \left[\binom{K}{K-1} + \binom{K}{K} \right] a b^K + \\
&+ \binom{K}{K} b^K
\end{aligned}$$

Por la hipótesis 2

$$\begin{aligned}
(a+b)^{K+1} &= \binom{K+1}{0} a^{K+1} + \binom{K+1}{1} a^K b + \binom{K+1}{2} a^{K-1} b^2 + \binom{K+1}{3} a^{K-2} b^3 + \\
&+ \dots + \binom{K+1}{S+1} a^{K-S} b^{S+1} + \dots + \binom{K+1}{K} a b^K + \binom{K+1}{K+1} b^K
\end{aligned}$$

Finalmente

$$(a+b)^{K+1} = \sum_{r=0}^{K+1} \binom{K+1}{r} a^{K+1-r} b^r$$

Esta última igualdad prueba que la afirmación (1) es válida cuando $n = K + 1$, bajo la hipótesis de su validez cuando $n = K$.

Esto demuestra el teorema.

CONJUNTO DE VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTE.

El conjunto

$$A = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$$

es linealmente independiente si la igualdad

$$p_1 \bar{v}_1 + p_2 \bar{v}_2 + \dots + p_n \bar{v}_n = \bar{0}$$

se cumple solamente para

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0.$$

La independencia lineal del conjunto de vectores A se indica de este modo:

$\{A\}$ es L-in.

DEPENDENCIA LINEAL

El conjunto de vectores

$$B = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$$

es linealmente dependiente si al cumplirse la igualdad

$$q_1 \bar{x}_1 + q_2 \bar{x}_2 + \dots + q_n \bar{x}_n = \bar{0}$$

existe una $q_i \in \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ tal que $q_i \neq 0$

Cuando un conjunto B es linealmente dependiente, se escribe abreviadamente

$\{B\}$ es L-dep.

EJEMPLO DE DEMOSTRACION POR REDUCCION AL ABSURDO

TEOREMA

Hipótesis 1: $A = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ es L-in

Hipótesis 2: $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_s\}$ y $B \subset A$

Afirmación: B es L-in.

Demostración

Se considera como hipótesis la negación de la afirmación B es L-dep.

De acuerdo con esta hipótesis en la igualdad

$$p_1 \bar{v}_1 + p_2 \bar{v}_2 + \dots + p_s \bar{v}_s = \bar{0} \quad (1)$$

existe $p_i \in \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ tal que $p_i \neq 0$

Ahora se puede escribir la igualdad (1) en la forma

$$p_1 \bar{v}_1 + p_2 \bar{v}_2 + \dots + p_s \bar{v}_s + 0 \bar{v}_{s+1} + \dots + 0 \bar{v}_n = \bar{0}$$

pero ésta nueva forma de (1) significa que el conjunto A

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ es L-dep} \quad (2)$$

La afirmación (2) es la negación de la hipótesis 1.

Esto demuestra el teorema.

SUBESPACIO GENERADO.

Se le da el nombre de subespacio generado, al conjunto de todas las combinaciones lineales que se pueden formar con los vectores del subconjunto.

$$S = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$$

donde

$$\bar{v}_i \in V, \quad i = 1, \dots, n$$

El concepto de subespacio generado se representa con el signo

$$L\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$$

El subconjunto de vectores S se llama conjunto generador y cada uno de los vectores $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ son los generadores del subespacio $L\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$.

BASE EN EL ESPACIO VECTORIAL V .

El subconjunto de vectores $\{B\} \subset V$ es una base de V si y solo si se cumple

Primero: $L\{B\} = V$

Segundo: $\{B\}$ es L -in

EJEMPLO DE DEMOSTRACION POR REDUCCION AL ABSURDO.

TEOREMA.

Hipótesis 1: $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es base del espacio vectorial V

Hipótesis 2: $\bar{x} = a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_i \bar{v}_i + \dots + a_n \bar{v}_n$ es un vector de V

Afirmación: La eneada $(a_1, \dots, a_n)$ es única.

Demostración.

Se considera como nueva hipótesis la negación de la afirmación:

$$\bar{X} = b_1 \bar{V}_1 + \dots + b_i \bar{V}_i + \dots + b_n \bar{V}_n \quad (1)$$

donde

$$b_i \neq a_i$$

es otra representación de $\bar{X}$ como una combinación lineal de los vectores $\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_n$ distinta a

$$\bar{X} = a_1 \bar{V}_1 + \dots + a_i \bar{V}_i + \dots + a_n \bar{V}_n \quad (2)$$

Al restar la igualdad (2) de la (1) se obtiene

$$\bar{O} = (b_1 - a_1) \bar{V}_1 + \dots + (b_i - a_i) \bar{V}_i + \dots + (b_n - a_n) \bar{V}_n \quad (3)$$

donde existe

$$b_i - a_i \neq 0$$

De acuerdo con la igualdad (3) se concluye

$$B = \{V_1, \dots, V_n\} \text{ es L-dep}$$

negación de la hipótesis 1.

Esto demuestra el teorema.

CAPITULO IV

CUANTIFICADORES

VARIABLE.

Una variable es la pareja (x, S) , donde S es un conjunto y x es un signo que representa a cualquier elemento del conjunto.

El conjunto S recibe el nombre de dominio de la variable y cada uno de sus elementos es un valor de la variable.

VARIABLE PROPOSICIONAL.

Se da el nombre de variable proposicional a la pareja (x, S) , donde S es un conjunto de proposiciones en el cual los dominios de sus variables se hallan bien definidos. Como antes, x es un signo que representa a cualquier elemento del conjunto S .

CONSTANTE.

Llamamos constante, a una variable, cuyo dominio solamente contiene un elemento. Este tipo de variables tiene mucha importancia en la teoría. Algunos autores definen las constantes como los signos que en el curso de los razonamientos conservan inalterable una determinada significación, en contraste con las variables las cuales no posee ninguna significación propia.

CONJUNTO DE n VARIABLES.

Dadas las variables $(x_1, S_1), \dots, (x_n, S_n)$, con los dominios se forma el producto cartesiano

$$P = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$$

La variable (u, P) recibe el nombre de conjunto de n variables $x_1, \dots, x_n$ y se escribe

$$u = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Un valor u_0 de la variable u , es la eneada

$$u_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

donde $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, \dots, a_n \in S_n$.

FUNCIONES PROPOSICIONALES DE n VARIABLES

Una masa elocutiva, que se representa con el signo

$$p(x_1, \dots, x_n) = p(u)$$

es una función proposicional de n variables que tiene por dominio el producto cartesiano

$$P = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$$

si

$$p(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

es una afirmación para toda eneada

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in P.$$

En lo que sigue se estudiarán con cierto detenimiento las funciones proposicionales de una variable

FUNCION PROPOSICIONAL

Decimos que una masa elocutiva $p(x)$ es una función proposicional de una variable, cuyo dominio es el conjunto $A \neq \emptyset$, si la expresión $p(a)$ es una afirmación para todo elemento $a \in A$.

DOMINIO DE VERDAD

El dominio de verdad de una función proposicional es el subconjunto V_p del dominio A , tal que, para todo $v \in V_p$, la proposición $p(v)$ es verdadera.

EJEMPLO

La función proposicional

$p(x) = x$ es un número entero

Su dominio A , es el conjunto de los reales.

Obviamente, su dominio de verdad es el conjunto de los enteros.

TAUTOLOGIA EN EL DOMINIO

Se da el nombre de tautología en el dominio A , a una función proposicional $p(x)$, verdadera para toda $a \in A$, es decir

$p(a)$ es verdadera $\forall a \in A$

En este caso el dominio A , coincide con el dominio de verdad de $p(x)$.

CONTRADICCION EN EL DOMINIO

A una función proposicional $p(x)$, falsa para toda $a \in A$, se le da el nombre de contradicción en el dominio A .

En este caso el dominio de verdad V_p de $p(x)$ es vacío, es decir, $V_p = \phi$.

NOTACION

Para indicar que la función proposicional $p(x)$, es una tautología en el dominio A , se utiliza el signo

$$(\forall x \in A) p(x)$$

que se lee "para toda x en A , la proposición $p(x)$ es verdadera".

Cuando no hay posibilidad de confusión en relación al dominio, se puede simplificar el signo y únicamente escribir

$$\forall x, p(x)$$

que se lee, "para toda x , se tiene p de x ".

CUANTIFICADOR UNIVERSAL

El signo $\forall$ se lee "para todo" y se llama cuantificador universal.

La función proposicional $p(x)$ no tiene valor de verdad, pero

$$\forall x, p(x)$$

es una afirmación, esto es, tiene un valor de verdad el cual satisface a la propiedad siguiente:

(C₁) La afirmación $\forall x, p(x)$ es verdadera si

$$V_p = \{x : x \in A, p(x)\} = A$$

Por otra parte, la afirmación $\forall x, p(x)$ es falsa si

$$V_p = \{x : x \in A, p(x)\} \neq A$$

NOTACION

Si la función proposicional, $p(x)$, cuyo dominio es A , no es una tautología, ni una contradicción en el conjunto A , para indicar brevemente esta situación se utiliza el signo

$$(\exists x \in A), p(x)$$

que se lee "existe por lo menos una x en A , tal que, $p(x)$ es verdadera"

Cuando no existe la más remota posibilidad de confusión respecto a la identificación del dominio A , se puede simplificar el signo anterior y escribir únicamente

$$\exists x, p(x)$$

que leemos "para alguna x , se tiene p de x ".

CUANTIFICADOR EXISTENCIAL

El signo $\exists$ se llama cuantificador existencial; se lee, "para alguna" o más brevemente "existe".

Observe que la función proposicional $p(x)$ no tiene un valor de verdad, pero

$$\exists x, p(x)$$

es una afirmación y por tanto si lo tiene.

El valor de verdad del cuantificador existencial ,
satisface a la propiedad siguiente

(C₂) La afirmación $\exists x, p(x)$, es verdadera si

$$V_p = \{x : x \in A, p(x)\} \neq \phi$$

La afirmación $\exists x, p(x)$ es falsa si

$$V_p = \{x : x \in A, p(x)\} = \phi$$

NEGACION DE AFIRMACIONES CON CUANTIFICADORES

Vamos a estudiar el significado de la negación de la tautología

$$(\forall x \in A) p(x)$$

La negación de la tautología $\forall(x), p(x)$, es afirmar que $V_p \neq A$, es decir, se afirma la existencia de por lo menos una $x \in A$, para la cual no se cumple $p(x)$

La explicación anterior, puesta en signos, se reduce a la expresión siguiente.

$$\sim \forall x, p(x) = \exists x, \sim p(x)$$

Análogamente, la negación de la proposición

$$\exists x, p(x)$$

con dominio A, es afirmar que con ninguna $x \in A$ se cumple $p(x)$; esta explicación, puesta en signos, lleva a la igualdad

$$\neg \exists x, p(x) = \forall x, \neg p(x).$$

Las fórmulas

$$\neg \forall x, p(x) = \exists x, \neg p(x)$$

$$\neg \exists x, \neg p(x) = \forall x, p(x)$$

se llaman fórmulas de De Morgan en la cuantificación y con ellas se completan las leyes de la negación.

LEYES DE LA NEGACION

Con el fin de resumir lo expuesto, en relación con la teoría de la negación, sin más comentarios se presenta la lista

$$\neg \neg p = p$$

$$\neg (p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$\neg (p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg (p \rightarrow q) = p \wedge \neg q$$

$$\neg (p \leftrightarrow q) = p \leftrightarrow \neg q = \neg p \leftrightarrow q$$

$$\neg (\forall x, p) = \exists x, \neg p.$$

$$\neg (\exists x, p) = \forall x, \neg p.$$

Es útil recordar que se probó la equivalencia lógica de $p \rightarrow q$ con las afirmaciones:

$$\begin{aligned}
 \neg q \rightarrow \neg p &= q \vee \neg p &= \neg p \vee q \\
 (p \wedge \neg q) \rightarrow q &= \neg p \vee q \vee q &= \neg p \vee q \\
 (p \wedge \neg q) \rightarrow \neg p &= \neg p \vee q \vee \neg p &= \neg p \vee q \\
 (p \wedge \neg q) \rightarrow c \wedge \neg c &= \neg p \vee q \vee (c \wedge \neg c) &= \neg p \vee q.
 \end{aligned}$$

DEMOSTRACION POR CONTRAEJEMPLO

El uso de los cuantificadores permite un tipo de prueba, llamada demostración por contraejemplo.

Si se desea probar que la afirmación universal

$$\forall x \in A, p(x)$$

es falsa basta probar que su negación es verdadera, es decir,

$$\neg(\forall x, p(x)) = \exists x, \neg p(x) \text{ es verdadera}$$

Esto equivale a mostrar un valor particular $x_1 \in A$ de x , para el cual $p(x_1)$ es falsa. El valor de x_1 se llama contraejemplo.

EJEMPLO DE DEMOSTRACION POR CONTRAEJEMPLO.

Se va a probar por contraejemplo la no conmutatividad general del producto matricial, esto es, que la afirmación universal, "todo producto matricial es conmutativo", es falsa.

La demostración se reduce a mostrar un producto matricial que no sea conmutativo, para lograr esto se construye el contraejemplo:

Primeramente se efectúa la multiplicación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0+0 & 3+2+0 & 4+0+0 \\ 8+0+1 & 12+4+1 & 16+0+1 \\ 2+0+5 & 3+6+5 & 4+0+5 \end{bmatrix}$$

consecuentemente

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 9 & 17 & 17 \\ 7 & 14 & 9 \end{bmatrix} \quad (1)$$

A continuación se efectúa el producto conmutando los factores

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12+4 & 2+6+12 & 0+3+20 \\ 0+8+0 & 0+4+0 & 0+2+0 \\ 1+4+1 & 1+2+3 & 0+1+5 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 20 & 23 \\ 8 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Comparando las igualdades (1) y (2) se concluye que no en todos los casos se puede escribir

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}$$

Esto demuestra el teorema.

B I B L I O G R A F I A

1. EXNER and ROSS KOFP-Logic in Elementary Mathematics.
Mc Graw-Hill
2. LIPSCHUTZ-Set theory and Related Topics (SCHAUM)
3. MONK-Introduction to set theory (Int'l. Series in Pure and
App. Math)
4. WYLIE-Foundations of Geometry
Mc Graw-Hill
5. MOSTOW, SAMPSON, and MEYER-Fundamental Structures of Algebra
Mc Graw-Hill
6. JOHNSON and GLENN-Explorando la Matemática.
Tomo I y II
Mc Graw-Hill
7. THE OPEN UNIVERSITY-Curso básico de Matemáticas-Unidad 11,
Lógica I-Algebra de Boole.
Unidad 17, Lógica II-Prueba
Mc Graw-Hill

A P E N D I C E I I

APLICACIONES DE LAS TECNICAS DE PROGRAMACION
DISCRETA A LAS INVERSIONES DE CAPITAL.

DR. FELIPE OCHOA ROSSO

VERSION DEL CANDIDATO: ING. JOSE VILLANUEVA LEDESMA.

CAPITULO I

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE LA OPTIMIZACION.

I.1. INTRODUCCION.

La finalidad de este capítulo es formalizar los conceptos más importantes en la descripción de la naturaleza y alcance de la TEORIA DE LA OPTIMIZACION. Se principia con la definición del problema de optimización, se estudia la complejidad de su naturaleza y se identifican los pasos fundamentales en el proceso de su solución, conforme a la sucesión siguiente:

1. Definición del problema.
2. Formulación de un modelo de optimización.
3. Elección de un método de solución.
4. Aplicación del método de solución.

Se estudiará en detalle cada uno de estos pasos del proceso de solución, sus implicaciones en varias aplicaciones y finalmente se presenta una clasificación de modelos de optimización con sus respectivos métodos de solución que vaciamos en gráficas como resumen aclaratorio. El material que constituye este capítulo así como un esquema del desarrollo histórico de la teoría de la optimización (Apéndice B) pretende ser una descripción general de la estructura de la teoría, que más tarde se aplicará a tipos específicos de problemas de optimizar, en lo que constituye la parte fundamental del libro. Finalmente estudiarán varios aspectos de la optimización, de mucha importancia en el campo del análisis y diseño de sistemas de ingeniería.

I.2. EL PROBLEMA DE OPTIMIZAR.

Quando un ingeniero o una persona que toma decisiones, a la que se da el nombre de "elector", se avoca al problema de

elegir un curso de acción, elemento de un conjunto de alternativas, se ve impulsado a escoger una de estas alternativas propuestas: la mejor, en relación a cierta finalidad predeterminada o - un conjunto de objetivos en íntima relación con la naturaleza -- del problema.

Presupónese que se puede evaluar valiéndose de un método cuantitativo, el grado en el cual se alcanzan las finalidades u objetivos del problema, para cada curso de acción en alternativa, en otras palabras, es posible obtener una medición de la utilidad de cada uno de los cursos de acción permitidos al elector y éste apoyándose en esta información seleccione la alternativa que produzca la mejor utilidad.

El grado en el cual se obtiene la realización de una meta le damos el nombre de coeficiente de mérito para una selección particular.

DEFINICION.

A partir de un conjunto de alternativas, posiblemente infinito, asociado a cierto problema se da el nombre de problema de optimización, al de elegir una alternativa particular, para la cual el coeficiente de mérito es óptimo, esto es, la elección de la alternativa con la cual se maximiza o minimiza el coeficiente de mérito.

1.3. TEORIA DE LA OPTIMIZACION.

NATURALEZA DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACION.

La naturaleza de un problema de optimización en la mayoría de los casos es muy compleja y en los problemas prácticos, se halla una gran variedad de casos que presentan características diferentes. Para visualizar la complejidad que puede presen

tarse en la naturaleza del problema, se consideran los casos siguientes:

- i) Cuando un elector se enfrenta al problema de optimizar un objetivo bien definido, puede darse el caso que dicha optimización esta sujeta a un conjunto de restricciones, o bien que la solución del problema puede hacerse sin considerar restricción alguna. Es ta persona puede también considerar la solución del problema bajo la hipótesis de comportamiento determinista, o bien, de comportamiento estocástico.
- ii) El tomador de decisiones puede estar en comunicación con otras personas, bajo acciones recíprocas y competir con algunas. Cada competidor obviamente pretenderá hacer decisiones que optimicen sus propios coeficientes de mérito.
- iii) Un problema de múltiples estados, puede implicar el tomar acerca él, varias decisiones, donde la finali dad buscada es una optimización de largo alcance en oposición a la suboptimización de un estado particu lar del problema.

Esta no es sólo una naturaleza compleja, sino que sus modelos son de características estructurales diferentes, lo que claramente indica la necesidad de una variedad de técnicas con que hacerles frente a las soluciones de los problemas de optimi zación.

El conjunto de todas estas técnicas, especialmente - las incluidas bajo los nombres específicos de programación mate máticas de decisiones, programación dinámica, teoría del control, cálculo de variaciones, etc., constituyen con sus fundamentos - matemáticos, la teoría general de la optimización.

La teoría de la optimización, en su más amplio sentido, es la rama unificada del análisis matemático que suministra un enfoque formal a las soluciones de los problemas de optimización.

I.4. CONCEPTOS DE LA TEORIA DE LA OPTIMIZACION. PROCESOS DE LA SOLUCION.

Los procesos de solución en los problemas de optimización, no pueden ser idénticos en todos los casos, generalmente difieren de acuerdo con la naturaleza especial del problema; no obstante, siempre es posible distinguir los pasos básicos de dicho proceso, que se presentan en la fig. 1-1. Los diferentes circuitos indican una posible revisión previa a la decisión.

I.5. DEFINICION DEL PROBLEMA.

En el proceso de la definición del problema, se deben identificar las variables de decisión o de control y especificar la forma de sus relaciones recíprocas, así como su rango de variación, implícita o explícitamente. Además, se debe definir un coeficiente de mérito, en función de las variables de control convenientes y establecer finalmente las restricciones que deben cumplir dichas variables.

I.6. FORMULACION DEL MODELO MATEMATICO.

Una vez que el problema ha sido definido convenientemente, el paso siguiente es formular un modelo abstracto, usualmente matemático, que presenta fielmente la estructura esencial del problema y del que fácilmente se pueda lograr la solución, por medio de la aplicación de un procesamiento bien conocido.

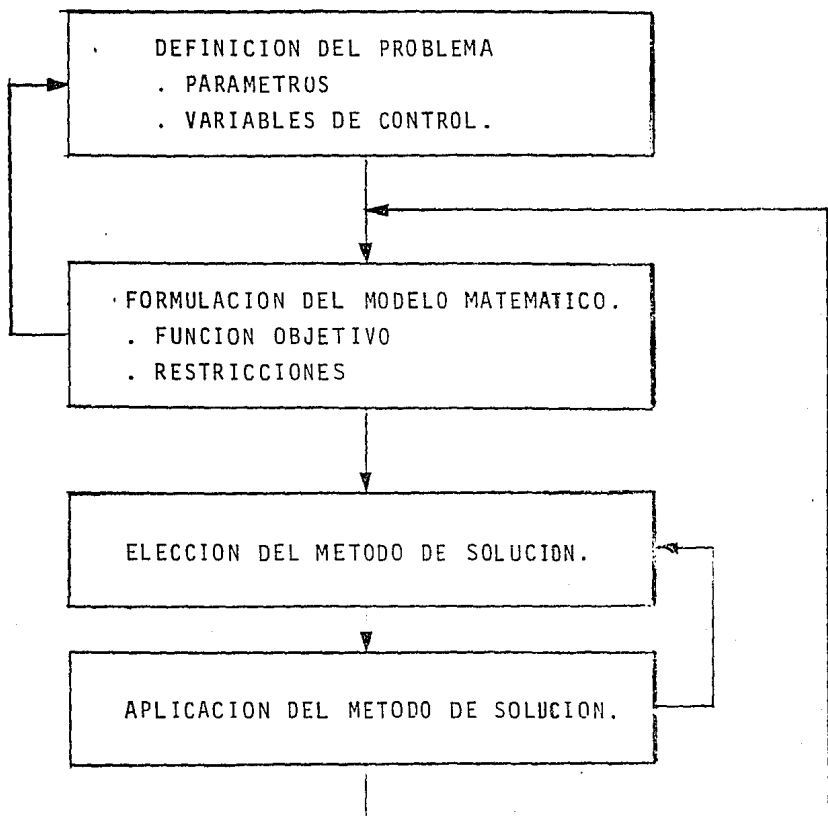


Fig. 1-1 PROCESO DE SOLUCION DE UN PROBLEMA DE OPTIMIZACION.

Siempre que se haga referencia a modelos, se debe sobreentender que se acepta la definición propuesta por Karlin*: "Un modelo es una abstracción adecuada de la realidad, que preserve la estructura esencial del problema, de esta forma, su análisis proporcionará cierta información, no sólo del problema original, planteo de una situación concreta, sino de otros que presenten la misma estructura formal".

Es claro que la solución del modelo producirá resultados exactos, en el mismo grado de concordancia en el cual el modelo es representativo del problema original, porque si este no ha sido modelado convenientemente, la solución puede conducir a resultados dudosos o completamente erróneos, ejemplo de esta situación es el caso de un modelo de programación lineal del que se obtenga una solución no acotada como consecuencia de no haber incluido en el modelo cierta restricción del problema.

A continuación se analizan algunas características privativas, de los modelos de optimización, con la finalidad de proponer una clasificación adecuada, obviamente útil para una identificación posterior de los modelos que se estudian en los capítulos siguientes.

En los modelos de optimización, se distinguen tres componentes principales, a saber:

- (1) El conjunto de variables del problema.
- (2) La optimización del coeficiente de mérito.
- (3) El dominio de definición de las variables del problema, determinado por las restricciones impuestas a los valores que pueden tomar las citadas variables.

*Karlin, S., Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics, Vol. I, Addison-Wesley, p.1.

1 La solución óptima en ciertas clases de problemas de optimización, son valores numéricos asignados a las variables del problema, que satisfacen a las restricciones y simultáneamente optimizan el coeficiente de mérito.

En otras clases de problemas de optimización-los -- variacionales-se procura determinar una curva o función, que satisfaga un conjunto de restricciones y optimice a cierta expresión funcional del conjunto de curvas solución, factibles.

En ciertos problemas, el objetivo se maneja sucintamente en forma matemática como una función de las variables de control; en otros, resulta imposible obtener esta representación sucinta y el coeficiente de mérito, para un conjunto dado de valores de las variables de control, solamente se conoce después de dar fin a un proceso complicado: un proceso de simulación, un análisis de ingeniería, la solución de un programa de computación muy elaborado, o una tabla de estimaciones.

Además los problemas pueden ser restringidos o irrestrictos. En los problemas restringidos de fácil formulación en forma matemática sucinta, la naturaleza de las expresiones restrictoras, pueden adoptar muy diversas formas, por ejemplo, pueden ser expresiones algebraicas o trascendentes, igualdades o desigualdades, funciones lineales o no lineales, el dominio de las variables pueden estar dado por un conjunto discreto o continuo. En algunos casos las restricciones también pueden ser diferenciales o integrales definidas.

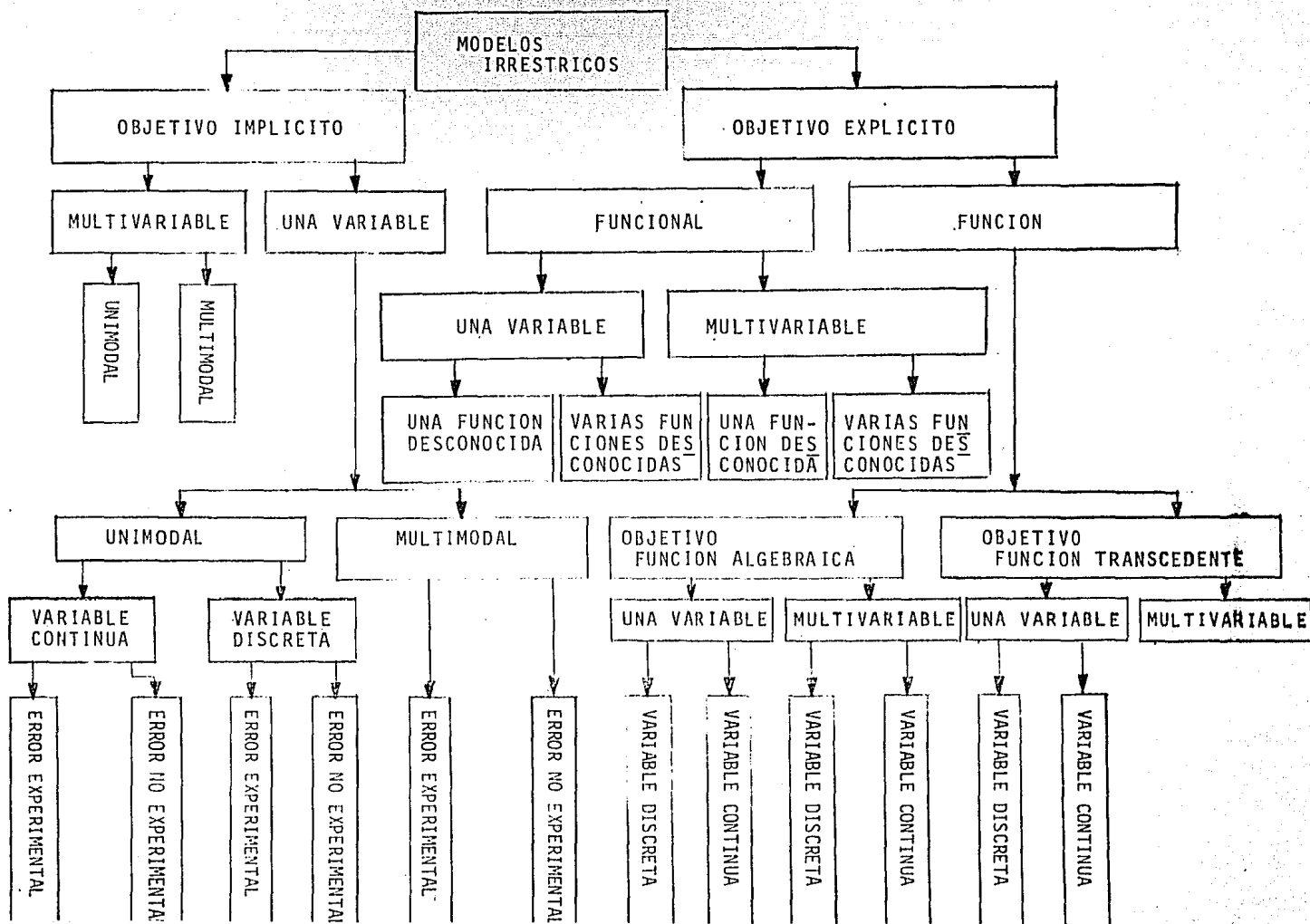
A la luz del estudio anterior, es posible construir - dos árboles que estructuran la clasificación de los modelos de optimización, ilustrados en las fig.1.2. Obviamente se puede - desarrollar el árbol en las direcciones vertical y horizontal para lograr la construcción tan completa como sea necesario o como se quiera.

De este modo es posible distinguir ciertas ramas del árbol, como representantes de ciertas clases específicas de problemas cuyo procedimiento de solución es un desarrollo matemático bien conocido, por ejemplo los modelos pertenecientes a la rama de optimización restringida, para los cuales tanto las restricciones como el objetivo se pueden representar brevemente en conformación algebraica, constituyen la parte de la teoría de la optimización conocida generalmente como Programación Matemática.

Un segundo ejemplo se refiere a la clase de problemas, donde su función objetivo explícita, se expresa con una integral definida: caso de un objetivo funcional con otras condiciones - adicionales o sin ellas. La solución de dichos modelos cae en el dominio del Cálculo de Variaciones clásico.

Otro ejemplo a examinar son los modelos restringidos, en los cuales es imposible expresar las funciones restrictivas así como las funciones objetivo, concisamente valiéndose de funciones matemáticas la optimización de tales modelos, solamente se puede alcanzar mediante cualquier recurso "sin llegar hasta la fuerza bruta". Las técnicas usualmente aplicadas pertenecen al dominio de los generalmente llamados Métodos de Investigación directa. En esta clase de modelos se hallan ciertos procesos estocásticos, por ejemplo una línea de espera, un proceso dado de prórroga, etc., analizables mediante una costosa simulación en la computadora, donde se pueden variar los parámetros de entrada y efectuar la simulación con cada uno de los conjuntos de valores y en esta forma estimar con cada juego de parámetros de entrada, una MEDICION DE LA EFECTIVIDAD (M,E) asociada con la salida de cada corrida. Si el problema es la elección de un -- juego de parámetros de entrada que optimice el ME entonces en este caso se requiere una técnica de investigación directa capaz de hallar el óptimo que colateralmente minimice el número de ensayos de simulación.

Fig. 1.2 Clasificación de los modelos de optimización.



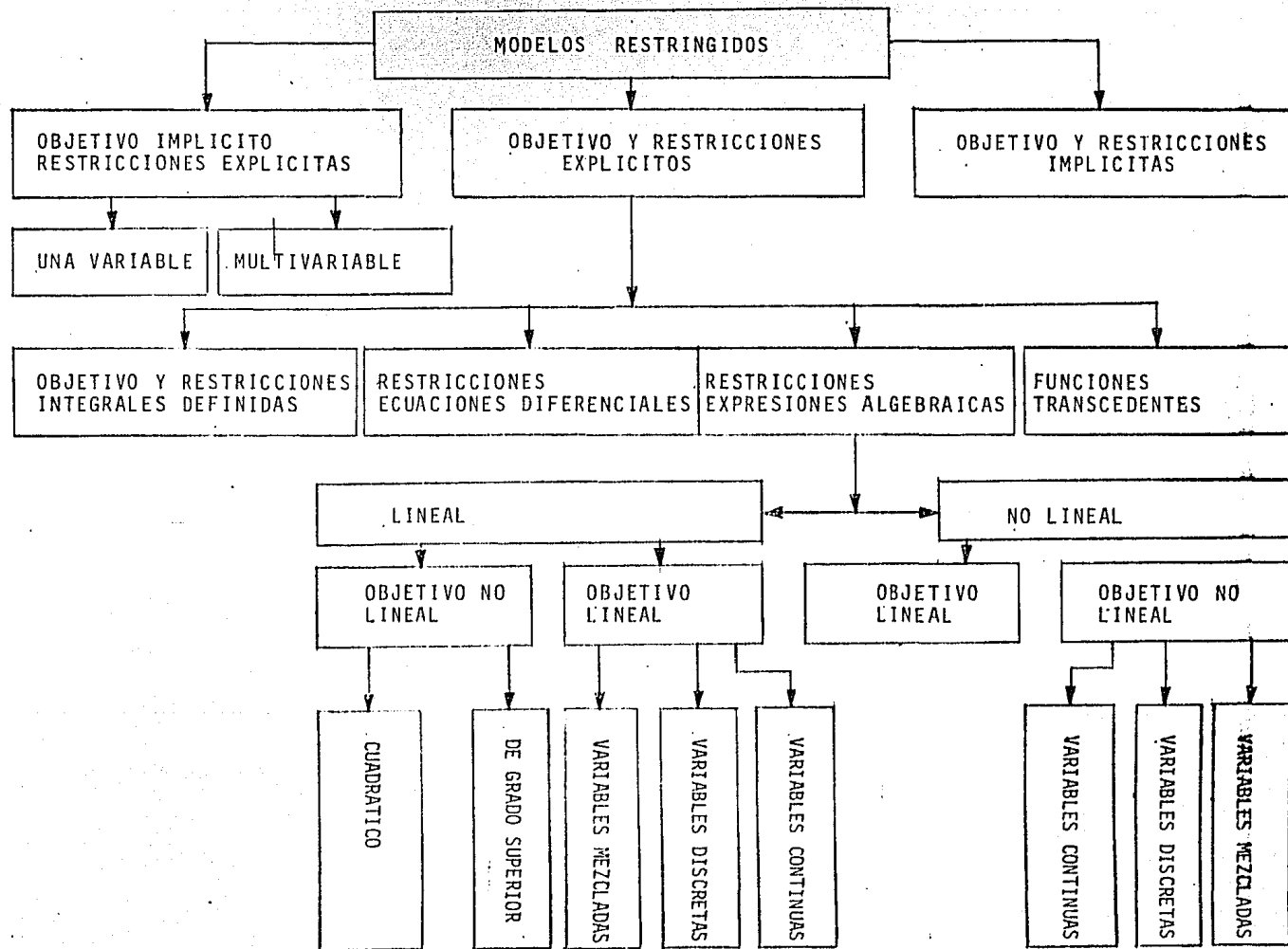


Fig. 1.2 Clasificación de los modelos de optimización.

1.7. TECNICAS DE SOLUCION.

Se da el nombre de técnicas de solución a los procedimientos y algoritmos diseñados para lograr la solución de los problemas de optimización.

La solución verdadera usualmente implica determinar matemáticamente los valores numéricos de las variables de control - y el valor óptimo del coeficiente de mérito.

Generalmente, por necesidades didácticas, los métodos - de optimización, se dividen en dos categorías mayores: los métodos directos y los indirectos.

TECNICAS DIRECTAS.

En los métodos directos, la solución óptima se obtiene con el cálculo directo de los valores de la función objetivo en - diferentes puntos del dominio de factibilidad; los valores obtenidos se comparan, luego utilizando un criterio auxiliar, se analiza un nuevo punto con la esperanza de mejorar el valor de la función objetivo.

Por otra parte, en los métodos indirectos, se busca un conjunto de valores de las variables de control que satisfagan a las necesarias y suficientes condiciones de optimidad conocidas. Los Métodos Clásicos del Cálculo Diferencial, son un ejemplo del tipo indirecto: ciertamente, primero se calculan los valores de las variables que anulan a las primeras derivadas parciales de la función objetivo, siempre y cuando la continuidad de la función y la existencia de las derivadas se halle garantizada en el dominio de interés; en esta forma, el problema de optimizar se transforma en otro de calcular las raíces de una ecuación.

El algoritmo Simplex, de programación lineal, utiliza tanto el método directo como el indirecto, en efecto, realiza una investigación directa en el conjunto de los puntos extremos del dominio de factibilidad y únicamente en ellos porque son los que satisfacen las condiciones necesarias para la optimidad, en esta forma la función objetivo puede ser por lo menos tan buena como en el paso anterior. Finalmente, se detecta el óptimo entre el conjunto de puntos extremos, cuando se satisface el criterio indirecto de factibilidad de la solución complementaria, asociada al problema dual.

En algunos modelos matemáticos de optimización, en uno de los métodos de solución se transforma la estructura matemática del modelo original, en otra equivalente pero cuya solución se al cance más fácilmente que en el modelo original. (veanse los capítulos III y IV).

Considerese la metodología de la PROGRAMACION GEOMETRICA*; en este caso se formula el posinomio que se quiere optimizar en función del problema dual y es este modelo el que se resuelve. Otro ejemplo es la transformación de un problema de programación separable no lineal en otro de programación lineal.

CLASIFICACION DE LAS TECNICAS DIRECTAS.

Las técnicas directas se subdividen en dos grandes grupos:

- 1) Métodos simultáneos.
- 2) Métodos sucesivos.

* Duffin, R.J., E.L. Peterson and C.M. Zener, Geometric Programming John Wiley, 1967.

En las técnicas de investigación simultánea se calculan los valores de la función objetivo o puntos de la superficie de respuestas, en un conjunto de puntos del dominio, determinados a priori, con arreglo a una cierta estrategia de investigación.

En los métodos de investigación sucesiva, se examinan uno después de otro varios ensayos de solución, determinando la ubicación de los ensayos subsiguientes de acuerdo con la información obtenida de los resultados de los ensayos anteriores.

Se presenta en la fig. 1.3 un subconjunto de las técnicas representativas de solución para cada una de las clases de métodos que se estudian en esta sección.

SELECCION DE UN METODO.

La elección de un método ventajoso de solución, en cierta clase de problemas depende de tipo de modelo empleando en su planteo, de las técnicas existentes para dar solución a ese modelo en particular y de las facilidades computacionales con las que cuenta el ingeniero-analista.

En el proceso de selección se pueden considerar factores tales como las linealidades del modelo, el número de variables, el número de restricciones, de estructuras especiales, de las separabilidad o acoplamiento débil de las variables en las restricciones, en la función objetivo o en ambas, o bien, superficies de restricción de fácil interpretación de carácter geométrico, etc.

La elección final de un método, ad hoc, para un problema particular, depende entonces de las propiedades detalladas del modelo, tanto como de las técnicas de solución que forma parte del paquete de progranológica (software) utilizable, en el centro de computación donde se procesa la solución.

Con esto, se ha presentado una breve descripción de algunas clases de problemas de optimización, de modelos matemáticos aplicables a estos problemas y de los métodos utilizables en su solución. Para colocar el desarrollo de la teoría de la optimización en una justa perspectiva, debe el lector acudir al Apéndice B, donde se expone el camino seguido por varios matemáticos con las más significativas de sus contribuciones a través del paso -- de los años.

En las secciones que siguen se presentan los conceptos que estructuran la optimización de los sistemas de ingeniería, como columna vertebral los problemas que se estudiarán en la parte principal del texto.

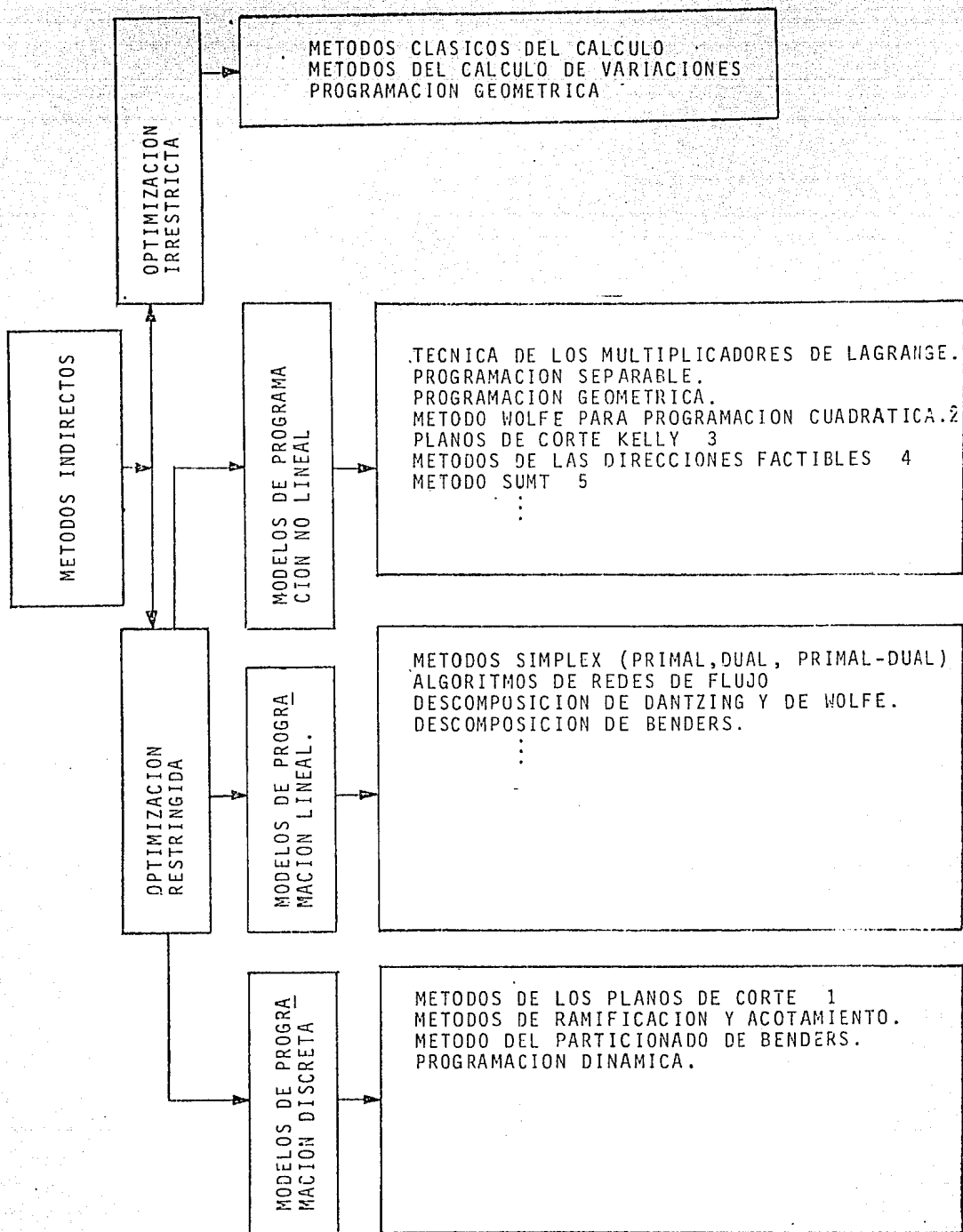
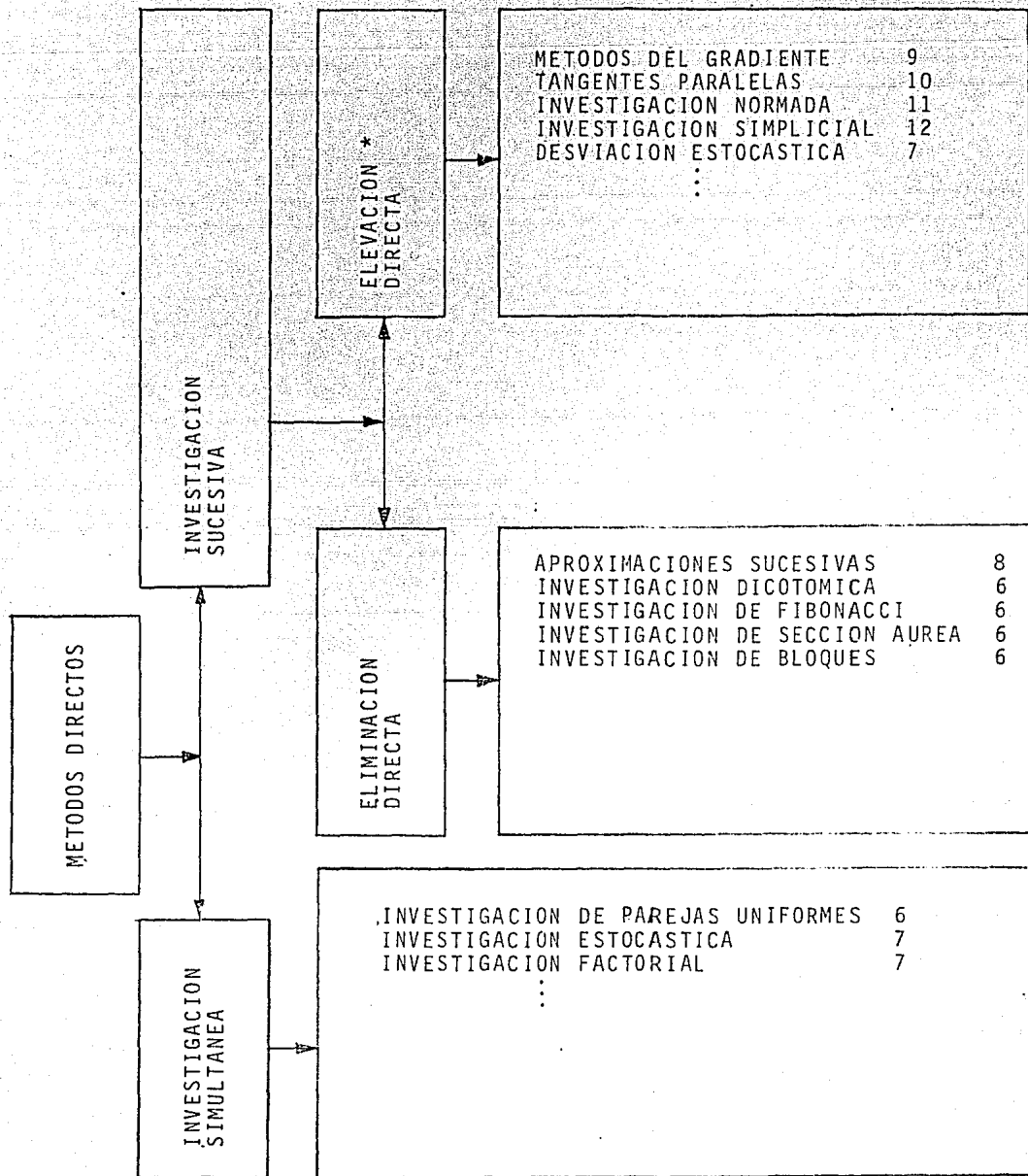


Fig. 1.3 Clasificación de los Métodos de Solución.



NOTA: Los números entre llaves corresponden a las referencias bibliográficas de la sección B-10

* Para un estudio de la eliminación comparada con la elevación consúltese 6

Fig. 1.3 Clasificación de los métodos de solución.

OPTIMIZACION DE LOS SISTEMAS DE INGENIERIA. .

El ingeniero utiliza los métodos experimentales y lógicos-matemático para analizar e interpretar el comportamiento del mundo físico; pero el nivel que la problemática exige es el estar en condiciones de lograr decisiones convenientes en relación a la inversión de recursos escasos cuya finalidad es promover el funcionamiento rentable de instalaciones de utilidad económica, sin desatender a las urgencias sociales.

En general, en un diseño, el ingeniero busca que la instalación cumpla con cierto comportamiento específico en forma económica; el significado del concepto "ECONOMICO", da lugar a varias interpretaciones; puede significar un costo mínimo del diseño incluyendo tanto los costos de la construcción como los de funcionamiento. Por otra parte, se puede buscar un diseño que produzca la más alta tasa de recuperación y funcionamiento. Obviamente también se pueden mezclar ponderadamente estos dos conceptos extremos.

De lo expuesto se infiere que el ingeniero en su labor de estructurar e implantar las mejores soluciones a los problemas que se le plantean en los términos que se manifestaron, afronta - problemas de optimización con el significado que se desarrolló en las secciones anteriores.

Desde el punto de vista práctico de la cuantificación, en la gran mayoría de los sistemas de ingeniería, los problemas - que surgen durante el proceso del diseño son tan complejos que resulta imposible construir un modelo capaz de solucionar la totalidad del problema utilizando solamente una de las técnicas citadas.

No obstante, en cualquier sistema de ingeniería, el problema del diseño se define en función del conjunto de fronteras - que delimitan el rango de los sistemas de interés. Las fronteras representan una separación razonable, aunque un tanto arbitraria, del sistema en estudio en relación a otros en los cuales se halla incluido o comprendido; consecuentemente existe la posibilidad de ver un problema de diseño como una suboptimización de un conjunto de subsistemas, cuya unión constituye el sistema que mueve nuestro interés. Por consiguiente dentro de un sistema de ingeniería es práctica común descomponer un problema de diseño en componentes - suficientemente definidas capaces de admitir la aplicación de las técnicas de optimización.

Evidentemente, el conjunto de soluciones óptimas de las componentes no constituyen en general un óptimo del sistema original, es solamente una solución subóptima.

Los procedimientos tradicionales para resolver problemas de diseño en ingeniería usualmente recurrían al método de aproximaciones sucesivas (trial and error procedure), pero en los nuevos enfoques recomiendan que en aquellos casos de sistemas donde los problemas de diseño pueden someterse con éxito a las técnicas de optimización matemática, el ingeniero-analista puede establecer las fronteras de acuerdo con las componentes en las que fragmentó el problema de diseño, en forma tal, que sea posible una representación matemática compacta del sistema. Lograda la representación en esta forma el diseñador se halla en condiciones de calcular la solución óptima del problema de diseño.

Cuando es posible aislar un fragmento del sistema de extensividad física significativa y se obtiene su diseño óptimo determinado por medio de un procedimiento de convergencia, se dice que existe un algoritmo de síntesis para el diseño del sistema. Si no es posible aislar parte del problema de diseño, cuya optimi-

zación se logre siguiendo un procedimiento de síntesis el diseñador debe resignarse a establecer partes del problema de diseño cuyas soluciones resulten optimizaciones a pequeña escala. La solución de estas optimizaciones a pequeña escala, se pueden considerar como partes del sistema total; son de interés especial - en un proceso incremental de desarrollo de un algoritmo total de síntesis.

En este trabajo se dedican varias páginas a la exploración de partes de problemas de diseño en ingeniería cuya solución se puede alcanzar por medio de técnicas de optimización conocida. La primera parte del material cubre la asignación de recursos de capital a un conjunto finito de instalaciones. Los problemas que implican la síntesis de redes de transportación se exponen en las partes restantes del libro.

BIBLIOGRAFIA

1.10 NOTAS AL CAPITULO I

- [1] Balinski, M. L., "Integer Programming: Method, Uses, Computation", *Management Science*, Vol. 12, No. 3, November 1955, pp. 255-264.
- [2] Wolfe, P., "The Simplex Method for Quadratic Programming", *Econometrica*, Vol. 27, 1959, pp. 382-399.
- [3] Kelley, J. E., Jr., "The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs", *J. SIAM*, Vol. 8, December 1960, pp. 703-712.
- [4] Zoutendijk, G., *Methods of Feasible Directions*, Elsevier Publishing Co., Amsterdam, 1960.
- [5] Fiacco, A. V., and G. P. McCormick, "Computational Algorithm for the Sequential Unconstrained Minimization Technique for Nonlinear Programming", *Management Science*, Vol. 10, 1964, pp. 601-617.
- [6] Wilde, D. J. and C. S. Beightler, *Foundations of Optimization*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
- [7] Brooks, S. H., "A Discussion of Random Methods for Seeking Maxima", *Operations Research*, Vol. 6, 1958, pp. 244-251.
- [8] Berman, G., "Minimization by Successive Approximation", *J. SIAM Num. Anal.*, Vol. 3, 1966, pp. 123-133.
- [9] Hadley, G., *Non Linear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1964, Ch. 9.
- [10] Shah, B. V., R. J. Buehler, and O. Kempthorne, "Some Algorithms for Minimizing a Function of Several Variables", *J. SIAM*, Vol. 12, March 1964, pp. 74-92.
- [11] Hooke, R. and T. A. Jeeves, "'Direct Search' Solution of Numerical and Statistical Problems", *J. Assn. Comp. Mach.*, Vol. 3, April 1951, pp. 212-229.
- [12] Spandley, N., G. R. Hext, and F. R. Himsforth, "Sequential Application of Simplex Design in Optimization and Evolutionary Operations", *Technometrics*, Vol. 4, November, 1962, pp. 441-459.