Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE PSICOLOGIA

EL DESARROLLO DE LAS NOCIONES DE NUMERO Y MEDIDA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADA EN PSICOLOGIA

P r e s e n t a :

MARIANA ENRIQUEZ FERNANDEZ

Directora: Mtra. Cecilia Mora Vázquez

México, D. F., Octubre de 1987.

INDICE

INTRODUCCION.

Hasta el presente se han llevado a cabo una serie de investigaciones en Psicología del Desarrollo, específicamente dentro del marco teórico piagetiano, acerca de las nociones que conforman el desarrollo cognoscitivo del ser humano. Dichas investigaciones, generalmente, han estado dirigidas a dilucidar los procesos genéticos de nociones tales como la causalidad, el movimiento, la velocidad, el espacio, el tiempo, el número, etc.; sin embargo, muy frecuentemente se han estudiado dichas nociones en una forma aislada, con el afán, principalmente, de identificar la ley evolutiva que rige su génesis y, en un momento dado, poder identificar la etapa de desarrollo en que se encuentra algún niño.

El presente trabajo se avoca a la tarea de investigar, mediante un estudio exploratorio, la relación que existe entre dos nociones que Piaget trabajara arduamente: las nociones de número y medida (Piaget & Szeminska, 1940 y Piaget, Inhelder & Szeminska, 1948). A partir de dichos estudios se ha establecido que la noción de número es un antecedente necesario a la construcción de la noción de medición.

Partiendo de dichos supuestos se ha llegado a considerar que, tanto la noción de número como la de medida, provienen de un mismo bloque operatorio y, en consecuencia, pueden ser utilizadas en forma indistinta por el niño que se encuentra en cierto estadio de desarrollo.

Es a partir de aquí que surge la necesidad de estudiar, en forma más precisa, la relación que existe entre tales nociones.

El presente trabajo se plantea como un estudio exploratorio que investigue la relación que existe entre las nociones antes mencionadas, tratando de aclarar si la primera de ellas es realmente un antecedente necesario para el desarrollo de la segunda. Asimismo, se pretende revisar si la noción de conservación es igualmente un requisito indispensable para el desarrollo de las nociones antes mencionadas.

Dentro de la bibliografía piagetiana se ha afirmado que al alcanzarse el desarrollo de cierta estructura operatoria, dicha estructura puede aplicarse a cualquier tipo de contenido, por ejemplo, al alcanzarse la noción de medición, ésta puede llevarse a cabo tanto con cantidades continuas como discontinuas. De ésta manera, también pretende revisarse la ejecución del niño en tareas que implican manejos con cantidades continuas y discontinuas, tratando de clarificar, por un lado, qué tipo de relación existe entre tales contenidos (con ciertas tareas específicas) y, por otro lado, si puede considerarse que las estructuras que gobiernan las dos nociones mencionadas son las mismas.

Es importante aclarar en este momento que la intención básica de éste trabajo no es proporcionar un marco que pueda utilizarse posteriormente como una tabla de datos contra la cual se confronte la ejecución de un niño para determinar si se encuentra en la etapa de desarrollo que corresponde a su edad, de la misma forma que la pretensión tampoco es llevar a cabo una réplica de estudios que corroboren los resultados ya encontrados en infinidad de trabajos. Puede decirse que la intención principal de éste estudio es analizar una relación que, implícitamente, se ha dado por hecha, utilizando para ello el diseño de tareas que, teóricamente, "deben" presentar una relación.

Asimismo, este trabajo pretende confrontar dichos supuestos teóricos con argumentos que el mismo sujeto vertirá acerca de la relación que encuentra en las exigencias y su desempeño en las tareas.

La suposición del trabajo es, entonces, la de encontrar una marcada interrelación en el desarrollo de las nociones estudiadas, y el manejo de los sujetos -para las tareas diseñadas-, en niveles levemente desfasados que impliquen un desarrollo anterior de la noción de número a la de medición, esto es, un niño que ya es operacional en la noción de número, no necesariamente lo será para la de medición, pero si viceversa.

Con la finalidad de entender lo mejor posible los conceptos involucrados en las nociones que se estudian, se llevó a cabo una revisión bibliográfica, dentro del marco teórico piagetiano, que es reseñada en los tres primeros capítulos.

En el primer capítulo se presentan los estudios hechos por Piaget & Szeminska (1940), acerca del desarrollo de la noción de número. Posteriormente, en el segundo capítulo, se reportan los trabajos de Piaget, Inhelder & Szeminska (1948) sobre el desarrollo de la noción de medición.

El tercer capítulo está dedicado a reseñar dos trabajos en que son retomados los resultados de las investigaciones piagetianas y aplicados a distintas situaciones experimentales: el primero es el llevado a cabo por Albert Morf (1962) sobre el descubrimiento de una ley numérica simple en una situación de partición espacial y, el segundo, el realizado por Inhelder, Sinclair & Bovet (1974), en que se analiza el paso de la conservación de conjuntos discretos de elementos a la conservación de la longitud en una situación de aprendizaje.

En el cuarto capítulo se presenta el trabajo experimental motivo de esta tesis; en él se reporta un estudio exploratorio en que se pusieron en juego las nociones de número y medida.

Finalmente, se dedican unas líneas a comentar los resultados encontrados en el estudio realizado.

CAPITULO 1. EL DESARROLLO DE LA NOCION DE NUMERO.

A partir de los trabajos llevados a cabo por Piaget y colaboradores (1940) acerca de la génesis de la noción de número, se concluyó que esta noción está conformada por la síntesis de los sistemas de clasificación y seriación; esta síntesis constituye la serie de los números que, de forma indisociable, son cardinales y ordinales. El presente capítulo se dedica a presentar una revisión del trabajo que ha dado origen y fundamento a las afirmaciones antes mencionadas.

Los estudios llevados a cabo sobre el periodo sensoriomotriz del desarrollo del niño (del nacimiento a los dos años aproximadamente) han mostrado que, a partir del nacimiento, el niño empieza a desarrollar la noción del objeto permanente, por medio de la cual los objetos que le rodean dejan de ser inexistentes al salir de su campo perceptual, para pasar a ser constantes a pesar de no estar accesibles a la percepción directa del niño (Piaget, 1979).

A pesar de que al final de dicha etapa el niño "sabe" que un objeto que sale de su campo perceptual sigue existiendo, durante el periodo preoperatorio se presenta un problema similar: al ser variada la forma de un objeto, éste no deja de existir, pero ahora varía su cantidad, esto es, si se cambia la forma de una bola de plastilina en una salchicha, esta alteración en la forma puede provocar juicios tanto de aumento de la cantidad de plastilina: "ahora es más (la salchicha) porque está más alargada (que la bola)", como de disminución de la misma: "ahora es menos porque está más flaca".

Al igual que con la plastilina, si las cuentas de un collar son colocadas sobre una mesa con una cierta distancia entre una y otra cuenta y esta disposición es alterada posteriormente, el tamaño del collar que puede hacerse con las cuentas de una y otra disposición será variable: en unos casos el collar será más corto que en otros.

A partir de la observación de hechos como los descritos, se han realizado una serie de experiencias que han dado luz al proceso por medio del cual se alcanza la noción de conservación de las cantidades (Piaget, 1941) en relación con el desarrollo de la noción de número (Piaget, 1940).

Después de analizar el concepto de conservación, Piaget (ibid. p. 19) llegó a la conclusión de que un conjunto o una colección de elementos, sólo es concebible si su valor total permanece invariable a pesar de los cambios que puedan sufrir las relaciones de tales elementos y, del mismo modo, un número sólo es inteligible en la medida en que permanece idéntico a sí mismo(1).

Surge entonces la duda de que, si la conservación es una necesidad básica para el pensamiento, ¿tal conservación es una idea innata, anterior al desarrollo del número, o dichas nociones se estructuran progresivamente?.

Para resolver esta interrogante, Piaget ideó una situación experimental (Figura 1.1) en que se presentan al sujeto dos recipientes idénticos (A_1 y A_2) con iguales cantidades de líquido, cotejables en sus niveles, y el contenido de uno de tales recipientes es vertido en dos más pequeños pero iguales entre sí (B_1 y B_2); inmediatamente es cuestionada la igualdad de las cantidades de líquido en A_1 y $B_1 + B_2$. Estas cantidades pueden seguir vertiéndose en más recipientes cada vez más pequeños y en cada ocasión ser cuestionada la igualdad de sus contenidos.

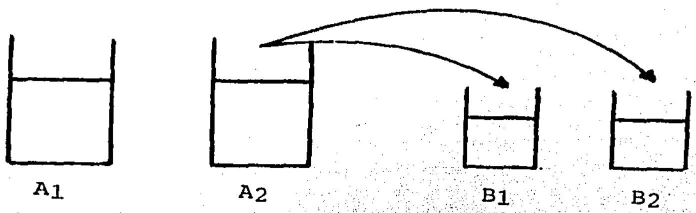


FIGURA 1.1

Los resultados muestran que la conservación de las cantidades continuas se construye a través de un proceso en que son distinguibles tres etapas básicas y sucesivas: primero, la etapa llamada "de la cantidad bruta" (4-5 años) en que el niño considera que la cantidad de líquido varía de acuerdo al número y dimensiones del o de los recipientes y sus juicios son emitidos conforme a los datos perceptuales. Por ejemplo, si el líquido se vierte en un recipiente delgado y, por lo tanto, el nivel alcanza mayor altura, el niño juzgará que hay más agua sin importar que además de llegar más alto también es menos ancho; asimismo, si el agua se vierte en, por ejemplo, dos vasos, el niño juzgará que hay menos líquido pues el nivel es más bajo; de igual manera, si se vierte en seis vasos más pequeños, puede juzgar o que hay más agua pues "hay muchos vasos", o que hay menos agua porque "tienen poquito (cada uno de ellos)".

Aquí el hecho importante de analizar era saber por qué el niño no tiene de primera instancia la noción de conservación de la cantidad, por qué hay una insuficiencia en la cuantificación de las cualidades percibidas y falta coordinación en las relaciones cuantitativas que se perciben. Analizando los datos se encontró lo siguiente: debido a que el niño razona sobre la base de una sola dimensión (que también será llamada relación) en cada caso, se contradice constantemente y, aparentemente, ignora la noción de una cantidad total multidimensional. En esta etapa, las percepciones atribuyen cualidades a objetos que no pueden ser aprehendidas pues no están relacionadas unas con otras, esto es, no hay coordinación de relaciones por medio de operaciones aditivas o multiplicativas. Los sujetos no comprenden la conservación porque su noción de cantidad no es de cantidad total, y esto debido a que son incapaces de componer las relaciones o las partes involucradas, y la cuantificación, por lo mismo, no supera la percepción directa.

La segunda etapa (5-6 años) es un periodo de transición en que en algunos casos se da la conservación y en otros no; se dan juicios alternados de igualdad y diferencia, de conservación y no conservación, y los juicios varían según los contrargumentos. Durante esta etapa existen dos tipos de reacciones, el primero es cuando se da la conservación si el agua se vierte sólo en dos vasos pero no más, y segundo, cuando la conservación se acepta solamente si las diferencias de nivel, anchura o volumen son muy leves y se niega si tales diferencias son muy grandes. La coordinación de relaciones surge en esta etapa y culmina en una noción de cantidad intensiva que va a permitir, a través de la tercera etapa, establecer como forma de medición la relación de las diferencias y, por lo mismo, la noción de una cantidad total de orden extensivo(2).

Las relaciones entre cualidades pueden ser divididas en dos clases: simétricas, que expresan semejanzas que son clasificables, y asimétricas que expresan diferencias por medio del más y del menos y marcan así el comienzo de la cuantificación. La cantidad se da, en su forma elemental, al mismo tiempo que la cualidad: está constituida por las relaciones asimétricas que enlazan las cualidades dadas. No puede hablarse entonces de cualidades aisladas pues tales cualidades siempre se presentan comparadas y diferenciadas, y tal diferenciación, al implicar relaciones de diferencias asimétricas, es el origen de la cantidad.

Durante la primera etapa la cuantificación y clasificación no superan la percepción directa. Para que tales relaciones (simétricas y asimétricas) den lugar a una cuantificación y clasificación sistemáticas, deben cumplir con dos condiciones que se dan a través de las tres etapas: la primera condición es que de simples enlaces perceptivos se conviertan en verdaderas relaciones que conformen sistemas de gradaciones o cantidades intensivas, que tales relaciones sean factibles de composición (aditiva y multiplicativa), y que permitan su transitividad lógica así como la noción de una cantidad total multidimensional.

La segunda condición, implícita en la anterior, para que exista una cuantificación real, es que debe presentarse una partición en unidades o una descomposición y multiplicación de relaciones.

Durante la transición de la primera a la segunda etapa empiezan a cumplirse las dos condiciones antes mencionadas: para emitir un juicio o verter una misma cantidad de líquido en recipientes de dimensiones diferentes, el niño trata de compensar las relaciones, quedándose aún en una inestabilidad entre dicho intento de coordinación y los datos perceptuales. Sin embargo, aún cuando los sujetos establezcan la multiplicación lógica de relaciones, esto no es garantía de la conservación de la cantidad total, ya que no siempre son permutables las dimensiones. Por lo tanto, para garantizar la conservación, es necesaria una cuantificación extensiva que permita establecer una proporción propiamente dicha y no sólo una correlación cualitativa entre las dimensiones, es decir, es necesaria una partición además de la multiplicación de relaciones. Puede decirse entonces que la multiplicación lógica de las relaciones no es suficiente para alcanzar la conservación de las cantidades totales, pero sí permite concebir la relación de la cantidad total que es producto lógico de dicha multiplicación de relaciones y la cual posteriormente permitirá una cuantificación extensiva.

Durante la tercera etapa (6-7 años) se afirma la conservación de las cantidades en todos los trasvases efectuados, ya que al mismo tiempo que se lleva a cabo el desarrollo de la noción de la cantidad total, también se conforma la noción de unidad, es decir, la cuantificación extensiva bajo la forma de proporciones o de partición aritmética. Se encontró de esta manera que sólo cuando el sujeto es capaz de construir totalidades que se conservan logra descubrir la cuantificación real.

El pasaje de la cantidad intensiva a la cantidad extensiva se da por medio de la combinación de las igualdades y las diferencias; esto es, las relaciones cualitativas heterogéneas (altura y anchura) se conciben iguales conservando simultáneamente su significación de diferencia asimétrica. La proporción es entonces una combinación de la igualdad con la relación asimétrica y, en cierta forma, esta proporción ya es una partición que permite que el todo se conciba como algo que puede descomponerse en unidades.

La partición aritmética se da así en el momento en que los elementos de un todo pueden igualarse entre sí aunque sean diferentes, mientras que cuando una relación de conjunto o una clase se descomponen en subrelaciones o en subclases, sus reuniones no implican igualdad entre ellas, sino sólo su inclusión en el todo.

Con la idea de proseguir el análisis del desarrollo antes descrito, se llevó a cabo una experiencia similar pero ahora con cantidades discontinuas que, en este caso, fueron colecciones de perlas. Dichas colecciones presentan la ventaja de poder ser evaluadas globalmente cuando están acumuladas, y enumeradas cuando sus elementos están separados, así como permitir la cuantificación global de su longitud cuando se encuentran yuxtapuestos.

Este nuevo tipo de análisis representa una situación control en que se introduce el estudio de la correspondencia biunívoca y recíproca, y se examinan las relaciones entre la conservación de las cantidades y el desarrollo de tal correspondencia.

La experiencia utilizada en este caso consiste en presentar al niño los vasos A_1 y A_2 de la experiencia anterior con cierta cantidad de perlas rojas y verdes (en cada vaso) y preguntar si hay la misma cantidad en los dos recipientes, si se hacen collares con unas y otras perlas serán o no de la misma longitud, si se cambian de tarros habrá o no lo mismo de perlas, etc., y después, pedir al sujeto que lleve a cabo el llenado de los vasos (iguales o diferentes) colocando una perla en un vaso cada vez que se coloque una perla en el otro, y en seguida nuevamente las preguntas anteriores (Figura 1.2).

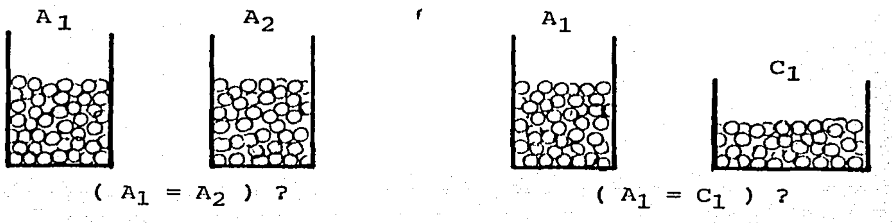


FIGURA 1.2

Como con las cantidades continuas, en este caso se presentan tres etapas de desarrollo: en la primera (4-5 años) se manifiestan los mismos juicios y contradicciones basados en los rasgos perceptuales de las dimensiones o cantidad de recipientes, y las colecciones aumentan o disminuyen en sus elementos según la forma que adquieren en los diferentes vasos. Asimismo, se observa que la correspondencia biunívoca y recíproca ejecutada por el sujeto durante la colocación de las perlas en los vasos, no conlleva ni basta para asegurar la conservación.

Se indica así que en este nivel, ni la enumeración ni la correspondencia son métodos que sirven al niño para emitir sus juicios, sino que estos están basados en las relaciones perceptivas globales, y la correspondencia no conduce a una equivalencia, ni siquiera global.

Durante la segunda etapa (5-6 años) se presenta nuevamente la transición entre la no conservación y la conservación, caracterizada en este caso por el conflicto entre: 1) una "necesidad" de conservación propiciada por la correspondencia biunívoca o por la igualdad de las colecciones depositadas en vasos idénticos, y 2) los datos perceptuales presentes durante las transformaciones. Este conflicto da como resultado que las semejanzas perceptuales se coordinen en relaciones y se integren en un sistema que permita justificar la conservación explicando las variaciones simultáneas.

Según muestran los datos, al igual que con las cantidades continuas, si los cambios perceptuales en las transformaciones son muy grandes, no se da la conservación y viceversa si los cambios son poco significativos. Asimismo, y gracias a la técnica empleada, se observan resultados muy claros en cuanto a la diferencia entre las evaluaciones fundadas solamente en la percepción de las relaciones de altura y anchura de los recipientes, y las fundadas sobre la longitud de los collares que formarán: hay conservación cuando se piensa en los elementos alineados y no conservación cuando se piensa en una u otra de las dimensiones de la forma global.

Estos resultados manifiestán que la cuantificación implica diversas operaciones difíciles de coordinar entre sí, al igual que para que se dé la conservación es necesaria, en la cuantificación, la descomposición de la totalidad en sus elementos. De la misma manera se hace patente que a pesar del carácter discontinuo de las colecciones en cuestión el niño las trata, en este problema, igual que como lo hace con las cantidades continuas.

Durante la tercera etapa (7-9 años), el niño está seguro de la conservación de las cantidades totales, pues el factor de equivalencia, establecido mediante la correspondencia término a término, se sobrepone de entrada a los datos perceptuales. Esto se da debido a que en el momento en que el niño coordina las diferencias por medio de la multiplicación de relaciones, se formula la idea de igualar tales diferencias, sobre todo cuando se trata de las cantidades discontinuas. En resumen, en cuanto los niños coordinan operatoriamente las diferencias percibidas, las miden, y si carecen de datos numéricos, miden unas por medio de otras, comparando o igualando todo aumento de anchura con la disminución concomitante de altura, y viceversa (Piaget, 1940, p. 55 sic). En este momento el sujeto constituye y es capaz de manejar la reversibilidad dándole un carácter operatorio a las transformaciones que hasta entonces habían sido concebidas, primero como simples relaciones perceptivas y posteriormente como retornos empíricos.

A partir de esto, surge la duda de si la correspondencia puesta en juego durante las tres etapas es una operación diferente en cada una de tales etapas, o si sufre una evolución que va de una correspondencia global de las figuras de conjunto hacia la correspondencia cuantitativa con equivalencia durable y fuente de invariancia cardinal. Para resolver esta interrogante se trabajaron experiencias sobre correspondencia estática provocada entre objetos heterogéneos cualitativamente complementarios (huevos y hueveras, flores y floreros, etc.) así como sobre correspondencia dinámica por medio de intercambios de uno con uno (por ejemplo, cambio de objetos por monedas). Mediante estas experiencias también se pretendía averiguar si la correspondencia término a término implica necesariamente la idea de una equivalencia durable entre los conjuntos en correspondencia.

En todas las pruebas se encontraron tres etapas sucesivas: durante la primera etapa (4-5 años) no hay correspondencia ni equivalencia durable y los juicios se fundan en comparaciones globales de las longitudes de las colecciones; la cuantificación se basa en la transformación de orden espacial y perceptivo pero sin coordinación entre tales relaciones; la reversibilidad se da sólo por un recuerdo del estado inicial y, en el caso del intercambio, no se puede anticipar la cantidad de elementos necesarios para llevarlo a cabo.

Durante la segunda etapa (4-6 años) hay correspondencia término a término pero sin equivalencia durable puesto que la correspondencia sólo es perceptual aun cuando hay numeración verbal (correspondencia verbal entre la serie de los números y los objetos de las colecciones), así como tampoco hay correspondencia entre los valores de las colecciones. En este nivel la cuantificación no se reduce ni al número ni a la correspondencia biunívoca y recíproca, sino a una correspondencia intuitiva basada en la configuración perceptual ya sea de la longitud o de la densidad de la colección y tal cuantificación se ve afectada en esta etapa por la lejanía o cercanía entre los conjuntos. En el caso del intercambio, la correspondencia es correcta gracias a la correspondencia visual previa, pero no hay equivalencia durable.

En la tercera etapa (5-6años), llamada de la "correspondencia cuantitativa", ya hay correspondencia término a término concebida como necesaria y equivalencia durable. En esta etapa puede hablarse ya de una correspondencia operatoria pues el niño se libera de la percepción, el número no varía con la figura, y con ello se da cuenta de que toda alteración en la disposición espacial puede corregirse por medio de una operación inversa; es entonces que este retorno empírico adquiere significación como reversibilidad y es considerado como fuente de equivalencia.

Con las diferentes experiencias se aclara que, cuando la correspondencia es intuitivamente más estrecha (como en el caso de los huevos y las hueveras), los niños responden mejor, y tal correspondencia es más o menos cuantitativa según el contenido de los problemas propuestos. Asimismo se deduce que la correspondencia cuantitativa supone no sólo la correspondencia perceptiva, sino también la igualación de las diferencias, es decir, una coordinación de los desplazamientos de los elementos gracias a la cual dichos desplazamientos se compensan y se vuelven reversibles. Igualmente, puede verse que el intercambio de uno con uno no es suficiente para asegurar la noción cardinal de dos totalidades equivalentes entre sí de modo durable; lo que es necesario es que el intercambio de uno con uno y la correspondencia se conciban como un sistema reversible de desplazamientos o relaciones.

Por otra parte, se hace evidente que la numeración hablada casi no influye en el progreso de la correspondencia y la equivalencia, aunque sí ayuda a acelerar el proceso de evolución en cuanto la correspondencia se vuelve cuantitativa y hace surgir una equivalencia incipiente, por lo que puede concluirse que la serie numérica verbal como tal no engendra ni la cuantificación, ni la correspondencia, ni la equivalencia.

Aparte de los estudios ya reseñados sobre correspondencia provocada, se llevó a cabo uno de correspondencia espontánea para examinar la forma en que el niño calcula el valor cardinal de una colección, el o los métodos por medio de los cuales llega a dicha evaluación, así como saber en qué forma la correspondencia sirve para llevar a cabo una evaluación cardinal. La técnica consiste en presentar un conjunto de elementos en diferentes configuraciones y pedir al sujeto que proporcione una cantidad igual de elementos a los contenidos en cada figura (Figura 1.3).

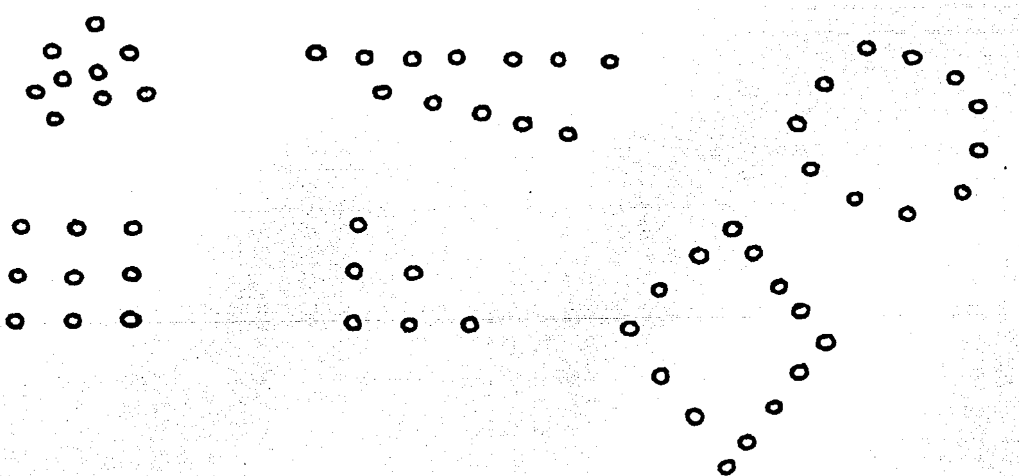


FIGURA 1.3

Nuevamente, en esta prueba se encontraron tres etapas sucesivas: la primera (4-5 años), de comparación cualitativa global, en que la comparación sólo imita la forma global de la colección sin intento alguno de exactitud: si la colección está en hilera se reproduce la longitud y se juzga cualitativamente en más, menos o igual según la longitud o la densidad del conjunto sin implicar un carácter cardinal. Las copias se llevan a cabo por medio de correspondencias término a término y son exactas desde el punto de vista numérico sólo cuando su forma o número son muy conocidos por el sujeto, por ejemplo, cuatro fichas que conforman los ángulos de un cuadrado (Figura 1.4).

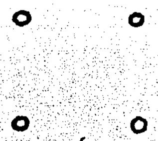


FIGURA 1.4

En esta etapa no hay reversibilidad porque el sujeto basa sus juicios en estados perceptivos estáticos no coordinados en una totalidad y esto se debe a que los modelos no son analizados ni copiados como conjuntos de cualidades capaces de coordinarse lógicamente entre sí. Puede hablarse en este momento de una evaluación precardinal elemental basada en las cualidades globales del conjunto (longitud y densidad). Tales relaciones cuantitativas elementales no son estructuras racionales, sino que son solamente esquemas prácticos, ya que no presentan conservación pues no existe una coordinación lógica de las relaciones involucradas. Mientras se toma en cuenta sólo una relación, el conjunto es evaluado como un todo indisociable. En cuanto se evalúa más de una relación a la vez, se puede ver como una colección de elementos. Para llegar a la correspondencia operatoria(3) es necesario que el sujeto coordine las dos relaciones (longitud y densidad), pues en caso contrario igualará solamente una de tales relaciones o, en todo caso, sólo las yuxtapondrá.

En la segunda etapa (4-5 años), para poder evaluar la figura, el sujeto establece una correspondencia término a término pero no reconoce la duración de la equivalencia si hay alteración perceptual. Esto se debe a que tal correspondencia está basada en las particularidades cualitativas de las figuras, las cuales cambian con cada modificación de dicha figura. Durante esta etapa de correspondencia cualitativa de orden intuitivo(4) es claro que por intuitiva que sea la correspondencia, ésta implica un sistema de comparaciones de las partes, a veces multiplicaciones, divisiones o abstracciones lógicas, así como descomposición de las figuras en sus elementos para poder "copiarlas". La diferencia de esta etapa con la primera es que en ésta se analizan todas las partes del conjunto y empiezan a coordinarse y, al dar mayor valor a alguna de tales relaciones, obtiene evaluaciones diferentes que lo conducen a contradicciones. Asimismo, en esta etapa se hacen coincidir las copias con los modelos en sus diferentes relaciones. En esta segunda etapa, como en la primera, la equivalencia no es durable, aunque ahora puede establecerse mediante los retornos empíricos.

La coordinación de las relaciones durante la segunda etapa es al mismo tiempo aditiva (seriación) y multiplicativa (correspondencia) por las siguientes razones: a) es seriación aditiva (adición de relaciones) puesto que la longitud total de la hilera se alcanza descomponiendo el todo en el número de segmentos que sumados conforman la densidad de la misma, y b) es multiplicación de relaciones puesto que las dos hileras se corresponden término a término por contacto perceptual al mismo tiempo que los intervalos también se corresponden uno a uno, esto es, hay una correspondencia tanto en línea horizontal (intervalos) como en línea vertical (cada elemento enfrente de un elemento de la otra serie). Las relaciones empiezan a coordinarse en un plano puramente práctico o intuitivo, pues tal coordinación se lleva a cabo por medio de la figura y no de una operación.

En la tercera etapa (5-6 años), de correspondencia precisa y equivalencia durable, el sujeto disocia las totalidades y forma series liberándose de la correspondencia intuitiva. En la correspondencia cualitativa de la etapa anterior cada elemento de la colección está definido por la posición que ocupa dentro del conjunto, y los elementos se distinguen por ser portadores de las cualidades de su posición absoluta dentro de la colección. La reunión de estos elementos tiene un valor cualitativo, esto es, tienen el valor de la figura que conforman (por ejemplo, un triángulo, una hilera, etc.).

A diferencia de la etapa anterior, esta etapa está caracterizada por la correspondencia aritmética o numérica(5) en la cual cada elemento de la colección está definido por ser un elemento del conjunto igual al resto de los elementos (todos los elementos son equivalentes entre sí), pero diferenciados por su posición; dicha posición conforma un orden relativo que varía de una operación a otra (llamado orden vicariante), y para llevar a cabo una correspondencia es necesario este orden: "la correspondencia se reduce así a la idea de un mismo orden de enumeración aplicado a dos colecciones de unidades homogéneas" (Piaget, 1940, p. 106).

En esta etapa se establece la igualación de las diferencias, es decir, se comprende que las diferencias en longitud o densidad se compensan por sus inversas, es así que en este momento la reunión de los elementos adquiere un valor numérico, y la reunión de los diferentes elementos, aún cuando la colección no esté completa, también tiene valor numérico independientemente de las cualidades de los elementos que contiene: la igualación de las diferencias es entonces el origen de la unidad y, por lo tanto, del número.

En esta tercera etapa ya no hay ataduras a los datos perceptuales ni siquiera para llevar a cabo la correspondencia.

El sujeto coordina las diferentes relaciones aun cuando éstas varíen simultánea y diferentemente en las colecciones en correspondencia, el niño "acepta" todas las posibles variantes perceptuales de las colecciones y esto permite que los retornos empíricos se transformen en reversibilidad operatoria: los conjuntos permanecen equivalentes porque sólo sufren cambios de posición que son reversibles y pueden ser explicados por operaciones de inversión.

Hasta aquí puede concluirse que toda correspondencia que ha adquirido un carácter numérico, lo tiene asimismo ordinal y cardinal simultáneamente. No obstante, en lo reseñado hasta este momento, sólo se ha hecho énfasis en el carácter cardinal de las colecciones en correspondencia, debido principalmente a que, haciendo abstracción de la posición de los elementos dentro de la colección, ha sido utilizado el orden vicariante -en el cual todos los elementos son equivalentes entre sí y, por lo tanto, pueden ser enumerados y seriados en cualquier sucesión-. La forma más sencilla de resaltar el carácter ordinal de una colección de elementos es cuando estos difieren entre sí por caracteres capaces de ser seriados.

Para estudiar más específicamente la ordinación, se llevó a cabo una investigación en que se presentaban al sujeto dos conjuntos de elementos que podían seriarse según sus diferentes tamaños (Figura 1.5), y se le pedía: seriarlos en correspondencia, encontrar el elemento correspondiente de uno señalado cuando una de las series se encontraba amontonada, distanciada o en orden inverso, así como cuando la serie estaba en desorden, y determinar, a partir de un elemento dado, los elementos mayores o menores de la otra serie cuando las dos colecciones estaban mezcladas.

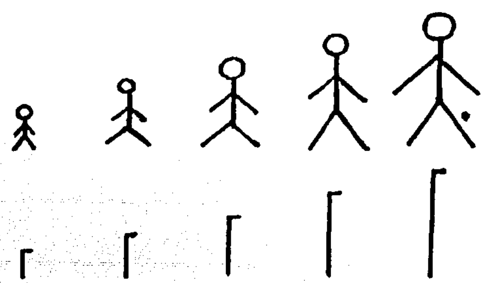


FIGURA 1.5

Según los resultados, se encontraron tres etapas aproximadamente equivalentes y sincrónicas a las de la correspondencia cardinal, sin embargo, en este caso fue muy clara la diferencia entre el tipo de razonamiento basado en la correspondencia serial (o similitud cualitativa) y la correspondencia ordinal (seriación ordinal o similitud generalizada):

> "hay similitud cualitativa entre dos series de relaciones cuando dos colecciones de objetos se serian por medio de la misma sucesión de relaciones cualitativas asimétricas, y cuando el rango de cada elemento de la primera serie corresponde a un elemento determinado de la segunda (...), en esas seriaciones cada elemento es diferente de todos los demás y además cada relación es diferente de las otras (no hay necesariamente la misma diferencia de altura entre los elementos uno y dos que entre el dos y el tres)";

mientras que

> "en la seriación ordinal, por el contrario, cada elemento cuenta como una unidad, equivale en todo a los demás excepto en su rango. Este orden puede ser el de una serie cualitativa (pero en este caso cada elemento cuenta como uno, como los otros, y la única diferencia entre ellos, desde el punto de vista numérico, es que hay un primero, un segundo, etc.) o puede ser diferente, pero en todos los casos cada relación de orden que enlaza dos elementos es equivalente a todas las otras (existe la misma diferencia de orden entre el primer elemento y el segundo, que entre el segundo y el tercero, etc.)" (Piaget, 1941, pág. 141).

El niño de la primera etapa (4-5 años) considera que al señalarse un rango determinado, éste se aisla del conjunto perdiendo así su carácter cardinal dentro de la colección, constituyendo sólo el rango (ordinal) que lo caracteriza.

Los sujetos de la segunda etapa (6-7 años) presentan un primer enlace entre el rango y la cardinación, sin embargo, como su seriación es intuitiva, la cardinación permanece externa a dicha seriación. Esto provoca que, al buscar un rango dado dentro de la serie, se presente una confusión del término anterior con el rango buscado. Esto permite afirmar que el rango no conlleva un valor cardinal, lo cual da como resultado que no se comprenda que cada rango es por sí mismo un número, que es indisociable de la colección de la que el elemento así ordenado forma parte.

Durante la tercera etapa (6-7 años), por el contrario, el sujeto no considera que la cardinación(6) esté atada a los elementos, sino que aplica dicha cardinación a todos ellos considerándolos como unidades equivalentes -haciendo abstracción de sus cualidades- al mismo tiempo que diferentes por su posición de orden, con lo cual dichos elementos se consideran simultáneamente términos de clase y de relación. Es así que tales mecanismos (cardinación y ordinación) se rrespondencia serial (o similitud cualitativa) y la correspondencia ordinal (seriación ordinal o similitud generalizada):

> "hay similitud cualitativa entre dos series de relaciones cuando dos colecciones de objetos se serian por medio de la misma sucesión de relaciones cualitativas asimétricas, y cuando el rango de cada elemento de la primera serie corresponde a un elemento determinado de la segunda (...), en esas seriaciones cada elemento es diferente de todos los demás y además cada relación es diferente de las otras (no hay necesariamente la misma diferencia de altura entre los elementos uno y dos que entre el dos y el tres)";
>
> mientras que
>
> "en la seriación ordinal, por el contrario, cada elemento cuenta como una unidad, equivale en todo a los demás excepto en su rango. Este orden puede ser el de una serie cualitativa (pero en este caso cada elemento cuenta como uno, como los otros, y la única diferencia entre ellos, desde el punto de vista numérico, es que hay un primero, un segundo, etc.) o puede ser diferente, pero en todos los casos cada relación de orden que enlaza dos elementos es equivalente a todas las otras (existe la misma diferencia de orden entre el primer elemento y el segundo, que entre el segundo y el tercero, etc.)" (Piaget, 1941, pág. 141).

El niño de la primera etapa (4-5 años) considera que al señalarse un rango determinado, éste se aisla del conjunto perdiendo así su carácter cardinal dentro de la colección, constituyendo sólo el rango (ordinal) que lo caracteriza.

Los sujetos de la segunda etapa (6-7 años) presentan un primer enlace entre el rango y la cardinación, sin embargo, como su seriación es intuitiva, la cardinación permanece externa a dicha seriación. Esto provoca que, al buscar un rango dado dentro de la serie, se presente una confusión del término anterior con el rango buscado. Esto permite afirmar que el rango no conlleva un valor cardinal, lo cual da como resultado que no se comprenda que cada rango es por sí mismo un número, que es indisociable de la colección de la que el elemento así ordenado forma parte.

Durante la tercera etapa (6-7 años), por el contrario, el sujeto no considera que la cardinación(6) esté atada a los elementos, sino que aplica dicha cardinación a todos ellos considerándolos como unidades equivalentes -haciendo abstracción de sus cualidades- al mismo tiempo que diferentes por su posición de orden, con lo cual dichos elementos se consideran simultáneamente términos de clase y de relación. Es así que tales mecanismos (cardinación y ordinación) se fusionan, se hacen correlativos, y a partir de aquí, el término 'n' de una colección significa tanto el eneavo rango, como una suma cardinal de 'n'.

Para estudiar este mismo problema en el plano de la numeración verbal se llevaron a cabo tres experiencias, una que consiste en hacer seriar bastones que representan los escalones de una escalera (Figura 1.6), hacer intercalar otros bastones en su lugar correspondiente y hacer evaluar el número de los escalones ya recorridos señalando uno de ellos después de haber desordenado la serie. La segunda experiencia consiste en hacer seriar cartones cortados de tal manera que el segundo sea igual a dos veces el primero, el tercero a tres veces el primero, etcétera, mezclar después los cartones y preguntar cuántas unidades pueden recortarse con uno de ellos (Figura 1.7). La tercera prueba se diseñó para analizar los aspectos cardinal y ordinal en la numeración ordinaria, disociando dichos aspectos mediante su desajuste. El ensayo consiste en hacer seriar barreras de diferentes alturas separadas por alfombras de manera que se tenga n + 1 alfombras para n barreras y, una vez que se ha desordenado el material, preguntar a cuántas alfombras corresponde tal barrera atravesada por un gimnasta, o a qué barrera corresponde un número dado de alfombras (Figura 1.8).

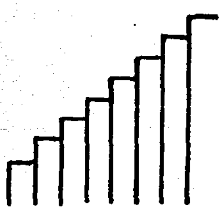


FIGURA 1.6

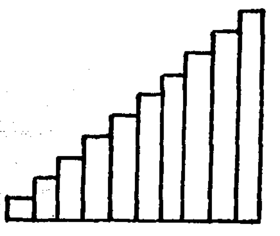


FIGURA 1.7

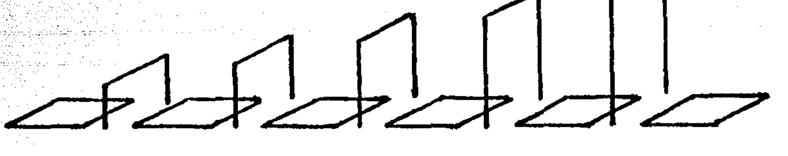


FIGURA 1.8

En cada una de estas pruebas se encontraron nuevamente tres etapas que, a grandes rasgos, presentan las siguientes características: durante la primera etapa (4-5 años) no hay seriación completa, sólo se realizan pequeñas series yuxtapuestas sin orden de conjunto o seriaciones en que los elementos se conforman a manera de dar una configuración global adecuada (intuitiva) sin que se comparen o analicen sus relaciones; asimismo, para la conformación de la serie no se sigue una dirección estable. Én cuanto a la prueba de las alfombras se considera que el número de alfombras es igual al de las barreras -por correspondencia término a término-. Debido a que en todos estos casos la seriación es intuitiva (perceptual) el rango sólo es una posición en un conjunto, sin que implique tener un valor cardinal.

Estos resultados demuestran que durante esta etapa no hay relación entre la ordinación y la cardinación o . tal relación no se da más allá del tercero o cuarto rango -no se comprende la evaluación de un elemento por su rango, sino que dicha evaluación es arbitraria-. Esta situación se presenta porque el niño no es capaz de considerar los elementos al mismo tiempo que la totalidad, ya sea dispersa o en su conjunto, esto es, no hay posibilidad de "ver" simultáneamente el conjunto y sus partes desde diferentes puntos de vista.

La segunda etapa (5 años) se identifica por un modo vacilante y sin sistema de relaciones para construir las series que finalmente constituyen totalidades rígidas. La relación entre la ordinación y el valor cardinal se comprende mientras se respeta el orden progresivo, pero no si tal orden es inverso, salteado o si se mezclan los elementos del conjunto. En esta etapa no hay coordinación simultánea del conjunto ni agrupación de relaciones, esto es, no hay conexión aditiva o multiplicativa de relaciones (por ejemplo, no hay transitividad); esto sucede porque se actúa por intuición, por comparación perceptiva para formar la serie. Con respecto al problema de las alfombras, la ley se comprende a través de tanteos empíricos, mientras que la ejecución se resuelve correctamente con ciertas dificultades y confusión del rango de las barreras con el número de alfombras. El número cardinal se comprende cuando se colocan los elementos, pero no cuando se pretende anticipar la cantidad que se necesitará para cierto número de barreras. En cuanto al número ordinal el sujeto intenta colocar la última barrera de la serie entre las dos alfombras colocadas al final, aunque no se utilice el conjunto total. Esto demuestra la incapacidad para coordinar seriación y cardinación.

Puede decirse que en esta etapa, para realizar la seriación inicial, es suficiente con la percepción, pues sólo hay que controlar que el elemento que se va a colocar sea menor que los restantes o mayor que los ya colocados (o viceversa), mientras que para intercalar cada uno de los nuevos elementos, deben coordinarse esas dos relaciones (mayor que y menor que) y aplicarse simultáneamente. Esta situación origina que la serie esté constituida por una especie de conexión rígida, en la cual cada elemento mantiene una significación ordinal y cardinal mientras se sigan dichos elementos en una sucesión continua, que al ser desarticulada conlleva a la desaparición de dichos valores cardinales. Es por eso que dicha figura "rígida" es difícil de intervenir con solamente el manejo perceptivo. Paralelamente, cuando la colección está seriada, es suficiente con una lectura perceptiva para que el sujeto responda a las preguntas que se le hacen, mientras que cuando está desbaratada la serie, son necesarias las operaciones propiamente dichas. En esta situación se hace evidente la imposibilidad que tiene el sujeto para manejar simultáneamente el todo y una parte del conjunto cuando no hay coordinación operatoria de relaciones (ordinación y cardinación numéricas); esto es, no se maneja el todo de A a Z al mismo tiempo que su parte de A a N(7).

La tercera etapa (6 años) está caracterizada por la seriación correcta en que cada elemento es simultáneamente mayor y menor que los adyacentes, y esto cuenta tanto para los elementos base como para los intercalados. La serie ya no es rígida, ahora es móvil y operatoria: cada término puede ser considerado en sí mismo y en sus relaciones con los otros y en cualquier orden(8). El sujeto comprende que para determinar el rango de n hay que evaluar de A a N, y que ese rango equivale al número de elementos recorridos. En relación a las alfombras, la ley es comprendida desde el principio o después de la primera constatación. La ordinación se apoya en la cardinación y viceversa.

Como producto de estas experiencias se puede afirmar que para que el rango de un elemento llegue a ser un valor cardinal determinado, es necesario que exista la conservación del conjunto constituido por éste y el resto de los elementos. De esta manera el todo puede descomponerse en partes de cuya suma resultará nuevamente el todo.

Se observó que en las etapas uno y dos las constataciones son estáticas ya que si hay alguna alteración perceptual se pierde la conservación; estas constataciones pasarán a ser operaciones reversibles durante la tercera etapa. Podría decirse que para que una relación se vuelva operatoria (por ejemplo la seriación) es necesario que la cualidad percibida en los elementos de un todo durante la primera etapa (grandes, pequeños, etc.) se transforme en relación entre elementos durante la segunda etapa (más grandes, más pequeños, etc.) y posteriormente -en la tercera etapa- se convierta en coordinación de relaciones (a la vez más grande que X y más pequeño que Y). De esta forma se concluye que las relaciones que intervienen en una situación se vuelven reversibles y se componen entre sí cuando son susceptibles de invertirse. Por ejemplo, la seriación se vuelve operatoria cuando se coordinan las dos relaciones inversas "B mayor que C" con "B menor que A", lo cual implica la posibilidad de desarrollar la serie en los dos sentidos.

Si regresamos a las definiciones de clase como reunión en un todo de una cantidad de elementos considerados como equivalentes, y de relación asimétrica -o serie- como reunión de elementos considerados como no equivalentes -seriar es distinguir cada elemento en tanto no es equivalente a los otros-, podemos llegar a algunas aseveraciones: la clase es una reunión de elementos cualificados pero no enumerados, mientras que la relación asimétrica, al ser relación entre cualidades, es necesariamente cuantitativa, y en la medida en que distingue los individuos en vez de fusionarlos, prepara el camino al número.

Lo anterior se da a nivel cualitativo, mientras que en el nivel operatorio el número se da en el momento en que los elementos de un todo se consideran equivalentes y no equivalentes simultáneamente. De acuerdo a la inclusión de clase se presentan las igualdades A + A' = B; B + B' = C; C + C' = D, etc., que dan como resultado la igualdad A + A' + B' + C' = D; entonces, los elementos de esta clase, por su situación de equivalencia, son considerados iguales: A = A' = B'..., etc. Sin embargo, en la serie de los números enteros -síntesis de la inclusión de clases y la seriación de las relaciones de orden- tal síntesis se resuelve en propiedades nuevas, de las cuales la más importante es la sustitución de la tautología A + A = A (en donde cada elemento es una clase) por la interacción A + A = 2A, 2A + A = 3A, etc. De esta forma se define la iteración de la unidad en el sistema de los números enteros.

Esto nos dirige a la afirmación de que el número, la clase y la relación asimétrica se desarrollan paralelamente apoyándose unas en el desarrollo de las otras, y en el momento en que se concluye el desarrollo de una se concluye también el desarrollo de las otras.

De aquí se desprenden las siguientes definiciones: un número cardinal es una clase cuyos elementos se conciben como "unidades" equivalentes entre sí y, simultáneamente, distintas, y esas diferencias consisten solamente en que se pueden seriar y, en consecuencia, ordenar. Por otra parte, el número ordinal es una serie cuyos términos, al sucederse según las relaciones de orden que les asignan sus rangos, son también unidades equivalentes entre sí y susceptibles, por lo mismo, de reunirse cardinalmente. A partir de estas definiciones llegamos al final de este capítulo retornando al principio del mismo: el número es la síntesis de la ordinación y la cardinación.

Pasemos ahora a la revisión del marco teórico del desarrollo de la noción de medición.

(1) Es conveniente aclarar en este momento que, según Piaget (1976) el concepto de identidad es mucho más precoz que el de conservación y que, al igual que éste, tal concepto cambia con la edad.
(2) Las cantidades intensivas, o lógicas están caracterizadas por las simples relaciones entre las partes de un todo, mientras que las cantidades extensivas se caracterizan por la comparación de las partes entre ellas y su relación con la totalidad (Piaget & Inhelder, 1941).
(3) La correspondencia operatoria es aquella en que la conservación se da independientemente de la percepción y, por lo tanto, permite movilidad en su composición, con lo cual se hace reversible.
(4) La correspondencia cualitativa de orden intuitivo se funda sólo en las cualidades perceptuales de los elementos que se corresponden y en los rasgos principales de los conjuntos, y no se conserva fuera del campo perceptual.
(5) En la correspondencia cuantitativa o numérica se abstraen las cualidades de las partes y se les considera como otras tantas unidades sin importar su disposición.
(6) Se habla de cardinación en el momento en que una unidad de una colección se diferencia de las otras porque la segunda unidad, añadida a la primera, forma con ella una colección mayor que la primera sola, y la tercera, añadida a las dos primeras, da lugar a una colección mayor que la anterior, etc. Esto viene a ser el plano operatorio de la inclusión de clase, de la clasificación.
(7) Recordemos que esto es lo que anteriormente se había señalado como cantidades intensivas: es decir, hay una relación de las partes entre sí, pero no del todo con las partes.
(8) Cantidades extensivas: relación de las partes entre sí y con el todo.

CAPITULO 2. EL DESARROLLO DE LA NOCION DE MEDICION.

Así como en el primer capítulo se revisaron los trabajos por medio de los cuales se llegó a la conclusión de que la noción de número está conformada por la síntesis de los sistemas de clasificación y seriación -cardinación y ordinación-, en este segundo capítulo se reseñarán los trabajos que han guiado a la afirmación de que la medición es la síntesis de la subdivisión y la coordinación de los cambios de posición (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1948).

Si se analiza qué es lo que se hace cuando se lleva a cabo un proceso de medición, puede afirmarse que para medir se toma una parte del todo que va a medirse, esta parte es considerada como unidad y traspuesta a lo largo del todo.

Sin embargo, para que la medición se presente en una forma operatoria, es necesario pasar por un proceso en el cual se conformen los elementos de subdivisión y cambio de posición.

El estudio de cómo los niños llegan a medir, es particularmente interesante porque las operaciones implicadas en la medición son tan concretas que tienen sus raíces en la actividad perceptual (cálculos visuales de medidas, etc.) y al mismo tiempo tan complejas que no se elaboran totalmente hasta aproximadamente entre los 8 y 11 años (ibid.).

Si se considera que la medición (bien entendida) demanda que los diversos puntos de referencia estén unidos en un todo sistemático, el cual implica "ejes coordenados", se entiende la necesidad de estudiar cómo los niños llegan a establecer los cambios de posición en términos de un sistema de referencias comprehensivo o sistema coordinado.

Al estudiar estos procesos, Piaget, Inhelder & Szeminska (1948) señalaron que cuando se le pide a un niño que reconstruya o represente los cambios de posición que se llevan a cabo en el seguimiento de una cierta ruta (dentro de un área que le es familiar), se observa que los niños más pequeños describen los cambios de posición solamente en función de los puntos de llegada, mientras que los mayores comparan los trayectos por los que se efectuó el movimiento.

Se encontró que tal diferencia se debe a que, para llevar a cabo los cambios de posición en una forma operatoria, es necesario que dichos cambios sean representados o reconstruidos internamente en una secuencia de acción, y tal reconstrucción es posterior a la habilidad para llevarla a cabo correctamente. Por lo tanto, puede decirse que la representación de cualquier secuencia de movimientos lleva implícito un sistema de referencia.

Al estudiar este proceso pudieron distinguirse varias etapas de desarrollo:

Se encontró que en la primera etapa (4-6 años) la coordinación de los puntos de una ruta se da en términos de las propias acciones del sujeto y los puntos de referencia son sus puntos de interés; si pretende representar una cierta ruta sin estar cerca de ella, lo único que logra es yuxtaponer incoherentemente algunos de los puntos por los que está formada.

Durante esta primera etapa los cambios de posición consisten en cambios del lugar de llegada, no hay un sistema ordenado de puntos e intervalos en donde estén inmersos los trayectos; aparentemente el espacio no es una totalidad, sino sólo algo en donde se encuentran los puntos de partida y de llegada sin estar unidos entre sí.

Durante la segunda etapa (6-7 años) los niños pueden orientarse en una forma práctica, esto es, en acción, lo cual significa que pueden anticipar relaciones espaciales entre dos puntos cuando transitan por ellos, pero no cuando pretenden representar o reconstruir tales puntos y relaciones en un dibujo o maqueta como un todo ordenado. Estos sujetos ocasionalmente tienen éxito al acomodar dos objetos en aislamiento, pero fallan al tener que sintetizar dos relaciones, esto es, tres o más elementos.

Dentro de la tercera etapa (7-9 años) pueden identificarse dos niveles: el nivel IIIA que está definido por coordinaciones objetivas limitadas del espacio, esto es, el sujeto establece subsistemas de referencia correctos pero no unidos entre sí como una totalidad y, si se le pide rotar el plano, sólo gira algunos subsistemas de puntos pero no todos. El esquema topológico aún no está ordenado como un total unificado: las señales son fijadas ,en subgrupos basados en diferentes puntos de vista independientes.

El otro nivel de esta tercera etapa (8-9 años) es el IIIB durante el cual las señales son coordinadas totalmente y los cambios de posición son representados como un grupo comprehensivo. Los cambios de posición son descritos en términos de un sistema de referencia utilizando un solo grupo total; ahora cada punto del total puede alcanzarse por varias rutas. Los cambios de posición son reversibles.

Los sujetos de este nivel miden los intervalos entre objetos de referencia y las distancias implicadas en los cambios de posición, a pesar de que no hacen referencia explícita a un sistema métrico particular.

Así pues se encontró que no puede haber medición hasta que no haya una verdadera representación del cambio de posición, y que el espacio en el que toma lugar esté estructurado por un sistema de referencia o sistema coordinado. Esto se debe a que, en esencia, la medición es una forma de movimiento que consiste en colocar una regla de medición contra lo que está siendo medido, y transferirlo tantas veces hasta que la parte elegida como unidad de medida abarque el total.

Con el propósito de saber cuáles operaciones están en juego en la construcción psicológica de la medición, se planteó estudiar la medición en un estado formativo, esto es, un estudio de medición espontánea.

En tal trabajo se pedía al sujeto que construyera una torre con figuras geométricas del mismo tamaño que otra ya formada. El sujeto debía construir su torre en un lugar alejado de la original y con una pantalla intermedia entre ellas que impedía una comparación directa de las mismas.

En este estudio se encontraron tres etapas:

La primera etapa (4-4:6 años) se caracteriza porque sólo se llevan a cabo comparaciones perceptuales entre el modelo y la copia, no hay medida común y sólo se mueve la línea de visión, esto es, se ve el modelo mientras se construye la copia. La comparación perceptual, en este caso visual, se lleva a cabo mediante un movimiento o traslado virtual de un objeto hacia el otro para "ponerlos juntos"; este "poner juntos" virtual se denomina "transfer" (visual).

Puede hablarse de que un sujeto está en la etapa I si: a) pone toda la confianza en su cálculo perceptual, y b) si no está de acuerdo en utilizar otro método o no ve la necesidad de hacerlo.

Durante la etapa II (4;6-7 años), para llevar a cabo la medición se mueven o cambian de posición ciertos objetos; en algunas ocasiones se mueve unq de los objetos implicados o a veces un tercer objeto (que anticipa la unidad de medición) sin que esta inclusión llegue a ser operatoria pues no hay transitividad. Dichos cambios de posición van a permitir la unión de los puntos de referencia con lo cual comienza a construirse un sistema coordinado dentro del cual se enmarcarán los movimientos implícitos en la medición.

Durante esta etapa se identifican dos subetapas: IIA en la que el transfer ya no es visual sino manual, con lo cual se logra una comparación más cercana, y subetapa IIB en que el tercer término elegido es el cuerpo mismo del sujeto con el cual se imita el tamaño del objeto (transfer corporal).

El descubrimiento de que el cuerpo puede utilizarse como término común, es lo que permite la transición del transfer manual a una medida común. El transfer corporal empieza como una extensión del transfer manual y visual.

Esta es la primera aparición de una medida común y, con ella, de un principio de transitividad intuitiva. El término medio que se utiliza es de tamaño similar a los que se están comparando y el progreso se alcanza por ensayo y error.

Al final del nivel IIB comienza el uso de términos medios independientes después del uso del transfer corporal. Esta etapa es transicional por dos razones: 1a.- la medida común tiene una función simbólica que da origen a conductas imitativas carentes de transitividad operacional; 2a.- la medición tiene éxito sólo cuando el término medio, al ser un objeto simbólico, tiene la misma altura que la torre que se construyó. El sujeto descubre la necesidad de usar una medida común independiente cuando le es difícil transferir medidas por medio de extender sus brazos y dedos.

El término común aparece al final del nivel IIB pero con carácter intuitivo o imitativo, mostrando así su continuidad con la imitación del transfer corporal.

Los sujetos en este nivel no pueden hacer abstracción de la altura de un término común, y sienten que un objeto sólo puede ser usado si su apariencia general es similar a la de los objetos que está comparando.

"Dados dos objetos A y C, el niño usa un término medio B que es una imagen de A y C. B es un sustituto simbólico que le ayuda a imaginar C contra A o A contra C. No está generalizado a tal punto de admitirse la deducción: si A = B y B = C entonces A = C. Así, el término medio retiene su carácter perceptual e intuitivo y es deficiente de transitividad operacional." (ibíd, p. 54).

El uso del cambio de posición en esta etapa presenta ciertas dificultades: 1) los sujetos no siempre saben que "deben" mover el término medio de A a C (o viceversa), además de que, cuando el término medio tiene diferente tamaño de los que serán medidos, no se mantiene un punto de referencia estable durante la transferencia; 2) cuando el término medio es menor, lo mueven hacia arriba y abajo como si su longitud fuera una función de los puntos de partida y final de ese movimiento y, por lo mismo, no intentan contar el número de veces que B está incluido en A o C (no sólo hace falta la noción de unidad de medida, sino también la de cambios de posición y el sistema de puntos de referencia), y 3) el término medio a veces es considerado de diferentes tamaños dependiendo de la disposición de sus partes (la distancia AB es diferente de la BA), lo cual da como resultado confusiones que guían a la no admisión de la conservación de la longitud.

Sin un sistema de referencia es imposible organizar relaciones entre intervalos. Las relaciones de cambios de posición no pueden ser organizadas mientras la distancia y la longitud no sean vistas como intervalos entre una sucesión de puntos arreglados en una secuencia ordenada, mientras sean consideradas en términos de sus puntos extremos (por lo cual hay congruencia de los juicios cuando las longitudes son iguales).

En esta etapa los puntos inicial y terminal de los objetos no están relacionados, sin embargo, empiezan a surgir las nociones intuitivas de horizontalidad y paralelismo, nociones que, junto con otras más exactas de verticalidad, pendiente, angularidad, etc., conforman el marco de un sistema coordenado. Estos son los inicios de la estructuración euclideana que explican la aparición de los cambios de posición durante la comparación.

El paso de la etapa II a la III está dado por el uso de un objeto simbólico que imita una medida y es trasladado entre los objetos modelo y copia para compararlos. Este objeto, sin embargo, no puede considerarse como una medida común debido a sus usos restringidos: si el objeto es mayor o menor que los otros, es descartado pues no se le ocurre al sujeto marcar en él la longitud que quiere en algo mayor, y menos aún se le ocurre iterar con un objeto más pequeño.

En términos generales, puede hablarse de que la medición es un problema perceptual debido a que, en las primeras etapas, se lleva a cabo principalmente por comparaciones perceptuales; después, colocando juntos varios objetos para cotejar el cálculo hecho, y finalmente, mediante el concepto de una regla de medición que permita efectuar medidas comunes. Sin embargo, la medición perceptual generalmente es inexacta y está sujeta a ilusiones o errores sistemáticos.

El transfer visual ayuda a establecer relaciones dentro de los totales perceptuales, como cuando los sujetos del nivel II establecen un "puente" entre las partes superiores de las torres, sin tomar en cuenta las bases, tratando de alcanzar la mayor precisión posible para el transfer. Al percatarse de que esta forma de proceder no es adecuada cuando los objetos están en diferentes niveles, el sujeto deja de tener una fe ciega en el transfer visual y surge entonces el transfer manual.

Esto explica por qué los sujetos de esta etapa prefieren "transferir" detalles para elaborar sus copias más que transferir dimensiones totales: esto es porque se dan cuenta de que si pretenden "transferir" con su cuerpo (transfer corporal) las dimensiones totales, es muy probable que estas varíen en el recorrido del modelo a la copia.

La etapa III (7-8 años) aparece cuando se da el principio de transitividad lógica: A = B, B = C, por lo tanto, A = C. El transfer, después de ser perceptual y luego una imagen (pues se imita, por ejemplo, el tamaño del objeto), se vuelve operacional cuando es lógicamente transitivo. Este transfer representa un aspecto de la medición que es el cambio de posición y que guía al reconocimiento de la conservación de la longitud. El otro aspecto, la subdivisión, también es alcanzado durante esta etapa.

Dentro de este nivel de desarrollo pueden distinguirse dos subniveles, el IIIA y el IIIB que, en términos generales, se caracterizan por lo siguiente: en el IIIA el término medio debe ser mayor o igual que el modelo para poder marcar en él distancias menores, si es menor que el modelo, el sujeto yuxtapone unidades de medida más cortas, y la transitividad es operacional en virtud del manejo preciso de las relaciones cualitativas de igualdad. Durante el IIIB el término medio puede ser mayor o menor y ser iterado, con lo cual se le asigna el valor de unidad.

En la etapa IIIA no hay manejo del concepto de unidad y, por lo tanto, no puede medirse con algo menor que lo que se mide. En esta etapa, ni la organización ni la coordinación son suficientemente flexibles como para que se lleve a cabo la subdivisión en un número de partes iguales y así trasladar la unidad de medida sabiendo que sus posiciones pueden ser sumadas.

Para que se dé la transitividad debe haber una coordinación entre los objetos a medir y el término medio con el que se medirán, de manera que los cambios de posición del término medio sean agrupados. Aunque los sujetos de este nivel no pueden usar un término medio menor, sí pueden "combinarlo" para alcanzar el mismo tamaño que los términos a medir: este proceso es reversible y asociativo (A + B + C = B + C + A, etc.).

Los sujetos de esta etapa ,son capaces de llevar a cabo una comparación o medición de las longitudes de dos objetos (A y B) mediante dos elementos esenciales: 1) un transfer visual, y 2) una descomposición del objeto mayor B (cuando los objetos son diferentes) en dos partes: la primera que será igual al objeto A y la segunda que es la parte restante A'. Es así que durante esta etapa hay subdivisión cualitativa o intensiva de la forma A + A' = B; B + B' = C, etc.

Esto último también se ve demostrado por la habilidad para transformar una regla corta en una longitud requerida usando longitudes adicionales, y por la destreza para considerar una longitud total como independiente del arreglo de sus partes.

La diferencia entre la medición cualitativa (nivel IIIA: un objeto es aplicado enteramente a otro) y un verdadero sistema métrico (nivel IIIB: una subdivisión es aplicada a las otras) es la misma que existe entre las operaciones intensivas y las extensivas.

El inicio de la iteración de una unidad se da cuando los sujetos tratan de usar objetos demasiado pequeños como términos medios. Ahora bien, para que un sujeto alcance la iteración métrica debe poder coordinar los cambios de posición utilizando puntos de referencia precisos, es hasta ese momento que dispone de los dos componentes esenciales: los cambios de posición agrupados y demarcados adecuadamente para permitir un transfer de congruencia, y la subdivisión cualitativa o intensiva de la forma A + A' = B; B + B' = C, etc. De esta manera, el sujeto sólo tiene que aplicar una de esas subdivisiones a todas las otras, llegando así a una solución del tipo "si A = A' = B', etc., entonces A + A' = 2A (=B); B + B' = 3A (=C), etc.", es entonces que la medición es alcanzada cuando las subdivisiones son igualadas por la aplicación de una de tales subdivisiones (un segmento) contra cada una de las otras.

La fusión operacional de la subdivisión y el cambio de posición demanda tanto la representación adecuada de un grupo de cambios de posición, como el uso de un sistema preciso de puntos de referencia para distinguir subdivisiones sucesivas. Los puntos de referencia actúan como coordenadas para los cambios en la posición de la unidad de medida, mientras que estos proporcionan una medida matemática de la longitud.

En cada etapa hay una coordinación progresiva de los sistemas de referencia (externo, constituido por los objetos a ser medidos y su entorno inmediato, e interno, constituido por los puntos de referencia del término medio en sí mismo) y de los cambios de posición. La coordinación completa del sistema de referencia guía a la subdivisión y el final de ese proceso evolutivo es su fusión con el cambio de posición.

A través del estudio de la medición espontánea, pudo observarse que la conservación de la longitud es el prerrequisito fundamental de toda medición, sin embargo, surge la duda de si la conservación antecede a la medición o es el resultado de ésta. Con el fin de clarificar dicha interrogante se planteó un estudio sobre la conservación de la distancia y la longitud.

Primero que nada se planteó la necesidad de estudiar cómo juzgan los niños las distancias y cómo alcanzan su conservación. Comúnmente no existe diferencia entre longitud y distancia, pero psicológicamente, estos términos hacen referencia a dos situaciones diferentes que llegan a ser interdependientes sólo como resultado de un desarrollo gradual. Se usa el término "longitud" para referirse a un espacio lleno, para denotar la medida lineal de objetos como palos o caminos a lo largo de los cuales se camina. Se usa el término "distancia" para referirse a la separación lineal de objetos, esto es, espacios vacíos. Psicológicamente, los problemas de distancia son diferentes de los de longitud, aunque lógicamente sean interdependientes: la distancia es la longitud de un intervalo y la longitud es la distancia abarcada por un objeto. La duda es cómo o a partir de qué llegan los niños a reconocer tal interdependencia.

Al analizar el concepto de distancia como intervalo o espacio vacío, se estudian problemas no sólo de medición sino también de cómo los niños reconstruyen el espacio como un todo. Si el concepto de distancia está presente, el espacio se ve como un medio común que contiene objetos y relaciones espaciales entre objetos. Tales relaciones evolucionan a un punto en que se alcanzan sistemas coordinados y los sistemas métricos llegan a ser posibles. Si no está presente tal concepto, el espacio como un medio común para varios objetos será incoordinado; en esta situación la medición no podrá ser entendida.

Para analizar dichas nociones, se planteó el problema de la conservación de la distancia entre dos puntos y su carácter simétrico (AB = BA) cuando son intercalados diversos objetos entre ellos. Los sujetos que son capaces de ubicar diferentes puntos dentro de un medio espacial común no tendrán dificultad en resolver tales problemas, mientras que no podrán hacerlo aquellos sujetos que ubican los diferentes términos en sistemas de referencia diferentes y cuyo entendimiento está limitado a relaciones topológicas de vecindad y orden.

Desde un punto de vista topológico primitivo la relación entre dos objetos es alterada cuando un tercer objeto es introducido entre ellos porque a los niños les falta la noción de un espacio vacío con propiedades geométricas invariantes. Tampoco es evidente la identidad AB = BA en cualquier nivel de desarrollo. Los niños cuyo pensamiento es intuitivo e irreversible no ven nada en común entre el orden AB y el BA. Esta disparidad es exagerada si los objetos se colocan en diferentes planos horizontales.

La noción de distancia presupone que el espacio es isotrópico (tiene las mismas propiedades en cualquier dirección), y el espacio perceptual está lejos de ser isotrópico.

Al presentar a un niño el problema de decidir si la distancia entre dos objetos A y B se altera si se coloca entre ellos un tercer objeto S y, posteriormente, al cambiar el nivel de A o B y preguntar nuevamente si se altera o no la distancia entre ellos, se presentan tres etapas:

La primera etapa (4-5 años) se caracteriza por la ausencia de la noción de distancia total. En esta etapa, si un objeto S es intercalado dentro de una distancia AB, tal inclusión provoca que la distancia original ya no se considere como un solo total, de manera que el objeto S termina con cualquier relación de distancia entre A y B pues ésta ya no puede reconstruirse como un todo. La noción de distancia se expresa en términos de proximidad ("lejos" o "cerca") y es un espacio vacío. Cada distancia entre dos puntos u objetos conforma un total que no puede ser relacionado con otra distancia.

En cuanto a la propiedad de simetría de una distancia (AB = BA), el sujeto de esta etapa piensa en las distancias como en un orden dado y es incapaz de comparar tal orden con su inverso. Con respecto a los puntos en diferentes planos horizontales no hay relación entre ellos pues la distancia en dirección ascendente parece mayor que la misma en dirección descendente.

Durante la etapa II (5-7 años) aún no hay conservación de la distancia total aunque ya pueden establecerse relaciones de distancias asimétricas con objetos interpuestos.

Para el sujeto, las distancias original y final son diferentes: la segunda es menor que la primera pues se le redujo el espacio que ahora ocupa el objeto intercalado, además, los diferentes planos horizontales en que son colocados A y

B producen la creencia de que la distancia entre ellos es asimétrica.

El establecimiento de una relación de distancia total entre A y B combinando AS y SB no es necesariamente indicativo de una operación. Es suficiente con una unión intuitiva pues A, S y B se ven juntos, además de que SB está en prolongación directa de AS. Aunque los sujetos de esta etapa reconocen una relación total entre A y B a pesar de su subdivisión en AS y SB, están bastante seguros de que la introducción de la pantalla A altera la distancia entre los puntos finales A y B.

En esta etapa la distancia es un intervalo entre objetos en un orden dado, pero como un intervalo es solamente espacio vacío, la introducción de otro objeto reduce ese intervalo porque ocupa un espacio igual a su propia anchura. Se considera que la distancia son espacios vacíos y no los espacios ocupados por las dimensiones de los objetos; es una dimensión de intervalos y no de objetos que ocupan espacios.

"Un objeto situado entre otros puede ser descrito como 'largo' o 'corto', 'amplio' o 'angosto', etc., las cuales son relaciones de longitud. Al mismo tiempo podría estar 'lejos' o 'cerca' de otro objeto, las cuales son relaciones de distancia. Pero estas últimas se aplican sólo a espacios vacíos y no califican objetos que ocupan espacios. Es así que en este nivel no hay composición entre distancia y longitud" (ibid. p. 79).

La razón de tales juicios es que la longitud, que es una propiedad de los objetos, y la distancia, que es una propiedad de los espacios vacíos, son ideas heterogéneas para los niños de este nivel porque les falta la noción de un espacio común que incluya a ambos. Les falta un sistema coordinado en el que puedan "incluirse" tanto objetos que ocupan un lugar como espacio no ocupado. El primer paso para la construcción de tal sistema sería el reconocer que los objetos pueden ser colocados en varias posiciones, cada una de las cuales debe ocupar un "lugar" que permanece constante a pesar de estar lleno o vacío, y por lo cual es comparable a "un cuarto vacío". Sin embargo, es solamente mediante el agrupamiento de las relaciones de orden y de cambio de posición que los niños descubren que los objetos que son movidos dejan detrás de ellos "sitios" estacionarios. Este descubrimiento los guía a concebir el espacio como un contenedor o sistema de referencia independientemente de su contenido.

Durante esta segunda etapa pueden distinguirse dos subetapas: IIA en que una distancia total se ve reducida por los objetos introducidos en ella; la longitud de los objetos se juzga en términos del orden o posición de sus límites, y las distancias, en términos de intervalos intuitivos entre objetos. Los intervalos AB y BA siguen siendo considerados como diferentes cuando se encuentran al mismo o diferente nivel.

En la subetapa IIB no hay conservación de la distancia si se interponen objetos, pero una diferencia en los niveles no altera la simetría de la relación, o la simetría es negada mientras es reconocida la conservación.

Debido a tales características de esta subetapa pueden identificarse dos tipos de la misma: tipos A y B.

Las características de los sujetos que se encuentran en la subetapa IIB tipo A es que siguen considerando a la distancia y a la longitud como heterogéneas: la primera se refiere a espacios vacíos y la segunda a objetos concretos, asimismo, los intervalos ya son considerados con carácter simétrico (AB = BA), además de que los diferentes planos horizontales en que se encuentran los objetos ya no afectan la distancia entre ellos. Aún no hay conservación de la distancia total pues ésta se ve afectada por los objetos que se introducen en ella.

En la subetapa IIB tipo B los sujetos reconocen la conservación de la distancia AB aún con objetos interpuestos pero no admiten el carácter simétrico de tal distancia. La razón de dicha asimetría es que la evaluación de la distancia está contaminada por consideraciones dinámicas pues el espectador se considera un participante virtual.

La existencia de dos tipos de secuencias (A y B) en la adquisición de los conceptos de conservación de distancia y simetría de los intervalos durante la misma subetapa, demuestra que tales conceptos se desarrollan independientemente en sus inicios, para alcanzar su interdependencia en el nivel operacional. De esta manera, en el nivel intuitivo puede haber progreso en una de las nociones sin corresponder necesariamente a un progreso de la otra.

Puede decirse que la simetría de los intervalos depende de la reversibilidad de las relaciones de orden, mientras que la conservación de la distancia total depende de que tales relaciones sean aplicadas simultáneamente a las distancias y longitudes.

Hasta este momento, el cambio de posición es un cambio de orden o "posicionamiento", y hace referencia sólo a los objetos en sí mismos sin hacer referencia al espacio en el cual se mueven ni a la relación entre el principio y el fin. El establecimiento de una relación entre los puntos de principio y terminación da pie al concepto de intervalos que son recorridos. Con este concepto los niños aprenden a comparar los cambios posicionales en términos de puntos de referencia fijos y ya no sólo como cambios en el orden de objetos movibles. Cada movimiento debe implicar una distinción entre objetos movibles y lugares fijos. Estos últimos no alteran sus relaciones aunque los objetos sean cambiados de lugar. La generalización de las operaciones relacionadas con el orden y el cambio de posición explica cómo las relaciones de intervalo llegan a incluir "lugares" como tales sin que necesariamente sean espacios vacíos (el concepto de "lugar" en sí no está restringido a espacios vacíos).

Antes de que se dé tal generalización operacional, el espacio del niño está virtualmente separado en dos entidades heterogéneas: por un lado hay , objetos o espacios llenos, caracterizados por formas, por nociones intuitivas de longitud, etc., sujetos a cambios de posición unos respecto de otros. Por otro lado, hay espacios vacíos formados por los intervalos entre objetos (esta es la noción intuitiva de la noción operacional de distancia, pero no incluye las representaciones de cambios de posición ni de longitud). En este momento no hay conservación de intervalos porque las distancias son modificadas por la interposición de objetos.

La generalización de las operaciones de orden y cambios de posición coordina estas entidades heterogéneas mediante su comprehensión. Este es el sistema de "lugares" que pueden ser ocupados por objetos o espacios vacíos, los cuales serán fijados por medio de elementos que se consideren estacionarios.

Durante la etapa III (7 años) ya hay conservación de distancia y simetría de intervalos. Para los niños de este nivel los intervalos y las relaciones de orden ya no se refieren a objetos movibles separados por o yuxtapuestos a espacios vacíos, sino que ahora se conciben como "lugares" estacionarios que permanecen sin cambio cuando los objetos son movidos. La distancia permanece invariante porque ahora es concebida como un intervalo rectilíneo entre "lugares" ordenados que forman un medio espacial que comprehende tanto objetos concretos como espacio vacío. En este momento el sujeto es capaz de usar un término como "espacio" para denotar un marco de referencia común a espacios vacíos y objetos sólidos(1). Las relaciones ahora no son sólo entre objetos sino entre "lugares".

A partir de todos estos hallazgos, puede apreciarse que el desarrollo de la noción de distancia es independiente de cualquier conducta de medición. Cuando ese desarrollo está completo, las distancias pueden ser medidas, pero la medición no es posible hasta que el sujeto esté convencido de tres puntos: (1) una distancia AB no se ve alterada por la interposición de objetos adicionales (S_1, S_2, etc.); (2) un orden AB puede ser invertido, dando BA sin perturbar la identidad de la distancia AB=BA, y (3) si S está entre A y B entonces AS < AB. Ahora bien, considerando que las relaciones proyectivas se refieren sólo a propiedades espaciales de formas simples, y que las propiedades euclideanas comprehenden cualquier número de formas dentro de un medio espacial común, puede afirmarse que el entendimiento de los tres puntos citados antecede a la métrica euclideana.

La verdadera noción de distancia es una relación entre objetos que se expresan por los lugares estacionarios que ocupan. Esto implica la organización de un marco de referencia espacial como un medio o contenedor que es independiente de su contenido. La distancia implica relaciones entre objetos independientes situados en el espacio, y este espacio o medio total es el objeto de estudio de la geometría. El espacio proyectivo empieza con la construcción de líneas rectas y perspectivas, las cuales requieren que las relaciones topológicas de orden estén referidas a "puntos de vista" específicos, los cuales anticipan la coordinación comprehensiva de todos los puntos de vista dentro de un total permanente. De la misma forma, la distancia requiere que las relaciones topológicas de orden y de intervalo estén referidos a un sistema de lugares fijos, y anticipa la construcción de un sistema coordinado y de nociones de medición. Es así que, como pudo verse, el concepto de invariante y de distancias lineales simétricas es el primer paso en este desarrollo, que implica el reconocimiento del espacio como contenedor, no separado en contenidos o espacio lleno, y ausencia de contenido o espacio vacío.

Para estudiar la construcción de la noción de distancia se planteó analizar primero si la estimación de la longitud de un objeto por el intervalo entre sus límites no es en sí misma la etapa final de un proceso de desarrollo. Para esto se ha visto que la longitud es considerada en un principio en términos solamente de los puntos extremos, e inclusive en términos solamente del punto más distante. Para aclarar este problema se realizó un estudio en que se pidió a los sujetos que compararan dos palos, uno en línea recta y el otro en forma ondulada. Las líneas eran de diferentes longitudes, pero empezaban y terminaban en una alineación exacta. Las preguntas hacían referencia solamente a si los palos tenían o no lo mismo de largo. Si era necesario (porque el sujeto indicara que los objetos eran iguales) se cambiaba la pregunta a manera de enfatizar lo que sucedería si se recorrieran los dos caminos. Finalmente, se "estiraría" el objeto ondulado y, después de que el sujeto admitiera la diferencia de longitudes, se le retornaría a su forma original y se repetiría la primera pregunta.

A partir de este estudio se encontró que el cálculo de la longitud de un objeto se alcanza mediante el paso por tres etapas de desarrollo que, a grandes rasgos, se caracterizan de la siguiente manera: durante una primera etapa (4-5 años) la longitud de una línea es estimada solamente en términos de sus puntos de llegada, sin referencia a su rectilinearidad, a su punto de inicio, e incluso a la demostración de haber sido extendida y regresada a su forma original. Así-mismo, se encontró que hay diferencia entre la longitud de una línea y la distancia en línea recta entre sus puntos extremos aunque no hay composición entre las mismas. La distancia (que es asimétrica) denota sólo espacios vacíos y, por lo tanto, no es la medida de los objetos. La distancia se usa sólo en términos de "cerca" y "lejos", y tiende a ser un cálculo del punto más lejano del sujeto.

Durante la segunda etapa (5-7 años) la forma curvilínea es mayor después de la sugerencia de movimiento, pero la inspección estática de las formas produce juicios de igualdad aún después de pensar en términos de movimiento. Esto conduce a que, sólo en algunas ocasiones, las dos longitudes sean juzgadas correctamente ya que persisten las intuiciones de orden puesto que los juicios iniciales son emitidos en términos de los puntos finales. El sujeto de esta etapa establece la diferencia entre la longitud y el orden de posición de los puntos finales de las dos líneas.

Durante la tercera etapa (6-7 años) se alcanza la composición cualitativa y se emiten los juicios adecuados a la situación que se presenta.

Es así que, estudiando la construcción de la noción de distancia, se ha encontrado que la longitud de los intervalos entre objetos está determinada por un sistema de "localidades" que forman un medio independiente definido por elementos que se consideran estacionarios.

La conservación de la longitud se asegura, durante un cambio de posición, solamente si el lugar de un objeto mantiene un tamaño constante cuando queda vacío, y el tamaño de un lugar vacío no se ve alterado cuando es ocupado por un objeto. El efecto total es que a cada nuevo espacio vacío corresponde un nuevo espacio ocupado y viceversa, lo cual implica la conservación de la distancia entre objetos y la de la longitud de los objetos cuando son cambiados de lugar.

Con el propósito de demostrar este proceso, se realizó un estudio de la forma en que los niños razonan acerca de dos palos rectos de idéntica longitud (acomodados paralelamente de manera que sus extremos coincidan) cuando uno de ellos es cambiado de posición con respecto al otro. Se muestra cómo, cuando aún no se ha formado la noción de distancia, los niños dicen que los palos son iguales, y que al ser empujado hacia adelante uno de ellos, éste crecerá y será más largo que el otro. Por otro lado, cuando ya se alcanzó el nivel en que la distancia es concebida como estable y simétrica, se reconoce la conservación de la longitud a pesar de que el objeto haya sufrido un cambio de posición.

En este estudio se encontraron tres etapas de desarrollo a pesar de que los palos siempre fueron juzgados iguales antes del cambio de posición.

Durante la etapa I (4-5 años) se afirma que el palo recorrido es mayor que el otro, ya que se piensa solamente en términos de los puntos extremos más lejanos. Al utilizarse este criterio topológico, las longitudes están sujetas a expansiones y contracciones sin conservación de las mismas. Estos juicios se deben a que los niños pequeños no toman en cuenta, simultáneamente, todos los puntos terminales, lo cual significa que dichos juicios no están relacionados con los intervalos de longitud entre esos puntos terminales.

Estos sujetos invocan al movimiento constantemente, y ese cambio de posición es el concepto clave del espacio euclideano; sin embargo, en ésta y la siguiente etapas, el cambio de posición guía a la no conservación de la longitud, ya que los movimientos a los que se hace referencia no son cambios de posición euclideanos, esto es, tales cambios se dan sin un sistema de referencia (al haber un movimiento, éste afecta sólo a una parte del objeto).

En este nivel el cambio de posición es concebido como un cambio de orden, por lo cual se juzga que la longitud relativa de los objetos que sufren tal cambio, varía con el orden de sus extremos delanteros.

Los sujetos concentran su atención solamente en un lado del objeto en movimiento en lugar de seguir el movimiento como tal (lo cual provoca juicios de mayor que a favor de cualquiera de los dos palos, dependiendo de qué extremo se observe), además de ignorar la situación inicial de igualdad de los dos palos.

Algunos sujetos juzgan diferentes las longitudes por el simple hecho de sufrir un movimiento. Esto muestra que la no conservación de la longitud es atribuible a la ausencia de un sistema de referencia independiente que proporcione un marco espacial para el movimiento de objetos. Los niños que no pueden establecer relaciones apareadas entre los extremos de un objeto en movimiento, tampoco serán capaces de unir objetos a elementos de referencia; consideran como similares tanto "sitios" estacionarios como objetos en movimiento. Sin ese medio estable (indispensable para la intercomposición de distancias y longitudes) los juicios de las longitudes solamente pueden ser expresadas en términos de las posiciones relativas de sus puntos extremos. Estas son las relaciones estáticas de orden en las que un palo es juzgado como más largo que otro porque se proyecta más allá.

Durante la segunda etapa (5-7 años) se identifican diversas reacciones que dirigen a juicios intuitivos en los que es posible observar un inicio de conservación. Se dan ciertas regulaciones perceptuales que conducen a juicios de igualdad. Asimismo, se presenta cierta regulación intuitiva que tiene que ver más con la descentración de la atención que con la de la percepción. Estas regulaciones marcan el inicio de la relación de los extremos, con lo cual la conservación en estos momentos es intuitiva pues depende de las comparaciones y los cambios aparentes.

Por otra parte, también pueden observarse ciertos retornos intuitivos o empíricos al punto inicial que, sin implicar aún reversibilidad operatoria, sirven para verificar la conservación.

Igualmente puede observarse, que, después de dudar de la conservación, algunos sujetos son persuadidos por las intuiciones contradictorias que se compensan mutuamente. En este momento se disocia la realidad de la apariencia perceptual o intuitiva. Aún no hay conservación operatoria ni un sistema de "lugares" fijos sino que solamente se trata con transformaciones de objetos. Esta limitación antecede la conservación operacional de la longitud, a pesar de que admite la conservación intuitiva de las relaciones de igualdad (la cual anticipa la operación).

La tercera etapa (6-7 años) se caracteriza por el logro de la conservación operacional; ésta se alcanza pues ya hay composición de los "lugares" estacionarios así como de objetos en movimiento, con lo cual la conservación llega a ser lógicamente necesaria.

Aparentemente, la solución de los problemas de conservación se alcanza cuando se reconoce la identidad del todo con sí mismo en todos sus momentos (lo cual se logra durante esta etapa); empero, no es tal identidad el fundamento de los razonamientos correctos puesto que en algunas ocasiones la longitud de un objeto se ve alterada. Se cuestiona entonces por qué hay conservación de longitud como tal.

Cuando hay conservación de longitud, el sujeto ve el cambio de posición como un cambio de orden posicional. Un cambio de posición puede significar una de dos cosas: 1) puede referirse a las relaciones espaciales (entre objetos) que han sido cambiadas, en cuyo caso pueden significar expansión o contracción de uno o ambos objetos, ó 2) pueden referirse a un sistema de "lugares" que existen independientemente de los cambios posicionales porque están fijos en relación a los elementos invariantes (ejes u objetos considerados estacionarios). Este último significado es esencial a la conservación de la longitud. De esta manera se compensan los espacios "desocupados" y "ocupados" por los extremos de los objetos desplazados, por medio de lo cual la longitud total del objeto permanece constante.

En estas etapas intermedias puede no haber conservación de longitud (espacios llenos) sino sólo de distancia (espacios vacíos), a menos que haya un sistema de referencia que proporcione un medio común para todos los objetos (en movimiento o estacionarios), y esto implica que debe haber composición entre objetos y sus partes, y entre espacios vacíos.

El resultado es que las nociones de longitud y distancia llegan a ser comparables porque las dos están basadas en la apreciación del orden y el intervalo entre lugares. Tales "lugares", vacíos o llenos, forman el marco esencial de todas las métricas. La conservación de la longitud, en sí misma, es similar a la de la distancia en que dirige a la medición y a un sistema coordinado comprehensivo, aunque aparece más temprano.

Posteriormente a estos estudios y con la intención de estudiar la transición de la conservación cualitativa a la medición de la longitud, se llevó a cabo un estudio en que se pedía al sujeto comparar las longitudes de dos columnas de cerillos alineados paralelamente a modo de ser obvia su igualdad. Después era alterada la disposición de los elementos para cuestionar nuevamente la igualdad de las longitudes. Esta técnica también se implementó con tiras de papel y se proporcionaban, además, pedazos de cartón con los cuales podía verificarse el juicio emitido.

En este estudio se encontraron tres etapas de respuesta:

Etapa I (4-5 años). No conservación. La conservación se pierde cuando se modifica la configuración perceptual. No se reconoce ningún tipo de conservación a pesar de la igual cantidad de elementos.

Etapa II (5-6 años). Respuestas intermedias. El sujeto es influido por el número de elementos y entonces hay un principio de conservación que se pierde si el cambio de forma es excesivo o si uno de los elementos es partido en dos o más trozos.

Dentro de esta etapa pueden diferenciarse dos niveles de respuestas: el primero en que el sujeto oscila entre la no conservación y la conservación sin resolver el dilema, y el segundo en que se alcanza la conservación mediante un proceso de ensayo y error, además de que el sujeto puede regresar al punto de partida mediante una acción abierta o mentalmente, y encontrar que las transformaciones y relaciones cambiadas se compensan mutuamente.

Etapa III (6-7 años). Conservación operacional. Se da la conservación a pesar de cualquier alteración en las disposiciones espaciales de los elementos a comparar, ya sea en su totalidad, o sólo en algunos de sus segmentos.

En párrafos anteriores se describió cómo es que durante la medición intervienen dos sistemas de referencia: el primero es una estructuración del campo espacial como un todo, incluyendo los objetos que son medidos y lo que es usado como medida (este todo a veces guía al uso de ejes coordenados que actúan como un sistema de referencia general). El segundo sistema de referencia es alcanzado a través del uso de puntos de referencia precisos tanto sobre los objetos medidos como sobre la medida. El sujeto confronta un objeto o una parte del mismo contra lo que desea medir, y relaciona estos puntos de referencia internos con el sistema de referencia externo. En estos casos, aunque se enfatiza el papel que juega el sistema de referencia externo, es la subdivisión la que asume la principal importancia.

A partir de esto, y de los datos obtenidos en este estudio, se observa que la conservación de la longitud es reconocida cuando el cambio de posición no implica una distorsión interna o causa una forma que se proyecte en forma diferente de la otra. Cuando hay distorsión interna de la forma hay una serie de factores que dirigen a la no conservación de la longitud. Algunos de tales factores son específicos de los niños pequeños, mientras que otros se presentan a cualquier edad, sin embargo, los niños mayores los sobrellevan con el uso de la razón, mientras que no es así con los menores.

Dichos factores son los siguientes:

1.- El punto de llegada. Los pequeños consideran que un camino es mayor que otro si su punto de llegada se proyecta más allá que el del otro. Los niños mayores, por su parte, compensan los puntos de llegada con los de salida y con la sinuosidad del camino.

2.- Los rodeos o desviaciones, los cuales tienen un efecto opuesto al primer factor, es decir, el camino es más largo porque "hay vueltas".

La efectividad inicial de este segundo factor se ve afectada seriamente por otros dos factores: a) Funciona sólo cuando se piensa en términos de cambios de posición motores o dinámicos, o en términos de velocidad o del tiempo que se lleva en recorrer las inclinaciones, pero no se ve como propiedad geométrica del camino (en la longitud como tal). b) Si se pide al niño que piense en términos de imaginación estática y no de movimiento, se resiste a la idea de que una línea pueda ser mayor a causa de los ángulos y curvas, a menos que tales rodeos sean exagerados.

3.- El factor de segmentos rectilíneos privilegiados apoya al primero: una línea recta es juzgada más larga que otra igual si aquella contiene un elemento mayor que los de la otra línea. No hay compensación en las longitudes de los segmentos.

4.- El número de elementos o segmentos puede influir el cálculo. Este factor generalmente no afecta el juicio de los niños que no tienen el concepto de número.

En el nivel operacional, las partes (segmentos) de los objetos guardan las relaciones de intervalo de simetría y formación de series anidadas. Por lo tanto, puede considerarse que el problema de conservación de la longitud es de integración de las nociones de intervalo (partes de objetos) con las que relacionan el orden y el cambio de posición.

Una serie de objetos en formación lineal puede ser vista como una serie de partes anidadas o como un grupo de intervalos ordenados entre dos puntos. Entender la conservación de la longitud es entender que la suma de las longitudes de los elementos que la conforman permanece constante cualquiera que sea su orden inicial y los cambios que sufra tal orden.

Si la longitud de un elemento varía con los cambios de posición que se dan después de su alineación inicial, es claro que no hay conservación de la longitud. Sin embargo, el problema de la no conservación de la longitud total puede permanecer a pesar de que haya conservación de longitudes parciales; esto es porque a veces las nociones de orden e intervalo están limitadas a espacios llenos y no están generalizadas y aplicadas a "lugares".

La dificultad de los pequeños estriba en la falta de coordinación de la subdivisión (relaciones de intervalo) y las relaciones de orden (orden de posición): a veces ignoran las igualdades de las subdivisiones y piensan sólo en términos del orden de los puntos terminales; otras veces el juicio se emite no por la correspondencia o falta de correspondencia entre los elementos componentes de las series (relaciones de orden), sino a causa de la forma de los arreglos (relaciones entre intervalos).

Los factores 1 y 2 distorsionan la subdivisión por consideraciones del orden y el cambio de posición.

Los factores 3 y 4 ignoran el orden debido a una subdivisión errónea (las unidades resultantes de tal subdivisión no son constantes), lo cual provoca que el sujeto falsifique las relaciones de orden y cambio de posición en las series como un todo, al mismo tiempo que rechaza consideraciones de movimiento.

En todos los casos la subdivisión y orden y cambio de posición no se sintetizan y permanecen relativamente indiferenciados. Esta falta de coordinación entre sus dos aspectos fundamentales es la que lleva a la no conservación de una serie lineal cualitativa.

Esto encamina a dos conclusiones importantes: 1) la conservación cualitativa se dará como y cuando haya coordinación entre la subdivisión y el orden de posición, y 2) la medición de la longitud será posible cuando haya una interpenetración operacional completa entre la subdivisión y el cambio de posición.

Como puede suponerse, el problema de la conservación es muy complicado cuando se refiere a longitudes totales de series que pueden ser cortadas y subdivididas en una variedad de formas, porque tiende a haber una interferencia mutua entre las nociones de subdivisión y reunión de partes y las de orden y cambio de posición. Cuando tal cosa sucede, esto significa que las dos clases de conducta intuitiva no están diferenciadas ni coordinadas. La conservación de longitud total depende de tal diferenciación y coordinación, la cual sólo puede ser alcanzada en el nivel operacional: al ser diferenciadas se vuelven independientes y al ser coordinadas el sujeto puede apoyarse en una para soportar las conclusiones sugeridas por la otra.

La diferenciación y coordinación son imposibles hasta que las operaciones implicadas sean relacionadas con "lugares". Así, las subdivisiones y relaciones de orden y el cambio de posición se ubican en un sistema permanente de lugares fijos independientes de los objetos movibles.

El principio de la etapa III está marcado por la aparición simultánea de la conservación de longitudes totales y parciales. Los dos tipos de conservación implican un sistema de referencia. En la medida que este sistema sea elaborado, la subdivisión y sumación de partes da origen a invariantes independientes de su orden inicial y los cambios en ese orden.

Esto puede explicarse de la siguiente manera: mientras el niño no base sus juicios en un sistema de referencias externo a los objetos juzgados, sus cálculos de intervalo y longitud son necesariamente una función del orden de puntos finales. Los puntos finales pueden ser los extremos de los segmentos individuales o de las series totales que son juzgadas. Consecuentemente la subdivisión (o anidación de intervalos o longitudes parciales) es indiferenciada de las intuiciones de orden que son dadas por las relaciones entre extremos y varían con cada rearreglo de los objetos. El resultado es la no conservación de la longitud. Pero cuando encuentra que puede basar sus juicios en un sistema externo de referencias, relaciona los intervalos anidados así como las posiciones y cambios de posición en un marco comprehensivo espacial que no está limitado por las configuraciones variantes de los objetos. Ahora el argumento se da en términos de lugares que funcionan como puntos de referencia fijos. Por lo tanto, es capaz de diferenciar la subdivisión y las relaciones de orden (incluyendo el cambio de posición), y la conservación operacional de la longitud es asegurada.

Las dos operaciones (subdivisión y ordenamiento) están aún en un nivel cualitativo, y su coordinación mutua que sigue automáticamente sobre su diferenciación significa simplemente que son complementarias. La consideración de la subdivisión sugiere la del orden de posición y viceversa, pero cuando una está activa la otra está en reposo; ellas no funcionan simultáneamente como un agrupamiento complejo. La medición, sin embargo, implica la fusión completa de la subdivisión y el cambio de posición, por lo cual hay un ligero rezago entre el nivel de la conservación cualitativa de la longitud y el logro de la métrica.

Con el propósito de analizar más profundamente el problema de las relaciones entre la síntesis de la subdivisión y el cambio de posición, se llevó a cabo un estudio sobre medición de longitudes enfatizando el papel de la conservación de la longitud.

En dicho estudio se pedía al sujeto comparar la longitud de tiras de papel en varios arreglos lineales. Después de emitir su juicio se le proporcionaban tiras movibles para verificar su juicio midiendo. Posteriormente se le mostraba cómo iterar (a partir del punto de origen) con pequeños trozos de papel y de tamaños correspondientes a los segmentos de los arreglos. De esta manera se le proporcionaba la idea de medición en términos de los "pasos" dados para recorrer un camino y se le pedía que terminara de iterar como se le había mostrado.

El objetivo de esta experiencia era saber cuándo el niño es capaz de entender y asimilar las diferentes técnicas de medición que se le ofrecen ya elaboradas; esto depende de sus intuiciones de longitud y de la presencia o ausencia de conservación.

Nuevamente, en este estudio se encontraron tres etapas de desarrollo. Durante la primera etapa (4-5 años) hay una amplia variedad de respuestas. La construcción de una unidad de medida es imposible así como la transitividad operacional cualitativa en el uso de un término común. Los juicios se basan en simples inspecciones sin uso de la unidad de medida. Consideran iguales a segmentos diferentes, esto es, un segmento es igual a otro segmento (pues es uno) a pesar de sus diferentes longitudes.

Las respuestas de esta etapa pueden agruparse en dos tipos: 1) hay cambio de posición de la unidad de medida sin la subdivisión adecuada, esto es, los segmentos son medidos igualmente a pesar de sus diferentes tamaños, los puntos de referencia no se utilizan correctamente pues son recorridos o desplazados, y 2) el objeto a ser medido es subdividido pero la unidad de medida no es aplicada correctamente, esto es, dicha unidad puede alterarse (alargarse o contraerse) sin afectar la medición (las unidades externas son consideradas como iguales a pesar de sus diferentes tamaños).

En este primer nivel los sujetos no entienden que el papel de una unidad de medida es el de una medida común, de manera que los cambios de su posición permitan una comparación exacta entre formas diferentes.

El que haya una deducción de transitividad ((a + a' = A) = (m + m' = M) y (b + b' = B) = (m + m' = M), entonces A = M y B = M, por lo tanto, A = B)) no implica una métrica ni una operación extensiva; es simplemente una generalización de transitividad cualitativa (intuitiva) combinada con composición operacional que asegura así la conservación. Asimismo, la concepción de unidad es aún remota pues los niños cuentan subdivisiones sin tomar en cuenta si son o no iguales, lo cual es condición esencial de la unidad.

Durante la segunda etapa (6-7 años) (respuestas intermedias) la conservación es percibida vagamente, empieza a entenderse la transitividad de una medida común, y después, el papel de una unidad de medición. Este nivel de entendimiento es alcanzado mediante un proceso de ensayo y error que adolece de composición operacional.

Las respuestas intermedias de esta etapa son marcadas primero por el desarrollo de la coordinación, y después, por los principios de una síntesis de la subdivisión y las relaciones de orden y cambio de posición. Los segmentos ya no son considerados como unidades per se, ahora puede fraccionar un trayecto en segmentos sucesivos y puede mover la "unidad de medida" en un orden definido tomando en cuenta puntos de referencia no siempre exactos. El sujeto ya logra establecer cierta transitividad de las relaciones de igualdad o no igualdad, sin embargo, esta transitividad sigue siendo de carácter intuitivo y preoperacional, lo cual se ve claramente cuando el sujeto reporta obtener diferentes mediciones dependiendo de las diferentes formas de medir, o contando como "pasos" iguales sin fijarse si miden lo mismo.

Durante la tercera etapa (7 años) (medición operacional) la conservación de la longitud se alcanza con la coordinación entre la subdivisión y el orden de posición. Esta fusión operacional ahora es posible y toma la forma de una medición sistemática que es alcanzada mediante cierto proceso. En este periodo es clara la diferencia entre las operaciones cualitativas y las realmente métricas.

Los sujetos de esta etapa son capaces de utilizar casi inmediatamente y sin explicación una medida estándar. Casi sin dudar, comparan unidades de longitud y pueden establecer entre ellas ciertas relaciones (por ejemplo, A es un tercio de B, etc.) y, por lo tanto, pueden reducir una longitud a múltiplos de alguna unidad. La subdivisión es por lo tanto generalizada cuando puede ser presentada en términos de una simple unidad movible. Esta generalización implica que llega a ser fusionada con el cambio de posición porque la parte que entra en cada total medible puede solamente funcionar como unidad en aplicaciones sucesivas, por ejemplo a través de los cambios de posición que son determinados por puntos de referencia precisos.

Como puede verse, la medición real por unidades implica la comparación de las partes del todo entre sí (cantidades intensivas) y, secundariamente, de estas partes con las de otro lado. Esta comparación debe implicar cambios en la posición de una parte del todo ("a"), o su equivalente (una unidad de medida externa a ese todo: "m") la cual es transferida (traspuesta) al resto del todo, de manera que los tramos así definidos sean igualados unos con otros o a su propio orden de subdivisiones (por ejemplo el caso de un continuo fraccionado). Esto es lo que se quiere decir con fusión o síntesis de la subdivisión y cambio de posición, porque la unidad de medida es movible e igualada con cada subdivisión, mientras que en la comparación cualitativa la longitud de una parte es comparada sólo con la longitud total del todo. La operación de la verdadera métrica es expresada por la fórmula: $a = a'$, por lo tanto, $A = 2a$, y no sólo por $a < A$ y $a' < A$.

Asimismo, la composición transitiva es imposible cuando no hay conservación de longitud, y el uso de una unidad de medida es imposible porque no hay síntesis operacional de subdivisión y cambio de posición. La no conservación es el resultado de la falta de diferenciación entre la subdivisión y el cambio posicional, y así la falta de coordinación entre ellos. Se muestra de esta manera que la conservación y la transitividad son las condiciones primera y esencial para la síntesis completa de la subdivisión y el cambio de posición como requisitos para las nociones de unidad y métrica. De esta forma la transitividad es descubierta antes que la medición, y la construcción de una unidad de medición es la etapa final en el proceso de desarrollo.

Como se dijo anteriormente, la conservación de la longitud y la distancia es una condición esencial de la medición, y su logro, con respecto a distancias estacionarias o longitud de objetos en movimiento, es dependiente de la coordinación simultánea de cambios posicionales y lugares.

Con el propósito de completar la investigación sobre el desarrollo de las operaciones métricas, se llevó a cabo un experimento (que estudia el desarrollo de la medición como tal) en el que se pedía al niño localizar un segmento particular de una línea recta usando para ello diversas técnicas de medición que están entre la medición espontánea y la sugerencia explícita.

Se le daban al sujeto dos líneas rectas A_1C_1 y A_2C_2 (o A_2D_2 si la segunda era mayor que la primera) que podían o no ser paralelas; se le pedía encontrar un punto B_2 a lo largo de A_2C_2 correspondiente a un punto B_1 de A_1C_1 de tal manera que el segmento A_2B_2 igualara al A_1B_1. La igualación se hacía empezando por el mismo o el otro extremo de la línea del que había iniciado el experimentador, y el sujeto podía ayudarse de una regla de madera (sin graduación), un palo, trozos de papel (sin líneas o cuádros), cordones de varias longitudes y un lápiz.

Se encontraron tres niveles correspondientes a los hallados en los estudios anteriormente descritos:

El primer nivel (4-5 años) (respuestas iniciales: longitud determinada por el punto de llegada) se distingue en que en todas las respuestas los sujetos conciben la longitud de un camino como un intervalo entre los puntos de partida y llegada pero sólo piensan en él en términos del de llegada.

En estas respuestas intervienen tres factores que se hallan en los estudios de los cálculos de la longitud de un trayecto que es recorrido:

(1) Inicialmente los niños juzgan desigualdad de longitudes entre recorridos, simplemente como una función de los puntos de llegada.

Las respuestas del primer nivel muestran 1) la predominancia de las intuiciones de orden previas a la composición de subdivisiones o intervalos y, 2) un interés exclusivo en la coincidencia o flata de coincidencia de los puntos de llegada de manera que la longitud es juzgada sin referencia a los puntos de partida o a los intervalos entre ambos. Los niños continuamente hacen inferencias falsas basadas en estos juicios. No es que se ignoren los intervalos completamente sino que estos no son diferenciados de las relaciones de orden y cambio de posición.

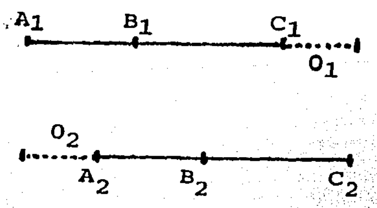
(2) Los niños no piensan en las longitudes como sistemas coherentes de intervalos (o partes) anidados. Para que el sujeto pueda definir un segmento de un tramo total, debe ser capaz de dividir el total en segmentos o intervalos parciales y entender al total como representado por la suma de sus partes, mientras que para encontrar un segmento del total debe entender la operación inversa (sustracción del segmento del total), sistematizando las relaciones de orden y cambio posicional así como la composición de las partes. Las dos clases de composición son diferentes porque las subdivisiones o partes se refieren a los intervalos, mientras que el

orden y el cambio de posición se refieren a los puntos extremos o finales.

Estas composiciones pueden ser coordinadas una con la otra, empero, las respuestas iniciales prueban que los niños pequeños pueden tener intuiciones limitadas de ambas pero no pueden coordinarlas porque no las diferencian.

En este nivel los niños emiten juicios de los intervalos con base en cálculos acerca de distancias y longitudes, las cuales constituyen series de partes anidadas. No siempre estos sujetos calculan las longitudes por sus puntos de llegada: toman en cuenta los puntos de partida especialmente cuando se les insiste en ellos y en los intervalos. Sin embargo, aunque es muy fácil pensar en intervalos, e incluso subdivisiones, cuando los tramos a comparar están alineados perfectamente, esto no les ayuda a tener intuiciones más articuladas cuando las líneas están desfasadas.

Bajo tales condiciones, los sujetos más pequeños se enfrentan a un conflicto con las intuiciones de orden, de las que no pueden distinguir las subdivisiones: cuando las líneas están desfasadas, se requiere de una subdivisión más compleja que la de separar un total en dos partes ($a_1 + a'_1 = b_1$; $b_1 - a'_1 = a_1$). Para igualar un segmento de una línea con un segmento de otra línea ($a_1 = a_2 \dashrightarrow A_1B_1 = A_2B_2$) cuando tales líneas están desfasadas, deben considerarse dos segmentos adicionales que son los intervalos vacíos resultado del desfase (O_1 y O_2) (Figura 2.1).



$A_1B_1 = a'_1$

$B_1C_1 = a'_1$

$a_1 + a'_1 = b_1$

$A_2B_2 = a_2$

$B_2C_2 = a'_2$

$a_2 + a'_2 = b_2$

FIGURA 2.1

Los sujetos de este nivel no pueden igualar un tramo con otro correspondiente (a_1 y a_2) y sus residuos correspondientes (a'_1 y a'_2) pues no aprecian la igualdad de las distancias de los intervalos vacíos O_1 y O_2, esto es, no pueden comparar diferencias que se originan de arreglos desfasados. Para alcanzar esta clase de subdivisión necesitarían ordenar todos los puntos limitantes, incluyendo los puntos de partida y llegada y, dentro de este sistema de orden y cambio de posición, necesitarían tomar en cuenta tanto espacios vacíos como llenos. De igual manera, no podrían alcanzar esa articulación de intuiciones de orden sin haber alcanzado también una subdivisión de intervalos completa. Las dos clases de intuición son, por lo tanto, incompletas porque no están coordinadas entre sí, y no están coordinadas porque no están diferenciadas.

(3) La medición de los dos trayectos (a_1 y a_2) no sólo demanda la mera coordinación de la subdivisión y el cambio de posición, sino también su síntesis o fusión operacional expresada por los cambios de una unidad. Por lo tanto, en este nivel los sujetos ni son capaces, ni encuentran la necesidad de llevar a cabo tal operación.

Durante el segundo nivel (6-7 años) (respuestas intermedias) los sujetos muestran un avance tanto en la sistematización de relaciones de orden y cambios de posición como en la subdivisión. Empiezan a coordinar puntos de partida y llegada y ya no juzgan la igualdad de distancias sólo en función de los primeros. También empiezan a entender la composición de segmentos. Estos desarrollos anticipan los principios de la medición y capacitan al niño para desarrollar una noción operacional de la longitud en un nivel cualitativo. Los niños de este nivel no logran la transitividad, ni siquiera en un nivel intuitivo.

Las respuestas se caracterizan por tres cosas: 1) no sólo se toma en cuenta el punto de llegada sino también el de partida, esto es, hay conciencia del intervalo implícito en el cambio de posición en la medida en que representa un cambio de orden; 2) esta conciencia les permite empezar a subdividir la línea y a relacionar los segmentos con su longitud total; la medición aún está ausente pero en su lugar hay correspondencia uno a uno que anticipa la multiplicación lógica de las relaciones; y 3) su habilidad para concebir los cambios de posición en términos de los puntos de partida y llegada, y empezar a subdividir en relaciones anidadas, también los capacita para imitar la medición cuando se les demuestra o para iniciarla ellos mismos.

En este momento es claro que la síntesis operacional del cambio de posición y la subdivisión es más compleja que su coordinación individual. La medición, implícita en el principio de tal síntesis, aún es dudosa. En este nivel hay capacidad de un razonamiento correcto en un nivel cualitativo; al evaluar cambios de posición se toman en cuenta tanto puntos de llegada como de partida y se entiende que un trayecto total puede ser visto como la suma de sus distancias parciales adyacentes. Sin embargo, este razonamiento no es generalizado pues los sujetos en algunos momentos olvidan un factor al tiempo que tienen presente otro.

Los sujetos de este nivel entienden que los segmentos de un todo son series anidadas, como puede verse cuando en lugar de medir la distancia A_1, miden el tramo restante (A'_1), esto es, entienden que las dos distancias son partes de una serie total anidada. Sin embargo, fallan al trasladar su regla de medida de un segmento de una distancia a otro segmento de una distancia diferente para hacerlos corresponder.

Para entender la medición se pasa por una situación de ensayo y error. En algunos casos hay buena subdivisión pero falla el cambio de posición, mientras que en otros casos se da la situación inversa pues a la subdivisión le falta coherencia. Asimismo se falla al indicar los puntos de referencia que demarcan las aplicaciones sucesivas de su regla.

En el momento en que se reconoce la necesidad de la precisión al demarcar los segmentos, es cuando se alcanza una síntesis de la subdivisión y el cambio de posición y se domina el problema de la medición.

Sin embargo, la medición se origina en una composición operacional muy compleja. Los niños no pueden entender la medición hasta que puedan subdividir una longitud simultáneamente en segmentos anidados y comparar esos segmentos con otros mediante el cambio de posición, ya sea mentalmente o en la práctica. Antes de que estas operaciones se fundan, la subdivisión sólo puede ser cualitativa ya que los cambios de posición no son generalizados, y estos, a su vez, son cualitativos porque no se aplican exactamente a segmentos parciales. Mediante la síntesis operacional dos longitudes pueden ser expresadas en términos una de otra usando unidades y partes fraccionales. La longitud puede ser considerada en términos de una serie de intervalos iguales que pueden aplicarse indefinidamente, y el espacio es considerado como una cantidad homogénea.

Durante el tercer nivel (7-8 años) la composición métrica llega a ser operacional y sistemática. Se distinguen dos fases de desarrollo en este nivel: IIIA en que sólo se alcanza una transitividad cualitativa en el uso de una medida común. Cuando la unidad de medida es igual a la distancia requerida o mayor, el éxito está asegurado, pero cuando es más corta, simplemente la prolonga mediante el uso de longitudes suplementarias. En el nivel IIIB la adquisición del concepto de unidad capacita al sujeto para aplicar un movimiento iterativo a una regla pequeña.

Para medir, los niños de este tercer nivel hacen un cálculo visual sólo si el problema es demasiado fácil, y algunas veces como respuesta anticipatoria; en general, los niños se apoyan poco en su percepción intuitiva y más en su razonamiento. La forma esencial de determinar distancias es la medición.

A diferencia del nivel II en que los sujetos se enfrentan a todas las preguntas de cada problema como si enfrentaran un nuevo problema cada vez, los del nivel III se enfrentan a él aplicando inmediatamente las composiciones operacionales recientemente aprendidas.

En la etapa III los sujetos pueden hacer manejos con las relaciones anidadas, esto es, están constantemente conscientes de las relaciones $A_1 + A'_1 = B_1$; $A_1 = B_1 - A'_1$, etc., y lo prueban al enfrentarse a distancias diferentes iniciando su medición por cualquiera de los dos extremos del trayecto.

También su manejo del cambio de posición es diferente al de otros niveles: aquí los puntos de partida y llegada son coordinados de una sola vez, esto es, sin ensayo y error, además de no confundir la longitud de una distancia dependiendo de por cuál extremo se inicia su medición.

La diferencia entre los niveles IIIA y B es que, en el primero, aún no hay iteración, esto es: para comparar dos distancias A_1B_1 contra A^2B^2 con "reglas" más cortas, el sujeto necesita yuxtaponer tales tramos hasta alcanzar la longitud total de las distancias a comparar, mientras que en el nivel IIIB se utiliza la iteración, esto es, hay una aplicación repetida de una unidad de medida, con lo cual se constituye una verdadera operación métrica.

La diferencia entre los niveles II y III es que en el II pueden sobrelaparse en lugar de yuxtaponerse los tramos, mientras que en el III los cambios de posición de la unidad de medida son determinados por puntos de referencia precisos.

Puede hablarse de que en el nivel IIIA hay coordinación de las operaciones de subdivisión y cambio de posición, mientras que en el IIIB se alcanza su síntesis.

Como puede observarse, para los niños de los niveles I y II no es natural subdividir una longitud en la que las partes no son dadas perceptualmente, ni es natural alterar el orden de posición de una serie de segmentos anidados, esto es, alterar su disposición original con el propósito de aplicar esos segmentos a otros. Cuando el segmento AC es partido en AB y BC (AB + BC = AC), los sujetos de los niveles I y II pueden considerar el total AC pero no el intervalo AB (o BC) como una parte del mismo. Asimismo, otro problema es partir AB en "x" número de segmentos abstractos, dados por posiciones momentáneas sucesivas de una regla o un pedazo de papel, siendo que tales segmentos están indisociablemente unidos con la línea AC a la que pertenecen, de esta manera la medición implica alterar la posición de tales segmentos y aplicarlos en cualquier parte por medio de términos comunes equivalentes. En otras palabras, el sujeto debe pensar en ellos no como porciones concretas de un todo específico sino como partes abstractas comunes a cualquier todo, así como a la medida común. Tal generalización implica la "abstracción" de segmentos de todos y cualesquiera totales de manera que puedan ser comunes a todos los objetos e infinitamente movibles.

Así la medición es apartada cada vez más de las propiedades cualitativas de una parte y del cambio de posición concreto, de manera que una parte puede ser concebida como común a todos los totales porque el cambio de posición en sí mismo está generalizado. Esta doble generalización es efectuada en dos fases: nivel IIIA donde se da la coordinación cualitativa de la subdivisión y el cambio de posición, y el nivel IIIB, en que se da la síntesis o fusión operacional de las dos, la cual produce una nueva clase de operación, la métrica euclideana, que comprehende a ambas.

A través de todo este desarrollo puede concluirse que la verdadera medición de distancia y longitud empieza cuando el sujeto reconoce que cualquier longitud puede ser descompuesta en una serie de intervalos que sabe que son iguales porque uno de ellos puede ser aplicado a cada uno de los otros a su vez. La subdivisión generalizada, por lo tanto, da origen a la medición porque capacita al sujeto a pensar en la unidad como parte formante de cualquier número de totales, por ejemplo, como una parte común elemental. Pero la subdivisión generalizada no puede ser alcanzada sin el cambio de posición generalizado porque la primera implica que la parte-unidad puede ser aplicada hipotéticamente a un número indefinido de totales. Así la noción de unidad elemental que puede ser aplicada indefinidamente en una serie de cambios de posición continuos y contiguos implica la síntesis operacional de la subdivisión y el cambio de posición. La iteración de la unidad alcanza esta generalización fusionando las dos en una simple operación. Los sujetos en el último nivel que aplican la misma unidad de medida (sea ésta un palo, varilla, etc.) varias veces seguidas están duplicando y triplicando la longitud parcial con la cual empezaron. La segunda longitud difiere de la primera en virtud sólo de la diferencia de posición. El agrupamiento aditivo de la subdivisión y el agrupamiento aditivo de cambios de posición son sintetizados cuando las diversas partes son concebidas como iguales sin ser idénticas. Su distinción individual deriva solamente de su orden, pero cada parte sucesiva es considerada equivalente a una unidad.

Una unidad aritmética es un elemento similar en una síntesis de una clase y una relación asimétrica, por ejemplo, el número. Pero a diferencia de la unidad de número, la de longitud no es la etapa primera sino la etapa final en el logro del pensamiento operacional. Esto es porque la noción de una unidad métrica implica una desintegración arbitraria de un total continuo. De esta manera, aunque las operaciones de medición son exactamente paralelas a aquellas implícitas en la construcción del número, la elaboración de la primera es más lenta y la iteración de la unidad es, como si así lo fuera, la copia de su construcción.

(1) Se utiliza el término "objetos sólidos" para distinguirlos de lugares o espacios vacíos, sin que tal término tenga connotación de un estado físico en particular.

CAPITULO 3. LA RELACION DE LAS NOCIONES DE NUMERO Y MEDIDA.

A partir de la revisión bibliográfica presentada en los capítulos 1 y 2 de este trabajo, puede decirse que el desarrollo de las dos nociones en ellos estudiadas presenta una fuerte interrelación, como puede verse al analizar las etapas finales del desarrollo de dichas nociones. Esto es, la noción de número es operacional cuando el sujeto es capaz de juzgar equivalentes los elementos de una colección (por el simple hecho de pertenecer a ella) haciendo caso omiso de sus diferencias, al mismo tiempo que los considera diferentes por el hecho de ocupar distintos lugares dentro de tal conjunto, además de que cada nuevo elemento que se agrega a la serie permite la conformación de una nueva serie que incluye a todos los elementos anteriores.

Por su parte, la noción de medición está operacionalmente completa cuando el sujeto reconoce que cualquier todo puede ser descompuesto en una serie de partes o segmentos, que sabe que son iguales porque cualquiera de ellos puede ser aplicado a cada uno de los otros a su vez. En el momento en que es iterado, este segmento viene a conformarse en unidad, pues las diversas partes que así se definen son concebidas como iguales sin ser idénticas y se distinguen solamente por su posición dentro del conjunto.

A partir de esto, es claro que el punto de unión de las dos nociones es la "unidad" que, en el primer caso, sirve para conformar colecciones y, en el segundo, para medirlas.

Sin embargo, a pesar de que teóricamente hay una gran cercanía entre tales conceptos, pocos han sido los trabajos llevados a cabo, dentro del marco teórico piagetiano, que han analizado conjuntamente las nociones de número y medida. En seguida serán reseñados dos de tales trabajos: el llevado a cabo por Albert Morf (1962) acerca del descubrimiento de una ley numérica simple en una situación de partición espacial, y el realizado por Barbel Inhelder, Hermine Sinclair y Magali Bovet (1974) que analiza el paso de la conservación de conjuntos discretos de elementos a la conservación de la longitud.

Ahora bien, el problema que eligió Morf para su estudio fue el de la partición espacial de una superficie de papel (un rectángulo) en n partes mediante c cortes paralelos, indicando al sujeto sólo el número de partes que debía obtener, esto es, el sujeto debía preveer y efectuar el número adecuado de cortes. La consigna específica era "hacer una bandera de n colores" a partir de un rectángulo dibujado en una hoja de papel. Se esperaba que, en algún momento, el sujeto descubriera que para un número p de partes (o colores) a obtener se requería de $p-1$ cortes paralelos, por lo tanto, c <---> $p-1$ (en donde <---> significa "está en unión recíproca de").

Morf trabajó bajo el supuesto de que el problema, propiamente aritmético, es a la vez espacial y numérico, y que estos dos sistemas evolucionan apoyándose el uno sobre el otro hasta que adquieren cierta autonomía.

El análisis de los datos obtenidos se llevó a cabo en tres partes: 1) la noción de partición en sí, revisando primero la formación de la figura total en tanto que todo susceptible de una subdivisión completa, y después, la génesis de la operación partitiva; 2) la disociación de los aspectos espacial y numérico de la partición lineal, tratando de evidenciar sus formas de coordinación, y 3) el descubrimiento de la ley numérica y el mecanismo de su generalización.

Estos tres momentos del análisis están definidos así pues corresponden a tres etapas importantes de la evolución: primero que nada, el niño debe elaborar la colección en tanto que todo cuantitativo, y sólo después entra en juego la partición. Las operaciones partitivas permitirán más tarde una primera relación entre el arreglo de los elementos (partes y cortes) y su número, esto es, entre los aspectos espacial y numérico y, al final, se lleva a cabo la elaboración y generalización de la ley.

Considerando que este trabajo está dedicado a la relación entre las nociones de número y medida, el énfasis del mismo se hará sobre el análisis de la coordinación de los aspectos espacial y numérico.

Como en los trabajos reseñados en los capítulos precedentes, la **constitución de la figura como "todo" subdivisible,** comprende tres etapas que pueden resumirse así: a) ausencia de un todo propiamente dicho; b) el todo es único y constituido por los colores o partes, mientras hay una elaboración progresiva del conjunto de las barras, y c) puesta en relación de los dos conjuntos y geometrización de la partición.

Por su parte, en cuanto a la **operación partitiva,** la función de las barras se transforma de simples elementos de construcción, en elementos de delimitación y separación y finalmente en agentes de corte o partición para que, ya como conjunto, las barras adquieran las propiedades numéricas que permitirán la construcción deductiva de la figura.

Con respecto al **aspecto espacial** de la partición se tiene que, durante las dos primeras etapas, las barras son incorporadas totalmente a las partes; la pertenencia material o perceptiva de las barras a los cuadros simplifica la situación ya que el sujeto, al trazar una barra, crea una superficie y no sólo un trazo, por lo que la construcción de la bandera se reduce entonces a una yuxtaposición de superficies individuales. Durante el tercer estadio el sujeto se da cuenta de que cada barra agregada significa un cuadro más, aunque no le perturba que colocar la última barra sea en sí una partición. El conferir a la barra un carácter de elemento divisor, le da al mismo tiempo su individualidad con respecto a las partes, con lo que desde el estadio IV las barras conforman un conjunto de elementos independientes. Esto permite una clase de relaciones biunívocas entre barras y cuadros responsable de la fuerte hipótesis de la igualdad de los números p y c.

Durante el estadio V esta igualdad numérica de los dos conjuntos es abandonada debido a que el sistema entra en conflicto con la relación de partición.

En cuanto al **aspecto numérico** se encuentra que lo importante para el sujeto es alcanzar un número dado de partes independientemente de la forma en que éstas sean obtenidas. Debido a que las diferentes formas de elaboración y enumeración de los cortes reflejan ciertas particularidades de la serie de los números tal y como existen en el niño, su estudio se abordó de ésta manera haciendo abstracción de los problemas de la partición propiamente dicha.

Se encontraron cuatro niveles de desarrollo: I. El procedimiento es empírico, la enumeración de los cuadros que van obteniéndose es casi siempre por balances sucesivos, esto es, después del trazo de cada barra el sujeto de este nivel recuenta las partes.

II. Los balances sucesivos desaparecen parcialmente; para *p* pequeñas el procedimiento es empírico pero la enumeración es abreviada. Este nivel presenta adquisiciones importantes: *p-1* es reconocido inmediatamente como el predecesor de *p*; por otra parte, los cuadros pueden ser aumentados iterativamente al agregar +1 sin que sea necesario rehacer el balance antes de cada operación y, por último, los grandes números (mayores que 7 a 10) ya han adquirido una significación cardinal, demostrada al trazar inmediatamente un cierto número de barras antes de proceder a la primera verificación.

III. El procedimiento empírico ha desaparecido, en parte, gracias a la unión rígida (aunque falsa) entre *p* y *c*; la falsa hipótesis de *p* = *c* permite al sujeto contar las barras despreciando los cuadros. Sin embargo, esta igualación no es suficiente para explicar la regularidad de las banderas que caracterizan este nivel: la repartición de las barras en la bandera generalmente es dispareja, esto es, el tamaño de los cuadros es adaptado torpemente a su número, los cálculos son casi siempre defectuosos y dan lugar a ajustes al final de la construcción de la bandera.

IV. La construcción de las figuras es bastante regular. El aspecto numérico de la construcción se confunde a partir de este momento con la evolución de la partición y con el descubrimiento de la ley.

Es importante resaltar en este momento varios hechos sorprendentes en cuanto al aspecto numérico:

- Por un lado, el procedimiento de los sujetos de la segunda etapa que recuentan todo el conjunto realizado después de agregarle cada nuevo cuadro. A pesar de saber recitar la serie verbal de los primeros números, determinar cuál de dos números dados va primero y comparar correctamente dos colecciones de objetos en cuanto a su número de elementos, estos niños no utilizan la serie de los números cuando construyen su bandera para deducir que al agregar un cuadro a 5 ya existentes, se obtendrán 6. Aparentemente, la serie verbal de los números enteros sólo aparece aquí como medidor convencional empleado por el niño como medidor físico (una colección de objetos es juzgada más numerosa que otra si permite llegar más lejos en la enumeración verbal).

- Por otra parte, es importante la ausencia de una visión de conjunto de la serie de los primeros números, esto es, el sujeto de la primera etapa sólo acumula cuadros sin fijarse en distribuir el tamaño de unos y otros e incluso sin saber cuándo el próximo corte será el último que deba trazar. El número *p* de partes a alcanzar aparece como un estado de conjunto que llega en forma imprevisible pero con certeza, y todos los números inferiores a él forman una clase de "todavía no *p*" equivalentes.

- A partir de la etapa III empieza a darse una organización del número de cortes según el número de partes requerido además de que ya se dan números aproximados de cortes seguidos, antes de proceder a iterar +1 hasta alcanzar el número deseado. Igualmente en esta etapa se reconoce ya la relación de sucesor, aunque sólo para $p-1$, nunca para $p-2$, etc.

- Finalmente, desde la etapa IV el niño empieza por evaluar el tamaño de las partes en función del número requerido; la enumeración de las barras se hace al mismo tiempo que su dibujo. En este nivel pueden situarse los principios de la puesta en relación entre la serie verbal y ordinal 1, 2, 3, etc. y la estructura aritmética (((1)+1)+1)+1... que se consolidará durante los estadios posteriores.

En lo tocante al **descubrimiento y generalización de la ley numérica** se encuentra un avance a través de las etapas, esto es, durante las etapas I y II hay una relación de pertenencia estricta entre barras y cuadros ya que constituyen dos aspectos de los elementos únicos que son los colores de la bandera.

En la etapa III se disocian tales elementos y se dan entre ellos dos tipos de relaciones topológicas (de pertenencia o contigüidad y de partición local al terminar la construcción de la figura) y dos de relaciones numéricas (de correspondencia cuantitativa intensiva: mucho de *c* da mucho de *p*, y de igualdad: $+1c$ da $+1p$). En este nivel se establece una primera relación entre el cardinal y el ordinal.

Durante el estadio IV dominan las relaciones topológicas locales de pertenencia y las numéricas de igualdad. Durante esta etapa se puede corregir la igualdad $c=p$, sólo en casos particulares, a partir de dos puntos: 1.- invierte la relación $+1c$ da $+1p$ en $-1c$ da $-1p$, y 2.- la extensión de la relación numérica sobre el conjunto de la figura. Por primera vez se tiene una figura con dos colecciones de elementos independientes.

Es hasta la etapa VI que el sujeto llega a las soluciones correctas mediante la iteración de la modificación local, esto es, siempre y cuando se proceda por adiciones sucesivas de uno en uno.

Finalmente, en la etapa VII se sintetizan los aspectos topológico y numérico: las correcciones locales ya no son interpretadas solamente como adiciones de un corte y una parte, sino también, y al mismo tiempo, como particiones geométricas (una operación partitiva que divide a un elemento en dos complementarios) de manera que ya no es posible distinguir entre las modificaciones espacial y numérica: se aritmetiza la relación topológica local.

La subdivisión de un cuadro llega a ser una operación numérica, lo que permite extenderse sobre el conjunto de la figura a la vez que generalizar la relación numérica local sobre el número entero en cuestión. El número en sí es concebido como construido por una cadena de modificaciones de este tipo. De aquí en adelante los dos tipos de modificaciones (adición constructiva de un corte y corrección del resultado por supresión de un corte) son equivalentes. El número entero es tratado como el resultado de su predecesor por la operación $+1p$, el predecesor siendo resultado de su predecesor, etc.

En el caso específico de la construcción de la bandera, la operación local de partición no se presenta como una división aritmética, sino que tiene un significado de adición, ya que cada partición representa una parte de más, lo cual permite pasar directamente a la organización iterativa del número.

La ley que se alcanza empíricamente y después se generaliza adquiere la siguiente forma: para cada cuadro es necesaria una barra, excepto para el último.

De esta manera, a través de los diferentes niveles de desarrollo, sobresalen dos aspectos importantes de la génesis del número:

a) La enumeración en los primeros niveles tiene una significación de medidor cuasifísico. El procedimiento de los "balances sucesivos" muestra que en la construcción del conjunto, el sujeto trata primero a todos los números sucesivos menores de p como equivalentes, convencido además de que continuando así se llegará a p.

Esta disociación del ordinal y el cardinal se da desde el nivel III cuando aparece un elemento de evaluación cardinal (los primeros cortes colocados en bloque) y la relación de sucesor.

Las etapas superiores muestran que poco a poco la serie de los primeros números naturales se organiza como estructura aditiva y recursiva.

b) La introducción de la partición sólo es posible después de un periodo de preparación durante el cual se elabora el objeto de la numeración, ya que en las primeras etapas sólo se da una alineación de cuadros: no hay partición de un todo, sino construcción del mismo.

Finalmente, como pudo observarse, el descubrimiento de la ley se alcanza gracias a un doble proceso de disociación y coordinación. La disociación de los elementos p y c debe vencer las relaciones de pertenencia primitiva que se prolongan en las relaciones topológicas locales (la igualdad $p=c$). Sin coordinación con la organización espacial, las constataciones numéricas no son necesarias y no es posible la generalización; además, las clases p y c no pueden relacionarse sin ser aritmetizadas.

De esta manera, las características de la situación experimental ideada por Morf pusieron de relieve una compleja conexión entre las relaciones numéricas y espaciales inherentes a la figura. Incluso cuando el objeto de las operaciones aritméticas haya sido constituido, los dos aspectos quedan íntimamente ligados, de manera que todas las operaciones deben hacerse solidariamente sobre los planos topológico y numérico.

Después de haber revisado el trabajo de Albert Morf, pasaremos a revisar el de Inhelder y colaboradoras (1974) sobre conservación de conjuntos discretos de elementos y longitud. En éste trabajo se elaboró un procedimiento de aprendizaje de la conservación de la longitud a partir del análisis teórico relativo a la construcción de la medida y del concepto del número. Se partió de los datos encontrados por Piaget y Szeminska (1940) y Piaget, Inhelder y Szeminska (1948) acerca de dichas nociones.

En este trabajo se estudiaron dos problemas: 1) las relaciones entre estructuras operatorias relativas a las unidades discretas y las relativas al continuo en el caso de conservación de la longitud, y 2) la elaboración de la conservación y de la medida de la longitud como cuantificación unidimensional.

Partiendo de datos ya conocidos sobre el desarrollo de las nociones antes mencionadas como son los problemas que acarrean los rebasamientos a la conservación de la longitud, que dichos problemas se presentan tanto en cantidades continuas como en conservación de la longitud (que son más pronunciados en estos últimos que en los primeros), y que no hay diferencia entre el orden de los puntos de llegada y la longitud de los intervalos, se establecieron dos tipos de experimentos preliminares atenuando dificultades y resaltando ciertas características que se suponía ayudarían a entender y resolver correctamente los problemas que se planteaban: se trabajó con sujetos que tenían éxito en problemas de conservación de número y fracaso en conservación de longitud.

Para los problemas de número se acentuó la diferencia de las disposiciones figurativas aumentando el número de elementos y haciendo preguntas de conservación después de los cambios en la disposición de los elementos. Para los problemas de longitud se usaron segmentos del mismo tamaño dispuestos de manera contigua para formar el continuo unidimensional.

Los resultados mostraron que: los problemas de número son resueltos correctamente y argumentados con compensación, identidad y reversibilidad, mientras que para los problemas de longitud los sujetos se dividen en dos grupos: 1.- se da la conservación por medio de procedimientos de conteo de las unidades, y 2.- responden correctamente a la prueba de número pero no a la de longitud, esto significa que no usan el mismo razonamiento para las dos pruebas.

Este sondeo sugirió:
- el problema de las relaciones de orden persiste a pesar de incluir unidades, esto se da sólo cuando se comparan límites, por lo que no deberían darse si las longitudes estuvieran alejadas;
- con los sujetos que cuentan los elementos y resuelven correctamente el problema de longitud, no puede asegurarse que lo harían con elementos de diferentes longitudes;
- parece haber separación entre los problemas de longitud y los de estimación numérica.

A partir de este sondeo se elaboró un ensayo de un procedimiento de aprendizaje que incluyó problemas de evaluación (comparación), construcción (de un segundo trayecto) y conservación (juicios después de los desplazamientos), en tres situaciones diferentes:

a) alineaciones de segmentos iguales en superposición y separados: se comparan las dos situaciones.

b) alineaciones de segmentos diferentes en superposición y separados: se comparan número y longitud de alineaciones y segmentos.

c) alineaciones de segmentos diferentes: se compara la longitud de unos elementos y el número de los otros.

Las respuestas de los niños a estas situaciones dejan ver una clara separación entre los problemas de estimación numérica y los de longitud.

Los resultados de este ensayo sirvieron para elaborar un procedimiento de aprendizaje final y más completo, en el cual sólo se presentaron problemas de construcción, las situaciones presentadas al niño permanecían a su alcance durante toda la sesión, se introdujeron segmentos de longitudes diferentes que guardaban entre ellos una relación de 5 a 7 ó de 1 a 2.

Se trabajaron tres tipos de problemas. En los primeros (Figura 3.1) se usaron segmentos de tamaños fijos con una relación de 5 a 7 (para experimentador y sujeto respectivamente) en tres disposiciones diferentes: 1a) superpuesta compleja; 1b) separada, y 1c) superpuesta sencilla. En los problemas 2 (Figura 3.2) se usaron segmentos de longitudes diferentes pero el experimentador y el sujeto tenían segmentos iguales; las disposiciones fueron iguales que en los problemas 1. El problema 3 (Figura 3.3) fue sólo uno en que el modelo era una longitud rectilínea continua y el sujeto tenía segmentos de diferentes longitudes; la disposición fue superpuesta compleja.

Se trabajó con niños que como requisito debían resolver correctamente dos o tres problemas de conservación de conjuntos numéricos e incorrectamente problemas de conservación de longitud.

Se trabajó con un grupo control y otro experimental, éste último pasó por un pretest, tres o cuatro sesiones de aprendizaje y dos postests, mientras que el control sólo por el pretest y los dos postests.

Los resultados muestran que los sujetos del grupo experimental presentan muchos y claros progresos y se da el fenómeno de progreso diferido: progreso durante el segundo postest. Asimismo, hay diferencias notables con las conductas de los sujetos del grupo control, en que éste último tiene una mejora muy restringida en comparación con el experimental.

Los problemas 2 y 3 resultaron más fáciles que los 1, por lo que fueron analizados primero. En tal análisis se encontraron diferentes niveles de respuesta:

1. Coincidencia de límites.
2. La coincidencia de límites no se considera correcta, pero si se alarga el trayecto se juzga igualmente equivocada, por lo cual oscila entre las dos soluciones sin llegar a una determinada.
3. Se establece la necesidad de un rebase pero éste es al azar.
4. El rebase es preciso.

Con respecto a los problemas 1 se encontró una jerarquía de soluciones:

1.- En la disposición superpuesta compleja hay coincidencia de límites.

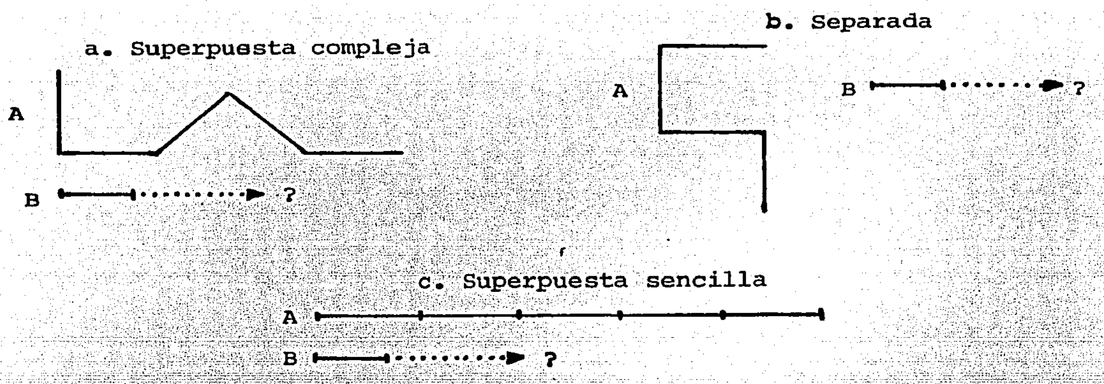


FIGURA 3.1

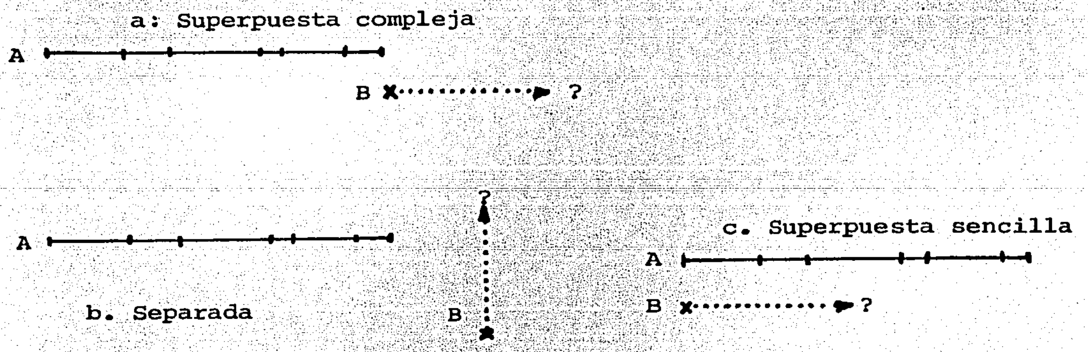


FIGURA 3.2

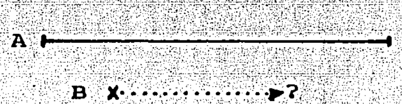


FIGURA 3.3

2.- En la disposición separada se establece una igualdad numérica.

3.- Al regresar a la disposición superpuesta compleja se pretende llegar a la igualdad numérica mediante diversas soluciones de compromiso:

- cortar uno de los segmentos a manera de obtener la igualdad numérica deseada;
- añadir un segmento más pero en disposición de coincidencia de límites;
- añadir una porción de otro segmento para que sea mínimo el rebase de los límites.

4.- Se agrega otro segmento para alcanzar una igualdad numérica; sin embargo, la longitud total es determinada por el número de elementos sin tener en cuenta la diferencia de sus longitudes respectivas.

5.- La disposición superpuesta sencilla se resuelve por coincidencia de límites pero el factor numérico (5 segmentos de una = 7 de la otra) provoca gran extrañeza y confusión en los sujetos.

6.- Los niños identifican y corrigen el error del criterio de igualdad numérica. Hay dos niveles: a) no hay comprensión de las relaciones transitivas, y b) las soluciones corresponden a una compensación cuantitativa exacta.

Los resultados de estos procedimientos de aprendizaje han hecho evidente que los aspectos espacial y numérico no se coordinan espontáneamente, sino que siguen todo un proceso que al final permite su compensación. Antes de tal compensación uno u otro aspecto será el predominante de acuerdo a la demanda específica de la tarea.

Asimismo se encontró que, siendo la longitud una propiedad específica (de los objetos), ésta se conserva sólo si se comprende su carácter cuantificable y el principio de las unidades de longitud, es decir, debe elegirse una unidad que será desplazada sobre el total sin superposiciones ni intervalos vacíos.

Los resultados muestran que no existe filiación directa entre discreto y continuo en el caso de la conservación de la longitud, y que, para situaciones como las presentadas, entran en conflicto esquemas diferentes con grados de evolución diferentes que poco a poco establecerán una coordinación estable que conformará una estructuración nueva y más evolucionada.

Los resultados de estos estudios nos muestran que las nociones de número y medida guardan una cercana relación, la primera, inicia su desarrollo y un poco más tarde la segunda, apoyándose siempre en los alcances de la noción de número. Basado en esta información, el presente trabajo presenta un estudio en el que se ha tratado de hacer más explícita la relación que existe entre las nociones mencionadas, utilizando además diferentes contenidos, como son las tradicionalmente llamadas cantidades continuas y discontinuas.

CAPITULO 4. ESTUDIO EXPERIMENTAL.

Como se mencionó anteriormente, el propósito de este trabajo es presentar los resultados de un estudio exploratorio cuyo objetivo es estudiar la relación que existe entre las nociones de número y medida.

En otros estudios, generalmente, se ha expuesto al sujeto a una serie de tareas cuya solución tradicionalmente ha sido concebida como resultado de poner en juego alguna noción específica. Por ejemplo, para que un niño emita un juicio acerca de cuál de dos palos de formas diferentes es más largo que el otro o si sus longitudes son iguales, es necesario que el sujeto lleve a cabo un proceso de medición, ya sea ésta perceptual u operatoria. Lo mismo sucederá si se le pide un juicio acerca de cuál de dos recipientes de formas diferentes contiene mayor cantidad de agua.

Ahora bien, qué sucedería si durante una sola sesión se pide al niño resolver varias tareas de medición pero con diferentes contenidos (por ejemplo líquidos y palos) y varias tareas sobre el desarrollo de la noción de número también con diferentes contenidos (por ejemplo seriación de palos, cartones y tubos con líquidos).

De acuerdo a la bibliografía reseñada en los capítulos anteriores podría esperarse que, en dicha situación, los niños resolvieran las tareas de acuerdo a un mismo nivel de desarrollo, pero ¿qué tanto la solución de una afectaría la ejecución de las otras?, el resolver unas ¿serviría como ejercicio para resolver las otras?, ¿cómo afectaría el planteamiento de una tarea con un contenido específico de manera diferente a la tradicionalmente utilizada (por ejemplo, si un líquido se vierte en unidades, o un cartón no fraccionado se presenta como un conjunto de unidades)?, y aún más, ¿qué tanto el desarrollo de una noción se ve involucrado en la solución de una tarea que implica otra noción diferente?, y ¿qué opina el niño de la relación (si es que así la percibe) que guardan las tareas entre sí?.

A partir de estas interrogantes se plantearon cinco tareas que suponíamos ayudarían a esclarecer tales cuestiones, para lo cual se vio la necesidad de llevar a cabo un estudio piloto con la intención de probar el material y las consignas de las tareas, así como la funcionalidad de los protocolos diseñados para el registro de la sesión experimental.

ESTUDIO PILOTO.

Sujetos.

El piloteo se llevó a cabo con 9 sujetos de 2o., 4o. y 6o. grados de primaria (3 por grado), de la escuela oficial "Ejército Nacional"; elegidos al azar, algunas veces por el experimentador y otras por sus maestros.

El único requisito que debían cumplir los sujetos era que tuvieran 7, 9 y 11 años cumplidos, para 2o., 4o. y 6o. grado respectivamente.

El sexo de los sujetos estuvo distribuido de la siguiente manera: 2o. grado: 2 niñas 1 niño
4o. grado: 1 niña 2 niños
6o. grado: 2 niñas 1 niño.

Técnica.

Se trabajaron 5 tareas: tres que analizan la noción de número y dos la noción de medición, según la siguiente distribución:

Tarea A: medición de cantidades continuas
Tarea B: medición de cantidades discontinuas
Tarea C: número en cantidades discontinuas

Tarea D: número en cantidades continuas
Tarea E: número en cantidades continuas.

Tarea A.

En tres recipientes, uno ancho y alto (A), el segundo más ancho y más bajo (B) y el tercero más estrecho y más alto (C) vertemos la misma cantidad de agua (de colores azul, verde y roja respectivamente) por medio de M (vaso medida: pequeño, estrecho y bajo), y preguntamos si las tres cantidades son iguales y cómo podemos verificar (Figura 4.1). Asimismo, se le presentan 9 recipientes extras (3 de A, 3 de B y 3 de C) y se le dice que puede utilizarlos si le sirven de algo.

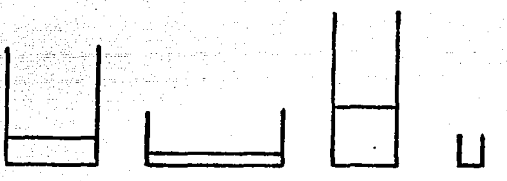


FIGURA 4.1

Tarea B.

Se le presentan al niño 4 palitos azules de 18 cms. cada uno pero de diferentes formas, entre los cuales es imposible juzgar sus relaciones de longitud por medio de la percepción directa (Figura 4.2). Se pregunta si cada palito es igual de largo, más grande o más pequeño que los otros, y se ponen a disposición del niño 5 palitos rojos de diferentes longitudes, dos popotes y dos listones también de distintos tamaños, explicándole que puede realizar todas las manipulaciones que quiera con el material dado para resolver la tarea.

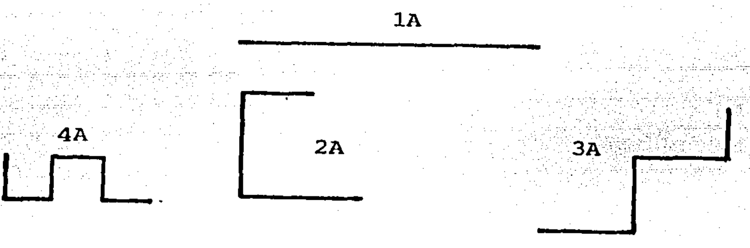


FIGURA 4.2

Tarea C.

Se le da al niño una colección de 8 bastoncitos de madera de diferentes longitudes (7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 y 21 cms.) y le pedimos que forme con ellos una serie (como una escalera) que vaya del más pequeño al más grande. Cuando está construida la serie se le presentan al niño, uno por uno y en cualquier orden, 7 bastones nuevos (de 8, 10, 12, 14, 16, 18 y 20 cms. de longitud) diciendo que los hemos olvidado y que hay que intercalarlos en el lugar (rango) exacto que les corresponda en la serie. Se construye así la serie 1 a 15 (Figura 4.3).

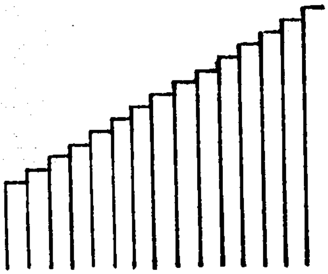


FIGURA 4.3

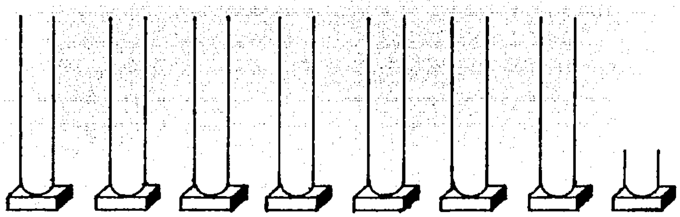


FIGURA 4.4

Se le pide al niño que cuente todos los elementos de la serie y se deja frente a él un número de elementos que corresponda a una cifra que le sea conocida. Dejando esa serie intacta se le señala un bastón cualquiera y se le pregunta cuántos escalones de la escalera ha recorrido un muñequito hasta llegar al escalón señalado.

Se le pregunta cuántos escalones quedan detrás del muñeco (cuántos escalones ya recorrió) y cuántos le faltan para llegar hasta el final de la escalera. Después se mezclan los bastones y, señalándose alguno al azar, se hacen las mismas preguntas de antes, lo cual obligará al sujeto a volver a construir la serie antes de responder.

Tarea D.

Se presentan al niño 7 tubos de ensaye y la parte inferior de otro tubo que servirá como unidad de medida. En cada tubo se vierte agua, en el primero una unidad, en el segundo dos unidades y así sucesivamente hasta completar los 7 tubos (Figura 4.4). El líquido se vierte en presencia del niño, pidiéndole que atienda a lo que se hace pues después se le pedirá que lo reporte.

Teniendo listos los tubos se pide al sujeto que reporte lo que se hizo y después que ordene una serie con ellos colocando primero el tubo que tiene menos agua, después, el que le sigue y así sucesivamente hasta el que tiene más agua.

Se le pide que cuente cuántos tubos son y, en orden, se le va preguntando cuántas unidades de agua contiene cada tubo. Dejando la serie intacta, se señala un tubo cualquiera y se repite ésta última pregunta. Después se desordena la serie y se repite otra vez la pregunta con un tubo al azar.

Tarea E.

Se tiene un cuadrado de cartón (de 5 x 5 cms.) denominado 1; un rectángulo (de 5 x 10 cms.) denominado 2 y que representa dos unidades; otro rectángulo (de 5 x 15 cms.) denominado 3 y que representa tres unidades, y así sucesivamente, hasta un rectángulo 10 que representa diez unidades. Estos cartones forman así una escalera basada en una composición de unidades (Figura 4.5).

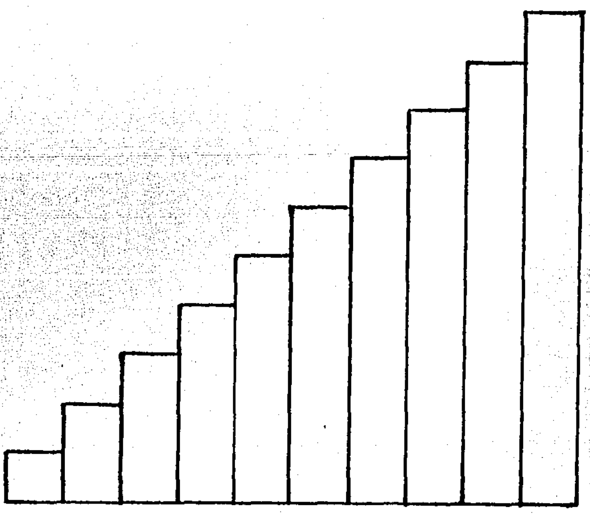


FIGURA 4.5

Se pide al niño que elabore por sí mismo la serie, para que tome conciencia del principio de esta ordinación, y se le hacen contar los cartones deteniéndolo en el número 10, o en el límite hasta el cual el niño numere con seguridad.

Después se le pregunta cuántas unidades como 1 pueden obtenerse del cartón 2, 3, etc., hasta el cartón 10. Posteriormente se señala un cartón cualquiera, dejando entera la escalera, y se pregunta cuántas unidades pueden hacerse con ese cartón. Después se deshace la serie y se hacen las mismas preguntas con un elemento al azar.

Los 9 sujetos del piloteo pasaron por las 5 tareas presentadas en distintos órdenes para, posteriormente, poder elegir la disposición más adecuada para el estudio definitivo.

ESTUDIO EXPLORATORIO.

Después de analizar los resultados del piloteo, se decidió que el orden de aplicación de las tareas sería el siguiente:

Como **primera tarea** se eligió la de número en cantidades continuas (Tarea D: tubos de ensaye) por ser la más fácil y porque se notó que, por la misma razón, era la más apropiada para introducir al niño a la situación experimental sin causarle mucha tensión.

Como **segunda tarea** se situó la de medición en cantidades discontinuas (Tarea B: palos en diferentes formas) por ser la tarea más difícil y larga, con lo cual se trataba de evitar que, por razones de cansancio, el niño no pudiera resolverla si se le presentaba más adelante.

De las tres tareas restantes se decidió dejar **al final de la sesión** la menos cansada para los niños, precisamente porque la sesión duraba, aproximadamente, de 50 minutos hasta una hora y media con cada sujeto. Dicha tarea resultó ser la de número en cantidades continuas (Tarea E: cartones), que fue la de ejecución más rápida.

En **tercer lugar** se ubicó la tarea de número en cantidades discontinuas (Tarea C: bastones en escalera) para evitar que quedara justamente antes de la ya acomodada en quinto lugar. Esto se decidió en base a que los niños habían reportado que ésas eran las tareas más parecidas.

Finalmente, se ubicó como **cuarta tarea** la de medición en cantidades continuas (Tarea A: vasos).

Esto nos da un orden definitivo para la presentación de las tareas:

TAREA 1: Número en cantidades continuas (tubos de ensaye).

TAREA 2: Medición en cantidades discontinuas (palos en diferentes formas).

TAREA 3: Número en cantidades discontinuas (bastones en escalera).
TAREA 4: Medición en cantidades continuas (vasos).
TAREA 5: Número en cantidades continuas (cartones).

A partir de la experiencia piloto se hicieron las correcciones pertinentes en el material, las consignas y los protocolos para registro (Anexo I).

Las principales modificaciones hechas a las consignas consistieron en que, para las cinco tareas, lo primero que se pediría a los sujetos era que describieran el material con el que se iba a trabajar. Esto nos sirvió para manejar el mismo vocabulario con el que cada sujeto se expresaba y así evitar problemas de entendimiento y comunicación con los niños.

Además, algunas de las tareas fueron modificadas para poder obtener información más amplia y explícita de cada sujeto, según se indica a continuación.

TAREA 1. No se modificó.

TAREA 2. Los palos azules que debía comparar el sujeto se dieron por pares, esto es, primero el 1A con el 4A, después el 1A con el 2A, en seguida el 1A con el 3A y finalmente los cuatro juntos, o el 1A contra el 4A y después el 1A contra el 1A, 2A y 3A. Este cambio se debió a que para el niño era muy difícil establecer igualdades o diferencias "conceptuales" entre los diferentes elementos pues, por sus formas, siempre se dirigían a diferencias perceptuales. Esto impedía que el experimentador pudiera establecer claramente a qué se estaba haciendo referencia en cada caso particular dentro de la tarea.

Asimismo, en esta tarea se agregó una parte en que, después de comparar los palos 1A y 4A, se mostraba al sujeto cómo podía iterarse en ellos el 3R. Igualmente, a los sujetos que demostraban una clara idea de una iteración operatoria, si era necesario, se les ayudaba a marcar correctamente los puntos de referencia para que dichas iteraciones no se vieran afectadas por problemas puramente de habilidad o destreza manual. Esto permitió que algunos sujetos trataran de imitar esta iteración en los diferentes casos demostrando así si el problema era una falta de iniciativa para usar las unidades de medida propuestas, o si era que dichas unidades no fungían como tales para el sujeto.

Además, en los casos en que no quedaba claro si el sujeto era o no conservador de longitud, se agregó una experiencia control que hacía referencia a los trayectos que debían recorrer unas hormigas si caminaran por los palos azules; los palos se acomodaban de manera que uno de sus extremos coincidiera y se pedía a los sujetos que dijeran cuál de las 2, 3 ó 4 hormigas (según el caso) caminaría más, caminaría menos o si caminarían igual. Asimismo, si era necesario, se hacía referencia a factores dinámicos (¿llegan al mismo tiempo o llega una antes que la otra?).

TAREA 3: No se modificó.

TAREA 4: Cuando se identificaba que el problema del niño era falta de conservación del líquido, se llevaban a cabo una o dos experiencias control sobre tal noción: 1) se vertía en uno de los vasos extras (por ejemplo en A_1), la misma cantidad de líquido, pero de diferente color (rojo), que en uno de los recipientes base, según el juicio del sujeto. La situación resultante era: azul en A = rojo en A_1. El líquido rojo era vaciado en 3 ó 4 pequeños recipientes E, E_1, E_2 y E_3 (Figura 4.6) y se cuestionaba al sujeto acerca de la igualdad de la cantidad de líquido en A y $E + E_1 + E_2 + E_3$ incluyendo contrargumentos. O 2) se vierte igual cantidad de líquido de color diferente en dos vasos iguales: azul en A = rojo en A_1 según el juicio del sujeto, y el agua de uno de los vasos (A_1) es vaciada en otro diferente (B o C), y se cuestiona al sujeto acerca de la igualdad de la cantidad de líquido en A y B o C incluyendo contrargumentos.

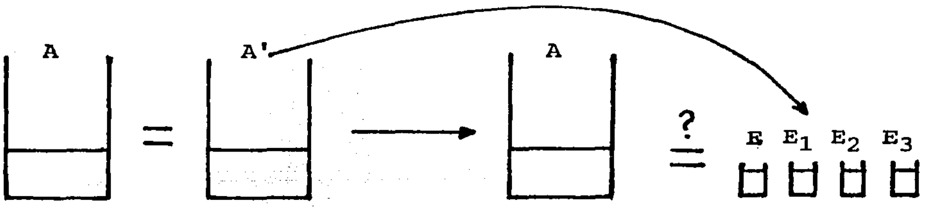


FIGURA 4.6

Por otra parte, cuando el sujeto sí era conservador pero "no se le ocurría" cómo utilizar o para qué le servían los otros vasos, se le pedía que anticipara juicios del nivel que alcanzaría el agua (azul, verde o roja) si se vertiera en un vaso diferente del que ocupaba en ese momento. Con esto se pretendía, al igual que en la Tarea 2, que la falta de información no se debiera a una falta de iniciativa para utilizar el material restante, sino en todo caso, a la demostración de un nivel de desarrollo específico.

También en estos casos se incluyeron una o dos expe-riencias control: 1) en tres recipientes diferentes A, B y C se vertía líquido en cantidades diferentes que alcanzara también niveles diferentes (Figura 4.7); después se pedía al niño que emitiera juicios acerca de la igualdad o diferencia de la cantidad de líquido y que, con los vasos extras, comprobara sus respuestas; y 2) en tres recipientes diferentes

A, B y C se vertía líquido en cantidades diferentes que alcanzara niveles iguales (Figura 4.8), después se pedía al sujeto que emitiera juicios acerca de la igualdad o diferencia de la cantidad de líquido y que, con los vasos extras, comprobara sus respuestas.

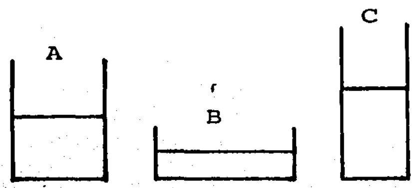


FIGURA 4.7

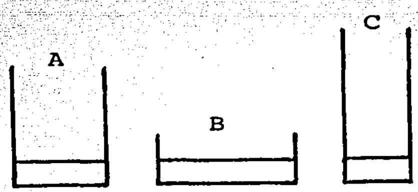


FIGURA 4.8

TAREA 5: No se modificó.

Finalmente, al terminar las cinco tareas ya descritas, se pidió a cada niño que expresara si éstas "se parecían o no" y en qué, cuáles habían sido las más fáciles o difíciles, cuáles le habían gustado más y menos, por qué y en qué, etc.; en fin, una serie de juicios que, suponíamos, dejarían ver con mayor claridad el tipo de relaciones que cada uno de ellos establece para resolver las tareas específicas y qué tipo de apoyo le brinda cada tarea para resolver las demás.

Sujetos.

El estudio definitivo se llevó a cabo con 30 sujetos de primaria: 10 de segundo, 10 de cuarto y 10 de sexto grados, con edades de 7, 9 y 11 años respectivamente; cinco mujeres y cinco hombres para cada grupo de sujetos, los cuales fueron elegidos al azar por su maestro o por el experimentador.

Metodología.

La sesión experimental se llevó a cabo individualmente con cada sujeto, fue grabada en su totalidad y se le indicaba que se tomarían notas y se grabaría todo lo que se hiciera y dijera. Se trabajó con un experimentador y un registrador.

Cada sujeto pasó por las cinco tareas descritas anteriormente en el orden ya definido.

Análisis.

Se llevaron a cabo dos tipos de análisis, uno por grupo y otro intrasujeto, los dos, por tareas.

En el análisis por grupo las respuestas de cada sujeto a cada tarea fueron agrupadas según su nivel de desarrollo.

El primer nivel de desarrollo está definido, principalmente, porque el niño emite sus juicios en base a rasgos perceptuales.

El segundo nivel tiene como característica principal que la respuesta de los sujetos fluctúa entre un razonamiento operatorio y los juicios perceptuales.

En el tercer nivel se ubican los niños cuyo razonamiento es operatorio.

El análisis intrasujeto se basó en la revisión de la ejecución de cada sujeto ante cada tarea, tratando de establecer la relación que existe entre las respuestas de los niños en forma global, esto es, cómo es el comportamiento de cada sujeto en la sesión completa, y qué tanto pueden explicitar las relaciones entre las tareas.

Resultados.

Primero se reportan los resultados del análisis por grupo, según el nivel de desarrollo en que están ubicados (Tablas 1 y 2). Finalmente, se presenta el reporte del análisis intrasujeto.

Sujetos de 7 años de edad (2o. grado).

TAREA 1. Los sujetos de este primer bloque pueden agruparse según sus diferentes niveles de respuesta.

T A B L A   1

TAREA	1				2				3				4				5			
GRUPO DE Ss POR EDAD	7	9	11	T	7	9	11	T	7	9	11	T	7	9	11	T	7	9	11	T
NIVEL I	2	1	-	3	5	3	-	8	-	-	-	-	4	1	-	5	-	-	-	-
NIVEL II	3	1	-	4	4	4	4	12	7	2	-	9	2	2	1	5	2	2	1	5
NIVEL III	5	8	10	23	1	3	6	10	3	8	10	21	4	7	9	20	8	8	9	25

T A B L A   2

nivel / Ss	I	II	III
7 años	11	18	21
9 años	5	11	34
11 años	-	6	44

Ubicación de los sujetos por su nivel de desarrollo en cada tarea.

Nivel I. Aquí se ubican los sujetos cuyas descripciones están basadas exclusivamente en rasgos perceptuales y sus cuantificaciones son cualitativas, ya que si hay "poca agua" en el vaso, pueden llenarse "pocos vasitos", pero si hay "más agua" pueden llenarse "muchos vasitos".

Daniel (7:0). ¿Qué hice? *A una le echates poquita, al otro más y al otro más...* ¿Con éste (4o.) cuántos podemos llenar? *11...* Más adelante dice que con el 3o. y el 4o. pueden llenarse 4 M, y posteriormente ¿con éste (3o.) cuántos? *5* ¿Y con éste (4o.)? *Con 4.*

Alejandra (7:0). *A unos les echó poquita, a otros les echó un poco mucha y a otros les echó... a éste le echó otro poquito mucho y a éste le echó más, y aquí le echó más, pero a éste es al que le echó más.* Si hay mucha agua pueden llenarse muchos vasitos, y si hay poca, pocos vasitos.

Nivel II. Las descripciones de los sujetos de este nivel no presentan necesariamente un vocabulario que haga referencia al número de unidades, sin embargo, siguen un orden creciente al señalar la forma en que fueron llenados los tubos.

Hugo (7:9). Señalando los tubos en orden del uno al siete: *...en uno echó menos y en el otro más, y en éste más, también en éste y en ése y en éste, en éste.*

Por otra parte, cuando la serie está en desorden y se elige un tubo al azar para que se indique cuántas unidades se le vertió, las cantidades dadas por los sujetos son aproximadas y posteriormente corregidas. Asimismo, el mecanismo que propone Hugo para verificar sus respuestas es ver "todos los tubos", como si la simple visión del conjunto le permitiera corroborar su hipótesis, sin que esto implique la necesidad de restablecer un orden.

Por su parte, Mónica (7:0) propone, sin que a ella misma le quede claro el mecanismo, sumar el agua de diferentes tubos para alcanzar cierta cantidad que no sabe cómo confirmará su respuesta.

Nivel III. Los niños de este nivel describen haciendo referencia al orden y número de unidades que se vertieron en cada tubo; sus seriaciones son correctas y elaboradas en forma ascendente o descendente y es claro que pueden manejar sin problema cualquier orden.

Finalmente, sus formas de comprobación hacen referencia, en algunos casos, a que el orden o posición de cada tubo es el que va a indicar la cantidad de unidades contenidas dentro de él, o en otros casos, el número de unidades que contiene cada tubo será el que indique la posición del mismo en la serie.

Marco Antonio (7:11). ¿Cómo compruebas? *...hay que contar en los anteriores, cuántos le echaron en cada uno... contando con el tubito* (M).

Angélica (7:2). ¿Con ésta (con el agua del 4o. tubo) cuántos podemos llenar? *...por supuesto tenemos cuatro vasitos de éstos* (M), *luego yo agarro agua y le sirvo a éste, a éste, a éste y a éste y ya son los cuatro vasitos* (mientras dice ésto, señala figurativamente los cuatro vasos M).

TAREA 2. Todos los sujetos de este grupo (7 años) emiten juicios perceptuales (por coincidencia de límites) a la primera parte de esta tarea: el elemento 1A es más largo que el 4A; sin embargo, pueden encontrarse diferentes niveles de respuesta en cuanto se les muestra cómo utilizar los diversos elementos con que pueden "verificarse" tales juicios.

Pueden distinguirse tres niveles de respuesta:

Nivel I. Las mediciones de los sujetos de este nivel se concretan a comparar los límites de los palitos, esto es, colocan juntos los palos y su juicio es de acuerdo a cuál de ellos llega más lejos.

Posteriormente, cuando se les pide que elijan una unidad de medida que les ayude a comprobar, buscan un elemento que iguale la distancia entre los extremos del que quieren medir: no les sirven ni más chicos ni más grandes.

Más adelante, cuando se les muestra cómo iterar 3R en 1A, establecen la igualdad; sin embargo, cuando se les pide que lo hagan por sí mismos, se sienten comprometidos a dar la respuesta antes demostrada e, iterando correctamente o no, llegan a la conclusión de que son iguales de largos porque miden 6 y 6, o aunque miden 6 y 6, uno es más largo que el otro.

Hugo (7:9). Entonces, ¿son iguales o diferentes de largos? *éste tiene 6 y éste también tiene 6* ¿son iguales de largos? *éste* (1A) *más largo y éste* (4A) *más chico* ¿aunque midan 6 y 6? *sí.*

Al pedírseles que elijan otro elemento que les ayude a medir: 1) buscan aquellos cuya longitud concuerde con la distancia de los extremos de 1A y 4A, para volver a decir que uno es más largo que el otro, ó 2) eligen cualquier elemento con el cual "contar" el número de segmentos de los palos a medir, sin importar el tamaño de la "unidad" o de los segmentos.

Daniel (7:0). Comparando 1A y 4A ¿son iguales de largos? (afirma) ¿cómo supiste? *mira, está grande* (señalando que el límite de uno rebasa al del otro) entonces, ¿son iguales o diferentes de largos? *diferentes, pero tienen 6 partes.*

Mónica (7:0). Intentando "medir" 1A y 4A con 6R: toma 6R y con él cuenta los segmentos de 4A (6) y después cuántos 6R caben en 1A: *con éste* (6R) *no se puede porque nada más caben tres* (tres 6R en 1A, por lo tanto, no hay igualdad de 6 para 3R y 3 para 1A).

Al presentarles la pregunta de las hormigas, todos los sujetos de este nivel vuelven a emitir juicios perceptuales.

Nivel II. Este es un nivel intermedio caracterizado porque los juicios ya no se quedan en la comparación de límites, sin embargo, persiste la necesidad de una unidad de medida del mismo tamaño que el objeto a medir.

Cuando se les muestra cómo iterar, entienden la función de la unidad como elemento de medición. A veces fluctúan entre sus juicios perceptuales y el resultado de las mediciones, terminando por razonar sobre éste último aspecto.

Genaro (7:3). Dice que 4A > 1A = 2A porque: *acá* (4A) *es más vuelta que acá* (1A) *y aquí* (2A) *na'más son dos vueltas.* Sin embargo, el juicio que lo convence más es 1A > 2A > 4A por diferencia de límites, y al final ¿te acuerdas cómo los mediste? *éste lo medí con éste* (4A con 3R), *pero éste es más chico* (3R < 6R) *y estos los medí con éste* (1A y 2A con 6R)... *y si los mido con éste* (1A y 2A con 3R)... *a ver...* (iterando:) *1, 2, 3, 4, 5, 6* (en 1A) *son iguales* (1A = 4A), *a ver con éste* (2A con 3R) *1, 2, 3, 4, 5, 6 y un poquito.* Finalmente, 1A = 4A < 2A.

En este mismo nivel, pero más avanzada, se encuentra Angélica (7:2) quien dice que 1A y 4A son iguales de largos aunque tienen diferente forma: *éste* (1A) *no se parece a éste* (4A). Dice que 1A puede hacerse como 4A rotándolo: *se hace para acá y ya se parece a éste; luego le ponen éste palito aquí, se parece a éste; luego ése palito se parece a éste, lo pasan aquí y ya le ponen este número* (4A lo describió como un 5)*; este palito luego lo ponen aquí.* O cortándolo en segmentos iguales a los de 4A: Angélica muestra cómo 1A puede ser fragmentado tantas veces como segmentos tiene 4A ¿cuántas veces tienes que partir 1A? *6* (contando los segmentos de 4A). Sin embargo, en la consigna de las hormigas dice que en 1A camina más, en 4A camina menos y en 2A regular: *porque ésta* (4A) *está más chiquita, ésta* (2A) *un poquito chiquita y ésta* (1A) *está más larga.*

Nivel III. Este nivel de respuesta es dado por un solo sujeto, Norma (7:7), que itera espontáneamente con 3R en 1A y 4A y aclara *están iguales, son iguales, pero de figura no.* Para comparar 1A y 3A utiliza un listón con el cual demarca unidades iguales a los segmentos de 3A para después iterar en 1A. Acepta que cualquier objeto puede servir de unidad. Establece la igualdad entre los elementos por transitividad.

TAREA 3. En esta tarea pueden distinguirse dos niveles de respuesta para los sujetos de 7 años.

Nivel II. En este nivel se ubican los sujetos que describen el material en tres grandes bloques.

Carina (7:7). *Unos son más chiquitos, otros medianos y otros más grandes.*

La seriación de bastones es correcta, sin embargo, cuando intercalan los elementos extras, manejan la serie como un todo rígido, pues ya que está el primer bloque ordenado no les es posible separarlo para intercalar nuevos bastones. Esto es evidente cuando se les hacen las preguntas con elementos al azar al estar desordenada la serie, pues no pueden manejar simultáneamente el total y una de las partes (del bastón señalado a uno de los extremos). No utilizan la resta como método de solución.

Asimismo, demuestran que no manejan la transitividad ya que llevan a cabo comparaciones exhaustivas contra todos o la mayor parte de los elementos ya seriados y en muchas ocasiones lo hacen mediante tanteos, no sistemáticamente. Igualmente, tampoco ven la necesidad de rehacer la serie o dicen que es necesario rehacerla completamente para poder contestar, con lo que sus respuestas sólo son aproximadas.

Daniel (7:0). Al intercalar los nuevos elementos en la serie ya ordenada, empieza con muchos problemas, acomodando a veces la base y otras veces la parte superior de los bastones. Con los últimos elementos su estrategia es comparar con los tamaños aproximados hasta encontrar el lugar correcto. En las preguntas sobre bastones al azar (con la serie ordenada) le da lo mismo contar de mayor a menor que de menor a mayor: si el muñequito se detiene en éste (8) escalón, ¿en cuál está parado? *en el tres* ¿cómo sabes? *porque conté de aquí* (10) *para acá* (8). Al tener la serie en desorden, para dar sus respuestas, no puede dividir la totalidad en dos grupos (se le señala el 3o.) ¿en cuál escalón está parado? *dos* ¿cómo supiste? *porque es uno y dos* (1 y 3) *¿y* antes de llegar a éste cuántos subió? *uno ¿y* cuántos le faltan para terminar de subir? *10* pero si está parado en éste (3o.) ¿cuántos le faltan para terminar de subir? *10* ¿cómo podemos estar bien seguros? *son 10* (en total son 10).

Nivel III. La seriación la hacen fácil y sistemáticamente, eligiendo ya sea el mayor o el menor de los aún no seriados. Asimismo, intercalan los bastones extras en forma correcta: buscan el lugar correspondiente de manera que los bastones adyacentes sean mayor y menor que el que se va a colocar.

Manejan la serie en forma ascendente o descendente con mucha facilidad y utilizan la resta para llegar a las respuestas correctas. Para comprobar no es necesario rehacer la serie en su totalidad, es suficiente con rehacer del bastón señalado a uno de los extremos.

TAREA 4. En esta tarea también se encuentran tres niveles de respuesta.

Nivel I. La descripción del material por los niños de este nivel es muy vaga, no hace referencia específica a las dimensiones de los recipientes, o toma en cuenta dimensiones diferentes para describirlos, como puede verse con Daniel, que describe unos vasos según su altura y otros según su ancho(1).

Daniel (7:0). *Son vasos, unos más chicos* (A) *y unos más grandes* (C) *y otros medianos* (B).

Al interrogarles sobre la igualdad o diferencia de la cantidad de líquido, nuevamente las respuestas están basadas en juicios perceptuales, considerando solamente una dimensión al emitirlos. Esto es, las respuestas son dadas generalmente de acuerdo al nivel que alcanza el líquido en el recipiente, como Daniel (7:11) que mide con su dedo el nivel de los líquidos en los tres recipientes (transfer manual); esto a pesar de haberse percatado del número de unidades vertidas en cada envase, lo cual significa que la cantidad numérica como tal está subordinada a los rasgos perceptuales.

Alejandra (7:0). Su juicio es perceptual: C tiene más agua que A y A tiene más que B: ¿en qué te fijaste para saber? *me fijé cuántos les echó* ¿y cuántos les eché? *tres a ésta, a éste también tres, y a éste también* ¿y aquí (B) hay más agua que aquí (C) o es igual? *aquí* (B) *es menos* ¿aunque les haya echado tres, tres y tres? ... ¿es igual o no es igual de agua? *ésta* (B) *es poquita, ésta* (A) *es como mediana y ésta* (C) *es la más grande.*

Cuando se les propone utilizar algún recipiente extra para "comprobar" si sus juicios son correctos, se concretan a usarlos para alcanzar niveles similares de líquidos.

Alejandra (7:0). Vierte en A_1 tres unidades de líquido azul y, después de comparar con A, dice *para que queden del mismo tamaño.*

Daniel (7:0). Para comprobar vierte niveles iguales en A, A_1 y A_2; en B, B_1 y B_2, y en C, C_1 y C_2.

Por otra parte, al exponer a estos sujetos a las experiencias control de conservación, se presenta un nivel intermedio en el desarrollo de esta noción.

Daniel (7:0). Se igualan niveles en C y C_1 y se vierte C_1 en B ¿toman igual? *ella toma más* (C). Se igualan niveles en C y C_1 y se vierte C_1 en E, E_1 y E_2 *los dos toman más* con lo cual demuestra que su criterio de conservación es diferente en una situación o en otra: en C **toman más** que antes porque el nivel es más alto, pero en E + E_1 + E_2 también **se toma más** que antes porque son muchos vasos. Se igualan niveles en C y C_1 y Daniel anticipa que si C_1 (verde) se vierte en B, el nivel será igual que en C: ¿antes (en C y C_1) era la misma cantidad de agua? *pero ya no* ¿la verde es la misma cantidad que la roja? *sí, pero* (ya) *no tienen iguales, éste* (B) *tiene poquito y éste* (C) *está más.*

Angélica (7:2). Se igualan niveles en A y A_1 y después A_1 se vacía en E, E_1 y E_2: *es la misma porque estaban iguales.* Se igualan niveles en A, A_1 y A_2 y se vierten en A, B y C: *ésta* (C) *tiene más, ésta* (A) *poquita y ésta* (B) *más poquita.* Después afirma que tomaríamos igual de agua aunque prefiere tomar C. Más adelante afirma que *tienen igual y ésta* (B) *tiene más poquita.*

Alejandra (7:0). Se igualan niveles en A, A_1 y A_2 y se vacían en A, B y C: *tomamos igual, porque éste frasquito* (B) *está más chiquito, como esta cacerolita está más chiquita* (por lo tanto), *se ve chiquita* ¿tomaremos igual las tres? *sí* entonces ¿por qué se ve menos? *ésa* (B) *se ve menos porque está chiquita* (hace ademán de chaparrita, bajita) *y éstas dos* (A y C) *están grandes.*

Nivel II. En este nivel se ubican los sujetos que, aunque sus respuestas son correctas (generalmente por igualdad numérica), y en ocasiones sus juicios son multidimensionales, emiten juicios perceptuales cuando se les contraargumenta.

De igual manera, no son capaces de utilizar los vasos extras para establecer unidades de medida, aunque sí anticipan niveles correctamente.

Genaro (7:3). Se basa en que se vierte igual número de unidades en cada recipiente para decir que tienen la misma cantidad de agua, además de dar argumentos dimensionales:

ésta (B) *está más grande* (tiene mayor diámetro) *que éstas* (A y C) *y ésta* (B) *es* (tiene) *más de éste, más círculo que éstas dos* (A y C) *¿por qué quedaría más? éste* (C) *está un poco más cerrado y éste* (B) *está más abierto.* Posteriormente explica que cuando se cambian "de lugar" (de recipiente) se "ven" diferentes. Sin embargo, después de reconocer la igualdad de cantidades por igualdad de niveles en vasos iguales, al verter el líquido a vasos diferentes regresa a sus juicios perceptuales.

Carina (7:7). Aunque su juicio inicial es perceptual se nota un inicio en la compensación de dimensiones, dice que A = C > B *porque ésta* (B) *tiene poquita y ésta* (C) *es igual a ésta* (A), *porque éste* (C) *se ve alto, pero como éste* (A) *está ancho, está más bajita.* No elige espontáneamente los otros vasos para corroborar, se le pide que anticipe qué sucederá si vierte todas en vasos iguales y entonces duda que A = C > B: *ésta* (B) *es igual que éstas* (A y C) *¿tienen la misma cantidad de agua? sí ¿en qué te fijaste para saber que tienen igual? es que éste* (B) *es más ancho y cómo se le llena todo lo de abajo.* Sin embargo, en la experiencia control con diferentes niveles, cantidades y recipientes, vuelve a sus juicios perceptuales; se le pide anticipación en diferentes trasvases e insiste en ellos, además de que no ve la necesidad de utilizar vasos iguales para comprobar su respuesta.

Nivel III. En este nivel los niños pueden iniciar o no con juicios perceptuales, sin embargo, lo importante es la forma en que manejan los diversos indicios presentes en la situación -como cantidad de unidades vertidas o compensación de dimensiones- para corroborar sus respuestas así como la certeza y seguridad con que pueden justificarlas.

Asimismo, los sujetos de este nivel son capaces de explicar correctamente por qué se presenta la diferencia de niveles cuando las cantidades vertidas son las mismas, y de elegir y utilizar adecuadamente los vasos extras como unidades de medida.

Los casos de Marco Antonio, Hugo y Norma son explícitos en este sentido.

Marco Antonio (7:11). ¿Qué es? *vasos grandes, chicos, vaso... no, un plato ¿cuál es su diferencia? éste* (B) *tiene orejas, porque éstos* (A y C) *están iguales de adentro, pero de lo redondo* (diámetro) *casi no; éste* (A) *está más chico y éste* (C) *más grande.* Se vierte el agua ¿tienen igual de agua? *diferente, éste* (B) *tiene menos y éste* (A) *tiene más ¿cómo supiste? ésta* (B) *se ve más poca y ésta* (A) *más, porque está redondo y cabe más, éste* (A) *también pero puede que estén iguales* -al hacer referencia a lo redondo (diámetro) duda que su respuesta sea correcta- ¿por fin? *iguales* ¿cómo supiste? *éste* (B) *se ve poquita, pero si la echamos en ésta* (A_1) *ya quedan iguales* ¿y el rojo? mide la altura del nivel con su dedo en C (transfer manual) y lo compara con A: *tiene más el rojo...* ¿Por qué quedarían iguales el verde y el azul en A y A_1? *porque ésta* (B) *se ve poca pero si la vaciamos puede que estén iguales o más grande* ¿cómo estarías seguro? *vaciándolo y midiéndolo* (lo vierte) *están iguales* ¿qué pasó? *el verde se veía que estaba poquito* ¿se veía o era menos? *eran iguales* ¿por qué se veía menos? *no se llenó, estaba en la orillita* (en B estaba esparcido, hace el ademán)' *y se veía menos...* ¿el rojo es más? *sí* ¿y si lo vacías en A_1? *podría que quedaran todos iguales* ¿se hace menos cuando lo vacías? *creo que sí, creo que habría más agua si vacío el rojo en éste* (A_1) ¿habría más? ....(lo vacía) *¡están iguales!* (sabía que eso pasaría) ¿qué pasó? *porque estaba* (C) *más chico de redondo* (= el diámetro de C es menor que el de A) *y éste* (A) *estaba más grande* ¿se veía más o era más? *se veía más* ¿cómo era? *era poco* ¿era igual o diferente? *igual.*

Hugo (7:9). De entrada dice que los recipientes tienen la misma cantidad de agua *porque le echó tres* (en C), *aquí también* (B), *aquí también* (A) y su razón de las diferencias de niveles también es correcta *porque está más gorda* (verde en B) analiza inmediatamente la azul en A y dice *éste* (A) *tiene menos agua azul... menos que la roja... porque éste* (A) *está también casi gordito* -lo cual demuestra que, aunque sus juicios no son del todo correctos, maneja compensación de dimensiones-. Sus anticipaciones son correctas: si vaciaras el agua verde en algún vaso ¿qué pasaría? *se volviera como ésta* (azul) *o si no como ésta* (roja) después afirma que el agua es igual pero parece menos y propone que para comprobar que la azul y la roja es igual se vacíe la primera al vaso C_2 y anticipa: ¿hasta dónde llegaría? *hasta aquí* (señala el mismo nivel que las otras en los vasos C y C_1). En la experiencia control de iguales niveles y diferente cantidad emite juicios correctos; y después ¿de la azul y de la roja es la misma cantidad o es diferente cantidad? *ésta* (A) *tiene más y ésta* (C) *tiene menos* ¿cómo sabes? *porque ésta* (A) *está más gorda y ésta* (C) *más flaquita.*

Norma (7:7). Su descripción maneja dimensiones: *son éstos* (C) *unos vasos grandes, largos, y éstos* (A) *son chiquitos, gorditos y éstos* (B) *parecen a donde se hace la salsa.* Establece igualdad de cantidades por la igualdad de unidades vertidas *es igual de agua porque aquí* (A) *le echó tres, aquí* (B) *tres y aquí* (C) *tres*; explica por qué los niveles son diferentes: *porque ésta* (B) *está muy gordita y se le pone el agua más chiquita, y ésta* (A) *como está un poquito más gordita se le pone hasta acá* (señalando niveles) *y ésta* (C) *como está más largo se le pone hasta acá; son iguales* *pero son diferentes formas de estatura.* No se le ocurre cómo utilizar otros vasos como unidades de medida pues si vacía el agua en recipientes iguales no se comprueba nada, los niveles serán iguales también: *Como éstos* (C) *están flacos se van a ver igual de agua, y éstos* (B) *también se van a ver igual que antes, y también éstos* (A) (comparando con los mismos vasos: A con A_1, B con B_1 y C con C_1). Con la experiencia control de diferentes niveles y cantidades, sus juicios son perceptuales pero complementados con compensación de dimensiones, o sea que aunque hay una clara diferencia de niveles de A y B dice que *tendrá casi igual que éste* (A), *se ve menos* y compara también con la situación inicial, e insiste *como éste* (A) *está más flaquito, creo que son iguales* (A = B). Se le invita a vaciar el verde en C_1 y vacía también el azul en C_2, y después los vacía en A, A_1 y A_2 y dice que cualquiera de los recipientes le sirven para saber. Con otra experiencia control de diferentes niveles y cantidades sus respuestas son correctas (por compensación de dimensiones) y procede inmediatamente a comprobar con los recipientes como unidades de medida.

TAREA 5. En esta tarea, los niños de 7 años de edad, contestaron según sólo dos niveles de respuesta, distintos únicamente porque en el primero la iteración no está consolidada mientras que en el segundo sí lo está.

Nivel II. Los niños de este nivel llevan a cabo la seriación de los elementos sin dificultad, basándose en comparaciones entre los mismos.

Por otra parte, durante las preguntas sobre bastones progresivos, los sujetos demuestran que entienden claramente que cada cartón "está formado" por un conjunto de unidades y, por lo tanto, cada elemento puede subdividirse en unidades.

David (7:11). ¿Cuántos como éste (cartón 1) pueden hacerse de este cartón (2o)? *de éste son dos, poniendo una rayita y cortándolos* ¿cómo supiste? *poniéndole sus rayitas* (subdividiendo en unidades) y muestra con su dedo cómo cada cartón sobrepasa al anterior en una unidad.

Sin embargo, cuando la serie está desordenada y se les pide que indiquen cuántas unidades podrían obtenerse de un cartón determinado, basan su respuesta en una supuesta iteración de la unidad o en el número de cortes que deberían hacer cada vez que se traspone la unidad (igualdad de cortes y partes).

Daniel (7:0). Durante las preguntas progresivas itera con el primer cartón hasta el 3o, pero de allí en adelante sólo recorre la unidad sobre los otros cartones. Sus respuestas son correctas porque se da cuenta que a cada cartón se va agregando una unidad, pero no itera correctamente pues no demarca puntos de referencia. Con la serie en desorden contesta con un número aproximado pues al tratar de iterar para comprobar sólo recorre la unidad sin marcar puntos de referencia.

Nivel III. Los sujetos de este nivel hacen la serie correctamente. Con las preguntas en orden itera con el primer cartón en cada uno de los restantes. Asimismo, coordinan claramente el lugar que ocupa cada cartón con el número de unidades que pueden obtener de él si lo subdividen (ordinación y cardinación), sucediendo esto tanto con cartones al azar cuando la serie está ordenada, como cuando está desordenada. Además manejan sin problema la serie en dos partes: de A a N y de N + 1 a Z, al mismo tiempo que la serie total de A a Z.

Carina (7:7). ¿Con éste (7o) cuántos como éste (1o) podemos hacer? *7* ¿cómo supiste? *porque aquí* (del 8o al 10o) *habían tres, y aquí* (del 1o al 7o) *habían 7, 8, 9 y 10* (señalándolos conforme los nombra).

Mónica (7:0). Con las preguntas al azar dice: *porque éste* (4o) *está más grande que éste* (3o) *y éste* (3o) *es el tres* ¿y éste (4o) qué tanto está más grande que éste (3o)? *nada más por un cuadrito.* Con otro cartón explica que cuenta los anteriores y así sabe cuántos son en un cartón.

Hugo (7:9). Dice que en el 6o cartón caben seis escaloncitos como el 1o *porque éste es el número seis* ¿cómo podemos comprobar que con ése podemos hacer seis? *ir midiéndolos con éste* (1o).

Genaro (7:3). Coordina el rango con el número de unidades que incluye ¿cómo supiste que con éste (7o) podemos hacer siete? *porque sí, éste* (7o) *tiene más, porque es que voy contando así* (señala del 1o al 7o) -lo cual indica que sabe que cada rango de más significa una unidad de más- ¿cómo compruebas? *porque éste* (1o) *le vamos midiendo por aquí* (itera el 1o en el 6o)... *1, 2, 3, 4, 5, 6.*

Marco Antonio (7:11). ¿Cómo sabes que con éste (5o) podemos hacer cinco? *es que éstos ya son cinco escalones: 1, 2, 3, 4, 5* (contando del 5o al 1o) ... ¿cómo compruebas que con éste (7o) podemos hacer siete? *recortándolo, haciendo siete escalones, pondríamos con el lápiz recortando ahí así* (simula que marca con el lápiz el límite del cartón 1 y que corta) *como de éste tamaño y ya se puede hacer siete... son 1, 2, 3, 4, 5, 6, no se puede* (no marcó bien los puntos de referencia y no le alcanza para siete) ¿qué pasó? *sí, sí se puede con éste, recortándolos son siete* (no sabe qué pasó pero está convencido de que su respuesta es correcta).

Sujetos de 9 años de edad (4o. grado).

TAREA 1. En esta tarea, con estos sujetos, se distinguen nuevamente los tres niveles de respuestas, correspondientes a los del primer grupo.

Nivel I. Javier (9:5). Su descripción de cómo se llenaron los tubos no menciona número de unidades pero sí da cuenta del orden ascendente en que se vertió el agua *que a éste le echó poquito de agua azul, a éste más, y a éste más, y a éste, a éste, a éste, a' éste está bien lleno.* Sin embargo, cuando se le pregunta cuántos tubos medida pueden llenarse con el agua de cada uno de los seriados, su respuesta es cualitativa, esto es, a mayor cantidad de agua, mayor cantidad de vasitos, aunque estas cantidades no guarden una proporción directa: ¿con esta agua (1o) cuántos vasitos (M) podemos llenar? *uno* ¿con ésta (2o) cuántos? *dos* ¿con ésta (3o)? *como cinco* ¿con ésta (4o)? *ocho* ¿con ésta (5o) cuántos podemos llenar? *como once* ¿con la de éste (6o)? *como quince* ¿y con el último (7o)? *como veinte.*

Nivel II. Griselda (9:10). Describe, en desorden, la forma en que se llenaron los tubos: *le echó agua a éstos... a éste le echó más, y a éste otro poquito, y a éste así un poquito altito, y a éste menos, y a éste otro poquito más, a éste otro poquito una mitad que éste y a éste más.* Después, con los tubos al azar y la serie en orden o no, algunas de sus respuestas son sólo aproximaciones que después corrige.

Nivel III. Virginia (9:8). *Estaba llenando los cubitos, los pomitos con agua pero de diferente agua... o sea que a unos les metía poquita agua y a otro más y más y más.*

Moisés (9:8). ¿Cómo sabes que con éste (3o) podemos llenar tres vasitos? *porque éste es uno, éste es dos y éste es tres* (señalando los tres primeros tubos).

Juan (9:11). Las preguntas le parecen tontas ¿cómo supiste? *porque vi cómo les estaba echando agua, porque veo de qué tamaño estaban los otros.*

Luis (9:0). El vocabulario de su descripción es muy específico, ya que emplea ordinales y cardinales en forma correcta: *con el cubito chiquito al primer tubo le echaste el cubito con agua lleno, al segundo le echaste dos, al tercero tres, al cuarto cuatro, al quinto cinco, al sexto seis y al séptimo siete ...* ¿cómo podemos estar seguros de que éste (4o) tiene cuatro? *llenar aquí* (M) *y echarlo otra vez ahí* (al recipiente).

TAREA 2. Como en el primer grupo de sujetos, los de este grupo pueden agruparse en los tres niveles de respuesta ya mencionados.

Nivel I. Moisés (9:8). Su juicio inicial es que 1A > 4A ¿en qué te fijaste para saber? (analiza 4A): *porque éste* (4A) *está... no está derecho, tiene partes, está por partes curveadas* ¿entonces éste (4A) es más chiquito que ése (1A)? *sí* ¿alguno de éstos te sirve para comprobar? *sí, éstos* (3R y 6R) ¿cómo? *midiéndolos* (coloca el 6R a lo largo de 4A y 3R a lo ancho) explícame cómo comprobarías (itera 3R en 4A y cuenta:) *cinco, éste* (4A) *es más chico* ¿cómo supiste? *porque con éste* (3R) *los fui midiendo* ¿y cuánto midió? *cinco* ¿y éste (1A)? (después de "iterar" sin marcar puntos de referencia:) *cinco* ¿y entonces? *no son iguales porque le sobró ésta parte* (señala un tramo de 1A: midió 5 en 4A y 5 + un pedacito en 1A) ¿entonces no son iguales? *no* ¿aunque midan 5 y 5? *midió cinco cuadritos y sobró una parte, no es igual de largo.* Se le ayuda a iterar otra vez y mide 6 y 6 *son iguales* ¿cuántos son? *seis* ¿y entonces tienen lo mismo de largo o no tienen lo mismo de largo? *sí* ¿alguno otro te sirve? *éste* (18R) compara con 1A y dice que son iguales, se le recuerda la pregunta y entonces rota 18R sobre 4A *sí, éstos* (1A y 4A) *son iguales* (por transitividad). Más adelante dice que para que algo le sirva tiene que ser igual de largo o del tamaño de los segmentos. Cuando se le pide que juzgue 1A, 2A y 3A su juicio es 1A > 3A > 2A ¿cómo supiste, en qué te fijaste? *en que éste va por estas partes* (3A tiene 4 segmentos) *y éste* (2A) *nada más tiene éstas tres* (2A tiene tres segmentos) *y éste está más chiquito que éste* (2A < 3A) *porque ésta* (3A) *tiene partes así curveadas y éste* (2A) *tiene partes derechas* (al momento de dar su argumento acerca del número de elementos se da cuenta que puede no ser una razón buena debido a la diferencia de longitud de los segmentos de 2A y 3A, y trata de cambiar un poco su razonamiento a curveadas y derechas). ¿Tú crees que alguno nos puede servir para comprobar éso (1A > 3A > 2A)? *sí* ¿cuál? (toma 6R) ¿a ver? (los mide con 6R:) *son tres y medio éste* (3A) *y éste* (2A) *tiene dos y medio* ¿y el otro (1A)? *tiene dos y medio* ¿y entonces cuál es más largo de los tres? *éste* (3A) *y éstos dos son iguales* (3A > 2A = 1A) ¿y más largo cuál es? *éste* (3A) ¿y éste y éste (1A y 2A)? *son iguales* ¿pero es más largo el derecho (1A)? *sí* a ver, pon aquí el más largo, aquí el que sigue y aquí el más chiquito (coloca 1A > 3A > 2A) ¿éste (3A) cuánto midió? *tres y medio* ¿y éste (1A)? *dos y medio* ¿y éste (2A)? *dos y medio* ¿estamos bien seguros? *éstos dos* (1A y 2A) *son iguales y éste* (3A) *es el más, es el mediano* ¿cómo es que éstos dos son iguales y acá (1A) está el más grande y acá (2A) está el más chiquito? *porque los estoy midiendo* ¿entonces el más más largo cuál es? *éste* (1A) ¿y el más más chiquito? *éste*

(2A) ¿pero son iguales? *sí* se le pregunta por las hormigas *una camina menos* ¿cuál? *ésta* (2A) ¿y más? *ésta* (1A) ¿y en medio? *ésta* (3A).

Virginia (9:8). Su juicio inicial acerca de 1A y 4A: *son diferentes, no son iguales de largos* (1A > 4A) ¿cómo supiste? *porque éste* (1A) *está más grande y éste* (4A) *está más chico* ¿en qué te fijaste? *en lo delgado y en lo grande* ¿te sirve alguno para comprobar? toma 20R y empalma con 1A, dice que 1A < 20R, se le recuerda la pregunta, entonces toma 6R y compara 1A contra 4A + 6R: *juntar los dos* (4A y 6R) ¿y qué pasa? *es más chico la letra 's' y el anaranjado.* En todas las preguntas resuelve por límites. Se le muestra cómo iterar y establece la igualdad. Se le pregunta con hormigas y dice: *llega más rápido ésta* (4A) (no está segura de la longitud y por eso recurre al argumento de la rapidez) ¿caminan menos o igual o más? *sí, sí caminan lo mismo de largo* (dudando); se contrargumenta y vuelve a afirmar la igualdad. Con 1A, 2A y 3A pretende iterar 3R en 3A y concluye que 1A y 3A son diferentes, luego en 2A y dice que 1A > 2A > 3A *3A midió cinco, 2A cinco y medio y 1A seis.* ¿Otro te puede servir? toma 6R y cuenta el número de segmentos: 2A tiene 3 y 3A tiene 3, por lo tanto, *son iguales de largos.* Acepta que con una unidad pueden ser iguales y diferentes con otra. Después, a cada contrargumento cambia sus juicios y termina emitiendo juicios perceptuales ante la consigna de las hormigas (1A > 3A > 2A).

Marlet (9:0). Sus juicios con respecto a 1A y 2A: *diferentes de largo* (1A > 2A) ¿en qué te fijaste? *porque éste* (2A) *está retorcido y éste* (1A) *no, éste está recto* ¿te sirve alguno para comprobar? toma 6R e "itera" en los segmentos de 2A (no coinciden) cuenta 3 y después recorre 6R sobre 1A y cuenta 3 *son iguales, uno, dos y con éste chiquito son tres* (en 2A), y en 1A: *uno, dos, tres: son iguales.* ¿Estos (1A y 3A) son iguales o diferentes de largos? *diferentes* (1A > 3A) *porque éste* (3A) *está en forma de M y éste* (1A) *está recto* ¿te sirve alguno para comprobar? *no, porque están más grandes o más chicos que éstos* (1A y 3A) ¿crees que uno contra el otro puedan servir (comparar 1A contra 3A)? *sí* (toma 1A por un extremo y al empalmarlo con cada segmento de 3A va contándolos hasta llegar a cuatro, dice que son iguales, que a 1A fue midiéndolo *tienen cuatro y cuatro.* En la consigna de las hormigas para 1A, 2A y 3A: *una que camina más* (1A); *una que camina menos* (2A) *y la otra que también camina más* (3A).

Nivel II. Griselda (9:10). Su primer juicio es perceptual: 1A > 4A. Para comprobar primero busca un palo o algo que coincida en sus límites con los palos en cuestión. Dice que 4A y 16R son casi iguales y que si 4A se desdobla queda casi del mismo tamaño que 1A (mientras señala más o menos tres cuartas partes de 1A). También dice que ninguna de las cosas que hay allí le sirven *porque están más grandes y otros más chiquitos y otros están medianos*. Al comparar 1A y 3A dice que el segundo es mayor que el primero y comprueba mediante 16R: compara límites de 16R y 3A (16R > 3A) y luego compara 1A y 16R, con lo cual 1A > 16R y, por transitividad, 1A > 3A. Después pretende "iterar" con 3R y cuenta 6 ½ en 3A, y 6 en 1A y, en consecuencia, 3A > 1A. Más adelante, al comparar 1A y 2A "itera" mal con 3R y cuenta 5 ½ para 2A y 6 para 1A, por lo tanto, 1A > 2A.

Nivel III. Juan (9:11). Su juicio inicial es que 1A es mayor que 4A *porque éste* (1A) *es así deshecho y da como por aquí así* (señala el límite a donde llega 4A contra 1A). Propone "extender" 4A para compararlo con 20R: ¿cómo le harías para comprobar? *así, despegando éste* (cada segmento de 4A) *y poniéndolo derecho, así, quitándole, pegándoselo derecho, luego éste derecho, luego éste derecho, todos derechos* ¿y si no lo despegáramos se podría comprobar? *sí, con el listón* (toma el listón grande) ¿cómo? con el listón mide 4A por sus contornos, delimita y compara con 1A que queda mayor que 4A, se le pide hacerlo más despacio, lo vuelve a hacer y, con asombro: *¡cómo salieron diferentes (de lo anterior)!, ¡da lo mismo!, ¡cómo yo lo hice y salió diferente!, ¡me equivoqué entonces!* ¿entonces son iguales o diferentes de largos? *¡iguales!*. Dice que con los popotes y el otro listón también se puede comprobar (por lo flexibles); se le pregunta si con 3R y *sí, también* itera 3R en 4A y cuenta 5 pues no cuenta uno de los segmentos, después itera 3R en 1A y, por problemas prácticos cuenta 5 y fracción (calcula que 3R mide 5 cms.:) *1, 2, 3, 4, 5,... como cinco y medio, menos de cinco cms.* ¿cuál? *éste* (1A) *son como cuatro cms. que sobran de éste* ¿éste (1A) cuánto mide? *como...* (haciendo el cálculo) *28 cms.* ¿y éste (3R)? *cinco cms.* ¿cuánto ése (4A)? *éste* (3R) *mide cinco cms., le calculo, y éste* (1A) *mide 28 cms.* (haciendo la multiplicación: 5 y un tramo de 1A son 5 X 5 = 25 + 3 del tramo = 28 centímetros) ¿cómo? *sí, son 25 enteros y sobran como dos cms. de éste* (3R) (dice 2 pero suma 3, además, utiliza números fraccionales) ¿qué comprobaste de éste y de éste (1A y 4A), son iguales o diferentes? *diferentes* ¿éste (4A) es más chico o más grande? *un poco más chico* ¿podemos probar de nuevo? itera otra vez en 4A contando: *1, 2, 3, 4, 5... 6!*, (repite incrédulo) *a ver, 1, 2, 3, 4, 5 y 6...* (itera en 1A) *1, 2, 3, 4, 5 y 6 ¡órale! ¡ya me confundí otra vez, sí está igual!*. Se le presentan 1A, 2A y 3A y al cálculo dice que sí son iguales, se le pide que muestre cómo y rota 2A sobre 1A *son iguales* después con el listón mide 3A y lo compara con 1A y dice que los 3 son iguales (por transitividad). Dice que las hormigas caminan lo mismo *porque es igual de largo pero diferente manera, porque éste* (1A) *está derecho y éste* (3A) *está medio curveado y éste* (2A) *está medio cuadrado.*

Luis (9:0). Inicia diciendo que 1A y 4A *son iguales de largos* ¿cómo supiste, en qué te fijaste para saber? *en las partes* explícame un poquito más *éste* (4A) *está como una curva, y éste* (1A) *está extendido, y entonces, si lo estiramos mide lo mismo* al pedirle que compruebe elige el listón grande, lo cambia por el chico y mide 1A, queda exacto, procede a medir 4A con el listón sobre el contorno en cada segmento, al no hacerlo bien queda más corto 4A y dice *no, éstos no son iguales* (1A y 4A por transitividad) ¿cómo estuvo? *como éstos* (1A y listón) *son iguales, fui midiendo y sobró un pedazo* se le ayuda a rectificar y establece la igualdad ¿qué pasó? *me equivoqué al medir y ahorita que lo hicimos está bien* ¿son iguales? *sí.* Cuando se le pide que juzgue 1A, 2A y 3A rota 1A en 3A y luego en 2A y, con problemas, establece la igualdad y la transitividad 1A = 3A y 1A = 2A, por lo tanto, 1A = 3A = 2A, para comprobar elige el popote grande y, después de intentar, dice que no le sirve *porque está éste* (1A) *muy chico y el popote está más grande y entonces aquí no sabemos si está más largo o le falta* (es decir, si no se establece la igualdad con uno, tampoco la transitividad) *tiene que ser a la medida* ¿te acuerdas que sí pudimos medir con el chiquito? *sí* ¿entonces cómo podemos hacerle? ... ¿cómo tiene que ser un popote o un palito para que nos sirva?, ¿tiene que ser más largo, más chiquito o del mismo tamaño? *...del mismo tamaño* ¿a fuerzas? *no, podría ser como éste* (3R)... (elige 3R y 6R) *solamente éstos dos* (intenta medir los segmentos de 2A y 3A con el 6R) *no, tampoco éste* (6R) ¿por qué? *porque éste* (segmento de 2A) *está más grande que éste palito* (6R) ¿cómo tiene que ser un palito para que nos sirva? *...como el popote* si tuviéramos puros palitos cómo tendrían que ser para que nos sirvieran para comprobar que son iguales? *de como son los tamaños de éstos* (segmentos de 2A y 3A).

Zulema (9:9). Su juicio inicial es correcto y también su explicación *porque éste* (4A) *como está así* (forma) *no se puede bien estirar, entonces estirándolo se hace igual* (con el gesto de estirar). Su estrategia de medición es correcta con el listón grande y el popote chico, aunque representan ciertos problemas prácticos y no establece mediciones exactas, las cuales son corregidas con ayuda del experimentador. Se le pide que compruebe con 3R y dice que no le sirve porque *aquí está igual* (primer segmento de 4A y 3R), *entonces yo no puedo medir ésta otra* (segundo segmento de 4A = ya se acabó la regla para medir)... *entonces... ¡sí, también!* en ese momento se da cuenta de que puede cambiar de posición la unidad de medida y lleva a cabo la medición correctamente.

TAREA 3. Nivel II. En este nivel se encuentran Moisés, caso muy claro de esta etapa, y Marlet que, aunque ya está bastante avanzada, todavía tiene muchos problemas para intercalar elementos en una serie ya establecida.

Moisés (9:8). Describe los elementos como *unos más chicos y unos más grandes*. Al hacer la serie excluye 3 y dice que sobraron, así también, al intercalar los bastones extras compara de uno por uno y no sólo con los más cercanos en tamaño. Con los bastones señalados al azar en la serie ordenada contesta correctamente haciendo uso de la resta: ¿cómo supiste? *porque cuatro y los otros seis sobraron y son diez*. Cuando la serie se deshace contesta nuevamente usando la resta, para comprobar dice que hay que rehacer la escalera y sólo reordena los necesarios para llegar al bastón señalado.

Marlet (9:0). La descripción de sus elementos: *unos son más grandes, otros son más medianos y otros son más chiquitos*. Construye la serie sin dificultad, pero al intercalar los nuevos elementos no hace una búsqueda dentro de solamente los bastones cercanos; cuando se le pregunta por bastones al azar utiliza la resta: ¿en qué escalón está parado el muñequito? *en el cuarto* ¿antes cuántos subió? *tres* ¿y cuántos le faltan? *seis* ¿cómo supiste? *son diez, subió tres y nos sobraban seis* (señala del 1o al 4o).

Nivel III. Fausto (9:8). Su descripción: *unos están más chicos y unos más grandes*. Construye la serie sin vacilar y correctamente, igualmente intercala los elementos extras. Para contestar usa la resta: *aquí son cinco y aquí sobran cinco para llegar al último*. Más adelante es evidente su entrenamiento en la escuela: ¿cómo supiste? *porque aquí son cuatro y ya sé contar del uno al diez y aquí son... como tengo cuatro manzanitas y quiero tener diez, son seis* ¿cómo supiste que está parado en el 4? *porque está grande* (mayor que los 3 primeros que está señalando) ¿cómo podemos comprobar? *formándolos*.

Griselda (9:10). Su serie es correcta, también intercala correctamente y, aunque no usa una base totalmente recta, tiene la seguridad del lugar en que coloca los bastones. Para intercalar, generalmente compara sólo con los bastones de tamaños aproximados. Para dar sus respuestas recurre a la resta. Con la serie deshecha cuenta al azar los bastones más chicos que el señalado. Para comprobar su respuesta rehace la serie.

Luis (9:0). Seria perfectamente, va eligiendo cada vez el elemento más pequeño para ordenarlos. La base es recta. Para intercalar elige el lugar de manera que los adyacentes sean mayor y menor que el que colocará. Con la serie en desorden y preguntas al azar hace una búsqueda visual para identificar la posición del señalado y las otras preguntas las contesta mediante restas *está en el cinco, menos uno, cuatro, para diez, seis*. Para comprobar, *acomodándolos*.

TAREA 4. Nivel I. Javier (9:5). Su descripción de los recipientes es muy global *éstos* (A) *son un poco medianos, y éstos* (B) *más chiquitos y* (C) *más grandes.* Su juicio es perceptual y no se le ocurre cómo pueden servirle los otros recipientes para comprobar ¿te sirven? *no, porque si vaciamos ésta* (verde) *aquí* (B_1) *queda igual, y ésta* (roja) *también queda igual y la azul también.* Sin embargo, anticipa correctamente si vacías la verde en éste grandote (C_1) ¿hasta dónde llegaría? *como hasta por aquí* (señala el mismo nivel que la roja). Se le pregunta nuevamente por la igualdad o diferencia de las cantidades de agua cuando perceptualmente B tiene más, C intermedia y A menos y explica que (el verde) *tenía menos y era la mitad, y ahora tiene más.* Se vierte el azul en C_1 y cambia nuevamente su juicio *el verde tiene menos.* Se le presenta la experiencia control en que se iguala el nivel de líquido en C, C_1 y C_2, pero al verterse en A, B y C juzga perceptualmente A = C > B y explica *estaban igual* ¿y ahora qué pasó? *tiene menos, primero tenía más y ahora tiene menos.*

Nivel II. Moisés (9:8). Su descripción *unas* (B) *son más anchas y otras* (C) *más largas y éstos* (A) *más chicos.* Su juicio *es diferente* ¿cuál tiene más y cuál tiene menos? *ésta* (A) *tiene más, la verde tiene menos* (hay principios de compensación de dimensiones) ¿cómo supiste? *es más ancha y le echó menos* (B); *y éste* (A) *es más chico y le echó más, y el rojo es largo y le echó menos* (señalando niveles de cada uno) ¿menos que cuál? *casi igual que éste* (A) ¿es menos o es más? *es igual* ¿y el rojo y el azul? (dudando)... *no, o sea... éste* (A) *es chico y le echó más, y el verde es ancho y le echó menos, y éste* (C) *le echó igual, más chico que el azul* ¿y el rojo tiene menos que el azul? *sí* ¿alguno de éstos te puede servir para comprobar? *sí* ¿cómo? (vierte verde en A_1 y rojo en A_2 y compara A, A_1 y A_2) *¡son iguales!* ¿qué había pasado antes? *porque éste* (B) *era más ancho y se veía poquita, y éste* (C) *es más largo y se veía normal, y éste* (A) *es más chico y le echó más* (corrige) *le echó iguales y se veía más porque éste* (A) *normal y tiene su agua igual, y éste más largo* (C) *y le echó igual que éste y éste más ancho y le echó igual* ¿entonces es la misma cantidad de agua? *sí.*

Nivel III. Marlet (9:0). *Son vasos, éstos* (A) *son más chicos y éstos* (C) *son más grandes.* Su juicio acerca del agua *la misma* (cantidad de agua) *porque a las tres les echaste tres* ¿por qué se ven diferentes? *porque ésta* (B) *está más ancha* ¿alguno te sirve para comprobar? *sí* ¿cómo? *con éste* (C_1) *le vació el agua* (verde) *y compruebo con éste* (azul en A) *y con éste* (roja en C) *que son iguales* vierte la verde en C_1 y compara azul en A, rojo en C y verde en C_1

dice que la azul también es igual pero que no necesita vaciarlo. Se le presenta la experiencia control de igual nivel y diferente cantidad, su juicio *diferente cantidad* ¿cómo supiste? *porque éste* (B) *tiene más, porque está más ancho y le cupo más agua ¿y* el rojo y el azul? *la misma cantidad de agua* ¿cómo supiste? (ignorando la diferencia de diámetro:) *porque los dos están del mismo tamaño* (nivel) *de agua* ¿cómo compruebas que son iguales? *con éste* (C_1) vacía B en C_1 y compara A, C y C_1 se le pide que anticipe A en C_2: no anticipa, lo vierte pero no hace caso de la diferencia entre azul y rojo pues es mínima.

Fausto (9:8). Su descripción: *éstos* (A) *son más chicos y éstos* (B) *son más anchos y éstos* (C) *más grandes y* explica *éstos* (A) *están más chiquitos pero gorditos y éstos* (B) *están anchos y gorditos y éste* (C) *está delgado y grande.* Su juicio: *sí es la misma cantidad... porque le estaba contando que a éste le echó tres, a éste también y a éste también* ¿por qué se ven diferentes? *éste* (B) *se ve chiquito porque está ancho y éste* (C) *porque está delgado* se le pide que compruebe e inmediatamente vacía verde en A_1, rojo en A_2 y compara A, A_1 y A_2: *compruebo que es la misma cantidad y* dice que cualquiera de los vasos le puede servir.

Zulema (9:9). Su descripción de los recipientes es dimensional: *éstos* (C) *son larguitos, éstos* (B) *son chaparritos pero gorditos, éstos son, uno* (B) *más gordito, éste* (A) *más flaquito y* (C) *más flaquito, cada uno, éste* (B) *es gordito, éste* (A) *regular y éste* (C) *flaquito... entonces éste* (A) *es gordito y ancho, éste* (B) *es chaparrito y gordito y éste* (C) *es altito y flaquito.* Cuando se vierte el agua su respuesta es correcta y emite juicios operatorios que justifican la diferencia de niveles: *es la misma cantidad, pero como éste* (A) *está así, no está muy ancho, le cupo más; éste* (B) *como está ancho, le cupo menos, y éste* (C) *como está larguito y flaquito le cupo más... sí le echó la misma cantidad, pero una se ve más chiquita, otra más grandecita y otra más grande.*

Juan (9:11). Su descripción de los recipientes: *los vasos* (C) *son como delgados y altos, los moldes* (B) *son gruesos y chiquitos y los vasos* (A) *son medianos.* Su juicio *es la misma cantidad de agua* ¿cómo supiste? *contándolos* ¿qué contaste? *las d'éstas, las medidas que echó, son tres de ésta, tres de ésta y tres de ésta* ¿alguno de estos vasos te puede ayudar a comprobar que es la misma cantidad de agua? *sí* ¿cómo le harías? *midiéndolos con uno de éstos* (B_1) *o con un vaso, cualquiera de las tres cosas sirven* házlo con el que prefieras *con un vaso* (toma A_1 y vierte en él el rojo, marca con [illegible] dedo el ni[illegible] al que llegó, regresa el rojo a C y vier[illegible] en A_1 el verd[illegible]ca otra vez con el dedo y hace lo mis[illegible] con el azul) *sí [illegible]es lo mismo* ¿qué hiciste? *medí las mismas cantidades de é[illegible] y de ése y dieron la misma cantidad* ¿cómo supiste que era la misma cantidad? *o sea* *que con ésta primero medí y hasta aquí llegó, luego ésta la eché y midió lo mismo y ésta también.* Se le presenta la experiencia control de diferente nivel y cantidad (perceptualmente A > C > B): dice que es diferente cantidad, *ésta* (B) *es mayor, ésta* (C) *es menor y ésta* (A) *es regular* ¿cómo supiste? *viendo, porque ésta* (B) *por lo grueso se ve que es menos que ésta* (A) *pero si lo midiera en un frasco, en un vaso igual que éste* (A) *daría más, mediría más que ésta* ¿lo verde se ve menos? *sí, por lo grueso, y lo azul se ve casi lo mis... más porque lo mismo delgado hace que se suba el agua y lo rojo por lo delgado y éste se ve que es menos, éste* (A) *por lo grueso también si no se ve de la misma, un poquito más grande pero ésta* (A) *tiene regular, ésta* (C) *menos, y ésta* (B) *más* ¿cómo lo puedes comprobar? *midiéndolo en un vaso* ¿a ver, en uno nada más o te pueden servir varios? *uno solo* (vierte rojo en C_1 y delimita el nivel, regresa el agua; vierte azul en C_1 y delimita, regresa y vierte verde en C_1 y corrobora las diferencias) ¿entonces? *éste* (verde) *es más que todos, a simple vista se ve* pero el vaso del azul es diferente, ¿así sirve? *sí, porque es lo mismo, éste* (azul) *es menos que éste* (verde) *y éste* (rojo) *es menos que éste* (azul) ¿y el verde y el rojo? *el verde es más y éste* (rojo) *es menos.*

TAREA 5. Nivel II. Moisés (9:8). Cuando la serie está en orden ¿cómo supiste? *porque se van diferenciando* (se va agregando uno cada vez) *y los podemos medir.* Con los cartones en desorden se equivoca, pero para explicar rehace la serie, desde el señalado en orden descendente hasta el primero y se da cuenta del error y corrige; no se le ocurre otra forma de comprobar.

Nivel III. Zulema (9:9). Su seriación es correcta y elige el menor de los restantes mediante la comparación por pares. Con la serie en orden contesta correctamente y su explicación de cómo supo es ir añadiendo una unidad a cada escalón para dar el rango siguiente, lo cual "se ve" en la diferencia entre dos cartones adyacentes: *ésta* (1 en 2) *cabe dos veces porque de aquí es aquí* (gesto de subdividir el 2o en dos unos), *luego de aquí, aquí* (iterando el 1o), *éstas dos más una de aquí* (coloca el 1o en el tramo superior del 3o y muestra la diferencia de tamaños entre el 2o y el 3o) *ya se completaron la tablita de éste* (3o), *entonces ésta* (1o) *aquí* (la diferencia entre 3o y 4o) *ya se completó la tablita de éste* (4o), *caben cuatro, aquí* (5o) *caben cinco, aquí* (6o) *caben seis y aquí* (7o) *caben siete.* Este sujeto ve la necesidad de que sus comprobaciones coincidan con sus juicios: si sabe que al rango 8 le corresponden 8 unidades, itera cuantas veces sea necesario para que tales datos coincidan. Con la serie deshecha comprueba rehaciendo la serie totalmente, pero haciendo alto en el rango señalado, como explicando que hasta allí se comprueba y que el resto es simple complemento a su explicación.

Luis (9:0). ...¿cuántos como éste (1o) podemos hacer con éste (5o)? *cinco* ¿cómo supiste? *poniéndolo así* (itera el 1o sobre el 5o) ¿en qué te habías fijado antes de hacerle con el cartoncito? *primero en éste* (2) *de la mitad* (hace ademán señalando la mitad del 2o), *después aquí* (3o) *suponte, aquí también está así* (como el 2o), *lo partimos a la mitad, quedan dos y el pedacito que sobra es éste* (1o) *y así como los demás* (cada cartón tiene una unidad de más). Con la serie en desorden se señala el 7o y, para contestar, toma el 1o, lo itera sobre el 7o y da la respuesta correcta.

Juan (9:11). ¿Cómo sabes que con éste (8o) se pueden hacer 8? *así, midiéndolos* ¿lo habías medido? *no lo había medido pero se ve: simplemente con éste* (2o) *se puede hacer dos, con éste* (3o) *tres, porque es un poco más grande, con un cuadro más grande, por eso se sabe que se pueden hacer con éste* (7o) *siete y con éste* (8o) *ocho.* Con la serie en desorden, para comprobar, itera el 1o sobre el 7o ¿hay otra forma de comprobar? *sí, midiéndolo, volver a formar la escalerita* (la vuelve a formar) ¿cómo es más fácil, midiéndolo o haciendo otra vez la escalerita? *midiéndolo.*

Virginia (9:8). ...¿cómo supiste? *midiéndolos* ¿los mediste? *no* ¿cómo supiste? ***porque están formados*** *y podemos hacer cuadritos de éstos* (= cada posición es un número más de cuadritos contenidos) ¿cómo podemos estar seguros? *midiéndolos con el cuadrito* (1o) ¿y otra forma? *poniéndolos en tamaños.*

Sujetos de 11 años de edad (6o. grado).

TAREA 1. Nivel III. Carmen (11:11). Su descripción es incompleta pero correcta, dice que no se fijó al final y ya no se acuerda. Su serie la hace sin problemas. Cuando se le pregunta por el 6o: *no, ésta ya no la conté, pero creo que fueron seis* ¿por qué crees que fueron 6? *porque van de uno en uno.*

Tania (11:3). Su descripción: *les pusiste primero, al primero le pusiste una medida del tubo que estaba cortado, entonces, primero le pusiste al primero uno, una medida; luego al segundo le pusiste dos, luego al tercero le pusiste tres, luego al cuarto le pusiste cuatro, y al quinto le pusiste cinco, y al sexto le pusiste seis medidas y al séptimo le pusiste siete medidas.* Con los tubos al azar las preguntas son tan obvias que no sabe cómo explicar, alude a que sabe la respuesta fijándose en qué tanto queda vacío en el tubo, mientras menos espacio haya vacío, habrán más unidades dentro *porque se ven las diferencias que tienen muy poco cuello* (espacio vacío) *y más cuello.*

Guillermo (11:2). Su descripción: *los tubos fue llenando de un vasito en uno a llenar a un tubo, fue de uno hasta el siete, primero fue llenando de uno, luego dos, luego tres, luego de cuatro, de cinco de seis y de siete.* Se da cuenta que a cada tubo le caben como máximo siete unidades ¿cómo sabes que son 5 con éste y no 6? *porque... aquí le echó cinco vasitos de agua y todavía cabrían dos más pero nada más son cinco.* Para comprobar propone una serie de trasvases y comparaciones que muestran que maneja bien la serie de los primeros números naturales: *serían cuatro, más tres que le subiéramos serían siete, pero si le quitáramos los tres serían cuatro... al tubo número tres vaciándole otra y saber... poner los dos tubos iguales para saber si son iguales.*

Alejandro (11:5). En su descripción de cómo se vertió el agua usa un vocabulario muy específico: diferencia bien los ordinales y cardinales. Entiende muy bien que de un tubo a otro adyacente la diferencia es una unidad: *en el primero usted puso una medida de ese chiquito, en el segundo puso dos y así fue más, cada vez más, más que en el anterior, puso uno más que en el anterior hasta que llegó a siete medidas de ésas.* Entiende muy bien que si el nivel se duplica (con el mismo grosor) también se duplica la cantidad de líquido ¿alguna otra forma de comprobar? *éste* (3o) *tiene tres veces más grande* (nivel) *que éste* (1o).

TAREA 2. Nivel II. En este nivel se presenta un caso particularmente interesante (Elizabeth) pues aunque el sujeto entiende las preguntas y las contesta en forma operatoria, al llegar a una experiencia control su respuesta se ve afectada por factores dinámicos que le hacen responder de manera totalmente distinta.

Elizabeth (11:6). En su primer juicio dice que 1A y 4A son iguales ¿cómo supiste? *pues podría volver a cortar éste* (4A) *y los pegaría así* (cortaría los segmentos de 4A y los pegaría en línea recta como 1A) *¿y* quedarían iguales? *sí* ¿con alguno de éstos puedes comprobar? (toma 3R, cuenta 6 segmentos de 4A y luego itera 3R sobre 1A, también 6 y establece la igualdad) se le propone que use otra cosa y toma el listón, por intenta seguir el mismo método: mide un segmento de 4A con el listón y lo itera en 1A, por problemas prácticos no establece la igualdad y dice *no se puede comprobar con un hilo.* Se le presentan 1A, 2A y 3A, dice que son iguales ¿cómo sabes? *porque si yo quitara éste* (segmento de 2A) *quedaría ya por aquí así* (indica un tramo de 1A), *si quito éste* (segundo segmento de 2A) *queda entero* (en 1A) *¿y* el otro (3A)? *igual, nada más lo estiro y queda igual* ¿te sirve algo para comprobar? *éste* (listón) ¿cómo? toma el listón y mide un segmento de 2A, mantiene el punto de referencia y lo traslada a 1A, después regresa a 2A y mide el segundo segmento y lo coteja en continuidad con el 1A y finalmente el tercer segmento (el experimentador le ayuda a marcar puntos de referencia) *son iguales* ¿y el otro (3A)? repite la misma operación y dice que *los tres son iguales.* Se le contrargumenta por límites *sí son iguales* ¿por qué? *porque al momento de ponerlo así en curvas se usa más palo, entonces, si lo pones bien es lo mismo.* Con la experiencia control de las hormigas dice que *caminan diferente* ¿una camina más que otra? *sí* ¿cuál camina más? *la de este lado* (3A) ¿y cuál camina menos? *ésta* (1A) ¿por qué camina más ésta (3A) y ésta (1A) menos? *ésta* (3A) *camina más porque va en curva y ésta* (1A) *va recta* ¿y ésta (2A)? *también porque va en curva* ¿ésta (2A) camina más que ésta (1A)? *ésta* (3A) *camina más, ésta* (2A) *menos y ésta* (1A) *es la menos* ¿caminan diferente? *sí* ¿aunque hayan medido lo mismo? *sí* ¿pero cómo caminan más si son igual de largos? *porque ésta* (3A) *va en curva, o sea, da más vuelta y ésta* (1A) *se va recto* si empiezan a caminar al mismo tiempo desde aquí (se empareja uno de los extremos de cada palo), y caminan parejitas, ¿llegan al mismo tiempo aquí y aquí? *no* ¿cuál llega primero? *ésta* (3A).

Los casos de Angeles y Alejandro son típicos de este nivel de desarrollo.

Angeles (11:8). Su juicio: *no, no tienen lo mismo de largo* (1A > 4A) ¿cómo supiste? *porque éste* (1A) *es derecho y midiéndolo éste* (4A) *queda más chico* ¿hasta dónde? *hasta acá* (coincidencia de límites) ¿cómo lo medirías? *nada más poniéndolo así y ya con éso se toma la medida.* Para comprobar toma el listón, mide 4A y luego 1A, por transitividad 1A = 4A ¿qué había pasado? *es que se vio más chico éste* (4A) ¿te puede servir éste (3R) para comprobar? *no... porque es que para medir éste* (1A), *cuando termine de medir éste* (4A) *no podré medirlo también* ¿por qué? *aquí* (4A) *tendría que ver cuántos son, y acá* (1A) *no* ¿cómo le harías en ése (4A)? *nada más poniéndolo y así contando cuántos son* (itera en 4A y cuenta) *seis* se le ayuda a iterar en 1A y cuenta seis (asombrada:) *¡también se pudo medir con éste!* ¿entonces son iguales de largos? *sí.* Se le presentan 1A, 2A y 3A: fluctúa entre iguales o diferentes 1A y 3A: *éste está igual a éste* (1A = 3A) ¿cómo supiste? (trata de medirlo gestualmente) *no, no está igual* ¿está más chico o más grande? *más grande* (3A > 1A) ¿y el otro? (2A y 1A) *yo creo que están iguales* ¿te sirve alguno para comprobar? *no... porque éste está más grande y no se puede medir para acá, y éste está más chiquito* (los rojos son de tamaños diferentes que los de los segmentos de los azules) ¿y el listón no te puede servir? *sí* (mide 3A con el listón de segmento en segmento y después 1A) *sí están iguales* ¿en qué te habías fijado antes? *en lo grande de las d'éstas* (segmentos de 3A) ¿y éste (2A)? (rota 2A en 1A y 2A < 1A) *salió más chico* (2A) ¿entonces estos tres (1A, 2A y 3A) fueron iguales o diferentes? *iguales.* Los cuatro palos azules ante la consigna de las hormigas: *lo mismo de largo* se contrargumenta *no, ésta* (4A) *llegaría más pronto* ¿caminan igual o diferente de largo? *igual de largo y* después, seguro: *pero caminan lo mismo y llegan más pronto las tres* (2A, 3A y 4A)... *porque las tres son iguales a ésta* (1A)... *porque las tres son iguales de éste tamaño* ¿cuál llega más pronto? *yo digo que las tres.*

Alejandro (11:5). Al comparar 1A y 4A no entiende la consigna y juzga por límites que 1A > 4A después de medirlos con el listón grande. Después ,cree que su respuesta ha sido correcta y sus argumentos y acciones posteriores van dirigidas a confirmarlo, argumenta, después de iterar 3R en 1A y 4A, que 4A es mayor que 1A porque 1A tiene un solo lado y 4A tiene 6 ¿por qué 1A es más chico que 4A? *porque éste* (4A) *tiene seis lados ¿y* ése (1A)? *uno horizontal*; esto es a pesar de que él solo elige 3R para comprobar (iterando) y que cuenta 6 segmentos para cada palo. Después explica que no entiende: *no entiendo si midiendo todo ésto* (segmentos de 4A) *o nada más de aquí para acá* (de extremo a extremo), al aclararse la confusión afirma que 1A es igual a 4A *porque esto* (1A) *mide seis y estos* (4A) *también.* Con 1A, 2A y 3A su juicio es 1A > 3A > 2A; para comprobar mide 1A y 2A con el listón y establece la igualdad, después mide 3A que, por problemas prácticos, dice que es menor, por lo que se cambia 3A por 4A. Mide 4A con el listón y dice que 1A, 2A y 4A son iguales. Con la consigna de las hormigas dice que *caminan lo mismo* ¿cómo supiste? *porque aunque esto esté así muchas curvas pero caminan lo mismo porque son iguales* se le contrargumenta con límites *no importa, caminan lo mismo, porque aquí ésta tiene la misma distancia que ésta y ésta, entonces las tres caminan lo mismo, aunque ésta salga por aquí, ésta por acá y ésta por acá, caminan lo mismo.*

Nivel III. Juan (11:11). Antes de emitir su juicio acerca de 1A y 4A, cuenta seis segmentos de 4A, piensa que son iguales, toma 4A y va recorriéndolo sobre 1A (un solo segmento pues ve que todos son iguales) *sí miden lo mismo de largo* ¿qué hiciste? *como todos estos lados son casi, casi iguales* (segmentos de 4A), *entonces así como aquí* (4A) *son seis, seis así, le estaba haciendo así* (itera el primer segmento de 4A sobre 1A) Comprueba con el listón y con 3R iterándolo. Cuando se le presentan 1A, 2A y 3A establece igualdades pero dice que los palos no le sirven para comprobar *porque no se pueden doblar y no puede dar vuelta aquí.*

Carmen (11:11). Se da cuenta que puede haber confusión con la pregunta: hasta dónde llega o qué tan largo es *porque está más chiquito* (1A > 4A) *sólo que contando así, así, así y así* (agregando un segmento a otro a manera de hacer una línea recta) *ya podía dar* (alcanzaría el límite de 1A), *pero así no se puede contar* (medir) *porque así se ve más chiquito, igual así, se ve más chico; así se ve chico pero* *contando así y así y así y así y así ya se podía comparar la altura ...* más adelante: ¿cómo tendría que ser algo para que te sirviera? *podía ser uno igual a éste* (1A) *pero con números así de centímetros y milímetros* (1A graduado) ¿y el listón? *sí, ése sí me sirvió porque se puede hacer para todos lados.*

Tania (11:3). Dice que 1A, 2A y 3A son iguales pues mide (rota) 2A y 3A sobre 1A. Cuando se le pregunta qué cosas le sirven para comprobar dice que le sirve el listón pero no le sirve 3R *porque los lados, éstos* (segmentos de 3A) *si tuviera otro compañero que tuviera la misma medida que éste* (segmento) *y otro su compañero, se podría con éste* (3R) se le pide que explique de nuevo *o sea, aquí* (segmento de 3 cms. de 3A) *esto se mide igual, pero aquí no* (segmento mayor) *porque no tiene el mismo espacio, entonces le falta más; el pedacito chiquito no está igual de largo que el cachito del quebrado* (el segmento de 3A es diferente de 3R) *y tampoco éste* (6R), *éste es más* ¿tendría que ser a fuerzas uno igual o puede ser uno diferente? *podría ser éste* (6R) *pero marcarse bien.* Con las hormigas dice que *caminan lo mismo de largo... porque aunque algo esté redondo o cuadrado o la forma que quieras y es del mismo que está derecho, caminan lo mismo, o sea, si está redondo no va a caminar más que el otro.*

Ciro (11:8). Para emitir su juicio toma 1A y mide un segmento de 4A y observa *son como... si han de ser iguales* ¿cómo supiste? *es que éste* (4A) *está como, está pegado de puntas, entonces son 1, 2, 3, 4, 5, 6* (segmentos de 4A), *ésta* (1A) *tiene forma* (tamaño) *como de seis pedazos* ¿alguno te sirve para comprobar? *el listón* (mide 4A delimitando segmento por segmento correctamente, luego mide 1A) *sí, sí son iguales* ¿otro te puede servir? *éste* (toma 3R y lo itera sobre 4A y cuenta 6, luego sobre 1A y también cuenta 6) *sí son iguales* repite la operación con el listón grande y el popote en 1A, 2A y 3A y establece las igualdades: *sí, son iguales todos* ¿por qué si son iguales se ven tan diferentes? *porque éste* (1A) *es como si le cortaran y le fueran pegando e hicieran una figura como ésta* (4A); *ése* (1A) *se puede cortar y pegar como los otros también para hacer la misma figura.*

TAREA 3. Nivel III. Luis (11:11). Su seriación es correcta; intercala los elementos extras sin problema; con los bastones al azar contesta correctamente todas las preguntas usando como herramienta la resta. Su vocabulario es diferenciado al nombrar ordinales o cardinales dependiendo de la pregunta ¿en cuál está parado? *en el sexto* ¿cuántos subió antes de llegar a éste? *cinco* para asegurar sus respuestas cuando la serie está en desorden ¿cómo podemos estar bien seguros? *porque los podemos ir formando así* (rehace la serie).

Tania (11:3). Su serie la hace sin problemas eligiendo siempre el menor de los restantes; también intercala sin problemas. Cuando la serie está ordenada y se le pregunta por bastones al azar ¿cómo supiste? *porque los conté 2, 4 y 5, entonces está el muñequito en el quinto, entonces subió cuatro y le faltan otros cinco* ¿cómo sabes que le faltan 5? *porque tiene diez escalones.*

Carmen (11:11). Inicia su serie colocando el más grande y el más chico en los extremos y después coloca todos verticales para elegir cada vez el más grande e ir acomodándolos. Para intercalar, cada vez toma los adyacentes, los coloca verticales y acomoda los 3. Usa la resta como mecanismo para contestar las preguntas sobre elementos al azar y cuando la serie está desordenada, para poder comprobar vuelve a seriar los bastones hasta el elemento señalado.

Elizabeth (11:6). Su serie base es correcta e intercala sin problemas los elementos extras. Con los bastones al azar hace la diferencia entre ordinal y cardinal en su lenguaje; utiliza la resta *se paró en el sexto, para llegar a diez sobran cuatro,* y para comprobar cuando la serie está deshecha *volviendo a poner otra vez la escalera.*

Ciro (11:8). Seria e intercala los elementos sin problema. En las preguntas al azar responde por medio de las operaciones aritméticas ¿cómo supiste? *porque son cuatro más seis son diez, y son diez escalones.* En desorden contesta correctamente y comprueba *volviendo a armar la escalera.*

TAREA 4. Nivel II. Carmen (11:11). Su descripción de los recipientes: *éste* (A) *es un vaso grueso, éste* (C) *es uno delgado y éste* (B) *es uno... más o menos para echar pasteles, un recipiente de vidrio... está* (B) *más chaparrito y más ancho, y éste* (C) *más grande, o sea, más grande y más delgado, y éste* (A) *está más mediano y más grueso.* En su juicio dice *es la misma* ¿cómo supiste? *porque conté los d'estos, los chiquitos, le echó tres a cada uno* ¿por qué (B) se ve más para abajo? *porque es más ancho* ¿estos otros te pueden servir para comprobar? *no* ¿por qué no? *porque si echara con este vaso, echara así, no, sólo con el chiquito así ya se podría, pero así solo no se podría, porque se podría pasar* (esto es, los grandes no sirven como unidades de medida) ¿si los vaciaras en otros o si hicieras alguna otra cosa? *o sea, si éste lo vaciaba en éste es la misma cantidad de agua, si éste en éste y éste en éste es la misma cantidad* (el A en A_1, B en B_1 y C en C_1) ¿y si el verde lo vacías en ése (A_1)? *ya no estaría como ése* (el nivel cambiaría), *estaría igual que éste* (azul). Insiste en que sólo con M puede comprobarse. Ante la experiencia control de diferente nivel y cantidad (perceptualmente niveles

A > B > C) dice que *el verde tiene más y el rojo menos* ¿cómo puedes comprobar? *echando ésta aquí* (roja en B_1), *aquí adentro y ésta aquí* (verde en C_1).

Nivel III. Juan (11:11). Su descripción de los recipientes es más o menos exhaustiva: *los vasos son diferentes porque éstos* (C) *son más altos, y éstos* (A) *están más bajos, están más chiquitos, y éste* (A) *tiene el vidrio más grueso y éste* (C) *más delgado, y éstos* (B) *son más anchos que los dos vasos.* Su juicio acerca del agua: *es igual porque a los tres les echó tres vasitos* ¿cómo puedes comprobar? *vaciando éste* (verde) *aquí* (A_1) *y éste* (rojo) *aquí* (A_2) ¿y qué pasaría? *se probaría, se formaría del mismo tamaño el agua* ¿por qué se veía menos la verde en (B)? *porque aquí* (B), *porque es más ancho, y aquí* (A) *porque es largo y está menos ancho, entonces se sube más rápido el agua* (en A).

Luis (11:11). Su descripción: *éstas* (B) *tienen más grande el círculo* (diámetro) *y ésa lo tiene chico.* Su juicio acerca del agua: *son iguales* ¿cómo supiste? *porque los iba contando cuánto del vasito, cuántos les iba echando* ¿por qué se ve diferente? *porque aquí la verde aquí tiene muy gordo* (diámetro de B), *está muy grueso, o sea, muy grande, por eso y para que alcance a todo es muy chico así* (nivel) ¿cómo puedes comprobar? *vaciando ésta* (verde) *al vaso* (vierte en C_1 y compara) ¿y el azul? *también echándolo a ése vaso* (vierte en C_2 y compara).

Alejandro (11:5). Su descripción: *son unos vasos* (C), *vasos más chicos* (A), *son así como unas cacerolitas de vidrio* (B)... *estos* (C) *son más largos y más delgados; estos* (A) *más chicos, más cortos y más gordos;* (B) *son más chicas que estos vasos* (B < A) *y más angostas* (= anchas). Su juicio acerca del agua: *la misma cantidad* ¿cómo supiste? *vi cuando le echó tres en cada una, tres de verde, tres de azul, tres de roja* ¿por qué se ven diferentes? *porque aquí la verde, porque está más angosto* (ancho) *y mientras más angosto éste se ve menos agua y aquí está menos angosto que aquí, por eso se ve más que aquí* (A se ve más que B) *y aquí también se ve más que aquí porque aquí está delgado y largo* (C) ¿cómo les explicarías a unos niños chiquitos que es la misma cantidad de agua? *les explicaría que éste* (B) *como está más angosto ocupa menos espacio, y acá como está menos angosto* (A) *el agua, en vez de hacerse para los lados se sube para arriba y aquí* (C) *porque está más así se sube más para arriba y no a los lados, como aquí.* Otra forma de demostrar: *enseñándoles que les echó la misma cantidad de agua, que vean bien que es la misma cantidad de agua que agarro, que echo.* Con experiencia control de diferentes niveles y cantidad: ¿cómo podrías demostrar que el verde tiene más y el rojo tiene menos? *con estos tres* (A, A_1 y A_2)... *los vaciaría éste* (verde) *aquí* (A_1) *y comprobaría, vaciaría* *éste* (rojo) *acá* (A_2) (señala niveles verde > rojo y los vierte, con lo que verde > rojo > azul) *éste* (verde) *tiene más* ¿y el que tenía menos no era el rojo? *se veía* ¿te sirve algún otro? *también las cazuelitas y los vasos largos.*

Ciro (11:8). Su descripción: *Estos* (A) *vasos son, están un poco más chicos que los otros* (C), *pero éstos* (B) *parecen cacerolitas.* Su juicio acerca del agua: *es la misma cantidad de agua* ¿cómo supiste? *porque iba contando las veces que usted iba echando agua y fue aquí le echó tres, también aquí y también aquí tres* ¿por qué se ven diferentes? *porque éste* (B) *está más grande y más gordo, éste* (A) *está un poco más chico y más gruesesito también y éste* (C) *está más grande y más delgado, por eso en éste* (C) *se ve más, en éste* (B) *se ve menos y en éste* (A) *se ve medio... éste* (B) *está más grueso y como está muy grueso, es la misma cantidad pero no se ve lo mismo, porque está más grande que lo de abajo de éste y también... y éste* (C) *se ve más porque está más delgado y más grande, y éste* (A) *porque está... es el que está más medio grueso y tiene la misma cantidad nada más que se ve más chico* ¿cómo puedes comprobar que tienen la misma cantidad? *vaciando éste* (rojo) *aquí* (B_1) *y ésta* (azul) *acá* (B_2) *y subiría a lo mismo o vaciando ésta aquí y ésta acá, o éstas dos en éstos* (en A_1 y A_2 o en C_1 y C_2).

Luisa (11:11). Su descripción de los recipientes: *éste* (A) *está gordito y grueso, y éste* (C) *está delgadito y alto y están* (B) *chaparritos gruesos.* Su juicio acerca de la cantidad de agua: *es la misma cantidad de agua* ¿cómo supiste? *porque le estaban echando tres vasitos a éste, a éste y a éste, tres al azul, tres al verde y tres al rojo* ¿por qué se ven diferentes? *porque ésta* (verde en B) *está ancha y está más redonda; ésta* (azul en A) *está más inclinadita, más central, y ésta* (roja en C) *está más chiquita, delgadita y entonces se ve más en ésta* (C), *pero es la misma cantidad los tres* ¿cómo compruebas que es la misma cantidad de agua? *poniendo ésta* (verde) *vaciándola en ésta* (A_1), *poniendo ésta agua verde en donde está de ésta agua de la azul, poniendo aquí* (A_2) *la roja también y así comprobamos que es la misma cantidad de agua* ¿te sirven nada más esos vasos o los otros también te pueden servir? *también puedo vaciarlo en éstos* (C extras) *o también en los platitos* (B extras).

TAREA 5. Nivel II. Carmen (11:11). Hace la serie correctamente y sin problemas. Cuando se le pregunta por algún elemento al azar: ¿cómo supiste? *contando así cuadrito por cuadrito* (coloca el 1o en un extremo del 8o y hace gestos de iteración). Más adelante, con la serie en desorden, dice que sólo iterando puede comprobar, que el rehacer la serie no le sirve de nada, lo cual significa que no coordina el rango de los elementos con la cantidad de unidades que incluye.

Nivel III. Guillermo (11:2). Su serie y respuestas son correctas, y su razón es que si coloca la unidad (1er. cartón) sobre (en continuidad) cada uno de los cartones, quedarán a la misma altura que el siguiente: ¿cómo supiste? *porque... aquí se puede medir... se puede poner el escalón uno en* (sobre) *el escalón dos y queda la misma altura del número tres, del escalón tres; así, luego voy con el tercero y es la misma altura que el cuatro, luego que el cuatro es la misma altura que el cinco y luego el cinco es la misma altura que el seis y el seis es la misma altura que el siete.* Con la serie en desorden contesta correctamente: ¿cómo supiste? *porque ése es el número ocho, y se puede medir y es un escalón menos* (señala el 7o) *que el ocho* ¿cómo sabes que ése es el ocho? *se puede saber haciendo de nuevo la escalera* ¿hay otra forma en que podamos saber? *sí, el escalón uno, midiendo al escalón siete **cuántos escalones tiene*** (itera el 1o y el 2o a un lado del 7o marcando puntos de referencia con su dedo y va sumando unidades:) *así, ponía el escalón uno, luego el otro* (2o), *luego ponía el escalón de nuevo, el uno, allí iban cuatro* (1 + 2 + 1), *luego volvía a poner de nuevo el escalón dos y ya eran seis, luego volví a poner el escalón uno y fueron siete.* También puede comprobarse *con el número cinco y luego con el escalón dos, serían siete... o con el seis y de nuevo poniendo el uno.*

Juan (11:11). Hace la serie sin problema. En las preguntas con los cartones en orden usa la resta: *porque aquí son diez, le resté dos y quedan ocho.* Con la serie deshecha: ¿cómo supiste? *más o menos calculé cuántos caben de éste* (1o) ¿cómo podemos estar seguros? *formándolos* (ordena hasta el cartón señalado) ¿hay otra forma de comprobar? *haciéndole así* (iterando el 1o sobre el 7o).

Luisa (11:11). Su serie es correcta y sin problemas; con la serie en orden ¿cómo supiste? *porque casi es la misma medida, nada más lo medí y es lo mismo; la altura va subiendo de éste cuadrito 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ó 10* (señalando cada cartón) ¿cómo compruebas? *lo puedo poner de nuevo* (rehace la serie hasta el señalado) ¿hay otra forma de comprobar? *sí, poniendo el cuadrito 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8* (iterando con el 1o en el 8o).

Alejandro (11:5). Cuando la serie está en desorden se señala el 7o ¿cómo supiste? *porque se ve más chico que los que están después, que los que siguen después de ése* ¿hay otra forma de comprobar? *sí, midiéndolo así* (muestra cómo terminar la serie) ¿y hay otra forma de comprobar? *sí, midiéndolo con éste y éste* (1o y 2o), *con estos dos* ¿cómo le harías? *así* (itera en forma alternada el 1o y el 2o sobre el 7o) ¿y con el chiquito solamente? *sí* ¿y con ése (2o) solito? *no* ¿por qué? *nada más se mide a la mitad* ¿cómo? *cuando son los seis se mide a la mitad y ya son los siete* (son 2 + 2 + 2 y luego la mitad de 2 = 7).

ANALISIS INTRASUJETO.

Sujetos de 7 años de edad.

Marco Antonio.

En la tarea 1, este sujeto hace explícita una seriación verbal, esto es, su descripción de cómo se vertió el agua hace referencia a un incremento de la cantidad para cada tubo. Asimismo, especifica claramente que para identificar la cantidad que contiene cierto tubo, habrá que fijarse, ya sea en el lugar que ocupa el recipiente, o en el nivel del agua que contiene.

Con respecto a la tarea de medición de longitudes es importante señalar que este sujeto demuestra un avance en su ejecución durante esta experiencia ya que, aunque originalmente emite un juicio perceptual, éste es cambiado por uno operatorio pues Marco Antonio, al entender que el problema específico es comparar longitudes de los trayectos y no distancias entre dos puntos, es capaz de iterar una unidad de medida que se le propone. Asimismo, cuando los objetos que tiene disponibles no le sirven como unidades de medida, también puede utilizar un tercer elemento que le permite establecer la igualdad mediante la transitividad.

Durante la tercera tarea lleva a cabo una seriación sistemática en la cual elige cada vez el elemento más pequeño de los restantes para colocarlo. Sin embargo, presenta ciertos problemas al intercalar los nuevos elementos, pues la serie ya establecida se le presenta como un todo rígido difícil de alterar.

En la cuarta tarea, Marco Antonio demuestra desde un principio que ha notado las diferencias en las dimensiones de los recipientes, de tal manera que al emitir su juicio acerca de la cantidad de agua que contienen se guía por rasgos perceptuales que inmediatamente pone en duda. De esta manera, es capaz de utilizar los vasos extras para establecer las comparaciones necesarias y explicar adecuadamente el por qué de las diferencias perceptuales.

Por otra parte, durante la quinta tarea, este sujeto describe el material por pares de elementos (consecutivos) pero su serie total es global. Como era de esperarse, sus respuestas son correctas y sus explicaciones hacen alusión a que el número de cuadros que pueden hacerse con cada elemento se sabrá si se identifica el lugar que tal elemento ocupa dentro de la serie o si aquel es cortado tomando como medida la unidad.

Los juicios que Marco Antonio emite con respecto a sus gustos y dificultades durante la ejecución de toda la sesión, hacen referencia a que la primera tarea, la de los tubos, es la que más le gustó, de la misma forma que la que menos le gustó fue la segunda (palos), la quinta fue la más fácil y la más difícil la de la seriación de los bastones. Por su parte, establece similitudes perceptuales entre las de los bastones y los cartones (con las dos se hicieron escaleras) y entre las de los túbos y los vasos (se les echaba agua). Asimismo, es interesante señalar que también establece una similitud entre las tareas que hacen referencia de alguna manera a una unidad de medida (cartones y palos, palos y vasos, y palos y tubos) argumentando que se medían, llegando incluso a establecer equivalencias entre las diferentes unidades y la posibilidad de utilizarlas indistintamente para las diferentes tareas, esto es, con un cartón o un palito pueden medirse los niveles del agua, así como pueden usarse los diferentes vasos para medir los cartones.

David.

La ejecución de este sujeto en la primera tarea se caracteriza por resolver las demandas adecuadamente, sin embargo, es muy parco en sus verbalizaciones.

Con respecto a la segunda tarea sus juicios son perceptuales, incluso después de haber establecido una igualdad numérica cuando se le muestra cómo iterar. De igual manera, a pesar de determinar la igualdad entre uno de los palos y un popote y otro de los palos y el mismo popote, no establece la igualdad de los palos mediante la transitividad, con lo que finalmente retorna a sus juicios perceptuales.

Durante la tercera tarea lleva a cabo la seriación correctamente, presentando gran dificultad al intercalar los elementos extras. Asimismo, al desordenarse la serie sus respuestas no llegan más allá de las aproximaciones y no ve la necesidad de comprobarlas.

La cuarta tarea es resuelta sólo en un nivel perceptual, aunada a una descripción unidimensional de los recipientes. Sin embargo, puede notarse un inicio de multiplicación de relaciones cuando se le piden anticipaciones del nivel que alcanzaría el líquido si se vaciara en recipientes diferentes ya que señala niveles aproximados pero, como era de esperarse, vuelve a los juicios perceptuales ante la más mínima contrargumentación.

Su ejecución durante la tarea 5 muestra que entiende que cada elemento está formado por un conjunto de unidades, las cuales pueden identificarse si el total es subdividido, sin embargo, no alcanza a diferenciar la cantidad de cortes que se harían y el número de unidades que se obtendrían con tales cortes.

Los juicios que establece sobre las similitudes de las tareas son perceptuales, esto es, cartones y bastones se parecen en que con ellas se formaron escaleras, y que los tubos y los vasos tenían agua. Es importante señalar que, a pesar de muchos trabajos, llega a indicar que los cartones y los palos se parecen en que en las dos se iteraba, aunque para él la iteración fue una acción secundaria.

Angélica.

Aunque la descripción de este sujeto en la tarea 1 no hace referencia al número de unidades vertidas en cada elemento Angélica entiende perfectamente que la cantidad de agua que contiene cada tubo puede volver a ser vertida en un número de vasos igual al de la posición que tal tubo ocupa dentro de la serie, coordinando así el rango con el número de unidades que contiene. Es importante hacer notar que esta niña, para evaluar el número de unidades que contiene cada tubo, cuenta en qué posición se encuentra y, antes de dar su respuesta, lleva a cabo el conteo nuevamente pero esta vez confirmando con sus dedos.

Durante la tarea 2 muestra un razonamiento bastante avanzado, ya que establece la igualdad entre los palos de formas diferentes mediante una "transformación" de uno de ellos para igualar la forma del otro y así poder compararlos; sin embargo, al llegar a la experiencia control de las hormigas, emite juicios perceptuales.

Al trabajar en la tarea 3, Angélica lleva a cabo su serie sin dificultad, no así cuando tiene que intercalar los nuevos elementos. Es importante resaltar que cada vez que da una respuesta ésta viene antecedida por el conteo total de los elementos, como si tuviera que confirmar los datos para tener seguridad de sus respuestas.

Los juicios que emite Angélica en el inicio de la tarea 4 son perceptuales, y posteriormente, fluctúan entre la conservación y no conservación de las cantidades dependiendo del número y tamaño de los recipientes en que es vertida el agua, sin poder definir finalmente, si la cantidad es o se ve diferente.

En la tarea 5, Angélica explicita una seriación verbal muy general. Sin embargo, coordina con gran facilidad el rango de cada cartón con el número de unidades que contiene, utilizando, para comprobar, tanto la iteración correcta de la unidad como la posición que ocupa el elemento señalado dentro de la serie.

Durante sus juicios finales, este sujeto dice que todas las tareas fueron fáciles, le gustaron mucho y ninguna fue difícil; empero, no es capaz de establecer similitudes entre ninguna de ellas.

Daniel.

Con respecto a la primera tarea, Daniel reconoce un aumento del agua en los tubos y explicita verbalmente una seriación, sin embargo, da una respuesta global ante las cantidades específicas.

En la tarea 2, de comparación de longitudes, sus respuestas son un poco más avanzadas. Para el sujeto es claro que un continuo puede fraccionarse y tomar formas diferentes, reconoce la igualdad del número de partes que tiene los palos, sin embargo, afirma que son de diferente tamaño.

En la tarea 3 construye una serie correcta y empieza a mostrar dificultad en el manejo de la serie al intercalar los nuevos elementos, así como ante la subdivisión numérica de la misma.

Frente a la tarea 4 vuelve a dar respuestas basadas en juicios perceptuales, considerando sólo una dimensión al emitirlos. En las experiencias control de conservación, curiosamente, obtiene un nivel intermedio.

Llama la atención que Daniel, en la quinta tarea, empieza a utilizar una estrategia de iteración que en las anteriores no había utilizado, sin embargo, frente a la serie en desorden contesta con un número aproximado.

Por su parte, al establecer los juicios de las tareas, Daniel dice que la de medición de longitudes es la que menos le gustó "porque no tiene gracia" y que los tubitos le gustaron mucho "por lo que tiene abajo" (las bases de madera). Por otra parte, las únicas similitudes que establece son perceptuales: por los colores, por los tamaños, porque son palos, etc.

Carina.

Las descripciones y respuestas de este sujeto en la primera tarea nos indican una gran claridad en el entendimiento de la seriación, ya que coordina perfectamente la posición de cada tubo con el número de unidades que contiene. Sin embargo, cuando la serie está en desorden, es evidente que sus respuestas están basadas más en la observación del conjunto, en el rango, que en la cardinación pues no es capaz de dar una explicación específica para cada elemento en particular.

En la tarea 2 inicia con una confusión entre un problema de coincidencia de límites o de comparación de longitudes, lo cual nos indica un nivel avanzado en Carina. De esta manera, no es capaz de utilizar espontáneamente unidades que deban iterarse, pero sí establece igualdades por medio de la transitividad, las cuales permanecen constantes a pesar de las diversas contrargumentaciones que se le presentan.

En la tarea de los bastones su descripción es una seriación muy global (en tres bloques), y su seriación práctica es correcta y sin problemas, aunque al intercalar elementos presenta cierta dificultad, lo cual demuestra ciertos problemas para manejar simultáneamente la serie total y una de sus partes.

En la tarea 4, Carina emite su primer juicio basado en rasgos perceptuales aunque es evidente un inicio de compensación de dimensiones, lo cual se ve demostrado al anticipar correctamente los niveles del agua en vasos diferentes de los que se encuentran, sin embargo, regresa a sus juicios perceptuales ante las experiencias control.

Con respecto a la quinta tarea lleva a cabo una seriación correcta, llegando incluso -a diferencia de su desempeño en la tercera tarea- a manejar perfecta y simultáneamente la serie total y una de sus partes. Por otra parte, cuando la serie se deshace, no es capaz de llevar a cabo la iteración ni ve la necesidad de rehacerla, concretándose a emitir sus juicios en base al rango del elemento.

De acuerdo a sus juicios finales, dice que todas las tareas fueron fáciles y que la que más le gustó fue la quinta pues hacía escaleritas; por otra parte las únicas similitudes que encuentra son perceptuales: cartones, bastones y tubos pues con las tres se hicieron escaleras.

Genaro.

Este sujeto describe la situación, en la tarea l, mostrando claramente que notó un aumento en el número de unidades vertidas en cada tubo, además de lo cual coordina sin dificultad el rango de cada elemento con las unidades que contiene.

Durante la tarea 2 la ejecución de Genaro logra un avance: inicia con juicios perceptuales, posteriormente son cambiados cuando elige un elemento con el cual comparar y establece igualdades y diferencias por transitividad; al proponérsele una unidad de medida vuelve a establecer igualdades mediante las igualdades numéricas, llegando a creer que lo importante es encontrar la igualdad numérica de los segmentos sin tomar en cuenta sus diferentes longitudes. Más adelante, sus juicios se ven afectados nuevamente por factores perceptuales. Finalmente, se da cuenta que pueden haber diferencias si se usan unidades diferentes y emite juicios operatorios.

En la tarea 3 seria e intercala sin dificultad, y no tiene problema al manejar el total y una parte simultáneamente; empero, con la serie en desorden, confunde uno de los elementos intermedios con uno de los mayores rangos, lo cual demuestra que, si bien es capaz de tal manejo cuando la serie está ordenada, no tiene un dominio absoluto del total en sus diferentes relaciones.

En la tarea de los vasos, Genaro establece la igualdad de cantidades como consecuencia de la igualdad de unidades vertidas en cada recipiente y esto, junto con su descripción multidimensional, lo lleva a dar una explicación correcta del por qué de las diferencias perceptuales; sin embargo, ante una de las experiencias control, y la menor contrargumentación, vuelve a juzgar perceptualmente.

Durante la tarea 5 coordina perfectamente el rango de los elementos con el número de unidades que incluyen, al mismo tiempo que es capaz de iterar para probar sus respuestas.

Con respecto a sus juicios acerca de las tareas, Genaro reporta que la que más le gustó fue la de los bastones "porque parecía que las escaleras eran de rancho", y la que menos, la segunda, porque nada más era de puro medir; dice que la más fácil fue la de los cartones y no hubo difíciles. Por otra parte, inicia estableciendo similitudes perceptuales entre las tareas (cartones y bastones: escaleras; vasos y tubos: agua y vidrio; tubos y bastones: palos), pero más adelante llega a indicar que, de las unidades de medida de cada tarea, el palo 3R (tarea 2) y el cartón 1 (tarea 5) sirven para medir, mientras que el vaso M y el tubo M son iguales. Más adelante dice que con el cartón 1 pueden medirse los palos y los tubos, con el palo 3R los vasos y los tubos y con el vaso M los cartones.

Alejandra.

Este sujeto es sumamente interesante porque se ubica en diferentes niveles en la solución de las tareas. Establece verbalmente una diferencia de cantidades, señalando el aumento de la cantidad de agua en cada uno de los tubos. Sin embargo, no llega a cuantificar y sus juicios se quedan en estimaciones globales.

En la tarea 2 vuelve a presentarse un juicio perceptual, aunque, al introducir la iteración de la unidad, utiliza el juicio numérico. Más adelante, al no haber elementos que coincidan en tamaño con los segmentos a medir, solamente establece comparaciones entre las diferentes piezas, como si la simple comparación diera por resultado las igualdades; asimismo, ante la experiencia control, regresa a sus juicios perceptuales.

En la tarea 3 construye la seriación con cierta dificultad y al intercalar, su comparación es de tipo global. Sin embargo, puede verse en Alejandra un gran esfuerzo para poder comprender por qué un elemento es simultáneamente grande y chico dentro de una serie y, por otra parte, necesita explicitar que un elemento no puede ocupar más que un solo lugar en la serie.

En la tarea 4 el sujeto está consciente de que si a cada recipiente se le ha echado tres vasitos de agua, deberían tener la misma cantidad, sin embargo, frente a la diferencia perceptual de los niveles se olvida de la igualdad numérica y utiliza como guía para sus respuestas precisamente el nivel que el líquido alcanza en cada recipiente.

La ejecución en la tarea 5 está caracterizada, desde el principio, por una clara coordinación entre la cardinación y los rangos de cada elemento, con lo cual el sujeto seria e itera correctamente y sin problemas.

Alejandra reporta que de las cinco tareas, la de los cartones fue la que más le gustó y la más fácil, y la que menos le gustó, la de medición de longitudes; asimismo, dice que la más difícil fue la de medición de líquidos. Por otra parte sólo establece similitudes perceptuales entre las diferentes tareas: cartones y bastones (escaleras); entre cartones y tubos, y palos y cartones (de diferentes tamaños), y entre vasos y tubos (agua).

Norma.

Este es un sujeto interesante dentro de su grupo, pues alcanza el nivel más avanzado en casi todas sus tareas. En la tarea 1 coordina con facilidad el rango de los elementos con el número de unidades que incluyen, con lo cual domina tanto el orden ascendente como el descendente dentro de la serie, ya sea ordenada o desordenada.

Como puede verse en el análisis por niveles, Norma establece desde un principio la igualdad de las longitudes mediante la iteración de la unidad de medida y, en los casos en que tal unidad no se encuentra accesible, utiliza otros elementos para demostrar la igualdad por medio de la transitividad.

Durante la tarea 3 muestra un fácil manejo de la serie, tanto para conformarla, como para intercalar nuevos elementos y, ante las preguntas sobre elementos particulares utiliza la resta como herramienta o estrategia para con-testarlas.

La tarea 4 también es trabajada en su totalidad operatoriamente, dando explicaciones mediante la compensación de dimensiones. Asimismo, es suficiente con que se le proponga vaciar el agua en diferentes recipientes para que inmediatamente lleve a cabo las comparaciones adecuadas para demostrar las igualdades.

En la tarea 5, como en las anteriores, las respuestas de Norma son operatorias, coordinando sin dificultad ordinación y cardinación e iterando la unidad para comprobar su respuesta.

Como era de esperarse, Norma indica que todas las tareas fueron fáciles, le gustaron y ninguna fue difícil. Asimismo, establece tanto igualdades perceptuales: tubos y vasos, en el agua; cartones y bastones, en las escaleras, y tubos, cartones y bastones, en que hay chicos y grandes; como igualdades más elaboradas (abstracciones): cartones y palitos, en que se iban midiendo; tubos y vasos, se medía el agua, y vasos y palos, en que se medían. Cuando se le presentan las unidades de todas las tareas, señala que son iguales "en que iban midiendo".

Hugo.

Este niño es otro sujeto cuya ejecución en las diferentes tareas se da en varios niveles de respuesta. En la tarea 1 la seriación se da en forma global desde la descripción, además de que, cuando la serie está deshecha, su respuesta sólo es aproximada al número de unidades que contiene el tubo señalado.

En la segunda tarea emite juicios perceptuales a pesar de establecer la igualdad numérica al mostrársele cómo iterar. Con algunos de los elementos y las experiencias control, "mide" y juzga por coincidencia de límites, demostrando el problema largo-lejos, incluso después de haber reconocido nuevamente la igualdad numérica.

En las tres tareas restantes, los juicios de Hugo son operatorios: en la tercera, intercala con facilidad nuevos elementos y maneja sin problemas tanto el total como las partes simultáneamente; en la cuarta, explica correctamente el por qué de las diferencias perceptuales, y en la quinta, coordina adecuadamente la ordinación y la cardinación dentro de la serie e itera sin problema la unidad de medida.

Con respecto a sus juicios sobre las tareas, dice que la de los vasos le gustó más y fue la más fácil (porque le echaba agua y yo le decía), la medición de longitudes menos (porque es de hablar mucho y está larga) y la más difícil la de los cartones (porque era de acomodarlos y decirle cuántos caben). Sin embargo, curiosamente Hugo sólo es capaz de encontrar similitudes perceptuales entre las tareas: vasos y tubos, en el agua; palos y bastones, en lo redonditos; cartones, bastones y tubos, en las escaleras, formados en hileras por tamaños; cartón 1 y bastón 1, y palo 3R y tubo M, de iguales tamaños.

Mónica.

En la tarea 1, Mónica hace una serie correcta y sus respuestas, cuando ésta está ordenada, también son correctas, sin embargo, cuando la serie de deshace sólo es capaz de contestar con aproximaciones y no ve la necesidad de rehacer la serie para confirmar su respuesta.

Durante la tarea 2 los juicios de Mónica son perceptuales y están basados, o en la coincidencia de límites, o en el tamaño o número de los segmentos, esto sin importar el tamaño de su unidad de medida, con lo cual a veces un palo es, indistintamente, menor o mayor que otro. Sin embargo, su juicio de igualdad de longitudes más consistente es cuando establece igualdades numéricas.

En las tres siguientes tareas, su ejecución es similar a la de Hugo, alcanzando en ellas el nivel III de desarrollo.

Los juicios que Mónica emite acerca de su ejecución y gustos, son que todas las tareas fueron fáciles y le gustaron, sin embargo, las dos únicas similitudes que es capaz de establecer son, cartones y bastones, pues se hizo una escalera, y 3R y cartón 1, que sirvieron para medir.

Sujetos de 9 años de edad.

Javier.

Este sujeto, durante la tarea 1, muestra haberse dado cuenta del orden ascendente en que se llenaron los tubos, sin embargo, su cuantificación es global ya que no reporta que el incremento sea de una unidad en cada ocasión, sino que a mayor cantidad de agua, mayor cantidad de tubos que pueden llenarse.

En la tarea 2, nuevamente emite juicios perceptuales que más adelante serán corregidos gracias a la igualdad numérica, la cual no será durable ante las experiencias control.

A continuación, al dar la mayor importancia al conteo-medición de segmentos, Javier "mide" los segmentos de un palo y después los "cuenta" sin sumarlos, lo cual provoca nuevas respuestas que, aunque ya no son perceptuales, todavía no llegan a ser operatorias.

Javier lleva a cabo una seriación correcta y sin problemas durante la tarea 3. Asimismo, no demuestra dificultad, ni al intercalar los elementos extras, colocándolos de manera que queden entre el menor y mayor que los adyacentes, ni al identificar cuál es el señalado cuando la serie está en desorden.

Frente a la tarea 4 Javier, ignorando la igual cantidad de unidades vertidas en los vasos, emite nuevamente juicios perceptuales, aunque muestra un comienzo de compensación de dimensiones en sus anticipaciones.

En la quinta tarea Javier resuelve los problemas en forma operatoria, coordinando sin dificultad cardinación y ordinación, así como el total y sus partes simultáneamente.

Los juicios de este sujeto con respecto a las cinco tareas, son que las de seriación (tubos, bastones y cartones), le gustaron más, la más fácil fue la primera y la más difícil, la última porque "los fui midiendo". Por su parte, sólo llega a establecer igualdades perceptuales entre las tareas: bastones y cartones, hicimos escaleras, y tubos y vasos, en el agua y que se vació con los tubitos.

Zulema.

Zulema es un sujeto que alcanza el nivel operatorio en las cinco tareas, de entre lo cual es importante resaltar que, durante la tarea de medición de longitudes, entiende cómo es que un objeto menor que el que va a ser medido, puede trasponerse las veces que sean necesarias hasta alcanzar la longitud total lo cual, un momento antes, no se le había ocurrido.

Por su parte, es de llamar la atención que a esta niña las tareas de los tubos y los vasos le parecieron las más bonitas, sin embargo, juzga a la de los tubos como la más difícil ("por la medida, iba subiendo") y a la de los vasos como la más fácil ("porque usted le echó la misma medida y yo nada más los cambié y ya"). Lo curioso de este caso, es que Zulema establece igualdades entre esas dos tareas precisamente, "por la medida". Asimismo, dice que cartones y bastones se parecen en la escalera; cartones y tubos en que van del 1 en adelante; bastones y tubos en que van subiendo poco a poco; palos y bastones en la medida del 3R y el bastón 1, cartones y palos en que se medían y, finalmente, todas se parecen en que todas las medía.

Griselda.

Este sujeto demuestra en la tarea 1 que apenas inicia la coordinación entre el rango que ocupa cada tubo y la cantidad de unidades que contiene.

En la tarea 2, por su parte, Griselda presenta juicios perceptuales ante la comparación de longitudes, los cuales se ven modificados por las igualdades o desigualdades numéricas que, sin embargo, no llegan a sobreponerse totalmente a la percepción.

En cuanto a la tarea 3, Griselda presenta un manejo operatorio respecto a la seriación de elementos, así como al intercalar nuevos en la serie ya establecida, manejando sin problema el total y sus partes simultáneamente.

En la tarea 4, llama la atención que Griselda establece la igualdad de cantidades debido a la igual cantidad de unidades vertidas en los recipientes, sin embargo, no es capaz de explicar por qué se dan las diferencias de niveles. Asimismo, su anticipación del nivel que alcanzará el agua en recipientes diferentes es incorrecta, a pesar de lo cual recurre nuevamente a la igualdad numérica como explicación de la situación. Finalmente, ante una experiencia control, emite juicios operatorios (por compensación de dimensiones) y utiliza correctamente los vasos extras para confirmar sus respuestas.

A diferencia de la tarea 1, en la quinta, Griselda coordina perfectamente el rango de los elementos con el número de unidades que contienen, además de que lleva a cabo la iteración correctamente.

Con respecto a su opinión sobre las tareas, esta niña señala que todas las tareas le gustaron mucho y que la más fácil fue la de los cartones ("porque es de puro medir con el cartoncito"). Igualmente, es capaz de establecer relaciones no solamente perceptuales entre las tareas (la escalera de cartones y bastones; se revolvieron bastones, cartones y tubos; agua de líquidos y vasos), sino también relaciones más abstractas: cartones, palos, tubos y vasos porque se estaban contando y midiendo.

Marlet.

En la tarea 1, Marlet resuelve las demandas operacionalmente y nombra a los elementos por su ordinal, haciendo la diferencia en el caso de los cardinales.

En la tarea 2, emite juicios perceptuales y busca unidades de medida que coincidan con los extremos de los elementos a medir; posteriormente, cuando se le muestra cómo iterar, cree que lo importante es la igualdad numérica, no importando si es del número de elementos, o de la cantidad de unidades que pueden caber en cada palo. Sin embargo, tal igualdad numérica no es durable, ya que posteriormente vuelve a juzgar perceptualmente.

En la tarea 3, como en la 1, Marlet lleva a cabo la seriación sin dificultad, sin embargo, empieza a mostrar problemas al intercalar los bastones extras en la serie original, lo cual habla de una serie rígida difícil de alterar, no obstante que llega a dar respuestas obtenidas mediante la resta.

Las respuestas a la cuarta tarea son todas operacionales, basadas principalmente en las igualdades numéricas, como sucedió en la segunda tarea, con la diferencia de que ahora su forma de explicar las diferencias perceptuales es en base a la compensación de dimensiones.

La quinta tarea se caracteriza por una gran facilidad para seriar los cartones, sin embargo, al encontrarse la serie en desorden, Marlet comete un error que adjudica a no haber iterado la unidad en el elemento señalado y haberse fiado de la ordinación; con esto demuestra que aún no ha consolidado la coordinación entre la ordinación y la cardinación.

Su opinión acerca de las tareas es que todas le gustaron mucho, que la más fácil fue la de los tubos (porque era del chico al grande y volverlos a acomodar) y la más difícil la de los bastones (porque tenía que buscarle lugar y no lo encontraba). En cuanto a las similitudes, además de las perceptuales, Marlet reporta que todas las tareas se parecen porque se contaba y medía en ellas.

Luis.

Luis es un sujeto que resuelve todas las tareas operacionalmente, diferenciando ordinales y cardinales, iterando correctamente las unidades de medida, utilizando la transitividad, manejando los totales y sus partes simultáneamente, estableciendo las igualdades numéricas como base para sus juicios, etc. Debido a esto, no es extraño que todas las tareas le hayan gustado, sin embargo, reporta que la que menos le gustó fue la de medición de longitudes porque había que contar y medir, esto a pesar de que indica que todas las tareas se parecen en que sus unidades de medida pueden ser usadas indistintamente para cualquiera de los materiales, independientemente de que sean o no líquidos ("los cartones pueden hacerse como los tubos, los palos también como si le pusieras agua al palito y el tubito M o el vasito puede usarse para los cartones").

Juan.

Al igual que Luis, Juan resuelve todas las tareas operacionalmente; de cualquier manera, es importante resaltar que durante la medición de las longitudes, éste sujeto lleva a cabo cálculos aritméticos que implican sumas y multiplicaciones numéricas, con lo cual traslada un problema básicamente espacial, a un plano lógico matemático en el cual trabaja incluso fracciones del total.

En cuanto a la opinión de Juan respecto a las tareas, dice que la de los vasos es la más fácil y la que más le gustó (porque la estábamos midiendo, con las manos, y se veía cuál era grande, mediano y chico); así como la más difícil y la que menos le gustó fue la de los palos (medición de longitudes, porque había que medirla a cada ratito con el listón). Dice que se parecen la de los tubos, bastones, cartones y vasos, porque "son de la misma medida, tenemos que ir midiéndolas" y que los palos también "pero de diferente manera".

Laura.

Laura resuelve las tareas 1, 3, 4 y 5 operacionalmente y, solamente en la segunda, no demuestra ése desarrollo: inicia con juicios operacionales que no puede comprobar pues siempre busca unidades de medida del mismo tamaño que los segmentos a medir, lo cual la obliga a utilizar la comparación directa, pasando antes por una serie de manejos en que pretende establecer igualdades numéricas. Finalmente, regresa a sus juicios perceptuales ante los contrargumentos.

Laura opina que de las cinco tareas la de los tubos es la más bonita, mientras que la más fácil es la de los cartones (porque era de poner los cartones), sin embargo, las únicas similitudes que establece son perceptuales: cartones y bastones (escalera) y tubos y vasos (agua).

Moisés.

En la tarea 1 Moisés trabaja operacionalmente.

En la segunda, los juicios de Moisés fluctúan entre las igualdades numéricas y los rasgos perceptuales (tamaños de los segmentos, disposiciones en línea recta o en ángulos, coincidencia de límites), acabando por sobreponerse estos últimos.

En la tarea 3, Moisés reporta verbalmente una diferencia de tamaños de los elementos en dos grandes bloques; asimismo, al seriarlos, excluye 3 de ellos, lo cual demuestra que su serie, una vez establecida, se convierte en un todo rígido difícil de alterar. Esto mismo es evidente al no utilizar la transitividad al momento de intercalar los elementos extras. Por otra parte, le es muy fácil usar la resta como herramienta para encontrar las respuestas a las preguntas que se le plantean.

Este niño demuestra un avance durante la tarea 4, ya que inicia con juicios perceptuales, sin tomar en cuenta igualdades numéricas; de esta manera, juzga de acuerdo a los niveles que alcanza el agua en los recipientes; sin embargo, al pedirle que compruebe, vierte el agua "diferente" en recipientes iguales, con lo cual se alcanzan los mismos niveles y, a pesar de su asombro, es capaz de dar una explicación operatoria (por compensación de dimensiones) a los nuevos datos perceptuales.

Nuevamente, en la tarea 5, este sujeto no alcanza un nivel operatorio pues, aunque no presenta problema alguno durante la seriación, tampoco es capaz de utilizar la iteración para poder comprobar sus respuestas, concretándose a basarlas en el rango del elemento señalado.

Moisés señala, finalmente, que la tarea de los cartones es la más fácil y la que más le gustó; la que menos, la de medición de longitudes, y la más difícil, la de los tubos. Por otra parte, además de las similitudes perceptuales comunes en el resto de los sujetos, solamente señala la igualdad entre la de medición de longitudes y los cartones en que en las dos se medía.

Fausto.

Fausto trabaja operatoriamente la primera tarea.

En la segunda tarea, Fausto emite juicios perceptuales, los cuales son reemplazados por operatorios en cuanto se le pide comprobar, cosa que hace mediante la iteración de una unidad de medida; sin embargo y curiosamente, cuando los palos que se le dan para comprobar, no igualan el tamaño de los segmentos que va a medir, niega que haya otro que le sirva, esto a pesar de haber establecido las igualdades mediante transitividad, como si tal estrategia no fuera confiable.

Al igual que en la primera tarea, este sujeto trabaja operacionalmente en la tercera y la quinta, sin embargo, cabe mencionar que curiosamente, estas tareas dejan ver un fuerte entrenamiento "escolar" en las respuestas del niño: en la tercera, para explicar su argumento, recurre a las manzanas', mientras que en la quinta, lleva a cabo una serie de operaciones aritméticas cuyos resultados siempre dan el cardinal del elemento señalado. Es importante hacer notar que este entrenamiento del que hablamos, aparentemente no restringe la capacidad del niño para enfrentarse a un problema, sino que por el contrario, en este caso específico, lo ayuda a 'comunicar' las explicaciones que de otra manera le hubieran costado mucho trabajo.

En la tarea 4 vuelve a emitir juicios y comprobaciones operacionales.

Por su parte, este sujeto opina que la tarea que más le gustó fue la de los bastones; la más fácil, la de los vasos, y la de medición de longitudes, la que menos le gustó y la más difícil. Curiosamente, Fausto solamente establece una similitud entre las tareas de cartones y medición de longitudes (en medirlos), además de las perceptuales de agua y escaleras.

Virginia.

El caso de Virginia llama mucho la atención por encontrarse en cuatro de las cinco tareas en un nivel operatorio, mientras que en la de medición de longitudes se ubica en el perceptual. En esta tarea, la niña parte de una comparación de límites para después juzgar numéricamente de acuerdo a la cantidad de segmentos que tiene cada elemento que se compara, independientemente del tamaño de los mismos; finalmente, vuelve a caer en sus juicios perceptuales.

Virginia reporta que la tarea de los vasos fue la que más le gustó; que las de cartones y tubos fueron las más fáciles, y que la de medición de palos fue la más difícil y que menos le gustó. Asimismo, además de las consabidas similitudes perceptuales, señala que las unidades de cada una de las tareas se parecen en el tamaño y en que sirven para medir.

Sujetos de 11 años de edad.

Los sujetos de este grupo, en su mayoría, alcanzan el nivel operatorio en la solución de las cinco tareas, por lo cual, sólo se reportarán con cierto detalle las tareas de quienes trabajan según el segundo nivel, mientras que los juicios, con respecto a la sesión, sí serán analizados en cada sujeto.

Elizabeth.

Como puede verse en el análisis por grupo, esta niña inicia emitiendo juicios operatorios en la tarea 2, sin embargo, cuando se le expone a la experiencia control de las hormigas, involucra factores dinámicos y, olvidándose de sus explicaciones anteriores, cambia a juicios perceptuales.

Luis.

Las respuestas de este niño ante la tarea 2 demuestran que casi ha llegado al nivel operatorio, sin embargo, los rasgos perceptuales aún son más fuertes que sus razonamientos. Esto es, antes de contestar si los palos son iguales o no de largos empieza a rotar uno sobre el otro, pero no termina de hacerlo y su respuesta expresa un juicio perceptual (lo cual indica que entiende la pregunta, pero también, que sus respuestas deben ser acordes con lo que está observando). Posteriormente, es capaz de dar juicios operatorios ante el resto de la tarea.

Alejandro.

En la tarea 2 inicia con juicios perceptuales, los cuales explica mediante la diferente cantidad de segmentos de los palos. Posteriormente, al entender el problema (longitudes y no límites), emite juicios operacionales incluso ante los contrargumentos.

Angeles.

En la segunda tarea Angeles demuestra estar muy cercana al nivel operatorio, ya que a pesar de iniciar con juicios de coincidencia de límites, al verse en la necesidad de comprobar sus respuestas, es capaz de establecer y explicar la igualdad por medio de la transitividad. Sin embargo, no puede decirse que se encuentre ya en el nivel operatorio pues demanda que las unidades de medida sólo lo serán si son del mismo tamaño que los objetos (o los segmentos) a ser medidos.

Carmen.

Esta niña inicia la tarea 4 con un juicio de igualdad de cantidad debida a la igual cantidad de unidades que se pusieron en cada recipiente, sin embargo, a pesar de que anticipa correctamente los niveles en recipientes diferentes, no es capaz de utilizarlos para demostrar la igualdad de cantidades. Por otra parte, ante una experiencia control emite juicios en los que es evidente un inicio de compensación de dimensiones que, nuevamente, no es capaz de demostrar.

En la tarea 5, una vez más, Carmen muestra que se encuentra casi en un nivel operatorio, pues aunque es capaz de iterar para demostrar el número de unidades que incluye un cartón, no entiende que el rango de dicho elemento también indica ese mismo dato.

Con respecto a los juicios de los sujetos de este grupo se encontró lo siguiente:

Ciro.

Le gustaron más la de los cartones, bastones y palos, porque eran de medir y formar escalones; la más fácil fue la de los vasos, porque todos fueron fáciles, y la más difícil la de los bastones, porque se equivocó cuando se revolvieron.

Ciro establece similitudes perceptuales entre algunas tareas, además de que palos y vasos se parecen porque en las dos tenía que ver si era la misma cantidad, y palos y cartones porque era de ir midiendo; finalmente, dice que todas las unidades se parecen en que eran para poder medir la cantidad de cada figura.

Luis.

Dice que todas las tareas le gustaron, la más fácil fue la de los vasos (porque nada más tenía que echarse el agua), y la más difícil fue la de los palos (porque se equivocaba). Las igualdades que este sujeto establece son las perceptuales, además de las de los palos, tubos, vasos y cartones, en que las iba midiendo. Niega que la de los bastones se parezca a otra.

Tania.

Todas las tareas le gustaron, la más fácil fue la de los cartones (porque se ve cuando son más grandes y se van viendo las alturas) y la más difícil la de los bastones (porque no se podían medir bien y se confundían). Establece las igualdades perceptuales y de los cartones, palos, tubos y vasos, en que se medían. Asimismo, dice que las 5 unidades de medida son iguales porque con ellas "se puede medir una medida".

Angeles.

Dice que todas las tareas le gustaron y que la más fácil fue la de los tubos (porque se iban midiendo uno en cada uno). Por su parte, Angeles solamente establece igualdades perceptuales entre tubos, bastones y cartones (por la escalera) y entre tubos y vasos (por el agua).

Luisa.

Señala que la tarea que más le gustó fue la de los vasos porque se le echa el agua y se comprueba que es la misma cantidad. Dice que no hubo difíciles, todas fueron fáciles. Establece, además de las igualdades perceptuales, otras en que hay "unos que sirven para medir y otros que son los que se miden"; dice que de los palos, bastones y cartones, cualquiera de los chiquitos sirve para medir, y que de las cosas para medir, se parecen: vasos y tubos, bastones y cartones, y cartones y palos.

Alejandro.

La de los vasos le gustó más (por probarlo si era verdad o no); la de los palos no le gustó (porque no le entendía); los cartones fue la más fácil (porque se iba midiendo), y la más difícil la de los bastones (porque tenía que volverlos a abrir y ponerlos a ver si eran). Indica que se parecen vasos, tubos, palos y cartones en que era de medirles, las medidas se iban midiendo cada vez, cada vez más grandes. Además, Alejandro es el único sujeto que indica que la de los bastones se parece a las demás en que se iba pasando de uno a otro una medida cada vez, y que los bastones también se miden.

Guillermo.

La de los vasos le gustó más y fue la más fácil (porque fue más sencillo explicar cómo se podría medir la misma cantidad de agua), y no hubieron ni difíciles ni feas. Señala que en las cinco tareas, las unidades se parecen porque sirven para ver si es la misma cantidad.

Elizabeth.

Los cartones le gustaron más (porque le gusta cómo se ve); la de los vasos fue la más fácil (porque se fijaba en el vasito cuando le echaba agua), y la más difícil fue la de los bastones (porque cuando se revolvían no sabía cuál era). Se parecen palos, cartones, tubos y vasos porque se iban midiendo cuántos eran.

Carmen.

Le gustaron todas y la más fácil fue la de los cartones (porque era de hacer la escalera y contarlos). Se parecen la de tubos, vasos, palos y cartones en que había un chiquito para medir; los palitos sirven igual que el tubo y el vaso M: "es lo mismo, con uno es cuántos cuadritos y con el otro cuántas copitas".

Juan.

Le gustó más la de los bastones (porque se formaron escaleras y los palitos se veían como rejas); le gustó menos la de los palos porque fue muy difícil, y las más fáciles fueron las de bastones y cartones (porque eran chicos y grandes). Por otra parte, establece las igualdades perceptuales e igualdades entre palos y tubos (porque con unas es como contar las otras), los palos y vasos (porque el 3R es igual al vasito M) y los palos y los cartones (porque el cartón 1 es igual que el 3R).

(1) En este caso específico preferiremos hablar de ancho y no de diámetro del recipiente pues el niño aún no toma en cuenta la dimensión de "profundidad" para emitir sus juicios.

COMENTARIOS FINALES.

Para terminar este trabajo nos gustaría hacer explícitos una serie de comentarios y reflexiones acerca de los resultados obtenidos en el estudio exploratorio. Estos comentarios girarán alrededor de tres ideas específicas: iniciaremos con una serie de observaciones acerca de un posible aprendizaje durante la sesión experimental; posteriormente, haremos referencia a la relación que se encontró entre las diferentes tareas haciendo hincapié en los diferentes grados de dificultad de las mismas; finalmente, y como resultado de la idea anterior, nos referiremos a la relación hallada entre los diferentes contenidos con que se trabajó.

Primeramente, es importante señalar que la sesión experimental se planteó tratando de hacer evidente la relación que se suponía habría de darse entre las tareas; esto no significa que el trabajo haya sido pensado como sesiones de aprendizaje (similares a las desarrolladas por Inhelder y colaboradoras, 1974), sin embargo, cabe señalar que es posible que se haya dado cierto aprendizaje durante la sesión, ya que en algunos sujetos sí hay un avance en el nivel que se alcanza de la primera a la quinta tareas.

Como puede observarse en el análisis intrasujeto, uno de tales casos es Daniel quien, iniciando con juicios perceptuales y cuantificaciones globales, pasa a establecer igualdades de longitudes como consecuencia de las igualdades numéricas que, aunque no son durables, sí implican un nivel más avanzado. Llama la atención que, en la última tarea, este niño utiliza la iteración, conducta más avanzada que no fue capaz de utilizar en las tareas anteriores. Cabe señalar que este niño, como ya se mencionó, en la experiencia de conservación obtiene sólo un nivel intermedio, lo cual nos hace pensar que a pesar de que pudiera "medir", probablemente el resultado de esta operación tampoco fuera durable.

Otros casos de "avance" durante la sesión experimental son, como puede verse en el análisis por grupo e intrasujeto del capítulo 4, los de Carina, Genaro y Alejandro.

Ahora bien, al hablar de "avance" o "aprendizaje" durante una sesión, cabe preguntarse si la razón no es que las tareas tienen diferentes grados de complejidad y que, posiblemente, estos se presentan en orden creciente; también puede pensarse que, independientemente de los problemas que plantean, las primeras tareas sirven como "entrenamiento" para resolver las siguientes.

Las dificultades reportadas por los niños con respecto a las tareas, pueden ser agrupadas según la edad del sujeto, esto es, los niños de 7 y 9 años de edad generalmente igualan la tarea más difícil con la menos bonita, y se detectó que, la mayoría de las veces, esta tarea es la que les demandó un mayor esfuerzo "cognitivo" para resolverla. Por su parte, los niños de sexto grado reportan como más difícil la tarea que les representa mayor dificultad, generalmente manual, por ejemplo, como señalan Alejandro y Tania, que dicen que la tarea de los bastones fue la más difícil pues les costó más trabajo intercalar los extras dentro de la serie ya ordenada, y reforzado por Tania cuando refiere que la más fácil fue la de los cartones porque son muy notables las diferencias entre los elementos.

Al analizar la relación que existe entre las tareas, podemos decir que como se observó, los contenidos utilizados (líquidos, palos y cartones) no fueron manejados como tradicionalmente se hubiera pensado, es decir, generalmente un líquido es considerado como una cantidad continua, ya que no hay una subdivisión evidente entre las unidades que la conforman, sin embargo, en las tareas 1 y 4, este tipo de contenido fue trabajado en dos formas distintas: por una parte, el agua era vertida en unidades (discretas) en cada recipiente y, por otra parte, el agua ya vertida se "transformaba" en un continuo no fraccionado.

Es evidente que los niños, por su parte, trabajan cada tarea según les sea más fácil o según la entiendan. Debido a esto, pudo verse que la tarea 1 generalmente es trabajada como si fuera una serie discontinua, en la que perceptualmente es muy fácil diferenciar un elemento de otro por el número de unidades que contienen. Por su parte, la tarea 4, a pesar de que al igual que en la primera el agua se vertió por unidades, es mucho más difícil que la cantidad "numérica" sirva como referente para dar las respuestas. Por supuesto, todo esto se ve afectado, e incluso definido, por las demandas hechas a los sujetos.

Es importante señalar que la continuidad o discresión de los contenidos están definidas por los manejos específicos que realiza el experimentador. Ahora bien, al cuestionarnos si para los niños se da esta relación, podemos recurrir a sus juicios en los cuales, a partir de los 9 años de edad, es cada vez más frecuente encontrar que los sujetos son capaces de alcanzar un nivel de abstracción en que todas las tareas son relacionadas mediante la identificación y uso de la unidad de medida.

Es importante señalar que los trabajos de Piaget reportados en La Geometría Espontánea del Niño (1948), están basados en la idea de que para poder llegar a la medida se necesita un amplio conocimiento por parte del niño de las operaciones infralógicas de partición y desplazamiento.

A este respecto, podemos decir que las tareas de medición utilizadas en este trabajo, permiten que el niño las maneje, dependiendo de su nivel de desarrollo, como cantidades cualitativas con cantidades intensivas o como una cuantificación real con cantidades extensivas. Esto es, las operaciones cualitativas e intensivas están caracterizadas porque en ellas no se vincula una noción de unidad, sino que solamente se establecen relaciones entre las partes y el todo sin cuantificarlas; este es el caso de las relaciones $A + A' + B' + C' = D$ en que sólo se sabe que cada uno de los elementos A, A', B' y C' forman parte del todo D sin saber qué tipo de relación se guarda entre ellas. Por otra parte, y en otro nivel, se encuentran las colecciones en que pueden establecerse relaciones en términos métricos del tipo $C + C_2 = 2C$, estas operaciones son las extensivas(1).

De esta manera, es claro que los niños que establecen igualdades mediante correspondencias transitivas o que sólo "cuentan" el número de segmentos (sin importar su tamaño) e igualan éste con el de otro palo, se manejan dentro del plano de las operaciones cualitativas con cantidades intensivas. Asimismo, los sujetos que son capaces de elegir una unidad y desplazarla sobre el total que va a medir, marcando puntos de referencia(2), y con ello "contar" el número de unidades que tiene el todo y establecer la igualdad del número de unidades en uno y otro elemento y, por consecuencia, la igualdad entre los dos elementos, se maneja dentro del plano de las operaciones cuantitativas con cantidades extensivas.

Analizando nuestras tareas desde esta perspectiva, podemos establecer que para resolverlas, no en todos los casos es necesario llevar a cabo un proceso de cuantificación extensiva para alcanzar el nivel III de desarrollo, sino que, por la misma presentación y demanda de la tarea, es suficiente con llevar a cabo un proceso de medición cualitativa.

Aquí vemos claramente que las operaciones infralógicas de partición y desplazamiento en que se basa la operación de medición, pueden presentarse, una u otra, sin que con ello necesariamente se dé tal operación (op, cit. p. 397).

Finalmente, es de llamar la atención -y agradecer infinitamente- que todos los niños con quienes trabajamos, pudieron mantener su atención en las tareas a lo largo de toda la sesión experimental (recuérdese que ésta duraba de 50 a 90 minutos). Es precisamente este interés mostrado por los niños y la cantidad y riqueza de sus juicios, lo que nos hace pensar que una situación como esta, en que todas las tareas giran alrededor de contenidos estrechamente vinculados con una medición cualitativa, podrían servir de base como una situación pedagógica introductoria a la enseñanza de las operaciones métricas estricamente hablando.

(1) Piaget, Inhelder & Szeminska, The child's conception of geometry (1948) p. 399.

(2) Iteración de la unidad en el sentido más operacional.

BIBLIOGRAFIA.

Cram H., S., R. Díaz T., L. Ibarra Ch. & A. Navarrete Z. El papel de la imagen mental en el desarrollo cognoscitivo: una perspectiva psicogenética. Tesis de Licenciatura, UNAM, México, 1982.

Gréco, P. & A. Morf (1962) Structures numériques élémentaires. Press Universitaires de France, Bibliotheque Scientifique Internationale. Etudes d'Epistémologie Génétique. Vol. XIII, Paris, 1962.

Inhelder, B., H. Sinclair & M. Bovet (1974) Aprendizaje y estructuras del conocimiento. Ed. Morata, S.A., Madrid, 1975.

Morf, A. (1962) La decouverte d'une loi numérique simple dans une situation de partition spatiale. En: Structures numériques élémentaires. De P. Gréco & A. Morf. Press Universitaires de France, Bibliotheque Scientifique Internationale. Etudes d'Epistemologie Génétique. Vol. XIII, Paris, 1962, p. 108-150.

Piaget, J. (1937) La construcción de lo real en el niño. Ed. Nueva Visión, Buenos Aires, 1979.

Piaget, J. (1976) Identity and conservation. En: Piaget and his school. A reader in developmental psychology. De B. Inhelder & H.H. Chipman (Eds.), Springer-Verlag, New York, 1976, p. 89-99.

Piaget, J. & B. Inhelder (1941) Le développement des quantités physiques chez l'enfant. Delachaux et Niestlé, Actualités Pédagogiques et Psychologiques, Neuchatel, 1961.

Piaget, J., B. Inhelder & A. Szeminska (1948) The child's conception of geometry. Harper Torchbooks, New York, 1960.

Piaget, J. y otros (1961) La enseñanza de las matemáticas. Ed. Aguilar, S.A., Col. Psicología y Educación, Madrid, 1971.

Piaget, J. & A. Szeminska (1940) Génesis del número en el niño. Ed. Guadalupe, Biblioteca Pedagógica, Buenos Aires, 1975.

Vergnaud, G. (1981) La mesure: quelques problemes pratiques et theoriques. En: L'enfant, la mathématique et la réalité. Problemes de l'enseignement des mathématiques a l'école élémentaire. Peter Lange, Berne, 1981, p. 93-107.

Vergnaud, G. Le nombre et la mesure. En: L'enfant, la mathématique et la réalité. Problemes de l'enseignement des mathématiques a l'école élémentaire. Peter Lange, Berne, 1981, p. 81-92.

ANEXO I.

En este anexo se presentan las instrucciones y consignas utilizadas en cada una de las tareas del Estudio Exploratorio. Cabe mencionar en este momento que estas consignas únicamente sirvieron de guía al experimentador, pues en el método clínico experimental no es posible estandarizar las preguntas. En un trabajo con este tipo de metodología, las respuestas y acciones del sujeto son las que definen el curso específico de la entrevista y la sesión en su conjunto.

Los protocolos de cada tarea tenían 3 columnas: la primera incluía las preguntas e instrucciones para el experimentador; la segunda, estaba dedicada a las verbalizaciones del sujeto, y la tercera, a las acciones del mismo.

Protocolo para el registro de la sesión experimental.

Tarea 1.
Nombre:
Grado:
Edad:
Fecha:
Sujeto No.:

Los tubos se denominan del 1 al 7 de menor a mayor cantidad de agua, y el tubo medida M.

RECONOCIMIENTO de Material: Se presentan al niño los tubos vacíos.

1.- ¿Sabes QUE ES esto?
SI
2.- ¿QUE es?
NO
3.- ¿COMO QUE son?
4.- ¿Son como unos TUBITOS?
5.- ¿Ya viste que están detenidos por estos cuadritos de MADERA?
6.- ¿Los tubitos son del mismo TAMAÑO?
7.- ¿Y éste (CHIQUITO) es igual a los otros?
8.- ¿Es igual de GORDO que los otros?

Ahora FIJATE muy bien en lo que voy a hacer porque después quiero que me platiques todo lo que yo haga.

SE VIERTE el agua en los tubos, sin seriarlos.

9.- Ahora quiero que me PLATIQUES todo lo que hice.

10.- Muy bien, ahora quiero que hagas una HILERITA con los vasos, poniendo aquí (izquierda del sujeto) el que tiene menos agua, después el que le sigue, y así hasta el que tiene más agua.

serie CORRECTA
serie INCORRECTA

11.- Ahora, ¿CUANTOS vasos tenemos?

cuenta con un dedo = c.d.
cuenta con la vista = c.v.

12.- ¿CUANTOS tubitos como éste (M) se pueden llenar con el agua de este vaso (1)?

13.- ¿Cómo SUPISTE?

14.- ¿CUANTOS tubitos como éste (M) se pueden llenar con el agua de este vaso (2)?

15.- ¿Cómo SUPISTE?

16.- ¿CUANTOS tubitos como éste (M) se pueden llenar con el agua de este vaso (3)?

17.- ¿Cómo SUPISTE?

18.- ¿CUANTOS tubitos como éste (M) se pueden llenar con el agua de este vaso (4)?

19.- ¿Cómo SUPISTE?

20.- ¿CUANTOS tubitos como éste (M) se pueden llenar con el agua de este vaso (5)?

21.- ¿Cómo SUPISTE?

22.- ¿CUANTOS tubitos como éste (M) se pueden llenar con el agua de este vaso (6)?

23.- ¿Cómo SUPISTE?

24.- ¿CUANTOS tubitos como éste (M) se pueden llenar con el agua de este vaso (7)?

25.- ¿Cómo SUPISTE?

Se señala un tubo AL AZAR:

26.- ¿CUANTOS tubitos como éste (M) se pueden llenar con el agua de este (___) vaso?

27.- ¿Cómo SUPISTE?

Se señala otro tubo AL AZAR:

28.- ¿CUANTOS tubitos como éste (M) se pueden llenar con el agua de este (___) vaso?

29.- ¿Cómo SUPISTE?

Se señala otro tubo AL AZAR:

30.- ¿CUANTOS tubitos como éste (M) se pueden llenar con el agua de este (___) vaso?

31.- ¿Cómo SUPISTE?

Se DESORDENA la serie y se señala otro vaso AL AZAR:

32.- ¿CUANTOS tubitos como éste (M) se pueden llenar con el agua de este (___) vaso?

33.- ¿En qué te FIJASTE para saber?

34.- ¿Cómo podemos ESTAR SEGUROS?

seria hasta el tubo señalado
rehace toda la serie
itera con M

Tarea 2.
Nombre:
Grado:
Edad:
Fecha:
Sujeto No.:

El material se denomina:

Palos azules: 1 A
2A
3A
4A

Palos rojos: 3R, 6R, 16R, 18R, 20R
Popotes: P. Chico; P. Gde.
Listones: L. Chico; L. Gde.

RECONOCIMIENTO de material: se presentan al niño los 4 palitos azules.

1.- ¿Sabes QUE ES esto (palitos)?
SI
2.- ¿QUE ES?
- 1A
- 2A
- 3A
- 4A

NO
3.- ¿COMO QUE son?
- 1A
- 2A
- 3A
- 4A

4.- ¿De qué COLOR son?
azules
5.- ¿Qué FORMA tienen?
- 1A
- 2A
- 3A
- 4A

6.- Ahora necesitamos saber si ESTOS DOS palitos (1A y 4A) son IGUAL de largos o uno es más largo que el otro
7.- ¿Tú qué OPINAS?
=== de largos
=/= de largos
- 1A
- 4A

8.- ¿Cómo SUPISTE?
9.- ¿Cómo podemos ESTAR SEGUROS de que:
- son IGUALES de largos?
- NO son IGUALES de largos?

Se PRESENTAN los listones, popotes y palitos rojos:
10.- ¿Sabes QUE es esto?
- popotes
- listones
- palitos rojos
11.- ¿De qué COLOR son?
- popotes
- listones
- palitos rojos
12.- ¿TE SIRVE alguno de ellos para saber si los palitos azules (1A y 4A) son o no igual de largos?
SI
13.- ¿CUAL te sirve?
- 3R
- 6R
- 16R
- 18R
- 20R
- P. Chico
- P. Gde.
- L. Chico
- L. Gde.
14.- ¿A ver COMO?
15.- ENTONCES, ¿son iguales ó diferentes de largo?
=== de largos
=/= de largos
16.- ¿CUAL más largo y cuál menos largo?
- 1A
- 4A
17.- ¿Cómo SUPISTE?
NINGUNO sirve
18.- ¿POR QUE no?

SI CONCLUYE CORRECTAMENTE, pasa a la PREGUNTA 31

SI NO CONCLUYE CORRECTAMENTE, pasa a la SIGUIENTE PREGUNTA

Fíjate bien: SE LE MUESTRA COMO ITERAR en 1A y 4A con el 3R
19.- Ahora HAZLO TU
20.- ENTONCES, fueron iguales o diferentes de largos?

=== de largos
21.- ¿Cómo SUPISTE?
porque son 6 en 1A y 6 en 4A

=/= de largos

22.- ¿CUAL es más largo y cuál menos largo?
- 1A
- 4A

23.- ¿Cómo SUPISTE?

Si concluyó que fueron IGUALES PORQUE FUERON 6 Y 6 pasa a la PREGUNTA 24

Si concluyó que fueron DIFERENTES pasa a la PREGUNTA 25

24.- Bueno, fueron 6 y 6, PERO son iguales o diferentes de largos?
=== de largos
=/= de largos

25.- Y CON ALGUNOS DE ESTOS (P. Chico o L. Chico) ¿también podríamos comprobar?

SI

26.- ¿Con CUAL?
- P. chico
- L. chico

27.- ¿A ver COMO?
PASA A LA PREGUNTA 30

NO

28.- ¿POR QUE no?

SE LE MUESTRA COMO MEDIR CON LISTON O POPOTE.

29.- Ahora HAZLO TU

30.- ENTONCES, ¿fueron o no fueron iguales de largos?
=== de largos
=/= de largos
- 1A
- 4A

31.- ¿Cómo SUPISTE?

Para los sujetos que NO CONSERVAN LONGITUD, aquí TERMINA LA TAREA.
Los sujetos CONSERVADORES CONTINUAN la tarea.

32.- Ahora necesitamos saber si estos (1A, 2A y 3A) palitos azules son o no igual de largos. ¿Tú QUE OPINAS?

=== de largos

33.- ¿Cómo SUPISTE?

34.- ¿CUAL es más largo y cuál es menos largo?
más largo:
intermedio:
menos largo:

35.- ¿Cómo SUPISTE?

Si está TODO CLARO TERMINA aquí LA TAREA.
Si hay ALGUNA DUDA se pasa a la EXPERIENCIA CONTROL DE HORMIGUITAS.

EXPERIENCIA CONTROL HORMIGUITAS.

36.- Si una hormiguita camina por aquí, otra por aquí, otra por aquí y otra por aquí, ¿todas las hormiguitas caminan igual o hay una que camina más o una que camina menos?

caminan ===

37.- ¿En qué te FIJASTE para saber?

caminan =/=

38.- ¿CUAL camina más y cuál camina menos?

más:

intermedio:

menos:

39.- ¿Cómo SUPISTE?

40.- ¿Cómo podemos ESTAR SEGUROS de que:

- caminan IGUAL?
- unas caminan MAS y unas MENOS?

CONCLUSION

41.- Entonces, ¿los palitos azules son IGUALES de largos, o NO son iguales de largos?

=== de largos

=/= de largos

42.- ¿CUAL es más largo y cuál menos largo?

más largo:

intermedio:

menos largo:

43.- ¿Cómo SUPISTE?

Tarea 3.

Nombre:

Grado:

Edad:

Fecha:

Sujeto No.:

Los primeros bastones se denominan: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 y 15. Los que se dan para intercalar: 2, 4, 6, 8, 10, 12 y 14.

RECONOCIMIENTO de Material: Se presentan al niño 8 bastoncitos (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 y 15) (de preferencia se le dan en las manos)

1.- ¿Sabes QUE ES esto (bastones)?

SI

2.- ¿QUE es?

NO

3.- ¿COMO QUE son?
4.- ¿De qué COLOR son?
amarillos
5.- ¿Qué FORMA tienen?
6.- ¿Pueden ser como unos BASTONCITOS?
si
7.- Te voy a pedir que ACOMODES todos los bastoncitos en una hilerita que vaya del más chico al más grande y que vayan quedando recargados así (se le muestra cómo).
serie CORRECTA
serie INCORRECTA
8.- ¿En qué FORMA quedaron?
9.- ¿Es como una ESCALERITA?
si
10.- ¿Por DONDE se sube la escalerita?
11.- ¿CUANTOS escaloncitos tiene la escalera?
cuenta con un dedo
cuenta con la vista

Tengo OTROS escaloncitos, de otros tamaños, que voy a ir dándote par que los acomodes en el lugar que les toca para que quede una sola escalerita.

GENERALIDADES:
- compara con:
todos los tamaños
sólo con tamaños aproximados
- base: usa
no usa
- al intercalar:
recorre los bastones: la mayor parte
la menor parte
deshace la serie: la mayor parte
la menor parte
- seria: por pares
de 3 en 3

12.- Se le da el bastón 8
correcto
incorrecto
13.- Se le da el bastón 2
correcto
incorrecto
14.- Se le da el bastón 14
correcto
incorrecto
15.- Se le da el bastón 6
correcto
incorrecto
16.- Se le da el bastón 10
correcto
incorrecto

17.- Se le da el bastón 4
correcto
incorrecto
18.- Se le da el bastón 12
correcto
incorrecto

serie total CORRECTA
serie total INCORRECTA

Voy a QUITAR estos escalones para trabajar sólo con estos (se retiran ____ escalones)
19.- ¿Ahora CUANTOS escalones tiene la escalera?
cuenta con un dedo
cuenta con la vista

Señalando un escalón AL AZAR: Si un muñequito viene subiendo la escalera por aquí y se detiene en este (___) escalón:
Generalidades:
cuenta con el dedo = c.d.
cuenta con la vista = c.v.
resta del total = r.t.
resta uno = r.1
20.- ¿En qué escalón ESTA PARADO el muñequito?
21.- ¿Cómo SUPISTE?
22.- ¿Cuántos escalones subió ANTES de detenerse?
23.- ¿Cómo SUPISTE?
24.- ¿Cuántos escalones le FALTAN para terminar de subir la escalera?
25.- ¿Cómo SUPISTE?

Se señala OTRO escalón AL AZAR:
Si el muñequito se detiene en este (___) escalón:
26.- ¿En qué escalón ESTA PARADO el muñequito?
27.- ¿Cómo SUPISTE?
28.- ¿Cuántos escalones subió ANTES de detenerse?
29.- ¿Cómo SUPISTE?
30.- ¿Cuántos escalones le FALTAN para terminar de subir la escalera?
31.- ¿Cómo SUPISTE?

Se señala OTRO escalón AL AZAR:
Si el muñequito se detiene en este (___) escalón:
32.- ¿En qué escalón ESTA PARADO el muñequito?
33.- ¿Cómo SUPISTE?
34.- ¿Cuántos escalones subió ANTES de detenerse?
35.- ¿Cómo SUPISTE?
36.- ¿Cuántos escalones le FALTAN para terminar de subir la escalera?
37.- ¿Cómo SUPISTE?

Se DESORDENA la serie y se señala un escalón AL AZAR:
Si el muñequito se detiene en este (___) escalón:
38.- ¿En qué escalón ESTA PARADO el muñequito?

39.- ¿Cómo SUPISTE?
40.- ¿Cuántos escalones subió ANTES de detenerse?
41.- ¿Cómo SUPISTE?
42.- ¿Cuántos escalones le FALTAN para terminar de subir la escalera?
43.- ¿Cómo SUPISTE?
44.- ¿Cómo podemos ESTAR SEGUROS?
ordena la serie completa
ordena la serie hasta el bastón señalado

Tarea 4.
Nombre:
Grado:
Edad:
Fecha:
Sujeto No.:

Los vasos se denominan: A, A_1, A_2 y A_3; B, B_1, B_2 y B_3, y C, C_1, C_2 y C_3
E M

RECONOCIMIENTO de Material: Se presentan al niño los 3 vasos A, B y C vacíos.

1.- ¿Sabes QUE ES esto (vasos)?

SI
2.- ¿QUE es?

NO
3.- ¿COMO QUE son?
4.- ¿COMO son?
- A
- B
- C

FIJATE bien en lo que vamos a hacer: SE VIERTE, con el vaso M, 3 unidades de líquido en el vaso A (azul), 3 en el B (verde) y 3 en el C (rojo).

5.- Necesitamos saber si estos vasos tienen la MISMA CANTIDAD de agua.

Si dice que SI
6.- ¿COMO sabes?

Si dice que NO
7.- ¿CUAL vaso tiene MAS y cuál tiene MENOS agua?
- A
- B
- C

8.- ¿Cómo podemos estar SEGUROS de que:
- es IGUAL la cantidad de agua?
- NO es IGUAL la cantidad de agua?

Mira, aquí tenemos estos VASOS VACIOS que puedes usar si te sirven para comprobar.

9.- ¿Te SIRVEN?

SI

¿A ver COMO?

NO

¿POR QUE no?

EXPERIENCIA CONTROL MEDICION

=== niveles

=/= cantidad

10.- ¿Tienen lo MISMO de agua, o uno tiene más o uno tiene menos?

=== cantidad

11.- ¿COMO SUPISTE?

12.- ¿Cómo podemos ESTAR SEGUROS?

=/= cantidad

13.- ¿CUAL tiene MAS y cuál tiene MENOS?
- A
- B
- C

14.- ¿COMO SUPISTE?

15.- ¿Cómo podemos ESTAR SEGUROS?

EXPERIENCIA CONTROL MEDICION

=/= niveles

=/= cantidad

16.- ¿Tienen lo MISMO de agua, o uno tiene más o uno tiene menos?

=== cantidad

17.- ¿COMO SUPISTE?

18.- ¿Cómo podemos ESTAR SEGUROS?

=/= cantidad

19.- ¿CUAL tiene MAS y cuál tiene MENOS?
- A
- B
- C

20.- ¿COMO SUPISTE?

21.- ¿Cómo podemos ESTAR SEGUROS?

22.- Entonces, ¿TIENEN O NO LA MISMA cantidad de agua?

Si dice que NO:

23.- ¿CUAL tiene más y cuál tiene menos?
- A
- B
- C

24.- ¿COMO SUPISTE?

Si dice que SI (IGUAL cantidad)
25.- ¿COMO SUPISTE?

Tarea 5.
Nombre:
Grado:
Edad:
Fecha:
Sujeto No.:

Los cartones se denominan con números del 1 al 10 de chico a grande.

RECONOCIMIENTO de Material: Se presentan al niño los cartones en desorden.

1.- ¿Sabes QUE ES esto (cartones)?

SI
2.- ¿QUE es?

NO
3.- ¿COMO QUE cosa es?
4.- ¿Podemos decir que son unos CARTONCITOS?
si
5.- ¿De qué COLOR son?
6.- ¿Son del mismo TAMAÑO?
7.- Ahora quiero que con todos los cartones hagas una como ESCALERITA que vaya desde el escalón más chiquito al más grande.

serie CORRECTA
serie INCORRECTA

8.- ¿CUANTOS cartones hay?

cuenta con un dedo = c.d.
cuenta con la vista = c.v.
horizontal = h
vertical = v

Se RETIRAN ____ cartones y la serie queda del 1 al ___
9.- ¿CUANTOS cartones como éste (1) caben en éste (2) cartón?
10.- ¿Cómo SUPISTE?
11.- ¿CUANTOS cartones como éste (1) caben en éste (3) cartón?
12.- ¿Cómo SUPISTE?

13.- ¿CUANTOS cartones como éste (1) caben en éste (4) cartón?
14.- ¿Cómo SUPISTE?
15.- ¿CUANTOS cartones como éste (1) caben en éste (5) cartón?
16.- ¿Cómo SUPISTE?
17.- ¿CUANTOS cartones como éste (1) caben en éste (6) cartón?
18.- ¿Cómo SUPISTE?
19.- ¿CUANTOS cartones como éste (1) caben en éste (7) cartón?
20.- ¿Cómo SUPISTE?
21.- ¿CUANTOS cartones como éste (1) caben en éste (8) cartón?
22.- ¿Cómo SUPISTE?
23.- ¿CUANTOS cartones como éste (1) caben en éste (9) cartón?
24.- ¿Cómo SUPISTE?
25.- ¿CUANTOS cartones como éste (1) caben en éste (10) cartón?
26.- ¿Cómo SUPISTE?

Se señala un cartón AL AZAR:
27.- ¿CUANTOS cartones como éste (1) caben en éste (___) cartón?
28.- ¿Cómo SUPISTE?

Se señala otro cartón AL AZAR:
29.- ¿CUANTOS cartones como éste (1) caben en éste (___) cartón?
30.- ¿Cómo SUPISTE?

Se señala otro cartón AL AZAR:
31.- ¿CUANTOS cartones como éste (1) caben en éste (___) cartón?
32.- ¿Cómo SUPISTE?

Se desordena la serie y se señala otro cartón AL AZAR:
33.- ¿CUANTOS cartones como éste (1) caben en éste (___) cartón?
34.- ¿Cómo SUPISTE?
35.- ¿Cómo podemos ESTAR SEGUROS?

seria hasta el cartón señalado
rehace toda la serie
itera con el cartón 1.