00362

1ej.
1

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

METODOS GEOMETRICOS Y TEORIA ESPECTRAL PARA LA ECUACION DE KLEIN - GORDON

T E S I S

Que Para Obtener el Título de

MAESTRO EN CIENCIAS

p r e s e n t a

JUAN HECTOR ARREDONDO RUIZ

México, D. F. 1982

INDICE

INTRODUCCIÓN.

A pesar de que la teoría de colisiones es básicamente un fenómeno dependiente del tiempo, hasta antes del trabajo de $E_{N\beta}$, muy pocos resultados habían sido obtenidos con métodos dependientes del tiempo.

En contraste con otros métodos. (Teoría de Kato – Birman, Métodos estacionarios

<2> [7] <7> <8> <9> <10> <11> <12> [13] [14] <15> <16> <26> <27> <28> <31> <35> <

<37> <39> <40> <41> <42> <43> <44> <52> <54> <55> <59> <61> <62> <66> <67> <6

<69> <70> <75> <78> <87> <88> <90> <92>)

el método de ENβ sigue de cerca el aspecto geométrico del fenómeno.

En nuestra tesis de Licenciatura hemos estudiado ampliamente el método de ENβ.

El presente trabajo utiliza la teoría desarrollada para estudiar el caso de la ecuación de Klein-Gordon.

En el primer capítulo hemos utilizado el análisis hecho en <84>, <85>

de la teoría espectral y de colisiones para la ecuación de Klein - Gordon. Mediante este análisis y una generalización del método de ENβ (<3>, <17>, <20> - <25>, <29> <57>, <60>, <73> y <85>)

hemos logrado demostrar completes asintótica y estudiar las propiedades del espectro Hamiltoniano en el caso de que la forma sesquilineal es positiva definida. También en el mismo capítulo damos una clase específica de potenciales para los cuales las hipótesis de nuestro teorema se cumplen.

En el capítulo 2 consideramos el caso en que la forma sesquilineal ya no es más definida y logramos demostrar resultados análogos a los del capítulo anterior.

Anexamos un apéndice que contiene los resultados generales utilizados en los capítulos 1 y 2 y que fueron desarrollados en <5>, <29>, [12].

Capitulo Primero.

La Ecuación de Klein Gordon y él Método de ENB.

La ecuación de Klein Gordon es la ecuación diferencial parcial:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-b_0\right)^2\psi(x,t)=\left[\sum_{j=1}^{v}(D_j-b_j)^2+m^2+q_s(x)\right]\psi(x,t)$$

$$x\in\mathbb{R}^v,\ t\in\mathbb{R},\ D_j=-\frac{i\partial}{\partial x_j} \qquad (1.1)$$

$b_i(x)$, $0\le i\le v$ y $q_s(x)$ son funciones reales y m es una constante positiva. Está ecuación describe una partícula relativista de spin cero y masa m en la presencia de un potencial eléctrico $b_0(x)$, un potencial magnético $b_i(x)$ $1\le i\le v$, y $q_s(x)$ un potencial escalar.

Siguiendo el procedimiento usual podemos pasa (1.1) a una ecuación equivalente la cuál es de primer orden en el tiempo:

Sea $f_1(x,t)=\psi(x,t)$

$$f_2(x,t=i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, (1.1) es equivalente a la ecuación:

$$i \frac{\partial}{\partial t} f = h f \qquad (1.2)$$

donde

$$h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L & Q \end{bmatrix} \quad D(h) = C_0^{\infty,2} := C_0^{\infty} \oplus C_0^{\infty}$$

$$L = \sum_{j=1}^{v} (D_j - b_j)^2 + m^2 + q(x) \qquad q(x) = q_s - b_0^2 \quad (1.3)$$

$$Q = 2 b_0$$

Se asocia con L una forma sesquiLineal definida por:

$$(f, g)_E = \sum_{j=1}^{v} \langle (D_j - b_j) f_1, (D_j - b_j) g_1 \rangle + (m^2 + q) \langle f_1, g_1 \rangle + \langle f_2, g_2 \rangle \qquad (1.4)$$

$$f, g \in C_0^{\infty,2}.$$

Haciendo un cálculo directo, se verifica qu

h es simétrico en esta forma, es decir:

$$(hf, g)_E = (f, hg)_E \qquad f, g \in C_0^{\infty,2} \qquad (1.5)$$

Cuando $b_i(x) \equiv q_s(x) \equiv 0$ $i = 1, \ldots, \nu$, la forma sesquilineal se reduce a:

$$(f, g)_0 = \sum_{j=1}^{\nu} (D_j f_1, D_j g_1) + m^2 (f_1, g_1) + (f_2, g_2) \qquad (1.6)$$

Sea $\mathcal{H}_0$ la cerradura de $C_0^{\infty,2}$ con esta norma:

$$\frac{\partial}{\partial t} f = H_0 f \qquad H_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Delta + m^2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.7)$$

Definición 1.1.- Sea $P(k)$ una función medible de $\mathbb{R}^\nu$ en $\mathbb{C}$ finita casi dondequiera. $H_0 = P(-i\nabla)$ es el operador que actúa en $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ de la siguiente forma:

$$\varphi \to [P(k)\hat{\varphi}(k)]^\vee$$

donde $\wedge, \vee$ denotan la transformada de Fourier y su inversa. H_0 es un operador lineal con domini

$$\mathcal{D}(H_0) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2) \,/\, P(k)\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}$$

Denotaremos por H_s, el espacio de Sobolev de orden s, $s \in \mathbb{R}$. Es decir, la clausura de C_0^∞ con la norma: $\| f \|_s = \| (1+k)^{2\cdot s/2} \hat{f}(k) \|$, $f \in C_0^\infty$. Denotemos $\mathcal{L}_2^2 := L^2 \oplus L^2$ y sea U_0 el operador de $H_1 \oplus L^2$ en $\mathcal{L}_2^2$ definido por:

$$U_0 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} P_0^{1/2}(-i\nabla) & 1 \\ P_0^{1/2}(-i\nabla) & -1 \end{pmatrix}$$

donde $P_0(k) = k^2 + m^2$. Entonces

$$\begin{aligned} \| U_0 \{f_1, f_2\} \|^2_{\mathcal{L}_2^2} &= \tfrac{1}{2} \| P_0^{1/2}(-i\nabla) f_1 + f_2 \|^2 + \tfrac{1}{2} \| P_0^{1/2}(-i\nabla) f_1 - f_2 \|^2 \\ &= \| P_0^{1/2}(-i\nabla) f_1 \|^2 + \| f_2 \|^2 \\ &= \| (k^2+m^2)^{1/2} f_1 \|^2 + \| f_2 \|^2 \\ &= \| \{f_1, f_2\} \|^2_{\mathcal{H}_0} \end{aligned}$$

En consecuencia, ψ_0 es una isometría. Además si:

$\psi = (\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{L}_2^2$ entonces

$$U_0 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{donde}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\psi_1 + \psi_2}{2\,(k^2+m^2)^{1/2}} \\ \dfrac{\psi_1 - \psi_2}{2} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Por lo tanto $(f_1, f_2) \in \mathcal{H}_0$ y así U_0 es una isometría de $\mathcal{H}_0$ sobre $\mathcal{L}_2^2$ y por lo tanto unitario.

Definamos el operador en $\mathcal{L}_2^2$, $\hat{H}_0$ por:

$$\hat{H}_0 = \begin{bmatrix} (k^2+m^2)^{1/2}(-i\nabla) & 0 \\ 0 & -(k^2+m^2)^{1/2}(-i\nabla) \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Se obtiene fácilmente que $\hat{H}_0$ es autoadjunto, pues es suma directa de operadores autoadjuntos, con:

$$D(\hat{H}_0) = \left\{ \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \varepsilon\ \mathcal{L}_2^2 \,/\, \|(1+E^2)^{1/2}\varphi_i\| < +\infty \ , \ i=1,2 \right\}$$

$$\equiv H_1 \oplus H_1$$

$\hat{H}_0$ es esencialmente autoadjunto en:

$$C_0^{\infty,2} = C_0^{\infty} \oplus C_0^{\infty} .$$

Un simple cálculo nos muestra que:

$$U_0^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} P_0^{-1/2}(-i\nabla) & P_0^{-1/2}(-i\nabla) \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

y para $\varphi \,\varepsilon\, C_0^{\infty,2}$

$$U_0^{-1}\, \hat{H}_0\, U_0\, \varphi = H_0 \varphi \qquad (1.11)$$

En consecuencia, H_0 es autoadjunto con dominio $H_2 \oplus H_1$, y esencialmente autoadjunto en $C_0^{\infty,2}$.

Puesto que $\hat{H}_0$ tiene espectro absolutamente continuo, H_0 también tiene espectro absolutamente continuo. Así, obtenemos que:

$$\sigma_{ess}(H_0) = \sigma_{ess}(\hat{H}_0) = (-\infty, -m] \cup [m, +\infty)$$

Definición 1.2.- Sea $A = f(-i\nabla)$ con f una función continua de $\mathbb{R}^\nu$ en $\mathbb{R}$. k_0 es llamado un punto singular de f, si f no es C^∞ en ninguna vecindad de k_0 ó si $(\nabla f)(k_0) = 0$. Los valores de f en los puntos singulares son llamados valores singulares. La familia de puntos singulares y valores singulares serán denotados por S y $f(S)$ respectivamente.

Definición 1.3.- Una función continua f de $\mathbb{R}^\nu$ en $\mathbb{R}$ es llamada vagamente elíptica si:

a) $f(S)$ es numerable

b) $|f(k)| \to +\infty$ cuando $|k| \to +\infty$

Definición 1.4.- $B = P(-i\nabla)$ es un operador vagamente elíptico si P es una función vagamente elíptica.

Definición 1.5.- Diremos que A_0 es un operador vagamente elíptico de $\mathcal{L}_2^2$ si es unitariamente equivalente a un operador A en $\mathcal{L}_2^2$ el cuál está representado por una matriz diagonal cuyas componentes son operadores vagamente elípticos en L^2.

De (1.10) y (1.9) vemos que el operador H_0 definido en (1.7) es un operador vagamente elíptico de $\mathcal{L}_2^2$.

Ahora bien, para la forma sesquilineal en (1.4) supondremos que L tiene una extensión autoadjunta $L \geq \mathcal{E}$. Denotaremos por $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ la cerradura de $C_0^{\infty,2}$ en la norma heredada por la forma sesquilineal. Seguiremos denotando por L a está extensión.

Puesto que $L \geq \varepsilon$, como vimos anteriormente, se deduce que el operador:

$$U_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L^{1/2} & 1 \\ L^{1/2} & -1 \end{bmatrix} \qquad (1.12)$$

$f \in \mathcal{H}_E$ es unitario

de $\mathcal{H}_E = D(L^{1/2}) \oplus L^2$ sobre $\mathcal{L}_2^2$.

Haciendo una discusión análoga a la hecha para H_0 se demuestra que bajo el mapeo U, tenemos que:

$$H = U^{-1} \hat{H} U \qquad (1.13)$$

donde

$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{Q}$ es un operador auto-adjunto en $\mathcal{L}_2^2$

$$\hat{H}_1 = \begin{pmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & -L^{1/2} \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q} = 2b_0 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.14)$$

De esta forma la ecuación de Klein Gordon es equivalente a la ecuación:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \, , \quad \psi \in \mathcal{L}_2^2$$

Mientras que la ecuación de Klein Gordon no perturbada es equivalente a la ecuación:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H}_0 \psi \qquad \psi \in \mathcal{L}_2^2$$

La ventaja de está nueva representación es que ambas ecuaciones estan dadas en el mismo espacio de Hilbert $\mathcal{L}_2^2$. Además la interpretación física es clara en estas representaciones, en la cual existe un operador de posición y una densidad de probabilidad definida positiva. Está representación ha sido estudiada por primera vez

en $\langle 84 \rangle$, $\langle 85 \rangle$,
donde también se desarrolla la teoría espectral y la teoría de Colisiones tanto en las representaciones originales (en $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_E$) como en las representaciones en $\mathcal{L}_2^2$.

Mediante este análisis y el método de BNSS probaremos completes asintótica para la ecuación de Klein-Gordon ($\langle 19 \rangle$, $\langle 32 \rangle$, $\langle 45 \rangle$, $\langle 53 \rangle$, $\langle 56 \rangle$, $\langle 63 \rangle$, $\langle 72 \rangle$, $\langle 80 \rangle$, $\langle 81 \rangle$, $\langle 84 \rangle$ $\langle 85 \rangle$, $\langle 86 \rangle$, $\langle 91 \rangle$).

Teorema 1: Sean $\hat{H}_0$ y $\hat{H}$ como en (1.9) y (1.13) y $\hat{J}$ un operador acotado de $\mathcal{L}_2^2$ en $\mathcal{L}_2^2$ tal que:

a) $[(\hat{H}+i\mathbb{1})^{-1}\hat{J} - \hat{J}(H_0+i\mathbb{1})^{-1}]$ es compacto.

b) $(\hat{J}-\mathbb{1})$ es compacto

c) Para todo intervalo acotado y alguna función $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu})$

$$\int_0^{+\infty} \| P_{\hat{H}}(\omega) [\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0] g^{-1}(-i\nabla) F\{B_R^c, x\} I \|_{\mathcal{L}_2^2} \, dR$$

y $\| P_{\hat{H}}(\omega)\, [\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0]^{-1}\, g(-i\nabla)\, I \|_{\mathcal{J}_2} < +\infty$

Entonces:

a) Los operadores de onda generalizados existen y además:

$$\tilde{\Omega}^{\pm} := s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{it\hat{H}}\, \hat{J}\, e^{-it\hat{H}_0}$$

$$= s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{it\hat{H}}\, e^{-it\hat{H}_0}$$

$$=: \Omega^{\pm}$$

b) $\operatorname{Ran} \Omega^{\pm} = \mathcal{H}_{ac}(\hat{H})$

c) Los únicos posibles puntos límites finitos de $\hat{H}$ son $\pm m$. Cualquier eigenvalor distinto de $\pm m$ tiene multiplicidad finita.

d) $\sigma_{sc}(\hat{H}) = \phi$

e) $\sigma_{ess}(\hat{H}) = \sigma_{ess}(\hat{H}_0)$

$$= (-\infty, -m] \cup [m, +\infty)$$

La hipótesis c) es llamada la condición de EnB.
Para demostrar los incisos b)-e) del teorema, solo necesitamos del siguiente lema.

Lema 1.1 (Principio de Descomposición de EnB); Supongamos que $\hat{H}$ satisface las hipótesis del teorema. Entonces, si $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de vectores unitarios con:

a) $\|F\{B_{n,x}\}\varphi_n\| \to 0$ cuando $n \to +\infty$

b) Para algún $[a,b] \subset (m,+\infty)$ ó $[a,b] \subset (-\infty,-m)$
$\hat{P}([a,b])\varphi_n = \varphi_n$
Entonces uno puede descomponer

$$\varphi_n = \varphi_n^{in} + \varphi_n^{out} + \varphi_n^{w} \quad (1.15)$$

tales que:

1) $\|\varphi_n - \Omega^+\varphi_n^{in} - \Omega^-\varphi_n^{out}\| \to 0$ (1.16) cuando $n \to +\infty$

2) $\sup \|(\hat{H}_0 + i\mathbb{1})\varphi_n^{\substack{out\\in}}\| < +\infty$ (1.17)

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sup\limits_{t<0}\|F\{B_{\delta n},x\}e^{\mp it\hat{H}_0}\varphi_n^{\substack{in\\out}}\|\right] = 0$ (1.

para algún $\delta>0$ que depende de a y b únicamente.

Por ahora supondremos este lema y demostraremos b) - e) del teorema:

Demostración:

Por las hipótesis del teorema a) y b) obtenemos que:

$$(\hat{A}+i\,\mathbb{1})^{-1}-(\hat{A}_0+i\,\mathbb{1})^{-1} \text{ es compacto.} \quad (1.19)$$

Usando la proposición (A.6) obtenemos que:

$$\sigma_{ess}(\hat{A}) = \sigma_{ess}(\hat{A}_0) = (-\infty,-m] \cup [m,+\infty) \quad (1.20)$$

con esto se prueba e) del teorema.

Tomemos ahora $\varphi' \in \mathcal{H}_{sc}(\hat{A})$ con $\varphi' \neq 0$.

Por (1.20) obtenemos que:

$$\varphi' = P_{\hat{A}}(-\infty,-m)\,\varphi' + P_{\hat{A}}(m,+\infty)\,\varphi'$$

donde

$P_{\hat{A}}(a,b)$ es la proyección espectral asociada al operador $\hat{A}$ sobre el intervalo (a,b).

Puesto que cada $P_{\hat{A}}(\omega)$ es una proyección ortogonal y define una medida continua obtenemos que necesariamente existe $[a,b] \subset (m,+\infty)$ ó $[a,b] \subset (-\infty,-m)$ tal que:

$$P_{\hat{A}}([a,b])\varphi' \neq 0.$$

De aquí podemos encontrar φ con $\|\varphi\|=1$ tal que:

$$P_{\hat{A}}([a,b])\varphi = \varphi.$$

Ahora bien, de la proposición A.3 sabemos que existe una función $f_{[a,b]}$ localmente acotada, y definida en $\mathbb{R}$ tal que:

$$|f_{[a,b]}| \geq 1, \quad |f_{[a,b]}^{(x)}| \to +\infty$$

Cuando $|x| \to +\infty$ y el operador

$$f_{[a,b]}(\hat{A}_0)\, P_{\hat{A}}([a,b]) \text{ es acotado} \quad (1.21)$$

Por otro lado, para cada $R < +\infty$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F\{B_R, x\} I f^{-1}_{[a,b]}(\hat{H}_0)$ es compacto (1.22)

De (1.21) y (1.22) se desprende que

$F\{B_R, x\} I P_{\hat{H}}([a,b])$ es compacto (1.23)

De la proposición (A. 8) se deduce que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \, \| F\{B_R, x\} I P_{\hat{H}}([a,b]) e^{-it\hat{H}} \varphi \| = 0 \quad (1.24)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$u_n(\tau) = \| F\{B_n, x\} I P_{\hat{H}}([a,b]) e^{-i\tau\hat{H}} \varphi \|$$

Supongamos que para n fijo

$$u_n(\tau) \geq \varepsilon \qquad \forall \tau \geq T_0$$

Entonces

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_n(\tau)\, d\tau \geq \frac{1}{T} \int_0^{T_0} u_n(\tau)\, d\tau + \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T} \varepsilon \, d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{T_0} u_N(\tau)\,d\tau + \left(\frac{T-T_0}{T}\right)\varepsilon \longrightarrow \varepsilon$$

cuando $T \to +\infty$.

Lo que está en contradicción con (1.24)

En consecuencia, podemos construir una sucesión $\{\tau_m^{(n)}\}_{m=1}^{+\infty}$ con $\tau_m^{(n)} \to +\infty$ cuando $m \to +\infty$. tal que $u_N(\tau_m^{(n)}) \to 0$ cuando $m \to +\infty$.

Podemos consecuentemente encontrar una sucesión $\{\tau_n\}_{n=1}^{+\infty}$ con $\tau_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$. tal que $u_N(\tau_N) \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Es decir,

$$\| F\{B_n, x\} I e^{-i\tau_n \hat{A}} \varphi \| \to 0 \quad n \to +\infty \qquad (1.25)$$

Sean

$\varphi_N := e^{-i\tau_n \hat{H}} \varphi$

Para esta sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}^{+\infty}$ se cumplen las hipótesis del lema 1.1

$$\varphi_n = \varphi_N^{in} + \varphi_N^{out} + \varphi_N^{w}$$

Ahora, usando que $e^{i\tau\hat{H}}$ es unitorio y que $e^{+i\tau\hat{H}}\Omega^{\pm} = \Omega^{\pm} e^{+i\tau H_0}$, obtenemos que:

$$\|\varphi - \Omega^{+}(e^{i\tau_n \hat{H}_0}\varphi_N^{in}) - \Omega^{-}(e^{i\tau_n \hat{H}_0}\varphi_N^{out})\| = \|\varphi - e^{i\tau_n \hat{H}}\Omega^{+}\varphi_N^{in}$$

$$- e^{i\tau_n \hat{H}}\Omega^{-}\varphi_N^{out}\|$$

$$= \|e^{-i\tau_n \hat{H}}\varphi - \Omega^{+}\varphi_N^{in} - \Omega^{-}\varphi_N^{out}\|$$

$$= \|\varphi_N - \Omega^{+}\varphi_N^{in} - \Omega^{-}\varphi_N^{out}\| \to 0 \quad n \to +\infty \text{ por } (1.16)$$

De aquí obtenemos que φ es el límite de una sucesión de vectores en $\operatorname{Ran}\Omega^{\pm}$.
Por teoría general sabemos que $\mathcal{H}_{ac}(\hat{H}) \supset \operatorname{Ran}\Omega$

En consecuencia φ es el límite de una sucesión de vectores del subespacio cerrado $\mathcal{H}_{ac}(\hat{H})$. En consecuencia $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}(\hat{H}) \cap \mathcal{H}_{sc}$.

Puesto que $\mathcal{H}_{ac}(\hat{H}) \cap \mathcal{H}_{sc}(\hat{H}) = \{\bar{0}\}$ obtenemos una contradicción. Así, $\mathcal{U}_{sc}(\hat{H}) = \bar{0}$. Esto prueba d) del Teorema.

Ahora supongamos que $\bar{0} \neq \varphi' \in \mathcal{H}_{ac}(\hat{H})$

$\cap (\mathrm{Ran}\ \Omega^{-})^{\perp}$ usando los mismos argumentos llegamos a la conclusión de que existe una sucesión $\{\varphi_N\}_{n=1}^{+\infty}$ $\varphi_N := e^{-i\tau_n \hat{H}}\varphi$ que

cumple las hipótesis del lema 1.1. Entonces:

$$|(\varphi_N, \Omega^{+} \varphi_N^{in})| = |((\Omega^{+})^{*} \varphi_N, \varphi_N^{in})|$$

$$= |((\Omega^{+})^{*} e^{-i\tau_n \hat{H}} \varphi, \varphi_N^{in})|$$

$$= |(e^{-i\tau_n \hat{H}_0} (\Omega^{+})^{*} \varphi, \varphi_N^{in})|$$

$$= |((\Omega^{+})^{*} \varphi, e^{i\tau_n \hat{H}_0} \varphi_N^{in})| \leq |(F\{B_{\delta_N}^{c}, x\}$$

$$I\, (\Omega^{+})^{*} \varphi, e^{+i\tau_n \hat{H}_0} \varphi_N^{in})| + |((\Omega^{+})^{*} \varphi,$$

$$F\{B_{\delta_N}, x\} I\, e^{i\tau_n \hat{H}_0} \varphi_N^{in})| \leq$$

$$\|F\{B^c_{\delta N}, x\} I (\Omega^+)^* \varphi\| \left\{\sup_N \|\varphi_N^{in}\|\right\} +$$

$$\|(\Omega^+)^*\varphi\| \, \|F\{B_{\delta N}, x\} I e^{i\tau_n \hat{H}_0} \varphi_N^{in}\| \to 0 \quad n \to \infty \quad (1.27).$$

El primer término de esta última expresión tiende a cero puesto que

$\|(\hat{H}_0 + i\mathbb{1})\varphi\| \geq \|\varphi\|$ y debido a

(1.17). El segundo término debido a (1.18).

Por lo tanto, usando (1.27) y la unitariedad de: $e^{it\hat{H}}$

$$\|\varphi\|^2 = \lim_N \|\varphi_N\|^2$$

$$= \lim_{n \to \infty} (\varphi_N, \varphi_N - \Omega^+ \varphi_N^{in} - \Omega^- \varphi_N^{out}) + \lim_{n \to \infty} (\varphi_N, \Omega^+ \varphi_N^{in}) +$$

$$\lim_{N \to \infty} (\varphi_N, \Omega^- \varphi_N^{out}) \leq \lim_{N \to \infty} \|\varphi_N\| \, \|\varphi_N - \Omega^+ \varphi_N^{in} - \Omega^- \varphi_N^{out}\|$$

$$+ \lim_{n \to \infty} (\varphi_N, \Omega^+ \varphi_N^{in}) + \lim_{n \to \infty} (\varphi_N, \Omega^- \varphi_N^{out})$$

(usando (1.16))

$$= \lim_{n\to+\infty} \left\{ (\varphi_N, \Omega^+ \varphi_N^{in}) + (\varphi_N, \Omega^- \varphi_N^{out}) \right\}$$

El primer término de esta última expresión tiende a cero por (1.27), mientras que el segundo es idénticamente cero ya que φ, (y en consecuencia cada φ_N) está en $(\mathrm{Ran}\,\Omega^-)^\perp$. Esto prueba que $\mathrm{Ran}\,\Omega^- = \mathcal{H}_{ac}(A)$. Para $\mathrm{Ran}\,\Omega^+$ se hace similarmente, cambiando nada más los signos. Esto prueba b) del Teorema.

A continuación demostraremos c).

Supongamos que la conclusión c) del teorema no es cierta. Podemos encontrar una familia ortonormal $\{\varphi_N\}_{n=1}^{+\infty}$ con

$A\varphi_N = E_N\varphi_N$ y $E_N \to E$ cuando $n \to +\infty$, $E \neq \pm m$.

Además, por (1.20), quitando un número finito de ellos, podemos suponer que cada $E_N \subset [a,b]$ con $[a,b] \subset (m,+\infty)$ ó $[a,b] \subset (-\infty,-m)$. Por (1.23), para cada $R < +\infty$,

$$F\{B_R, x\} I\, P_{\hat{A}}([a,b])(\hat{A}+i\mathbb{1})^{-1}$$

es compacto.

Entonces:

$$\|F\{B_R,x\} I\, \varphi_N\| = \|F\{B_R,x\} I\,(\hat{A}+i\mathbb{1})^{-1}(\hat{A}+i\mathbb{1}) \times P_{\hat{A}}([a,b])\varphi_N\|$$

$$= \|F\{B_R,x\} I(\hat{A}+i\mathbb{1})^{-1} P_{\hat{A}}([a,b])(\hat{A}+i\mathbb{1})\varphi_N\|$$

$$= |E_N + i|\, \|F\{B_R,x\}(\hat{A}+i\mathbb{1})^{-1} P_{\hat{A}}([a,b])\varphi_N\| \to 0$$

cuando $n \to +\infty$.

Esto último es debido a que $\varphi_N \xrightarrow{w} 0$, $|E| < +\infty$ y del hecho que todo operador compacto manda sucesiones débilmente convergentes en sucesiones fuertemente convergentes. En consecuencia, pasando a una subsucesión (la cuál seguimos denotando por φ_N) podemos lograr que está subsucesión cumpla con las hipótesis del lema 1.1. y por lo tanto de (1.16)

$$\|\varphi_N - \Omega^+ \varphi_N^{in} - \Omega^- \varphi_N^{out}\| \to 0 \quad n \to +\infty$$

Pero por otro lado, cada φ_N está en el subespacio puramente puntual de $\hat{A}$, entonces cada φ_N es ortogonal a $\mathcal{H}_{ac}(\hat{A})$. En consecuencia,

$$\|\varphi_N - \Omega^+\varphi_N^{in} - \Omega^- \varphi_N^{out}\|^2 = \|\varphi_N\|^2 + \|\Omega^+\varphi_N^{in} + \Omega^-\varphi_N^{out}\|^2 \geq 1$$

Así obtenemos una contradicción. Esto prueba c) del teorema.

Para poder demostrar la conclusión a) del teorema así como el lema 1.1, necesitamos algunas estimaciones sobre el grupo unitario

$$e^{-it\hat{A}_0}.$$

Antes de seguir adelante recordemos que todo operador autoadjunto A, de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, tiene asociada una (y solo una) familia de proyectores espectrales:

$$\{P_\Omega \mid \Omega \subset \mathbb{R} \text{ es medible}\}$$

Está familia está caracterizada unívocamente por las siguientes propiedades:

a) Cada P_Ω es una proyección espectral.
Es decir,
$$P_\Omega^2 = P_\Omega, \quad P_\Omega^* = P_\Omega. \qquad (1.28)$$

b) $P_\emptyset = \bar{0}$, $P_\mathbb{R} = \mathbb{1}$ (operador identidad) (1.29)

c) Si $\Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n$ con $\Omega_i \cap_j = \emptyset$ ($i \neq j$),

Entonces
$$P_\Omega = s\text{-}\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} P_{\Omega_m} \qquad (1.30)$$

d) $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$. (1.31)

e) Para cada ψ, φ en $\mathcal{H}$, fijos, la asignación $\Omega \to (\psi, P_\Omega \varphi)$ define una medida de Borel, la cual se denota por $d(\psi, P_\lambda \varphi)$ (1.32)

f) A cada función medible g, le corresponde un operador densamente definido, cerrado con dominio D_g, el cual está caracterizado por:

$$D_g = \{\varphi \in \mathcal{H} \,/\, \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 \, d(\varphi, P_\lambda \varphi) < +\infty\}$$

y además, para $\varphi \in D_g$, $\psi \in \mathcal{H}$,

$$(\psi, g(A)\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \, d(\psi, P_\lambda \varphi)$$

$$\| g(A)\varphi \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 \, d(\varphi, P_\lambda \varphi)$$

$$g(A)^* = \bar{g}(A)$$

y para $g(\lambda) = \lambda$

$$(\psi, A\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(\psi, P_\lambda \varphi). \qquad (1.33).$$

(1.28) - (1.33) caracterizan unívocamente a la familia.

Sean ahora $\{P_\Omega^+ \,/\, \Omega$ es medible$\}$ y $\{P_\Omega^- \,/\, \Omega$ es medible$\}$ las familias de proyectores espectrales asociados al operador

$$L_0^{1/2} = P_0^{1/2}(-i\nabla) \text{ y } -L_0^{1/2} = -P_0^{1/2}(-i\nabla)$$

respectivamente, donde

$$P_0^{(k)} = (k^2 + m^2).$$

Por (1.9) obtenemos que:

$$\hat{H}_0 = \begin{bmatrix} L_0^{1/2} & 0 \\ 0 & -L_0^{1/2} \end{bmatrix} \qquad (1.34)$$

Lo que se afirma es que si

$\{P_{\hat{H}_0}(\Omega) \,/\, \Omega$ es medible$\}$ es la familia de proyectores espectrales de $\hat{H}_0$.

Entonces

$$P_{\hat{H}_0}(\Omega) = \begin{pmatrix} P_\Omega^+ \\ P_\Omega^- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P_\Omega^+ & 0 \\ 0 & P_\Omega^- \end{bmatrix} \qquad (1.35)$$

Para ver que esto último es cierto notemos que efectivamente la familia

$$\left\{ \begin{bmatrix} P_\Omega^+ & 0 \\ 0 & P_\Omega^- \end{bmatrix} \,/\, \Omega \text{ es medible} \right\}$$

cumple con (1.28)-(1.31). Además, está familia define la medida

$$d(\psi_1, P^+_\lambda \varphi_1) + d(\psi_2, P^-_\lambda \varphi_2)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Ahora, para $\psi \in \mathcal{L}^2_2$, $\varphi \in D(\hat{H}_0)$

$$(\psi, \hat{H}_0 \varphi)_{\mathcal{L}^2_2} = (\psi_1, L_0^{1/2} \varphi_1)_{L^2} + (\psi_2, -L_0^{1/2} \varphi_2)_{L^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d(\psi_1, P^+_\lambda \varphi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d(\psi_2, P^-_\lambda \varphi_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left\{ d(\psi_1, P^+_\lambda \varphi_1) + d(\psi_2, P^-_\lambda \varphi_2) \right\}$$

Por lo tanto, (1.35) es cierta.

Está igualdad y el hecho que

$$\sigma(L_0^{1/2}) = [m, +\infty), \quad \sigma(-L_0^{1/2}) = (-\infty, -m]$$

nos permitirán trabajar esencialmente en L^2 en lugar de $\mathcal{L}^2_2$, para probar el lema 1.1.

Lema (1.2); Sea $K\subset\mathbb{R}^\nu$, K compacto, $\mathcal{U}$ una vecindad de K, $\ell\in\mathbb{N}$, $f\in C^{\ell+1}(\mathcal{U})$, f real con $(\nabla f)(k)\neq 0$ $\forall\, k\in K$.

Sea $\omega\geq 0$ y $\varphi\in C^\ell(K)$, entonces

$$\left|\int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu_k\, e^{i\omega f(k)}\varphi(k)\right|\leq C_\ell(1+\omega)^{-\ell}\|\varphi\|_{\ell,\infty}$$

La constante C_ℓ depende de K pero puede ser tomada uniforme en f si $|\nabla f|\geq a>0$ $\forall\, k\in K$ y $\|f\|'_{\ell+1,K,\infty}\leq M<+\infty$ para a y M fijos donde $\|f\|'_{\ell+1,K,\infty}:=\sum_{2\leq|k|\leq\ell+1}\sup_{k\in K}|D^\alpha_f|$

Demostración:

Para cada $k\in K$, existe $1\leq i\leq n$ tal que $\left(\frac{\partial}{\partial k_i}f\right)(k)\neq 0$, y una vecindad de k en la cual $\frac{\partial}{\partial k_i}f$ no

se anula. Por compacidad, K se puede cubrir con un número finito S de tales vecindades.
Supongamos que $U_1, \ldots U_S$ cubren a K. Sea $\{\theta_r\}_{=1}^{S}$ un conjunto de funciones tales que cada $\theta_r \in C_0^\infty$ y $\operatorname{supp} \theta_r \subset U_r$ con $\sum_r \theta_r(k) = 1$ $\forall\, k \in K$.
Entonces,

$$\psi = \sum_r \theta_r \psi.$$

Estimamos cada término separadamente.

Supongamos que $\dfrac{\partial f}{\partial k_i} > 0$ en U_r. Integrando por partes:

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} d\nu k\, e^{i\omega f(k)} \psi(k)\, \theta_r(k) = \int_{\mathbb{R}^\nu} d\nu k \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial k_i}\right)^{-1} \psi(k)\, \theta_r(k) \right\} \left(\frac{-i}{\omega}\right) \times \frac{\partial}{\partial k_i} e^{i\omega f(k)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu k \left(\frac{i}{\omega}\right) e^{i\omega f(k)} \frac{\partial}{\partial k_i} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial k_i}\right)^{-1} \psi(k)\, \theta_r(k) \right\}$$

$\vdots$

$$= \left(\frac{i}{w}\right)^{\ell} \int_{\mathbb{R}^{\nu}} d^{\nu}k \, e^{iwf(k)} \left\{ \frac{\partial}{\partial k_i} \left(\frac{\partial f}{\partial k_i} \right)^{-1} \right\}^{\ell} [\psi \Theta_r]$$

La función $\left\{ \frac{\partial}{\partial k_i} \left(\frac{\partial f}{\partial k_i} \right)^{-1} \right\}^{\ell} \psi(k)\, \Theta_r(k)$

tiene una suma de términos conteniendo derivadas de Θ_r hasta orden ℓ, por derivadas de $\psi(k)$ también a lo más de orden ℓ y por factores de la forma

$$Q(f) \left(\frac{\partial}{\partial k_i} f \right)^{-m}$$

donde Q es un polinomio de derivados de orden α para $\lambda \le |k| \le \ell+1$. Entonces,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} d^{\nu}k \, e^{iwf(k)} \psi(k) \right| = \left| \int_K d^{\nu}k \, e^{iwf(k)} \psi(k) \left(\sum_r \Theta_r(k) \right) \right|$$

$$\le \sum_r \frac{1}{w^{\ell}} \left| \int_K d^{\nu}k \, e^{iwf(k)} \left\{ \frac{\partial}{\partial k_{i_r}} \left(\frac{\partial f}{\partial k_i} \right)_r^{-1} \right\}^{P} \psi \Theta_r \right|$$

$$\le C_{\ell}' \, w^{-\ell} \, \|\psi\|_{\ell,\infty} \le C_{\ell} (1+w)^{-\ell} \|\psi\|_{\ell,\infty} \quad (1.3k$$

Para mostrar que C_e puede ser tomada uniformemente para las f tales que

$$\|f\|'_{e+1,K,\infty} \leq M \text{ y } |\nabla f| \geq a,$$

notemos que es suficiente con que podamos escoger un recubrimiento $\{U_r\}$ que nos sirva para todas las f en el conjunto. Para ver esto, puesto que $|\nabla f| \geq a$, existe para cada $k_0 \in K$ un $1 \leq i \leq n$ tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial k_i}\right| \geq a\,\nu^{-1/2} \quad .$$

Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeña de tal manera que

$$a\nu^{-1/2} - \delta M \geq a(2\nu)^{-1/2},$$

Entonces, $\forall\, k \in K$ con $|k_0 - k| < \delta$, obtenemos

$$\left|\frac{\partial f}{\partial k_i}(k)\right| \geq \left|\frac{\partial f}{\partial k_i}(k_0)\right| - \left|\frac{\partial f}{\partial k_i}(k) - \frac{\partial f}{\partial k_i}(k_0)\right|$$

$$\geq \left|\frac{\partial f}{\partial k_i}(k)\right| \geq a\,(2\nu)^{-1/2}$$

EN CONSECUENCIA, podemos hallar UN recubrimiento de K, $\{U_r\}$ en el que cada f y en cada U_r existe UNA derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial k_{i_r}}$ tal que $\left|\frac{\partial f}{\partial k_{i_r}}\right| \geq a' > 0$

Y de aquí se deduce como antes.

Definición 1.7: $\forall$ compacto $B \subset \mathbb{R}^\nu$ y todo $t \neq 0$ se denota $tB = \{ty \,/\, y \in B\}$ y

$$d(x,B) := \inf_{y \in B} |x-y| .$$

Definición 1.8: Sea $H_0 = P(-i\nabla)$ como en la definición 1.1, con $P(k)$ UNA función real, denotamos por S al siguiente conjunto:

$S := \{k \in \mathbb{R}^\nu \,/\, P(k)$ NO es C^∞ en NINGUNA vecindad de k ó $(\nabla P)(k) = 0\}$.

Lema (1.3); Sea $H_0 = P(-i\nabla)$ y S como en la definición 1.8 y $K \subset \mathbb{R}^\nu$ un compacto disjunto de S. Sea $\varphi \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$ con $\hat{\varphi} \in C^\ell(K)$.
$B \equiv \{v \mid$ existe $k \in K$ con $\nabla P(k) = v\}$
Entonces, $\forall\, x \notin tB$, $e^{-itH_0}\varphi$, satisface la mayorización

$$|(e^{-itH_0}\varphi)(x)| \leq C_\ell\,(1 + d(x, tB))^{-\ell}\,\|\hat{\varphi}\|_{\ell,\infty}$$

C_ℓ depende de K, pero es uniforme en x, t y φ si $d(x/t, B) \geq a > 0$.

Demostración:

B es compacto y no contiene al origen porque K es disjunto de S. Como

$$(e^{-itH_0}\varphi)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{ik\cdot x} e^{-itP(k)} \hat{\varphi}(k)\, d^\nu k.$$

podemos aplicar el lema anterior.

Tomamos

$$W = d(x, tB)$$

$$f_x(k) := \frac{k\cdot x - tP(k)}{d(x, tB)}$$

$$(\nabla f_x)(k) = d(x, tB)^{-1}(x - t(\nabla P)(k))$$

Entonces

$$|\nabla f_x| \geq 1 \quad \forall\, k \in K \;\; y \;\; x \notin tB.$$

Para

$$\ell \geq 1,\; \|f\|'_{\ell+1,K,\infty} = |t|\, d(x, tB)^{-1} \|P\|'_{\ell+1,K,\infty}$$

$$= d(x/t, B)^{-1} \|P\|'_{\ell+1,K,\infty}$$

Aplicando el lema anterior directamente si

$$d(x/t, B) \geq a > 0, \quad C_\ell$$

es uniforme en x, t y φ.

Supongamos que B es un compacto disjunto del origen y que x, t son tales que

$$d(x/t, B) \geq a.$$

Es fácil ver que entonces

$$c_1(|x|+|t|) \leq d(x, tB) \leq c_2(|x|+|t|) \qquad (1.37)$$

Esto lo usaremos en el siguiente lema.

Lema 1.4: Sea K un compacto disjunto de S. Sea $\mathcal{O}$ una vecindad abierta de $B \equiv \{(\nabla P)(k_0) \mid k_0 \in K\}$ entonces, $\forall\ \hat{\Phi} \in C^\infty(K)$ existe una constante C que depende de K, $\mathcal{O}$ y n tal que

$$|(e^{-itH_0}\phi)(x)| \leq C_n(1+|x-x_0|+|t|)^{-n} \times \|(1+|x-x_0|^n)\phi\|_2$$

$\forall\ x_0$ y $\forall\ x,t$ con $(x-x_0)/t \notin \mathcal{O}$.

Demostración:

Primero notemos que solo hay que demostrarlo cuando $x_0=0$ ya que si:

$$|(e^{-itH_0}\phi)(x)| \leq C(1+|x|+|t|)^{-n}\ \|(1+|x|^n)\phi\|_2$$

$\forall\, \phi$ con supp $\hat{\phi} \subset K$,

entonces tomando

$$\phi_{x_0} := \phi(x+x_0)$$

$$\text{supp } \hat{\phi}_{x_0} = \text{supp } \hat{\phi} \subset K.$$

$\Longrightarrow$

$$|(e^{-itH_0}\phi_{x_0})(y)| \leq C(1+|y|+|t|)^{-n} \|(1+|y|^n)\phi_{x_0}\|_2$$

$$= C(1+|y|+|t|)^{-n} \|1+|x-x_0|^n \phi\|_2$$

Poniendo

$$y = x - x_0 .$$

y usando el hecho que

$$e^{-itH_0}$$

conmuta con traslaciones, se obtiene que

$$|(e^{-itH_0}\phi_{x_0})(x-x_0)| = |(e^{-itH_0}\phi)(x)|$$

Por la proposición A.7 y puesto que $\hat{A}$ es J-subordinado a $\hat{H}_0$ es suficiente con demostrar que para cada I_1, intervalo acotado y para todo $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$ en un subconjunto denso $\mathcal{D}_1$ de $\mathcal{H}ac(\hat{H}_0) = \operatorname{Ran} P_{ac}(\hat{H}_0) = \mathcal{L}_2^2$, la integral:

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} \| P_{\hat{A}}(I_1)\,[\hat{A}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0]\,e^{-it\hat{H}_0}\varphi \|\, dt$$

es finita

Sea

$$\mathcal{D} = \bigcup_{I} \{ P_{\hat{H}_0}(I)\varphi ;\ \varphi \in \mathcal{L}_2^2 \}$$

donde I es un intervalo cerrado y acotado tal que $I \subset (m, +\infty)$ ó $I \subset (-\infty, -m)$

Si $\varphi \in \mathcal{D}$, entonces existe I un intervalo cerrado y acotado con

$I \subset (m, +\infty)$ ó $I \subset (-\infty, -m)$ tal que

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = P_{\hat{H}_0}(I)\,\psi \qquad (1.38)$$

Supongamos que $I \subset (m, +\infty)$. Por (1.35) obtenemos

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_I^+ & \psi_1 \\ P_I^- & \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_I^+ \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1.39)$$

Entonces $\psi_2 \equiv 0$.

Similarmente, si $I \subset (-\infty, -m)$, entonces

$$\psi_1 \equiv 0 \qquad \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \qquad (1.40)$$

Tomemos ahora

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ \psi \in \mathcal{D} \;/\; \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \text{ con } \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2 \in C_0^\infty \right\}$$

En lo que resta de la demostración supondremos que $I \subset (m, +\infty)$. La misma discusión es válida si $I \subset (-\infty, -m)$.

$$\leq C\,(1+|x-x_0|+|t|)^{-n}\,\|(1+|x-x_0|^n)\,\phi\|$$

Basta entonces demostrarlo para $x_0=0$.

Ahora bien, usando (1.36) y (1.37) obtenemos que si $x/t \notin G$

$$|(e^{-itH_0}\phi)(x)| = \left|\int_k (2\pi)^{-\nu/2} e^{-it\,f(k)} e^{ik\cdot x}\,\hat{\Phi}(k)\,d^\nu k\right|$$

$$\leq C'(1+|x|+|t|)^{-n}\sum_{|\alpha|\leq n}\int_k |D^\alpha\hat{\Phi}|\,d^\nu k$$

(Desigualdad de Schwartz)

$$\leq C'(1+|x|+|t|)^{-n}\sum_{|\alpha|\leq n}\left(\int_k d^\nu k\right)^{1/2}\left(\int_k |D^\alpha\hat{\Phi}|^2 d^\nu k\right)^{1/2}$$

$$\leq C''(1+|x|+|t|)^{-n}\sum_{|\alpha|\leq n}\|\,|x|^\alpha\phi\,\|_2$$

$$\leq C_n(1+|x|+|t|)^{-n}\,\|(1+|x|^n)\,\phi\|$$

Usando este lema podemos ahora probar la afirmación a) del teorema:

Demostración:

sea $\psi \in \mathcal{S}$, por (1.39) sabemos que

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = P_{\hat{H}_0}(I) = \begin{pmatrix} P_I^+ \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde P_I^+ es la proyección espectral asociada al operador

$$P_0^{1/2}(-i\nabla) = L_0^{1/2} \qquad \text{con}$$

$$P_0^{1/2}(k) = (k^2+m^2)^{1/2}$$

Entonces,

$$P_I^+ = F^{-1} \chi_I \left(P_0^{1/2}(k)\right) F \qquad (1.41)$$

donde $\chi_I(x)$ es la función característica del intervalo I y F es la Transformada de Fourier en $\mathcal{L}^2$.

Con esto vemos que ψ_1 es una función en $\mathcal{L}^2$ que tiene el soporte de su transformada de Fourier, $\hat{\psi}_1$, contenido en un compacto, K, disjunto del origen y puesto que siempre podemos aproximar en $\mathcal{L}^2$ tales funciones con funciones $C_0^\infty(K)$ y como $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{L}_2^2$ entonces $\mathcal{D}_1$ es también un subconjunto denso en $\mathcal{L}_2^2$.

Con esta discusión podemos usar directamente el lema 1.4.

Entonces, sea $\psi = P_{\hat{H}_0}(I)\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\psi_1 \in C_0^\infty(K_0)$ donde K_0 es un compacto disjunto del origen.

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} \| P_{\hat{H}}(I_1) [\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0] e^{-it\hat{H}_0} \psi \| dt$$

$$\leq \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| P(I_1)[\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0] g^{-1}(-i\nabla) F\{B^c_{\delta|t|}, x\}$$

$$I \, g^{+1}(-i\nabla) e^{-it\hat{H}_0} \psi \| + \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| P(I_1) [\hat{H}\hat{J} - \hat{J} H_0]$$

$$g^{-1}(-i\nabla) F\{B_{\delta|t|}, x\} e^{-it\hat{H}_0} g(-i\nabla) \psi \|$$

$$\leq \| g(-i\nabla) P_I^{+} \| \, \|\psi_1\| \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| P(I_1) [\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0] g^{-1}(-i\nabla)$$

$$F\{B^c_{\delta|t|}, x\} I \| + \| P(I_1) [\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0] g^{-1}(-i\nabla) I \|$$

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \; \| F\{B_{\delta|t|}, x\} I \, e^{-it\hat{H}_0} g(-i\nabla)\psi \|$$

La primera integral de esta última desigualdad es convergente por la hipótesis c) del teorema. Para la segunda integral notemos que de (1.35)

$$e^{-it\hat{H}_0} g(-i\nabla)\psi = \begin{pmatrix} e^{-itL_0^{1/2}} & 0 \\ 0 & e^{itL_0^{1/2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(-i\nabla)\psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-itL_0^{1/2}} g(-i\nabla)\psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Entonces.

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \; \| F\{B_{\delta|t|}, x\} I e^{-it\hat{H}_0} g(-i\nabla)\psi \|$$

$$= \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \; \| F\{B_{\delta|t|}, x\} e^{-itL_0^{1/2}} g(-i\nabla)\psi_1 \| .$$

Aplicando el lema anterior, tomamos $K = K_0 = \operatorname{supp} \hat{\psi}_1$, en el cual $(\nabla P_0^{1/2})$ no se anula, ya que es disjunto del origen. Tomando

$$\delta = 1/2 \left[\inf_{k \in K} |\nabla P_0^{1/2}(k)| \right]$$

Entonces para

$$|x| \leq \delta(t)$$

se aplica el lema 1.4.
Y por lo tanto

$$\| F\{B_{\delta(t)}, x\} e^{-itL_0^{1/2}} g(-i\nabla)\psi_1 \| \in L^1(\mathbb{R}, dt)$$

Con esto se prueba que los operadores de onda generalizados

$$\tilde{\Omega}^{\pm} := \underset{t\to\mp\infty}{\text{s-lim}}\ e^{it\hat{H}} \hat{J} e^{-it\hat{H}_0} \qquad (1.43)$$

existen.

Para probar que

$$\tilde{\Omega}^{\pm} = \Omega^{\pm} := \underset{t\to\mp\infty}{\text{s-lim}}\ e^{it\hat{H}} e^{-it\hat{H}_0} \qquad (1.44)$$

solo hay que notar que si $\varphi \in \mathcal{L}_2^2$

$$e^{it\hat{H}} e^{-it\hat{H}_0}\varphi = e^{it\hat{H}} \hat{J} e^{-it\hat{H}_0}\varphi + e^{it\hat{H}} (\mathbb{1} - \hat{J}) e^{-it\hat{H}_0}\varphi$$

De la hipótesis b) y del hecho que si $\varphi \in \mathcal{L}_2^2$, $e^{-itH_0}\varphi^{\omega} \to 0$ cuando $|t| \to +\infty$ obtenemos (1.40). Esto prueba la afirmación a) del teorema.

Solo nos resta verificar la Descomposición de E_{NB}.

Para esto necesitamos un poco más de definiciones α denotará un vector en $\mathbb{R}^\nu$ cuyas coordenadas son enteras

χ_α := Función característica del cubo unitario con centro en α (1.46)

Para una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$, sea

$$f_\alpha(x) = (f * \chi_\alpha)(x) \qquad (1.47)$$

Entonces si

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} f \, d^\nu x = 1 \qquad (1.48)$$

$$\sum_\alpha f_\alpha(x) = \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^\nu} \chi_\alpha(y) f(x-y) \, d^\nu y$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} \Big[\sum_\alpha f(x-y)\ \chi_\alpha(y) \Big] d^\nu y = 1 \qquad (1.49)$$

Lema 1.5; Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$, $f \geq 0$ que satisface (1.48). Para cada $\alpha \in \mathbb{Z}^\nu$, sea g_α una sucesión de funciones tales que $\sup_\alpha \| (1-\Delta)^\nu g_\alpha \|_\infty < +\infty$.

Definamos para $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$, el operador $(Th)(x) = \sum_\alpha g_\alpha(k)\, f_\alpha(x)\, h(x)$

$\| Th \| \leq C \| h \|$. Y por lo tanto este operador se puede extender a un operador acotado de L^2 en L^2.

Demostración:

$$\| Th \|^2 = \sum_{\alpha, \beta} \left(g_\alpha(k)\ f_\alpha(x)\ h(x),\ g_\beta(k)\, f_\beta(x)\, h(x) \right)$$

$$= \sum_{\alpha, \beta} \left(f_\alpha(x)\, h(x),\ \bar{g}_\alpha\, g_\beta(k)\ f_\beta(x)\ h(x) \right) \qquad (1.50)$$

y

$$\bar{g}_\alpha(k)\, g_\beta(k)\, f_\beta(x) h(x) = \left[\bar{g}_\alpha(k)\, g_\beta(k)\, (f_\beta(x) h(x))^\wedge\right]^\vee$$

$$= \left([\bar{g}_\alpha \; g_\beta]^\vee * f_\beta(x)\, h(x)\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} (\bar{g}_\alpha\, g_\beta(k))^\vee (x-y)\, f_\beta(y) h(y)\, d^\nu y \,. \qquad (1.51)$$

y

$$(\bar{g}_\alpha\, g_\beta)^\vee(z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{ik\cdot z}\, \bar{g}_\alpha(k)\, g_\beta(k)\, d^\nu k$$

$$\Longrightarrow$$

$$(1+|z|^2)^\nu \left|(\bar{g}_\alpha g_\beta)^\vee(z)\right| = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \left|\int_{\mathbb{R}^\nu} (1+|z|^2)^\nu e^{ik\cdot z} (\bar{g}_\alpha g_\beta)(k)\, d^\nu k\right|$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \left|\int_{\mathbb{R}^\nu} e^{ik\cdot z} (\mathbb{1}-\Delta)^\nu\, \bar{g}_\alpha\, g_\beta(k)\, d^\nu k\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \left\|(1-\Delta)^\nu \bar{g}_\alpha\, g_\beta\right\|_{L^1} \qquad (1.52)$$

y puesto que

$$(\mathbb{1}-\Delta)^\nu\, \bar{g}_\alpha\, g_\beta = \left(\mathbb{1} - \frac{\partial^2}{\partial k_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial k_1^2}\right)^\nu \bar{g}_\alpha\, g_\beta$$

$$= \sum_{i,j} C_{\nu_i,\mu_j} \left(\frac{\partial^{\nu_i}}{\partial k^{\nu_i}} \bar{g}_\alpha \right) \left(\frac{\partial^{\mu_j}}{\partial k^{\mu_j}} g_\beta \right)$$

donde C_{ν_i,μ_j} son constantes

y $|\nu_i| + |\mu_j| \leq 2\nu \quad \forall\, i,j$

Por lo que, si $\nu_i = (\nu_i^{(1)}, \nu_i^{(2)}, \ldots, \nu_i^{(\nu)})$

$$\left\| \frac{\partial^{\nu_i}}{\partial k^{\nu_i}} g_\alpha \right\|_2 = \left\| x_1^{\nu_i(1)} x_2^{\nu_i(2)} \cdots x_\nu^{\nu_i(\nu)} \widetilde{g_\alpha} \right\|_2$$

$$\leq \| (1+|x|^2)^\nu \hat{g}_\alpha \|_2$$

$$= \| (1-\Delta)^\nu g_\alpha \|$$

Analogamente para g_β

$\Longrightarrow$

$$\| (1-\Delta)^\nu \bar{g}_\alpha g_\beta \| \leq C \| (1-\Delta)^\nu g_\alpha \|_2 \, \| (1-\Delta)^\nu g_\beta \|_2$$

$$\leq C \left\{ \sup_\alpha \| (1-\Delta)^\nu g_\alpha \|^2 \right\} \qquad (1.53)$$

De (4.18) y (4.19) si

$$H_{\alpha\beta}(z) := (\bar{g}_\alpha g_\beta)^\vee(z)$$

Entonces,

$$|H_{\alpha\beta}(z)| \leq C_1 (1+|z|^2)^{-\nu}$$

$\Rightarrow$

$$\|Th\|^2 = \sum_{\alpha,\beta} \langle f_\alpha(x) h(x), \int_{\mathbb{R}^\nu} H_{\alpha\beta}(x-y) f_\beta(y) h(y)\, d^\nu y \rangle$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu x \int_{\mathbb{R}^\nu} \overline{f_\alpha(x) h(x)}\, H_{\alpha\beta}(x-y) f_\beta(y) h(y)$$

$$\leq \sum_{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^{\nu 2}} d^\nu x\, d^\nu y\, | H_{\alpha\beta}(x-y)\, f_\alpha(x) f_\beta(y)\, h(x) h(y) |$$

$$\leq C_1 \sum_{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} d^\nu x\, d^\nu y\, (1+|x-y|^2)^{-\nu} f_\alpha(x) f_\beta(y) |h(x)||h(y)| \quad (1.59)$$

Usando (4.15)

$$= C_1 \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} d^\nu x\, d^\nu y\, (1+|x-y|^2)^{-\nu} |h(x)||h(y)|$$

$$\leq C_1 \left\{ \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} d^\nu x\, d^\nu y\, |h(x)|^2 (1+|x-y|^2)^{-\nu} \right\}^{1/2}$$

$$\times \left\{ \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} d^\nu x\, d^\nu y\, |h(y)|^2 (1+|x-y|^2)^{-\nu} \right\}^{1/2}$$

$$= C_1 \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} d^\nu x\, d^\nu y\, |h(x)|^2 (1+|x-y|^2)^{-\nu}$$

$$= C_1 \, \| (1+|z|^2)^{-\nu} \|_{L^1} \, \|h\|^2$$

$$\Longrightarrow \quad \|Th\| \leq C \|h\|$$

Demostración del lema 1.1.

Tomemos $[a,b] \subset (m,+\infty)$. Si $[a,b] \subset (-\infty,-m)$; se hacen esencialmente los mismos argumentos. Y tomamos $[a',b'] \subset (m,+\infty)$ con $[a,b] \subset [a',b')$.

Sea $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ que vale 1 en (a,b) y cero fuera de (a',b') con $0 \leq \Phi \leq 1$.

Por el corolario a la proposición

A.6 y por (1.19) obtenemos que

$$\bar{\Phi}(\hat{A}) - \bar{\Phi}(\hat{A}_0) \text{ es compacto} \tag{1.55}$$

Sea φ_n, la sucesión que cumple las hipótesis del lema 1.1.
Por el corolario a la proposición A.2 obtenemos que

$$\| [\bar{\Phi}(\hat{A}) - \bar{\Phi}(\hat{A}_0)] F\{B_n^c, x\} I \varphi_n \| \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \tag{1.56}$$

Puesto que $\bar{\Phi}(\hat{A})\varphi_n = \varphi_n$ ya que

$P_{\hat{A}}[a,b]\varphi_n = \varphi_n$ y $\bar{\Phi} \equiv 1$ sobre

$[a,b]$, entonces

$$\begin{aligned}
\|(\mathbb{1} - \phi(H_0))\varphi_n\| &= \|[\bar{\Phi}(\hat{A}) - \bar{\Phi}(\hat{A}_0)]\varphi_n\| \\
&\leq \|[\bar{\Phi}(\hat{A}) - \bar{\Phi}(\hat{A}_0)] F\{B_n^c, x\} I \varphi_n\| \\
&\quad + \|[\bar{\Phi}(\hat{A}) - \bar{\Phi}(\hat{A}_0)] F\{B_n, x\} I \varphi_n\| \\
&\leq \|[\bar{\Phi}(\hat{A}) - \bar{\Phi}(\hat{A}_0)] F\{B_n^c, x\} I \varphi_n\|
\end{aligned}$$

$$+ \| \underline{\Phi}(\hat{A}) - \underline{\Phi}(\hat{A}_0) \| \, \| F\{B_n, x\} I \varphi_n \| \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \qquad (1.57)$$

El primer término tiende a cero por (1.56) mientras que el segundo por la hipótesis a) del lema 1.1

Además

$$\| F\{B_{n/2}, x\} I \underline{\Phi}(\hat{A}_0) \varphi_n \|$$

$$\leq \| F\{B_{n/2}, x\} I [\underline{\Phi}(\hat{A}) - \underline{\Phi}(\hat{A}_0)] \varphi_n \|$$

$$+ \| F\{B_{n/2}, x\} \underline{\Phi}(\hat{A}) \varphi_n \|$$

$$= \| F\{B_{n/2}, x\} I \underline{\Phi} [(\hat{A}) - \underline{\Phi}(\hat{A}_0)] \varphi_n \|$$

$$+ \| F\{B_{n/2}, x\} I \varphi_n \| \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \qquad (1.58)$$

Puesto que $[a, b] \subset [m, +\infty)$, de (1.35) obtenemos que

$$\Phi(\hat{A}_0) = \begin{bmatrix} \Phi(L_0^{1/2}) & 0 \\ 0 & \Phi(-L_0^{1/2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(L_0^{1/2}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.59)$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_1(-i\nabla) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$\Phi_1(k) = \Phi(P_0^{1/2}(k))$$

$$= \Phi((k^2+m^2)^{1/2}) \qquad (1.60)$$

En consecuencia, si

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} \varphi_{n_{11}} \\ \varphi_{n_{12}} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(\hat{A}_0)\varphi_n = \Phi(L_0^{1/2})\varphi_{n_{11}} \qquad (1.61)$$

Φ tiene su soporte fuera de los valores singulares de

$$P_0^{1/2}(k) = (k^2+m^2)^{1/2}.$$

Es decir, $m \notin [a', b'] = \operatorname{supp} \Phi$.

Y puesto que

$$|P_0^{1/2}(k)| \to +\infty \quad \text{cuando } |k| \to +\infty :$$

entonces $\Phi(P_0^{1/2}(k)) = \Phi_1(k) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$

Sea
$$B = (P_0^{1/2})^{-1}[a,b] .$$

B es disjunto de $S = \{\bar{0}\} \in \mathbb{R}^\nu$ y compacto porque $|P_0^{1/2}| \to +\infty$

Podemos por lo tanto encontrar un abierto K_0 y $\varepsilon > 0$ tal que

$$B + \bar{B}_\varepsilon \subset K_0 \subset \bar{K}_0 \subset (\mathbb{R}^\nu / \{\bar{0}\}) \qquad (1.62)$$

Sea $f \geq 0$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ con $\operatorname{supp} \hat{f} \subset B_\varepsilon$,

$\int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)\, d^\nu x = 1$

Ponemos

$$\varphi_{n,w} := \varphi_n - \Phi(\Pi_0)\varphi_n + \sum_{|\alpha| \leq 1/3!} f_\alpha(x)\, \Phi(\Pi_0)\varphi_n \qquad (1.63)$$

$$\Big\| \sum_{|\alpha| \le 1/3 n} f_\alpha(x)\, \Phi(\hat{H}_0)\varphi_n \Big\|^2_{\mathcal{L}^2} = \Big\| \sum_{|\alpha| \le 1/3 n} f_\alpha(x)\, \Phi(L_0^{1/2})\varphi_{n,1} \Big\|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu x \, \Big| \sum_{|\alpha| \le 1/3 n} f_\alpha(x)\, \Phi(L_0^{1/2})\, \varphi_{n,1} \Big|^2$$

$$= \int_{|x| \le n/2} d^\nu x \, |(\Phi(L_0^{1/2})\, \varphi_{n,1})(x)|^2 \, \Big|\sum f_\alpha(x)\Big|^2$$

$$+ \int_{|x| \le n/2} |(\Phi(L_0^{1/2})\, \varphi_{n,1})(x)|^2 \, \Big|\sum_{|\alpha| \le 1/3 n} f_\alpha(x)\Big|^2$$

$$\le \int_{|x| \le n/2} |(\Phi(L_0^{1/2})\varphi_n)(x)|^2 + \int_{|x| \ge n/2} d^\nu x \, |(\Phi(L_0^{1/2})\, \varphi_n)(x)|^2$$

$$\times \Big| \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu y \, f(x-y) \sum_{|\alpha| \le 1/3 n} \chi_\alpha(y) \Big|^2$$

$$\left(|x| \ge n/2, \ |\alpha| \le 1/3 n \Rightarrow |y| \le 1/3 n + \sqrt{\nu}/2, \ |x-y| \ge 1/6 n - \sqrt{\nu}/2\right)$$

$$\leq \| F\{B_{n/2}, x\} \, \Phi(L_0^{1/2}) \varphi_{n,1} \|^2 + \int_{|x| \geq n/2} d^\nu x \, |(\Phi(L_0^{1/2})\varphi_n)|^2$$

$$\times \left\{ \int_{|y| \geq n/6 - \sqrt{\nu}/2} f(y) \, d^\nu y \right\}$$

$$\leq \| F\{B_{n/2}, x\} \, \Phi(\Pi_0)\varphi_n \|^2 + \| \Phi(P_0^{1/2}(k)) \|_\infty^2$$

$$\times \left\{ \int_{|y| \geq n/6 - \sqrt{\nu}/2} f(y) \, d^\nu y \right\}^2$$

Por (1.58) el primer término tiende a cero, mientras que el segundo también ya que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu) \subset L^1$

Está estimación y (1.57) implican que

$$\| \varphi_n^\omega \| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (1.64)$$

Sea

$v(R) = (\nabla P_0^{1/2})(R)$. Puesto que $\overline{K_0}$ es acotado, disjunto de $\{\bar{0}\}$ $\{v(R) \mid R \in \overline{K_0}\}$ es un conjunto contenido en un abierto $\mho = \{v \mid A <, |v| < B\}$ para algún $A > 0$. Tomemos $\psi(R) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ con $\psi(R) = 1 \; \forall R \in K_0$ y supp $\psi \subset \mathbb{R}^\nu \setminus \{\bar{0}\})$ y sean Gin, Gout funciones en $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ tales que

$$Gin(v) + Gout(v) = 1 \quad v \in \mho \tag{1.65}$$

$Gin(v) = 0$ si $v \in \mho$ y el ángulo entre v y $(1, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^\nu$ es menor que $45°$ (1.66)

$Gout(v) = 0$ si $v \in \mho$ y el ángulo entre v, y $(-1, 0, \ldots, 0)$ es menor que $45°$. (1.67)

Finalmente, para $\alpha \in \mathbb{Z}^\nu$, sea R_α la rotación que lleva α a $(|\alpha|, 0, \ldots, 0, \ldots, 0)$

Ponemos

$$g_\alpha^{in}(R) = \psi(R)\, Gin(R_\alpha v(R)) \tag{1.68}$$

$$g_\alpha^{out}(R) = \psi(R) \cdot Gout(R_\alpha v(R)) \tag{1.69}$$

Si $R_\alpha = (a_{ij}^{(\alpha)})$, es fácil ver que las derivadas de g_α^{in} son una suma de productos de derivadas de $\psi(R)$, Gin de $P_0^{1/2}$ por los términos $a_{ij}^{(\alpha)}$. Pero

$|a_{ij}^{(\alpha)}| = |(R_\alpha e_i, e_j)| \leq \|R_\alpha e_i\| \, \|e_j\| \leq \|R_\alpha\| = 1$

por ser R_α una rotación. En consecuencia, las derivadas de g_α^{in} están acotadas por derivadas de ψ, Gin y $P_0^{1/2}$ independientemente de α.

El mismo argumento es válido para derivadas mayores de g_α^{out}. Por lo tanto

$$\sup_\alpha \| (\mathbb{1}-\Delta)^{\sim} g_\alpha^{in} \|_1 < +\infty \tag{1.70}$$

$$\sup_\alpha \| (\mathbb{1}-\Delta) g_\alpha^{out} \| < +\infty$$

Ponemos

$$\varphi_n^{in} = \sum_{|\alpha| > 1/3 n} g_\alpha^{in}(-i\nabla) f_\alpha(x)\, \Phi(\hat{H}_0)\, \varphi_n$$

$$= \sum_{|\alpha| > 1/3 n} g_\alpha^{in}(-i\nabla) f_\alpha(x)\, \Phi_1(-i\nabla)\, \varphi_{n,1} \tag{1.71}$$

$$\varphi_n^{out} = \sum_{|\alpha| > 1/3 n} g_\alpha^{out}(-i\nabla) f_\alpha(x)\, \Phi(\hat{H}_0)\, \varphi_n$$

$$= \sum_{|\alpha| > 1/3 n} g_\alpha^{out}(-i\nabla) f_\alpha(x)\, \Phi_1(-i\nabla)\, \varphi_{n,1} \tag{1.72}$$

Usando (1.54) y el lema 1.5

$$\| \varphi_n^{in} \| = \| \sum_{|\alpha| > 1/3 n} g_\alpha^{in}(-i\nabla) f_\alpha(x)\, \Phi(\hat{H}_0)\, \varphi_n \|$$

$$\leq C_1 \, \| (1+|x|^2)^{-\nu} \|_{L^1} \tag{1.73}$$

y análogamente para φ_n^{out}

De (1.47) y (1.62)

$$\operatorname{supp} \hat{f}_\alpha = \operatorname{supp} \widehat{f * \chi_\alpha} = \operatorname{supp} \hat{f}\, \hat{\chi}_\alpha$$

$$\subset B_\varepsilon \tag{1.74}$$

$$\operatorname{supp} [f_\alpha \, \Phi_1(-i\nabla)\, \varphi_{n,1}]^\wedge = \operatorname{supp} \left[\hat{f}_\alpha * \widehat{\Phi_1(-i\nabla)\varphi_{n,1}}\right]$$

$$\subset \operatorname{supp} \hat{f}_\alpha + \operatorname{supp} \Phi_1(k)\, \hat{\varphi}_{n,1}$$

$$\subset B_\varepsilon + L \subset K_0 \tag{1.75}$$

De (1.63), (1.68) y (1.69)

$$(g_\alpha^{in} + g_\alpha^{out})[f_\alpha \bar{\Phi}(H_0)\varphi_n]^\wedge = [f_\alpha \bar{\Phi}(H_0)\varphi_{n,1}]^\wedge \quad (1.76)$$

y de (1.71), (1.72)

$$(\varphi_{n,1}^{in} + \varphi_{n,1}^{out}) = \sum_{|\alpha| \neq 1/3n} f_\alpha \Phi_1(-i\nabla)\varphi_{n,1}$$

De (1.63) y (1.49) se obtiene que

$$\varphi_n = \varphi_n^{w} + \varphi_n^{in} + \varphi_n^{out} \quad (1.76a)$$

Para demostrar lo que falta, utilizaremos el lema (1.4)

Tomamos $K = \overline{K_0}$

Ahora bien, $|\alpha + vt - x| \geq |\alpha + vt| - |x|$ y

$$|\alpha + vt|^2 = |\alpha|^2 + |vt|^2 + 2t(v, \alpha)$$
$$= |\alpha|^2 + |vt|^2 + 2t|v||\alpha| \cos \xi$$

donde ξ es el ángulo entre v y α.

Las estimaciones las haremos para φ_n^{in}.
Para $\varphi_{n,out}$ se procede en la misma forma considerando nada más el signo.

Pongamos $\varphi_{n,in,\alpha} = g_\alpha^{in}(k) f_\alpha(x) \bar{\Phi}_1(-i\nabla)\varphi_{n,1} \quad (1.77)$

Entonces, tomamos $t<0$.

$$|\alpha+vt|^2=|\alpha|^2+2t|V||\alpha|\cos\xi$$

Si $\cos\xi\le 0$ y como $t<0$ obtenemos que

$$|\alpha+vt|\geq \tfrac{1}{2}(|\alpha|+|vt|)$$

Si $\cos\xi>0$

$$\begin{aligned}|\alpha+vt|^2&=|\alpha|^2+|vt|^2+2t|V||\alpha|\cos\xi\\&=|\alpha|^2+|vt|^2-2(|vt|)|\alpha|\cos\xi\\&=|\alpha|^2|vt|^2-2[|vt|(\cos\xi)^{1/2}][|\alpha|(\cos\xi)^{1/2}]\\&\geq|\alpha|^2+|vt|^2-|vt|^2\cos\xi-|\alpha|^2(\cos\xi)\\&=(1-\cos\xi)(|\alpha|^2+|vt|^2)\\&\geq(1-\cos\pi/4)(|\alpha|^2+|vt|^2)\end{aligned} \tag{1.78}$$

Esta última desigualdad debida a (1.66)

Y por lo tanto, si $v\in\{w\mid w\in \operatorname{supp} g_\alpha^{in}\cap\mathcal{O}\}$, $t<0$ $|\alpha+vt|\geq \tfrac{1}{2}(1-\cos\pi/4)^{1/2}(|\alpha|+A|t|)$. En consecuencia, tomando $0<\delta<\min\{1/6(1-\cos\pi/4)^{1/2};\ A/2\,(1-\cos\pi/4)^{1/2}\}$, tenemos que $\forall x$ con $|x|\le\delta(n+|t|)$, $t<0$ y $\forall\alpha$ con $|\alpha|>1/3\,n$ $\Rightarrow$ $|\alpha+vt-x|\geq|\alpha+vt|-|x|\geq C'(|\alpha|+|t|)$. Entonces podemos aplicar el lema 1.4 y obtener por (1.77) $\forall m\in\mathbb{N}$ y $\forall x$ con $|x|\le\delta(n+|t|)$, $t<0$ y $\forall\alpha$ con $|\alpha|>1/3\,n$

$$|(e^{-it\hat{H}_0}\varphi_{n,in;\alpha})(x)|\le C'_m(1+|\alpha|+|t|)^{-m}\,\|(1+|x-\alpha|^m\times$$

$\varphi_{n,in;\alpha}\|$

además, $\| (x-\alpha)^m g_\alpha^{in}(i\nabla) f_\alpha \Phi_1(-i\nabla)\varphi_{n,1}\| = \| D^m H_\alpha^{in} F_\alpha\|$

donde $H_\alpha^{in}(k) = g_\alpha^{in}(k)$, $F_\alpha(k) = e^{ik\cdot\alpha}[f_\alpha \Phi_1(-i\nabla)\varphi_{n,1}]^{\wedge}(k)$

Como $D^m H_\alpha^{in} F_\alpha = \sum_{|\mu|,|\beta|\le m} C'_{\mu\beta} (D^{|\mu|} H_\alpha^{in})(D^{|\beta|} F_\alpha)$

$$\Rightarrow \| D^m H_\alpha^{in} F_\alpha \| \le \sum_{|\mu|,|\beta|\le m} \| D^{|\mu|} H_\alpha^{in} (D^{|\beta|} F_\alpha)\|$$

$$\le \sum_{|\mu|,|\beta|\le m} C'_{\mu\beta} \| D^{|\mu|} H_\alpha^{in}\|_\infty \, \| D^{|\beta|} F_\alpha \|$$

$$= \sum_{|\mu|,|\beta|\le m} C'_{\mu,\beta} \| D^{|\mu|} g_\alpha^{in}\|_\infty \, \| |x_1-\alpha_1|^{\beta_1} \cdots |x_\nu - \alpha_\nu|^{\beta_\nu} f_\alpha \times \Phi(\hat{\mathcal{H}}_0)\varphi_n \|$$

$$\le \sum_{|\mu|,|\beta|\le m} C'_{\mu,\beta} (\sqrt{\nu})^{|\beta|} \| D^{|\mu|} g_\alpha^{in}\|_\infty \, \| |x-\alpha|^{|\beta|} f_\alpha\|_\infty \, \| \Phi(P_0^{n}(x))\|_\infty$$

Como vimos antes en (1.70), $(\mathbb{I}-\Delta)^j g_\alpha^{in}$ está uniformemente acotado en α. Mientras que, si Δ_α es el cubo unitario centrado en α, de (1.46) y (1.47),

$$| |x-\alpha|^{|\beta|} f_\alpha(x)| = \int_{\Delta_\alpha} |x-\alpha|^{|\beta|} f(x-y)\, d^\nu y$$

$$= \int_{\Delta_0} |x-\alpha|^{|\beta|} f(x-\alpha-z)\, d^\nu z$$

$$\le \int_{\Delta_0} (|z| + |x-\alpha-z|)^{|\beta|} f(x-\alpha-z)\, d^\nu z$$

$$\leq \nu^{|\beta|/2}/2^{|\beta|} \int_{A_0} (1+|x-\alpha-z|)^{|\beta|} f(x-\alpha-z)\, d^\nu z$$

$$\leq \nu^{|\beta|/2}/2^{|\beta|} \quad \|(1+|z|)^{|\beta|} f\|_1$$

y como $f \in \mathcal{S}$ esto último es finito.

Finalmente obtenemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, $\exists\, C'_m$ tal que

$$|(e^{-itH_0}\varphi_{n,in,\alpha})(x)| \leq C'_m (1+|\alpha|+|t|)^{-m} \qquad (1.79)$$

$\forall\, x$ con $|x| \leq \delta(n+|t|)$, $\forall\, t<0$ y $\forall\, \alpha$ con $|\alpha| > n/3$

Por lo tanto, $\|F\{\theta_\delta(n+|t|), x\} e^{-itH_0}\varphi_{n,in}\|$

$$\leq \sum_{|\alpha|\geq 1/3 n} \|F\{\theta_\delta(n+|t|), x\} e^{-itH_0}\varphi_{n,in,\alpha}\|$$

$$\leq \sum_{|\alpha|\geq 1/3 n} \left\{ \int_{|x|\leq \delta(n+|t|)} C^2_{m+\nu} (1+|\alpha|+|t|)^{-2m-2\nu}\, d^\nu x \right\}^{1/2}$$

$$\leq \sum_{|\alpha|\geq 1/3 n} \frac{C_{m+\nu}\, \omega_\nu(1)\, \delta^{\nu/2} (n+|t|)^{\nu/2}}{(1+|\alpha|+|t|)^{m+\nu}}$$

$$\leq \sum_{|\alpha|>1/3 n} C'_{m+\nu} (1+|\alpha|+|t|)^{-(m+\nu/2)}$$

$$\leq \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{1/3(n+s)\leq|\alpha|<1/3(n+s+1)} C'_{m+\nu}(1+1/3(n+s)+|t|)^{-(m+\nu/2)}$$

$$\leq \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{1/3(n+s)\leq|\alpha|\leq 1/3(n+s+1)} 3^{m+\nu/2} C'_{m+\nu} (1+(n+s)+|t|)^{-m-\nu/2}$$

(el número de puntos enteros en la bola de radio r no excede $2^\nu r^\nu$)

$$\leq \sum_{s=0}^{+\infty} 3^{m+\nu/2} C'_{m+\nu} 2^\nu [1/2(n+s+1)]^\nu (1+(n+s)+|t|)^{-m-\nu/2}$$

$$\le \sum_{s=00}^{+\infty} C'(1+n+s+|t|)^{-m+\nu/2}$$

$$\le \sum_{s=0}^{+\infty} C'(1+n+s+|t|)^{-m+\nu/2+2}(1+s)^{-2}$$

$$\le C''(1+n+|t|)^{-m+\nu/2+2}\sum_{s=1}^{+\infty} s^{-2}$$

$$\le C'''(1+n+|t|)^{-m+\nu/2+2}$$

Como m es arbitrario, entonces

$$\|F\{\theta_j(n+|t|)^{-1}x\}e^{-itH_0}\varphi_{n,in}\| \le C_m(1+n+|t|)^{-m} \quad (1.80)$$

Con esto obtenemos inmediatamente (1.18) para φ_n^{in}

Por (1.68) sabemos que supp g_α^{in} está contenido en un compacto independientemente de α. En consecuencia, de (1.71) y del lema 1.5

$$g(-i\nabla)\varphi_{n,in} = \sum_{|\alpha|\ge 2/3n} c\,(g(-i\nabla)g_\alpha^{in}(-i\nabla))_\alpha\, \Phi(i\nabla)\varphi_n)$$

Ahora notemos que $(g\cdot g_\alpha^{in})$ tiene las mismas propiedades de g_α^{in} utilizadas en cada una de las estimaciones precedentes. Por lo tanto, podemos llegar a una estimación como en (1.80) para $g(-i\nabla)\varphi_n^{in}$, es decir, $\|F\{\theta_j(n+|t|)^{-1}x\}e^{-itH_0}(g(-i\nabla)\varphi_n^{in})\| \le C'_m(1+n+|t|)^{-m}$ (1.81)

Usando que $\varphi_n^{in} \in D(\hat{H}_0)$, y si ω es intervalo acotado.

$$\frac{d}{dt}\left[P_{\hat{H}}(\omega)\, e^{it\hat{H}}\, \hat{J}\, e^{-it\hat{H}_0}\, \varphi_n^{in}\right]$$

$$= \frac{d}{dt} e^{it\hat{H}} P_{\hat{H}}(\omega)\, \hat{J}\, e^{-it\hat{H}_0}\, \varphi_n^{in}$$

$$= i e^{it\hat{H}}\, \hat{H}\, P_{\hat{H}}(\omega)\, \hat{J}\, e^{-it\hat{H}_0}\, \varphi_n^{in} - i e^{it\hat{H}} P_{\hat{H}}(\omega)\, \hat{J}\, \hat{H}_0\, e^{-it\hat{H}_0} \varphi_n^{in}$$

$$= i e^{it\hat{H}} P_{\hat{H}}(\omega) \left[\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0\right] e^{-it\hat{H}_0}\, \varphi_n^{in}$$

En consecuencia,

$$\| P_{\hat{H}}(\omega)(\Omega^{+} - \hat{J})\, \varphi_n^{in} \|$$

$$= \| i \int_{-\infty}^{0} dt\; e^{it\hat{H}} P_{\hat{H}}(\omega)\left[\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0\right] e^{-it\hat{H}_0}\, \varphi_n^{in} \|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} \| P_{\hat{H}}(\omega)\left[\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0\right] e^{-it\hat{H}_0}\, \varphi_n^{in} \|\, dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} \| P_{\hat{H}}(\omega)\left[\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0\right] g^{-1}(-i\nabla)\left[F\{B^{c}_{\delta}(n+t)^{x}\} + F\{B_{\delta}(n+t)^{x}\}\right)$$

$$\times\, g(-i\nabla)\, e^{it\hat{H}_0}\, \varphi_n^{in} \|\, dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} dt\, \| P_{\hat{H}}(\omega)\left[\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0\right] g^{-1}(-i\nabla)\, F\{B^{c}_{\delta}(n+t)^{x}\}\, \| \times \| g(-i\nabla)\, \varphi_n^{in} \|$$

$$+\int_{-\infty}^{0} dt \, \| F\{b_{(n+|t|)}, x\} I e^{-it\hat{H}_0} g(-i\nabla) \varphi_n^{in} \|$$

$$\times \| P_{\hat{H}}(\omega) [\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0] g^{-1}(-i\nabla) I \| .$$

$$= \frac{1}{\delta} \int_{\delta_{11}}^{+\infty} dR \, \| P_{\hat{H}}(\omega) [\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0] g^{-1}(-i\nabla) F\{B^c_R, x\} I \| \frac{dR}{\delta_2^2}$$

$$\times \left\{ \sup_{k \in K_0} |g(k)| \right\} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} \| \varphi_n^{in} \| \right\} .$$

$$+ \| P_{\hat{H}}(\omega) [\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0] g^{-1}(-i\nabla) I \| \int_{-\infty}^{0} dt \, \| F\{B_{\delta(n+|t|)}, x\} I$$

$$\times e^{-it\hat{H}_0} g(-i\nabla) \varphi_n^{in} \|$$

El primer término tiende a cero por la hipótesis c) del teorema y (1.73). El segundo por (1.81). En consecuencia,

$$\lim_{n \to +\infty} \| P_{\hat{H}}(\omega) (\hat{\Omega}^{+} - \hat{J}) \varphi_n^{in} \| = 0 \qquad (1.82)$$

Para todo intervalo acotado ω.

De la hipótesis a) del teorema y las proposiciones (1.3) y (1.1) sabemos que

$$\| P_{\hat{H}}(\omega^c)\, \hat{J}\, P_{\hat{H}_0}(I_1) \| \to 0 \quad \omega \to +\infty \qquad (1.83)$$

donde I_1 es un intervalo acotado.

Además, puesto que $\mathrm{supp}\ \widehat{\varphi_n^{in/out}} \subset K_0$ con K_0 compacto en $\mathbb{R}^\nu$,

entonces $P_{\hat{H}_0}(I_1)\, \varphi_n^{in} = \varphi_n^{in}$ $\qquad (1.83a)$

$$P_{\hat{H}_0}(I_1)\, \varphi_n^{out} = \varphi_n^{out}$$

para un cierto intervalo acotado I_1

Entonces

$$\| (\tilde{\Omega}^+ - \hat{J})\, \varphi_n^{in} \|$$

$$= \| P_{\hat{H}}(\omega)(\tilde{\Omega}^+ - \hat{J})\, \varphi_n^{in} \| + \| P_{\hat{H}}(\omega^c)(\tilde{\Omega}^+ - \hat{J})\, \varphi_n^{in} \|$$

$$= \| P_{\hat{H}}(\omega)(\tilde{\Omega}^+ - \hat{J})\, \varphi_n^{in} \|$$

$$+\lim_{t\to\infty} \| P_{\hat{H}}(\omega^c)(e^{it\hat{H}}\hat{J}e^{-it\hat{H}_0}-\hat{J})P_{\hat{H}_0}(I_1)\varphi_n^{in}\|$$

$$\leq \| P_{\hat{H}}(\omega)(\tilde{\Omega}^+-\hat{J})\varphi_n^{in}\|$$

$$+\| P_{\hat{H}}(\omega^c)e^{it\hat{H}}\hat{J}e^{-it\hat{H}_0}P_{\hat{H}_0}(I_1)\varphi_n^{in}\|$$

$$+\| P_{\hat{H}}(\omega^c)\hat{J}P_{\hat{H}_0}(J_1)\varphi_n^{in}\|$$

$$\leq \| P_{\hat{H}}(\omega)(\tilde{\Omega}^+-\hat{J})\varphi_n^{in}\|$$

$$\| P_{\hat{H}}(\omega^c)\hat{J}P_{\hat{H}_0}(I_1)\|\{\sup_n \|\varphi_n^{in}\|\}$$

De (1.82) y (1.83) y (1.73) obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \|(\tilde{\Omega}^+-\hat{J})\varphi_n^{in}\| = 0 \qquad (1.84)$$

Similarmente, para φ_n^{out}

$$\lim_{n\to\infty} \|(\tilde{\Omega}^--\hat{J})\varphi_n^{out}\| = 0 \qquad (1.85)$$

y por (1.44)

$$\lim_{n\to+\infty} \| (\Omega^{+} - \hat{J}) \varphi_n^{in} \| = 0 \qquad (1.86)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \| (\Omega^{-} - \hat{J}) \varphi_n^{out} \| = 0 \qquad (1.87)$$

De la hipótesis a) del lema 1.1

$$|(\psi, \varphi_n)| = |(\psi, [F\{B_n^c, x\} + F\{B_n, x\}]_I \varphi_n)|$$

$$\leq |(F\{B_n^c, x\}_I \psi, \varphi_n)| + |(\psi, F\{B_n, x\}_I \varphi_n)|$$

$$\leq \|F\{B_n^c, x\}_I \psi\| \cdot \|\varphi_n\| + \|\psi\| \cdot \|F\{B_n, x\}_I \varphi_n\|$$

$$\to 0 \quad n \to +\infty$$

Por lo tanto,

$$\varphi_n \xrightarrow{w} 0 \qquad (1.88)$$

y de la hipótesis b) del teorema

$$\| (\mathbb{I} - \hat{J}_1) \varphi_n \| \to 0 \quad n \to +\infty \qquad (1.89)$$

Entonces, de (1.76a)

$$\| \varphi_n - \Omega^+ \varphi_n^{in} - \Omega^- \varphi_n^{out} \|$$

$$\leq \| \varphi_n - \hat{J} \varphi_n \| + \| J \varphi_n - \Omega^+ \varphi_n^{in} - \Omega^- \varphi_n^{out} \|$$

$$\leq \| (\mathbb{I} - \hat{J}) \varphi_n \| + \| \hat{J} \varphi_n^{\omega} \| + \| \hat{J} \varphi_n^{in} - \Omega^+ \varphi_n^{in} \|$$

$$+ \| \hat{J} \varphi_n^{out} - \Omega^- \varphi_n^{out} \|$$

$$= \| (\mathbb{I} - \hat{J}) \varphi_n \| + \| \hat{J} \| \| \varphi_n^{\omega} \| + \| (\Omega^+ - \hat{J}) \varphi_n^{in} \|$$

$$+ \| (\Omega^- - \hat{J}) \varphi_n^{out} \|$$

El primer término tiende a cero por (1.89) el segundo por que $\hat{J}$ es acotado y por (1.64) el tercero y el cuarto por (1.86) y (1.87) respectivamente. Esto prueba (1.16).

Para probar (1.17) solo hay que notar que

supp $\widehat{\varphi_n^{in}} \subset K_0$, supp $\widehat{\varphi_n^{out}} \subset K_0$ con K_0 compacto

en $\mathbb{R}^{\nu}$.

Y con esto termina la demostración del lema 1.1 y la demostración del teorema. ▲

En realidad, la hipótesis b) del teorema 1.1 se puede reemplazar por una condición más débil. Para los ejemplos que daremos al final de este capítulo, las hipótesis del siguiente teorema se verificarán.

Teorema 1.2

Sean $\hat{H}_0$ y $\hat{H}$ como en el teorema 1.1 y $\hat{J}$ un operador acotado de $\mathcal{S}_2$ en $\mathcal{L}_1$ tal que:

a) $\hat{H}$ es $\hat{J}$ subordinado a $\hat{H}_0$

b) $[\hat{H}+i\mathbb{I}]^{-1}(\hat{H}_0+i\mathbb{I})$ es compacto

y para cada intervalo compacto ω, $P_{\hat{H}}(\omega)(\mathbb{I}-\hat{J})$ es compacto

c) Para todo intervalo acotado ω y alguna función $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$

$$\int_0^{+\infty} \| P_{\hat{H}}(\omega)[\hat{H}\hat{J}-\hat{J}\hat{H}_0]\, g^{-1}(-i\nabla)\, F\{B^c_R, x\}\, \mathbb{I} \| \, dR < +\infty \quad \mathcal{S}_2$$

y $\| P_{\hat{H}}(\omega)[\hat{H}\hat{J}-\hat{J}\hat{H}_0]\, g^{-1}(-i\nabla)\, \mathbb{I} \| < +\infty$

Entonces todas las conclusiones del teorema 1.1 son válidas.

Demostración:

Todos los argumentos en la demostración del teorema 1.1 son válidos. los únicos cambios son para probar que

$$\tilde{\Omega}^{\pm} := s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{it\hat{H}}\,\hat{J}\,e^{-it\hat{H}_0} = s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{it\hat{H}}e^{-it\hat{H}_0}$$

$$= \Omega^{\pm}$$

y para probar (1.16)

Para probar que

$\tilde{\Omega}^{\pm} = \Omega^{\pm}$ procedemos así:

De la hipótesis a) de este teorema, se obtiene que (Ver proposición A.1)

$$\| P_{\hat{H}}(\omega_1^c)(1-\hat{U}) P_{\hat{H}_0}(\omega) \| \to 0 \qquad *$$

$$\text{si } \omega_1 \to \mp\infty$$

En consecuencia, si $\varphi \in \mathcal{G}_t^?$ y ω es un intervalo compacto:

$$e^{it\hat{H}} e^{-it\hat{H}_0} P_{\hat{H}_0}(\omega)\varphi = e^{it\hat{H}} P_{\hat{H}}(\omega_1)(1-\hat{U}) e^{-it\hat{H}_0} P_{\hat{H}_0}(\omega)\varphi$$

$$+ e^{it\hat{H}} P_{\hat{H}}(\omega_1^c)(1-\hat{U}) P_{\hat{H}_0}(\omega) e^{-it\hat{H}_0}\varphi$$

$$+ e^{it\hat{H}} \hat{J} e^{-it\hat{H}_0} P_{\hat{H}_0}(\omega)\varphi$$

El primer término de esta última expresión tiende a cero ya que $P_{\hat{H}}(\omega_1)(1-\hat{U})$ es compacto y $e^{-it\hat{H}_0}\varphi \xrightarrow{\omega} 0$ cuando $t \to \mp\infty$

El segundo término lo podemos hacer arbitrariamente pequeño en norma debido a $*$. En consecuencia:

$$\underset{t\to\mp\infty}{s\text{-}\lim}\; e^{it\hat{H}} e^{-it\hat{H}_0} P_{\hat{H}_0}(\omega) = \tilde{\Omega}^{\pm} P_{\hat{H}_0}(\omega)$$

Puesto que $\mathcal{D} = \bigcup_{\omega} \{ P_{\hat{H}_0}(\omega)\varphi \mid \varphi \in \mathcal{G}_t^? \}$

es denso en $\mathcal{S}_2^*$ y $e^{itH}e^{-itH_0}$ son uniformemente acotados obtenemos que

$$\Omega^{\pm} := s\text{-}\lim_{t\to\mp\infty} e^{it\hat{H}} e^{-it\hat{H}_0} = \tilde{\Omega}^{\pm}$$

Para probar (1.76) solo hay que notar que en la prueba del lema 1.1 se tiene que

$P_{\hat{H}_0}(\omega_1)\varphi_n^{\substack{out\\in}} = \varphi_n^{\substack{out\\in}}$ donde ω_1 es un intervalo compacto. Además, por hipótesis $P_{\hat{H}}([a,b])\varphi_n = \varphi_n$
Por teoría general sabemos que

$$P_{\hat{H}}(\omega)\,\Omega^{\pm} = \Omega^{\pm} P_{\hat{H}_0}(\omega)$$

Tomamos

$$\omega = [a,b] \cup \omega_1$$

Entonces ω es compacto y además

$$\| \varphi_n - \Omega^{+}\varphi_n^{in} - \Omega^{-}\varphi_n^{out} \|$$

$$= \| P_{\hat{H}}(\omega)\varphi_n - \Omega^{+}\varphi_n^{in} - \Omega^{-}\varphi_n^{out} \|$$

$$= \| P_{\hat{H}}(\omega)\varphi_n - \Omega^{+}P_{\hat{H}_0}(\omega)\varphi_n^{in} - \Omega^{-}P_{\hat{H}_0}(\omega)\varphi_n^{out} \|$$

$$= \| P_{\hat{H}}(\omega)\varphi_n - P_{\hat{H}}(\omega)\Omega^+\varphi_n^{in} - P_{\hat{H}}(\omega)\Omega^-\varphi_n^{out}\|$$

$$\leq \| P_{\hat{H}}(\omega)(1-\hat{J})\varphi_n\| + \|$$

$$+ \|\hat{J}\| \|\varphi_n^{\omega}\| + \|(\Omega^+ - \hat{J})\varphi_n^{in}\|$$

$$+ \|(\Omega^- - \hat{J})\varphi_n^{out}\|$$

El primer término de está última expresión tiende a cero, ya que $P_{\hat{H}}(\omega)(1-\hat{J})$ es compacto y $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$. Los restantes por los mismos argumentos que antes. Y así termina la demostración. ▲

Para finalizar este capítulo, daremos una clase de potenciales para los cuales el teorema anterior es válido.

De (1.3) obtenemos que

$$(L-L_0)f = (v + b^2 + q)f \qquad f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu}) \tag{1.90}$$

donde

$$V(x) = \sum_{j=1}^{\nu} (D_j b_j)(x) + 2\sum_{j=1}^{\nu} b_j(x) D_j \tag{1.91}$$

$$b^2(x) = \sum_{j=1}^{\nu} b_j^2(x) \qquad (1.92)$$

Definición 1.6

Sean $L^2_u = \{ W \mid \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^\nu} \int_{C_\alpha} |W(x)|^2 d^\nu x < +\infty \}$

donde C_α es el cubo unitario centrado en $\alpha \in \mathbb{Z}^\nu$. Si $W \in L^2_u$ ponemos $|||W|||^2_{u,2} = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^\nu} \int_{C_\alpha} |W(x)|^2 d^\nu x$.

Supondremos que los potenciales cumplen con:

a) Para algún $n \in \mathbb{N}$,

$$\| b_j^2(x) (-\Delta + \mathbb{1})^{-n} \| < +\infty \qquad j = 1, \dots, \nu \qquad (1.93)$$

$$\| b_0(x) (-\Delta + \mathbb{1})^{-n} \| < +\infty \qquad (1.94)$$

$$\| q(x) (-\Delta + \mathbb{1})^{-n} \| < +\infty \qquad (1.95)$$

$$\| (D_j b_j)(x) (-\Delta + \mathbb{1})^{-n} \| < +\infty \qquad j = 1, \dots, \nu \qquad (1.96)$$

b) Para algún $\varepsilon > 0$,

$$(1 + |x|)^{1+\varepsilon} b_j^2(x) \in L^2_u \qquad j = 1, \dots, \nu \qquad (1.97)$$

$$(1+|x|)^{1+\varepsilon} b_j(x) \in L^2_u \quad j=0,\dots,\nu \tag{1.98}$$

$$(1+|x|)^{1+\varepsilon} (D_j b_j)(x) \in L^2_u \quad j=1,\dots,\nu \tag{1.99}$$

$$(1+|x|)^{1+\varepsilon} q(x) \in L^2_u \tag{1.100}$$

Además, supondremos que L tiene una extensión autoadjunta estrictamente positiva $L \geq \varepsilon$ con

$$D(L^{1/2}) = D(\mathring{L}_0^{1/2}) = \mathcal{H}_1 \tag{1.101}$$

(Para esto ver <84> y <85>).

Por ejemplo, sea $\beta - \Delta$ acotado en sentido de forma con cota relativa cero. Es decir

$$|(\beta\varphi,\varphi)| \leq a(\varphi, -\Delta\varphi) + C_a \|\varphi\|^2 \quad \forall a < 1 \tag{1.101a}$$

donde β es cualquiera de $b_j^2, D_j b_j$ $j=1,\dots,\nu$ b_0 ó q, que cumplen también con (1.93) - (1.96). Y además supongamos que para algún $R>0$, y para toda x con $|x| \geq R$

$$|b_j(x)| \leq \frac{c_j}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}} \qquad j=0,\dots,\nu \tag{1.102}$$

$$|(D_j b_j)(x)| \leq \frac{c_j}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}} \tag{1.103}$$

$$|q(x)| \leq \frac{c'}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}} \qquad (1.104)$$

Esta clase de potenciales cumplen con (1.93) - (1.101).

Ahora veremos que los potenciales que cumplen (1.93) - (1.101) satisfacen las hipótesis del teorema 1.2.

Primero notemos que de (1.101) $\mathcal{H}_E$ y $\mathcal{H}_0$ coinciden como conjunto de funciones. Es decir, la norma heredada por la forma sesquilineal en $\mathcal{H}_E$, dada por (1.4) es equivalente con la norma heredada por la forma sesquilineal en $\mathcal{H}_0$, dada por (1.6).

Sea J el operador de identificación $\mathcal{H}_0$ sobre $\mathcal{H}_E$

Es decir,

$$J\varphi = \varphi. \qquad (1.105)$$

Ponemos

$$\tilde{J} = U J U_0^{-1} \qquad (1.106)$$

Donde U y U_0^{-1} estan definidos por (1.12) y (1.10). Para esta selección de $\tilde{J}$ se verifican las hipótesis.

Para ver esto, tomemos una función $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu})$ tal que

$$\phi(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\varphi| < 1 \\ 1 & \text{si } |\varphi| > 2 \end{cases} \qquad \|\phi\|_{\infty} = 1 \tag{1.107a}$$

Definamos

$$J_{>,R}(x) := \phi(x/R) \tag{1.107b}$$

Sea B un operador tal que

$$\| B(-\Delta + \mathbb{1})^{-1} \| < +\infty \tag{1.108}$$

y supongamos que

$$\int_0^{+\infty} \| B(-\Delta + \mathbb{1})^{-1} F\{B_R^c, x\} \| \, dR < +\infty \tag{1.109}$$

Sean

$$h_0(R) = \| B(-\Delta + \mathbb{1})^{-1} F\{B_R^c, x\} \|$$

$$h_1(R) = \| B(-\Delta + \mathbb{1})^{-1} \dot{J}_{>,R} \|$$

Por (1.107) obtenemos que

$$h_1(R) \leq h(R) \leq h_1(R/2) \tag{1.110}$$

Puesto que $-\Delta = P(-i\nabla)$. con $P = (k) = |k|^2$ entonces

$(-\Delta + \mathbb{I})^{-1} = (|k|^2 + \mathbb{I})^{-1}(-i\nabla)$.

Por comodidad escribimos,

$(|k|^2 + \mathbb{I})^{-1} = (-\Delta + \mathbb{I})^{-1}$.

Entonces, puesto que Δ es un operador de derivación,

$$(|k|^2 + \mathbb{I})^{-1} j_{>, R/2} [|k|^2, j_{>,R}] (|k|^2 + \mathbb{I})^{-1}$$

$$= [j_{>,R}, (|k|^2 + \mathbb{I})^{-1}]$$

donde

$[A, B] = AB - BA$

Ahora bien, si

$h_2(R) = \| B j_{>,R} (-A^2 + \mathbb{I})^{-1} \|$

$$| h_2(R) - h_1(R) | \leq \| B [j_{\geq R}, (|k|^2 + \mathbb{1})^{-1}] \|$$

$$= \| B (|k|^2 + \mathbb{1})^{-1} j_{\geq R/2} [|k|^2, j_{\geq,2}] (|k|^2 + \mathbb{1})^{-1} \|$$

$$\leq h_1(R/2) \| [|k|^2, j_{\geq R}] (|k|^2 + \mathbb{1})^{-1} \|$$

Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$, entonces

$$[|k|^2, j_{\geq,1,2}] \varphi = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{2R} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \phi \,|_{y = x/R} \right] \varphi$$

$$+ \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \phi \,|_{y = x/R} \right] (-i k_j) \varphi$$

Entonces

$$\| [|k|^2, J_{\geq R}] (|k|^2 + \mathbb{1})^{-1} \| \leq C/R \quad \text{con} \quad C = \text{constante}$$

Por lo tanto,

$$| h_2(R) - h_1(R) | \leq C/R \, h_1(R/2) \tag{1.111}$$

Sea α suficientemente grande de tal manera que

$c/\alpha < 1 < \alpha/2$

Entonces

$$\int_{\alpha}^{+\infty} h_1(R)\,dR \leq \int_{\alpha}^{+\infty} |h_2(R)-h_1(R)|\,dR + \int_{\alpha}^{+\infty} h_2(R)\,dR$$

$$\leq C\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{R} h_1(R/2)\,dR + \int_{\alpha}^{+\infty} h_2(R)\,dR$$

$$\leq \frac{c}{\alpha}\int_{\alpha}^{+\infty} h_1(R)\,dR + \int_{\alpha/2}^{\alpha} s^{-1} h_1(s)\,ds + \int_{\alpha}^{+\infty} h_2(R)\,dR$$

$\Rightarrow$

$$\int_{\alpha}^{+\infty} h_1(R)\,dR \leq \frac{c\alpha}{\alpha-c}\int_{\alpha/2}^{\alpha} h_1(R)R^{-1}\,dR + \int_{\alpha}^{+\infty} h_2(R)\,dR \qquad (1.112)$$

De (1.111) obtenemos que

$$\int_{1}^{+\infty} h_2(R)\,dR < +\infty \text{ si } \int_{0}^{+\infty} h_1(R)\,dR < +\infty$$

Como $\|B(-\Delta+I)^{-1}\| < +\infty$ y $h_1(0) \geq k_1(R)$

de (1.112)

$$\int_{0}^{+\infty} h_1(R)\,dR < +\infty \text{ si } \int_{1}^{+\infty} h_2(R)\,dR < +\infty$$

En consecuencia, de (1.110)

$$\int_{0}^{+\infty} h(R)\,dR < +\infty \iff \int_{0}^{+\infty} h_1(R)\,dR < +\infty \iff \int_{1}^{+\infty} h_2(R)\,dR < +\infty$$

los mismos argumentos funcionan si reemplazamos $(A+\mathbb{I})$ por $((-\Delta)+\mathbb{I})^{-n}$. En consecuencia, si B es tal que

$$\| B(+|R|^2+\mathbb{I})^{-N} \| < +\infty$$

Entonces

$$\int_0^{+\infty} \| B(|R|^2+\mathbb{I})^{-N} F\{B^c_R, k\} \| dR < +\infty$$

si y solo si

$$\int_1^{+\infty} \| B_{j\geq R} (|R|^2+\mathbb{I})^{-N} \| dR < +\infty \qquad (1.113a)$$

Ahora tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$N > \max[n, \nu/2]+1$ donde n cumple con (1.113b)
(1.93) -(1.96).

Queremos ver ahora que para esta selección de N se cumple (1.113) con $B = L - L_0$

Por (1.90) - (1.92); (1.97) - (1.100) y puesto que

$$(b_j D_j)_{j\geq R} = (b_j\, j_{\geq R}) D_j + \frac{1}{R} b_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\Big|_{\varphi = x_j R}$$

entonces es suficiente con ver que (1.113) se cumple para

$$h_1(R) := \| b(x) j_{\geq R}(x) (-\Delta + \mathbb{1})^{-N} \|$$

donde $(1+|x|)^{1+\varepsilon}\, b(x) \in L^2_u$

Por otro lado, usando la proposición A.9 obtenemos que

$$\| b j_{\geq R} (-\Delta + \mathbb{1})^{-N} \| \leq C \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^\nu} \left\{ \int_{C_\alpha} |b j_{\geq R}|^2 d^\nu x \right\}^{1/2}$$

$(0 \leq j_{\geq R} \leq 1;\ j_{\geq R}(x) = 0$ si $|x| \leq R)$

$$\leq c \sup_{|\alpha| \geq R - \sqrt{\nu}/2} \frac{(1+|\alpha|)^{1+\varepsilon}}{(1+|\alpha|)^{1+\varepsilon}} \left\{ \int_{C_\alpha} |b(x)|^2 d^\nu x \right\}^{1/2}$$

$$\leq \frac{c'}{(1+R)^{1+\varepsilon}} \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^\nu} \left\{ (1+|\alpha|)^{2+2\varepsilon} \int_{C_\alpha} |b(x)|^2 d^\nu x \right\}^{1/2}$$

$$= \frac{c'}{(1+R)^{1+\varepsilon}} \| \, |b| \, \|_{L^2_u} \qquad (1.113c)$$

Así obtenemos lo afirmado

Por (1.113) obtenemos que

$$h(R) := \| (L-L_0)(-\Delta+\mathbb{I})^{-N} F\{B_R^c, x\} \| \qquad (1.114a)$$

esta en $L^1(\mathbb{R}^+, dR)$. Además, h es una función monotona creciente, en consecuencia,

$$h(R) = \frac{1}{R}\int_0^R h(R)\,ds \leq \frac{1}{R}\int_0^{+\infty} h(s)\,ds$$

$$\to 0 \text{ si } R \to +\infty \qquad (1.114b)$$

Por (1.90)

$$[(L_0+1)^{-1} - (L+1)^{-1}](-\Delta+m^2+1)^{-N}$$

$$= (L+1)^{-1}[L-L_0][L_0+1)^{-1}(-\Delta+m^2+1)^{-N}$$

$$= (L+1)^{-1}[L-L_0](-\Delta-m^2+1)^{-N-1} \qquad (1.115)$$

Por la proposición A.5

$(-\Delta+m^2+1)^{-1} F\{B_R, x\}$ es compacto

Entonces

$(L+1)^{-1}[L-L_0](-\Delta+m^2+1)^{-N-1} F\{B_R, x\}$ es compacto

De (1.114) obtenemos que

$(L+1)^{-1}[L-L_0](-\Delta+m^2+1)^{-N-1}$ es el límite en norma de operadores compactos y por tanto de (1.115)

$$[(L_0+1)^{-1}-(L+1)^{-1}](-\Delta+m^2+1)^{-N} \text{ es compacto} \quad (1.116)$$

Además, como $D(L^{1/2})=D(L_0^{1/2})$ entonces

$$\| L^{1/2}L_0^{-1/2}\| + \| L_0^{1/2}L^{-1/2}\| < +\infty \quad (1.117)$$

Es decir, L y L_0 son mutuamente subordinados.

Por la proposición A.3 se desprende que

$$(L+1)^{-1}-(L_0+1)^{-1} \text{ es compacto} \quad (1.118)$$

Y de aquí que para toda función $\phi \in C_{00}(\mathbb{R})$

$$\phi(L)-\phi(L_0) \text{ es compacto} \quad (1.119)$$

Por otro lado, un cálculo directo nos muestra que

$$\hat{J} = UJU_0^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} L^{1/2}L_0^{-1/2}+1 & L^{1/2}L_0^{-1/2}-1 \\ L^{1/2}L_0^{-1/2}-1 & L^{1/2}L^{-1/2}+1 \end{pmatrix}$$

donde omitimos el operador de identificación $J\varphi = \varphi$.
Entonces, para cada intervalo compacto ω,

$$(\mathbb{1} - \hat{J})^{*} P_{\hat{H}}(\omega) = (\mathbb{1} - \hat{J}^{*}) P_{\hat{H}}(\omega)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} L_0^{-1/2} - L^{-1/2} & L_0^{-1/2} - L^{-1/2} \\ L_0^{-1/2} - L^{-1/2} & L_0^{-1/2} - L^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & L^{1/2} \end{pmatrix} P_{\hat{H}}(\omega)$$

Puesto que $D(\hat{H}) = D(L^{1/2}) \quad D(L^{1/2})$

entonces

$$\begin{pmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & L^{1/2} \end{pmatrix} P_{\hat{H}}(\omega) \text{ es acotado.} \qquad (1.119b)$$

Tomando $\phi(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ en (1.119a)

obtenemos que $L_0^{-1/2} - L^{-1/2}$ es compacto.

En consecuencia

$$P_{\hat{H}}(\omega)(\mathbb{1} - \hat{J}) \text{ es compacto} \qquad (1.120a)$$

ya que su adjunto es compacto

Por (1.113) obtenemos que

$b_0(-\Delta+\mathbb{1})^{-N-1}$ es compacto (1.121)

Por (1.14) se deduce que

$$\hat{Q}\begin{pmatrix}(-\Delta+\mathbb{1})^{-N-1} & 0 \\ 0 & (-\Delta+\mathbb{1})^{-N-1}\end{pmatrix}=\hat{Q}(-\Delta+\mathbb{1})^{-N-1}I \quad (1.122)$$

es compacto

Además,

$$P_{\hat{H}}(\omega)[\hat{H}_0-\hat{H}_1]P_{\hat{H}_0}(\omega_1)=P_{\hat{H}}\,(L^{1/2}+1)^{-1}(L_0^{1/2}+1)^{-1}\,0$$

$$=P_{\hat{H}}(\omega)\begin{pmatrix}L^{1/2}+1 & 0 \\ 0 & L^{1/2}+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(L^{1/2}+1)^{-1}-(L_0^{1/2}+1)^{-1} & 0 \\ 0 & -[(L^{1/2}+1)^{-1}-(L_0^{1/2}+1)^{-1}]\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}L_0^{1/2}+1 & 0 \\ 0 & L_0^{1/2}+1\end{pmatrix}P_{\hat{H}_0}(\omega_1)$$

Por (1.119) y (1.122) obtenemos que

$P_{\hat{H}}(\omega)[\hat{H}-\hat{H}_0]P_{\hat{H}_0}(\omega_1)$ es compacto si ω, ω_1 son intervalos compactos.

Como $D(\hat{H})=D(\hat{H}_0)=D(L_0^{1/2})\oplus D(L_0^{1/2})$ (1.123a)

entonces $\hat{H}$ y $\hat{H}_0$ son mutuamente subordinados

De la proposición A.3

$$(\hat{H} + i\mathbb{1})^{-1} - (\hat{H}_0 + i\mathbb{1})^{-1} \text{ es compacto} \tag{1.123b}$$

De (1.120a) y (1.123b) vemos que la hipótesis b) del teorema 1.2 se cumple.

Por (1.123a)

$$\frac{1}{2}(\hat{H}_0 + i\mathbb{1})\begin{pmatrix} L_0^{1/2} + L^{-1/2} & L_0^{1/2} - L^{-1/2} \\ L_0^{-1/2} - L^{-1/2} & L_0^{-1/2} + L_0^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & L^{1/2} \end{pmatrix}(\hat{H} + i\mathbb{1})^{-1}$$

$$= (\hat{H}_0 + i\mathbb{1})\,\hat{J}^*(\hat{H} + i\mathbb{1})^{-1} \text{ es acotado}$$

Entonces $\hat{H}_0$ es $\hat{J}^*$ subordinado a $\hat{H}$

Además, si ω es un intervalo compacto,

$$(\hat{H} + i\mathbb{1})\,\hat{J}\,P_{\hat{H}_0}(\omega)$$

$$= (\hat{H} + i\mathbb{1})\begin{pmatrix} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & L^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & L^{1/2} \end{pmatrix}\hat{J}\,P_{\hat{H}_0}(\omega)$$

Por la proposición A.1 y (1.123a) es suficiente con ver que $\begin{pmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & L^{1/2} \end{pmatrix}\hat{J}\,P_{\hat{H}_0}(\omega)$ es acotado para que $\hat{H}$ sea $\hat{J}$ subordinado a $\hat{H}_0$.

Pero

$$\begin{pmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & L^{1/2} \end{pmatrix} \hat{J}\, P_{\hat{H}_0}(\omega) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} L L_0^{-1/2} + L^{1/2} & L L_0^{-1/2} - L^{1/2} \\ L L_0^{-1/2} - L^{1/2} & L L_0^{-1/2} + L^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{+}(\omega) & 0 \\ 0 & P^{-}(\omega) \end{pmatrix}$$

donde P^+ y P^- son los proyectores espectrales asociados a $L_0^{1/2}$ y $-L_0^{1/2}$ respectivamente.

Como $D(L^{1/2}) = D(L_0^{1/2})$, es suficiente con ver que

$L L_0^{-1/2} P^+(\omega)$ es acotado. (1.124)

Por (1.90), (1.93) – (1.96) y (1.113 b)

$\| (L L_0^{-1} - \mathbb{1})(-\Delta + m^2)^{-N+1} \| < +\infty$

Entonces (1.124) se cumple

Esto nos dice que

$\hat{H}$ y $\hat{H}_0$ son mutuamente subordinados con $\hat{J}$ (1.125)

Ahora vemos que la hipótesis c) del teorema 1.2 se cumple.

$$\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0 = (\hat{H}_1 + \hat{Q})\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0$$

$$= \hat{H}_1\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0 + \hat{Q}'$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_0^{-1/2} - L_0^{1/2} & \mu_0^{3/2} - L_0^{1/2} \\ -(\mu_0^{-1/2} - L_0^{1/2}) & -(\mu_0^{3/2} - L_0^{1/2}) \end{pmatrix} + \hat{\delta} \qquad (1.126)$$

Puesto que la hipótesis c) del teorema 1.1 se utiliza únicamente para probar que

$$\| e^{it\hat{H}} P_{\hat{H}}(\omega) [\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0] e^{-it\hat{H}_0} \psi \| \in L^1(\mathbb{R}, dt)$$

para ψ en un conjunto denso de $\mathcal{H}_2$, entonces es suficiente con que la hipótesis c) se cumpla, para cada sumando de (1.126), para ciertas funciones g_1 y g_2.

Sean $g_1(k) = (|k|^2 + m^2)^{t(\nu - 1/2)}$

$$g_2(k) = (|k|^2 + m^2)^{t\nu}$$

$$[\hat{H}, \hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0]\, g_1^{-1}(-i\nabla) F\{B_R^c, x\} I$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_0^{-1/2} - L_0^{1/2} & \mu_0^{1/2} - L_0^{1/2} \\ -(\mu_0^{-1/2} - L_0^{1/2}) & -(\mu_0^{-1/2} - L_0^{1/2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^{-1}(-i\nabla) & 0 \\ 0 & g_1^{-1}(-i\nabla) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} F\{B_R^c, x\} & 0 \\ 0 & F\{B_R^c, x\} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-L_0 & 1-L_0 \\ -(1-L_0) & -(1-L_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-\Delta+m^2)^{-N} & 0 \\ 0 & (-\Delta+m^2)^{-N} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} F\{B^c_R, x\} & 0 \\ 0 & F\{B^c_R, x\} \end{pmatrix}$$

Usando (1.114a) obtenemos que

$$\| [\hat{H}, \hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0] g_1^{-1}(-i\nabla) F\{B^c_R, x\} \mathbb{I} \|_{\mathcal{L}^2} \in L^1(\mathbb{R}^+, dR) \tag{1.127}$$

Similarmente, por (1.120b)

$$\| \hat{Q}\, g_2^{-1}(-i\nabla) F\{B^c_R, x\} \mathbb{I} \| \in L^1(\mathbb{R}^+, dR) \tag{1.128}$$

Usando (1.127) y (1.128) se desprende que

$P_{\hat{H}}(\omega) [\hat{H}\hat{J} - \hat{J}\hat{H}_0] P_{\hat{H}_0}(\omega_1)$ es compacto

Por la proposición A.3 y (1.125) se obtiene

que $(\hat{H} + i\mathbb{I})^{-1} \hat{J} - \hat{J}(\hat{H}_0 + i\mathbb{I})^{-1}$ es compacto

En consecuencia todas las hipótesis de (

Teorema 1.2 se cumplen para los potenciales dados por (1.93) - (1.100).

Finalmente, de (1.11) y (1.13) notemos que la existencia de los operadores de onda:

$$\tilde{\Omega}^{\pm} := s\text{-}\lim_{t \to \mp\infty} e^{it\hat{H}} \hat{J} e^{-it\hat{H}_0}$$

$$\Omega^{\pm} := s\text{-}\lim_{t \to \mp\infty} e^{it\hat{H}} e^{-it\hat{H}_0}$$

implican la existencia de

$$\tilde{\Omega}^{\pm}_{E} := s\text{-}\lim_{t \to \mp\infty} e^{itH} U^{-1} \hat{J} U_0 e^{-itH_0}$$

$$\Omega_E^{\pm} := \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim} \; e^{itH} U^{-1} U_0 \, e^{-itH_0}$$

y además

$$\tilde{\Omega}_E^{\pm} = \Omega_E^{\pm}$$

$$\Omega_E^{\pm} : \mathcal{H}_{ac}(H_0) = \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_{ac}(H) \subset \mathcal{H}_E$$

siendo

$\Omega_E^{\pm}$ una isometría de $\mathcal{H}_{ac}(H_0)$ sobre $\mathcal{H}_{ac}(H)$.

Capitulo Segundo

Iodificación de la Teoria para una forma sesquilineal no definida positiva

En el capitulo anterior hemos probado completes asintótica para la ecuación de Klein-Gordon (1.1) en el caso en que la forma sesquilineal en (1.4) es positiva definida. Es decir, L tiene una extensión autoadjunta positiva y mayor ó igual a $\varepsilon > 0$.

Ahora daremos las modificaciones que tienen que ser hechas cuando el operador ya no es más un operador mayor o igual que ε sino que tiene un número finito de eigenvectores con eigenvalores negativos. Además supondremos que en (1.1) $b_0 \equiv 0$. Así, (1.1) queda

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x,t) = L\, \psi(x,t)$$

$$L = \sum_{j=1}^{\nu} (D_j - b_j)^2 + m^2 + q_s .$$

Denotemos por φ_j y $-\lambda_j^2$ los eigenvectores y sus respectivos eigenvalores, $j=1,\dots,m$.

$$L\varphi_j = -\lambda_j^2 \varphi_j \qquad \lambda_j > 0 \quad j=1,\dots,m$$

Denotemos por $\mathcal{P}$ el subespacio generado en L^2 por estos eigenvectores. Tomemos

$$\mathcal{H}_E = \left\{ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; f_1 \in D(|L|^{1/2}) \cap \mathcal{P}^\perp, \; f_2 \in \mathcal{P}^\perp \right\}$$

Y definamos en $\mathcal{H}_E$ el producto escalar dado por

$$(f,g)_E = (Lf_1, g_1) + (f_2, g_2)$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \; ; \qquad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{H}_E$ es un espacio de Hilbert bajo este producto, puesto que estamos suponiendo que $L_+ \geq \varepsilon$, donde L_+ es la parte positiva de L.

En realidad
$$D(L_+) = D(L) \cap \mathcal{P}^\perp$$

Si denotamos por

$$H_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L_+ & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

vemos que H_+ es autoadjunto en $\mathcal{H}_E$ con dominio $D(|L|) \cap P^+ \oplus D(|L|^{1/2}) \cap P^\perp$; puesto que

$$H_+ = U_+^{-1} \hat{H}_+ U_+$$ donde

$$U_+ : \mathcal{H}_E \to \hat{\mathcal{H}}_E := P^\perp \oplus P^\perp$$

$$U_+ f = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} L_+^{1/2} & 1 \\ L_+^{1/2} & -1 \end{pmatrix} f. \qquad (2.3)$$

$$\hat{H}_+ : D(L_+^{1/2}) \oplus D(L_+^{1/2}) \subset \hat{\mathcal{H}}_E \to \hat{\mathcal{H}}_E$$

$$\hat{H}_+ := \begin{pmatrix} L_+^{1/2} & 0 \\ 0 & -L_+^{1/2} \end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

Para ver que U_+ es unitario, notemos que si $f \in \mathcal{H}_E$, entonces

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$f_1 \in D(|L|^{1/2}) \cap \wp^\perp = D(L_+^{1/2})$$

$$f_2 \in \wp^\perp$$

$$\| U_+ f \|^2_{\hat{\mathcal{H}}_E} = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} L_+^{1/2} f_1 + f_2 \\ L_+^{1/2} f_1 - f_2 \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$= \| L_+^{1/2} f_1 \|^2 + \| f_2 \|^2$$

$$= (|L|^{1/2} P_L [\varepsilon, +\infty) f_1 , |L|^{1/2} P_L [\varepsilon, +\infty) f_1)$$

$$+ \| f_2 \|^2$$

$$= (L f_1 , f_1) + (f_2 , f_2)$$

$$= \| f \|^2_{\mathcal{H}_E}$$

donde $P_L[\varepsilon,+\infty)$ es el proyector espectral asociado al operador L sobre la parte positiva.

Esto prueba que U_+ es una isometría. Además, como $L_+^{1/2}$ deja invariante $\mathcal{P}^\perp$, entonces efectivamente

$$U_+ \mathcal{H}_E \subset \hat{\mathcal{H}}_E = \mathcal{P}^\perp \oplus \mathcal{P}^\perp$$

Un simple cálculo nos muestra que

$$U_+^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} L_+^{-1/2} & L_+^{-1/2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2.5)$$

Esto prueba que U_+ es unitario. Por otro lado, el operador definido en (2.4) puede ser visto como un operador de $D(L_+^{1/2}) \oplus D(L_+^{1/2}) \subset \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2^2$.

Pero como $\mathcal{L}_2^2 = \hat{\mathcal{H}}_E \oplus (\mathcal{P} \oplus \mathcal{P})$, $\hat{H}_+$

Vista de está manera no tiene dominio denso. Para resolver este problema y poder utilizar la teoriá en un espacio de Hilbert estudiada en el capitulo 1, extenderemos $\hat{H}_+$ como el operador cero en $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}$; esto es, definiremos $\hat{H} = \hat{H}_+ \oplus 0$.

Posteriormente veremos que los operadores de onda son independientes de como extendamos $\hat{H}_+$ a $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}$.

Denotaremos a este operador por $\hat{A}$.

Denotaremos por $P^{\perp}$ la proyección ortogonal sobre

$$\mathcal{H}_{\epsilon} = \mathcal{P}^{\perp} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$$ y

P la respectiva a $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}$.

En el capitulo anterior hemos definido los operadores de onda generalizados como

$$\tilde{\Omega}^{\pm} := s-\lim_{t \to \mp\infty} e^{it\hat{A}} \hat{J} e^{-it\hat{H}_0} \quad (2.7)$$

donde $\hat{J}$ es un operador acotado de $\mathcal{L}_2^2$ en $\mathcal{L}_2^2$. Sin embargo, notemos que por ser $\mathcal{P}$ un subespacio de dimensión finita, P es un operador compacto.

En consecuencia, si $\hat{J}$ es cualquier operador acotado de $\mathcal{L}_2^2$ en $\mathcal{L}_2^2$, $P\hat{J}$ es compacto.

Además,

$$e^{it\hat{H}_0}\varphi \xrightarrow{w} 0 \quad si\ t \to \pm\infty \qquad (2.8)$$

En consecuencia,

$$\| P\hat{J}e^{-it\hat{H}_0}\varphi \|_{\mathcal{L}_2^2} \to 0 \quad si\ t \to \pm\infty \qquad (2.9)$$

Por consiguiente, los operadores de onda generalizados existirán, para $\hat{H}$ definido por (2.6) si y solo si

$$s\text{-}\lim_{t \to \mp\infty} e^{it\hat{H}} P^{\perp} \hat{J} e^{-it\hat{H}_0} \qquad (2.10)$$

existen y en dicho caso

$$\tilde{\Omega}^{\pm} = s\text{-}\lim_{t \to \mp\infty} e^{it\hat{H}_+} P^{\perp} \hat{J} e^{-it\hat{H}_0}$$

es decir el subespacio $P \oplus P$ se desacopla de la teoría de colisiones y en consecuencia no importa como extendamos

$\hat{H}_+$ a $P \oplus P$, por supuesto siempre y cuando la extensión sea autoadjunta.

Podemos entonces considerar sin pérdida de generalidad

$$\hat{J} : \mathcal{L}_2^2 \to \hat{\mathcal{H}}_E := P^\perp \oplus P^\perp \qquad (2.11)$$

Usando esta discusion podemos enunciar el teorema:

Teorema 2.1

Sean $\hat{H}_0$ como en (1.9) y $\hat{H}$ como en (2.6) y $\hat{J}$ un operador acotado de $\mathcal{L}_2^2$ en $\mathcal{H}_E$

tales que:

a) $\hat{H}$ es $\hat{J}$

subordinado a $\hat{H}_0$

b) Para cada intervalo ω acotado $P_{\hat{H}}(\omega)(\mathbb{1}-\hat{J})$ es compacto y $(\hat{H}+i\mathbb{1})^{-1}-(\hat{H}_0+i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto.

c) Para cada intervalo ω acotado y alguna función $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu})$

$$\int_0^{+\infty} \| P_{\hat{H}}(\omega)[\hat{H}\hat{J}-\hat{J}\hat{H}_0] g^{-1}(-i\nabla) F\{B_R^c, x\} \|_{\mathcal{L}_2^2} dR < +\infty$$

Entonces,

a) $\tilde{\Omega}^{\pm} :=: \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{it\hat{A}} \hat{J} e^{-it\hat{A}_0}$

existen y además

$$\tilde{\Omega}^{\pm} = \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{it\hat{A}} e^{-it\hat{A}_0} =: \Omega^{\pm}.$$

b) $\hat{A}$ no tiene espectro singularmente continuo.

c) $\mathrm{Ran}\, \Omega^{\pm} = \mathcal{H}_{ac}(\hat{A})$.

d) Los posibles puntos límites (finitos) para el espectro puntual de $\hat{A}$ están en $\pm m$.

cualquier eigenvalor que no está en $\pm m$ tiene multiplicidad finita.

e) $\sigma_{ess}(\hat{A}) = \sigma_{ess}(\hat{A}_0)$

Demostración:

La demostración se sigue del teorema 1.2 ▲

Ahora bien, de (2.10) sabemos que

$$\tilde{\Omega}^{\pm} := s\text{-}\lim_{t \to \mp\infty} e^{it\hat{A}} \hat{J} e^{-it\hat{A}_0}$$

$$= s\text{-}\lim_{t \to \mp\infty} e^{it\hat{A}} P_2^{\perp} \hat{J} e^{-it\hat{A}_0}$$

$$= \tilde{\Omega}^{\pm}_{+} := s\text{-}\lim_{t \to \mp\infty} e^{it\hat{H}_{+}} \hat{J} e^{-it\hat{H}_0} \qquad (2.12)$$

y además

$$\Omega^{\pm} := s\text{-}\lim_{t \to \mp\infty} e^{it\hat{H}} e^{-it\hat{H}_0}$$

$$= s\text{-}\lim_{t \to \mp\infty} e^{it\hat{H}} P^{\perp} e^{-it\hat{H}_0}$$

$$= \Omega^{\pm}_{+} := s\text{-}\lim_{t \to \mp\infty} e^{it\hat{H}_{+}} P^{\perp} e^{-it\hat{H}_0} \qquad (2.13)$$

debido a que

$$\hat{H} P^{\perp} = \hat{H}_{+} \qquad (2.14)$$

De (2.14) y las conclusiones del teorema (2.1) obtenemos que

$\hat{H}_+$ no tiene espectro singularmente contino y

$$\mathcal{H}_{ac}(\hat{H}) = \mathcal{H}_{ac}(\hat{H}_+).$$

Además, de (2.12) y (2.13)

$$\tilde{\Omega}^{\pm}_{+} = \Omega^{\pm}_{+} \qquad (2.15)$$

$$\mathrm{Ran}\, \Omega^{\pm}_{+} = \mathcal{H}_{ac}(\hat{H}_+)$$

Finalmente, puesto que

$H_+ = U_+^{-1}\, \hat{H}_+\, U_+$ con U_+ unitario

las mismas afirmaciones siguen siendo válidas para H_+.

La conveniencia de trabajar con $\hat{H}$ en lugar de $\hat{H}_+$, es que $\hat{H}$ está definido en el mismo espacio que $\hat{H}_0$. Es decir, en $\mathcal{L}_2^2$. Así hemos podido aplicar directamente el teorema 1.2, aunque en realidad los operadores $\hat{H}_0$ y $\hat{H}_+$ están definidos en $\mathcal{L}_2^2$ y $\hat{\mathcal{H}}_E$ respectivamente.

Como en el capítulo 1, tenemos que la existencia de los operadores de onda:

$$\tilde{\Omega}_{+}^{\pm} := \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{it\hat{H}_+} \hat{J} e^{-it\hat{H}_0}$$

$$\Omega_{+}^{\pm} := \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{it\hat{H}_+} e^{-it\hat{H}_0}$$

implican la existencia de

$$\tilde{\Omega}_{E}^{\pm} := \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{itH_+} U_+^{-1} \hat{J} U_0 e^{-itH_0}$$

$$\Omega_{E}^{\pm} := \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{itH_+} U_+^{-1} U_0 e^{-itH_0}$$

con

$$\tilde{\Omega}_{E}^{\pm} = \Omega_{E}^{\pm}$$

$$\Omega_{E}^{\pm} : \mathcal{H}ac\,(H_0) = \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}ac\,(H_+) \subset \mathcal{H}_E$$

siendo

$\Omega_E^{\pm}$ una isometría de

$\mathcal{H}_{ac}(H_0)$ sobre $\mathcal{H}_{ac}(H_+)$.

APENDICE

Subordinación y Compacidad.

En este capítulo presentamos algunos resultados generales, los cuales hemos utilizado.

Unicamente en esta sección, H_0 y H son dos operadores autoadjuntos en los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}$ respectivamente.

I denotará un intervalo acotado de $\mathbb{R}$, y si $I = [a,b]$ diremos que I tiende al infinito ($I \to +\infty$) si $a \to -\infty$ y $b \to +\infty$.

Finalmente, J denotará un operador acotado de $\mathcal{H}_0$ en $\mathcal{H}$. Con esto podemos empezar propiamente nuestro trabajo, dando un lema.

(Proposición A.1)

Sean $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}$ y J como arriba, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

a) Existen dos funciones localmente acotadas f_0 y f, definidas sobre $\mathbb{R}$, tales que $|f_0|, |f| \geq 1$ $|f(x)| \to +\infty$ cuando $|x| \to +\infty$ y tales que el operador de $\mathcal{H}_0$ en $\mathcal{H}$

$$f(\mathcal{H})\, J\, f_0(\mathcal{H}_0)^{-1} \qquad (A.1)$$

sea acotado.

b) Para todo intervalo I, existe una función f_I localmente acotada definida en $\mathbb{R}$ tal que $|f_I| \geq 1$, $|f_I(x)| \to +\infty$ cuando $|x| \to +\infty$ y el operador de $\mathcal{H}_0$ en $\mathcal{H}$

$$f_I(\mathcal{H})\, J\, P_0(I) \qquad (A.2)$$

sea acotado.

c) $\forall$ intervalo acotado I_0,

$$\| P(I^c)\, J\, P_0(I_0) \| \qquad (A.3)$$

cuando $I \to +\infty$

Demostración:

a) => b)

Puesto que $f(\mathcal{H}) J P_0(I) = \{ f(\mathcal{H}) J f_0(\mathcal{H}_0)^{-1} \} \times \{ f_0(\mathcal{H}_0) P_0(I) \}$ El primer factor del segundo miembro es un operador acotado por la hipótesis (a), mientras que el segundo también si I es un intervalo acotado puesto que f_0 es localmente acotada. Podemos tomar $f_I = f$ (Independientemente de I).

b) => c) $\forall$ par de intervalos acotados I_0, I

$$P(I^c) J P_0(I_0) = \{P(I^c) f_{I_0}(\mathcal{H})^{-1}\} \times \{f_{I_0}(\mathcal{H}) J P_0(I_0)\}$$

El primer factor tiende a cero si $I \to +\infty$, mientras que el segundo es un operador acotado que no depende de I.

c) → a) Supongamos que lo demostramos para el caso en que $\mathcal{H}_0 \geq 0$, $\mathcal{H} \geq 0$. Entonces se cumple (A.3) para $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}$ y si $I_0 \subset \mathbb{R}^+$ entonces $P_0'(I_0) = P_0(x \in \mathbb{R}, |x| \in I_0)$ donde P_0' denota la proyección espectral asociada a $|\mathcal{H}_0|$. De aquí se obtiene que $|\mathcal{H}_0|$ y $|\mathcal{H}_1|$ cumplen (A.3) y por lo tanto existen funciones f', f_0' que satisfacen (A.1).

Tomando $f = f(x) = f'(|x|)$ obtenemos el resultado para $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}$.

Consideramos $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}$ y denotemos por $F\{S, x\}$ la función característica de S evaluada en el punto x. Escogeremos funciones de la forma:

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, \mathcal{F}\{[n, n+1), x\}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \, \mathcal{F}\{[\lambda_n, \lambda_{n+1}), x\}$$

Donde las sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{+\infty}$ y $\{\lambda_n\}_{n=0}^{+\infty}$ son sucesiones crecientes de números positivos que tienden al infinito cuando $n \to +\infty$ y $a_0 = b_0 = 1$, $\lambda_0 = 1$, a_n y b_n, λ_n serán escogidas convenientemente.

Por cálculo espectral,

$$f(H) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n P([\lambda_n, \lambda_{n+1}))$$

$$f_0(H_0)^{-1} = \sum_{s=0}^{+\infty} a_s^{-1} P_0([s, s+1))$$

Además,

$$f_0(H_0)^{-1} = \sum_{s=0}^{n-1} a_s^{-1} P_0([s, s+1)) + \sum_{s \geq n}^{+\infty} a_s^{-1} P_0([s, s+1))$$

Poniendo

$$A_n := \sum_{s=0}^{n-1} a_s^{-1} P_0([s, s+1)) \quad A'_n := f_0(H_0)^{-1} - A_n$$

$\|A_n \varphi\|^2 = \sum_{s<n} a_s^{-2} \|P_0([s, s+1))\varphi\|^2 \leq a_0^{-2} \sum_{s<n} \|P_0([s, s+1))\varphi\|^2 \leq \|\varphi\|^2$ ya que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente. De este modo, obtenemos también que $\|A'_n \varphi\|^2 \leq a_n^{-2} \|\varphi\|^2$. En consecuencia.

$$\|A_n\| = 1 \,; \quad \|A'_n\| = a_n^{-1}$$

$$\|f(H) J f_0(H_0)^{-1}\| = \|f(H) J A_n + f(H) J A'_n\|$$

$$\leq \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} b_n P([\lambda_n, \lambda_{n+1})) J P_0([0, n]) A_n \right\|$$

$$+ \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} b_n P([\lambda_n, \lambda_{n+1})) J A'_n \right\|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \{ \| P([\lambda_n, +\infty)) J P_0([0, n]) \| + a_n^{-1} \|J\| \}$$

Entonces $f(H) J f_0(H_0)^{-1}$ será acotada si esta serie converge. Por (1,3) podemos escoger $\{\lambda_n\}$ una sucesión creciente tal que $\| P([\lambda_n, +\infty]) J P_0([0,n]) \| \leq 2^{-n}$. Para tal sucesión $\{\lambda_n\}$ y, por ejemplo, para $a_n = 2^n$ y $b_n = n+1$ la serie converge y $|f|, |f_0| \geq 1$, $|f_0(x)| \to +\infty$, $|f(x)| \to \infty$ cuando $|x| \to +\infty$. Esto prueba el lema ▲

Definición (1.1)

Sean H_0, H operadores autoadjuntos en los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}$ respectivamente. J es un operador acotado de $\mathcal{H}_0$ en $\mathcal{H}$. Se dice que H es J-subordinado a H_0 si cualesquiera de las tres condiciones del lema 1.1 es satisfecha. Si $J = 1$, simplemente diremos que H es subordinado a H_0. Si H es subordinado a H_0 y H_0 es subordinado a H diremos que H_0 y H son mutuamente subordinados. Finalmente, si H es J subordinado a H_0 y H_0 es J^* subordinado a H, diremos que H y H_0 son mutuamente subordinados con J.

Ahora damos unos ejemplos de operadores H_0, H que cumplen alguna o algunas de las condiciones del lema 1.1.

(Proposición A.2)

Sea A un operador compacto de H_0 en H y supongamos que $\{B_n\}$ es una sucesión de operadores de H en H tal es que $s\text{-}\lim_{n\to+\infty} B_n = 0$ entonces $\lim_{n\to+\infty} \|B_n A\|_{\mathcal{L}(H_0,H)} = 0$

Demostración:

Supongamos que la afirmación es falsa. Tomemos $\varepsilon > 0$ y sea $S: \{B_n A \mid \|B_n A\| \geq \varepsilon\}$. Entonces, si S contiene un número infinito de elementos (los cuales seguimos denotando por $\{B_n A\}$) hacemos lo siguiente:

Como $\|B_n A\| = \sup_{\|y\|=1} \|B_n A y\|$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos hallar $y_n \in H_0$ tal que $\|y_n\| = 1$ y $\|B_n A y_n\| \geq 1/2 \|B_n A\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Por otro lado, como A es compacto, existe una subsucesión $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ tal que $A y_{n_k} \to \eta \in H$

Entonces

$$\varepsilon/2 \leq \|B_{n_k} A y_{n_k}\| \leq \|B_{n_k}\|_{\mathcal{L}(H)} \|A y_{n_k} - \eta\| + \|B_{n_k} \eta\|$$
$$\leq \left[\sup_{n\in\mathbb{N}} \|B_n\|\right] \|A y_{n_k} - \eta\| + \|B_{n_k} \eta\|$$

Por el principio de acotamiento uniforme $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|B_n\| < \infty$ mientras que $B_{n_k} \xrightarrow{s} 0$, por las hipótesis.

Así obtenemos una contradicción y en consecuencia para cada $\varepsilon > 0$, sólo existe un número finito de términos para los cuales $\|B_n A\| \geq \varepsilon$. Esto nos dice que $\lim_{n \to +\infty} \|B_n A\| = 0$. Cuando $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, este lema tiene una reformulación importante para lo que seguirá en los siguientes capítulos.

Corolario:

Sean A, y $\{B_n\}$ operadores sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, tales que A es compacto y B_n converge fuertemente a B. Entonces $\{AB_n\}$ converge en norma de operadores de AB.

Mediante este lema, veremos ahora que la subordinación entre dos operadores está fuertemente relacionada con ciertas propiedades de compacidad.

Proposición (A.3)

Sean $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}$ y J como antes, las condiciones siguientes son equivalentes.

1) Para algún $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, es compacto. $(\mathcal{H} - z_0)^{-1} J - J(\mathcal{H}_0 - z_0)^{-1}$

2) Para algún $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, y $\forall$ intervalo acotado I, a) $\{(H-z_0)^{-1}J - J(H_0-z_0)^{-1}\}P_0(I)$ es compacto.

b) $P(I)\{(H-z_0)^{-1}J - J(H_0-z_0)\}$ es compacto.

3) a) H y H_0 son mutuamente subordinados con J.

b) Para algún $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ y para todo intervalo acotado I, $P(I)\{(H-z_0)^{-1}J - J(H_0-z_0^{-1}\}P_0(I)$ es compacto.

Demostración:

Obviamente $1 \Rightarrow 2$

Es suficiente con demostrar que $2 \Rightarrow 1$ y que 2 a) es equivalente a que H es J subordinado con H_0 y 3(c), ya que simplemente intercambiando los papeles de H por H_0 y J por J^* se deduce que 2 (b) es equivalente a que H_0 es J^* subordinado a H y 3 (c) lo cual significa que 2 es equivalente a 3 y por tanto quedará demostrado la proposición.

Pongamos $R(z) = (H-z)^{-1}$; $R_0(z) = (H_0-z)^{-1}$. por de intervalos acotados I_1 y I_2

Cuando $I_1 \to \infty$ por (A.4) y (A.5). De este modo, veremos que se cumple la condición (A.5)

H es J subordinado a H_0 y 3(b) ⇒ (2a):
Para toda pareja de intervalos I_1, I_0

$$\| (R(z)J - J R_0(z)) P_0(I_0) - P(I_1)(R(z)J - J R_0(z)) P_0(I_0) \|$$
$$= \| P(I_1^c) R(z) J P_0(I_0) - \{P(I_1^c) J P_0(I_0)\} R_0(z) \|$$
$$\leq \| P(I_1^c) R(z) \| \, \| J P_0(I_0) \| + \| P(I_1^c) J P_0(I_0) \| \, \| R_0(z) \|$$

El primer término tiende al cero, cuando $I_1 \to \infty$ por (A.4), mientras que el segundo tiende al cero por (A.3)

3(b) nos dice entonces que $(R(z)J - J R_0(z)) P_0(I_0)$ es el límite en norma de operadores compactos, y esto prueba 2(a) y la proposición.

En esta misma proposición pusimos en la condición (a) "para algún $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $R(z)J - JR_0(z)$ es compacto". Pero si $R(z)J - JR_0(z') - JR_0(z')$ es compacto.

$$\begin{aligned}
(R(z')J - JR_0(z')) &= R(z')J + (z'-z)R(z')JR_0(z') - JR_0(z') \\
&\quad - (z'-z)R(z')J - R_0(z') \\
&= (R(z')J\,[\mathbb{1} + (z'-z)R_0(z')] - [\mathbb{1} + (z'-z)R(z')] \\
&\quad \cdot JR_0(z') \\
&= R(z')J\,[(H_0 - z') + (z'-z)]\,R_0(z') \\
&\quad - [(H - z') + (z' - z)]\,R(z')JR_0(z') \\
&= R(z')J(H_0 - z)R_0(z) - (H - z)R(z')JR_0(z') \\
&= (H - z)R(z')\,[R(z)J(H_0 - z)R_0(z') - JR_0(z')] \\
&= (H - z)R(z')\,[R(z)J - JR_0(z)]\,(H_0 - z)R_0(z')
\end{aligned}$$

$$(A.6)$$

Entonces, $R(z')J - JR_0(z')$ es compacto, ya que $(H - z')R(z)$ es acotado si $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Se obtiene entonces que $R(z)J - JR_0(z)$ es compacto $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Antes de poder aplicar la proposición A.3, daremos un lema que nos caracteriza el espectro esencial de un operador autoadjunto H sobre $\mathcal{H}$, en base a las funciones de

$$C_{0}(\mathbb{R}).$$

Proposición (A.4)

Sea A un operador autoadjunto sobre $\mathcal{H}$. Entonces la parte del espectro de A en (a,b) es puramente discreta si y solo si $f(A)$ es compacto para cada función continua f con $\subset (a,b)$.

Demostración:

Supongamos que $\operatorname{supp} f \subset (a,b)$. Entonces si f es continua, existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < c < d < b$ y $\operatorname{supp} f \subset [c,d]$. Si A tiene espectro puramente discreto en (a,b), entonces existen solamente un número finito de puntos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \sigma(A) \cap [c,d]$ puesto que ningún punto en $[c,d]$ es un punto límite de $\sigma(A)$, ya que estamos suponiendo que A tiene espectro puramente puntual en (a,b). Pero incluso, el rango de cada proyección espectral $P(\lambda_i)$ es de dimensión finita. Y por lo tanto $f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) P(\lambda_i)$ es un operador de rango finito y en consecuencia también compacto.

Inversamente, supongamos que cada $f(A)$ con $\operatorname{supp} f \subset (a,b)$ es compacto. Tomemos $[c,d] \subset (a,b)$ y f una función positiva y continua con $0 \le f \le 1$, $f = 1$ si $c \le x \le d$ y $\operatorname{supp} f \subset (a,b)$. Entonces, si $P(x \le d)$ es la proyección espectral del operador A, tenemos que $P([c,d]) f(A) = P([c,d])$. Entonces $P([c,d])$ es de dimensión finita. Como $\operatorname{Ran} P(k_1) \supset \operatorname{Ran} P(k_2)$ si $k_1 > k_2$. Entonces para cada $\lambda \in (c,d)$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña tenemos que $\operatorname{Ran} P([c,d]) \supset \operatorname{Ran} P(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$. Por consiguiente

$$\lim \operatorname{Ran} P(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) < +\infty$$

lo cual nos dice que cualquier $\lambda \in (c,d)$ pertenece a la resolvente de A o al espectro discreto de A. Esto prueba el lema.

Lo que nos dice este lema es que el espectro esencial de un operador autoadjunto A es el complemento del abierto más grande $O \subset \mathbb{R}$ tal que $f(A)$ sea compacto $\forall\, f \in C_\infty(\mathbb{R})$ con soporte contenido en O.

Proposición (A.5.)

Sea f una función en $L^2(\mathbb{R}^\nu) \cap L^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ y $Q(R)$ una función positiva que tiende al infinito cuando $|R| \to +\infty$, entonces el operador de $L^2(\mathbb{R}^\nu) = \mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$, definido por

$$[f(Q(R)+i\mathbb{I})^{-1}]\phi = f(x)\{[Q(R)+i\mathbb{I}]^{-1}\hat{\phi}\}^{\vee}(x) \tag{A.7}$$

es compacto. Donde $\wedge$ y $\vee$ denotan transformada de Fourier y su inversa de la función entre los paréntesis.

Demostración:

Sea B_R la bola en $\mathbb{R}^\nu$ de radio R. Entonces el operador $f(Q(R)+i\mathbb{I})^{-1}F\{B_n, R\}$ es de Hilbert (8) Schmidt. Para ver esto, hacemos el siguiente calculo: Si $\psi \in \mathcal{H}$

$$\{f(Q(R)+i\mathbb{I})^{-1}F\{B_n,R\}\psi\}^{\wedge}(k)$$

$$= \{ \hat{f} * [(Q(R)+i\mathbb{I})^{-1} F\{B_n, R\} \varphi]^{\wedge} \}(R)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} \hat{f}(R-R') \hat{\varphi}\, F\{B_n, R'\}(Q(R')+i\mathbb{I})^{-1} d^\nu R'$$

Entonces el operador $f(Q(R)+i\mathbb{I})^{-1}F\{B_n, R\}$ es unitariamente equivalente al operador integral.

$$\psi \to \int_{\mathbb{R}^\nu} \hat{f}(R-R') F\{B_n, R'\}(Q(R')+i\mathbb{I})^{-1} \psi(R') d^\nu R'$$

cuyo kernel es $\hat{f}(k-k') F\{B_n, R'\}(Q(R)+i\mathbb{I})^{-1}$ y como

$$\| \hat{f}(R-R') F\{B_n, R'\}(Q(R')+i\mathbb{I})^{-1} \|^2_{L^2}$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu} d^\nu R\, d^\nu R' \, |\hat{f}(R-R')|^2 \, |F\{B_n, R'\}|^2$$
$$= \|f\|^2 \, \|F\{B_n, R\}\|^2 < +\infty$$

De esta forma se obtiene que $f(Q(R)+i\mathbb{I})^{-1} F\{B_n, R\}$ es de Hilbert Schmidt y por lo tanto compacto.

Entonces $\forall \varphi \in \mathcal{U}$, usando el teorema de Plancherel,

$$\| \{ f(Q(R)+i\mathbb{I})^{-1} - f(Q(R)+i\mathbb{I})^{-1} F\{B_n, R\} \} \varphi \|$$
$$= \| f(Q(R)+i\mathbb{I})^{-1} F\{B_n^c, R\} \varphi \| \leq \|f\|_\infty \| (Q(R)+i\mathbb{I})^{-1} F\{B_n^c, R\} \varphi \|$$
$$= \|f\|_\infty \| (Q(R)+i\mathbb{I})^{-1} F\{B_n^c, R\} \hat{\varphi} \| \leq \|f\|_\infty \sup_{R \in B_n^c} |(Q(R)+i\mathbb{I})^{-1}| \, \|\varphi\|$$

B_n^c es el complemento en $\mathbb{R}^\nu$ de B_n.

Consecuentemente,

$$\| f(Q(R)+i\mathbb{I})^{-1} - f(Q(R)+i\mathbb{I})^{-1} F\{B_n, R\} \|_{\mathcal{B}(\mathcal{U})} \to 0 \quad n \to +\infty$$

ya que $\phi(R) \to +\infty$ cuando $|R| \to +\infty$.

Entonces existe una sucesión de operadores compactos que convergen en norma. Se desprende que el operador definido en (A.7) es compacto

▲

Proposición (A.6)

Sean H_0, H autoadjuntos y J como antes. Tales que

1) Para algún (o para todo) $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $R(z)J - JR_0(z)$ es compacto.

2) Para toda $f \in C_{00}(\mathbb{R})$, $(\mathbb{I} - J^*J)f(H_0)$ es compacto.

3) Para todo $f \in C_{00}(\mathbb{R})$ $f(H)(\mathbb{I} - JJ^*)$ es compacto.

Entonces 1 y 2 implican que $\sigma_{ess}(H_0) \subset \sigma_{ess}(H)$ 1 y 3 implican que $\sigma_{ess}(H) \subset \sigma_{ess}(H_0)$.

Demostración:

Es suficiente con demostrar que la primera aserción es cierta pues la segunda se demuestra intercambiando los papeles entre H por H_0 y J por J^*.

Primero veamos que la sola hipótesis 1 implica que $f(H)J - Jf(H_0)$ es compacto $\forall f \in C_{\infty}(\mathbb{R})$. En efecto, sea $\mathfrak{F}$ el conjunto de funciones de $f \in C_{\infty}(\mathbb{R})$ tales que $f(H)J - Jf(H_0)$ y $f(H_0)J^* - J^*f(H)$ son compactos. Veamos que $\mathfrak{F}$ es un $*$ álgebra cerrada de funciones complejas. Supongamos que $f_n \in \mathfrak{F}$ y $f_n \to f$ en $C_{\infty}(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\| f(H)J - Jf(H_0) - (f_n(H)J - Jf_n(H_0)) \|$$

$$\mathcal{G}(H_0, H)$$

$$\leq \| f - f_n \|_{\infty} \| J \| + \| J \| \| f - f_n \|_{\infty} \to 0 \quad n \to \infty$$

Entonces $f(H)J - Jf(H_0)$ es compacto. Análogamente para $f(H)J^* - J^*f(H_0)$. $\mathfrak{F}$ es entonces cerrada. Además, si $f, g \in \mathfrak{F}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ trivialmente deducimos que $f+g \in \mathfrak{F}$, $\lambda f \in \mathfrak{F}$. De la identidad

$$f(H)g(H)J - Jf(H_0)g(H_0) = f(H)\{g(H)J - Jg(H_0)\} + \{f(H)J - Jf(H_0)\}g(H_0)$$

y de una análoga para J^* obtenemos que $fg \in \mathfrak{F}$. Así vemos que $\mathfrak{F}$ es un álgebra. Denotemos por $\bar{f}$ la función compleja conjugada de f. Puesto que $\bar{f}(H) = f(H)^*$, $\bar{f}(H_0) = f(H_0)^*$ obtenemos que para $f \in \mathfrak{F}$

$$\{\bar{f}(H)J - J\bar{f}(H_0)\}^* = -\{f(H_0)J^* - J^*f(H)\} = \text{compacto}.$$

Así $\bar{f}(H)J - J\bar{f}(H)$ es compacto porque su adjunto es compacto. Similarmente, $\bar{f}(H_0)J^* - J^*\bar{f}(H)$ es compacto. En consecuencia, $\mathfrak{F}$ es un álgebra compleja conteniendo las funciones $(z \pm i)^{-1}$ y polinomios de estas funciones por la hipótesis 1 y la nota 2

Por el teorema de Stone-Weirstrass, $\mathcal{G} = C_{\infty}(\mathbb{R})$

Sean ahora $f \in C_{\infty}(\mathbb{R})$ con $f(\mathcal{H})$ compacto, como $f(\mathcal{H}_0) = (\mathbb{I} - J^* J) f(\mathcal{H}_0) - J^*(f(\mathcal{H})J - J f(\mathcal{H}_0)) + J^* f(\mathcal{H}) J$.

De la hipótesis 2 se desprende que $f(\mathcal{H}_0)$ es compacto. Con esto vemos que si $f \in C_c(\mathbb{R})$ y $f(\mathcal{H})$ es compacto, $f(\mathcal{H}_0)$ es compacto. De la proposición (A.4) y la nota 3 concluimos que $\sigma_{ess}(\mathcal{H}_0) \subset \sigma_{ess}(\mathcal{H})$.

Proposición (A.7)

Sean $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}$ y J como antes.
Supongamos que existe un subespacio $\mathcal{D}$ de $\mathcal{H}_0$ tal que:

1) $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{H}_{0,ac} = \operatorname{Ran} P_{ac}(\mathcal{H}_0)$

2) $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ e I_1, I intervalos acotados,
$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| P(I_1)(\mathcal{H}J - J\mathcal{H}_0) e^{-it\mathcal{H}_0} P_0(I) P_{0,ac}(\mathcal{H}_0) \varphi \| < \infty$

3) $\mathcal{H}$ es J subordinado a $\mathcal{H}_0$.

4) $\underset{t \to \pm\infty}{s\text{-}\lim} (\mathbb{I} - J^* J) e^{it\mathcal{H}_0} P_{0,ac} = 0$

Entonces los operadores de onda generalizados, definidos por:
$\Omega^{\pm}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0; J) := \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim} e^{it\mathcal{H}} J e^{-it\mathcal{H}_0} P_{0,ac}(\mathcal{H}_0)$ existen y son isome-

trías.

Demostración:

Como $e^{itH}Je^{-itH_0}$ es acotado uniformemente, es suficiente con demostrar la convergencia fuerte para un conjunto denso en $H_{0,ac}$. Por ejemplo:
$D_1 = \bigcup_I \{P_0(I)H_{0,ac}(H_0)\varphi;\ \varphi \in D\}$ y para φ en D_1, φ está en el rango de $P_0(I)$, entonces.

$$e^{itH}Je^{-itH_0}\varphi = e^{itH}Je^{-itH_0}P_0(I)\varphi = P(I_1^c)e^{itH}Je^{-itH_0}P_0(I)\varphi + P(I_1)e^{itH}Je^{-itH_0}P_0(I)\varphi$$

y
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P(I_1)e^{itH}Je^{-itH_0}P_0(I)\varphi &= iHe^{itH}P(I_1)Je^{-itH_0}P_0(I)\varphi \\ &\quad - ie^{itH}P(I_1)Je^{-itH_0}H_0P_0(I)\varphi \\ &= ie^{itH}[HP(I_1)Je^{-itH_0}H_0P_0(I)\varphi - \\ &\qquad P(I_1)Je^{-itH_0}H_0P_0(I)\varphi] \\ &= ie^{itH}P(I_1)[HJ - JH_0]e^{-itH_0}P_0(I)\varphi\end{aligned}$$

Para tal φ,
$$\begin{aligned}\{e^{itH}Je^{-itH_0} - e^{isH}Je^{-isH_0}\}\varphi &= P(I_1^c)e^{itH}Je^{-itH_0}P_0(I)\varphi \\ &\quad - P(I_1^c)e^{isH}Je^{-isH_0}P_0(I)\varphi \\ &\quad + i\int_s^t e^{i\tau H}P(I_1)[HJ - JH_0]e^{-i\tau H_0}P_0(I)\varphi\, d\tau\end{aligned}$$
y
$$\begin{aligned}\|\{e^{itH}Je^{-itH_0} - e^{isH}Je^{-isH_0}\}\varphi\| &\le 2\|P(I_1^c)JP_0(I)\| \\ &\quad + \int_s^t d\tau\, \|P(I_1)[HJ - JH_0]e^{-i\tau H_0}P_0(I)P_{0,ac}\varphi\|.\end{aligned}$$

Como H es J subordinado a H_0, dado $\varepsilon > 0$, tomando I_1 suficientemente grande sabemos que $\|P(I_1^c)JP_0(I)\| \le \varepsilon/4$ y de la hipótesis 2, podemos tomar T_0 suficientemente grande tal que si: $|t|, |s| > T_0$ entonces:

$$\int_s^t \| P(I_1)[HJ - JH_0] e^{-itH_0} P_0(I) P_{0,ac} \varphi \| < \varepsilon/2$$

Esto prueba que $e^{itH} J e^{-itH_0} \varphi$ es una sucesión de Cauchy cuando $(s|,|t|) \to \pm\infty$. Entonces $s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH} J e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)$ existen. La segunda conclusión resulta de que.

$$\begin{aligned}
&\| e^{itH} J e^{-itH_0} P_{ac}(H_0) \varphi \|^2 - \| P_{ac}(H_0) \varphi \|^2 = \\
&= (e^{itH} J e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi, e^{itH} J e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi) - (P_{ac}(H_0)\varphi, P_{ac}(H_0)\varphi) \\
&= (J e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi, J e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi) - (e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi, P_{ac}(H_0) e^{-itH_0}\varphi) \\
&= (e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi, J^* J e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi) - (e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi, e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi) \\
&= (e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi, (J^* J - I) e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi) \to 0, \quad t \to \pm\infty
\end{aligned}$$

cuando $t \to \pm\infty$ por 4. Esto prueba que $\Omega^{\pm}(H, H_0; J)$ son isometrías.

Definición A.2 Sea A un operador autoadjunto, $P_{cont}(A)$ denota la proyección sobre todos los vectores φ cuya medida espectral no tiene puntos puros, es decir, $P_{cont}(A)$ es la proyección sobre el complemento ortogonal de eigenvectores de A.

Proposición A.8 Sea A un operador auto-adjunto y sea C uno acotado, tal que $C(A+i)^{-1}$ es compacto. Entonces $\forall\ \varphi \in P_{cont}(A)\mathcal{H}$:

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt \, \| C e^{-itA} \varphi \|^2 \to 0$$

conforme $T \to +\infty$

Demostración : Puede ser hallada en [12].

Proposición A.9 Sea $W \in L^2_u$, es decir

$$\int_C |V(x)|^2 d^\nu x \leq M \text{ donde}$$

C es cualquier cubo unitario en $\mathbb{R}^\nu$. Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$, $2N > \nu$, $H_0 = P(-i\nabla)$ con $P(k) = k^{2N}$. Entonces, para $\varphi \in D(H_0)$

a) φ es continua y para cualquier $a > 0$ existe $b > 0$ independiente de φ tales que
$\|\varphi\|_\infty \leq a \|H_0 \varphi\| + b \|\varphi\|$

b) Dado $\varepsilon > 0$, existe C_ε tal que $\forall\ \varphi \in D(H_0)$

$$\|W\varphi\| \leq \varepsilon \|H_0 \varphi\| + C_\varepsilon \|\varphi\|.$$

c) Sea

$$|||W|||^2_{u,2} = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^\nu} \int_{C_\alpha} |W(x)|^2 d^\nu x < +\infty$$

Entonces

$$\|W(H_0 + \mathbb{1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C |||W|||_{u,2}$$

donde C es independiente de W.

Demostración: La demostración puede ser hallada en < 5 > ▲

Referencias

Libros

[1] Amrein, W. O. Non relativistic Quantum Mechanics Volum II, D. Reidel Publishing Company, 1981

[2] Amrein, W. O.; Jauch Josef M. y Sinha Kalyan B. Scattering Theory in Quantum Mechanics, W. A. Benjamin Inc. 1977

[3] Courant, Richard and John Fritz. Introduction to Calculus and Analysis Voumen II. Wyley Interscience Publication 1974.

[4] Davies, E. B. Quantum Theory for Open Systems. Academic Press 1978.

[5] Deift, P. Classical Scattering Theory with a Trace Condition. Princeton Series in Physics. Princeton University.

[6] EMCH, C. G. Algebraic Methods in Statistical Physics and Quantum Field Theory. Wiley Interscience Publication 1972.

[7] Kato, Tosio. Perturbation Theory for linear Operators. 2ª Edición. Springer Verlag 1976.

[8] ———. Topics in Functional Analysis. I. Gohberg M. Kac. Academic Press, 1978. pp. 185 - 195.

[9] Lax, Peter D; Phillips, Ralph. Scattering Theory for Automorphic Functions. Princeton University.

[10] Mackey, G. W. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, W. A. Benjamin Publications, 1969.

[11] Piron, C. Foundations of Quantum Mechanics W. A. Benjamin, 1969.

[12] Reed, Michael; Simon, Barry. Methods of Modern Mathematical Physics Volumen I, II, III, IV.

[13] Rudin, Walter. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill Publishing Co. Ltd, 1978.

[14] Wiener, N. The Fourier Integral and Certain of its Application. Cambrige, University Press, London, 1979.

Articulos

<1> Agmon, S. Spectral properties of Schrodinger operators and scattering theory. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. II, 2 pp 151-218 (1975)

<2> Alsholm, P. and G. Schmidt: Spectral and Scattering theory for Schrödinger operators, Arch. Rational Mech. Anal. 40 pp. 281-311 (1971)

<3> Amrein, W. O., D. B. Pearson, M. Wollenberg: Evanescence of states and asymptotic completeness, Helvetica Physica acta. 50 pp. 355 (1980)

<4> Amrein, W., V. Georgescu: Bound states and scattering theory in quantum mechanics, Helvetica Phys Acta 46 pp 633-658 (1973).

<5> Arredondo, Juan Héctor: Tesis. "Teoría de Perturbaciones del espectro continuo y operadores de onda".

<6> Avron, J y B, Simon: Schrodinger operators with magnetic fields I. General Interactions. Duke Math. J. 45 (1978).

<7> Basdevant, J. L., B. W. Lee: Padé aproximations and bound states: Exponential potential, Nuclear Phys. B 13 pp 182-188 (1969).

<8> Bertero, M., G. Talenti, G. A. Viano: Eigenfunction expansions associated with Schrodinger two-particle operators. Nuovo Cimento A 62 (1969)

<9> Branges de L: Perturbations of self adjointe transformations. Amer. J. Math. 84 pp. (1962)

<10> Birman, M. A criterion for the existence of wave operators. Izv. Akad. Nauk, SSSR Ser. Mat. 27 (1963)

<11> _______. A local criterion for the existence of wave operators. Izv. Akad. SSSR Ser. Mat. 32 (1968)

<12> _______; S. B. Entina: Stationary approach in the abstract theory of scattering. Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 155 (1964)

<13> Chadam, J. M: The asymptotic behavior of the Klein-Gordon equation with external potential I, II. J. Math. Anal. Appl. 31, pp (1978)

<14> _______. Pacific J. Math. 31 (1969)

<15> chisholm, J.R. Solution of linear integral equations using Padé aproximations and the Jost function. Nuovo Cimento A 61 (1969)

<16> Chandler, C. Invariance principle for scattering theory with long range potentials. Indiana Univ. Math. J. 25 (1976)

<17> Davies, E.B: On Enβ approach to scattering theory. Duke Math. J. 47 (1980)

<18> Dirac, P. A: The principles of Quantum Mechanics. Oxford Press, London 1935

<19> Eckardt, K. J. On the existence of wave operators for Dirac operators. Math. Z. 139 (1974)

<20> Enß, V. Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering I. Short range potentials. Comm. Math. Phys. 61 (1978)

<21> ________. Singular and long range potentials, Ann. Phys. 119 (1979)

<22> ________. A new method for asymptotic completeness. Mathematical problems in Theoretical Phys. K. Osterwalder ed., Lecture Notes in Phys. 116 (1980).

<23> ________. Bound states on total cross sections by geometrical methods. Phys. Rev. Lett. 44 (1980)

<24> ________. Finite total cross sections in non relativistic quantum mechanics. Comm. Math. Phys. 76 (1980)

<25> ________. Total cross sections in non relativistic scattering theory. Plenum, New York (1980).

<26> Faris, W. Perturbations of non-normalizable eigenvectors. Helvetica Physica Acta 44 (1971)

________. Time decay and the Born series. Rocky Mountain. J. Math. 1 (1971)

<28> Gellman, M., M. L. Goldberg: The formal theory os scattering theory. Phys. Rev. 91 (1953)

<29> Ginibre, J. La méthode dependant du temps dans le probléme de la complétude asymptotique. Univ. Paris - Sud Lpt He 8018 (1980)

<30> Green, T. Rigourous derivation of the phase shift formula for the Hilbert space scattering operator of a single particle. J. Math. Phys. 1 (1960)

<31> Grossman, A. Schrodinger scattering amplitude I. J. Math. Phys. 3 (1961)

<32> Guillot, J. C. Spectral and scattering theory for Dirac operators. Arch. Rational Mech. Anal. 55 (1974)

<33> Herbst, I. Unitary equivalence of Stark Hamiltonians. Math. Zeit. 155 (1977)

<34> Hormander, L. Existence of wave operators in scattering theory, Math. Zeit. 146 (1976)

<35> Ikebe, T. Eigenfunction expansions associated with the Schrodinger operators and their applications to scattering theory. Arch. Rational Mech. Anal. 5 (1960)

<36> ______. Remarks on the ortogonality of eigenfunctions for the Schrodinger operator. J. Fac. Sci, Tokio Univ. 117 (1970)

<37> ______. On the phase shift formula for scattering theory. Pacific. J. Math. 15 (1965)

<38> Jager, W. Zur theorie der Schwingungsleichung mit variablen koeffizienten in Aussengebieten Math. Z. 102 (1967)

<39> Kuroda, S. Stationary theory of scattering and

eigenfunctions I, II. Sugaku. 18 (1966)
<40> ________. Perturbation of eigenfunction expansions. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 57 (1967)
<41> ________. An abstract theory to perturbation of continuous spectra and scattering theory. J. Analys. Math. 20 (1967)
<42> Kato, Tosio. On finite dimensional perturbations of self adjoint operators. J. Math. Soc. Japan 9 (1967)
<43> ________. Perturbations of continuous spectra by trace class operators. Proc. Soc. Japan Acad. 33 (1957)
<44> ________. Wave operators and unitary equivalence. Pacific. J. Math. 15 (1965)
<45> ________. Spectral and scattering theory for the self adjoint operators associated with the perturbed Klein-Gordon type equations. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Select. IA Math. 23 (1976).
<46> ________ Wave operators and similarity for some non-self adjoint operators. Math. Ann. 162 (1966)
<47> ________ Smooth operators and commutators, Studia Math. 31 (1968)
<48> Lavine, R. Absolute continuity of Hamiltonian operators with repulsive potentials. Proc. Amer. Math. Soc. 22 (1968)

<49> ________. Commutators and scattering theory II. A class of one Body problems. Math. Phys. 14

<50> ________. Completeness of the wave operators in the repulsive potentials. J. Math. Phys. 14 (1973).

<51> ________. Commutators and scattering theory: Repulsive interactions I. Comm. Math. Phys. 20 (1969).

<52> Lipmann, B. A., J. Schwinger. Variational principles for scattering processes I. Phys. Rev. 79 (1950).

<53> Lundberg, L. Espectral and scattering theory for the Klein-Gordon equation. Comm. Math. Phys. 31 (1973)

<54> Matveev, V. B. The invariance principle for generalized wave operators. Topics Math. Phys. 5 (19)

<55> ________. Theoret. and Math. Phys. 8 (1971)

<56> Mochinzuki, K. On the perturbation of continuous spectrum of the Dirac operators. Proc. Japan Acad. 40 (1964)

<57> Mourre, E. Link between the geometrical and the spectral transformation approached in scattering theory. Comm. Math. Phys. 40 (1974)

<58> Pearson, D. B. General theory of potential scattering with absortion at local singular.

Helvetica Physica Acta. 47pp. 249-264 (1974).

⟨59⟩ ___. A generalization of Birman's trace theorem. J. Functional Anal. 28 pp. 182-186 (1978).

⟨60⟩ Perry, P. A. Mellin transforms and scattering theory, I. Short range potentials. Duke Math. J. 47pp. 187-193 (1980).

⟨61⟩ Povzner, A. Ya. Om the expansion of arbitrary functions in terms of the eingen functions of the operatos-u cu. Math. Sb. 32 pp. (109)-(106) (1953).

⟨62⟩ ___. On eingenfunction expansions in terms of scattering solutions. Dokl. A Nauk. SSSR. 104 (1955).

⟨63⟩ Prosser, R. Relativistic potential scattering. J. Mathematical Phys. 4pp. 1048-1054 (1963).

⟨64⟩ Putnam, R. Continuovos spectra by unbounded operators I, II. J. Math.

Soc. Japan 11 pp. 247-262 (1959).

<65> Rejto, P.A. On gentle perturbations I, II. Comm. Pure Appl. Math. 16 pp. 279-303 (1963).

<66> ____. On partly gentle perturbations I, II, III. J. Math. Anal. Appl. 17, 20, 27 pp. 453-462, 145-187, 21-67 (1967), (1967), (1969).

<67> Rollnik, M. Stremaxima und gebundene Zustande. Z. Phys. 145 pp. 639-653 (1956).

<68> Rosenblum, M. Perturbations of continuous spectrum and unitary equivalence. Pacific J. Math. 7 pp. 997-1010 (1957).

<69> Sakanovich, L.A. The invariance principle for generalized wave operators. Functional Anal. Appl. 5 pp. 49-55 (1971).

<70> Scadron, M., S. Weinberg y J. Wright: Functional analysis and scattering theory. Phys. Rev..

135 pp. B202-B207 (1964).

<71> Schechter, M. Letters Math. Phys. 3 pp. 521 (1979).

<72> ___. The Klein-Gordon equation and scattering theory. ANN. Pyhs. 101 pp. 601-691 (1976).

<73> Simon, B. Phase space analysis of simple scattering systems: extensions of some work of Enss. Duke Math. J. 46 pp. 119-168 (1979).

<74> Strauss, w. Scattering for hiperbolic equations. Trans. Amer. Math. Soc. 108 pp. 13-37 (1963).

<75> schwartz, J. Some non-self ajoint operators. Comm. Pure Appl. Math. 13

<76> pp. 609-639 (1960).

<77> Strichartz, R. Multipliers on fractional Sobolev spaces. J. Math. Mech. 16 1031-1060 (1967).

<78> Tohe, D. Eigenfunction expansions associated with Schrodinger operators in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$. Arch. Rational. Mech. Anal. 26 pp. 335-356 (1967).

<79> ___. Spectral theory for the wave equation with a potential term. Arch. Rational Mech. Anal. 22 pp. 364-406 (1966).

<80> Thompson, M. Eigenfunction expansions and the associated scattering theory for the potential perturbations of the Dirac equation. Quart. J. Math. Oxford Ser. 23 pp. 17-55 (1972).

<81> Veselic, K. A spectral theory for the Klein-Gordon equation with an external electrostatic potential. Nuclear Phys. A 147 pp. 215-224 (1970).

<82> ___. y J. Weidmann: Existenz der Wellenoperatoren f'ur eine Allgemeine Klasse von Operatoren. Math. Z. 134 pp. 225-274 (1973).

<83> ___. Asymptotic estimates of wave

operators. J. Functional Analysis 17 pp. 61-77 (1974).

⟨84⟩ Weder, R. Self adjointness and invariance of the essential spectrum for the Kleun-Gordon equation. Helvetica. Phys. Acta. 50 pp. 100-117 (1977).

⟨85⟩ ——. Scattering theory for the Klein-Gordon equation. J. Functional Analusis. 27 (1978).

⟨86⟩ ——. Spectral properties of the Dirac Hamiltonians. Ann. Soc. Sci. Bruxwlles Ser. I 87 pp. 341-355 (1973).

⟨87⟩ Weidmann, J. Zur Spektral Theorie von Sturm-Liouville Operatores. Math. Z. 98 pp. 268-273 (1967).

⟨88⟩ Wollenberg, M. The invariance principle for wave operators. Pacific J. Math. 59 pp. 303 (1975).

⟨89⟩ Ya faev, P.A. On the proof of Enss of asymptotic completeness in potential scattering theory. Leningrad Branch Mathematical institute E-279 (1979).

⟨90⟩ ___ . A remark concerning the theory of scattering for perturbated poly-harmonic operator. Math Notes 15pp. 260-265 (1974).

⟨91⟩ Yamada, O. On the principle of limiting absortion for the Dirac operators. Publ. Res. Inst. Math Sci. 8pp. 557-577 (1972 /73).

⟨92⟩ Zemach, C. y A. Klein: The born expansions in non-relativistic quantum theory I. Nuovo Cimento. 10 pp. 1018-1087 (1958).