UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TOPOLOGÍAS Y MORFISMOS GEOMÉTRICOS

TESIS QUE PARA OBTENER EL
TÍTULO DE MAESTRO EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS)

PRESENTA:

LEOPOLDO ROMÁN CUEVAS

1982.

INDICE

INTRODUCCION

El propósito de este trabajo es definir el concepto de topología sobre un topo y ver la relación que hay entre este concepto y el de morfismo geométrico. Algunos resultados que se probarán en 3 son válidos en cualquier categoría C que tenga límites finitos.

La Teoría de los topos ha tenido un desarrollo bastante grande durante los últimos cinco años; aquí no se intentará dar una introducción extensa de la teoría. Los resultados que aparecen en el capítulo 1 son los que nos ayudarán para desarrollar los siguientes capítulos.

En (iii), por ejemplo, se pueden encontrar algunos resultados básicos de la Teoría de los Topos que no se prueban aquí. El material del trabajo está ordenado de la siguiente manera.

En 2 se define el concepto de topología sobre un topo y se prueba que la categoría $\underline{E}(\Sigma^{-1})$ tiene límites finitos.

En 3 se define el concepto de gavilla y se prueba que la subcategoría plena $Sh_j(\underline{E})$ es reflexiva y además es un topo.

En 4 se define la topología inducida por una monada exacta izquierda. Por último, en 5 se prueba el teorema de factorización de morfismos geométricos de Lawvere y Tierney, Supondremos que el lector está familiarizado con el material que aparece en (iv).

Agradecimientos

Deseo agradecer a Alejandro Odgers, director de esta tesis, la ayuda y la atención que me dio durante el desarrollo de este trabajo.

Notación

$\underline{E}$ siempre denotará a un topo; a no ser que se diga lo contrario.

$\mathcal{O}(\underline{E})$ son los objetos de $\underline{E}$

Si $f:A \longrightarrow B$ es un morfismo escribiremos $f:A \rightarrowtail B$, $f:A \twoheadrightarrow B$ y $f:A \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ para denotar a un monomorfismo, epimorfismo y bimorfismo respectivamente.

Si F,G son dos funtores $F \dashv G$ significa que F es un adjunto izquierdo de G.

Si el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ D & \longrightarrow & C \end{array}$$

es un producto fibrado entonces lo denotaremos de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & \text{P.F.} & \downarrow \\ D & \longrightarrow & C \end{array}$$

> The theory of abelian categories served as the "right" generalization for the category of abelian groups. So topoi serve for-no less-the categories of sets...
>
> P. Freyd.

1.1. Definición

Una categoría $\underline{E}$ se dice que es un topo (elemental) si:

i) $\underline{E}$ tiene límites finitos.

ii) $\underline{E}$ es cartesiana cerrada; i.e., para cada objeto X se tiene un funtor exponencial $(-)^X\ \underline{E} \longrightarrow \underline{E}$ que es adjunto derecho del funtor $(-)\times X$.

iii) $\underline{E}$ tiene un clasificador de subobjetos; i.e., un objeto Ω y un morfismo $1 \xrightarrow{t} \Omega$ (llamado "verdad") tal que, para cada monomorfismo $\sigma : Y \longrightarrow X$ en $\underline{E}$ existe un único morfismo $\chi_\sigma : X \longrightarrow \Omega$ (llamado el morfismo característico de σ) que hace al cuadrado

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, tail, "\sigma"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & X \arrow[d, "\chi_\sigma"] \\ 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

un producto fibrado.

Antes de seguir desarrollando la teoría de los topos veremos algunos conceptos que necesitaremos después.

1.2. Definición

Una relación de equivalencia es una categoría $\underline{C}$ es una pareja de monomorfismos

$$K \overset{k_0}{\underset{k_1}{\rightrightarrows}} A$$

tal que para toda $X \in \mathcal{O}(C)$

$$\hom_C(X,K) \xrightarrow[\langle \hom(1,k_0),\ \hom(1,k_1)\rangle]{} \hom_C(X,A)\times\hom_C(X,A)$$

describe una relación de equivalencia en el conjunto $\hom_C(X,A)$. ◊

1.3. Definición

Un par núcleo para un morfismo $f:A \longrightarrow B$ en C es una pareja de morfismos $K \overset{k_0}{\underset{k_1}{\rightrightarrows}} A$, tal que $fk_0 = fk_1$ y que es universal con esta propiedad.

Nota.

Si C tiene productos fibrados entonces k_0, k_1 puede obtenerse tomando el producto fibrado siguiente:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k_0} & A \\ {\scriptstyle k_1}\downarrow & \text{P.F.} & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

1.4. Proposición

En un topo $\underline{E}$ todo monomorfismo es un igualador.

Demostración.

Sea $f:\Lambda' \rightarrowtail \Lambda$ un monomorfismo arbitrario, consideremos el siguiente producto fibrado

$$\begin{array}{ccc} \Lambda' & \xrightarrow{f} & \Lambda \\ \downarrow & \text{P.F.} & \downarrow \chi_f \\ 1 & \xrightarrow[t]{} & \Omega \end{array} \qquad \ldots (1)$$

entonces f es el igualador de χ_f y $\Lambda \xrightarrow{!_\Lambda} 1 \xrightarrow{t} \Omega$.

En efecto, es claro que $\chi_f f = t_\Lambda f$. Si $r:X \to \Lambda$ es tal que $\chi_f r = t_\Lambda r = t(!)_X$ entonces como (1) es un producto fibrado existe un único morfismo $s:X \to \Lambda'$ tal que $fs = r$.

1.5. Corolario

Un topo es equilibrado (i.e., un morfismo que es monomorfismo y epimorfismo es un isomorfismo).

Demostración

Si e es el igualador de una pareja de morfismos f,g y además es un epimorfismo entonces f=g y por lo tanto e es un isomorfismo.

1.6. Definición

Sea $\underline{E}$ un topo, definimos el morfismo "singleton" $\{\cdot\}_\Lambda:\Lambda \to \Omega^\Lambda$

como el adjunto exponencial del morfismo $S_A: A\times A \longrightarrow \Omega$ que es el morfismo característico del morfismo diagonal $A \xrightarrow{\Delta} A\times A,\ \Delta = \langle 1_A, 1_A\rangle$.

1.7. Proposición

El morfismo $\{\cdot\}_A : A \longrightarrow \Omega^A$ es un monomorfismo.

Demostración

Para todo morfismo $u: X \longrightarrow A$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\langle u, 1_X\rangle"] \arrow[d, "u"'] & A\times X \arrow[d] \\ A \arrow[r, "\Delta"', "\Delta_A"] & A\times A \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. Entonces, si $u, u': X \longrightarrow A$ es una pareja de morfismos tal que $\{\cdot\}u = \{\cdot\}u'$ entonces $\langle u, 1_X\rangle = \langle u', 1_X\rangle$ y por lo tanto $u = u'$.

Para todo objeto A de $\underline{E}$ consideremos la counidad de la adjunción $\Omega^A\times A \xrightarrow{ev_A} \Omega$; este morfismo clasifica a un monomorfismo $u \xrightarrow{u_A} \Omega^A\times A$. Deseamos mos construir para cada monomorfismo $k: B' \longrightarrow B$ un morfismo $\exists_k : \Omega^{B'} \longrightarrow \Omega^B$. Este morfismo se obtiene de la siguiente manera: Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "u_{B'}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & 1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "t"] & 1 \arrow[dd, "t"] \\
\Omega^{B'}\times B' \arrow[r, "eu_{B'}"] \arrow[d, "1\times k"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \Omega & \\
\Omega^{B'}\times B \arrow[rr, dashed, "e_k"'] & & \Omega
\end{tikzcd}$$

entonces $\exists_k:\Omega^{B'} \longrightarrow \Omega^B$ es el transpuesto de e_k. A $\exists_k$ se le llama la imagen directa.

Construiremos para cada morfismo $f:X \longrightarrow Y$ un morfismo $\Omega^f:\Omega^Y \longrightarrow \Omega^X$ como sigue: $\Omega^f:\Omega^Y \longrightarrow \Omega^X$ es el transpuesto de la composición

$$\Omega^Y\times X \xrightarrow{1\times f} \Omega^Y\times Y \xrightarrow{ev} \Omega$$

Estos dos morfismos nos servirán para demostrar que $\underline{E}$ tiene colímites finitos. Para esto necesitaremos algunos resultados auxiliares.

1.8. Proposición (Condición de Beck para $\exists$)

Si el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
C' \arrow[r, hook, "m"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & C \arrow[d, "g"] \\
B' \arrow[r, hook, "k"'] & B
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, donde k (y por lo tanto m) es un monomorfismo entonces el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \Omega^{B'} \arrow[r, "\exists_k"] \arrow[d, "\Omega^{g'}"'] & \Omega^{B} \arrow[d, "\Omega^{g}"] \\ \Omega^{C'} \arrow[r, "\exists_m"'] & \Omega^{C} \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración

La igualdad $\Omega^g \exists_k = \exists_m \Omega^{g'}$ se seguirá de la igualdad $e_k(g\times 1) = e_m(1\times\Omega^{g'})$ o de los subobjetos caracterizados por sus transpuestos. Consideremos los diagramas

$$\begin{tikzcd} & U_{B'} \arrow[r] \arrow[d, "u_{B'}"] & 1 \arrow[dd, "t"] \\ \Omega^{B'}\times C' \arrow[r, "1\times g'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \Omega^{B'}\times B' \arrow[d, "1\times k"] \arrow[ur, phantom, "\text{P.F.}"] & \\ \Omega^{B'}\times C \arrow[r, "1\times g"'] & \Omega^{B'}\times B \arrow[r, "e_k"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & U_{C'} \arrow[r] \arrow[d, "U_{C'}"] & 1 \arrow[dd, "t"] \\ \Omega^{B'}\times C' \arrow[r, "\Omega^{g'}\times 1"] \arrow[d, "1\times m"'] & \Omega^{C'}\times C' \arrow[d, "1\times m"] & \\ \Omega^{B'}\times C \arrow[r, "\Omega^{g'}\times 1"'] & \Omega^{C'}\times C \arrow[r, "e_m"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

. . . (2)

Demostraremos ahora que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{B'}\times C' \arrow[r, "\Omega^{g'}\times 1"] \arrow[d, "1\times m"'] & \Omega^{C'}\times C' \arrow[d, "1\times m"] \\
\Omega^{B'}\times C \arrow[r, "\Omega^{g'}\times 1"'] & \Omega^{C'}\times C
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. En efecto, el cuadrado es, evidentemente, conmutativo. Si $\Lambda \xrightarrow[\langle\mu_1,\mu_2\rangle]{} \Omega^{C'}\times C'$ y $\Lambda \xrightarrow[\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle]{} \Omega^{B'}\times C$ es una pareja de morfismos tal que

$\langle\mu_1, m\mu_2\rangle = \langle\Omega^{g'}\sigma_1, \sigma_2\rangle$ entonces el morfismo $\langle\sigma_1,\mu_2\rangle$ es tal que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[dr, dashed, "\langle v_1,u_2\rangle"] \arrow[drr, bend left, "\langle u_1,u_2\rangle"] \arrow[ddr, bend right, "\langle v_1,v_2\rangle"'] & & \\
& \Omega^{B'}\times C' \arrow[r, "\Omega^{g'}\times 1"] \arrow[d, "1\times m"] & \Omega^{C'}\times C \arrow[d, "1\times m"] \\
& \Omega^{B'}\times C \arrow[r, "\Omega^{g'}\times 1"'] & \Omega^{C'}\times C
\end{tikzcd}$$

El morfismo es claramente único. Demostraremos ahora que ev_B es "dinatural" en su argumento B, i.e., el diamante

$$\begin{tikzcd}
& \Omega^{B'}\times B' \arrow[dr, "ev_{B'}"] & \\
\Omega^{B'}\times C' \arrow[ur, "1\times g'"] \arrow[dr, "\Omega^{g'}\times 1"'] & & \Omega \\
& \Omega^{C'}\times C' \arrow[ur, "ev_{C'}"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. ◊

Este resultado es inmediato a partir de la definición de $\Omega^{g'}$. En consecuencia, tomar el producto fibrado de $t:1 \longrightarrow \Omega$ con la composición que aparece en la parte superior del diamante o con la parte inferior del diamante nos da el mismo resultado. Si se toma el producto fibrado de t con $ev_{B'}$ obtenemos $U_{B'}$, si se hace con $ev_{C'}$ obtenemos $U_{C'}$; Por lo tanto los vértices que faltan en (2) son iguales y por lo consiguiente $e_k(1\times g) = e_m(\Omega^{g'}\times 1)$.

1.9. Corolario.

Si $k:B' \rightarrowtail B$ es un monomorfismo entonces la composición

$$\Omega^{B'} \xrightarrow{\exists_k} \Omega^{k} \longrightarrow \Omega^{B'}$$

es la identidad

Demostración

Como k es un monomorfismo entonces el cuadrado

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & B' \arrow[d, tail, "k"] \\ B' \arrow[r, tail, "k"'] & B \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado; además $\exists_1 = 1$ y $\Omega^1 = 1$.

Para demostrar que un topo $\underline{E}$ tiene colímites finitos usaremos el teorema de Beck (véase IV).

Antes de esto veremos algunas definiciones.

1.10. Definición

Una monada o un "triple" en una categoría C consiste de un endofuntor $T:C \longrightarrow C$ y dos transformaciones naturales $\mu:T^2 \longrightarrow T$ y $\eta:T \longrightarrow T$ que satisface

$$\mu T_\mu = \mu\cdot\mu T:T^3 \longrightarrow T \qquad \mu\cdot\eta T = 1 = \mu\cdot T\eta\cdot T \longrightarrow T$$

Una adjunción arbitraria $\langle F,G,\eta,\varepsilon\rangle$

$$X \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} A \qquad \eta:1 \longrightarrow GF \qquad \varepsilon:FG \longrightarrow 1$$

donde $F \dashv G$, unidad η y counidad ε determina una monada $\langle T,\eta,\mu\rangle$ donde $T = GF$, $\eta = \eta$ y $\mu_X = G\varepsilon_{FX}:GFGFX \longrightarrow GFX = TX \quad X \in \mathcal{O}(C)$

Recíprocamente, una monada $\langle T,\eta,\mu\rangle$ determina una adjunción $C \underset{G^T}{\overset{F^T}{\rightleftarrows}} C^T$, $\eta^T:1 \longrightarrow G^TF^T$, $\varepsilon^T:F^TG^T \longrightarrow 1$ donde C^T es la categoría de todas las T-álgebras. (Véase (iv) capítulo VI).

De aquí en adelante (a no ser que se diga lo contrario) la referencia es la misma.

Dado un funtor $G:\underline{A} \longrightarrow C$ que posee un adjunto izquierdo, podemos construir una monada $\langle T,\eta,\mu\rangle$ y el diagrama de categorías

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r, shift left, "k"] \arrow[d, shift left] & C^T \arrow[l, dashed, shift left, "L"] \arrow[d, shift left, "G^T"] \\ C \arrow[u, shift left] \arrow[r, "="'] & C \arrow[u, shift left, "F^T"] \end{tikzcd} \qquad \langle T,\eta\mu\rangle \text{ en } C \qquad \ldots (3)$$

donde el funtor comparación K, definido por

$$KA = \langle GA,\ G\varepsilon_A : GFGA \longrightarrow GA\rangle \qquad A \in \mathcal{O}(\underline{A})$$

satisface $KF = F^T$ y $G^TK = G$.

1.11. Definición

El funtor G se dice que es (fuertemente) monádico si G tiene un ajunto izquierdo y el funtor comparación K es un isomorfismo; también, G es una equivalencia monádica (tripleable) si G tiene un adjunto izquierdo y K es una equivalencia de categorías.

1.12. Proposición

Un funtor fuertemente monádico refleja límites.

Antes de dar el teorema de Beck necesitaremos una definición.

1.13 Definición

Una pareja de morfismos $s,t:A \longrightarrow B$ en una categoría $\underline{A}$ tal que existe un morfismo $d:B \longrightarrow A$ con $sd = 1 = td$ se llamará una pareja reflexiva.

1.14. Teorema (Beck)

Sean $G:\underline{A} \longrightarrow C$ un funtor con ajunto izquierdo, T la monada correspondiente en C y $K:\underline{A} \longrightarrow C^T$ el funtor comparación, como en (3). Entonces

i) Si $\underline{A}$ tiene coigualadores para toda pareja reflexiva, K tiene un adjunto izquierdo L.

ii) Si además G preserva estos coigualadores, la unidad de esta adjunción es un isomorfismo natural $\eta_0:1 \cong KL$.

iii) Si además G refleja isomorfismos, entonces la counidad de esta adjunción es un isomorfismo natural $\varepsilon_0:LK \cong 1$

Dadas todas estas hipótesis, la conclusión afirma que KL y LK son naturalmente isomorfas a los funtores identidad, lo cual significa que K es una equivalencia de categorías.

1.15. Corolario

Si la categoría $\underline{A}$ tiene coigualadores para cualquier pareja reflexiva y el funtor $G:\underline{A} \longrightarrow C$ tiene un adjunto izquierdo, refleja isomorfismos y preserva coigualadores para cada pareja reflexiva, entonces G es una equivalencia monádica.

Podemos ahora demostrar que todo topo $\underline{E}$ tiene colímites finitos. Esto nos dirá en particular, que $\underline{E}$ tiene un objeto inicial 0, coproductos finitos, coigualadores y coproductos fibrados. Comenzaremos con el siguiente teorema.

1.16. Teorema

El funtor potencia $P:\underline{E}^{op} \longrightarrow \underline{E}$ tiene un adjunto izquierdo; a saber, $P^{op}:\underline{E} \longrightarrow \underline{E}^{op}$. ($P(A) = \Omega^{A}$ y $P(f) = \Omega^{f}$ $\forall A \in \mathcal{O}(\underline{E})$ $\forall f \in \mathrm{Mor}(\underline{E})$).

Demostración

Se sabe que todo funtor $T:\underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ determina un funtor opuesto $T^{op}:\underline{C}^{op} \longrightarrow \underline{D}^{op}$. En particular, el funtor $P:\underline{E}^{op} \longrightarrow \underline{E}$ determina también un funtor P^{op}, que es el "mismo" funtor pero que está considerado como una acción en $\underline{E}$ y no en $\underline{E}^{op}$. Ahora bien para toda $A,B \in \mathcal{O}(\underline{E})$ se tienen los siguientes isomorfismos naturales:

$$\underline{E}(A,\Omega^B) \cong \underline{E}(B\times A,\Omega) \cong \underline{E}(A\times B,\Omega) \cong \underline{E}(B,\Omega^A) = \underline{E}^{op}(\Omega^A,B)$$

1.17. Teorema

El funtor $P:\underline{E}^{op} \longrightarrow \underline{E}$ es una equivalencia monádica.

Demostración

Demostraremos que P es fiel. Para cada morfismo $h:B \longrightarrow A$ en $\underline{E}$ construiremos un monomorfismo $\langle h,1\rangle\ B \longrightarrow A\times B$. Consideremos los siguientes cuadrados.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "h"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_A"] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & 1 \arrow[d, "t"] \\
A\times B \arrow[r, "1\times h"'] & A\times A \arrow[r, "S_A"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$$A \xrightarrow{\{\cdot\}_A} \Omega^A \xrightarrow{\Omega^h} \Omega^B$$

Entonces si $h,k:B \longrightarrow A$ son dos morfismos tales que $Ph=Pk$ entonces $Ph\{\cdot\}_A = Pk\{\cdot\}_A$ y por lo tanto $h = k$.

Usaremos el teorema de Beck para demostrar que P es una equivalencia monádica. Notemos que $\underline{E}^{op}$ tiene coigualadores para cualquier pareja reflexiva y que son igualadores en $\underline{E}$. Como P es fiel entonces P refleja isomorfismos ya que todo isomorfismo es un monomorfismo y un epimorfismo. Finalmente, consideremos un coigualador en $\underline{E}^{op}$ de alguna pareja reflexiva; esto significa que en $\underline{E}$ se tiene un diagrama

$$C \xrightarrow{g} B \overset{h}{\underset{k}{\rightrightarrows}} A$$

y un morfismo $d:A \longrightarrow B$ tal que $dh = dk = 1_B$.

Probaremos que $\Omega^A \overset{\Omega^h}{\underset{\Omega^k}{\rightrightarrows}} \Omega^B \xrightarrow{\Omega^g} \Omega^C$ es un coigualador en $\underline{E}$. En efecto, como el diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, tail, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & B \arrow[d, tail, "h"] \\ B \arrow[r, tail, "k"'] & A \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado ya que si $f, f':C \longrightarrow B$ es una pareja de morfismos tal que $hf = kf'$ entonces $dhf = dkf'$ y por lo tanto $f = f'$. Al ser g el igualador de (h,k) existe un único morfismo s tal que $f = gs = f'$. Por último la proposición 1.8 y el corolario 1.9 nos asegura que los diagramas

$$\begin{tikzcd} \Omega^B \arrow[r, "\Omega^g"] \arrow[d, "\exists h"'] & \Omega^C \arrow[d, "\exists g"] \\ \Omega^A \arrow[r, "\Omega^k"'] & \Omega^B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega^C \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "="'] & \Omega^B \arrow[d, "\Omega^g"] \\ & \Omega^C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega^A \arrow[r, "\exists h"] \arrow[dr, "="'] & \Omega^B \arrow[d, "\Omega^h"] \\ & \Omega^A \end{tikzcd}$$

son conmutativos, i.e., tenemos un "Splitfork" (véase iv)

$$\Omega^A \xleftarrow{\exists h} \Omega^B \xleftarrow{\exists g} \Omega^C$$

$$\Omega^g \exists g = 1 \qquad \Omega^h \exists_h = 1 \qquad \Omega^k \exists h = \exists_g \Omega^g$$

Por lo tanto P preserva coigualadores. En consecuencia, por el teorema de Beck P es una equivalencia monádica.

1.18. Corolario

Un topo $\underline{E}$ tiene colímites finitos.

Con este resultado podemos probar el siguiente

1.19. Teorema (Kelly-Tierney)

Todo morfismo en un topo se puede factorizar como un epimorfismo seguido de un monomorfismo. (Esta factorización es única salvo isomorfismos por el corolario 1.5).

Demostración

Dado $f:X \longrightarrow Y$, formamos el diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\ & & Q \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

donde (a,b) es el par núcleo de f y q es el coigualador de (a,b). Necesitamos demostrar que i es un monomorfismo. Supongamos que se tiene $T \overset{c}{\underset{d}{\rightrightarrows}} Q$ tal que $ic = id$. Consideremos el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\langle g,h\rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & T \arrow[d, "\langle c,d\rangle"] \\ X\times X \arrow[r, "q\times q"'] & Q\times Q \end{tikzcd}$$

entonces $fg = iqg = ice = ide = fh$ por lo tanto $\langle g,h\rangle$ se factoriza a través de $R \xrightarrow{\langle a,b\rangle} X\times X$ (digamos por $S \xrightarrow{k} R$).

Ahora $ce = qg = qak = qbk = qh = de$; pero $q\times q$ es un epimorfismo ya que $(q\times q) = (q\times 1_Q)(1_X\times q)$ y cada factor es un epimorfismo por la definición de un topo. En consecuencia e es un epimorfismo y por lo tanto $c = d$.

Hemos usado aquí que el producto fibrado de un epimorfismo es un epimorfismo. Este resultado no lo demostraremos aquí pero se puede encontrar, por ejemplo, en (i).

1.20. Corolario

En un topo todo epimorfismo es un coigualador.

Demostración.

Supongamos que f es un epimorfismo en el diagrama que aparece en el teorema anterior entonces i es un isomorfismo y por lo tanto f es el coigualador de su par núcleo.

Comúnmente escribiremos la (epimorfismos, monomorfismos)-factorización de un morfismo $f:A \longrightarrow B$ en un topo como

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr, "f^*"'] & & B \\ & f(A) \arrow[ur, "\mathrm{im} f"'] & \end{tikzcd}$$

Con este resultado podemos probar la siguiente proposición.

1.21. Proposición

Para cada objeto A en un topo el conjunto parcialmente ordenado Sub(A) o P(A) de los subobjetos de A es una red y para cada morfismo $k:A \longrightarrow B$, el producto fibrado "a través" de k es un morfismo $k^{-1}:P(B) \longrightarrow P(A)$ de redes y por lo tanto es un funtor.

La propiedad de la imagen demuestra que M es una mínima cota superior de S y T. En consecuencia Sub(A) es una red (de hecho una red con cero $0 \longrightarrow A$ y uno $A \xrightarrow{1} A$).

Podemos demostrar que todo morfismo $0 \longrightarrow A$ es un monomorfismo. Para esto demostraremos que $0 \simeq 0\times A \xrightarrow{V} A \in \mathcal{O}(\underline{E})$; en efecto, para todo objeto B de E $\hom_{\underline{E}}(0,B^A)$ tiene un sólo elemento pero $\hom_{\underline{E}}(0,B^A) \simeq \hom_{\underline{E}}(0\times A,B)$. Por lo tanto $0\times A$ es un objeto inicial y en consecuencia $0\times A \simeq 0$. Ahora todo morfismo $A \xrightarrow{f} 0$ es un isomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "\pi_0"] & 0 \times A \arrow[r, "\pi_A"] & A \\
& A \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "\langle f,1\rangle"'] \arrow[ur, "1_A"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces $\pi_A\langle f,1\rangle = 1$ y como $0\times A$ es inicial $\langle f,1\rangle \pi_A = 1_{0\times A}$ lo cual implica que $\langle f,1\rangle = \pi_A^{-1}$ y por lo tanto $0\times A \simeq A$.

Por último dado $f:0 \longrightarrow a$ arbitrario, supongamos que $fg=fh$ es decir, el diagrama

$$b \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} 0 \longrightarrow a$$

es conmutativo. Pero entonces $b \simeq 0$ y en consecuencia $g=h$.

Consideremos ahora cualquier morfismo $k: A \longrightarrow B$. Como el producto fibrado de un monomorfismo $T \rightarrowtail B$ a lo largo de k es necesariamente un monomorfismo $S' \longrightarrow A$ y como el producto fibrado preserva inclusiones de subobjetos entonces k^{-1} es un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados y por lo tanto de redes.

Para construir un adjunto izquierdo $\exists_k$ de k^{-1} consideremos lo siguiente: Sea $u: S \rightarrowtail A$ un subobjeto de A arbitrario, su imagen bajo k es la imagen de la composición ku y por lo tanto esta imagen es un subobjeto de B que escribiremos como $m: \exists_k S \rightarrowtail B$, donde $ku = me$

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "u"] \arrow[dr, two heads, "e"'] & A \arrow[r, "k"] & B \\
& \exists_k S \arrow[ur, hook, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Para todo subobjeto $v: T \rightarrowtail B$ y su producto fibrado $k^{-1}T$ el diagrama ,

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[rrr, bend left, "e"] & k^{-1}T \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & T \arrow[d, "v"] & \exists_k S \arrow[l, dashed, "g"'] \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[r, "="'] & A \arrow[r] & B \arrow[r, "="'] & B
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. De esto se infiere una correspondencia

$$g \in \hom_{\underline{B}}(\exists_k S, T) \longmapsto f \in \hom_{\underline{A}}(S, k^{-1}T)$$

de la siguiente manera. Cualquier morfismo g de subobjetos de B tiene la propiedad $vge = me = ku$. Como $k^{-1}T$ es un producto fibrado esto determina un único morfismo f que hace conmutativo los triángulos correspondientes. Recíprocamente, todo morfismo $f: S \longrightarrow k^{-1}T$ de subobjetos de A genera una factorización de ku a través del monomorfismo $v: T \longrightarrow B$ ya que el diagrama.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "u"] \arrow[dr] \arrow[dd, "f"'] & A \arrow[r, "k"] & B \\
& \exists_k S \arrow[ur, hook, "m"'] \arrow[dd, dashed, "g"] & \\
k^{-1}T \arrow[dr, hook] & & \\
& T \arrow[uuur, bend right, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por lo tanto existe un único morfismo $g: \exists_k S \longrightarrow T$ tal que $m = vg$. Esto demuestra que la correspondencia $g \longmapsto f$ es una biyección y por lo tanto una adjunción.

Construiremos ahora un morfismo $\wedge: \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$. $\wedge$ es el morfismo característico de $\langle t,t\rangle: 1 \longrightarrow \Omega\times\Omega$. Entonces dados dos subobjetos $X \xrightarrow{r} A$ y $T \xrightarrow{s} A$ de A se tiene que

$$\wedge\langle \chi_r, \chi_s\rangle = \chi_{r\cap s}$$

En realidad, se puede demostrar que Sub(A) es un álgebra de Heyting pero esto no lo usaremos en lo que resta del trabajo. Denotaremos por $P_\sim(A)$ a $P(A) = \mathrm{Sub}(A)$ módulo la identificación de objetos isomorfos.

Objetos Inyectivos.

1.22. Proposición

En todo topo $\underline{E}$, Ω es inyectivo.

Demostración

Dados $A \overset{r}{\rightarrowtail} B$ y $A \xrightarrow{s} \Omega$ consideremos

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, tail, "u"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & A \arrow[d, "s"] \\ 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, tail, "ru"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & B \arrow[d, "\chi_{ru}"] \\ 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

demostraremos que $A \longrightarrow B \longrightarrow \Omega = A \xrightarrow{s} \Omega$. Para esto sólo es necesario notar que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1"'] & A \arrow[d, tail, "h"] \\ A' \arrow[r, "ru"'] & B \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. En efecto, el cuadrado es conmutativo y si $X \xrightarrow{z} A$, $X \xrightarrow{y} A'$ es una pareja de morfismos tal que $rz = ruy$ entonces $z = uy$. Por lo tanto Ω es inyectivo.

1.23. Corolario

En todo topo $\underline{E}$, Ω^C es inyectivo.

Demostración

Dado $A \rightarrowtail B$ deseamos demostrar que la función $\hom_{\underline{E}}(B,\Omega^C) \longrightarrow \hom_{\underline{E}}(A,\Omega^C)$ es suprayectiva. Pero el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
\hom_{\underline{E}}(B,\Omega^C) & \longrightarrow & \hom(A,\Omega^C) \\
\wr\downarrow & & \downarrow\wr \\
\hom(B\times C,\Omega) & \longrightarrow & \hom(A\times C,\Omega)
\end{array}$$

es conmutativo y $A\times C \rightarrowtail B\times C$ es un monomorfismo.

1.24. Proposición

Todo objeto puede incluirse en un inyectivo.

Demostración

Sea $B \in \mathcal{O}(\underline{E})$ arbitrario. Consideremos $\{\cdot\}_B : B \longrightarrow \Omega^B$; por el corolario anterior Ω^B es inyectivo.

Por último daremos la definición de morfismo geométrico.

1.25. Definición

Sean $\underline{E}$ y $\underline{F}$ topos. Un morfismo geométrico $\underline{F} \xrightarrow{f} \underline{E}$ consiste de una pareja de funtores $f_*:\underline{F} \longrightarrow \underline{E}$, $f^*:\underline{E} \longrightarrow \underline{F}$ tales que $f^* \dashv f_*$ y f^* es exacto izquierdo.

TOPOLOGIA EN UN TOPO.

2.1. Definición.

Una topología en un topo $\underline{E}$ es una operación cerradura exacta izquierda y natural bajo productos fibrados, en cada red $P_\sim(A)$, $A \in \mathcal{O}(\underline{E})$.

Una operación cerradura $\overline{\cdot}$ en $P_\sim(A)$ que sea exacta izquierda significa que $\overline{A' \cap A''} = \overline{A'} \cap \overline{A''}$ $\forall A', A'' \in P_\sim(A)$; que sea natural bajo productos fibrados significa que si $f:A \to B$ es un $\underline{E}$- morfismo el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} P_\sim(B) & \xrightarrow{f^{-1}(\cdot)} & P_\sim(A) \\ {\scriptstyle\overline{\cdot}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\cdot}} \\ P_\sim(B) & \xrightarrow[f^{-1}(\cdot)]{} & P_\sim(A) \end{array}$$

es decir, $\overline{f^{-1}(B')} = f^{-1}(\overline{B'})$ $\forall$ $B' \in P_\sim(B)$.

2.2. Proposición.

Una topología definida en un topo $\underline{E}$ induce un morfismo $j:\Omega \to \Omega$ que satisface las siguientes propiedades:

i) $jt = t: 1 \to \Omega$

ii) $jj = j:\Omega \to \Omega$

iii) $\wedge(j\times j) = j\wedge : \Omega\times\Omega \to \Omega$

Recíprocamente, un morfismo $j:\Omega \to \Omega$ que satisface las tres propiedades anteriores determina una topología $\overline{\cdot}$ en $\underline{E}$.

Demostración

Sea $\overline{\cdot}$ un operador cerradura exacto izquierdo y natural bajo productos fibrados y consideremos la cerradura $\overline{1} \xrightarrow{\overline{t}} \Omega$ de $t:1 \to \Omega$. Sea $j = X_{\overline{t}}:\Omega \to \Omega$ el morfismo característico de $\overline{t}$ entonces j cumple lo siguiente:

i) $jt = t$

En efecto, como $1 \leq \overline{1}$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, dashed, "v"'] \arrow[dr, bend left, "t"] & \\
\overline{1} \arrow[r, "\overline{t}"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
1 \arrow[r, "t"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ $jt = t$

ii) $jj = j$

Se tiene que $\overline{j^{-1}(t)} = \overline{t} = j^{-1}(\overline{t})$. Por lo tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\overline{1} \arrow[r, "\overline{t}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
\overline{1} \arrow[r, "\overline{t}"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. En consecuencia el diagrama

$$\begin{tikzcd} \overline{T} \arrow[r, "\overline{t}"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "j"] \\ \overline{T} \arrow[r, "\overline{t}"'] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "j"] \\ 1 \arrow[r, "\overline{t}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. $j^2 = j$

iii) $\wedge(j\times j) = j\wedge$

Tenemos que $\overline{\overline{T}\cap\overline{T}} = \overline{T}\cap\overline{T} = \overline{T}$

$\therefore \wedge\langle j,j\rangle = j$

$\therefore j\wedge = \wedge\langle j,j\rangle\wedge = \wedge(j\times j)\langle 1_\Omega, 1_\Omega\rangle\wedge$

pero el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\langle t,t\rangle"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\wedge"] \\ 1 \arrow[r, "t"'] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\langle 1_\Omega, 1_\Omega\rangle"] \\ 1 \arrow[r, "\langle t,t\rangle"'] & \Omega\times\Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado ya que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "t"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\langle 1_\Omega, 1_\Omega\rangle"] \\ 1 \arrow[r, "\langle t,t\rangle"'] & \Omega\times\Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado

$\therefore \langle 1_\Omega, 1_\Omega\rangle = 1_\Omega\times 1_\Omega$

$\therefore j\wedge = \wedge(j\times j)$

Es necesario hacer notar que en esta demostración no se usó que la operación cerradura es exacta izquierda.

Recíprocamente, dado $j:\Omega \to \Omega$ que satisface (i), (ii) y (iii); sea $\Lambda' \rightarrowtail \Lambda$ un subobjeto de Λ con morfismo característico $\alpha:\Lambda \to \Omega$. Definiremos una operación cerradura en $P_{\kappa}(\Lambda)$ de la siguiente manera:

$\overline{\Lambda'}$ es el subobjeto de Λ clasificado por $j\alpha:\Lambda \to \Omega$, entonces se cumple lo siguiente:

i) $\Lambda' \leqslant \overline{\Lambda'} \quad \forall \quad \Lambda' \in P_{\kappa}(\Lambda)$

En efecto, por definición de $\overline{\Lambda'}$ se sabe que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\overline{\Lambda'} \arrow[r, tail, "\overline{f}"'] \arrow[d] & \Lambda \arrow[d, "j\alpha"] \\
1 \arrow[r, "t"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado; como α es el morfismo característico de $f:\Lambda' \rightarrowtail \Lambda$ entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Lambda' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \Lambda \arrow[d, "\alpha"] \\
1 \arrow[r, "t"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado

$\therefore\ j\alpha f = jt! = t! \quad \therefore \quad \exists!\ f':\Lambda' \to \overline{\Lambda'} \ni \overline{f}\, f' = f \ \therefore \Lambda' \leqslant \Lambda'$

ii) $\overline{\overline{\Lambda'}} = \overline{\Lambda'}$

Por definición de la operación se sabe que los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
\overline{A'} \arrow[r, "\overline{f}"'] \arrow[d] & A \arrow[d, "j\alpha"] \\
1 \arrow[r, "t"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\overline{\overline{A'}} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "j(j\alpha)"] \\
1 \arrow[r, "t"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

son productos fibrados, pero $jj = j \quad \therefore \; j(j\alpha) = jj\alpha = j\alpha$

$$\therefore \; \overline{\overline{A'}} = \overline{A'}$$

iii) $\overline{A' \cap A''} = \overline{A'} \cap \overline{A''} \quad \forall \; A', A'' \in P_{\sim}(A)$

Sean $f : A' \rightarrowtail A$ y $g : A'' \rightarrowtail A$ dos subobjetos arbitrarios. Se sabe que $\chi_{f \cap g} = \wedge \langle \chi_f, \chi_g \rangle$

$$\therefore \; \chi_{\overline{f} \cap \overline{g}} = \wedge \langle j\chi_f, j\chi_g \rangle = \wedge (j \times j) \langle \chi_f, \chi_g \rangle = j \wedge \langle \chi_f, \chi_g \rangle$$

$$= j \, \chi_{f \cap g} = \chi_{\overline{f \cap g}}$$

$$\therefore \; \overline{f} \cap \overline{g} = \overline{f \cap g}$$

iv) Si $f : A \rightarrow B$ entonces el cuadrado

$$
\begin{tikzcd}
P_{\sim}(B) \arrow[r, "f^{-1}(\cdot)"] \arrow[d, "-"'] & P_{\sim}(A) \arrow[d, "-"] \\
P_{\sim}(B) \arrow[r, "f^{-1}(\cdot)"'] & P_{\sim}(A)
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo.

Sea $g:B' \rightarrowtail B$ un subobjeto de B entonces se tiene que:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B') \arrow[r, "f^{-1}(g)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \arrow[d, "f"] \\ B' \arrow[r, tail, "g"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f^{-1}(B') \arrow[r, tail, "f^{-1}(g)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \arrow[d, "\chi_{f^{-1}(g)}"] \\ 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \overline{f^{-1}(B')} \arrow[r, "\overline{f^{-1}(g)}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \arrow[d, "j\chi_{f^{-1}(g)}"] \\ 1 \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

pero $\chi_{f^{-1}(g)} = \chi_g f$ ya que

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B') \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \arrow[d, "f"] \\ B' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & B \arrow[d, "\chi_g"] \\ 1 \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado y por definición $f^{-1}(\overline{B}')$ es el subobjeto clasificado por $j\chi_g f$ que es igual a $j\chi_{f^{-1}(g)}$

$\therefore\ \overline{f^{-1}(B')} = f^{-1}(\overline{B}')$

$\therefore\ \overline{\ \ }$ es una topología

A partir de esta demostración es claro que la condición de "exactitud izquierda" que se le pide al operador es superflua.

2.3. Definición

Sea j una topología en $\underline{E}$. Se dice que un subobjeto $A' \rightarrowtail A$ de A es denso si $\overline{A'} = A$; A' es un subobjeto cerrado si $\overline{A'} = A'$.

Deseamos dar una caracterización para ver cuando un subobjeto de un objeto A es denso o cerrado. Para esto sea $J \rightarrowtail \Omega$ el subobjeto de Ω clasificado por j (i,e, J es la cerradura de $t: 1 \to \Omega$). Sea $\Omega_j \to \Omega$ el igualador de $\Omega \underset{j}{\overset{1}{\rightrightarrows}} \Omega$. (Como $jj = j$ se puede definir Ω_j como la imagen de j).

Se tiene la siguiente proposición que nos da un criterio para decidir cuando un subobjeto es cerrado o denso.

2.4. Proposición

Sea $A' \rightarrowtail A$ un subobjeto arbitrario de A entonces A' es denso sii su morfismo característico $A \underset{\alpha}{\to} \Omega$ se factoriza a través de J. A' es cerrado sii α se factoriza a través de Ω_j.

Demostración

Si $\overline{A'} = A$ entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow j\alpha \\ 1 & \xrightarrow[t]{} & \Omega \end{array}$$

es un producto fibrado

$\therefore \quad j\alpha = t! \quad . \ . \ . \ (1)$

Como J es la cerradura de t entonces el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\overline{t}} & \Omega \\ \downarrow & & \downarrow j \\ 1 & \xrightarrow[t]{} & \Omega \end{array}$$

es un producto fibrado.

Por (1) existe un único morfismo $\alpha':A \to J$ tal que $\overline{t}\alpha' = \alpha$.

Supongamos ahora que α se factoriza a través de J

$\therefore \quad \alpha = \overline{t}\alpha' \quad . \ . \ . \ (2)$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1} & A \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ J & \xrightarrow[\overline{t}]{} & \Omega \end{array}$$

es un producto fibrado.

En efecto, el diagrama es conmutativo por (2). Si $x:\Lambda' \to \Lambda$ y $y:\Lambda' \to J$ son dos morfismos tales que el diagrama exterior

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda' \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "x"] \arrow[ddr, bend right, "y"'] & & \\
& \Lambda \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\alpha'"] & \Lambda \arrow[d, "\alpha"] \\
& J \arrow[r, "\overline{t}"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo entonces $\alpha x = \overline{t}y$ y como $\overline{t}\alpha' = \alpha$ concluimos que

$$\overline{t}\alpha' x = \overline{t}y \quad \therefore \quad \alpha' x = y$$

$\therefore$ el diagrama es un producto fibrado. $\therefore$ Λ' es denso.

Si Λ' es cerrado entonces el cuadrado

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda' \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda \arrow[d, "j\alpha"] \\
1 \arrow[r, "t"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado.

En consecuencia $j\alpha = \alpha$ $\therefore$ α se factoriza a través de Ω_j.

Si α se factoriza a través de $\mathrm{Equ}(j,1_\Omega)$ entonces $j\alpha = \alpha$ $\therefore$ Λ' es cerrado.

2.5. Lema

Sean $C \overset{h}{\rightarrowtail} B$ y $B \overset{k}{\rightarrowtail} A$ subobjeto densos de B y A respectivamente entonces la composición $C \overset{h}{\rightarrowtail} B \overset{k}{\rightarrowtail} A$ es un subobjeto denso de A. (i.e. la composición de subobjetos densos es denso).

Demostración.

Claramente $k^{-1}(C \overset{kh}{\rightarrowtail} A) = C \overset{h}{\rightarrowtail} B$ en $P_{\sim}(B)$, por lo tanto

$$\overline{C \rightarrowtail B} = \overline{k^{-1}(C \rightarrowtail A)} = k^{-1}(\overline{C \rightarrow A})$$

pero $\overline{C \rightarrowtail B} = B$ ya que C es denso en B. Por lo tanto $B = k^{-1}(\overline{C \rightarrow A})$ en particular $B \leq k^{-1}(\overline{C \rightarrow A})$. Aplicamos la adjunción $\exists_k \dashv k^{-1}$ para obtener

$$\exists_k(B) \leq \overline{C \rightarrow A} \text{ en } P_{\sim}(A)$$

Pero $\exists_k B = B \overset{k}{\rightarrowtail} A$, por lo tanto

$$B \rightarrowtail A \leq \overline{C \rightarrowtail A}$$

Como el operador cerradura es monótono, se obtiene que

$$\overline{B \rightarrowtail A} \leq \overline{\overline{C \rightarrow A}} = \overline{C \rightarrow A}$$

pero al ser B denso en A el lado izquierdo de la desigualdad es igual a A, en consecuencia C es denso en A.

En la definición de topología se pide que el operador cerradura "conmute" con el funtor $k^{-1}: P_\sim(A) \longrightarrow P_\sim(B)$ si $k: B \longrightarrow A$ es un $\underline{E}$- morfismo. El siguiente resultado afirma que el adjunto izquierdo de k^{-1} conmuta con el operador cerradura en ciertos casos.

2.6. Lema.

Si $B \overset{k}{\rightarrowtail} A$ es un subobjeto cerrado, entonces $\exists_k : P_\sim(B) \longrightarrow P_\sim(A)$ conmuta con el operador cerradura.

Demostración

Sea $C \rightarrowtail B$ un subobjeto arbitrario de B, entonces

$$\exists_k(\overline{C \longrightarrow B}) = \overline{C \longrightarrow B} \longrightarrow A = \overline{C \longrightarrow B \longrightarrow A} \cap (B \longrightarrow A)$$

la última igualdad es cierta ya que $k^{-1}(\overline{C \longrightarrow A}) = \overline{k^{-1}(C \longrightarrow A)} = \overline{C \longrightarrow B}$

Como B es cerrado en A se tiene que

$$\overline{C \rightarrowtail B \rightarrowtail A} \cap (B \rightarrowtail A) = \overline{C \rightarrowtail A} \cap \overline{B \rightarrowtail A} = (\overline{C \longrightarrow A}) \cap (\overline{B \longrightarrow A}) = (*)$$

$$(*) = \overline{C \longrightarrow A}$$

ya que $C \leqslant B$

pero $C \rightarrowtail A$ es igual a $\exists_k(C \rightarrowtail B)$

$$\therefore \quad \exists_k(\overline{C \rightarrowtail B}) = \exists_k(\overline{C \rightarrowtail B})$$

2.7. Corolario

Sea $A' \rightarrowtail A$ un subobjeto arbitrario de A entonces $A' \rightarrowtail \overline{A}'$ es denso.

Demostración.

Sea $k = \overline{A' \longrightarrow A}$ entonces $\exists_k(\overline{A' \rightarrowtail \overline{A}'}) = \overline{\exists_k(A' \rightarrowtail \overline{A}')} = \overline{A' \rightarrowtail A}$

$$\therefore \quad \exists_k(\overline{A' \rightarrowtail \overline{A}'}) \leq \overline{A' \rightarrowtail A}$$

$$\therefore \quad k^{-1}\, \exists_k(\overline{A' \rightarrowtail \overline{A}'}) \leq k^{-1}(\overline{A' \rightarrowtail A})$$

$$\therefore \quad \overline{A' \rightarrowtail \overline{A}'} \leq k^{-1}(\overline{A' \longrightarrow A}) = \overline{k^{-1}(A' \rightarrowtail A)} = A' \rightarrowtail \overline{A}'$$

pero $\overline{A' \rightarrowtail \overline{A}'} = \overline{A}'$ $\quad\therefore\quad$ $A' \rightarrowtail \overline{A}'$ es denso

2.8. Definición.

Un morfismo $f: A \longrightarrow B$ se dice que es un casi-monomorfismo con respecto a una topología j, si el morfismo canónico τ es denso

$$\begin{tikzcd} R = A\times_B A \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & A \arrow[ul, "\tau"] \arrow[u, "1"'] & \end{tikzcd}$$

donde (a,b) es el par núcleo de f.

Es necesario hacer notar que si la topología j es trivial entonces f es un casi monomorfismo sii f es un monomorfismo.

En efecto, si la topología j es trivial entonces $A \rightarrowtail R$ es denso sii $\overline{A \rightarrowtail R} = R$ sii $A = R$ sii $a = b$.

El siguiente Lema nos da un criterio para ver cuando un morfismo es un casi monomorfismo.

2.9. Lema

Un morfismo $f: A \to B$ es un casi monomorfismo sii para toda pareja de morfismos $G \overset{g_0}{\underset{g_1}{\rightrightarrows}} A$ tal que $fg_0 = fg_1$ existe un subobjeto denso $G \overset{k}{\rightarrowtail} G$ que satisface $g_0 k = g_1 k$.

Demostración

Supongamos que f es un casi monomorfismo. Por definición se tiene entonces que τ es denso.

Sean $g_0, g_1 : G \to A$ una pareja de morfismos tales que $fg_0 = fg_1$. Como el diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "b"] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado entonces el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, dashed, "\tau'"'] \arrow[drr, bend left, "g_0"] \arrow[ddr, bend right, "g_1"'] & & \\ & R \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "b"] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \arrow[d, "f"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

es decir, existe un único morfismo $\tau' G \to R$ tal que $a\tau' = g_0$ y $b\tau' = g_1$. Consideremos $k = (\tau')^{-1}(A \xrightarrow{\tau} R)$ entonces

$$\overline{G' \xrightarrow{k} G} = \overline{(\tau')^{-1}(A \rightarrowtail R)} = (\tau')^{-1}(\overline{A \rightarrowtail R}) = (\tau')^{-1}(R) = G$$

$\therefore$ $G' \xrightarrow{k} G$ es un subobjeto denso. Ahora bien, por definición el cuadrado

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, tail, "k"] \arrow[d, "r"] & G \arrow[d, "\tau'"] \\ A \arrow[r, tail, "\tau"'] & R \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

$$\therefore \quad g_0 k = a\tau' k = a\tau r = b\tau r = b\tau' k = g_1 k$$

Recíprocamente, supongamos que $f: A \to B$ satisface la condición. Como $fa = fb$ existe un subobjeto denso $k: G' \to R$ tal que $ak = bk$. Como $(A,\tau) \simeq \mathrm{Equ}(a,b)$ entonces $G' \leq A$ en R en consecuencia $\overline{G'} \leq A$ $\therefore$ τ es denso.

2.10. Definición

Un morfismo $f: A \to B$ se dice que es un casi epimorfismo respecto a una topología j siempre y cuando su imagen $\mathrm{Im}(f) \rightarrowtail B$ sea denso.

2.11. Definición

Un morfismo $f: A \to B$ que sea casi monomorfismo y casi epimorfismo respecto a una topología j se llamará bidenso.

2.12. Lema

Un monomorfismo $f: A \to B$ es un casi epimorfismo sii es denso.

Demostración

f es un monomorfismo sii $\mathrm{Im}\ f \rightarrowtail B = A \overset{f}{\rightarrowtail} B$.

2.13. Lema

Un monomorfismo $f:A \to B$ es un casi monomorfismo.

Demostración

Si f es un monomorfismo entonces el par núcleo (a,b) es igual a$(1_A, 1_A)$ en consecuencia $\tau = 1_A$. Por lo tanto f es un casi monomorfismo.

2.14. Preposición

Para monomorfismos la siguiente afirmación es verdadera:

f es bidenso sii f es denso

Sea Σ la clase de los morfismos bidensos en $\underline{E}$ con respecto a una topología j. Demostraremos que Σ admite cálculo de fraccio nes derechas. Para esto necesitaremos el siguiente lema:

2.15. Lema

Σ es cerrada bajo productos fibrados, i.e., si el cuadrado

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "t"'] & A \arrow[d, "s"] \\ C \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado y $s \in \Sigma$ entonces $t \in \Sigma$

Demostración

Sea $A \xrightarrow{s} B$ la (epi,mono)-factorización de S.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, two heads, "h"'] & & B \\ & \mathrm{Im}\ A \arrow[ur, tail, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Supongamos que s es un casi epimorfismo; en consecuencia $g: \mathrm{Im}\ A \rightarrowtail B$ es denso. Como el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "t"'] & A \arrow[d, "s"] \\ C \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

es igual a

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"'] & A \arrow[d, "h"] \\ \mathrm{Im}\ P \arrow[r] \arrow[d, "s'"'] & \mathrm{Im}\ A \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

ya que el producto fibrado de un epimorfismo es un epimorfismo entonces

$$f^{-1}(g) = S' \quad \therefore \quad \overline{f^{-1}(g)} = \overline{s'} = f^{-1}(\overline{g}) = f^{-1}(1) = 1$$

$\therefore$ s' es denso

$\therefore$ t es un casi epimorfismo.

Para probar que t es un casi monomorfismo usaremos el lema 2.9 Sea $g_i : D \to P$ una pareja de morfismos tales que $tg_i = tg_j$ $i,j \in \{0,1\}$. En consecuencia $ftg_0 = ftg_1$ pero $ft = sf'$ por lo tanto $sf'g_0 = sf'g_1$; como s es un casi monomorfismo existe un subobjeto $D' \xrightarrow{d} D$ tal que $f'g_0 d = f'g_1 d$. Como también se cumple $tg_0 d = tg_1 d$ y el cuadrado

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "t"'] & A \arrow[d, "s"] \\ C \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado entonces $g_0 d = g_1 d$. Por lo tanto t es un casi monomorfismo.

$\therefore$ $t \in \Sigma$

2.16. Lema

Σ está cerrada bajo composiciones.

Demostración

Por el lema 2.5 se sabe que la composición de monomorfismos densos es un monomorfismo denso. Sean $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ dos morfismos bidensos demostraremos primero que fg es un casi monomorfismo.

Sean $G \overset{g_0}{\underset{g_1}{\rightrightarrows}} A$ dos morfismos tales que $(g^f)g_0 = (g^f)g_1$. Como g es un casi-monomorfismo existe un subobjeto denso $k : G' \rightarrowtail G$ tal que $fg_0k = fg_1k$; análogamente existe un subobjeto denso $k' : G'' \rightarrowtail G'$ tal que $(g_0k)k' = (g_1k)k'$ por lo tanto gf es un casi-monomorfismo.

Lo único que falta probar es que fg es un casi-epimorfismo. Se sabe que el funtor $P_\sim(\cdot) : \underline{E} \rightarrow Set$ es representable.

En efecto consideremos el funtor $hom(-,\Omega)$ entonces

$$hom(A,\Omega) \xrightarrow{S_A} P_\sim(A) \qquad A \in \mathcal{O}(\underline{E})$$

es un isomorfismo y además es una transformación natural.

$$\begin{array}{ccc} hom(A,\Omega) & \xrightarrow{S_A} & P_\sim(A) \\ hom(\tilde{f},\Omega) \downarrow & & \downarrow P_\sim(f) \\ hom(B,\Omega) & \xrightarrow[S_B]{} & P_\sim(B) \end{array} \qquad \tilde{f} : B \rightarrow A$$

Por lo tanto $P_\sim(-)$ manda $\underline{E}$- epimorfismos en funciones inyectivas.

Demostraremos ahora lo siguiente:

El producto fibrado a través de un epimorfismo preserva y refleja la noción de densidad.

En efecto, si $q: A \to B$ y $A' \rightarrowtail$ es denso entonces

$\overline{q^{-1}(A')} = q^{-1}(\overline{A'}) = q^{-1}(1) = 1$

$\therefore$ q^{-1} preserva la noción de densidad.

Supongamos ahora que $q^{-1}(A')$ es denso en $P_{\sim}(A)$ entonces como $\overline{q^{-1}(A')} = q^{-1}(\overline{A'})$ y $q^{-1}(1) = 1$ podemos afirmar que $q^{-1}(\overline{A'}) = q^{-1}(1)$ pero como el funtor $P_{\sim}(-)$ manda $\underline{E}$- epimorfismos en monomorfismos en Set podemos concluir que $\overline{A'} = 1$. En consecuencia A' es denso.

A partir de este resultado demostraremos que gf es un casi-epimorfismo. Consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "p_1"'] & & B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, two heads, "p_2"] & & C \\
& \cdot \arrow[ur, tail, "i_1"] \arrow[dr, two heads, "p_3"'] & \cdot \arrow[u, tail, "i_4"] \arrow[d, two heads, "p_4"] & \cdot \arrow[ur, tail, "i_2"'] & \\
& & \cdot \arrow[ur, tail, "i_3"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde (P_1, i_1) es la (epimorfismos, monomorfismos)- factorización de f, (P_2, i_2) es la (epimorfismos, monomorfismos)- factorización de g, (P_3, i_3) es la (epimorfismos, monomorfismos)- factorización de $P_2 i_1$ y (P_4, i_4) es el producto fibrado para P_2, i_3.

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[dr, dashed] \arrow[rrd, bend left, tail, "i_1"] \arrow[ddr, bend right, "P_3"'] & & \\
& \cdot \arrow[r, tail, "i_4"] \arrow[d, "P_4"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & B \arrow[d, "P_2"] \\
& \cdot \arrow[r, tail, "i_3"'] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

Como $P_2 i_1 = i_3 P_3$ entonces i_1 se factoriza a través de i_4. Al ser i_1 denso e $i_1 \leq i_4$ se tiene que i_4 es denso. Como $i_4 = P_2^{-1}(i_3)$ y P_2 es un epimorfismo, de la observación anterior podemos concluir que i_3 es denso. Finalmente, al ser i_2 denso entonces la composición $i_2 i_3$ también es denso y como $(P_3 P_1, i_2 i_3)$ es la (epimorfismos, monomorfismos)- factorización de gf el lema está probado.

Podemos resumir los resultados que se han demostrado con la siguiente proposición.

2.17. Proposición

La clase Σ de los morfismos bidensos con respecto a una topología j (o la clase de los morfismos j-bidensos) satisface:

i) Todos los isomorfismos pertenecen a Σ

ii) Σ es cerrada bajo composiciones

iii) Todo diagrama

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & B \\ & & \uparrow{\scriptstyle s} \\ & & A \end{array}$$

donde $s \in \Sigma$ puede extenderse a un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle s'}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle s} \\ C' & \xrightarrow{f'} & A \end{array}$$

donde $s' \in \Sigma$.

iv) Si f,g son morfismos tales que $sf = sg$ para algún $s \in \Sigma$ entonces existe un monomorfismo $s' \in \Sigma$ tal que $fs' = gs'$.

Estas son las cuatro condiciones de Gabriel-Zisman véase [2] página 12.

Diremos ahora como la clase Σ genera una categoría $\underline{E}(\Sigma^{-1})$ y un funtor $\underline{E} \xrightarrow{P} \underline{E}[\Sigma^{-1}]$.

Los objetos de $\underline{E}(\Sigma^{-1})$ son los objetos de $\underline{E}$. Los morfismos $X \to Y$ en $\underline{E}(\Sigma^{-1})$ son clases de equivalencia de los diagramas

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \sigma}\downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

en $\underline{E}$ $(\sigma \in \Sigma)$ bajo la relación siguiente; $(\sigma_1 f_1)$ es equivalente a $(\sigma_2 f_2)$ sii existe

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ {\scriptstyle \tau_1} \swarrow & & \searrow {\scriptstyle \tau_2} \\ Z_1 & & Z_2 \end{array}$$

tal que $\sigma_1\tau_1 = \sigma_2\tau_2 \in \Sigma$ y $f_1\tau_1 = f_2\tau_2$.

2.18. Lema

$\sim$ es una relación de equivalencia.

Demostración.

(i) $(s,f)\sim(s,f)$

Sea $\tau_1 = \tau_2 = 1 \in \Sigma$ por lo tanto $(s,f)\sim(s,f)$

(ii) $(s,f)\sim(s',f') \Rightarrow (s',f')\sim(s,f)$

Es inmediato

(iii) Si $(s,f)\sim(s_1,f_1)$ y $(s_1,f_1)\sim(s_2,f_2)$ entonces $(s,f)\sim(s_2,f_2)$

Supongamos que $(s,f)\sim(s_1,f_1)$ y $(s_1,f_1)\sim(s_2,f_2)$ entonces se tienen diagramas conmutativos de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
& A & & B \\
D \arrow[ur, "s"] \arrow[urrr, "f"] & & D' \arrow[ul, "s_1"'] \arrow[ur, "f_1"'] & \\
& \tilde{D} \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "t_1"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A & & B \\
D' \arrow[ur, "s_1"] \arrow[urrr, "f_1"] & & D'' \arrow[ul, "s_2"'] \arrow[ur, "f_2"'] & \\
& E \arrow[ul, "u_1"] \arrow[ur, "u_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde $\left.\begin{array}{l} s_1u_1 = s_2u_2 \\ st = s_1t_2 \end{array}\right. \in \Sigma$.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[d, "s_1u_1"] \\
\tilde{D} \arrow[r, "s_1t_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

entonces existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "w"] \arrow[d, "v"'] & E \arrow[d, "s_1u_1"] \\
\tilde{D} \arrow[r, "s_1t_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

donde $s_1t_1v = s_1u_1w \in \Sigma$; por lo tanto existe un monomorfismo $g:G \to F$ en Σ tal que $t_1vg = u_1wg$, por lo consiguiente $s_1t_1vg \in \Sigma$. Consideremos la siguiente pareja de $\underline{E}$- morfismos: (tvg, u_2wg) enton ces se obtienen las igualdades:

$s(tvg) = s_1t_1vg = s_1u_1wg = s_2(u_2wg) \in \Sigma$

$f(tvg) = f_1t_1vg = f_1u_1wg = f_2(u_2wg)$

$\therefore\ (s,f) \sim (s_2, f_2)$

La composición de dos morfismos

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & T \arrow[dl, "\sigma_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & & U \arrow[dl, "\sigma_2"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd} \qquad \ldots \quad (3)$$

en $\underline{E}[\Sigma^{-1}]$ se define como sigue:

Por la proposición 2.17, existe un diagrama conmutativo de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\tau"'] & U \arrow[d, "\sigma_2"] \\ T \arrow[r, "f_1"'] & y \end{tikzcd} \qquad \tau \in \Sigma$$

definimos entonces $(\sigma_2, f_2)(\sigma_1, f_1) = (\sigma_1\tau, f_2 g)$.

Demostraremos ahora que la composición no depende de la elección de V y que está bien definida.

En efecto, sean $(\sigma_2, f_2), (\sigma_1, f_1)$ dos $\underline{E}[\Sigma^{-1}]$- morfismos como en (3). Si V y V' son dos elecciones para f_1, σ_2 entonces los diagramas

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\tau"'] & U \arrow[d, "\sigma_2"] \\ T \arrow[r, "f_1"'] & y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\tau'"'] & U \arrow[d, "\sigma_2"] \\ T \arrow[r, "f_1"'] & y \end{tikzcd} \qquad \text{donde } \tau, \tau' \in \Sigma$$

son conmutativos. Por la proposición 2.17 existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V'' \arrow[r, "y"] \arrow[d, "X"'] & V' \arrow[d, "\tau"] \\ V \arrow[r, "\tau"'] & T \end{tikzcd} \qquad \text{donde } x \in \Sigma$$

en consecuencia $\sigma_2 gx = f_1\tau x = f_1\tau' y = \sigma_2 g' y$. Por lo tanto existe $z \in \Sigma$ tal que $gxz = g'yz$; la pareja (xy, yz) es tal que:

$$\sigma_1\tau xz = \sigma_1\tau' yz \quad \text{y} \quad f_2 gxz = f_2 g' yz$$

$$\therefore (\sigma_1\tau, f_2 g) \sim (\sigma_1\tau', f_2 g')$$

Ahora, sean $(\sigma_1, f_1) \sim (\sigma_2, f_2)$, $(\tau_1, g_1) \sim (\tau_2, g_2)$ $\underline{E}[\Sigma^{-1}]$-morfismos que pueden componerse, deseamos demostrar que

$$(\tau_1, g_1)(\sigma_1, f_1) \sim (\tau_2, g_2)(\sigma_2, f_2)$$

Consideremos $\begin{tikzcd} Z_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d] & y \\ X & \end{tikzcd} \qquad i = 1,2$

entonces como $\sigma_i \in \Sigma$ existe un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z_1 \arrow[d, "\sigma_1"] \\ Z \arrow[r, "\sigma_2"'] & X \end{tikzcd} \qquad \text{donde } h \in Z$$

Afirmamos que $(\sigma, f_1 g) \sim (\sigma_1, f_1)$ y $(\sigma, f_2 g) \sim (\sigma_2, f_2)$ donde $\sigma = \sigma_2 h \in \Sigma$. En efecto, $\sigma_1 g = \sigma_2 h = \sigma \in \Sigma$ y $f_1 g = (f_1 g)(1)$. Análogamente se prueba la otra afirmación.

A partir de esto último, podemos suponer que $Z_1 = Z_2$ y que $\sigma_1 = \sigma_2$; es decir, demostraremos que si $(\sigma, f_1) \sim (\sigma, f_2)$ y $(\tau, g_1) \sim (\tau, g_2)$ entonces $(\tau, g_1)(\sigma, f_1) \sim (\tau, g_2)(\sigma, f_2)$

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "f_1"] & & U \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "g_1"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "f_2"] & & U \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

Como $(\sigma, f_1) \sim (\sigma, f_2)$ existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & Y \\
 & X & \\
T \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[uurr, "f_2"'] & & T \arrow[ul, "\sigma"'] \arrow[uu, "f_1"'] \\
 & T' \arrow[ul, "s_2"] \arrow[ur, "s_1"'] &
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ $\sigma s_2 = \sigma s_1$, por la proposición 2.17 existe $k' \in \Sigma$ tal que $s_1 k' = s_2 k'$. Consideremos $k = s_1 k' = s_2 k'$ entonces es claro que $(\sigma k, f_1 k) \sim (\sigma_1 f_1)$. Análogamente existe $\overline{k}$ tal que $(\tau k, g_2 k) \sim (\tau, g_2)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
V_1' \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "r_2"'] & V \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "r_1"] & U' \arrow[r, "\bar{k}"] \arrow[d, "\tau\bar{k}"] & U \arrow[d, "\tau"] \\
T' \arrow[r, "k"'] & T \arrow[r, "f_2"'] & Y \arrow[r, "1"'] & Y
\end{tikzcd}$$

donde $r_1, r_2 \in \Sigma$

$\therefore\ (\tau\bar{k}, g_2\bar{k})(\sigma, f_2) = (\sigma r_1, g_2\bar{k}h_1)$ y $(\tau, g_1)(\sigma k, f_2 k) = (\sigma k r_2, g_1\bar{k}h_1h_2)$

El siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & X & Y & \\
V' \arrow[ur, "\sigma k r_2"] \arrow[urr, "g_1 k h_1 h_2"'] & & & V \arrow[ull] \arrow[ul, "g_2\bar{k}h_1"'] \\
 & V' \arrow[ul, "1"] \arrow[urr, "h_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $(\sigma r_1, g_2\bar{k}h_1) \sim (\sigma k r_2, g_1\bar{k}h_1h_2)$ y podemos concluir que la composición está bien definida.

De manera análoga se prueba que la composición es asociativa. El morfismo identidad es $(1,1)$. En vista de estos resultados es claro que $\underline{E}(\Sigma^{-1})$ es una categoría; cabe hacer notar que no se usó en ningún momento que el diagrama que aparece en el inciso (iii) de la proposición 2.17 fuese un producto fibrado, de hecho no se necesita suponer que el cuadrado sea un producto fibrado, véase (2)

Construiremos ahora un funtor $P:\underline{E} \longrightarrow \underline{E}[\Sigma^{-1}]$ de la siguiente manera:

$$P(A) = A \qquad \forall \quad A \in \mathcal{O}(\underline{E})$$

$$P(f) = (1_A, f) \quad \text{si:} \quad f \in \hom(A,B)$$

Notemos que $P(f)(S',f') = (S',ff')$ cuando la composición tenga sentido

$$\begin{tikzcd}
& D' \arrow[dl, "s'"'] \arrow[dr, "f'"] & & B \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A' & & B & & C
\end{tikzcd}$$

el diagrama

$$\begin{tikzcd}
D' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "1"'] & B \arrow[d, "1"] \\
D' \arrow[r, "f'"'] & B
\end{tikzcd}$$

es conmutativo $(1 \in \Sigma)$ y por lo tanto $(s',f')P(f) = (s',ff')$

Teorema

El funtor $P: \underline{E} \longrightarrow \underline{E}(\Sigma^{-1})$ preserva límites finitos.

Demostración

Probaremos que P preserva igualadores y productos finitos.

i) P preserva igualadores

Sea
$$\begin{tikzcd} Z_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\sigma_i"'] & Y \\ X & \end{tikzcd} \qquad (i=1,2)$$

una pareja de $\underline{E}(\Sigma^{-1})$-morfismos; si se escogen representantes adecuados podemos suponer que $\sigma_1 = \sigma_2$, $z_1 = z_2$. Sea $E \rightarrowtail^{q} Z$ el igualador de f_1 y f_2 en $\underline{E}$.

$$E \overset{q}{\rightarrowtail} Z \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} Y$$

Entonces $P(\sigma q)$ iguala a (σ, f_i) $i=1,2$. En efecto, como el cuadrado

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "q"'] \arrow[d] & Z \arrow[d, "\sigma"] \\ E \arrow[r, "\sigma q"'] & X \end{tikzcd} \qquad 1 \in \Sigma$$

es conmutativo, se tiene que $(\sigma, f_1)P(\sigma q) = (1, f_1 q)$ y $(\sigma, f_2)P(\sigma q) = (1, f_2 q)$. Ahora sea

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "\tau'"] & X \\ T & \end{tikzcd}$$

un $\underline{E}(\Sigma^{-1})$-morfismo que iguala a (σ, f_i) $i=1,2$; entonces existe un diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "r"] \arrow[d, "q''"'] & Z \arrow[d, "\sigma"] \\ U \arrow[r, "q'"'] & X \end{tikzcd} \qquad q'' \in \Sigma$$

tal que $(\tau' q'', f_1 r) = (\tau' q'', f_2 r)$; en particular se tiene que $f_1 r = f_2 r$ por lo tanto existe un único morfismo $\overline{q}: E'' \longrightarrow E$ tal que $q\overline{q} = r$. Consideremos el siguiente $\underline{E}(\Sigma^{-1})$-morfismo.

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "\overline{q}"] \arrow[d, "\tau' q''"'] & E \\ T & \end{tikzcd}$$

Demostraremos que (τ', q') es igual a $P(\sigma q)(\tau' q'', \overline{q})$ en $\underline{E}(\Sigma^{-1})$
Como el cuadrado

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "\overline{q}"] \arrow[d, "1"'] & E \arrow[d, "1_E"] \\ E'' \arrow[r, "\overline{q}"'] & E \end{tikzcd} \qquad 1 \in \Sigma$$

es conmutativo entonces $P(\sigma q)(\tau' q'', \overline{q}) = (\tau' q'', \sigma q \overline{q}) = (\tau' q'', \sigma r)$ y como el diagrama

$$\begin{tikzcd} & T & X \\ E'' \arrow[ur, "\tau' q''"] \arrow[urr, "\sigma r"'] & & U \arrow[ul, "\tau'"'] \arrow[u, "q'"'] \\ & E'' \arrow[ul, "1"] \arrow[ur, "q''"'] & \end{tikzcd} \qquad \tau' q'' \in \Sigma$$

es conmutativo entonces $(\tau' q'', \sigma r) \sim (\tau', q')$. Por lo consiguiente $(\tau' q'', \bar{q})$ es igual a $P(\sigma q)(\tau' q'', \bar{q})$ en $\underline{E}(\Sigma^{-1})$. Demostraremos ahora que la factorización es única.

Si
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s"'] & E \\ T & \end{tikzcd}$$
es un $\underline{E}(\Sigma^{-1})$-morfismo tal que

$P(\sigma q)(s,h) \sim (\tau', q')$ entonces existe un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "s_2"'] \arrow[d, "s_1"'] & E'' \arrow[r, "r"'] \arrow[d, "q''"] & Z \arrow[d, "\sigma"'] \\ A' \arrow[r, "r_2"'] & U \arrow[r, "q'"'] & X \end{tikzcd}$$
donde $s_1, q'' \in \Sigma$

y además

$$\begin{tikzcd} & T & X \\ A \arrow[ur, "s"] \arrow[urr, "\sigma q h"'] & & \\ & A' \arrow[ul, "r_1"] \arrow[r, "r_2"'] & U \arrow[ul, "\tau'"'] \arrow[uu, "q'"'] \end{tikzcd}$$
$sr_1 = \tau' r_2 \in \Sigma$

demostraremos que $(s,h) \sim (\tau' q'', \bar{q})$. En efecto, $sr_1 s_1 = \tau' r_2 s_1 = \tau' q'' s_2 \in \Sigma$ ya que $sr_1 \in \Sigma$. $\sigma(q h r_1 s_1) = q' r_2 s_1 = \sigma r s_2 = \sigma(q \bar{q} s_2)$; podemos afirmar entonces que existe $k \in \Sigma$ tal que $q h r_1 s_1 k = q \bar{q} s_2 k$ ya que $\sigma \in \Sigma$, pero al ser q un monomorfismo $h r_1 s_1 k = \bar{q} s_2 k$. Consideremos $X_1 = r_1 s_1 k$ y $X_2 = s_2 k$ entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$sX_1 = sr_1s_1k = \tau' q'' s_2 k \in \Sigma \qquad \text{ya que } k \in \Sigma$$

$$hX_1 = hr_1s_1k = \overline{q}s_2k = \overline{q}X_2$$

Por lo tanto la factorización es única y en consecuencia $P(\sigma q)$ es un igualador para (σ, f_i) $(i=1,2)$ en $\underline{E}(\Sigma^{-1})$; por lo consiguiente P preserva igualadores.

La demostración de que P preserve productos finitos es análoga. Por lo tanto P preserva límites finitos y el teorema está probado.

Es necesario hacer notar que en la demostración no se usó que $\underline{E}$ fuese un Topo, lo único que necesitamos fue que $\underline{E}$ tuviese límites finitos. Más adelante veremos que $\underline{E}(\Sigma^{-1})$ es un topo pero para esto tenemos que ver algunos resultados más acerca de la topología sobre un topo.

Gavillas

Sean $\underline{E}$ un topo y j una topología sobre $\underline{E}$.

3.1. Definición

Un objeto $F \in \mathcal{O}(\underline{E})$ se llamará una gavilla para la topología j si dado cualquier morfismo denso $d: X' \longrightarrow X$ la función entre conjuntos

$$\hom_{\underline{E}}(X,F) \xrightarrow{\hom(d,1)} \hom_{\underline{E}}(X',F)$$

es biyectiva. (Si la función es inyectiva F se llamará un objeto separado). Por lo tanto F es una gavilla si el diagrama

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "d"] \arrow[d] & X \arrow[dl, dashed] \\ F & \end{tikzcd} \qquad d \text{ denso}$$

puede extenderse de manera única.

El siguiente resultado nos será de gran utilidad.

3.2. Proposición

Un objeto F es una gavilla sii para todo morfismo bidenso $g: A \longrightarrow B$ la función

$$\hom_{\underline{E}}(B,F) \xrightarrow{\hom(g,1)} \hom_{\underline{E}}(A,F)$$

es biyectiva.

Demostración

$\Leftarrow$ Inmediato ya que todo monomorfismo denso es bidenso.

$\Rightarrow$ Sea (h,k) la (epimorfismos, monomorfismos)-factorización de g, entonces $\hom_{\underline{E}}(g,1):\hom_{\underline{E}}(B,F) \longrightarrow \hom_{\underline{E}}(A,F)$ se factoriza a través de h y k de la siguiente manera.

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\underline{E}}(B,F) \arrow[rr, "\hom(g,1)"] \arrow[dr, "\hom_{\underline{E}}(k,1)"'] & & \hom_{\underline{E}}(A,F) \\
& \hom_{\underline{E}}(\mathrm{Im}\ A,F) \arrow[ur, hook, "\hom(h,1)"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "h"'] & & B \\
& \mathrm{Im}\ A \arrow[ur, hook, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

Como g es bidenso entonces k es denso, en consecuencia $\hom_{\underline{E}}(k,1)$ es biyectiva y al ser $\hom(h,1)$ inyectiva, lo único que tenemos que probar es que si g es un epimorfismo que es un casi monomorfismo entonces se satisface la propiedad deseada. Sea g tal morfismo y sea ρ_0, ρ_1 su par núcleo.

Consideremos $\hom_{\underline{E}}(g,1):\hom_{\underline{E}}(B,F) \longrightarrow \hom_{\underline{E}}(A,F)$ y sea $f:A \longrightarrow F$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\Delta"] & R \arrow[r, shift left, "\rho_0"] \arrow[r, shift right, "\rho_1"'] & A \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[dl, dashed] \\
& & F &
\end{tikzcd}$$

como Δ es denso y F es una gavilla entonces $\hom_{\underline{E}}(R,F) \xrightarrow{\hom(\Delta,1)} \hom_{\underline{E}}(A,$

es una función biyectiva; se tiene $\rho_0\Delta=\rho_1\Delta$ y por lo tanto $f\rho_0\Delta = f\rho_1\Delta$ pero $\hom_{\underline{E}}(\Delta,1)$ es biyectiva entonces $f\rho_0 = f\rho_1$, al ser $(g,B)\underline{\sim}\mathrm{Coequ}(\rho_0,\rho_1)$ existe un único morfismo h tal que $gh=f$ $\therefore$ $\hom_{\underline{E}}(g,1)$ es suprayectiva $\therefore$ $\hom_{\underline{E}}(g,1)$ es una función biyectiva..

Demostraremos ahora un lema técnico que relaciona operaciones cerradura y morfismos densos.

3.3. Lema (Cuadrado denso-cerrado).

Supongamos que se tiene un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "d"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "a" near start] & X \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dashed] \\ F \arrow[r, tail, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

d denso

f cerrado

entonces existe un morfismo $a:X \longrightarrow F$ que hace conmutativos los triángulos.

Demostración

Como el cuadrado es conmutativo $\exists_h(d)\leq f$ y como $\exists_h \dashv h^{-1}$ se tiene $d\leq h^{-1}(f)$

$\therefore$ $\overline{d}\leq \overline{h^{-1}(f)} = h^{-1}(\overline{f}) = h^{-1}(f)$

ya que f es cerrado. Pero como $\bar{d} = X$ entonces $X \leq h^{-1}(f)$ y $\exists_h(X) \leq f$ en consecuencia existe un morfismo a tal que $fa = h$ ya que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1"] & X \arrow[r, "h"] \arrow[dr] & Y & \\
& & \mathrm{Im}\, X \arrow[u, tail, "\exists_h(1)"'] \arrow[r] & F \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Ahora $fad = hd = fk$ $\therefore$ $ad = k$ pues f es un monomorfismo. Esto prueba la afirmación.

Denotemos por $sh_j(\underline{E})$ la subcategoría plena de $\underline{E}$ cuyos objetos son las gavillas. Nuestra intención en este momento es probar que $sh_j(\underline{E})$ es un topo. Para esto conmenzaremos probando el siguiente lema.

3.4. Lema

$sh_j(\underline{E})$ tiene límites finitos y el funtor inclusión $sh_j(\underline{E}) \longrightarrow \underline{E}$ preserva límites finitos.

Demostración

Sean $F, G \in sh_j(\underline{E})$ y $d: X' \rightarrowtail X$ un morfismo denso, entonces

$$\hom_{\underline{E}}(X,F\times G) \longrightarrow \hom_{\underline{E}}(X',F\times G) \simeq \hom_{\underline{E}}(X,F)\times\hom_{\underline{E}}(X,G) \longrightarrow \hom_{\underline{E}}(X',F)\cdot\hom_{\underline{E}}(X',G)$$

y la función que aparece a la derecha es biyectiva por hipótesis; en consecuencia $F\times G \in sh_j(\underline{E})$. Sea $(E,e) \simeq Equ(f,g)$ donde $f:G \longrightarrow F$, $g:G \longrightarrow F$ y además $G,F \in sh_j(\underline{E})$; si $d:X' \rightarrowtail X$ es un morfismo denso entonces el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\underline{E}}(X,E) \arrow[r, "\hom(d,1)"] \arrow[d, hook] & \hom_{\underline{E}}(X',E) \arrow[d, hook] \\
\hom_{\underline{E}}(X,G) \arrow[r, tail, two heads] & \hom_{\underline{E}}(X',G)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y además $\hom(X,E) \rightarrowtail \hom(X',E)$; lo único que tenemos que probar es que la función $\hom_{\underline{E}}(d,1)$ es suprayectiva. Sea $h:X' \longrightarrow E$ un morfismo arbitrario entonces $eh:X' \longrightarrow G$; como la función que aparece en la parte inferior del cuadrado es suprayectiva existe un morfismo $k:X \longrightarrow G$ tal que $kd = eh$. Ahora bien

$$fk = gk \text{ sii } fkd = gkd \text{ sii } feh = geh$$

por lo tanto existe un único morfismo $\overline{k}:X \longrightarrow E$ tal que hace conmutativo el diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, dashed, "\overline{k}"'] \arrow[d, "k"] & \\
E \arrow[r, "e"'] & G \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & F
\end{tikzcd}$$

Finalmente $e\bar{k}d = kd = eh$; por lo tanto $\hom(X,E) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \hom(X',E)$ es una función biyectiva y el lema está probado.

Si denotamos por $sep_j(\underline{E})$ a la subcategoría plena de $\underline{E}$ cuyos objetos son los objetos separados entonces la demostración que se hizo para ver que $sh_j(\underline{E})$ tiene límites finitos sirve también para ver que $sep_j(\underline{E})$ tiene límites finitos.

3.5. Proposición

Si A es una gavilla (A está separado) y B es un objeto de $\underline{E}$, entonces A^B es una gavilla (A^B está separado).

Demostración

Sea $X' \overset{d}{\rightarrowtail} X$ denso, como el producto fibrado de un monomorfismo denso es denso (por la naturalidad de la operación cerradura) entonces $X' \times A \xrightarrow{d\times 1} X\times A$ es denso ya que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} X'\times A & \overset{d\times 1}{\rightarrowtail} & X\times A \\ {\scriptstyle p_{X'}}\downarrow & \text{P.F.} & \downarrow{\scriptstyle p_X} \\ X' & \underset{d}{\rightarrowtail} & X \end{array}$$

es un producto fibrado, por lo tanto si A está separado (es una gavilla) y $X' \overset{d}{\rightarrowtail} X$ es denso entonces el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \hom(X,\Lambda^C) & \xrightarrow{\hom(d,1)} & \hom_{\underline{E}}(X',\Lambda^C) \\ \cong\big\downarrow & & \big\downarrow\cong \\ \hom(X\times C,\Lambda) & \xrightarrow[\hom(d\times 1,1)]{} & \hom_{\underline{E}}(X'\times C,\Lambda) \end{array}$$

es conmutativo (por la naturalidad de la adjunción); en consecuencia si $\hom_{\underline{E}}(d,1)$ es un monomorfismo (isomorfismo) entonces $\hom(d\times 1,1)$ es un monomorfismo (isomorfismo). Por lo tanto Λ^C está separado (es una gavilla).

3.6. Corolario

$sh_j(\underline{E})$ $(sep_j(\underline{E}))$ es cartesiana cerrada y el funtor $sh_j(\underline{E}) \longrightarrow \underline{E}$ $(sep_j(\underline{E}) \longrightarrow \underline{E})$ preserva exponenciales.

Demostración

Inmediato de 3.4, 3.5 y del hecho de que el funtor inclusión es pleno.

3.7. Lema

i) Un subobjeto de un objeto que está separado está separado.

ii) Un subobjeto cerrado de una gavilla es una gavilla.

iii) Si F es una gavilla y G está separado entonces todo monomorfismo $\tau:F \rightarrowtail G$ es cerrado.

Demostración

(i) Sean $\tau : F' \rightarrowtail F$ y $d : X' \rightarrowtail X$ un morfismo denso donde $F \in sep_j(\underline{E})$. Consideremos la función $hom(d,1) : Hom(X,F') \longrightarrow hom(X',F')$; si $f,g : X \longrightarrow F'$ son dos morfismos tales que $fd=gd$ entonces $\tau fd = \tau gd$ pero como $F \in sep_j(\underline{E})$ concluimos que $\tau f = \tau g$ pero τ es un monomorfismo en consecuencia $f=g$.

(ii) Sean $\tau : F' \rightarrowtail F$ cerrado donde $F \in sh_j(\underline{E})$ y $d : X' \rightarrowtail X$ un morfismo denso. Consideremos $hom(d,1) : hom(X,F') \longrightarrow hom(X',F')$; si $f : X' \longrightarrow F'$ es un morfismo arbitrario entonces existe un único morfismo $g : X \longrightarrow F$ que hace conmutativo el cuadrado

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d"'] & F' \arrow[d, tail, "\tau"] \\ X \arrow[r, dashed, "g"'] & F \end{tikzcd}$$

pero por el lema del cuadrado denso cerrado g se factoriza de manera única a través de τ. Por lo tanto $F' \in sh_j(\underline{E})$.

(iii) Sea $\overline{\tau} : \overline{F} \rightarrowtail G$ la cerradura de F en G. Al ser $i : F \rightarrowtail \overline{F}$ denso y F una gavilla existe un único morfismo $r : \overline{F} \longrightarrow F$ tal que $ri = 1_F$. Ahora bien, $iri = i$ pero como $\overline{F}$ está separado (por (i)) concluimos que $ir = 1_{\overline{F}}$. Por lo tanto F es cerrado en G.

3.8. Lema

Ω_j es inyectivo y además es una gavilla.

Demostración

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ \Omega_j & \end{tikzcd}$$

donde f es un monomorfismo. Al ser j idempotente existe un único morfismo $x:\Omega \longrightarrow \Omega_j$ tal que $\Omega \xrightarrow{x} \Omega_j \xrightarrow{e} \Omega = j$ $\Omega_j \xrightarrow{e} \Omega \xrightarrow{x} \Omega_j = 1$ ya que $exe = je = e$ $\therefore$ $xe = 1$

Consideremos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "eg"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ \Omega & \end{tikzcd}$$

Como Ω es inyectivo existe un morfismo $h:B \longrightarrow \Omega$ tal que $hf=eg$ en consecuencia $xhf=xeg=g$. Por lo tanto Ω_j es inyectivo.

Sean $X' \overset{d}{\rightarrowtail} X$ denso y consideremos $X' \longrightarrow \Omega_j$ arbitrario, la inyectividad de Ω_j asegura la existencia de un morfismo $X' \longrightarrow \Omega_j$ tal que hace conmutativo el triángulo.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook] \arrow[dr] & X \arrow[d, dashed] \\ & \Omega_j \end{tikzcd}$$

Lo único que tenemos que demostrar es que el morfismo es único. Supongamos que $X' \rightarrowtail X \xrightarrow{f} \Omega_j = X' \rightarrowtail X \xrightarrow{g} \Omega_j$ Consideremos los siguientes productos fibrados

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, hook, "\chi_1"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & X_2 \arrow[d, "f"] \\ 1 \arrow[r, "Xt"'] & \Omega_j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, hook, "\chi_2"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & X \arrow[d, "g"] \\ 1 \arrow[r, "Xt"'] & \Omega_j \end{tikzcd}$$

Demostraremos ahora que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "Xt"] \arrow[d, equal] & \Omega_j \arrow[d, "e"] \\ 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

En efecto el cuadrado es conmutativo ya que $ex=j$. Ahora, si $z:A \longrightarrow 1$ y $y:A \longrightarrow \Omega_j$ son dos morfismos tales que el diagrama exterior

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[dr, dashed, "z"] \arrow[drr, bend left, "y"] \arrow[ddr, bend right, "z"'] & & \\
& 1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "Xt"] & \Omega_j \arrow[d, "e"] \\
& 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es conmutativo entonces $tz=ey \Rightarrow xtz=xey=1y=y$. Por lo tanto el cuadrado es un producto fibrado.

Podemos afirmar entonces que X_1 y X_2 son cerrados en X.

Ahora $X_1 \cap X' = X_2 \cap X'$ ya que los productos fibrados

$$\begin{tikzcd}
\Lambda' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & X' \arrow[d, "d"] \\
X_1 \arrow[r, "X_1"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & X \arrow[d, "f"] \\
1 \arrow[r] & \Omega_j
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Lambda' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & X' \arrow[d, "d"] \\
X_2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & X \arrow[d, "g"] \\
1 \arrow[r] & \Omega_j
\end{tikzcd}$$

son iguales, pero $\overline{X' \cap X_1} = \overline{\overline{X}}_1 \cap \overline{X}' = X_1$ ya que $\overline{X}_1 = X_1$ y $\overline{X}' = X$, en consecuencia $X_1 = X_2$ y por lo tanto $f=g$.

3.9. Corolario

Para todo objeto A de $\underline{E}$, Ω_j^{Λ} es una gavilla.

3.10. Corolario

$sh_j(\underline{E})$ tiene un clasificador de subobjetos, a saber, Ω_j.

Demostración

Por el lema 3.4, los monomorfismos en $sh_j(\underline{E})$ coinciden con los monomorfismos en $\underline{E}$. Por lo tanto por el lema 3.7(ii) y (iii) las subgavillas de una gavilla son precisamente sus subobjetos cerrados y por la proposición 2.4 estos últimos están clasificados por morfismos cuyo codominio es Ω_j.

3.11. Teorema

Sea j una topología en $\underline{E}$ y consideremos $sh_j(\underline{E})$ entonces $sh_j(\underline{E})$ es un topo.

Demostración

Inmediata a partir del lema 3.4, el corolario 3.6 y el corolario 3.10.

$sh_j(\underline{E})$ no sólo es un topo sino que es una subcategoría reflexiva de $\underline{E}$, los siguientes resultados están dirigidos para probar esto último.

3.12. Proposición.

Sea A un objeto de $\underline{E}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) A está separado.

ii) El morfismo diagonal $A \xrightarrow{\Delta} A\times A$ es un subobjeto cerrado

iii) Existe un monomorfismo $A \rightarrowtail G$, donde G es una gavilla.

Demostración

(i) $\Rightarrow$ (ii) . Supongamos que A está separado. Sea $\bar{A} \xrightarrow{\langle r_0, r_1\rangle} A\times A$ la cerradura de $A \xrightarrow{\Delta} A\times A$. Como $A \leq \bar{A}$ existe un morfismo $f : A \longrightarrow \bar{A}$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, dashed, "f"'] & A\times A \\ \bar{A} \arrow[ur, hook, "\langle r_0, r_1\rangle"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo; pero $\Delta = \langle 1_A, 1_A\rangle$ en consecuencia $\langle r_0 f, r_1 f\rangle = \langle 1_A, 1_A\rangle$. Como $A \in Sep(\underline{E})$ y f es denso la función $hom_{\underline{E}}(\bar{A}, A) \rightarrowtail hom_{\underline{E}}(A, A)$ es inyectiva; finalmente, $r_0 f = r_1 f \Rightarrow r_0 = r_1 = r$ y por lo tanto el triángulo

$$\begin{tikzcd} \bar{A} \arrow[r, "\langle r, r\rangle"] \arrow[d, "1"'] & A\ A \\ A \arrow[ur, hook, "\Delta"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por lo consiguiente $A = \bar{A}$ ya que $\bar{A} \leq A$.

(ii) ⇒ (iii) Como Δ es un subobjeto cerrado, su morfismo característico $\Lambda\times\Lambda \xrightarrow{s} \Omega$ se factoriza a través de $\Omega_j \xrightarrow{c} \Omega$; por lo tanto el morfismo $\{\cdot\};\Lambda \rightarrowtail \Omega^\Lambda$ se factoriza a través de Ω_j^Λ y por el corolario 3.9 Ω_j^Λ es una gavilla.

(iii) ⇒ (i). Inmediato por el lema 3.7(i).

3.13. Lema

La cerradura de $\Lambda \overset{\Delta}{\rightarrowtail} \Lambda\times\Lambda$ es una relación de equivalencia.

Demostración

Demostraremos que para todo objeto X la relación $\sim$ definida en $\hom_{\underline{E}}(X,\Lambda)$ y que está dada por

$(X \xrightarrow{x_0} \Lambda)\sim(X \xrightarrow{x_1} \Lambda)$ sii $X \xrightarrow{\langle x_0,x_1\rangle} \Lambda\times\Lambda$ se factoriza a través de $\overline{\Lambda} \xrightarrow{\Delta} \Lambda\times\Lambda$, es una relación de equivalencia. Para esto veremos que $x_0 \sim x_1$ sii coinciden en un subobjeto denso de X.

Sean $x_0,\ x_1 \in \hom_{\underline{E}}(X,\Lambda)$ arbitrarios y supongamos que $x_0 \sim x_1$ entonces el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & \Lambda\times\Lambda \\
X \arrow[ur, "\langle x_0,x_1\rangle"] \arrow[r] & \overline{\Lambda} \arrow[u, "\Delta"'] \\
X' \arrow[u, tail, "d"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "P.B."] & \Lambda \arrow[u, tail, "i"'] \arrow[uu, bend right=60, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Como A es denso en $\bar{A}$, d es denso y por la conmutatividad del diagrama exterior x_0 y x_1 coinciden en X'. Recíprocamente, supongamos que x_0, x_1 coinciden en un subobjeto denso X' de X, por lo tanto se tiene un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\langle x_0, x_1 \rangle"] \arrow[drr, dashed, "r"] & & A\times A \\
X' \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[r, tail, "i"'] & \bar{A} \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

entonces por el lema del cuadrado denso cerrado existe un único morfismo $f:X \longrightarrow \bar{A}$ tal que $\bar{\Delta} r = \langle x_0, x_1 \rangle$.

3.14. Proposición

Para todo objeto A de $\underline{E}$ existe un epimorfismo y un casi monomorfismo $s:A \twoheadrightarrow SA$ donde $SA \in Sep_j(\underline{E})$.

Demostración

Sea $\bar{A} \xrightarrow{\langle \rho_0, \rho_1 \rangle} A\ A$ la cerradura de $\Delta_A : A \longrightarrow A\times A$. Por el lema anterior $\langle \rho_0, \rho_1 \rangle$ es una relación de equivalencia; sea $q:A \twoheadrightarrow SA$ el coigualador de (ρ_0, ρ_1); entonces $\langle \rho_0, \rho_1 \rangle$ es el par núcleo de q, lo cual significa que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\bar{A} \arrow[r] \arrow[d, "\langle \rho_0, \rho_1\rangle"'] & SA \arrow[d, "\Delta_{SA}"] \\
A\times A \arrow[r, "q\times q"'] & SA\times SA
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
 & & C \\
\bar{A} \arrow[r, shift left, "\rho_0"] \arrow[r, shift right, "\rho_1"'] \arrow[dr, shift left] & A \arrow[r, "q"'] \arrow[ur, "g"] & B \arrow[u, dashed, "h"'] \\
 & X \arrow[u, shift left, "f_0"] \arrow[u, shift right, "f_1"'] \arrow[ul, shift left] &
\end{tikzcd}$$

$g \simeq \text{kerpair } (\rho_0, \rho_1)$

$(A, q) \simeq \text{Coequ } (\rho_0, \rho_1)$

$(f_0, f_1) \simeq \text{kerpair } (q)$

Ahora $q\times q$ es un epimorfismo ya que q lo es y $\langle \rho_0, \rho_1\rangle$ es un monomorfismo cerrado por construcción; en consecuencia $\Delta_{SA}=(q\times q)^{-1}(\langle \rho_0, \rho_1\rangle)$ es cerrado, ya que $\overline{(q\times q)^{-1}(\langle \rho_0, \rho_1\rangle)} = \bar{\Delta}_{SA} = (q\times q)^{-1}(\langle \rho_0, \rho_1\rangle) = \Delta_{SA}$. Por la proposición 3.12 SA está separado.

Notemos que todo epimorfismo es un casi epimorfismo.

3.15. Proposición

Para todo objeto $S \in Sep_j(\underline{E})$ existe un morfismo denso $S \rightarrowtail F$ donde $F \in sh_j(\underline{E})$.

Demostración

Como S está separado $\{\cdot\}:S \longrightarrow \Omega^S$ se factoriza a través de Ω_j^S. Por el corolario 3.9 Ω_j^S es una gavilla. Sea $\overline{S}$ la cerradura de $\{\cdot\}:S \longrightarrow \Omega_j^S$ por el lema 3.7(ii), $\overline{S}$ es una gavilla y S es denso en $\overline{S}$, esto prueba la proposición.

Con estos últimos resultados podemos probar la proposición siguiente

3.16. Proposición

Sea $sh_j(\underline{E})$ la subcategoría plena de $\underline{E}$ determinada por las j-gavillas, entonces $sh_j(\underline{E})$ es una subcategoría reflexiva.

Demostración

Sea $A \in \mathcal{O}(\underline{E})$ arbitrario. Por la proposición 3.14 existe un morfismo bidenso de A en un objeto SA que está separado. Por la proposición 3.15 se tiene un morfismo bidenso $SA \longrightarrow \overline{SA}$ donde $\overline{SA} \in sh_j(\underline{E})$. Como la composición de morfismos bidensos es bidenso, se tiene un morfismo bidenso $r_A:A \longrightarrow \overline{SA}$ donde $\overline{SA} \in sh_j(\underline{E})$. Demostraremos ahora que r_A tiene la propiedad universal. Si $f:A \longrightarrow F$ es un morfismo arbitrario y $F \in sh_j(\underline{E})$ entonces el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "r_A"] \arrow[d, "f"'] & \overline{SA} \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\ F & \end{tikzcd}$$

ya que la función $\hom_{\underline{E}}(\overline{SA},F) \xrightarrow{\hom_{\underline{E}}(r_A,1)} \hom_{\underline{E}}(A,F)$ es biyectiva. Claramente $\tilde{f}$ es única.

Podemos resumir nuestros últimos resultados con el siguiente teorema.

3,17. Teorema

$sh_j(\underline{E})$ es una subcategoría reflexiva de $\underline{E}$; el funtor reflexión $R:\underline{E} \longrightarrow sh_j(\underline{E})$ es exacto izquierdo y $sh_j(\underline{E})$ es un topo donde Ω_j es el clasificador de subobjetos.

Demostración

Lo único que tenemos que probar es que R es exacto izquierdo; la idea es comparar R con el funtor $P:\underline{E} \longrightarrow \underline{E}(\Sigma^{-1})$ que sabemos que es exacto izquierdo. Consideremos el siguiente diagrama de categorías.

$$\begin{tikzcd} sh_j(\underline{E}) \arrow[r, shift right, "i"'] \arrow[dr, "P_i"'] & \underline{E} \arrow[l, shift right, "R"'] \arrow[d, "P"] \\ & \underline{E}(\Sigma^{-1}) \end{tikzcd}$$

Como $r_A : A \longrightarrow iRA$ es bidenso y natural en A entonces $PiR \simeq P$. Si podemos probar que Pi es una equivalencia de categorías, la exactitud izquierda de R se seguirá de la exactitud izquierda de P. Para probar esto construiremos un inverso de Pi.

$$A \overset{H}{\longmapsto} RA$$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A & & B \end{tikzcd} \overset{H}{\longmapsto} R(f)R(s)^{-1} \qquad s \in \Sigma$$

R(s) es invertible ya que R manda morfismos bidensos en isomorfismos. Este último resultado es inmediato si se toma en cuenta el siguiente diagrama conmutativo:

$$X \xrightarrow{\ f\ } Y \qquad f \in \Sigma \qquad F \in sh_j(\underline{E})$$

$$\begin{tikzcd} \hom(Y,F) \arrow[r, "\hom(f,1)", "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"'] & \hom_{\underline{E}}(X,F) \arrow[d, "\simeq"] \\ \hom(RY,F) \arrow[r, "\hom(Rf,1)"'] & \hom_{\underline{E}}(RX,F) \end{tikzcd}$$

hom(Rf,1) es una biyección ya que las tres funciones que aparecen en el diagrama lo son. El resultado se sigue si hacemos F=RX y después F=RY.

Demostraremos ahora que H definido así es un funtor.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "1_A"'] \arrow[dr, "1_A"] & \\ A & & A \end{tikzcd} \quad \overset{H}{\longmapsto} R(1_A)R(1_A)=R(1_A)=1_{RA}$$

Sean $(\sigma_1, f_1), (\sigma_2, f_2)$ dos $E(\Sigma^{-1})$-morfismos tales que

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "\sigma_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & & U \arrow[dl, "\sigma_2"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

Existe un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\tau"'] & U \arrow[d, "\sigma_2"] \\ T \arrow[r, "f_1"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \tau \in \Sigma$$

en consecuencia $\sigma_2 g = f_1 \tau$ y por lo tanto $R(g)=R(\sigma_2)^{-1}R(f_1)R(\tau)$

Por lo tanto $(\sigma_2, f_2)(\sigma_1, f_1) = (\sigma_1\tau, f_2 g) \overset{H}{\longmapsto} R(f_2 g)R(\sigma_1\tau)^{-1}$.

Como R es un funtor

$R(f_2g)R(\sigma_1\tau)^{-1} = R(f_2)R(g)R(\sigma_1\tau)^{-1} = R(f_2)R(\sigma_2)^{-1}R(f_1)R(\tau)R(\sigma_1\tau)^{-1} = (*)$

$$(*) = R(f_2)R(\sigma_2)^{-1}R(f_1)R(\sigma_1)^{-1}$$

$\therefore$ H es un funtor

Demostraremos ahora que $H(Pi) \simeq 1_{sh_j}(\underline{E})$

$$HPi(A) \longmapsto HA = RA = A$$

$$A \xrightarrow{f} B \overset{}{\underset{P}{\longmapsto}} \begin{tikzcd} A & B \\ A \arrow[u] \arrow[ur, "f"'] \end{tikzcd} \underset{H}{\longmapsto} R(f)R(1_A)^{-1} = R(f) = f$$

$$\therefore\ H(Pi) \simeq 1_{sh_j(\underline{E})}$$

Por último $(Pi)H \simeq 1_{\underline{E}(\Sigma^{-1})}$. Construiremos una transformación natural $\rho:(Pi)H \longrightarrow 1_{\underline{E}(\Sigma^{-1})}$

$$(Pi)H(A) = PiRA = RA$$

$\rho_A : A \longrightarrow RA$ es tal que $\rho_A = (1_A, r_A)$ donde r_A es la reflexión de A. Afirmamos que ρ es una transformación natural. En efecto, si $(s,f):A \longrightarrow A'$ es un $\underline{E}(\Sigma^{-1})$-morfismo entonces deseamos demostrar que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "{(1,r_A)}"] \arrow[d, "{(s,f)}"'] & RA \arrow[d] \\ A' \arrow[r, "{(1,r_{A'})}"'] & RA' \end{tikzcd} \quad PiH(s,f) = Pi(R(f)R(s)^{-1}) = (1,R(f)R(s)^{-1})$$

es conmutativo.

Consideremos primero

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & A \arrow[dl, "1_A"'] \arrow[dr, "r_A"] & & RA \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "R(f)R(s)^{-1}"] & \\
A & & RA & & RA
\end{tikzcd}
$$

Como el cuadrado

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r_A"] \arrow[d, "1"'] & RA \arrow[d, "1"] \\
A \arrow[r, "r_A"'] & RA
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo entonces

$$PiH(s,f)(1,r_A) = (1,RfR(s)^{-1}rA)$$

Por otro lado

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & C \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & A' \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "r_{A'}"] & \\
A & & A' & & RA'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & A' \arrow[d, "1"] \\
C \arrow[r, "f"'] & A'
\end{tikzcd}
$$

entonces $(1,r_{A'})(s,f) = (s,r_{A'}f)$

Demostraremos ahora que $(s,r_{A'}f)$ $(1,RfR(s)^{-1}r_A)$. Como el triângulo

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r_A"] \arrow[d, "r_{A'}f"'] & RA \arrow[dl, dashed, "z=R(f)"] \\
RA' &
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo entonces $r_{A'}f = Rfr_A$. Análogamente $R(s)r_C = r_A s$ y $Rfr_C = r_{A'}f$. El diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r] & RA' \\
A \arrow[ur, "1_A"] \arrow[urr, "RfR(s)^{-1}r_A"'] & & \\
 & C \arrow[ul, "s"] \arrow[r] & C \arrow[ul, "s"'] \arrow[uu, "r_{A'}f"']
\end{tikzcd}$$

es conmutativo ya que $S \in \Sigma$ y $R(f)R(s)^{-1}r_A s = R(f)R(s)R(s)^{-1}r_C = r_{A'}f$

Por último demostraremos que $(1,r_A)$ es un isomorfismo. Consideremos

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "r_A"] & & A \arrow[dl, "r_A"'] \arrow[dr, "1"] & \\
A & & RA & & A
\end{tikzcd}$$

entonces como el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & A \arrow[d, "r_A"] \\
A \arrow[r, "r_A"'] & RA
\end{tikzcd}$$

es conmutativo entonces $(r_A,1_A)(1_A,r_A) = (1_A,1_A)$

Ahora, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "r_A"'] \arrow[dr, "1"] & & A \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "r_A"] & \\
RA & & A & & RA
\end{tikzcd}$$

es tal que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{1} & \Lambda \\ {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ \Lambda & \xrightarrow[1]{} & \Lambda \end{array}$$

es conmutativo; por lo tanto $(1_\Lambda, r_\Lambda)(r_\Lambda, 1_\Lambda) = (r_\Lambda, r_\Lambda) \sim (1_{R\Lambda}, 1_{R\Lambda})$. Por lo tanto ρ_Λ es un isomorfismo y el teorema está probado.

3.18. Corolario

Para todo objeto X de $\underline{E}$ el morfismo universal $X \longrightarrow RX$ es bidenso.

3.19. Proposición.

Sea $X' \overset{\sigma}{\rightarrowtail} X$ un monomorfismo en $\underline{E}$. Entonces $R(\sigma)$ es un isomorfismo sii σ es denso.

Demostración

En la demostración del teorema 3.17 se probó que si σ era bidenso entonces $R(\sigma)$ es un isomorfismo. Supongamos entonces que $R(\sigma)$ es un isomorfismo; entonces para toda gavilla F, cualquier morfismo $X' \longrightarrow F$ se factoriza de manera única a través de σ. En efecto consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "r_{X'}"] \arrow[d, "r_X\sigma"'] & RX' \arrow[dl, dashed, "\exists ! s = R(\sigma)"] \\ RX & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto existe un único morfismo $s=R(\sigma)$ tal que $R(\sigma)r_{X'}=r_X\sigma$. Por lo consiguiente si $h:X' \longrightarrow F$ es cualquier morfismo donde $F \in sh_j(\underline{E})$ se tiene que:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "r_{X'}"] \arrow[d, "h"'] & RX' \arrow[dl, dashed, "k"] \\ F & \end{tikzcd}$$

Existe un único morfismo $k:RX' \longrightarrow F$ tal que $kr_{X'}=h$ y por lo tanto $h=kr_{X'}=kR(\sigma)r_X\sigma$; i.e., h se factoriza a través de σ.

La afirmación es cierta en particular, para la gavilla Ω_j; entonces todo subobjeto cerrado de X' es la intersección de X' con un único subobjeto cerrado de X.

Si $X'' \overset{k}{\rightarrowtail} X$ es un subobjeto cerrado de X entonces la intersección

$$\begin{tikzcd} X''' \arrow[r, "r"] \arrow[d] & X' \arrow[d, "\sigma"] \\ X'' \arrow[r, "k"'] & X \end{tikzcd}$$

es cerrado en X' ya que $r=\sigma^{-1}(k)$ $\therefore$ $\overline{r}=\overline{\sigma^{-1}(k)}=\sigma^{-1}(\overline{k})=\sigma^{-1}(k)=r$

Recíprocamente, sea $X'' \overset{\phi}{\rightarrowtail} X'$ un subóbjeto cerrado de X' entonces existe una factorización de χ_ϕ de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "\chi_\phi"] \arrow[dr, "r"'] & & \Omega \\ & \Omega_j \arrow[ur, "e"'] & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto r se factoriza a través de σ; i,e., $r=x\sigma$. Consideremos el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} X''' \arrow[r] \arrow[dd] \arrow[ddr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & X \arrow[d, "\chi"] \\ & \Omega_j \arrow[d, "e"] \\ 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Como el morfismo característico de X''' se factoriza a través de e, X''' es cerrado, pero si consideramos el producto fibrado de X'' y X' obtenemos

$$\begin{tikzcd}
X'' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & X' \arrow[d, "\sigma"] \\
X''' \arrow[r] \arrow[dd] \arrow[ddr, phantom, "P.F."] & X \arrow[d, "\chi"] \\
 & \Omega_j \arrow[d, "e"] \\
1 \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}$$

ya que $e\chi\sigma = er = \chi\phi$.

Como el subobjeto $X' \rightarrowtail{1} X'$ es la intersección de X' con $X \xrightarrow{1} X$ o bien con $\overline{X'} \xrightarrow{\bar{\sigma}} X$ entonces debemos de tener que $\bar{\sigma} \cong 1_X$; i,e., σ es denso.

3.20. Corolario

Sea $f:X \longrightarrow Y$ cualquier $\underline{E}$-morfismo. Entonces $R(f)$ es un isomorfismo (respectivamente, monomorfismo, epimorfismo) sii f es bidenso (respectivamente casi monomorfismo, casi epimorfismo).

Demostración

Sea $f:X \longrightarrow Y \in \mathrm{Mor}(\underline{E})$ arbitrario, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, shift left, "a"] \arrow[rr, shift right, "b"'] & & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"] & & Y \\
 & X \arrow[ul, "\tau"] \arrow[ur, "1"'] & & Q \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

donde (a,b) es el par-núcleo de f y q es el coigualador de (a,b)

Si $R(f)$ es un epimorfismo entonces $R(i)$ es un isomorfismo, por la proposición 3.19 i es denso. Recíprocamente si $R(i)$ es un isomorfismo entonces $R(f)$ es un epimorfismo.

Si τ es denso entonces $R(a) = R(b)$; por lo tanto $R(q)$ es un isomorfismo en consecuencia $R(f)$ es un monomorfismo. Si $R(f)$ es un monomorfismo entonces $L(a) = L(b)$ y por lo tanto $L(\tau)$ es un isomorfismo.

3.21. Proposición

La composición $sh_j(\underline{E}) \xrightarrow{i} \underline{E} \xrightarrow{P} \underline{E}(\Sigma^{-1})$ es una equivalencia de categorías.

El siguiente resultado nos servirá de mucho cuando se pruebe el teorema de factorización para morfismos geométricos.

3.22. Teorema (Lawvere-Tierney)

Sean $\underline{F} \xrightarrow{f} \underline{E}$ un morfismo geométrico, j una topología en $\underline{E}$. Las siguientes condiciones son equivalentes.

i) Existe un morfismo geométrico $\underline{F} \xrightarrow{g} sh_j(\underline{E})$ tal que $ig \simeq f$.

ii) f^* manda todo morfismo j-bidenso en un isomorfismo.

iii) f^* manda todos los morfismos j-densos en isomorfismos.

iv) $f^*(1 \xrightarrow{d} J)$ es un isomorfismo.

v) Para todo objeto Y de $\underline{F}$, $f_*(Y)$ es una j-garilla.

Demostración

(i) ⇒ (ii) Es inmediato a partir del corolario y por que $f^* \underset{\sim}{} g^*i^*$

(ii) ⇒ (iii) Inmediato.

(iii) ⇒ (iv) Inmediato ya que $1 \xrightarrow{d} J$ es denso ($\bar{J} = \bar{1}$)

(iv) ⇒ (iii) Sea $g: A \rightarrowtail X$ un morfismo denso arbitrario respecto a la topología j. Por lo tanto el morfismo característico χ_g se factoriza a través de $J \xrightarrow[\bar{t}]{} \Omega$ en consecuencia el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & X \arrow[d, "h"] \\ 1 \arrow[r, tail, "d"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & J \arrow[d, "\bar{t}"] \\ 1 \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. Por lo tanto el cuadrado

$$\begin{tikzcd} f^* A \arrow[r, tail, "f^*g"] \arrow[d] & f^* X \arrow[d] \\ 1 \underset{\sim}{} f^* 1 \arrow[r, tail, "f^*d"'] & f^* \bar{J} \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado pero por (iv) f^*d es un isomorfismo, en consecuencia f^*g es un isomorfismo.

(iii) ⇒ (v)) Consideremos $\eta : 1 \longrightarrow f_*f^*$ y $\varepsilon : f^*f_* \longrightarrow 1$. Supongamos que tenemos

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\alpha} & f_*(Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \\ X & & \end{array}$$

donde σ es denso. Transponiendo obtenemos

$$\begin{array}{ccc} f^*X' & \xrightarrow{\overline{\alpha}} & Y \\ {\scriptstyle\simeq}\Big\downarrow{\scriptstyle f^*(\sigma)} & & \\ f^*X & & \end{array} \qquad \overline{\alpha} = \varepsilon_Y f^*(\alpha)$$

y $\overline{\alpha}$ se factoriza de manera única a través de $f^*(\sigma)$. Por lo tanto

$$hf^*(\sigma) = \varepsilon_Y f^*(\alpha)$$
$$f_*(hf^*\sigma) = f_*\varepsilon_Y f_*f^*\alpha$$

Como los cuadrados siguientes:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\eta_{X'}} & f_*f^*X' \\ {\scriptstyle\sigma}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*f^*\sigma} \\ X & \xrightarrow[\eta_X]{} & f_*f^*X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\eta_{X'}} & f_*f^*X' \\ {\scriptstyle\alpha}\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ f_*Y & \xrightarrow[\eta_{f_*Y}]{} & f_*f^*f_*Y \end{array}$$

son conmutativos entonces

$$f_*(hf^*\sigma)\eta_{X'} = f_*(h)\eta_X\sigma$$

y además

$$f_*\varepsilon_Y f_* f^*\alpha\eta_X = f_*\varepsilon_Y\eta_{f_*Y}\alpha = \alpha$$

Por lo tanto α se factoriza de manera única a través de σ.

(v) ⇒ (i)) Dado (v), se tiene claramente un funtor (único) g^* tal que $i_*g_* = f_*$ y podemos definir g^* como la composición de f^* e i_* ya que tenemos biyecciones naturales

$$\frac{\dfrac{F \longrightarrow g_*Y}{i_*F \longrightarrow f_*Y}}{g^*F \longrightarrow Y}$$

para $F \in Sh_j(\underline{E})$, $Y \in \underline{F}$. Además, el isomorfismo $i_*g_* \cong f_*$ determina g_* (y por lo tanto g^*) salvo isomorfismos canónicos ya que i_* es pleno y fiel.

Topologías Inducidas

Sea $\pi = (T,\eta,\mu)$ una monada exacta izquierda definida en $\underline{E}$. Definimos un morfismo

$$j: \Omega \longrightarrow \Omega$$

como la composición

$$\Omega \xrightarrow{\eta_\Omega} \Omega \xrightarrow{\chi_{T(t)}} \Omega \qquad t = 1 \longrightarrow \Omega$$

4.1. Proposición

El morfismo j define una topología en $\underline{E}$, que en términos de operaciones cerradura a un subobjeto $X' \rightarrowtail X$ le asocia el morfismo superior que aparece en el producto fibrado

$$\begin{array}{ccc} \overline{\overline{X}} & \rightarrowtail & X \\ \downarrow & \text{P.F.} & \downarrow \eta_X \\ TX' & \rightarrowtail & TX \end{array} \qquad \ldots (1)$$

Llamamos a este topología, la topología inducida por T.

Demostración

Probaremos primero que el morfismo $j:\Omega \longrightarrow \Omega$ clasifica la operación en $P_{\sim}(X)$ como en (1). Sea $\chi:X' \rightarrowtail X$ un subobjeto de X y consideremos $\xi:X \longrightarrow \Omega$ el morfismo característico de χ. El morfismo

$$X \xrightarrow{\xi} \Omega \xrightarrow{\eta_\Omega} T\Omega \xrightarrow{\chi_{T(t)}} \Omega$$

es igual a

$$X \xrightarrow{\eta_X} TX \xrightarrow{T(\xi)} T\Omega \xrightarrow{\chi_{T(t)}} \Omega$$

Para ver que subobjeto de X clasifica tomaremos los siguientes productos fibrados,

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "x"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & X \arrow[d, "\xi"] \\ 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd} \quad \overset{T}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} TX' \arrow[r, "Tx"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & TX \arrow[d] \\ T(1) \arrow[r, "T(t)"'] & T\Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(1) \arrow[r, "T(t)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & T\Omega \arrow[d, "\chi_{T(t)}"] \\ 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bar{X}' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & X \arrow[d, "\eta_X"] \\ TX' \arrow[r, "T(x)"'] & TX \end{tikzcd}$$

Notemos primero que $X' \leq \bar{X}'$ en $P_{\sim}(X)$. En efecto, como η es natural entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[drr, bend left, "x"] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr, bend right=60, "\eta_{X'}"'] & & \\ & \bar{X}' \arrow[r, tail] \arrow[d] & X \arrow[d, "\eta_X"] \\ & TX' \arrow[r, tail, "T(x)"'] & TX \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Ahora bien, probar que $\bar{\bar{X}}' \leq \bar{X}'$ es equivalente a probar que $jj = j$. Notemos primero que aunque el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\eta_\Omega"] & T\Omega \\ 1 \arrow[u, "t"] \arrow[r, "\sim"'] & T(1) \arrow[u, "T(t)"'] \end{tikzcd}$$

no es en general un producto fibrado, T aplicado a este último es un producto fibrado ya que $T(\eta_\Omega)$ es un monomorfismo (de hecho es una sección si consideramos μ_Ω). Ahora, consideremos jj

$$\begin{aligned} jj &= \chi_{T(t)}\eta_\Omega\chi_{T(t)}\eta_\Omega \\ &= \chi_{T(t)}T(\chi_{T(t)})T(\eta_\Omega)\eta_\Omega \end{aligned}$$

Veremos que subobjeto clasifica considerando los siguientes productos fibrados.

$$\begin{tikzcd} T(1) \arrow[r, "T(t)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & T\Omega \arrow[d, "\chi_{T(t)}"] \\ 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd} \quad \overset{T}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} T^2(1) \arrow[r, "T^2(t)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & T\Omega \arrow[d, "T(\chi_{T(t)})"] \\ T(1) \arrow[r, "T(t)"'] & T\Omega \end{tikzcd};$$

$$\begin{tikzcd} T(1) \arrow[r, "T(t)"] \arrow[d] & T\Omega \arrow[d, "T\eta_\Omega"] \\ T^2(1) \arrow[r, "T^2(t)"'] & T^2\Omega \end{tikzcd}$$

y finalmente

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \Omega \arrow[d, "\eta_\Omega"] \\ T(1) \arrow[r, "T(t)"'] & T\Omega \end{tikzcd}$$

pero esto es lo que se obtiene al tomar el producto fibrado de j con t .

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \Omega \arrow[d, "\eta_\Omega"] \\ T(1) \arrow[r, "T(t)"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & T\Omega \arrow[d, "\chi_{T(t)}"] \\ 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, por la unicidad de los morfismos característicos jj = j.

Como T es exacto izquierdo, dados $f\colon X' \rightarrowtail X$ y $g\colon X'' \rightarrowtail X$ dos subobjetos se tiene un producto fibrado de la forma

$$\begin{tikzcd}
T(X' \cap X'') \arrow[r, "T(\chi)"] \arrow[d, "T(g)"'] & TX' \arrow[d, "T(f)"] \\
TX'' \arrow[r, "T(g)"'] & TX
\end{tikzcd}$$

Construiremos ahora un morfismo $r\colon \overline{X''} \cap \overline{X''} \longrightarrow T(X' \cap X'')$, por definición $\bar{X}'$ y $\bar{X}''$ se construyen como:

$$\begin{tikzcd}
\bar{X}' \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & X \arrow[d, "\eta_X"] \\
TX' \arrow[r, "T(f)"'] & TX
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bar{X}'' \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & X \arrow[d, "\eta_X"] \\
TX'' \arrow[r, "T(g)"'] & TX
\end{tikzcd}$$

$$\therefore \quad \begin{tikzcd}
\bar{X}' \cap \bar{X}'' \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "s"'] & \bar{X}' \arrow[d, "\bar{f}"] \\
\bar{\bar{X}}'' \arrow[r, "\bar{g}"'] & X
\end{tikzcd}$$

Entonces el diagrama exterior

$$\begin{tikzcd}
\bar{X}' \cap \bar{X}'' \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "kr_1"] \arrow[ddr, bend right, "ks"'] & & \\
& T(X' \cap X'') \arrow[r, "T(x)"] \arrow[d, "T(y)"'] & TX' \arrow[d, "T(f)"] \\
& TX'' \arrow[r, "T(g)"'] & TX
\end{tikzcd}$$

Es conmutativo, por lo tanto existe un único morfismo r que hace conmutativos los triángulos correspondientes. Con este morfismo construiremos ahora un morfismo u: $\overline{X}' \cap \overline{X}'' \longrightarrow \overline{X' \cap X''}$. Por definición de la operación cerradura el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\overline{X' \cap X''} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & X \arrow[d, "X"] \\
T\,\overline{X' \cap X''} \arrow[r, "T(f_X)"'] & TX
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. Consideramos, por último, el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\overline{X}}' \cap \overline{\overline{X}}'' \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "\overline{f}\, r_1"] \arrow[ddr, bend right, "r"'] & & \\
& \overline{X' \cap X''} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & X \arrow[d, "\eta_X"] \\
& T(\overline{X' \cap X''}) \arrow[r, "T(f_X)"'] & TX
\end{tikzcd}$$

entonces claramente el diagrama exterior es conmutativo y por lo consiguiente existe un único morfismo u: $\overline{X'} \cap \overline{X''} \longrightarrow \overline{X' \cap X''}$ que hace conmutativo los triángulos correspondientes. Esto termina la demostración de la proposición.

Sea $\pi = (T, \eta, \mu)$ una monada indempotente en una categoría $\underline{\Lambda}$ (que π sea idempotente equivale a decir que μ_A es un isomorfismo para toda $A \in \mathcal{O}(\underline{\Lambda})$); demostraremos que π es isomorfa a una monada definida por una subcategoría reflexiva $\underline{E}'$ de $\underline{E}$ (tomando como endofuntor a la reflexión seguida por la inclusión) donde $\underline{E}'$ es la subcategoría plena de $\underline{E}$ determinada por aquellos $\underline{\Lambda}$-objetos A para los cuales η_A es un isomorfismo,

En efecto, consideremos la subcategoría $\underline{E}'$ de $\underline{E}$ (plena) con la propiedad mencionada arriba. Si $A \in \mathcal{O}(\underline{A})$ consideramos $r_A = \eta_A : A \longrightarrow TA$, $TA \in \underline{E}'$ ya que $\mu_A \eta_{TA} = 1$ y μ_A es un isomorfismo. Si $f : A \longrightarrow E$ es un morfismo arbitrario cuyo dominio pertenece a $\underline{E}'$ entonces como el cuadrado siguiente

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & TA \arrow[d, "Tf"] \\ E \arrow[r, "\eta_E"'] & TE \end{tikzcd}$$

es conmutativo, el triángulo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "r_A"] \arrow[d, "f"'] & TA \arrow[dl, "\eta_E^{-1}\ Tf"] \\ E & \end{tikzcd}$$

también lo es. Ahora $\underline{E}'$ define una monada como sigue: $(\overline{T}, \overline{\eta}, \overline{\mu})$ donde:

$$\overline{T} = \underline{E} \xrightarrow{R} \underline{E}' \xrightarrow{i} \underline{E}$$

$$\overline{\eta}_A = \eta_A \quad \forall\ A \in \mathcal{O}(\underline{E})$$

$$\overline{\mu}_A = \mu_A$$

Claramente (T, η, μ) es isomorfa a $(\overline{T}, \overline{\eta}, \overline{\mu})$

Supongamos ahora que $\pi = (T, \eta, \mu)$ es una monada idempotente, exacta izquierda definida en $\underline{E}$, sea j la topología inducida por π y sea $\underline{E}'$ la subcategoría reflexiva asociada a π como en el párrafo anterior. Entonces se puede probar la siguiente proposición.

4.2. Proposición

Las subcategorías $Sh_j(\underline{E})$ y $\underline{E}'$ de $\underline{E}$ son iguales. En particular, toda subcategoría reflexiva de $\underline{E}$ cuyo funtor reflexión sea exacto izquierdo es la categoría de gavillas para cierta topología j definida en $\underline{E}$.

Demostración

Probaremos primero que A está separado sii η_A es un monomorfismo. Supongamos que A está separado, por lo tanto $\Delta_A : A \rightarrowtail A\times A$ es cerrado en $P_{\sim}(A\times A)$ lo cual implica que en el siguiente diagrama conmutativo el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta_A"] \arrow[d, "\eta_A"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A\times A \arrow[d, "\eta_{A\times A}"] \arrow[dr, bend left, "\eta_A\times \eta_A"] & \\
TA \arrow[r, "T\Delta_A"'] \arrow[rr, bend right, "\Delta_{TA}"'] & T(A\times A) \arrow[r, "\delta"', "\cong"] & TA\times TA
\end{tikzcd} \qquad \ldots (2)$$

es un producto fibrado. Como el morfismo canónico $\delta : T(A\times A) \longrightarrow TA\times TA$ es un isomorfismo el cuadrado exterior es un producto fibrado y en consecuencia η_A es un monomorfismo ya que si f,g son dos morfismos tales que $f\eta_A = g\eta_A$ entonces el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "f=g"] \arrow[drr, bend left, "\langle f,g\rangle"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& \Lambda \arrow[r, "\Delta_\Lambda"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & \Lambda\times\Lambda \arrow[d, "\eta_\Lambda\times\eta_\Lambda"] \\
& T\Lambda \arrow[r, "\Delta_{T\Lambda}"'] & T\Lambda\times T\Lambda
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo y por lo tanto $f = g$.

Recíprocamente, si η_Λ es un monomorfismo entonces el diagrama exterior en (2) es un producto fibrado, por lo tanto el cuadrado interno también es un producto fibrado, por lo tanto Δ_Λ es cerrado y Λ está separado.

Probaremos ahora que η_Λ es un isomorfismo sii Λ es una gavilla. Supongamos que η_Λ es un isomorfismo. Sean $f:Y \longrightarrow \Lambda$ un morfismo arbitrario y $y:Y \longrightarrow X$ un morfismo denso; debemos probar que f se extiende a y. Ahora bien, consideremos el siguiente producto fibrado

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dashed, "y"] \arrow[drr, bend left, "y"] \arrow[ddr, bend right, "\eta_Y"'] & & \\
& X \arrow[r, "1"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & X \arrow[d, "\eta_X"] \\
& TY \arrow[r, "T(y)"'] & TX
\end{tikzcd}
$$

Consideremos el siguiente morfismo

$$X \xrightarrow{h} TY \xrightarrow{Tf} T\Lambda \xrightarrow{\eta_\Lambda^{-1}} \Lambda$$

entonces $\eta_A^{-1}Tfhy = \eta_A^{-1}Tf\eta_y = \eta_A^{-1}\eta_A f = f$. La unicidad se sigue inmediatamente ya que A está separado.

Notemos que todo objeto de la forma T(X) es una gavilla ya que η_{TX} es un isomorfismo (aquí se usó la idempotencia). Recíprocamente, sea A una gavilla entonces en particular A está separado, por lo tanto η_A es un monomorfismo; podemos formar la cerradura $\bar{A}$ del subobjeto $\eta_A : A \longrightarrow TA$ de TA. Como TA es una gavilla y en particular está separado y como la inclusión $i : A \longrightarrow \bar{A}$ es denso entonces i es un isomorfismo ya que todo monomorfismo de dominio una gavilla y codominio un objeto que está separado es cerrado. Tenemos un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "i"] \arrow[drr, dashed, "\eta_A"] \arrow[ddr, bend right, "\eta_A"'] & & \\
& \bar{A} \arrow[r, "i'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & TA \arrow[d, "\eta_{TA}"] \\
& TA \arrow[r, "T(\eta_A)"'] & T\ A
\end{tikzcd}$$

Como $T(\eta_A)$ es un isomorfismo i' también lo es y en consecuencia $\eta_A = i'i$ también lo es. Esto termina la demostración.

Morfismos Geométricos

Nuestro propósito es demostrar el teorema de factorización de Lawvere-Tierney, para esto comenzaremos demostrando el siguiente teorema.

5.1. Teorema

Sean $\underline{E}$ y $\underline{E}'$ topos, sea $f:\underline{E} \longrightarrow \underline{E}'$ un morfismo geométrico consideremos la topología j en $\underline{E}'$ inducida por f. Entonces un morfismo $K \xrightarrow{\alpha} L$ en $\underline{E}'$ es j-bidenso sii $f^*(\alpha)$ es un isomorfismo.

Demostración

Demostraremos primero que la conclusión se cumple en general si se cumple cuando α es un monomorfismo. Es decir, supongamos que $M \xrightarrow{\beta} N$ es un monomorfismo en $\underline{E}'$ tal que β es j-denso siempre y cuando $f^*(\beta)$ es un isomorfismo. Ahora, supongamos que $K \xrightarrow{\alpha} L$ es un morfismo en $\underline{E}'$ tal que $f^*(\alpha)$ es un isomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, shift left, "k_0"] \arrow[r, shift right, "k_1"'] & K \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr] & & L \\ & & \mathrm{Im}\ K \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

donde (k_0, k_1) es el par núcleo de α. Como f^* es exacto izquierdo preserva par núcleos y (epimorfismos, monomorfismos)-factorizaciones; Por lo tanto $f^*\beta$ es un isomorfismo y por lo tanto $f^*k_0=f^*k_1$, si $s:K \longrightarrow W$ es el único morfismo tal que $k_0s=k_1s=1_K$ entonces s es un monomorfismo y $f^*(s)$ es un isomorfismo, por lo tanto s es j-denso. Por lo consiguiente α es j-bidenso.

Recíprocamente, supongamos que $\alpha : K \longrightarrow L$ es j-bidenso. Entonces s, β son monomorfismos j-densos. Si aplicamos f^* al diagrama anterior obtenemos que $f^*(\beta)$ y $f^*(s)$ son isomorfismos; por lo tanto $f^*(k_0) = f^*(k_1)$ y $f^*(\alpha)$ es un isomorfismo.

Lo único que tenemos que probar es que la conclusión es válida para monomorfismos j-densos en $\underline{E}'$. Supongamos que β es un monomorfismo $\beta : M \longrightarrow N$ tal que $f^*\beta$ es un isomorfismo. Sea $\rho : N \longrightarrow \Omega'$ su morfismo característico.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\eta_N"'] & \Omega' \arrow[d] \arrow[dr, "j"] & \\
f_*f^*N \arrow[r, "f_*f^*\rho"'] \arrow[d, "f_*f^*\beta"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & f_*f^*\Omega' \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "f_*f^*t'"] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \Omega' \\
f_*f^*M \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 1 \arrow[u, "t'"']
\end{tikzcd}$$

donde λ es el morfismo característico de

$$1 \xrightarrow{\eta_1} f_*f^*1 \xrightarrow{f_*f^*t'} f_*f^*\Omega'$$

La cerradura de $M \xrightarrow{\beta} N$ para la topología j tiene como morfismo característico a $j\rho$ y por lo tanto está dado por el producto fibrado de $f_*f^*\beta$ y η_N. Por hipótesis $f^*\beta$ es un isomorfismo, en consecuencia β es j-denso.

Recíprocamente, supongamos que $\beta : M \rightarrowtail N$ es j-denso. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
f^*N \arrow[r, "f^*\rho"] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & f^*\Omega' \arrow[r, "f^*\eta_{\Omega'}"] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & f^*f_*f^*\Omega' \arrow[r, "f^*\lambda"] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & f^*\Omega' \arrow[r, "\chi"] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \Omega \\
f^*M \arrow[u, "f^*\beta"] \arrow[r] & 1 \arrow[u, "f^*t'"] \arrow[r] & 1 \arrow[u, "f^*f_*f^*t'"] \arrow[r] & 1 \arrow[u, "f^*t'"] \arrow[r] & 1 \arrow[u, "t"']
\end{tikzcd}$$

Todos los cuadrados son productos fibrados (χ es el morfismo característico de $1 \xrightarrow{\sim} f^*1 \xrightarrow{f^*t'} f^*\Omega'$). El segundo cuadrado de izquierda a derecha es un producto fibrado ya que $f^*\eta_{\Omega'}$ es un monomorfismo. El morfismo que aparece en la parte superior del diagrama es igual a: $\chi\, f^*(j\rho)$ y por hipótesis el morfismo que clasifica $j\rho$ es:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "1"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & N \arrow[d, "j\rho"] \\
1 \arrow[r, "t'"'] & \Omega'
\end{tikzcd}
\qquad N \longrightarrow 1 \xrightarrow{t'} \Omega' = j\rho$$

Entonces se tienen productos fibrados de la forma

$$\begin{tikzcd}
f^*N \arrow[r] & 1 \arrow[r, "f^*t'"] \arrow[dr, phantom, "f_*(1)"] & f^*\Omega' \arrow[r, "\chi"] \arrow[dr, phantom, "f^*t' \; P.F."] & \Omega \\
f^*M \arrow[u, "f^*\beta"] \arrow[r] & 1 \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u, "t"']
\end{tikzcd}
\qquad . \; . \; . \; (1)$$

Como (1) es un producto fibrado y
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "f^*t'"] & f^*\Omega' \arrow[r] & \Omega \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u, "f^*t'"] \arrow[r] & 1 \arrow[u, "t"'] \end{tikzcd}$$

también lo es

entonces
$$\begin{tikzcd} f^*M \arrow[r, "f^*\beta"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & f^*N \arrow[d] \\ 1 \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$
es un producto fibrado, por lo tanto

$f^*\beta$ es un isomorfismo ya que $1 \longrightarrow 1$ es un epimorfismo. Esto termina la demostración.

Con este teorema se puede demostrar el teorema de factorización de Lawvere-Tierney.

5.2. Teorema de Factorización (Lawvere-Tierney).

Todo morfismo geométrico $f:\underline{E} \longrightarrow \underline{E}'$ donde $\underline{E}$ y $\underline{E}'$ son topos, tiene una factorización

$$\begin{tikzcd} \underline{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\underline{a}"'] & & \underline{E}' \\ & \underline{F} \arrow[ur, "\underline{b}"'] & \end{tikzcd}$$

donde b_* es fiel y pleno, a^* refleja isomorfismos.

Demostración

Sea $\underline{F}=sh_j(\underline{E}')$ donde j es la topología inducida por f, consideremos $\underline{b}$ el morfismo canónico para j. Entonces b_* es fiel y pleno; por el primer teorema de factorización que se probó y el teorema anterior existe un morfismo geométrico $\underline{E} \xrightarrow{a} \underline{F}$ tal que $ba=f$. Sea g un morfismo en $\underline{E}$ tal que $a^*(g)$ es un isomorfismo. Como $a^*g=f^*b_*g$, b_*g es j-bidenso, por lo tanto $b^*b_*g=g$ es un isomorfismo y en consecuencia a^* refleja isomorfismos.

5.3. Lema

Sea $\underline{E} \xrightarrow{f} \underline{E}'$ un morfismo geométrico tal que f_* es pleno, fiel y f^* refleja isomorfismos entonces f es una equivalencia.

Demostración

Para todo objeto X de $\underline{E}'$ consideremos la unidad

$$\eta_X : X \longrightarrow f_*f^*X$$

Al ser f_* fiel y pleno, $\varepsilon : f^*f_* \longrightarrow 1$ es un isomorfismo, en consecuencia $f^*(\eta_X)$ también lo es. Como f^* refleja isomorfismos η_X es un isomorfismo.

5.4. Corolario

Si $\underline{E}$ y $\underline{E}'$ son topos, $f:\underline{E} \longrightarrow \underline{E}'$ es un morfismo geométrico tal que f_* es fiel y pleno entonces existe una equivalencia de categorías

$$a_*: \underline{E} \xrightarrow{\sim} Sh_j(\underline{E}')$$

tal que $f_* = b_* a_*$, donde j es la topología inducida por f y b_* es la inclusión de las j-gavillas.

Demostración

Inmediata por el lema anterior.

5.5. Corolario

Sean $f_1:\underline{E}_1 \longrightarrow \underline{E}'$, $f_2:\underline{E}_2 \longrightarrow \underline{E}'$ una pareja de morfismos geométricos. Si f_{2*} es fiel y pleno una condición necesaria y suficiente para que f_1 se factorice a través de f_2 es que para todo morfismo α en $\underline{E}'$ tal que $f_2^*(\alpha)$ es un isomorfismo se tenga también que $f_1^*(\alpha)$ es un isomorfismo.

Demostración

Si f_1 se factoriza a través de f_2 entonces $f_2^*(\alpha)$ isomorfismo implica $f_1^*(\alpha)$ isomorfismo. Por el corolario anterior $\underline{E}_2 \simeq sh_{j_2}(\underline{E}')$ donde j_2 es la topología inducida por f_2 . Demostraremos que $sh_{j_1}(\underline{E}') \simeq sh_j(\underline{E}')$ si se satisface que $f_2^*(\alpha)$ es un isomorfismo $\Rightarrow f_2^*(\alpha)$ es un isomorfismo:

Sea F una j_1-gavilla y $d:X' \longrightarrow X$ j_2- denso; por lo tanto $f_2^*(d)$ es un isomorfismo, por hipótesis $f_1^*(d)$ es un isomorfismo, por lo consiguiente d_1 es j_1-denso; $\therefore$ $F \in sh_{j_2}(\underline{E}')$.

$\therefore$ $sh_{j_1}(\underline{E}') \subset sh_{j_2}(\underline{E}')$.

Como $\underline{E}'(\Sigma_2^{-1}) \simeq sh_{j_2}(\underline{E}')$ y $\underline{E}'(\Sigma_1^{-1}) \simeq sh_{j_1}(\underline{E}')$ entonces sea $d:X' \longrightarrow X$ un morfismo en E', j_2-bidenso entonces $f_2^*(d)$ es un isomorfismo y $f_1^*(d)$ también lo es. Por lo tanto d es j_1-bidenso y en consecuencia

$$\underline{E}'(\Sigma_2^{-1}) \subset \underline{E}'(\Sigma_1^{-1})$$

Esto termina la demostración.

5.6. Teorema

Sea

$$\begin{array}{ccccc} \underline{E}_1 & \xrightarrow{a_1} & \underline{F}_1 & \xrightarrow{b_1} & \underline{E}'_1 \\ u \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow w \\ \underline{E}_2 & \xrightarrow[a_2]{} & \underline{F}_2 & \xrightarrow[b_2]{} & \underline{E}'_2 \end{array}$$

un diagrama conmutativo de morfismos geométricos tal que a_1^* refleja isomorfismos y b_{2*} es fiel y pleno. Entonces existe un morfismo geométrico $\underline{F}_1 \xrightarrow{\sigma} \underline{E}_2$ tal que hace conmutativo el diagrama.

Demostración

Sea α un morfismo en $\underline{E}'_2$ tal que $b_2^*(\alpha)$ es un isomorfismo. Entonces $u^*a_2^*b_2^*(\alpha) = a_1^*b_1^*w^*(\alpha)$ es un isomorfismo. Por lo tanto $b_1^*w^*(\alpha)$ es un isomorfismo, por el corolario anterior existe un morfismo geométrico tal que $b_2v=wb_1$. Al ser b_{2*} fiel y pleno $\underline{F}_2 \simeq Sh_{j_2}(\underline{E}'_2)$ donde j_2 es la topología inducida por b_2; por lo tanto el cuadrado que aparece a la izquierda del diagrama es conmutativo.

5.7. Corolario.

La factorización que aparece en el teorema de Lawvere-Tierney es única (salvo por isomorfismos).

Demostración

Sea $\underline{E} \xrightarrow{f} \underline{E}'$ un morfismo geométrico arbitrario y supongamos que existen dos factorizaciones de f; i.e., existe un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
\underline{E} \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "1"'] & \underline{F} \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, dashed, "v"] & \underline{E}' \arrow[d, "1"] \\
\underline{E} \arrow[r, "a_2"'] & \underline{F}' \arrow[r, "a_2"'] & \underline{E}'
\end{tikzcd}$$

donde a_i^* refleja isomorfismos y b_i^* es pleno y fiel (i=1,2). Por el teorema anterior existe un morfismo geométrico $v:\underline{F} \longrightarrow \underline{F}'$ que hace conmutativo el diagra grama. v^* refleja isomorfismos ya que $a_1^*v^*=a_2^*$ y v_* es fiel y pleno pues $b_2^*v_*=b_{1*}$. Por el lema 5.3 v es una equivalencia.

BIBLIOGRAFIA

i) P. Freyd, Aspects of Topoi, Bull. Australian Math. Soc. (1972). Vol. 7 pp 1-76.

ii) P. Gabriel y M. Zisman, Calculus of Fractions and homotopy Theory, Springer Verlag 1961.

iii) R. Goldblatt. Topoi, the categorial analysis of logic. North-Holland Publishing Company 1979.

iv) S. Maclane. Categories for the Working Mathematician, Graduate Texts in Mathematics, 5 Springer Verlag 1971.