

01161 les. 1

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
SECCION DE ESTRUCTURAS



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MEXICO

EPECTO DE INCERTIDUMBRES EN LAS CARACTERISTICAS DE SISTEMAS
ESTRUCTURALES SOBRE SU RESPUESTA MODAL ESPECTRAL

TESIS QUE PRESENTA

JOSE ALBERTO ESCOBAR SANCHEZ

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA
(ESTRUCTURAS).

CREDITOS ASIGNADOS A LA TESIS

12 (DOCE)

APROBADO POR EL JURADO

- PRESIDENTE: M. en C. Neftalí Rodríguez Cuevas
- VOCAL: M. en I. Ramón Cervantes Beltrán
- SECRETARIO: Dr. Gustavo Ayala Milián
- SUPLENTE: Dr. Francisco J Sánchez-Sesma
- SUPLENTE: M. en C. Enrique del Valle C.

Rodríguez
Cervantes
Ayala
Sánchez
del Valle

TESIS CON
FALLA DE CREDITOS

1985



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

1.	INTRODUCCION	1
2.	ANALISIS MODAL ESPECTRAL DE ESTRUCTURAS	3
2.1	Ecuaciones de equilibrio dinámico	3
2.2	Espectro de respuesta y método de superposición modal espectral	7
2.3	Criterios de superposición modal	8
2.3.1	Suma de valores absolutos (ABS)	9
2.3.2	Porcentaje de modos superiores	9
2.3.3	Raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS)	10
2.3.4	Promedio de valores absolutos y raíz cuadrada (PROM1)	10
2.3.5	Método del Naval Research Laboratory (NRL)	10
2.3.6	Método de la doble suma (DSM)	11
2.3.7	Combinación cuadrática completa (CQC)	11
2.3.8	Método de agrupamiento (GM)	12
2.3.9	Método del diez por ciento (TPM)	12
2.3.10	Promedio entre los métodos SRSS y NRL (PROM2)	13
2.3.11	Método de la doble suma modificado (DSMM)	13
2.3.12	Método de la combinación de respuestas avanzadas (ARC)	14
2.3.13	Método de Singh y Mehta	15
2.3.14	Planteamiento de Amini y Trifunac	16
3.	EVALUACION DE CRITERIOS DE SUPERPOSICION MODAL	18
3.1	Sismos estudiados	18
3.2	Estructura estudiada	19
3.3	Estudio numérico	19
3.4	Análisis de resultados	20
4.	VARIABILIDAD DE LAS PROPIEDADES DE LAS ESTRUCTURAS	22
4.1	Variabilidad en las propiedades	23
4.2	Evaluación estadística de las propiedades mecánicas del concreto reforzado	23
4.2.1	Propiedades estadísticas del acero de refuerzo	23
4.2.2	Propiedades estadísticas del concreto	25
4.2.3	Propiedades estadísticas de la resistencia de elementos estructurales aislados	26
4.2.4	Propiedades estadísticas de las dimensiones de los elementos estructurales	26
4.3	Variabilidad en las cargas	27
4.3.1	Cargas vivas	28
4.3.2	Cargas muertas	28
4.4	Otras fuentes de incertidumbre	28
4.4.1	Incetidumbre en el modelo de análisis dinámico	28
4.4.2	Incetidumbre en la combinación de acciones	29
4.4.3	Deterioro de la estructura	29
4.4.4	Endurecimiento del concreto con la edad	30
4.4.5	Errores humanos	30

5.	PROBLEMA DE ANALISIS ESTRUCTURAL PARA SISTEMAS CON PARAMETROS INCIERTOS	31
5.1	Formulación de diferentes metodos de análisis no determinista para el problema de análisis estructural estático	31
5.1.1	Análisis de incertidumbre de primer orden	31
5.1.2	Método de simulación de Monte Carlo	32
5.1.3	Método de perturbaciones	33
5.1.4	Método de perturbaciones con simulación de Monte Carlo	34
5.2	Formulación de diferentes métodos de análisis no determinista para el problema de análisis estructural dinámico	34
5.2.1	Análisis de incertidumbre de primer orden	34
5.2.2	Método de simulación de Monte Carlo	36
5.2.3	Método de perturbaciones	36
5.2.4	Método de perturbaciones con simulación de Monte Carlo	38
6.	RESPUESTA MODAL ESPECTRAL PROBABILISTA	40
6.1	Metodología	40
6.2	Generación de números aleatorios correlacionados	42
6.3	Estudio paramétrico	45
6.3.1	Aplicación del método de análisis espectral probabilista	45
6.3.2	Resultados obtenidos	46
7.	CONCLUSIONES	49
8.	REFERENCIAS	52
9.	AGRADECIMIENTOS	58

1. INTRODUCCION

Para poder llevar a cabo el análisis de un sistema estructural complejo, es necesario desarrollar una abstracción o modelo matemático del mismo, suficientemente completo en su descripción pero limitado en cuanto su complejidad para que sea manejable y proporcione resultados apropiados.

En la actualidad, los métodos matemáticos facilitan y hacen más racional el análisis estructural, sin embargo, en la construcción de modelos matemáticos de sistemas estructurales, el ingeniero concentra su atención sobre ciertas variables, y ya sea por ignorancia o por conveniencia, el modelo desprecia en ocasiones gran cantidad de parámetros que pueden alejar los resultados obtenidos del comportamiento del sistema real. En la ref. 1 se establece que:

* cuando un ingeniero diseña una estructura, sabe que se enfrenta a un problema plagado de incertidumbres: la obra que habrá de construirse siguiendo sus planos y especificaciones tendrá probablemente dimensiones y materiales distintos a los que él empleó en sus modelos matemáticos, y las cargas futuras son impredecibles tanto en intensidad como en distribución; además, le es muy difícil definir cuales variables determinaran el comportamiento del sistema, y cómo predecir y con qué precisión los valores más desfavorables de dichas variables a partir de las características probables de la obra que se construya y de las cargas que sobre ella actúen*

Es este el caso cuando se calculan las rigideces de las estructuras o las cargas que actúan sobre ellas, las cuales no pueden ser exactamente evaluadas, ya que dependen de diferentes factores, por lo que son en esencia variables aleatorias. Sin embargo, a partir de valores medios de las variables involucradas se obtienen respuestas estructurales medias, ignorando su variación debido a las incertidumbres en los valores de sus propiedades.

En este trabajo se estudia el problema del cálculo de la respuesta de sistemas estructurales elásticos sometidos a excitación sísmica, obtenida mediante el método de superposición modal espectral. Se incluye en el análisis el efecto de la variación de diferentes parámetros aleatorios como son la masa y la rigidez de la estructura. Se considera la influencia en la respuesta de la estructura de modos de vibración estrechamente acoplados, así como la aplicación de espectros de respuesta provenientes de registros de aceleración de sismos ocurridos tanto en suelo blando (Ciudad de México), como en suelo duro.

A manera de introducción al problema, en el capítulo 2 se presenta el método de análisis modal espectral, señalándose las características que lo hacen ser un método rápido y por lo mismo aproximado para obtener las relaciones cuantitativas de un fenómeno tan complejo como lo es el análisis de una estructura excitada por un sismo. Se presentan también los criterios de superposición modal que han sido desarrollados para llevar a cabo el análisis modal espectral.

En el capítulo 3 se hace una revisión crítica de los métodos de superposición modal, y se aplican a una estructura de tipo urbano, con parámetros deterministas. Lo anterior se utiliza para establecer un marco de referencia que posteriormente, permita manejar de una manera adecuada parámetros aleatorios en el análisis probabilista de sistemas estructurales.

Los resultados de algunos estudios realizados tanto en México como en otros países, para determinar propiedades estadísticas de parámetros que afectan las propiedades de las estructuras, se presentan en el capítulo 4.

En el capítulo 5 se presentan diferentes métodos probabilistas que permiten obtener respuestas no deterministas, de estructuras con parámetros inciertos, tanto estáticas como dinámicas. Se presta mayor atención al problema de valores característicos, por ser fundamental en el método de análisis modal espectral.

La evaluación de los efectos ocasionados por los diferentes parámetros aleatorios en la respuesta modal espectral se presenta en el capítulo 6.

En los capítulos 7 y 8 se presentan respectivamente las conclusiones obtenidas a partir de los resultados de este trabajo, y las publicaciones consultadas para realizarlo.

2. ANALISIS MODAL ESPECTRAL DE ESTRUCTURAS

El cálculo de la respuesta dinámica de una estructura ante una excitación sísmica, es un problema complicado, debido al número de parámetros involucrados y a la cantidad de cálculos numéricos necesarios para llevarlo a cabo. La introducción del concepto "Espectro de Respuesta" por Benniof en 1934 (ref. 2) y por Biot (ref. 3) en 1943, representó un gran avance en los esfuerzos orientados a reducir el número de parámetros básicos en este tipo de problemas.

A continuación se describirá el método de análisis modal espectral, el cual se basa en un espectro de respuesta para estimar la respuesta máxima de las estructuras. Se describen también los criterios de superposición modal que han sido desarrollados para llevar a cabo la combinación de las respuestas modales máximas.

2.1 Ecuaciones de equilibrio dinámico

Para sistemas lineales con amortiguamiento viscoso, sujetos a una aceleración en la base, la ecuación de equilibrio dinámico se puede escribir como:

$$[M] \ddot{u}(t) + [C] \dot{u}(t) + [K] u(t) = \{F(t)\} \quad (2.1)$$

donde $u(t)$ es el vector de desplazamientos relativos de la estructura, el punto denota derivación respecto al tiempo, $[M]$, $[C]$ y $[K]$ son las matrices de masas amortiguamiento y rigideces respectivamente, y $\{F(t)\}$ representa las fuerzas de inercia del sistema estructural debido al movimiento del suelo, que para el caso de movimiento en tres direcciones se puede expresar como

$$\{F(t)\} = -m_x \ddot{u}_{is}(t) - m_y \ddot{u}_{is}(t) - m_z \ddot{u}_{is}(t)$$

donde \ddot{u}_{is} es la aceleración del terreno en la dirección i ($i = x, y, z$) y m_i es

una matriz columna que representa las masas asociadas a los desplazamientos en la dirección i (refs. 4 y 5).

Para poder llevar a cabo el análisis modal espectral, será necesario transformar el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (2.1), en un sistema de ecuaciones de movimiento desacopladas independientes, para lo cual, en el caso de amortiguamiento pequeño y del tipo proporcional (refs. 4 y 5), se introduce la transformación

$$\{u\} = [\phi] \{x\} \quad (2.2)$$

donde $[\phi]$ es la matriz modal del sistema, obtenida de la solución del problema de valores característicos $([K] - \omega^2 [M]) [\phi] = [0]$. Sustituyendo la ec. (2.2) y sus derivadas en la ec. (2.1), se obtiene

$$[M] [\phi] \{\ddot{x}\} + [C] [\phi] \{\dot{x}\} + [K] [\phi] \{x\} = \{F(t)\}$$

misma que al multiplicarse por la transpuesta del i -ésimo vector modal $\{\phi\}_i^T$, resulta

$$\{\phi\}_i^T [M] [\phi] \{\ddot{x}\} + \{\phi\}_i^T [C] [\phi] \{\dot{x}\} + \{\phi\}_i^T [K] [\phi] \{x\} = \{\phi\}_i^T F(t) \quad (2.3)$$

Si se utilizan las propiedades de ortogonalidad de los modos (ref. 4)

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = \{\phi\}_i^T [C] \{\phi\}_j = \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j = [0] ; \quad i \neq j$$

se obtiene que todos los componentes, excepto la del i -ésimo modo sean cero, teniéndose entonces

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = m_i \quad (2.4a)$$

$$\{\phi\}_i^T [C] \{\phi\}_i = \bar{c}_i = 2 \xi_i \omega_i m_i \quad (2.4b)$$

$$\{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_i = k_i = \omega_i^2 m_i \quad (2.4c)$$

$$\{\phi\}_i^T F(t) = F_i(t) \quad (2.4d)$$

donde m_i , c_i y k_i son la i -ésima masa, amortiguamiento y rigidez desacoplada del sistema estructural y ω_i la frecuencia natural de vibración. El coeficiente de amortiguamiento modal ξ_i relaciona el amortiguamiento modal c_i y el crítico $2 m_i \omega_i$, como $\xi_i = c_i / 2 m_i \omega_i$.

Entonces, al sustituir las ecs. (2.4) en la ec. (2.3) se obtiene

$$m_i \ddot{x}_i + 2 \omega_i \xi_i m_i \dot{x}_i + \omega_i^2 m_i x_i = F_i(t)$$

Multiplicando la ec. anterior por $1/m_i$

$$\ddot{x}_i + 2 \omega_i \xi_i \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = -L_i \ddot{U}_i(t) \quad (2.5)$$

en esta ec. al término

$$L_i = \frac{F_i(t)}{m_i} = \frac{\{\phi\}_i^T \{F(t)\}}{m_i} = \frac{\{\phi\}_i^T [M] \{1\}}{\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i}$$

se le denomina factor de participación modal, y define la escala en la que participa el modo i en el movimiento global de la estructura.

Debido a que los espectros de diseño que se presentan en los Reglamentos de Construcciones, son espectros de pseudo aceleraciones, esto es, el valor de la pseudo aceleración máxima S_a , se define como

$$S_a = S_d \omega^2$$

donde S_d es el desplazamiento espectral, entonces, para que el coeficiente de participación L_i sea congruente y permita obtener desplazamientos, se puede expresar como

$$L_i = \frac{\{\phi\}_i^T [M] \{1\}}{\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i \omega_i^2}$$

La solución de la ec. (2.5) permite obtener la historia de la deformación $x(t)$ de cada modo de la estructura, la cual depende de la aceleración del suelo y de las características dinámicas de la misma, como lo son la frecuencia natural de vibración y la relación de amortiguamiento modal correspondiente. Esta solución se puede expresar para el grado de libertad i del sistema estructural como (refs. 3, 4 y 5)

$$x_i(t) = -L_i \frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \exp[-\xi_i \omega_i (t - \tau)] \sin[\omega_d (t - \tau)] d\tau \quad (2.6)$$

donde $\omega_d = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$ es la frecuencia amortiguada de la estructura en el i -ésimo modo de vibración, t el tiempo de duración de la excitación y τ la variable de integración.

Para la obtención de la ec. (2.5) se consideró que la transformación (2.2) desacopla las fuerzas elásticas, de inercia y de amortiguamiento, pero no se establecieron las condiciones bajo las cuales existe este desacoplamiento. Por otro lado, para que las condiciones de ortogonalidad sean satisfechas, la matriz de amortiguamiento deberá ser de la forma

$$[C] = [M] \sum_n a_n ([M]^{-1} [K])^n \quad (2.7)$$

donde n puede variar en el intervalo $-\infty < n < \infty$, pudiéndose incluir tantos términos como se desee en la suma, así, si se toman únicamente dos, esto es $n = 0, 1$, se tendrá el llamado amortiguamiento de Rayleigh

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K] \quad (2.8)$$

Aplicando las condiciones de ortogonalidad a la ec. (2.7)

$$c_i = \{\phi\}_i^T [C] \{\phi\}_i = \{\phi\}_i^T [M] \sum_n a_n ([M]^{-1} [K])^n \{\phi\}_i$$

premultiplicando la relación $[K] \{\phi\}_i = \omega_i^2 [M] \{\phi\}_i$, por $\{\phi\}_i^T [K] [M]^{-1}$ (ref. 4), se tiene

$$\{\phi\}_i^T [K] [M]^{-1} [K] \{\phi\}_i = \omega_i^2 \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_i = \omega_i^4 m_i$$

análogamente

$$\{\phi\}_i^T [M] ([M]^{-1} [K])^n \{\phi\}_i = \omega_i^{2n} m_i$$

entonces

$$c_{in} = a_i \omega_i^{2n} m_i$$

así, la matriz de amortiguamiento asociada con el i -ésimo modo será

$$c_i = \sum_n c_{in} = \sum_n a_i \omega_i^{2n} m_i = 2 \xi_i \omega_i m_i$$

de donde

$$\xi_i = \frac{1}{2 \omega_i} \sum_n a_n \omega_i^{2n} \quad (2.9)$$

la ecuación anterior permite obtener las constantes a_n para cualquier relación de amortiguamiento correspondientes a cualquier número de modos. En general, la ec. (2.9) puede escribirse como

$$[\xi] = \frac{1}{2} [Q] \{a\} \quad (2.10)$$

donde los coeficientes de la matriz $[Q]$ son las diferentes frecuencias naturales elevadas a un cierto exponente. Finalmente, la solución del sistema de ecuaciones (2.10) proporcionará un valor de las constantes a_n , esto es

$$a_n = 2 [Q]^{-1} \{\xi\}$$

Así, para calcular la respuesta estructural de un sistema sometido a una excitación sísmica, se debe evaluar la ec. (2.6) para cada instante de tiempo t y para cada modo, obteniéndose así las historias de desplazamientos correspondientes. Sin embargo, para fines de diseño, no es necesario conocer la historia completa de la respuesta estructural del sistema, basta con conocer los despla-

zamientos modales máximos y combinarlos apropiadamente para obtener la respuesta total máxima aproximada del sistema.

En resumen, el análisis modal espectral se basa en el hecho de que para ciertos valores de amortiguamiento, la respuesta asociada a cada modo de vibración puede calcularse independientemente de las otras, y las respuestas modales pueden combinarse para determinar una aproximación de la respuesta total.

Es importante hacer notar que en el caso de excitación sísmica en tres dimensiones, se debe tener cuidado al combinar las respuestas, pues si esta combinación se va a hacer de manera probabilista, la excitación en cada dirección debe ser estadísticamente independiente de las otras (ref. 77).

2.2 Espectro de respuesta y método de superposición modal espectral

Con base en lo anterior se puede establecer la igualdad

$$x_{\text{máx}} = \text{máx} |x(t)|$$

donde $x(t)$ es el valor máximo del desplazamiento, proveniente de resolver la ec. (2.6) de un análisis en el tiempo. Al graficar el valor máximo del desplazamiento como función de la frecuencia natural de la estructura (o del período natural), y de la relación de amortiguamiento, se obtiene un "espectro de respuesta", que es el conjunto de valores de $x_{\text{máx}}$ correspondientes a frecuencias y relaciones de amortiguamiento conocidos, esto es

$$Sd_n (w_n, \zeta_n) = (x_{\text{máx}})_n$$

donde Sd_n se le denomina desplazamiento espectral máximo correspondiente a la n -ésima frecuencia y relación de amortiguamiento.

La fig. 1 muestra un ejemplo de la construcción de un espectro de respuesta de desplazamiento. Para ello se determinan los desplazamientos de tres estructuras con características dinámicas diferentes, pero sometidas a la misma excitación sísmica. Del análisis de la historia completa se obtiene el valor máximo (en valor absoluto) de la deformación, para cada una de las estructuras. Esto proporciona un punto en el espectro de respuesta. Repitiendo el procedimiento anterior para un intervalo de valores de la frecuencia o el período natural de vibración, y manteniendo la relación de amortiguamiento constante, se obtiene el espectro de respuesta para el sismo dado.

Análogamente es posible obtener los espectros de respuesta de pseudo velocidad Sv y de pseudo aceleración Sa , como función de la frecuencia o del período de vibración del sistema. La relación entre ellos es como sigue

$$Sv = w Sd = 2 \pi f Sd$$

$$Sa = w Sv = w^2 Sd = 4 \pi^2 f^2 Sd$$

donde $f = w / 2 \pi$ es la frecuencia en Hertz y w es la frecuencia circular en rad/seg, en las expresiones anteriores, por simplicidad en la escritura, se eliminó la notación de función de w_n , ζ_n , de Sd_n , Sv_n , y Sa_n , sin embargo deberá entenderse que ésta siempre existe.

Debido a que los términos Sd , Sv y Sa están estrechamente relacionados, el

espectro de respuesta puede representarse mediante una sola gráfica, al tomar logaritmos de las relaciones anteriores, esto es

$$\log S_v = \log f + \log (2 \pi S_d)$$

para valores de S_d constantes, esta expresión representa la de una recta con pendiente a 45° . Por otro lado

$$\log S_v = -\log f + \log \frac{S_a}{2 \pi}$$

análogamente, para valores de S_a constantes, la expresión anterior representa la de una recta con pendiente de 135° .

Al manejar un conjunto de datos para diferentes valores de amortiguamiento con las relaciones anteriores, se obtiene una gráfica semejante a la que se muestra en la fig. 2, que representa un espectro de respuesta con diferentes relaciones de amortiguamiento.

Por lo anterior, la respuesta máxima correspondiente al n -ésimo modo natural de vibración puede expresarse en términos de S_d , S_v o S_a . Con base en ello, el desplazamiento modal máximo (en coordenadas modales) será

$$x_n = L_n S_{d_n} = L_n \frac{S_{a_n}}{w_n^2}$$

y el desplazamiento máximo en coordenadas físicas o generales será

$$u_n = L_n \{\phi\}_n S_{d_n} = L_n \{\phi\}_n \frac{S_{a_n}}{w_n^2}$$

para $L = \{\phi\}^T [M] \{1\} / \{\phi\}^T [M] \{\phi\}$.

En resumen, el método de análisis modal espectral se puede describir en los pasos siguientes (ref. 5):

- definir el espectro de respuesta para el registro de aceleración del suelo
- establecer las propiedades de la estructura, matrices $[M]$, $[K]$ y relación de amortiguamiento
- resolver el problema de valores característicos para determinar las frecuencias y los modos de vibrar de la estructura
- calcular la respuesta máxima correspondiente a cada uno de los modos, utilizando para ello el espectro de respuesta del sismo
- calcular el valor de la respuesta máxima $R_{máx}$, combinando las respuestas máximas modales, mediante algún criterio de superposición modal.

2.3 Criterios de superposición modal

Al aplicar el concepto espectro de respuesta a estructuras que poseen más de un grado de libertad, se obtiene tan sólo una aproximación de la respuesta máxima del sistema, esto se debe a que dicha respuesta se obtiene de la superposición de las respuestas modales máximas individuales de un número de sistemas de un solo grado de libertad, igual al número de grados de libertad del sistema completo, las cuales no ocurren en el mismo instante de tiempo (fig. 3).

Debido a lo anterior, la relación que hay entre máximos no está definida, surgiendo el problema siguiente (ref. 6): conocido el espectro de respuesta para un sismo, y conocidos los modos y frecuencias de vibrar de la estructura, ¿cuál es el método más apropiado para calcular un valor aproximado de la respuesta máxima y qué orden de aproximación se puede esperar de dicho resultado? . Para contestar esta pregunta, se han propuesto diferentes criterios para llevar a cabo la superposición de las respuestas modales, los cuales se describen a continuación.

2.3.1 Suma de valores absolutos (ABS)

Es este el primer criterio de superposición modal desarrollado. La superposición se hace mediante la suma de los valores absolutos de los modos individuales. La idea fue desarrollada originalmente por Biot en 1943 (ref. 3), matemáticamente se representa como

$$R = \sum_{i=1}^n |R_i|$$

donde

R = valor máximo representativo de una respuesta particular, para una componente dada de un sismo.

R_i = respuesta máxima debida al modo i.

n = número de modos considerados en la combinación para la respuesta modal.

Este método proporciona una frontera superior de la respuesta, al compararse con otros criterios de superposición modal siempre y cuando se haya considerado el mismo número de grados de libertad, esto se debe a que las respuestas individuales máximas no ocurren al mismo tiempo con el mismo signo. Una característica de este criterio de combinación es que la evaluación que proporciona es siempre del lado de la seguridad (si se cumple la condición anotada).

2.3.2 Porcentaje de modos superiores

Este criterio desarrollado por Clough en 1955 (ref. 7), consiste en considerar un porcentaje de cada una de las respuestas modales superiores por agregar a la respuesta del primer modo. El criterio se basa en el razonamiento de que generalmente, el primer modo contribuye de manera considerable a la respuesta sísmica total, mientras que los modos superiores proporcionan una corrección de los efectos del primero. Sumando los valores absolutos de las contribuciones modales, es posible obtener valores aproximados de la respuesta total. Para esto, es necesario seleccionar un factor de proporción ν apropiado, que multiplicado por la respuesta máxima de los modos superiores aporte su contribución a la respuesta total. ν varía con los períodos de vibración de la estructura, y es diferente para cada uno de los valores de las respuestas que serán calculadas (desplazamientos, cortantes, etc.), por esta razón se considera poco práctico desde el punto de vista ingenieril. Considerando únicamente los dos primeros modos de vibración, se puede expresar como sigue

$$R_d = |R_{d_1}| + \nu_d |R_{d_2}|$$

$$R_v = |R_{v_1}| + \nu_v |R_{v_2}|$$

$$R_m = |R_{m_1}| + \nu_m |R_{m_2}|$$

donde

R_d, R_v y R_m = respuesta máxima de desplazamientos, cortantes y momentos

R_{d_i}, R_{v_i} y R_{m_i} = respuesta máxima debida al modo i

ν = factor de proporción para cada uno de los efectos mencionados.

2.3.3 Raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS)

Una aproximación diferente del problema se basa en ideas provenientes de la Teoría de Probabilidades, debido a que los máximos de las diferentes respuestas modales ocurren a diferentes tiempos, no pueden ser tratados simplemente en términos estadísticos. Rosenblueth en 1951 (ref.8) sugirió que la respuesta máxima probable, se puede obtener combinando las respuestas modales individuales como la raíz cuadrada de la suma de sus cuadrados. Este criterio proporciona valores numéricos menores que los obtenidos con la suma de los valores absolutos, siendo más realista para ciertas condiciones. Se expresa como sigue

$$R = \left(\sum_{i=1}^n R_i^2 \right)^{1/2}$$

2.3.4 Promedio de valores absolutos y raíz cuadrada (PROMI)

Posteriormente, Jennings en 1938 (ref.9) propuso un método que toma en cuenta un promedio de la suma de los valores absolutos y de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados. Para aplicar este método es necesario prescribir los límites de la desviación estándar deseada, por medio del criterio de promedios pesados. Matemáticamente se puede escribir como sigue

$$R = \frac{\left(\sum_{i=1}^n R_i^2 \right)^{1/2} + m \left| \sum_{i=1}^n R_i \right|}{m + 1}$$

donde R, R_i y n ya han sido definidos antes, y m es un factor de peso, de manera que si $m=0$, se tiene el criterio de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados. Suponiendo que la respuesta real es un 95% de la respuesta calculada con la suma de los valores absolutos, y que los tres primeros modos guardan una relación $R_1 : R_2 : R_3 = 5:3:1$, la cual se considera una distribución razonable (según el autor del criterio), para una estructura de cortante típica, es posible ajustar el factor de peso m para que la desviación estándar no sobrepase el valor límite deseado. Esto es lo que hace impráctico este criterio, ya que es necesario estudiar el comportamiento de varias estructuras para determinar estos límites.

2.3.5 Método del Naval Research Laboratory (NRL)

Este es un criterio desarrollado por O'Hara y Cunniff en 1963 (ref.10) para evaluar la respuesta de estructuras submarinas sometidas a ondas de choque ocasionadas por explosiones. Para el caso de una excitación sísmica proporciona un límite superior de la respuesta, pues considera el máximo de los máximos modales más la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados del resto. Esto es

$$R = R_{\text{máx}} + \left(\sum_{i=1}^n R_i \right)^{2/3}$$

2.3.6 Método de la doble suma (DSM)

Basándose en la Teoría de Procesos Estocásticos, Rosenblueth en 1968 (ref.11) propuso un criterio que correlaciona de una manera más real las respuestas modales individuales. Parte de la hipótesis de que los sismos que actúan sobre la estructura se pueden idealizar como segmentos de la misma duración de un proceso estocástico estacionario, y que la duración de los movimientos es grande, comparada con el período fundamental de la estructura, el cual es mucho mayor que los períodos dominantes de los acelerogramas de los sismos. Las respuestas de diseño se calculan como la doble suma del producto de las respuestas correspondientes al i-ésimo y al j-ésimo modo de vibración, dividida entre un coeficiente que toma en cuenta la proximidad entre los valores de las frecuencias de los modos que contribuyen a la respuesta, y la fracción de amortiguamiento crítico equivalente que el sistema posee en el i-ésimo modo natural, así como la duración del temblor. Esto es

$$R^2 = \sum_{i=1}^n R_i^2 + \sum_{i \neq j}^n \sum_{j=1}^n \frac{R_i R_j}{1 + E_{ij}}$$

donde

$$E_{ij} = (w_i' - w_j') / (\xi_i' w_i + \xi_j' w_j)$$

a su vez

$$w_i' = w_i (1 - \xi_i)^{2/3}$$

$$\xi_i' = \xi_i + 2/t w_i$$

donde R , R_i , R_j y n ya han sido definidos, w_i y w_j son las frecuencias naturales consecutivas, ξ_i , ξ_j son las relaciones de amortiguamiento para dos modos consecutivos, t es la duración del sismo.

2.3.7 Combinación cuadrática completa (CQC)

Otro criterio que se ha propuesto es el método de combinación cuadrática completa según Kiureghian en 1981 (ref.12), donde, al igual que el criterio de la doble suma, toma en cuenta las características de que ciertas estructuras posean modos de vibrar estrechamente acoplados. Para esto, el método parte de la eliminación de los errores que generalmente aparecen en el criterio de la suma de valores absolutos, o el de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados, empleando Teoría de Vibraciones Aleatorias, de donde se encuentra que las respuestas modales deben combinarse incluyendo además los términos modales cruzados, debido a modos de torsión, de ahí su nombre. Esto es

$$R = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_i \rho_{ij} R_j \right)^{1/2}$$

donde ρ_{ij} son los factores de correlación modal, que están en función de la

frecuencia de vibración, de la duración de las cargas, de las formas modales y de las relaciones de amortiguamiento de la estructura, de donde, si la duración del sismo es muy grande, comparada con los períodos de vibración de la estructura, y si el espectro de respuesta es uniforme en un rango de frecuencias amplio, el coeficiente ρ_{ij} se puede expresar como

$$\rho_{ij} = \frac{B (\xi_i \xi_j)^{1/2} (\xi_i + r \xi_j)^{3/2}}{(1-r)^2 + 4 \xi_i \xi_j r(1+r) + 4 (\xi_i^2 + \xi_j^2) r^2}$$

donde $r = \omega_j / \omega_i$.

Si ξ es constante, se tiene

$$\rho_{ij} = \frac{B \xi^2 (1+r)^{3/2} r}{(1-r)^2 + 4 \xi r(1+r)^2}$$

2.3.8 Método de agrupamiento

El método de agrupamiento (ref.13), consiste en formar grupos que incluyen aquellos modos cuyas frecuencias están entre la menor del grupo y una cuyo valor es 10% mayor a ésta, con la condición de que ninguna frecuencia puede pertenecer a más de un grupo, el máximo valor representativo de una respuesta particular atribuida a todos los modos significativos de la estructura, se obtendrá tomando la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores máximos correspondientes a la respuesta del sistema atribuida a cada grupo de modos estrechamente acoplados, y las respuestas modales para los modos que no lo están. Matemáticamente se expresa como

$$R = \sum_{k=1}^n R_k^2 + \sum_{q=1}^p \sum_{l=i}^j \sum_{m=1}^j |R_{lq} R_{mq}|, \quad l \neq n$$

donde R_{lq} y R_{mq} son las respuestas modales R_l y R_m en el q -ésimo grupo, i es el número del modo donde el grupo inicia, j es el número del modo donde el grupo termina, y p el número de modos estrechamente acoplados.

2.3.9 Método del diez por ciento (TPM)

Este método (ref.14) considera, al igual que los dos últimos criterios mencionados, la contribución de los modos de torsión para obtener la respuesta de estructuras que presentan esta característica, se puede expresar como sigue

$$R = \sum_{k=1}^n R_k^2 + 2 \sum |R_i R_j|, \quad i \neq j$$

La segunda suma se hace sobre todos los modos i y j cuyas frecuencias están cercanas una de otra, esto es, considerando que ω_i y ω_j son las frecuencias de dos modos consecutivos, se dice que éstos están estrechamente acoplados si

$$(w_j - w_i) / w_i \leq 0.10$$

donde $1 \leq i \leq j \leq n$.

2.3.10 Promedio entre los métodos SRSS y NRL (PROM2)

Con base en la observación de que el método del NRL proporciona un límite superior para las respuestas, se puede promediar con el método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS) que proporciona límites inferiores, obteniéndose un valor promedio de la respuesta de los dos métodos que presentan cotas opuestas.

2.3.11 Método de la doble suma modificado (DSMM)

Este método propuesto por Gupta en 1983 (ref. 14) se utiliza para combinar las respuestas modales provenientes de frecuencias altas, no únicamente de frecuencias estrechamente acopladas. Se parte de la consideración de que una frecuencia cuya aceleración espectral es mayor o igual que la aceleración de excitación influye de manera significativa sobre la respuesta, ya que, como es aceptado, las respuestas de los modos que poseen frecuencias mayores a la antes mencionada, denominada "frecuencia rígida", están perfectamente correlacionadas entre sí y además con la aceleración de excitación. El método de la doble suma modificado toma en cuenta estas observaciones, corrigiendo el método de la doble suma propuesto originalmente por Rosenblueth y modificado ya por Singh y otros (ref.15), al considerar un coeficiente de respuesta rígida, calculado como:

$$\alpha_i = \frac{\log f_i / f_1}{\log f_2 / f_1}, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1$$

donde

α_i = coeficiente de respuesta rígida

f_i = frecuencia del modo i , en Hertz

f_1 = $S_a \text{ máx} / 2 \pi S_v \text{ máx}$, en Hertz

$f_2 = (f_1 + 2 f_r) / 3$, Hertz

f_r = frecuencia rígida (> 33 Hertz según ref. 14)

Este coeficiente proporcionará la parte rígida de la respuesta calculada como

$$R_i = \alpha_i R_i$$

R_i = respuesta proveniente del modo i

Además, existe otra parte de la respuesta denominada respuesta amortiguada, que se supone estadísticamente independiente de la parte rígida, esto es

$$R_i = (R_i)^2 - (R_i)^2$$

Ahora, debido a que las partes rígidas están perfectamente correlacionadas, se pueden sumar algebraicamente, esto es

$$R^r = \sum_{i=1}^n R_i^r$$

Y las partes amortiguadas se pueden combinar usando el método de la doble suma

$$(R^p)^2 = \sum_1^n (R_i^p)^2 + 2 \sum_{i \neq j} \epsilon_{ij} R_i^p R_j^p$$

donde

$$\epsilon_{ij} = \left\{ 1 + \left[\frac{f_j - f_i}{(f_j + f_i) + c_{ij}} \right]^2 \right\}^{-1}$$

en el cual

$$c_{ij} = (1 - 3\xi)(0.036 - |f_j^2 - f_i^2|) > 0$$

ξ = relación de amortiguamiento

entonces, finalmente, la respuesta total es

$$R = \left[(R^r)^2 + (R^p)^2 \right]^{1/2}$$

2.3.12 Método de la combinación de respuestas avanzadas (ARC)

Este método de superposición modal propuesto por Tsai en 1983 (ref. 16) toma en cuenta las contribuciones de modos de vibración provenientes de frecuencias demasiado altas o demasiado bajas. La respuesta se calcula con

$$R^2 = \sum_1^n R_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} c_{ij} R_i R_j$$

donde

$$c_{ij} = 1 - H(\bar{f}_{ij}) \Delta_{ij}^2 / (\Delta_{ij}^2 + 4(\xi_i + 0.01)^2)$$

a su vez

ξ_i = relación de amortiguamiento (1%, 2%, 5%)

$\Delta_{ij} = (f_j - f_i) / \bar{f}_{ij} = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$, es la frecuencia modal diferencial

$\bar{f}_{ij} = (f_i + f_j) / 2 = 0.1$ a 40 es la frecuencia modal media

\bar{f}_{ij}	0	1	5	15	25	33
H	0	1	1	0.3	0.1	0

Este criterio corrige al de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados al llevar a cabo la suma algebraica de las respuestas ajustándolas con un factor de acoplamiento modal c_{ij} , que fue obtenido empíricamente a partir de un estudio

paramétrico. A simple vista se le pueden encontrar ciertas limitaciones, como es el hecho de haber considerado para la generación del factor de acoplamiento modal, únicamente tres relaciones de amortiguamiento, así como el tener una relación de amortiguamiento constante, lo que ocasiona que $H(\zeta_{ij})$ sea una función lineal, la cual afecta directamente al factor c_{ij} .

2.3.13 Método de Singh y Mehta

Singh y Mehta (ref. 17) han propuesto en 1983 un criterio de superposición modal, en el cual la excitación no es proporcionada por un espectro de aceleración o de pseudo velocidad, sino mas bien, por un espectro de aceleración relativa o de velocidad relativa, que se puede relacionar con los pseudo espectros. Este nuevo método de Singh y Mehta es un intento para obtener la respuesta modal a partir de los primeros modos de vibración, sin perder aproximación por no incluir los modos superiores aun-que éstos contribuyan de manera importante sobre la respuesta. En este criterio no se supone que la excitación es proporcionada por ruido blanco, sino que se basa en una aproximación a partir de "aceleración modal", denominada de esta manera debido a que la respuesta es expresada en función de la aceleración de los modos, en vez del desplazamiento modal. Su formulación matemática es la siguiente

$$\begin{aligned}
 S_d = & \left(\sum \frac{v_j \xi_j}{w_j} \right)^2 A_g^2 + \sum_{j=1}^n \left[2 w_j (1-2 \beta_j)^2 R_v(w_j) - R_r(w_j) \right] \cdot \\
 & \cdot \left(\xi_j \mu_j / w_j \right)^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=j+1}^n 2 \frac{\xi_j \xi_k \mu_j \mu_k}{w_j^2 w_k^2} \left[w_j (1-4 \beta_j)^2 R_v(w_j) + \right. \\
 & \left. + w_k (1-4 \beta_k)^2 R_v(w_k) - R_r(w_j) - R_r(w_k) \right] + \\
 & + B_1 w_k^2 R_v(w_j) + B_2 R_r(w_j) + B_3 w_k^2 R_v(w_j) + \\
 & \left. + B_4 R_r(w_k) \right]
 \end{aligned}$$

donde

ξ_j = valor de la respuesta en el j -ésimo modo

μ_j = factor de participación modal

β_j = relación de amortiguamiento modal

$R_v(w_j)$ = velocidad relativa para la frecuencia w_j y β_j según el espectro de respuesta

A_g = aceleración máxima del suelo

$R_r(w_j)$ = respuesta proveniente del espectro de aceleración relativa

B_1, B_2, B_3, B_4 son constantes, obtenidas a partir de la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$[G] \{B\} = \{P\}$$

donde

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & r & 0 \\ -2(1-2\beta_k) & 1 & -2r(1-2\beta_k) & r & 4 \\ 1 & & -2(1-2\beta_k) & 1 & -2r(1-2\beta_j) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \end{bmatrix}$$

$$[B]^T = \{ B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4 \}$$

$$[P] = \left\{ \begin{array}{l} 4\beta_j\beta_k r^3 \\ r^2 - 4\beta_j\beta_k r(1+r) - 4\beta_j\beta_k r + t(\beta_j - r\beta_k) r \\ -(1+r) - 8r\beta_j\beta_k - t/4 \\ 1 \end{array} \right\}$$

donde

$$t = 4(r\beta_j - \beta_k)$$

$$r = w_j / w_k$$

Según los autores (ref. 17), los espectros de aceleración absoluta y de velocidad relativa se pueden relacionar mediante la expresión

$$R_a(w_j) \dot{=} A_g^2 - R_r(w_j) + 2(1-2\beta_j)w_j^2 R_v(w_j)$$

conocidos $R_a(w_j)$ y $R_v(w_j)$, se tiene:

$$R_r(w_j) \dot{=} A_g^2 - R_a(w_j) + 2(1-2\beta_j)w_j^2 R_v(w_j)$$

donde:

f = frecuencia circular en rad/seg

$w = f/2\pi$ en Hertz (ciclos/seg)

Los mismos autores desarrollaron antes un método (ref. 18) con la diferencia de que el anterior carece de suficiente aproximación cuando no se considera suficiente número de modos, deficiencia que se supera en este criterio.

Como se puede ver, este método tiene el inconveniente de ser bastante laborioso para ser aplicado de manera práctica.

2.3.14 Planteamiento de Amini y Trifunac

Recientemente, Amini y Trifunac han desarrollado cierto planteamiento probabilista para evaluar las respuestas provenientes de un análisis espectral modal de estructuras. La respuesta de la estructura se obtiene con base en la

raíz cuadrada de la amplitud de la excitación, a la dimensión de la frecuencia en el espectro de respuesta y al número total de máximos que se desea conocer.

Este criterio presenta la ventaja de poder conocer tantos valores máximos de la respuesta como se desee, es decir, se puede reproducir inclusive la historia de la respuesta según el estudio realizado por sus autores (ref. 19), lo cual permite considerar de una manera mucho más aproximada las relaciones que existen entre máximos, y así, las características físicas del sistema estructural.

Sin embargo, su desarrollo es complicado y laborioso, por lo que aquí únicamente se hace mención de él.

Recientemente han sido desarrollados otros criterios de superposición menos conocidos, los cuales siguen dos tipos de planteamiento, por un lado el clásico, basado en un espectro de aceleración absoluta (refs.20 y 21), y por el otro, los que se basan en espectros de velocidad relativa para obtener sus respuestas máximas (refs. 22 y 23).

3. EVALUACION DE CRITERIOS DE SUPERPOSICION MODAL

Con el objetivo de establecer un marco de referencia que permita comparar, la respuesta modal espectral probabilista de estructuras, en el presente capítulo se evalúan desde el punto de vista determinista, los diferentes criterios de superposición modal mencionados en el capítulo anterior. La evaluación se llevará a cabo haciendo una comparación directa entre la respuesta máxima y la respuesta máxima exacta, esta última proveniente de un análisis dinámico de superposición modal en el tiempo.

El desarrollo de este capítulo se basa fundamentalmente en la ref. 24, presentándose la evaluación de los resultados en forma gráfica, mucho más detallada y completa.

3.1 Sismos estudiados

Se eligieron once registros de aceleración sísmica para utilizarlos en la evaluación de los criterios de superposición modal, estos son: la componente Norte-Sur del sismo ocurrido en El Centro California, el 18 de marzo de 1940, este es un sismo ocurrido en suelo duro; la componente Este-Oeste del sismo ocurrido en la Cd. de México el 6 de julio de 1964, contándose con las versiones registradas en el patio y en la cimentación del edificio Hidalgo, así como la componente Norte-Sur del mismo temblor, pero registrado en el edificio González; las versiones de la componente Este-Oeste del sismo del 2 de agosto de 1968, ocurrido también en la Cd. de México, registrado en el patio y en la cimentación del edificio Atizapan; y cinco sismos mas simulados en el Instituto de Ingeniería de la UNAM (ref. 79), contándose en total con seis registros de sismos reales, cinco de ellos ocurridos en suelo blando (Cd. de México) y uno en suelo duro (El Centro), y cinco registros de sismos simulados en suelo duro.

Las características básicas de estos registros de aceleración se pueden ver en la tabla 1 y en la fig. 4.

3.2 Estructura estudiada

Para realizar la evaluación de los criterios de superposición modal, se consideró estudiar una estructura simple pero que reprodujera una situación práctica, como es el caso de los modos de vibrar estrechamente acoplados. Existe en la literatura un estudio bastante completo (ref. 78), de una estructura de concreto reforzado para la que se determinaron tanto analítica como experimentalmente, las deformaciones inelásticas y los cambios que se presentan en sus propiedades al aplicarse en su base una serie de sismos, sin embargo, se trataba de buscar una estructura que presentara modos de vibrar estrechamente acoplados, pues es este efecto precisamente el que se trata de considerar en este trabajo, situación que no presenta la estructura mencionada, así, se decidió estudiar un edificio de tres niveles de concreto con $f_c=250 \text{ Kg/cm}^2$, simétrico, de planta cuadrada (fig. 5), con traveses de $30 \times 45 \text{ cm}$ y columnas de $30 \times 50 \text{ cm}$ formando un marco en cada uno de los cuatro lados de la estructura, la masa traslacional m de cada entrepiso del edificio se calculó como la suma de la masa $m = 53.13 \text{ Kg-seg}^2/\text{cm}$ debida al peso del mismo (al considerar una losa de 10 cm de espesor y la masa tributaria de traveses y columnas), y la masa $m = 36.11 \text{ Kg-seg}^2/\text{cm}$, proveniente de la carga viva que soportará la estructura (considerada en este caso de 220 Kg/m^2), con lo cual el valor calculado de la masa traslacional por entrepiso es de $89.24 \text{ Kg-seg}^2/\text{cm}$, la masa rotacional j de cada entrepiso se consideró de $1\ 497\ 309 \text{ Kg-seg}^2/\text{rad}$.

La estructura se modeló de manera que el centro de masas y el de rigideces no coincidan, generándose así modos de vibrar de traslación y rotación acoplados, esto implica que al excitar la estructura en sentido del eje Y (fig. 5), estos modos tengan factores de participación modal diferentes de cero, esto es, cada modo individual contiene desplazamientos de traslación y rotación en cada piso, lo que ocasionará que una excitación sísmica de la estructura en cualquier dirección, producirá una respuesta tridimensional de la misma.

Se consideraron tres grupos de relaciones de amortiguamiento, en el primero se tomó el 2% para los primeros dos modos, 3% para los dos siguientes y 5% para los modos superiores, en el segundo grupo se consideró el 4, 6 y 10%, y en el tercero el 6, 9 y 15% respectivamente, la razón por la que se decidió utilizar estas relaciones de amortiguamiento es que comprenden las que se recomiendan en la literatura.

Las características dinámicas de la estructura se pueden ver en la tabla 2.

3.3 Estudio numérico

Para realizar el estudio numérico, se utilizó una versión modificada del programa STOCAL, elaborado en la Universidad de Berkeley (ref. 25). Se consideró práctico utilizar STOCAL, ya que sus características lo hacen un programa de análisis bastante flexible y completo, pues el usuario al manejar las diferentes instrucciones macro con las que funciona, en realidad está programando los algoritmos que necesita para efectuar cualquier tipo de análisis estructural, estático o dinámico, determinista o probabilista. Por otro lado, su estructuración se basa en la utilización de memoria dinámica, controlando las diferentes operaciones que realiza mediante un directorio, entonces, si se desea introducir una rutina que no maneje el programa original, bastará con incluirla como tal

dentro de este y desde luego en su directorio, teniéndose así, un programa que es bastante general, pero adaptado a las necesidades específicas de un usuario en particular y sin que éste haya tenido que realizar el trabajo de generar un programa completo totalmente nuevo, lo que viene a representar un gran ahorro de tiempo.

Para su análisis, la estructura se idealizó como un marco tridimensional con seis grados de libertad por nodo y tres grados de libertad por piso (fig. 5). Las masas se consideraron concentradas a nivel de cada entrepiso, los que a su vez fueron considerados como diafragmas rígidos indeformables en su plano, modelando numéricamente esta propiedad con vigas de rigidez "infinita" a la flexión alrededor de su eje vertical.

El análisis dinámico tridimensional se realizó calculando la matriz de rigidez total de la estructura y condensando estáticamente los grados de libertad no requeridos. Para cada uno de los registros de aceleración se resolvió la ec. (2.6) del capítulo 2, obteniéndose la historia completa de desplazamientos en el sistema coordenado normal. Los desplazamientos normales máximos, correspondientes a cada modo de vibración, representan el espectro de respuesta para cada uno de los registros de aceleración, a partir de éstos se evaluaron las respuestas con los diferentes criterios de superposición modal descritos en el capítulo anterior.

Para medir la aproximación de cada uno de los criterios de superposición modal, se calculó el error relativo, obtenido como la diferencia de la respuesta calculada con alguno de los criterios menos la respuesta exacta, dividida entre la respuesta exacta (ref. 26), lo que permite obtener errores con signo positivo y negativo, interpretándose éstos como respuesta sobrevaluada y respuesta subvaluada, respectivamente.

3.4 Análisis de resultados

Los resultados obtenidos del análisis de la estructura utilizando los criterios de superposición modal, (figs. 6 a 11) se presentan como los valores medios de los errores relativos de las deformaciones para cada uno de los pisos de la estructura, provenientes de realizar un estudio estadístico de éstos, y agrupándolos por tipo de suelo, sismo, criterio de superposición y relación de amortiguamiento. De los resultados obtenidos, se puede observar lo siguiente: /

- 1) Como se esperaba, el método de la raíz cuadrada (SRSS), subestima grandemente la respuesta en el sentido de excitación del sismo (errores relativos negativos), figs. 6 y 9, mientras que para el sentido perpendicular al de excitación la sobrestima (errores relativos positivos), figs. 8 y 11; por otro lado, el método de suma de valores absolutos (ABS) sobrestima la respuesta en todos los casos (figs. 6 a 11).
- 2) En general, el método del NRL proporciona en todos los casos resultados bastante semejantes, a los obtenidos con los métodos del diez por ciento y de agrupamiento, a pesar de que éstos últimos son mucho más laboriosos en su utilización (figs. 6 a 11).
- 3) Para todos los casos, los resultados obtenidos al hacer los promedios de la raíz cuadrada con la suma de valores absolutos, así como con el criterio del NRL, se corrigen, en general, pero aún así los errores tienden hacia el primer criterio (método de la raíz cuadrada), figs. 6 a 11.

- 4) Los errores relativos positivos son mucho mayores para la estructura apoyada sobre suelo blando (figs. 9, 10 y 11), y crecen a medida que la relación de amortiguamiento crítico aumenta.
- 5) A excepción de los criterios de la raíz cuadrada (SRSS), suma de valores absolutos (ABS), y los promedios $(SRSS+ABS)/2$ y $(SRSS+NRL)/2$, la evaluación de la respuesta en el sentido paralelo al de excitación, proporciona errores relativos no muy altos (figs. 6, 7 y 8), sin embargo, para la respuesta en el sentido perpendicular al de excitación (figs. 9, 10 y 11), todos los criterios, a excepción del método de combinación cuadrática completa (CQC) sobrestiman la respuesta.
- 6) La respuesta estimada de la rotación proporciona errores relativos mucho menores para la estructura desplantada en suelo blando (figs. 7 y 10).
- 7) El criterio de la combinación cuadrática completa (CQC) es el que proporciona errores relativos menores, en todos los casos (figs. 6 a 11).
- 8) El criterio de la raíz cuadrada (SRSS), proporciona el límite inferior en la evaluación de la respuesta, mientras que la suma de valores absolutos (ABS) proporciona el límite superior.

Por otro lado, el primer intento para llevar a cabo de manera racional el cálculo de la correlación existente entre los modos de vibrar de las estructuras, aplicándolo a un criterio de superposición modal se realizó con el método de la doble suma (ref. 11), en el cual se estiman los coeficientes de correlación modal en función de la relación de amortiguamiento crítico, la frecuencia amortiguada y el tiempo de duración del sismo. De la observación de su formulación matemática, es de esperarse que el factor determinante que modifica su evaluación es el tiempo de duración del sismo, razón por la cual su autor recomienda valores de 20, 30, 40 y 50 seg (ref. 46), según el tipo de suelo sobre el que se apoye la estructura.

Para el edificio aquí estudiado, se evaluaron los coeficientes de correlación modal con la formulación del método de la doble suma, variando la duración del sismo, y utilizando tiempos de temblores reales ocurridos tanto en suelo duro como en suelo blando, además de los valores recomendados en la ref. 46, considerándose también un tiempo de duración infinitamente grande. Los coeficientes obtenidos se muestran en la tabla 3. Por otro lado, se calcularon los coeficientes de correlación modal mediante la formulación de la ref. 12, (tabla 4). De la observación de las tablas 3 y 4, se puede ver la razón por la que el método del CQC proporciona errores relativos pequeños al evaluar la respuesta en el sentido perpendicular al de excitación, esto se debe a que a medida que se alejan de la diagonal de la matriz de coeficientes de correlación modal éstos tienden a ser más pequeños (tabla 4), lo que no ocurre con los coeficientes de correlación modal calculados con el método de la doble suma (tabla 3), aun cuando el tiempo de duración del sismo tiende a infinito.

4. VARIABILIDAD DE LAS PROPIEDADES DE LAS ESTRUCTURAS

En el estado actual de conocimientos del análisis estructural, es claro que las propiedades de las estructuras dependen de diferentes factores poco conocidos, lo que las hace más o menos inciertas, como sucede con la geometría y las propiedades mecánicas de los materiales, sin olvidar las cargas que actuarán sobre ellas.

Johnson en 1952 (ref. 27) definió dos grupos en los que se pueden clasificar las incertidumbres que afectan las propiedades estructurales, estos son:

1) Rigidez

- a) resistencia de los materiales
- b) dimensiones estructurales

2) Cargas

- a) carga muerta
- b) carga viva, incluyendo efectos dinámicos
- c) viento, agua, nieve, temperatura, hundimientos, sismos, etc.
- d) hipótesis en los modelos estructurales

En su trabajo Johnson hace un estudio bastante completo de la relación funcional que existe entre una cantidad incierta o variable aleatoria (v.a.), y otra completamente determinada, llegando a proponer la función de distribución y la función de frecuencia o función de densidad de probabilidad de la resistencia para diferentes tipos de materiales.

En un trabajo más reciente, Cornell (ref. 28), reporta valores de las variaciones que presentan ciertas "fuentes de incertidumbre" por ejemplo, el esfuerzo de fluencia del acero presenta un coeficiente de variación, c.v., que va del 8 al 10%, la resistencia a compresión del concreto presenta un c.v. entre el 5 y el 20%, dependiendo del control de las condiciones de las pruebas; las velocidades anuales máximas de viento tienen c.v. de 10 a 20%, los c.v. de la

distribución de cargas estacionarias en edificios de oficinas varían entre el 30 y el 100%, dependiendo del área tributaria, mientras que la intensidad de las mismas presenta c.v. entre el 10 y el 20%; las aceleraciones anuales máximas del suelo presentan coeficientes de variación en ocasiones mayores al 100%; las dimensiones de los elementos estructurales comparadas con las dimensiones anotadas en los planos constructivos, por ejemplo la colocación del acero de refuerzo en vigas de concreto reforzado, presenta c.v. entre el 2 y el 10%, dependiendo del tamaño de la viga. Las formulas de diseño tienen c.v. cercanos al 12%, por ejemplo, el coeficiente de variación de las ecuaciones para calcular la capacidad a momento de vigas de concreto reforzado, de sección rectangular es aproximadamente 12%, para columnas de concreto reforzado 11%, para deflexiones a corto plazo en vigas de concreto reforzado 15% y para pandeo lateral de vigas de acero 9.6%.

4.1 Variabilidad en las propiedades

Debido a que la variación de la resistencia es una propiedad inherente a todos los materiales, la estimación de la misma en los componentes de un sistema estructural es siempre un proceso estocástico. Estudios realizados en especímenes, en los cuales se han controlado todas las posibles fuentes de error, demuestran que los resultados obtenidos son aleatorios.

Con lo anterior en mente, los conceptos de probabilidad y las técnicas de análisis estadístico, pueden ser usadas para definir las propiedades de los elementos estructurales. Por lo tanto, si la variabilidad de las propiedades en estudio es un fenómeno aleatorio, será posible tener únicamente una aproximación del conocimiento completo de las características de la misma. Para determinar la aproximación probabilista que gobierna tal propiedad, es necesario realizar el mayor número posible de pruebas para poder obtener sus propiedades estadísticas (media, desviación estándar y coeficiente de variación).

4.2 Evaluación estadística de las propiedades mecánicas del concreto reforzado

Se han hecho estudios estadísticos para establecer los límites de valores confiables de las propiedades mecánicas de los materiales que integran el concreto reforzado y preesforzado, tanto individualmente (cilindros de prueba), como integrados en un elemento estructural aislado (vigas, columnas, losas, refs. 29 a 34 y 70 a 74) y sometido a cierto tipo de esfuerzo.

4.2.1 Propiedades estadísticas del acero de refuerzo

En la ref. 34, con base en las especificaciones nacionales, se realizó un estudio bastante completo para determinar las características mecánicas de barras de refuerzo empleadas en el D.F., analizándose las propiedades siguientes:

- a) esfuerzo de fluencia
- b) esfuerzo máximo
- c) alargamiento
- d) corrugación
- e) módulo de elasticidad
- f) área

El estudio de aproximadamente 60 obras, se realizó en la zona urbana del D.F., tomando dos barras diferentes de cada lote de 10 ton, agrupando éstas por marca y diámetro. Los métodos de prueba se pueden ver en la referencia

citada. Los resultados se analizaron en conjunto, haciendo dos combinaciones: a) esfuerzo de fluencia, esfuerzo máximo, módulo de elasticidad y alargamiento y b) área, altura de corrugación y espaciamiento de corrugación.

Al graficar las frecuencias acumuladas de los resultados, se encontró una gran tendencia hacia la línea recta de los datos tratados como distribución logarítmico normal, al hacer la prueba χ^2 cuadrada de cinco conjuntos de datos tomados al azar y con un nivel de significancia del 95% para conocer la bondad de ajuste, se decidió utilizar la distribución logarítmico normal, para analizar las propiedades estadísticas de los resultados.

Los resultados se analizaron agrupando la influencia del diámetro y la marca en el valor medio de los esfuerzos de fluencia máximo, módulo de elasticidad y alargamiento, encontrándose entre otras cosas, que la marca de las varillas influye grandemente en los valores medios de los esfuerzos máximo y de fluencia, mientras que, el diámetro tiene una clara influencia sobre el módulo de elasticidad, así como también en su alargamiento.

Agrupando los resultados obtenidos de las mediciones del esfuerzo de fluencia para las diferentes marcas de las barras, se observó que la desviación estándar permanece constante con un valor aproximado de 400 kg/cm² para un $f_y = 4200$ kg/cm².

La tabla 5 muestra las propiedades estadísticas de los datos presentados en la ref. 34, agrupando diferentes marcas de barras.

En un estudio más reciente (ref. 70), se evaluaron nuevamente las propiedades estadísticas de los aceros, y se compararon con las obtenidas en la ref. 34, para determinar de que manera se habían presentado variaciones a través de los años. Se realizaron 2104 ensayos de varillas elaboradas por diferentes fabricantes, encontrándose que, para diámetros desde 3/8" hasta 1", el c.v. para el esfuerzo máximo se encuentra entre 3.2 y 11.6%, mientras que para el esfuerzo de fluencia está entre 3.6 a 10.8%, además se puede observar que a medida que el diámetro aumenta, el c.v. disminuye. En el mismo estudio se encontró que en la mayoría de los casos, la distribución de frecuencias se ajusta a la distribución normal. Al comparar las propiedades estadísticas halladas en el presente estudio, con las obtenidas en estudios realizados en años anteriores en el D.F., (refs. 34 y 72), se encontró un incremento en las resistencias medias y una disminución en el porcentaje de defectuosos, mientras que la tendencia de la variación entre diámetro y marca son semejantes.

En otro estudio, Mirza y MacGregor (ref. 35), reportan los resultados del análisis de las propiedades del esfuerzo de fluencia del acero de pruebas realizadas en E.U. y Canadá, de varillas fabricadas con aceros de $f_y = 2800$ y 4200 kg/cm², encontrándose que para las primeras, el esfuerzo de fluencia medio es de 3185 kg/cm² y su c.v. de 11.6%, mientras que para las segundas su esfuerzo de fluencia medio fue de 4745 kg/cm² y su c.v. de 9.8%. Se consideró una función de distribución beta. En la misma referencia se reporta el estudio de Allen (ref. 36), para barras de acero con un $f_y = 2800$ kg/cm², donde se encontró un f_y medio de 3233 kg/cm² con un c.v. del 9.0%, se supuso una distribución normal; también el estudio de Ellingwood (ref. 37) para el mismo acero de refuerzo, encontrando un f_y medio de 3354 kg/cm² con c.v. de 9.0%, suponiendo una distribución log-normal. En una publicación posterior a esta referencia (ref. 38), se redujo el f_y medio a 3143 kg/cm² y el c.v. se incrementó a 11.0% al tomar en cuenta las variaciones debidas al efecto de los tamaños de las barras así como los efectos

de deformaciones en las mismas.

En la ref. 31, también se describe el estudio de Mirza y otros (ref. 39) para alambres de preefuerzo con una resistencia nominal de aproximadamente 18900 kg/cm², encontrándose que su resistencia última a tensión es de aproximadamente 19700 kg/cm² con un c.v. de 2.5%, suponiendo una distribución normal.

4.2.2 Propiedades estadísticas del concreto

En la ref. 29, Bloem estudia la resistencia del concreto tomada de dos fuentes, una de cilindros de prueba, y otra de corazones de losas. En sus estudios encontró que para concretos de 190, 195, 210, 220, 234, 260, 290 y 320 kg/cm², se tienen los coeficientes de variación siguientes 19.06, 17.48, 11.79, 9.41, 9.11, 6.26, 10.10 y 6.07 %, respectivamente.

Recientemente, Castañeda (ref. 40), realizó un estudio bastante completo de las propiedades estadísticas de los concretos que se fabrican en la zona urbana del D.F.; se consideraron una gran variedad de detalles de los materiales; su peso volumétrico, densidad, porcentaje de absorción de agua, composición granulométrica, etc., registrándose inclusive los lugares de procedencia de los agregados. También se observó la calidad del agua utilizada, la composición química de los cementos utilizados, su finura, porcentaje de consistencia, superficie específica, etc.

La elaboración de las mezclas de prueba se realizó combinando los diferentes tipos de agregados, para producir concretos con resistencias a la compresión f_c de 150 hasta 400 kg/cm² con revenimientos de 5, 10 y 18 cm. Se analizaron sus propiedades tanto del concreto fresco como endurecido, siendo estas últimas las de mayor interés para los fines de este trabajo.

Se encontraron una gran cantidad de resultados de las propiedades estadísticas de los concretos estudiados, por ejemplo, el módulo de elasticidad alcanzó un valor medio aproximado de 8500 $\sqrt{f_c}$, no llegando a alcanzar el valor de 10000 $\sqrt{f_c}$ que señala como máximo el Reglamento de Construcciones del D.F. Para concretos con $f_c = 350$, se encontraron c.v. de la resistencia 8.37%, mientras que para el módulo de elasticidad el c.v. fue de 7.15%, por otro lado, el valor medio de la relación de Poisson varía alrededor de 0.3275. Se encontraron también expresiones para determinar teóricamente la resistencia a tensión del concreto.

También recientemente Mena y otros (ref. 73), estudió las propiedades de los concretos elaborados en el D.F. así como las trabes postensadas que se utilizarán en la línea cuatro del metro, con el fin de verificar su calidad. Para el estudio de las propiedades del concreto se elaboraron mezclas con resistencias nominales de 200, 300, 350 y 450 kg/cm², obteniéndose que las resistencias medidas a los 28 días, fueron de 263 a 557 kg/cm², es decir, mayores que las esperadas. Para el módulo de elasticidad se encontró que varía alrededor de 7700 $\sqrt{f_c}$. Por otro lado, también se tomaron muestras del concreto de la estructura, extrayendo núcleos de 9.5 cm de diámetro y 30 cm de altura, encontrándose que su resistencia a compresión varía entre 373 a 572 kg/cm², mientras que el módulo de elasticidad varía entre 7000 $\sqrt{f_c}$. Se determinaron también las propiedades del concreto in situ, utilizando un método de ultrasonido, midiendo la velocidad de propagación de un pulso a través de la masa del concreto y correlacionándola con las propiedades del concreto, se encontró que en todos los

casos, la resistencia fue superior a los 400 kg/cm².

En el estudio realizado por Mendoza (ref. 74), se analizaron las propiedades de los concretos fabricados en el D.F., determinándose las propiedades típicas, mecánicas y elásticas a corto y largo plazo, encontrándose resultados bastante interesantes en cuanto a la resistencia del concreto, ya que al tratarse de un material frágil, la influencia de las características de los materiales con los que se elabora es un factor importante en cuanto a la variabilidad de la resistencia. Por esta razón, se proponen diferentes expresiones que permiten calcular la resistencia (a cualquier edad del concreto), a compresión, tensión, módulo de elasticidad, relación de Poisson, módulo de rigidez al corte y contracción al secado, de concretos elaborados con diferentes materiales específicos (grava basáltica, grava ligera de arcilla expandida, arena andesítica, etc.). Se encontraron también algunas características de estos concretos, como son la deformación unitaria, el coeficiente de deformación diferida y la relación esfuerzo-deformación entre otras.

En otro estudio realizado también en la Cd. de México, Gómez (ref. 32) analizó la capacidad a compresión y tensión de cilindros de concreto elaborados con los materiales que se encuentran en el D.F., estudiándose concretos con resistencia nominal f_c entre 140 y 350 kg/cm², con revenimientos de 8, 7 y 5 cm, manteniendo constantes los procedimientos de colado, curado, edad, y tamaño máximo del agregado.

En la ref. 41, se analizó la resistencia a tensión y a compresión del concreto, suponiendo un ciclo de cargas lento, observándose que el c.v. de la resistencia a compresión de cilindros probados en laboratorio varía entre el 12 y 15% para concretos con f_c entre 200 y 350 kg/cm², mientras que para concretos tomados de elementos ya construidos varía entre el 15 y 18%, Ellingwood (ref. 38) estimó que éste varía hasta en un 20.7%.

En la ref. 42 se determinaron las propiedades estadísticas de la resistencia a la tensión del concreto, obteniéndose un valor medio de 21.5 kg/cm² para concreto con f_c de 200 kg/cm², y de 27.35 kg/cm² para uno con f_c de 359 kg/cm², con CV de 18%.

En ambas pruebas se consideró que la resistencia del concreto presenta una distribución normal.

4.2.3 Propiedades estadísticas de la resistencia de elementos estructurales aislados

A partir de los datos de las propiedades estadísticas de los materiales y de las dimensiones de los elementos estructurales, en la ref. 31 se llevó a cabo un estudio de las propiedades estadísticas de la resistencia de elementos estructurales, utilizando simulación de Monte Carlo, sometidos a diferentes solicitaciones, el resumen de los resultados obtenidos se muestra en la tabla 7.

4.2.4 Propiedades estadísticas de las dimensiones de los elementos estructurales

Existen pocos estudios de las propiedades estadísticas de las dimensiones de los elementos estructurales de concreto reforzado. La ref. 31 reporta algunos obtenidos en Suiza (ref. 43), y E.U. (ref. 44). Se ha encontrado del análisis de la capacidad a flexión de vigas (Allen, ref. 36) que el espesor efectivo d ,

es igual al valor especificado con un c.v. de $.025+0.20/d$. En otro estudio, Ellingwood (ref. 38) sugiere que el c.v. de las dimensiones de elementos de concreto es $0.4/h$, mientras que para el espesor efectivo de la colocación del refuerzo en elementos de flexión es $0.68/h$, donde h es la dimensión nominal del elemento. En todos estos estudios, tanto la colocación de las barras, así como las dimensiones de los elementos presentan una distribución normal.

En nuestro país, Villanueva (ref. 71), recientemente realizó un estudio a cerca de las imperfecciones geométricas que se presentan en las columnas de concreto armado coladas en sitio ubicadas en dos edificios en el D.F. Las imperfecciones que se midieron fueron la falta de verticalidad (desplomes), las dimensiones de las secciones transversales, los claros entre ejes de columnas y el recubrimiento del acero de refuerzo. Del análisis estadístico de los datos se encontró que el valor medio de los desplomes de las columnas se aproxima a cero. Respecto a las secciones transversales, se estudiaron dos tipos, con secciones nominales de 60×60 cm y de 40×80 cm, a partir de los datos de las mediciones, se obtuvieron cuatro poblaciones en estudio, esto debido probablemente a la forma en la que fueron cimbradas para colarse; de las cuatro poblaciones tres se ajustaron a la distribución normal y una a la distribución log-normal trasladada. Los valores medios que se obtuvieron de las secciones transversales fueron 59.56, 60.31, 80.23 y 39.54 cm, con coeficientes de variación del 0.81, 0.75, 0.26 y 0.97%, observándose que los valores de las propiedades estadísticas de las secciones transversales para el primer nivel, (la desviación estándar específicamente), son significativamente diferentes del resto de los niveles, lo cual se atribuye a las dificultades que se presentan en las condiciones de construcción a medida que se avanza en los niveles superiores. Los datos estadísticos obtenidos de las mediciones de los claros entre columnas, presentan valores de la desviación estándar entre 2 y 3 cm. Los recubrimientos medidos resultaron mayores a los especificados en los planos constructivos, en una relación del 12% para un edificio y del 45% para el otro, sin embargo, en un estudio anterior realizado por Mendoza y otros (ref. 75), se encontró que en general, los recubrimientos tienden a ser mayores que los especificados.

Se encuentran otros estudios en la literatura, en los que se proponen criterios de análisis de elementos estructurales de concreto reforzado tales como losas (ref. 45), de los que es posible obtener las propiedades estadísticas de los especímenes analizados, obteniéndose, a partir de las pruebas de Lenschow y Sozen (ref. 45) en 19 losas, con un espesor nominal total de 10 cm, un espesor medio de 10.4 cm y un c.v. de 1.37%.

Un resumen de los resultados de las propiedades estadísticas de las dimensiones de los elementos estructurales se puede ver en la tabla 6.

Es importante hacer notar que las diferencias existentes entre las dimensiones anotadas en los planos constructivos, y los elementos ya construidos, se pueden caracterizar mucho mejor mediante las propiedades estadísticas del error en las dimensiones (ref. 31), esto es debido a que la desviación estándar tiende a ser independiente del tamaño del elemento, lo que origina que el coeficiente de variación se reduzca a medida que el tamaño del elemento se incrementa.

4.3 Variabilidad en las cargas

En lo que sigue se mencionan algunos de los estudios existentes relacionados con la variación que presentan las cargas actuantes en las estructuras. Se hace

mención únicamente de dos tipos de cargas (vivas y muertas), sin que esto signifique que sean las únicas que afectan el comportamiento estructural, sino que son las que se consideran como no deterministas en el presente trabajo.

4.3.1 Cargas vivas

Existen estudios de las propiedades estadísticas de las cargas vivas (ref. 48) donde se han derivado relaciones entre las cargas y el área cargada basadas en una distribución normal, a partir de los resultados obtenidos se han desarrollado especificaciones para diferentes códigos de diseño (ref. 49).

En otro estudio (ref. 50), se analiza la dependencia de las cargas vivas respecto al tipo de estructura, tipo de uso y área, mediante un análisis de varianza, encontrándose que las distribuciones son normales, log-normales y extremas. Johnson en su trabajo (ref. 27), también estudia la distribución de las cargas vivas, encontrando que la debida a personas es log-normal.

En un estudio más reciente, Ellingwood (ref. 47) encontró que para un período de 50 años, la carga viva presenta una distribución de extremos tipo I, con un c.v. de 25%, mientras que para un período de 8 años, la distribución es la misma y el c.v. es de 32%; y para 1 año la distribución es gamma con un c.v. de 40%, observándose que a medida que el intervalo se incrementa, el c.v. disminuye.

4.3.2 Cargas muertas

Como es sabido, las cargas muertas son función de la estructura. Posiblemente por esta razón no se habían hecho estudios de su variabilidad en las estructuras, sin embargo, existe un gran número de componentes en una estructura que se consideran como carga muerta, pero que no forman parte del sistema estructural; Ellingwood (ref. 47) encontró que estas cargas presentan una distribución normal con un c.v. de 10%.

4.4 Otras fuentes de incertidumbre

En general, además de las mencionadas, existen otras fuentes de incertidumbre que afectan el comportamiento de las estructuras, de las que aún se carece de suficientes datos que permitan evaluar sus propiedades estadísticas. En los párrafos siguientes se mencionan algunas de éstas.

4.4.1 Incertidumbre en el modelo de análisis dinámico

En la ref. 51 se anotan los resultados de un estudio realizado para determinar las propiedades estadísticas de la relación R_t que existe entre el período natural de vibración observado y el calculado mediante un análisis modal en estructuras reales, sometidas a excitaciones sísmicas. Del estudio de 22 edificios se encontró, un valor medio de R_t 1.15, su desviación estándar de 0.344, con un c.v. del 29.9%.

Otra incertidumbre que afecta el modelo de análisis dinámico es la interacción que existe entre el suelo y la estructura al presentarse el sismo. Aunque ya se han hecho numerosos estudios, por ejemplo Badillo (ref. 76), analizó el efecto de la rotación del suelo al excitar a una estructura, llegando a obtener espectros de respuesta de torsión, existen otros para tratar de determinar los límites en los que esta interacción debe tomarse en cuenta, se ha tratado

también el problema desde el punto de vista experimental, utilizando mesas vibratoras e introduciendo el término de amortiguamiento radial, o desde el punto de vista puramente analítico, modelando el suelo como resortes, lo cual viene a producir serios errores al desprestigiar efectos del sismo, pues la realidad es que el suelo contiene un número infinito de grados de libertad (aunque esta aproximación es aceptable en la modelación de la rigidez rotacional en la base de muros de cortante y columnas). Sin embargo, es muy poco el material que tiene una aplicación directa en el análisis sísmico de estructuras, pues muchos de estos estudios poseen serias restricciones teóricas o no son fáciles de aplicar.

El amortiguamiento representa otra de las fuentes de incertidumbre en la respuesta dinámica de las estructuras, ya que ocasionará que se tome un espectro diferente, afectando directamente el valor de la respuesta que se está calculando. Por otro lado, el amortiguamiento estará en función tanto de las propiedades de la estructura (masa y la rigidez), como se vio en el capítulo 2, como de las características de la excitación, razón por la cual su evaluación real resulta bastante incierta. En mediciones reales (ref. 51), se encontró que del estudio de 52 edificios el coeficiente de amortiguamiento presenta un valor medio de 4.91%, desviación estándar de 3.27% y su c.v. del 66.6%.

4.4.2 Incertidumbre en la combinación de las acciones

Las incertidumbres que afectan la combinación de las cargas actuantes en una estructura, se materializa como factores de carga, lo que viene a ser una aproximación del problema real, pues la calibración de estos factores depende de diferentes elementos, como son (ref. 52):

- a) las relaciones físicas entre acciones, como sucede con la presión y la succión del viento, o las cargas vivas y muertas al actuar al mismo tiempo.
- b) la correlación entre acciones, partiendo de la base de que éstas son variables aleatorias.
- c) las relaciones existenciales entre acciones, esto es, la manera en la que se pueden presentar las acciones, por ejemplo, sea F1 y F2 dos acciones, sus relaciones existenciales pueden ser:
 - i) si F1 y F2 pueden ocurrir separadamente, su relación existencial se dice que es independiente
 - ii) si F1 y F2 se presentan juntas, son simultáneamente existenciales
 - iii) si F1 y F2 se presentan simultáneamente con el mismo o diferente efecto, se dice que son dependientes negativas
 - iv) si F1 puede ocurrir sólo si F2 existe, se dice que son dependientes positivas

Entonces, la combinación de acciones de una estructura está sujeta a dos tipos de estudio, determinista y probabilista, y cada uno de ellos a dos planteamientos diferentes, uno, de las acciones aisladas, donde no se involucran las propiedades de la estructura en la solución, y el denominado aproximación efecto-acción donde la solución cubre la relación acción-estructura (ref. 52).

4.4.3 Deterioro de la estructura

Es evidente que para ciertas estructuras, las cargas debido a condiciones

ambientales, ocasionan un decremento en su resistencia estructural, como lo es la corrosión en las estructuras de acero, o el agrietamiento en las estructuras de concreto. En la actualidad, empiezan a recabarse datos de este efecto y la manera como afecta el comportamiento estructural, relacionándolo principalmente con el fenómeno de fatiga.

4.4.4 Endurecimiento del concreto con la edad

Generalmente, el incremento en la resistencia del concreto debido a su edad, no se tiene en cuenta en el análisis de las estructuras, posiblemente porque se piensa que su efecto es tendiente hacia un mejor comportamiento de la estructura, o porque al correlacionarse con el agrietamiento, se compensa el incremento de rigidez, lo cual no necesariamente es cierto, ya que en realidad se están alterando algunas de las hipótesis de partida con las que se analizó la estructura.

Según estudios, se ha encontrado que existe una relación lineal entre la resistencia del concreto y el logaritmo de la edad. Para concretos pobres, (ref. 31), a los 25 años de edad, la resistencia se aproxima al 240% de la medida a los 28 días de colocado, mientras que para concretos de alta resistencia esta relación se encuentra entre el 125 y 150%. En el mismo estudio se encontró que la distribución de este efecto podría considerarse como una variable normalmente distribuida, con un valor medio de 1.25 y c.v. de 7%. Al incluir el incremento en la resistencia del concreto en las características de elementos estructurales aislados, se ha obtenido que para vigas sometidas a flexión con $f_c=350$ Kg/cm², su c.v. está entre el 8 y 11%; sometidas a cortante su c.v. es del 22%, mientras que para columnas con falla a compresión, su c.v. es del 16%.

4.4.5 Errores humanos

Resulta complejo estimar las causas y el efecto de los errores humanos sobre el comportamiento de las estructuras, sin embargo, es evidente que éstos influyen en el comportamiento estructural. En el trabajo de Melchers y Harrington (ref. 53), se reportan algunos de los primeros conceptos y estimaciones del efecto del error humano. Así se tiene que los errores humanos se pueden clasificar en:

- a) errores de omisión, como es la falla al ejecutar un trabajo
- b) errores de ejecución, como es la ejecución defectuosa de un trabajo
- c) actos extraños
- d) errores secuenciales, es decir, errores que se suceden consecutivamente
- e) errores debido al poco tiempo con el que se cuenta para realizar un trabajo

En otro estudio Nowak (ref. 54), propone un modelo de análisis mediante el cual es posible medir la consecuencia del error humano, a partir de propiedades estadísticas de las características de la estructura que se analiza, sin embargo, en la actualidad, la determinación de estos errores resulta aún muy difícil de estimar, pero los primeros estudios a ese respecto se empiezan a realizar.

En el presente trabajo se estudiará el efecto que ocasionan sobre la respuesta modal espectral de las estructuras, la variabilidad en las propiedades mecánicas y elásticas de los materiales y las variaciones que se presentan en las dimensiones de los diferentes elementos estructurales que las integran (vigas y columnas), así como en las masas que actúan sobre las mismas.

5. PROBLEMA DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL PARA SISTEMAS CON PARÁMETROS INCIERTOS

Debido a las incertidumbres que existen en las propiedades tanto elásticas como geométricas de los elementos estructurales, así como en las cargas que actúan sobre los sistemas estructurales, el llevar a cabo un análisis determinista para obtener su respuesta utilizando para ello valores medios de dichos parámetros, puede llevar a resultados en ocasiones poco realistas.

En este capítulo se estudia la influencia de estas incertidumbres sobre la respuesta estructural. Se analizan cuatro diferentes planteamientos matemáticos que consisten básicamente en introducir en las ecuaciones de equilibrio estático o dinámico de las estructuras, parámetros caracterizados por sus primeros y segundos momentos. El planteamiento de estos métodos se hace primero para la respuesta estática, considerando cargas deterministas, y posteriormente se hace el planteamiento para el problema de valores característicos (respuesta dinámica), considerando masas y rigideces como parámetros aleatorios.

5.1 Formulación de diferentes métodos de análisis no determinista para el problema de análisis estructural estático

5.1.1 Análisis de incertidumbre de primer orden

Este método (ref. 55,56,57) permite estimar en primera aproximación, la incertidumbre que afecta la respuesta de sistemas estructurales, en los que se han incluido propiedades estadísticas de sus elementos. Así, para el caso estático, la ecuación de equilibrio es:

$$[K] \{x\} = \{F\} \quad (5.1)$$

donde $[K]$ es la matriz de rigideces de la estructura que depende de las propiedades elásticas y geométricas de los elementos estructurales, $\{x\}$ es el

vector de desplazamientos de los nodos de la estructura, y $\{F\}$ el vector de cargas. Las propiedades estadísticas de la respuesta se pueden obtener introduciendo directamente en el planteamiento de la ec. (5.1), los valores medios y varianzas de las variables aleatorias (v.a.) consideradas, esto se logra al derivar la ec. (5.1), con propiedades aleatorias, respecto a la v.a. Y_i así:

$$\frac{\partial \{K\}}{\partial Y_i} \{x\} + \{K\} \frac{\partial \{x\}}{\partial Y_i} = \frac{\partial \{F\}}{\partial Y_i}$$

entonces:

$$\{K\} \frac{\partial \{x\}}{\partial Y_i} = \frac{\partial \{F\}}{\partial Y_i} - \frac{\partial \{K\}}{\partial Y_i} \{x\} \quad (5.2)$$

Considerando que el vector de fuerzas no es función de las v.a. Y_i que afectan la matriz de rigideces, se obtiene

$$\{K\} \frac{\partial \{x\}}{\partial Y_i} = - \frac{\partial \{K\}}{\partial Y_i} \{x\} \quad (5.3)$$

llamando $\{xv\} = \partial \{x\} / \partial Y_i$ vector de desplazamientos virtuales, y al término $\{Fv\} = - \partial \{K\} \{x\} / \partial Y_i$ vector de fuerzas virtuales, la ec. (5.3) se puede escribir como sigue

$$\{K\} \{xv\} = \{Fv\} \quad (5.4)$$

al resolver el sistema de ecuaciones anterior se obtiene el vector $\{xv\}$, a partir del cual es posible calcular la matriz de covarianzas de la respuesta, con la expresión

$$\langle \text{cov } x \rangle = \{xv\} \langle \text{cov } Y_i \rangle \{xv\}^T \quad (5.5)$$

donde

$$\langle \text{cov } Y_i \rangle = [\sigma_{Y_i}] [\rho] [\sigma_{Y_i}] \quad (5.6)$$

es la matriz de covarianzas de las propiedades estructurales consideradas como aleatorias, $[\sigma_{Y_i}]$ la matriz de desviación estándar (matriz diagonal), y $[\rho]$ la matriz de coeficientes de correlación de las v.a.

La determinación de la matriz de covarianzas de la respuesta requiere del conocimiento previo de la matriz de covarianzas de los coeficientes de rigideces, ec. (5.6), como se puede ver en la ec. (5.5).

5.1.2 Método de simulación de Monte Carlo

El método de simulación de Monte Carlo (ref. 58) consiste en repetir, con la ayuda de la computadora, un experimento numérico un gran número de veces obteniendo igual número de resultados, para posteriormente determinar las propiedades estadísticas de estos últimos, teniendo en cuenta que, a medida que el número de experimentos crece, el resultado promedio obtenido se aproxima al valor exacto.

Para el caso de análisis estructural aquí estudiado, este método consiste en generar valores aleatorios de cada propiedad estructural, a partir de su función de distribución de probabilidad, que para este estudio, y según lo visto en el capítulo 4 anterior, se considerará normal o gaussiana, pero sin embargo se puede tener cualquier otra función de distribución (ref. 27). Para cada conjunto de valores simulados se obtienen las respuestas estructurales correspondientes, que posteriormente se analizarán estadísticamente. Así, para la función de distribución de probabilidades $F(x)$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \int_{-\infty}^x \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} \right)^2 \right] dx \quad (5.7)$$

Para el intervalo considerado se puede obtener

$$p(x \leq x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) du \quad (5.8)$$

donde $u = (x - \bar{x}) / \sigma_x$

La ec. (5.8) define la probabilidad de que el valor de las v.a. x , sea menor o igual al parámetro x_1 . Entonces, los valores simulados para las v.a. consideradas, se obtienen igualando la función de distribución de cada uno de los números aleatorios generados, que será la probabilidad de ocurrencia de cada una de las v.a. y calculando su valor con el cambio de variable para u . Este procedimiento se repite cierto número de veces, obteniéndose números aleatorios no correlacionados. Resolviendo la ec. (5.1) para cada simulación se obtienen las diferentes respuestas estáticas, que deberán estudiarse estadísticamente.

Un procedimiento similar se seguiría para simular números aleatorios que tuviesen otra función de distribución.

5.1.3 Método de perturbaciones

Las técnicas de perturbaciones (ref. 59) se utilizan para obtener soluciones de ecuaciones diferenciales en forma de series de potencias, cuando las ecuaciones diferenciales son aproximadamente lineales y autónomas, i.e., cuando los términos no lineales o no autónomos son relativamente pequeños. Tales términos son conocidos como "perturbaciones", y representan efectos de segundo orden del sistema. Las técnicas de perturbaciones para obtener la solución de sistemas aproximadamente lineales, son denominados métodos de perturbaciones. Existe una gran variedad de métodos de perturbaciones, aquí se presenta uno de ellos adaptado al objetivo de este trabajo de análisis estructural no determinista, que consiste en considerar las variaciones de las propiedades estructurales como perturbaciones de la matriz de rigideces del sistema estructural.

Para el caso de análisis estático, se considera que las propiedades de la estructura están dadas por su valor medio y una variación considerada aleatoria (perturbación). La matriz $[K]$ de la ec. (5.1) es una matriz aleatoria, entonces, de acuerdo a la teoría de perturbaciones (ref. 60), la matriz de rigideces puede expresarse como sigue

$$[K] = [K]_0 + [Q]_1 + [Q]_2 + \dots \quad (5.9)$$

donde $[K]_0$ es la matriz de rigideces no perturbada (determinista), y $[Q]_i$ la perturbación de orden i de dicha matriz. Si las perturbaciones son pequeñas, la solución de la ec. (5.1) se puede escribir como

$$\{x\} = \{x\}_0 + \{u\}_1 + \{u\}_2 + \dots \quad (5.10)$$

donde $\{x\}_0$ es la solución no perturbada (determinista), y $\{u\}_i$ la perturbación de orden i de la respuesta estática.

Sustituyendo las ecs. (5.9) y (5.10) en la ec. (5.1), y considerando únicamente términos hasta segundo orden, se tiene

$$\left[[K]_0 + [Q]_1 + [Q]_2 \right] \left[\{x\}_0 + \{u\}_1 + \{u\}_2 \right] = \{F\} \quad (5.11)$$

Realizando el producto indicado y agrupando términos de igual orden, se tiene

$$\begin{aligned} [K]_0 \{x\}_0 &= \{F\} \\ [K]_0 \{u\}_1 &= - [Q]_1 \{x\}_0 \\ [K]_0 \{u\}_2 &= - [Q]_2 \{x\}_0 - [Q]_1 \{u\}_1 \end{aligned} \quad (5.12)$$

de donde, a partir de las ecs. (5.12) es posible obtener valores para la respuesta estática conociendo la perturbación de la matriz de rigideces.

5.1.4 Método de perturbaciones con simulación de Monte Carlo

Este método aprovecha las ventajas del método de simulación de Monte Carlo para obtener diferentes valores de las propiedades estructurales, que son considerados como perturbaciones de la matriz de rigideces, obteniendo para cada simulación de las perturbaciones de la matriz $[K]$, simulaciones de las componentes de la respuesta perturbada, a partir de las cuales es posible determinar los parámetros estadísticos de la respuesta estática.

5.2 Formulación de diferentes métodos de análisis no determinista para el problema de análisis estructural dinámico

5.2.1 Análisis de incertidumbre de primer orden

De forma análoga al caso estático, es posible estimar la incertidumbre que afecta la respuesta dinámica de un sistema estructural, del cual se conocen las propiedades estadísticas de los parámetros aleatorios que determinan su comportamiento, como son las rigideces y las masas. Así se tiene, para el problema de valores característicos (ref. 35):

$$\left([K] - \lambda [M] \right) \{\phi\} = \{0\} \quad (5.13)$$

donde las matrices $[M]$ y $[K]$ son las masas y rigideces de la estructura, λ los valores característicos que son función de la frecuencia natural, y $\{\phi\}$ los vectores modales.

Si las matrices de masas y rigideces se consideran no deterministas, enton-

es posible introducir en el planteamiento de la ec. (5.13) las propiedades estadísticas de sus v.a., para obtener las propiedades estadísticas de la respuesta dinámica, esto se logra al derivar la ec. (5.13) respecto a las v.a. Y_i

$$\frac{\partial [K]}{\partial Y_i} (\phi) + [K] \frac{\partial (\phi)}{\partial Y_i} - [M] \frac{\partial \lambda}{\partial Y_i} (\phi) - \lambda \frac{\partial [M]}{\partial Y_i} (\phi) - [M] \frac{\partial (\phi)}{\partial Y_i} = (0)$$

$$([K] - \lambda [M]) \frac{\partial (\phi)}{\partial Y_i} = [M] \frac{\partial \lambda}{\partial Y_i} (\phi) - \frac{\partial [K]}{\partial Y_i} (\phi) + \frac{\partial [M]}{\partial Y_i} (\phi)$$

premultiplicando por $\{\phi\}^T$.

$$\begin{aligned} (\phi)^T ([K] - \lambda [M]) \frac{\partial (\phi)}{\partial Y_i} &= \frac{\partial \lambda}{\partial Y_i} (\phi)^T [M] (\phi) - (\phi)^T \frac{\partial [K]}{\partial Y_i} (\phi) + \\ &+ (\phi)^T \frac{\partial [M]}{\partial Y_i} (\phi) \end{aligned}$$

pero ya que $[K] (\phi) = \lambda [M] (\phi)$, entonces

$$\frac{\partial \lambda}{\partial Y_i} (\phi)^T [M] (\phi) - (\phi)^T \frac{\partial [K]}{\partial Y_i} (\phi) + \lambda (\phi)^T \frac{\partial [M]}{\partial Y_i} (\phi) = (0)$$

de donde

$$\frac{\partial \lambda}{\partial Y_i} = \frac{(\phi)^T \frac{\partial [K]}{\partial Y_i} (\phi) - \lambda (\phi)^T \frac{\partial [M]}{\partial Y_i} (\phi)}{(\phi)^T [M] (\phi)}$$

la matriz de covarianzas de los valores característicos se puede obtener como

$$\langle \text{cov } \lambda \rangle = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial Y_i} \right] \langle \text{cov } Y_i \rangle \left[\frac{\partial \lambda}{\partial Y_i} \right]^T$$

para determinar la matriz de covarianzas de las frecuencias naturales w , se tiene que $\lambda = w^2$, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial Y_i} = \frac{\partial w}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial Y_i}$$

pero

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda} = \frac{\partial \lambda^{1/2}}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} = \frac{1}{2 w}$$

finalmente, la matriz de covarianzas de las frecuencias naturales es

$$(\text{cov } w) = \left[\frac{w}{\partial \lambda} \right] (\text{cov } \lambda) \left[\frac{w}{\partial \lambda} \right]^T$$

Nuevamente, la obtención de la matriz de covarianzas de la respuesta requiere del conocimiento previo de la matriz de covarianzas de las v.a. consideradas.

5.2.2 Método de simulación de Monte Carlo

El método de simulación de Monte Carlo aplicado al análisis dinámico, es completamente análogo en cuanto a su metodología, al caso de análisis estático, al hacer uso de la naturaleza probabilista de las funciones de distribución de probabilidades de las matrices de masas y rigideces, que en el caso del problema de valores característicos se consideran aleatorias, para obtener de manera artificial o simulada los resultados de cierto número de experimentos numéricos repetitivos.

5.2.3 Método de perturbaciones

En la ref. 61 se presenta una aplicación de la teoría de perturbaciones al análisis dinámico no lineal de estructuras, en la que se consideran como tales a la parte inelástica de la matriz de rigideces. Para el caso que aquí se presenta, se utiliza un planteamiento análogo al desarrollado por Tansirikongkol y Pecknold, presentándose la variante de considerar perturbaciones no sólo en la matriz de rigideces, sino también en la matriz de masas, debido a las variaciones que pueden presentar ambas matrices ocasionadas por las incertidumbres de que se ha hablado en el capítulo anterior, entonces, al considerar el modelo dinámico no determinista de una estructura, sus matrices $[K]$ y $[M]$ se consideran formadas por v.a., esto es

$$\begin{aligned} [K] &= [K]_0 + [0]_1 + [0]_2 + \dots \\ [M] &= [M]_0 + [L]_1 + [L]_2 + \dots \end{aligned}$$

donde, al igual que para la respuesta estática, $[K]_0$ es la matriz de rigideces no perturbada o determinista, y $[0]_i$ es la perturbación de orden i de dicha matriz, y además $[M]_0$ es la matriz de masas no perturbada (determinista) y $[L]_i$ la perturbación de orden i de la misma.

Entonces, la respuesta dinámica de la estructura también será no determinista, esto es

$$\begin{aligned} [\dot{\phi}] &= [\dot{\phi}]_0 + [\dot{\phi}]_1 + [\dot{\phi}]_2 + \dots \\ \{w^2\} &= \{w^2\}_0 + \{w^2\}_1 + \{w^2\}_2 + \dots \end{aligned}$$

donde $[\dot{\phi}]_0$ es la matriz modal de la estructura, $\{w^2\}_0$ la frecuencia natural circular, $[\dot{\phi}]_0$ y $\{w^2\}_0$ la matriz modal y la frecuencia natural de vibración deterministas, y $[\dot{\phi}]_i$ y $\{w^2\}_i$ la perturbación de orden i de la matriz modal y de la frecuencia natural de la estructura.

Al sustituir las matrices anteriores en la ecuación de valores característicos, y considerando perturbaciones de segundo orden

$$[[K]_0 + [Q]_1 + [Q]_2 - \{w^2\}_0 + \{w^2\}_1 + \{w^2\}_2] \langle [M]_0 + [L]_1 + [L]_2 \rangle \langle [\phi]_0 + [\phi]_1 + [\phi]_2 \rangle = [0]$$

realizando los productos indicados, y agrupando términos de igual orden, se tiene

$$\langle [K]_0 - \{w^2\}_0 [M]_0 \rangle [\phi]_0 = [0] \quad (5.14)$$

$$\langle [K]_0 - \{w^2\}_0 [M]_0 \rangle [\phi]_1 + \langle [Q]_1 - \{w^2\}_1 [M]_0 \rangle [\phi]_0 = \{w^2\}_0 [L]_1 [\phi]_0 \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \langle [K]_0 - \{w^2\}_0 [M]_0 \rangle [\phi]_2 + \langle [Q]_2 - \{w^2\}_2 [M]_0 \rangle [\phi]_0 = \\ = \{w^2\}_0 [L]_1 [\phi]_1 + \{w^2\}_1 [L]_1 [\phi]_0 + \{w^2\}_0 [L]_2 [\phi]_0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Considerando únicamente perturbaciones de primer orden, y reescribiendo la ec. (5.15) como sigue

$$\langle [K]_0 - \{w^2\}_0 [M]_0 \rangle \{\phi\}_1 + \langle [Q]_1 - \{w^2\}_1 [M]_0 \rangle \{\phi\}_0 = \{w^2\}_0 [L]_1 \{\phi\}_0 \quad (5.17)$$

premultiplicando la ec. anterior por $\{\phi\}_0^T$

$$\{\phi\}_0^T \langle [K]_0 - \{w^2\}_0 [M]_0 \rangle \{\phi\}_1 + \{\phi\}_0^T \langle [Q]_1 - \{w^2\}_1 [M]_0 \rangle \{\phi\}_0 = \{w^2\}_0 \{\phi\}_0^T [L]_1 \{\phi\}_0$$

pero

$$\{\phi\}_0^T \langle [K]_0 - \{w^2\}_0 [M]_0 \rangle \{\phi\}_1 = [0]$$

entonces

$$\{\phi\}_0^T \langle [Q]_1 - \{w^2\}_1 [M]_0 \rangle \{\phi\}_0 = \{w^2\}_0 \{\phi\}_0^T [L]_1 \{\phi\}_0$$

pero, para modos ortonormales

$$\{\phi\}_0^T [M] \{\phi\}_0 = [1]$$

donde [1] es la matriz identidad. Finalmente

$$\{w^2\}_1 = \{\phi\}_0^T [Q]_1 \{\phi\}_0 - \{w^2\}_0 \{\phi\}_0^T [L]_1 \{\phi\}_0 \quad (5.18)$$

Expresando las perturbaciones de los vectores modales como combinaciones lineales de los modos deterministas (ref. 61) se tiene

$$\{\phi\}_k = \sum_{j=1}^n a_{j|k} \{\phi\}_j$$

donde i indica el modo, k el orden de la perturbación, j la variación de los modos y n el número total de modos considerados. Entonces, para el primer orden

de aproximación

$$\{\phi_i\}_n = \sum_{j=1}^n a_{ji} \{\phi_j\}_0 \quad (5.19)$$

Premultiplicando la ec. (5.17) por el vector $\{\phi_j\}_0^T$

$$\{\phi_j\}_0^T \langle [K]_0 - \{w_i^z\}_0 [M]_0 \rangle \{\phi_i\}_1 + \{\phi_j\}_0^T \langle [Q]_0 - \{w_i^z\}_0 [M]_0 \rangle \{\phi_i\}_0 = \{w_i^z\}_0 \{\phi_j\}_0^T [L]_0 \{\phi_i\}_0$$

sustituyendo la ec. (5.19) en la ec. anterior

$$\begin{aligned} \{\phi_j\}_0^T \langle [K]_0 - \{w_i^z\}_0 [M]_0 \rangle a_{ji} \{\phi_j\}_1 + \{\phi_j\}_0^T \langle [Q]_0 - \{w_i^z\}_0 [M]_0 \rangle \{\phi_j\}_0 = \{w_i^z\}_0 \{\phi_j\}_0^T [L]_0 \{\phi_j\}_0 \\ \{\phi_j\}_0^T [K]_0 \{\phi_j\}_0 a_{ji} - \{w_i^z\}_0 \{\phi_j\}_0^T [M]_0 \{\phi_j\}_0 a_{ji} + \{\phi_j\}_0^T [Q]_0 \{\phi_j\}_0 - \{w_i^z\}_0 \{\phi_j\}_0^T [M]_0 \{\phi_j\}_0 = \\ = \{w_i^z\}_0 \{\phi_j\}_0^T [L]_0 \{\phi_j\}_0 \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \{w_i^z\}_0 &= \{\phi_j\}_0^T [K]_0 \{\phi_j\}_0 \\ [1] &= \{\phi_j\}_0^T [M]_0 \{\phi_j\}_0 \\ \{0\} &= \{\phi_j\}_0^T [M]_0 \{\phi_j\}_0 \end{aligned}$$

entonces

$$\{w_i^z\}_0 a_{ji} - \{w_i^z\}_0 a_{ji} + \{\phi_j\}_0^T [Q]_0 \{\phi_j\}_0 = \{w_i^z\}_0 \{\phi_j\}_0^T [L]_0 \{\phi_j\}_0$$

de donde

$$a_{ji} = \frac{\{\phi_j\}_0^T [Q]_0 \{\phi_j\}_0 - \{w_i^z\}_0 \{\phi_j\}_0^T [L]_0 \{\phi_j\}_0}{\{w_i^z\}_0 - \{w_i^z\}_0} \quad (5.20)$$

5.2.4 Método de perturbaciones con simulación de Monte Carlo

La idea de la combinación de estos dos métodos para obtener las propiedades estadísticas de la respuesta dinámica de elementos estructurales aislados (columnas), fue planteada por Shinozuka en 1972 (ref. 62), y ha sido utilizada para estudiar estructuras de tierra (ref. 63), presentándose aquí la variante de incluir, además de la rigidez de la estructura, las masas de la misma, como propiedades aleatorias. Aprovechando el planteamiento para el problema de valores característicos desarrollado en el párrafo anterior. Análogamente al caso de la respuesta estática, se utiliza el método de simulación de Monte Carlo para generar diferentes valores de las propiedades estructurales, que son consi-

derados como perturbaciones de primer orden para las matrices de masas y rigideces de la estructura, y a partir de éstos y utilizando el método de perturbaciones, es posible obtener diferentes valores de la respuesta dinámica.

6. RESPUESTA MODAL ESPECTRAL PROBABILISTA

En general, podría pensarse que al considerar los valores más desfavorables de las variables que afectan directamente el comportamiento de una estructura, se estaría diseñando ésta del lado de la seguridad, sin embargo, este no es un razonamiento realista, pues lo cierto es que el valor de tales variables se presenta en la naturaleza de una manera completamente aleatoria. Con esta idea en mente, en el presente capítulo se propone una metodología que permite estimar el comportamiento dinámico no determinista de una estructura, y a partir de éste su respuesta modal espectral probabilista, que proporcionará, en base a las variaciones estadísticas que se tengan de las propiedades de los elementos estructurales y las masas, la manera en que éstas afectan cada uno de los criterios de superposición modal, esto es, se podrá medir la aproximación que cada método de superposición proporciona, justificándose o no el incremento de cálculos numéricos que hay que hacer para obtener la respuesta, pues como se vio en el capítulo 2, algunos de estos criterios son demasiado laboriosos en su aplicación práctica.

6.1 Metodología

Apoyándose en el capítulo anterior, es posible obtener las características dinámicas no deterministas de una estructura, utilizando para ello sus propiedades estadísticas de masas y rigideces; esto se puede llevar a cabo conociendo las matrices de perturbación $[L]$ y $[Q]$ y con éstas obtener las perturbaciones de primer orden de las frecuencias naturales con la ec. (5.18), y posteriormente calcular los coeficientes a_{jk} con la ec. (5.20), para obtener las perturbaciones de primer orden de la matriz modal con la ec. (5.19). Se observa que las diferentes frecuencias obtenidas de esta manera, están elevadas al cuadrado, pues la aplicación del método de perturbaciones se hace sobre el problema de valores característicos, entonces, para poder llevar a cabo el estudio estadístico de las frecuencias naturales, es necesario plantear el problema de la

determinación del comportamiento de variables aleatorias dependientes, esto es (ref. 64), sea $Z = w^2$ una variable aleatoria, su media está dada por

$$\mu_z = \mu_{w^2} = E(w^2) = \mu_w^2 + \sigma_w^2 \quad (6.1)$$

y su desviación estándar

$$\sigma_{w^2} = (4\mu_w^2\sigma_w^2 + 2\sigma_w^4)^{1/2} \quad (6.2)$$

entonces, para este caso, se conocen las propiedades estadísticas para w^2 , esto es, conocemos μ_{w^2} y σ_{w^2} , entonces de la ec. (6.1)

$$\mu_w^2 = \mu_{w^2} - \sigma_w^2 \quad (6.3)$$

sustituyendo la ec. (6.3) en la ec. (6.2)

$$\sigma_{w^2}^2 = 4(\mu_{w^2} - \sigma_w^2)\sigma_w^2 + 2\sigma_w^4 = 4\mu_{w^2}\sigma_w^2 - 2\sigma_w^4$$

despejando a σ_w^2

$$\sigma_{w^2} = \mu_{w^2} \pm (\mu_{w^2}^2 - \frac{1}{2}\sigma_{w^2}^2)^{1/2} \quad (6.4)$$

Finalmente, con las ecs. (6.3) y (6.4) es posible determinar las propiedades estadísticas de las frecuencias naturales aleatorias, obtenidas a partir del problema de valores característicos probabilista.

La aproximación del método probabilista de análisis se estudió utilizando un criterio similar a de Hoshiya y Chiba (ref. 65), aplicándolo a la estructura de un marco plano considerado como una viga de cortante, al cual se le asignaron valores unitarios a las masas y rigideces de cada piso, incrementando el coeficiente de variación de ambos parámetros en 5, 10, 15, 20, 25 y 30%, y no considerando correlación entre ellos. Se realizaron 400 simulaciones de las matrices mencionadas en cada una de las cuales se resolvió el problema de valores característicos, y se calcularon los c.v. de la primeras tres frecuencias naturales, obteniéndose las curvas que se muestran en la fig. 12, posteriormente, se realizaron 160 simulaciones con perturbaciones utilizando el planteamiento descrito, y fijando un nivel de confianza de 95.40% se obtuvieron las curvas anotadas también en la fig. 12, del análisis de estos resultados se puede apreciar como el método híbrido de perturbaciones/simulaciones tiende hacia los resultados obtenidos mediante el método de simulaciones puras, pero realizando únicamente un 40% de éstas, y además, como puede apreciarse en su planteamiento, no es necesario resolver el problema de valores característicos en cada simulación, sino únicamente la primera vez. Por otro lado, al igual que en la ref. 65, se puede ver como para c.v. mayores del 20% en los parámetros estructurales, el método híbrido tiende a alejarse de los resultados de las simulaciones, la razón de este comportamiento es que en su planteamiento matemático no se toman en cuenta perturbaciones de orden superior al primero, sin embargo, esta hipótesis puede considerarse realista ya que no se registran variaciones grandes en los parámetros estructurales.

Por lo anterior, las ventajas que presenta este método híbrido de perturbaciones/simulaciones, es que no se necesita llevar a cabo un número elevado de simulaciones, como sucede con el método de Monte Carlo puro para obtener propiedades estadísticas de la respuesta estructural, pues ya que con relativamente

pocas de ellas y aun trabajando con perturbaciones de primer orden, la aproximación obtenida puede considerarse excelente, como se aprecia en la fig. 12, otra ventaja es que se puede considerar cualquier tipo de función de distribución de probabilidades, pues basta con manejar adecuadamente el algoritmo que genera números aleatorios de acuerdo a la función de distribución que se desee. En este trabajo, además, al considerar distribuciones de probabilidades normales o gaussianas de las propiedades estructurales, es posible fijar los intervalos de confianza que se desee para llevar a cabo el análisis no determinista.

De esta manera, una vez obtenidas las propiedades dinámicas probabilistas de la estructura, es posible obtener su respuesta modal espectral probabilista considerando un espectro determinista mediante alguno de los planteamientos que se muestran en las figs. 13 y 14. En este trabajo, se utilizará el planteamiento 1 (fig. 13), pues ya que éste, a diferencia del planteamiento 2, permite obtener las propiedades estadísticas de las respuestas.

6.2 Generación de números aleatorios correlacionados

En el problema de análisis estructural probabilista, los parámetros considerados como v.a. están correlacionados de alguna manera. Para incluir esta correlación en el método descrito, es necesario desarrollar un procedimiento que permita generar, en el proceso de simulación, parámetros con una correlación conocida.

Sea la matriz de covarianzas de n v.a. gaussianas correlacionadas (ref. 66)

$$[\text{cov } X] = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \text{cov } X_1 X_2 & \dots & \text{cov } X_1 X_n \\ \text{cov } X_2 X_1 & \sigma_{X_2}^2 & \dots & \text{cov } X_2 X_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov } X_n X_1 & \text{cov } X_n X_2 & \dots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

en forma compacta

$$[\text{cov } X] = E [(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)] = \begin{cases} \sigma_{X_i}^2 & i=j \\ \text{cov } X_i X_j & i \neq j \end{cases}$$

donde $\sigma_{X_i}^2$ es la varianza de las v.a. X_i , y $\text{cov } X_i X_j$ es la covarianza entre las v.a. X_i y X_j . Por otro lado, el coeficiente de correlación ρ_{ij} se define como

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov } X_i X_j}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \quad (6.6)$$

donde σ_x es la desviación estándar.

La ec. (6.6) debe satisfacer la condición

$$-1 \leq \rho \leq 1 \quad (6.7)$$

esto implica

$$\text{cov } X_i, X_j \propto \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}$$

entonces, si existe correlación perfecta entre dos v.a. y en el mismo sentido, $\rho = 1$, si esta correlación es en sentidos opuestos (una variable se incrementa y la otra decrece), $\rho = -1$, si no existe correlación, $\rho = 0$. La fig. 16 muestra algunos ejemplos de dispersión y coeficientes de correlación (ref. 67).

De la ec. (6.6)

$$\text{cov } X_i, X_j = \sigma_{x_i} \rho_{ij} \sigma_{x_j}$$

por lo tanto, es posible representar la matriz de covarianzas como el producto

$$[\text{cov } X] = [\sigma_x][\rho][\sigma_x] \quad (6.8)$$

donde las matrices diagonales $[\sigma_x]$ contienen únicamente los valores de la desviación estándar de las v.a., mientras que la matriz $[\rho]$ contiene los coeficientes de correlación entre las mismas v.a.

Es posible representar los coeficientes de correlación ρ_{ij} de los parámetros aleatorios dentro de un mismo elemento estructural o de elemento a elemento mediante una expresión exponencial del tipo (ref. 68)

$$\rho_{ij} = e^{-\left(\frac{\alpha |\xi_i - \xi_j|}{L}\right)}$$

donde L es una distancia característica, $|\xi_i - \xi_j|$ es la distancia entre los elementos estructurales i y j , y α es una constante que puede determinarse de acuerdo con el grado de correlación al analizar contrastes de hipótesis entre varianzas, para agrupar diversas muestras en una sola población, a este tipo de estudio se le denomina prueba "F" (ref. 58).

Matricialmente

$$[\rho] = \begin{bmatrix} 1 & e^{-\frac{\alpha |\xi_1 - \xi_2|}{L}} & \dots & \dots & e^{-\frac{\alpha |\xi_1 - \xi_n|}{L}} \\ & \text{sim.} & 1 & \dots & e^{-\frac{\alpha |\xi_2 - \xi_n|}{L}} \\ & & & \dots & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

En la ec. anterior, se observa que a medida que el coeficiente α tiende a infinito, la correlación tiende a cero.

En la ref. 65 se presenta una generalización de los coeficientes de correlación que puede existir entre elementos estructurales. Esto es, para correlacionar los diferentes parámetros inciertos

$$\rho_{ij} = e^{-A|i-j|} \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Para simular números aleatorios correlacionados, conocida la matriz de correlación ρ_{ij} , sea $\{A\}$ un vector formado por números aleatorios no correlacionados distribuidos de acuerdo a alguna función de distribución conocida

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$$

Sea $\{B\}$ un vector formado por números aleatorios correlacionados de acuerdo a una matriz de correlación $[\rho]$ conocida

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

Considérese que los vectores $\{A\}$ y $\{B\}$ están relacionados a través de la transformación

$$\{B\} = [C] \{A\} \quad (6.9)$$

donde $[C]$ es una matriz triangular inferior que se determinará más adelante.

De la ec. (6.9), post-multiplicando ambos miembros de la matriz transpuesta respectiva, se tiene

$$\{B\} \{B\}^T = [C] \{A\} \{A\}^T [C]^T$$

y tomando la esperanza de las v.a. de la ec. anterior

$$E(\{B\} \{B\}^T) = [C] E(\{A\} \{A\}^T) [C]^T \quad (6.10)$$

esto es

$$E(\{A\} \{A\}^T) = E \left(\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \right) = \begin{bmatrix} E(a_1, a_1) & E(a_1, a_2) & \dots & E(a_1, a_n) \\ E(a_2, a_1) & E(a_2, a_2) & \dots & E(a_2, a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(a_n, a_1) & E(a_n, a_2) & \dots & E(a_n, a_n) \end{bmatrix}$$

pero los elementos del vector $\{A\}$ son v.a. no correlacionadas, se tiene entonces que $E(a_i, a_i) = 1$ mientras que $E(a_i, a_j) = 0$, de donde

$$E\{[A][A]^T\} = [1]$$

$$E\{[B][B]^T\} = E\left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} E(b_1, b_1) & E(b_1, b_2) & \dots & E(b_1, b_n) \\ E(b_2, b_1) & E(b_2, b_2) & \dots & E(b_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(b_n, b_1) & E(b_n, b_2) & \dots & E(b_n, b_n) \end{bmatrix}$$

debido a que las v.a. del vector $[B]$ están correlacionadas entre sí, se tiene que $E(b_i, b_i) = 1$, y que $E(b_i, b_j) = \rho_{ij}$ que es el coeficiente de correlación, entonces

$$E\{[B][B]^T\} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, de la ec. (6.10) se tiene

$$[\rho] = [C][C]^T$$

Finalmente, la transformación de la ec. (6.9) permite obtener el vector $[B]$ de números aleatorios correlacionados de acuerdo a la matriz de correlación $[\rho]$ a partir del vector $[A]$ de números aleatorios no correlacionados.

6.3 Estudio paramétrico

6.3.1 Aplicación del método de análisis modal espectral probabilista

El procedimiento de análisis probabilista de perturbaciones con simulación de Monte Carlo, para v.a. no correlacionadas, se aplicó a la estructura estudiada en el capítulo 3, utilizando variaciones típicas en sus parámetros estructurales obtenidas a partir de los estudios mencionados en el capítulo 4, y realizando 160 simulaciones, con un nivel de confianza del 95.44%.

En el capítulo 3 se puede apreciar la poca influencia global sobre todos los criterios de superposición modal, que ejerce el tipo de suelo en el que se desplanta la estructura, al observar que los errores relativos estimados con los diferentes criterios de superposición modal se comportan en forma semejante tanto para excitación sísmica registrada en suelo duro como en suelo blando, razón por la cual se decidió utilizar como excitación el espectro de diseño del Reglamento de Construcciones del D.F. (fig. 15).

Las variaciones con que se estudió la estructura en sus diferentes parámetros se pueden dividir en dos tipos, rigideces y masas. Para estudiar el efecto de la variación de rigideces se consideraron los siguientes casos, para el espectro en la zona I

- K1) c.v. del 7% en el módulo de elasticidad del concreto
- K2) se incrementó el c.v. del concreto a 15%

- K3) c.v. de las dimensiones de elementos estructurales del 6%
- K4) para determinar la influencia del espectro se analizó la estructura con un c.v. del 7% en el módulo de elasticidad del concreto, y espectro en la zona III

Para estimar el efecto de la variación de la intensidad de la masa total de la estructura, ésta se analizó con las siguientes variaciones para el espectro en la zona I

- M1) c.v. del 10% en la masa total por entrepiso
- M2) c.v. del 15% en la masa total por entrepiso

Para estimar el efecto de todas las variables mencionadas actuando al mismo tiempo, para el espectro en la zona I se analizaron los casos

- T1) las v.a. de las dimensiones de los elementos estructurales, el módulo de elasticidad y la intensidad de las masas totales con c.v del 6, 7 y 10% respectivamente
- T2) los mismos valores anteriores para los c.v. de las dimensiones de los elementos estructurales y el módulo de elasticidad, e incrementando el c.v. de la intensidad de las masas totales al 15%.

Finalmente, a partir de un análisis preliminar de los resultados obtenidos en los casos anteriores, se observó que la variable que más influencia la respuesta es la variación en la intensidad de las masas, debido a esto se decidió incluir además de esta incertidumbre, variación en la distribución de la masa debida a carga viva, teniéndose para un c.v. del 10% en su intensidad los siguientes casos de distribución para el espectro en la zona I

- M3) 30% de la distribución de la carga viva en el primer piso y 100% en segundo y tercero
- M4) 30% de la distribución de la carga viva en el primero y segundo pisos y 100% en el tercero
- M5) 30% de la distribución de la carga viva en todos los pisos
- M6) 30% de la distribución de la carga viva en el tercer piso y 100% en primero y segundo

6.3.2 Resultados obtenidos

Al aplicársele excitación en el sentido del eje Y (fig. 5) de la estructura estudiada, considerando las variaciones anotadas, se calcularon las propiedades estadísticas de la respuesta del sistema para cada uno de los criterios de superposición (tabla 8), obteniéndose lo siguiente:

- a) se puede observar que en general, y a excepción del método CGC, para el tercer piso todos los criterios presentan el mismo resultado calculado de desplazamiento absoluto para las direcciones Y y Z, mientras que para el primero y segundo pisos, la relación de desplazamientos calculados es aproximadamente de 10:1 estas direcciones
- b) la influencia que presentan sobre la respuesta las variaciones en los parámetros que influyen directamente en la matriz de rigidez de la estructura, como son el módulo de elasticidad y las dimensiones de los elementos estructurales, casos K1, K2 y K3 para el espectro en la zona I, es semejante para cada uno de los criterios de superposición, presentando un valor medio de

desplazamiento prácticamente igual para todos los casos dentro de cada criterio, y un c.v. entre 2.95 y 5.02% para la respuesta en sentido paralelo, y de 3.01 a 5.05% para el sentido transversal, registrándose estos valores en el criterio de la suma de valores absolutos (ABS) en los pisos 2 y 3

- c) para la estructura estudiada no se registró gran variación en la respuesta calculada para los pisos 1 y 2 al modificar el espectro, de la zona I a la zona III, esto se atribuye a que debido a las características dinámicas que presenta la misma, al variar el espectro, por coincidencia la aceleración espectral correspondiente a sus períodos de vibración, es semejante para ambas zonas, como se puede ver para el caso K4 en la tabla B
- d) se observa que el parámetro que mayor influencia ejerce sobre las respuestas calculadas con los criterios de superposición modal, es la variación en la intensidad de la masa total de la estructura (casos M1 y M2), con desplazamientos medios absolutos calculados en el tercer nivel mediante la suma de valores absolutos (ABS), de hasta 10.34 y 11.71 cm (caso M2) para las direcciones Y y Z, lo que viene a representar el límite superior de la respuesta, y de 2.66 y 3.06 cm al calcularse esta con el método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS), y 2.74 y 2.78 cm con la combinación cuadrática completa (CQC) para el mismo piso y mismo caso, para las direcciones Y y Z, representando estos últimos desplazamientos el límite inferior de la respuesta calculada
- e) la variación en la distribución e intensidad de la masa debido a la carga viva no presenta gran influencia sobre el desplazamiento medio en general, sin embargo, sobre su c.v. sí, elevándose éste hasta el 73.84% para la dirección Y en el piso 3, para el criterio CQC (caso M4)
- f) al considerar que los parámetros aleatorios introducidos individualmente en los casos M1, M2 y K1 a K4, actuaran simultáneamente, casos T1 y T2, se presentan desplazamientos medios calculados en el tercer nivel para las direcciones Y y Z de hasta 8.59 y 9.39 cm respectivamente, y c.v. de hasta 117.15 y 119.93%, obtenidos utilizando el criterio ABS. Es interesante hacer notar que estos valores son menores que los obtenidos al introducir variación únicamente en la masa total del edificio, caso M2 para el mismo criterio

Al graficar los desplazamientos medios absolutos de cada piso (figs. 17 a 22), para las direcciones Y y Z, se observa que:

- a) en todos los casos estudiados se presentan dos situaciones bien definidas: el criterio ABS proporciona siempre un límite superior de la respuesta esperada, y los criterios de SRSS y CQC se entrecruzan, formando conjuntamente el límite inferior de la misma, a pesar de que los errores relativos de la respuesta calculados en el estudio determinista de la estructura (capítulo 3), mediante el CQC fueron mucho menores que los obtenidos con el método de la raíz cuadrada (SRSS)
- b) en las figuras mencionadas, se puede ver que la respuesta valuada mediante cualquiera de los criterios de superposición, en el sentido transversal al de excitación es mayor que la calculada para el sentido paralelo de aplicación del sismo
- c) es posible apreciar como análogamente al estudio determinista, el criterio NRL coincide en ocasiones con el método GM y el TPM a pesar de ser mucho más

elaborados en su aplicación estos últimos

- d) al promediar los criterios SRSS y ABS, la respuesta calculada tiende hacia este último criterio
- e) el método de la doble suma (DSM) tiende hacia el límite inferior de la respuesta
- f) existe un cambio de dirección al dibujar los desplazamientos del primero y segundo pisos, la razón de este es que los desplazamientos calculados en el primer nivel son mucho menores que los del segundo, y al dibujarlos en papel logarítmico se genera este efecto.

7. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se estableció un procedimiento de análisis modal espectral no determinista para calcular la respuesta de estructuras con parámetros de masa y rigidez inciertos. El procedimiento se basa en una formulación teórica que combina el método de perturbaciones y el método de simulación de Monte Carlo para la solución no determinista del problema de valores característicos requerido por un análisis modal espectral. La incertidumbre en la respuesta modal espectral de una estructura debido a variaciones en sus parámetros de masa y rigidez se evalúa a partir de un estudio estadístico de los resultados provenientes de experimentos numéricos.

Con el fin de establecer un marco de referencia para poder evaluar las características de la respuesta modal espectral probabilista, se calcularon los desplazamientos máximos probables con diferentes criterios de superposición modal, de una estructura de tipo urbano con parámetros deterministas, y se encontró que para el sentido paralelo al de excitación sísmica los criterios SRSS, PROM1 y PROM2 subestiman la respuesta estructural, mientras que los demás criterios proporcionan errores relativos razonables. Para el sentido transversal al de excitación, todos los criterios de superposición sobrestiman la respuesta estructural, en ocasiones grandemente (errores relativos de hasta 1400% para el criterio ABS, o del 1250% aproximadamente para los criterios NRL, TPM, GM y DSM), siendo el criterio CGC el que proporciona los menores errores relativos en este sentido, comparados estos con los de los demás criterios. En los giros de los pisos, en general todos los criterios proporcionan errores relativos razonables. Se observa también que a medida que la relación de amortiguamiento modal se incrementa, los errores relativos en valor absoluto crecen, además de presentar valores semejantes para respuestas calculadas de excitaciones sísmicas provenientes tanto de suelo duro como de suelo blando.

Para la parte probabilista del presente trabajo, se utilizó como excitación sísmica la correspondiente a un espectro de respuesta determinista. Con esta consideración se realizó un estudio paramétrico para la misma estructura, evaluándose los diferentes criterios de superposición modal y diversas combinaciones de incertidumbres en los parámetros de masa y rigidez. Se encontró que, el efecto de la incertidumbre en diversos parámetros sobre la respuesta de una estructura como la aquí estudiada, es semejante para todos los criterios analizados, observándose como respuestas evaluadas con criterios complicados como el COC, el TPM o el GM son semejantes a los correspondientes a criterios más simples de aplicar como el SRSS o el NRL. Esta semejanza se justifica debido a que la gran mayoría de los criterios de superposición modal existentes, se fundamentan en hipótesis de partida comunes, particularmente, la consideración del sismo como un proceso estacionario, ignorando así la correlación existente entre las diferentes respuestas, ya que se ha observado (ref. 69), que a medida que la relación de amortiguamiento se incrementa, la ocurrencia de máximos en las respuestas se acerca más al instante en el que ocurre la aceleración máxima en el registro de aceleraciones, lo cual implica que a mayor amortiguamiento, la correlación entre las respuestas máximas correspondientes a los diferentes modos se incrementa. Por el contrario, para relaciones de amortiguamiento pequeñas, se presentan varios máximos de valor muy parecido en instantes muy diferentes en el desarrollo total de la respuesta, y por lo tanto, la correlación entre respuestas modales debe ser baja, a menos que se trate de nodos de períodos semejantes.

Por otro lado, para la estructura estudiada se encontró que variaciones del mismo orden en las dimensiones de los elementos estructurales o en los materiales (módulo de elasticidad), presentan efectos similares en la respuesta estructural, mientras que las variaciones en las respuestas son más sensibles a variaciones en el valor de la masa total (masa del edificio más la asociada a la carga viva), más que a la distribución de la masa por carga viva.

Del análisis de los resultados obtenidos, se puede concluir que el efecto en la respuesta de variaciones grandes en la rigidez de la estructura, tales como las que se suceden al considerar o no la interacción de muros en el análisis, puede llevar a resultados o acciones no esperadas, las que generalmente no se consideran durante el diseño.

La influencia que tiene sobre la respuesta el tipo de espectro considerado es mínima, esto se atribuye a las características dinámicas de la estructura estudiada, como se mencionó en el capítulo anterior.

Tanto para la evaluación determinista de los criterios de superposición modal, como para el estudio del efecto de las incertidumbres en los parámetros estructurales sobre la respuesta, se utilizó una versión modificada y aumentada del programa STOCAL, recomendándose el uso de éste o de otros que trabajen mediante instrucciones macro, ya que así no es necesario elaborar, durante una investigación, un programa de computadora particular susceptible de acomodar los cambios constantes de algoritmos requeridos durante el desarrollo de un procedimiento numérico previamente no experimentado.

Finalmente, es recomendable realizar los estudios estadísticos necesarios para conocer la variabilidad de los factores que intervienen en el comportamiento de las estructuras, como son las variaciones en las cargas, dimensiones y resistencia de los materiales, para tomar en cuenta la incertidumbre en los valores nominales de éstos, y así, poder conocer de manera más racional la forma en que estos factores afectan el comportamiento estructural.

De las conclusiones obtenidas del presente trabajo, se puede inferir que es necesario desarrollar estudios que lleven a obtener un mejor conocimiento del problema que aquí se ha analizado, tales como

- * realizar el estudio paramétrico de una familia o familias de estructuras típicas, para contar con más elementos de juicio que permitieran establecer un criterio de manera cuantitativa, acerca de cuál método de superposición modal presenta más o menos ventajas para calcular la respuesta máxima probable proveniente de un análisis modal espectral)
- * llevar a cabo el mismo estudio anotado en el párrafo anterior, considerando además la correlación entre los diferentes parámetros aleatorios estudiados, lo cual se puede realizar mediante el procedimiento propuesto en el capítulo 6 de este trabajo, así como con los datos necesarios para realizarlo
- * ya que la relación de amortiguamiento presenta una fuente de incertidumbre que está relacionada directamente con los parámetros de rigidez, y con la intensidad del movimiento sísmico, sería interesante estudiar el efecto que ocasionaría en la respuesta estructural el considerar un comportamiento inelástico. Para esto último, sería necesario plantear un algoritmo a partir de la metodología propuesta que permitiese, de manera óptima, determinar la respuesta estructural, ya que en cada simulación de las masas o las rigideces de la estructura habría que considerar el carácter no lineal de la matriz de rigidez de la misma, lo cual resultaría un proceso demasiado costoso
- * una vez entendido y evaluado el problema de la influencia de incertidumbres de parámetros de sistemas estructurales sobre su respuesta modal espectral, resultaría útil establecer la cantidad de modos que deben tomarse en cuenta para calcular la respuesta máxima probable evaluada mediante un análisis modal espectral.

8. REFERENCIAS

1. Esteva L. "Sobre la investigación y la práctica de la ingeniería estructural en México", Conferencia presentada en el segundo ciclo del programa "Grandes Ideas", CCH Naucalpan México, nov., 1982.
2. Benioff H. "The physical evaluation of seismic destructiveness", Bull. Seism. Soc. Amer. Vol. 24, pp. 398-403, 1934.
3. Biot M. A. "Analytical and experimental methods in engineering seismology", Trans. ASCE, Vol. 106, pp. 365-408, 1943.
4. Clough R. W. y Penzien J. "Dynamics of structures", McGraw-Hill, New York E.U., 1975.
5. Chopra A. K. "Dynamics of structures. A primer", Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley California E.U. 1980.
6. Merchant H.C. y Hudson D.E. "Mode superposition in multidegree of freedom systems using earthquake response spectrum data", Bull. Seism. Soc. Amer. Vol. 52, No. 2, pp. 405-416, 1962.
7. Clough R.W. "On the importance of higher modes of vibration in the earthquake response of tall buildings", Bull. Seism. Soc. Amer., Vol: 45, pp. 289-301, 1955.
8. Rosenblueth E. "A basis for aseismic design", Tesis Doctoral, Universidad de Illinois, Urbana E.U. 1951.
9. Jennings R.L. "The response of multi-storied structures of strong ground motion", Tesis de Maestria Universidad de Illinois, Urbana E.U. 1958.

10. O'Hara G.J. y Cunnif P.F. "Elements of normal mode theory", NRL Report 6002, U.S. Naval Research Laboratory, Washington, D.C. E.U. 1963.
11. Rosenblueth E. "Sobre la respuesta sísmica de estructuras de comportamiento lineal", Instituto de Ingeniería, UNAM, No. 179, México, Julio 1968.
12. Wilson E.L., Klureghian A.D. y Bayo E.P. "A replacement for the SRSS method of seismic analysis", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 9, pp. 187-194, 1981.
13. U.S. Nuclear Regulatory Commission, Regulatory Guide 1.92, Revision 1, febrero 1976.
14. Gupta A.K. "A simple method of combining modal responses", Proc. 7th. International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, pp.235-242, Chicago, E.U. agosto 1983.
15. Singh A.K., Chu S.L. y Singh S. "Influence of closely spaced modes in response spectrum method of analysis", Conference on Structural Design of Nuclear Plant Facilities, Vol. 2, Chicago E.U., diciembre 1973 (Publicado por la ASCE, New York N.Y.).
16. Tsai N.C. "A new method for spectral response analysis", Octava Conferencia Mundial Sobre Ingeniería Sísmica, California E.U., Vol. IV, pp. 171-178, 1984.
17. Singh M.P. y Mehta K.B. "Seismic design response by an alternative SRSS rule", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 11, pp. 771-783, 1983.
18. Singh M.P. y Chu S.L. "Stochastics considerations in seismic analysis of structures", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, pp. 295-307, 1976.
19. Amini A. y Trifunac M.D. "A statistical basis for spectrum superposition in response to earthquake excitation", Octava Conferencia Mundial Sobre Ingeniería Sísmica, California E.U., Vol. IV, pp. 179-186, 1984.
20. Grigoriu M. "New criteria for selecting modal combination rules", International Conference on Recent Advances in Structural Analysis, Southampton Inglaterra, Julio 1980.
21. Grigoriu M. "Mean-square structural response to stationary ground acceleration", Procc. ASCE, Engng. Mech. Div., Vol. 107, No. EMS, pp. 969-986, octubre 1981.
22. Kennedy R.P. "Recommendations for changes and additions to standard review plans and Regulatory Guides dealing with seismic design requirements for structures", reporte preparado para Lawrence Livermore Lab. E.U., publicado en Nureg/CR-1161, Junio 1979.
23. Hadjian A.H. "Seismic response of structures by the response spectrum method", Nuclear Engineering and Design, Vol. 66, No. 2, pp. 179-201, agosto 1981.

24. Escobar J.A. y Ayala G. "Evaluación de criterios de superposición modal para estimar la respuesta sísmica máxima de estructuras", Memorias del VI Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, pp. 389-399, Puebla México, 1983.
25. Button M.R., Kiureghian A.D. y Wilson E.L. "STOCAL user information manual", Depto. de Ing. Civil, Universidad de Berkeley, California, E.U. julio 1981.
26. Anagnostopoulos S.A. "Response spectrum techniques for three-component earthquake design", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 9, pp. 459-476, 1981.
27. Johnson A.J. "Strength, safety and economical dimensions of structures", (Statens institut for byggnadsforskning), Document D7: 1971, reproducción de el Swedish State Committee for Building Research, Bulletin No.22.
28. Cornell C.A. "Some comments on second-moment codes and on bayesian methods", Japan-US Joint Seminar on Reliability Approach in Structural Engineering, pp. 14-1 a 14-15, Tokio Japon, mayo 1974.
29. Bloem D.L. "Concrete strength in structures", ACI Journal, Title No. 65-14, pp 176-187, marzo 1968.
30. Klus J.P. "Ultimate strength of reinforced concrete of beams in combined tension and shear", ACI Journal, Title No. 65-17, pp. 210-215, marzo 1968.
31. MacGregor J.G., Mirza S.A. y Ellingwood B. "Statistical analysis of resistance of reinforced and prestressed concrete members", ACI Journal, Title No. 80-16, pp. 167-176, mayo-junio 1983.
32. Gómez J.F. "Efecto de la relación ancho-peralte de cilindros de control en la resistencia a tensión del concreto", Revista del IMCYC, Vol. 4, No. 24, pp. 46-59, enero-febrero, México 1967.
33. Miller C.A. y Guralnick S.A. "Respuesta del concreto simple a cargas repetidas", Simposio Internacional sobre el Efecto de Cargas Repetidas an Materiales y Estructuras, RILEM- Instituto de Ingeniería UNAM México, septiembre 1966.
34. Aguilón Coello E.J. y Mora Delgado J. "Estudio estadístico de las propiedades físicas del acero de refuerzo", Tesis Profesional, UNAM, 1975.
35. Mirza S.A. y MacGregor J.G. "Variability of mechanical properties of reinforcing bars", Proc. ASCE, Vol. 105, ST4, pp. 751-766, abril 1979.
36. Allen D.E. "Probabilistic study of reinforced concrete in bending", Technical paper No. 311, Division of Building Research, National Research Council of Canada, Ottawa, Canada, enero 1970.
37. Ellingwood B. "Statistical analysis of RC beam-column interaction", Proc. ASCE, Vol. 103, ST7, pp. 1377-1388, julio 1977.
38. Ellingwood B. "Reliability basis of load and resistance factors for reinforced concrete design", Building Science Series No. 110, National Bureau of Standards, Washington D.C., E.U., febrero 1978.

39. Mirza S.A., Kikuchi D.K. y MacGregor J. "Flexural strenght reduction factor for bonded prestressed concrete beams", ACI Journal, Proc. Vol. 77, No. 4 , pp. 237-246, Julio-agosto 1980.
40. Castañeda N.C. "Estudio de las propiedades de los concretos producidos en el Distrito Federal", Revista Ingeniería, No. 1, Facultad de Ingeniería, UNAM, pp. 163-172, México 1982.
41. MacGregor J.G. "Load and resistance factors for concrete design", ACI Journal, Proc., Vol. 80, No.4, Julio-agosto 1983.
42. Mirza S.A., Hatzinikolas M. y MacGregor J.G. "Flexural strenght reduction factor for bonded prestressed concrete beams", ACI Journal, Proc., Vol.77, No. 4, pp.237-246, julio-agosto 1983.
43. Mirza S.A. y MacGregor J.G. "Variations in dimensions or reinforced concrete members", Proc. ASCE, Vol. 105, No. ST4, pp. 751-766, abril 1979.
44. Gardner R.S. y Hatcher D.S. "Material and dimensional propierties of an eleven-story reinforced concrete building", Struc. Div. Research Report No. 52, Washington University St. Louis, E.U., agosto 1970.
45. Lenschow R.J. y Sozen A.M. "Un criterio de fluencia para losas de concreto reforzado", Memoria de la Conferencia dictada por el Prof. Sozen en la División de Estudios de Posgrado en la Facultad de Ingeniería, UNAM, México, el 9 de septiembre de 1966.
46. Rosenblueth E. "Seismic design requirements in a Mexican 1976 code", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 7, pp., 49-61, 1979.
47. Ellingwood B. "Probability-based loading criteria for codified design", Fourth Int. Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engng, Vol. 1, pp. 237-246, Italia, 1983.
48. Horne M.R. "The variation of mean floor loads with area", Engineering, Vol. 171, febrero 1951.
49. Rosenblueth E. "Teoría de la carga viva en edificios", Revista Ingeniería, Vol. 29, No. 4, 1959.
50. Jauffred F.J. "Carga viva en edificios de habitación y oficina en el Distrito Federal", Revista Ingeniería, octubre 1960.
51. Shih-Sheng P.L. "Seismic safety assesment of a 10-story frame designed by uniform building code", Fourth Int. Conference of Statistics and Probability in Soil and Structural Engng., Vol. 1, pp. 515-526, Italia, 1983.
52. Tichy M. "The science of structural actions", Fourth Int. Conference of Statistics and Probability in Soil and Structural Engng., Vol. 1, pp. 295-321, Italia, 1983.
53. Melchers R.E. y Harrington M.V. "Structural reliability as affected by human error", Fourth Int. Conference of Statistics and Probability in Soil and Structural Engng., Vol. 1, pp. 683-694, Italia, 1983.

54. Nowak A.S. "Sensitivity analysis for human errors", Fourth Int. Conference of Statistics and Probability in Soil and Structural Engng., Vol. 1, pp. 729-739, Italia, 1983.
55. Hart G.C. y Collins J.D. "The treatment of randomness in finite element modeling", Paper 700842, Transactions of the Automotive Engineers, pp., 2509-2519, 1970.
56. Cornell C.A. "First order uncertainty analysis of soils deformation and stability", Proc. I International Conference of Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering, Hong Kong, 1971.
57. Cambou B. "Método del elemento finito. Análisis de incertidumbre de primer orden", Informe No. 339, Instituto de Ingeniería, UNAM, México 1973.
58. Benjamin J.R. y Cornell C.A. "Probability, statistics and decisions for civil engineering", McGraw-Hill, Nueva York, 1970.
59. Meirovitch L. "Elements of vibration analysis", McGraw-Hill Kogakusha, 1975.
60. Mathews J. y Walker R.L. "Mathematical methods of physics", 2a. Ed. Benjamin Publishers, San Francisco, E.U. 1964.
61. Tansirikongkol V. y Pecknold D.A. "Approximate modal analysis of bilinear MDF systems subjected to earthquake motions", Department of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana Illinois E.U. 1978.
62. Shinozuka M. y Astill C. "Random eigenvalue problems in structural analysis", AIAA Journal, Vol. 10, No.4, 1972.
63. Carels P. "Influencia de la dispersión en los parámetros del suelo en la evaluación del comportamiento dinámico de estructuras de tierra", Tesis de Maestría, UNAM, México, 1982.
64. Haugen E.B. "Probabilistic approaches to design", John Wiley and Sons, 1968.
65. Hoshiya N. y Chiba T. "Random eigenvalues of a building structure", 2nd. Int. Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engng., pp. 141-152, Aachen Alemania del Oeste, 1975.
66. Peebles Z.P. "Probability, random variables and random signal principles", Mc-Graw Hill, 1980.
67. "Reliability-based design in civil engineering", Departamento de Ingeniería Civil, Escuela de Ingeniería, Universidad de Carolina del Norte, notas de un seminario, 1984.
68. Collins J.D. y Thomson W.T. "The eigenvalue problem for structural systems with statistical properties", AIAA Journal, Vol. 7, No. 4, pp 642-648, 1968.
69. Arias A. Comunicación personal, 1985.
70. Villanueva J.M. y Meli R. "Estudio estadístico de las propiedades de materiales y estructuras en el Distrito Federal. II Análisis estadístico de

propiedades mecánicas de los aceros de refuerzo producidos en México", Informe Interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1984.

71. Villanueva J. M. "Estudio estadístico de imperfecciones geométricas en columnas de concreto", Tesis Profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1975.
72. Nieves Padilla J.L. y Sánchez Martínez E. "Variación de la resistencia del acero de refuerzo", Tesis Profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1973.
73. Mena E., Fuentes A. y Prince J. "Estudio sobre las propiedades del cemento y las trabes de la línea cuatro del metro", Revista Ingeniería, No.1, Facultad de Ingeniería, pp. 241-258, México, 1982.
74. Mendoza C.J., "Propiedades mecánicas y elásticas de los concretos fabricados en el Distrito Federal", Informe Interno, Instituto de Ingeniería, México, 1983.
75. Mendoza C., Andrade A. y Valenzuela F., "Variación de las dimensiones y de la posición del acero de refuerzo en las estructuras de concreto", Informe Interno, Instituto de Ingeniería, 1975.
76. Badillo E. "Efecto de torsión en estructuras simétricas de un piso sometidas a sollicitaciones sísmicas", Tesis de Maestría, UNAM, México, 1983.
77. Chen C. "Definition of statistically independent time histories", Jour. Struc. Div. ASCE, febrero 1975.
78. Hidalgo P. y Clough R.W. "Earthquake simulator of a reinforced concrete frame", Reporte No. EERC 74-13, Universidad de Berkeley California, diciembre 1974.
79. Ruíz S., Arias A. y Sandoval H. "Simulación de temblores como procesos estocásticos no estacionarios", Instituto de Ingeniería, UNAM, No. 440, México, junio 1981.

9. AGRADECIMIENTOS

Al Prof. A. Arias y a R. Gómez por la lectura, revisión crítica, comentarios y sugerencias en el desarrollo de este trabajo. A D. Díaz por los registros de aceleración sísmica y a H.P. Hong por su aliento y entusiasmo compartido. Mi agradecimiento también a C. Montoya por su orientación en el manejo de las terminales del Instituto de Ingeniería del sistema Burroghs 7800 del PUC.

Tengo una deuda especial de gratitud con el Dr. Gustavo Ayala M. por su contribución fundamental, mediante sugerencias constructivas y creativas, en la dirección de este trabajo.

TABLA 3. COEFICIENTES DE CORRELACION MODAL, E_{11} CRITERIO DE LA DOBLE SUHA

Dimension		1	2	3	4	5	6	7	8	9
29.14 seg	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
188.26 seg	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
20.00 seg	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
30.00 seg	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
40.00 seg	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
50.00 seg	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98

TABLA 3 (CONTINUACION)

Duración	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1-10	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
11-20	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
21-30	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
31-40	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
41-50	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
51-60	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
61-70	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
71-80	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
81-90	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
91-100	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000

TABLA 4 COEFICIENTES DE CORRELACION MODAL, A_3 CRITERIO DE LA COMBINACION CUADRATICA COMPLETA

Duración	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1-10	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
11-20	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
21-30	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
31-40	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
41-50	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
51-60	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
61-70	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
71-80	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
81-90	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000
91-100	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000

TABLA 5. RESISTENCIAS CARACTERISTICAS Y DE DISEÑO
PARA BARRAS DE DIFERENTES MARCAS (REF. 34)

MARCA	\varnothing	\bar{f}_y (kg/cm ²)	σ_{f_y} (kg/cm ²)	C.V. f_y	\bar{E}_{x10^3} (kg/cm ²)	σ_E (kg/cm ²)	C.V. E	\bar{A} (cm ²)	σ_A (cm ²)	C.V. A
HYLSA	3/8	5122	315	0.061	2.008	0.239	0.119	0.70	0.027	0.039
	1/2	5053	597	0.118	2.051	0.119	0.058	1.268	0.038	0.030
	5/8	4669	291	0.062	2.249	0.173	0.076	1.976	0.023	0.012
	3/4	4499	323	0.071	2.225	0.227	0.102	2.830	0.064	0.022
	1	4489	316	0.071	2.115	0.215	0.101	4.929	0.315	0.064
AHMSA	3/8	4575	401	0.087	1.97	0.173	0.088	0.698	0.027	0.039
	1/2	4336	356	0.082	2.049	0.208	0.101	1.252	0.040	0.032
	5/8	4211	508	0.120	2.174	0.220	0.101	1.978	0.048	0.024
	3/4	4294	595	0.138	2.24	0.267	0.119	2.839	0.084	0.029
	1	4270	217	0.051	2.113	0.191	0.090	4.908	0.124	0.025
BP	3/8	4645	538	0.115	2.017	0.234	0.116	0.708	0.023	0.032
	1/2	4392	431	0.098	1.975	0.192	0.097	1.285	0.102	0.079
	5/8	4785	385	0.080	2.219	0.231	0.104	2.044	0.088	0.043
	3/4	4623	304	0.065	2.430	0.310	0.127	2.872	0.120	0.041
	1									

TABLA 6. PROPIEDADES ESTADISTICAS DE LAS DIMENSIONES
DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES (REF. 31)

Diferencias de dimensiones	Media	Desv. Std.
Peralte total - peralte nominal		
Losas (1696 losas)	+0.8 mm	11.9 mm
(99 losas)	+5.3 mm	6.6 mm
Vigas (108 vigas)	-3.05 mm	6.4 mm
(24 vigas)	+20.57 mm	14.0 mm
Peralte efectivo - peralte nominal		
Losas en un sentido; barras interiores		
(1696 losas)	-19.1 mm	16 mm
(99 losas)	-1.0 mm	9.4 mm
Losas en un sentido; barras exteriores		
(2805 losas)	-3.3 mm	8.6 mm
(96 losas)	-4.1 mm	8.9 mm
Vigas, barras superiores	-5.5 mm	13.5 mm
Vigas, ancho total - ancho nominal	+2.54 mm	3.8 mm
Columnas, ancho total - ancho nominal	+1.5 mm	6.4 mm
Recubrimiento del acero en vigas	+1.5 mm	11.4 mm
(sup. e inf.)	-8.9 mm	7.1 mm

TABLA 7 . PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DE LA RESISTENCIA DE
ELEMENTOS ESTRUCTURALES AISLADOS (REFS.31 Y 47)

Acción	Elemento	Características	c.v.(%)
	Losas de conc. reforzado en un sentido	$h=12$ cm, $f_y= 2800$ Kg/cm ²	16.0
		$h=12$ cm, $f_y= 4200$ Kg/cm ²	15.0
	Losas de conc. reforzado en dos sentidos	$h=12$ cm, $f_y= 4200$ Kg/cm ²	15.0
		$h=18$ cm, $f_y= 4200$ Kg/cm ²	14.0
Concreto reforzado a flexión	Vigas, $f'_c= 350$ Kg/cm ² $f'_y= 2800$ Kg/cm ²	$\rho=0.005=0.09 \rho_b$	14.0
		$\rho=0.019=0.35 \rho_b$	14.0
	Vigas, $f'_c= 350$ Kg/cm ² $f_y= 4200$ Kg/cm ²	$\rho=0.006=0.14 \rho_b$	8.0
		$\rho=0.015=0.31 \rho_b$	11.0
		$\rho=0.027=0.51 \rho_b$	11.0
		$\rho=0.034=0.37 \rho_b$	12.0
Concreto presforzado a flexión	Colado y presforzado en planta	$w_p= 0.054$	5.7
		$w_p= 0.122$	6.1
	Colado en sitio y postensado	$w_p= 0.228$	8.3
		$w_p= 0.295$	9.7
		$w_p= 0.054$	6.1
		$w_p= 0.122$	8.3
	$w_p= 0.228$	11.1	
	$w_p= 0.295$	14.4	
Flexión y carga axial	Columnas cortas, falla a compresión	$f'_c= 210$ Kg/cm ²	16.0
		$f'_c= 350$ Kg/cm ²	14.0
	Columnas cortas, falla a tensión	$f'_c= 210$ y 350 kg/cm ²	12.0
		Columnas esbeltas, $Kl/h=20$, falla a compresión	$f'_c= 350$ Kg/cm ²
	Columnas esbeltas, $Kl/h=20$, falla a tensión	$f'_c= 350$ Kg/cm ²	12.0
Cortante	Vigas con $a/d \geq 2.5$, $\rho_w = 0.008$	sin estribos	21.0
		estribos mínimos	19.0
		$f_y = 10.5$ Kg/cm ²	17.0
	Losas planas	sin refuerzos de cortante	27.0
Tensión	Acero estructural	hasta la fluencia	11.0
Flexión	Viga de acero	sección compacta	13.0
Carga axial	Columna de acero		14.0

TABLA B . Propiedades estadísticas de las respuestas calculadas con los diferentes criterios de superposición modal

CRITERIO DE SUPERPOSICIÓN	CA SO	DESPLAZAMIENTO MEDIO (cm)						C.V. DESPLAZAMIENTO (%)					
		PISO 1		PISO 2		PISO 3		PISO 1		PISO 2		PISO 3	
		Y	Z	Y	Z	Y	Z	Y	Z	Y	Z	Y	Z
ABS	K1	5.50E-05	3.06E-06	0.118	0.0139	2.99	2.91	4.64	4.59	4.79	4.71	2.95	3.01
	K2	5.50E-05	3.06E-06	0.118	0.0139	2.99	2.91	4.75	4.87	5.02	5.05	3.13	3.19
	K3	5.50E-05	3.06E-06	0.119	0.0139	2.99	2.91	4.64	4.50	4.69	4.65	2.95	3.01
	K4	5.42E-05	3.78E-06	0.097	0.0135	4.80	4.63	4.27	4.25	4.46	4.34	3.72	3.79
	H1	5.55E-05	3.08E-06	0.101	0.0177	5.52	5.93	14.00	18.28	109.12	87.04	123.31	118.44
	H2	5.77E-05	3.21E-06	0.303	0.0298	10.34	11.71	20.28	26.92	107.18	122.58	110.54	111.91
	M3	5.44E-05	3.05E-06	0.117	0.0143	2.96	2.99	7.07	6.83	31.16	29.82	46.31	50.38
	M4	5.47E-05	3.05E-06	0.117	0.0140	3.00	2.96	6.67	6.80	18.76	11.50	46.14	44.75
	M5	5.46E-05	3.05E-06	0.118	0.0141	2.98	2.92	4.90	5.10	11.81	11.88	13.82	14.32
	M6	5.44E-05	3.05E-06	0.118	0.0141	2.93	2.96	5.79	7.87	34.56	37.72	23.39	23.75
	T1	5.68E-05	3.06E-06	0.173	0.0171	4.78	5.28	14.81	19.73	8.73	87.58	107.58	94.50
	T2	5.78E-05	3.01E-06	0.218	0.0287	8.59	9.39	19.21	30.93	116.29	92.88	117.15	119.93
SRSS	K1	1.98E-05	1.03E-06	0.048	0.0062	1.35	1.32	4.63	4.58	4.79	4.73	2.94	3.00
	K2	1.98E-05	1.03E-06	0.062	0.0059	1.35	1.32	4.72	4.84	5.05	4.90	3.01	3.06
	K3	1.98E-05	1.02E-06	0.048	0.0062	1.35	1.32	4.64	4.50	4.69	4.65	2.96	3.01
	K4	1.97E-05	1.27E-06	0.039	0.0060	2.17	2.09	4.27	4.24	4.46	4.37	3.71	3.78
	H1	2.06E-05	1.05E-06	0.085	0.0098	2.66	3.06	13.99	18.69	106.56	89.06	117.82	112.67
	H2	2.17E-05	1.13E-06	0.139	0.0148	5.10	5.76	20.93	27.10	101.95	116.74	106.21	106.85
	M3	1.98E-05	1.03E-06	0.050	0.0065	1.47	1.50	7.15	6.82	33.53	31.29	52.66	58.46
	M4	1.99E-05	1.03E-06	0.049	0.0063	1.48	1.46	6.76	5.99	19.48	11.49	54.11	51.31
	M5	1.98E-05	1.02E-06	0.048	0.0063	1.36	1.34	4.92	5.12	11.99	11.75	13.99	14.56
	M6	1.99E-05	1.03E-06	0.051	0.0066	1.36	1.38	5.58	7.99	36.52	43.75	24.46	25.53
	T1	2.09E-05	1.05E-06	0.082	0.0086	2.50	2.75	15.25	19.65	91.46	89.88	94.35	104.20
	T2	2.19E-05	1.06E-06	0.102	0.0148	4.32	4.68	20.81	31.15	112.73	90.60	111.26	113.35
NRL	K1	2.69E-05	1.36E-06	0.064	0.0085	1.88	1.84	4.64	4.58	4.78	4.75	2.95	3.00
	K2	2.69E-05	1.36E-06	0.065	0.0086	1.88	1.83	4.69	4.81	4.99	4.96	2.99	3.01
	K3	2.69E-05	1.36E-06	0.065	0.0086	1.89	1.84	4.64	4.50	4.69	4.66	2.95	3.01
	K4	2.67E-05	1.68E-06	0.053	0.0083	3.03	2.92	4.27	4.23	4.45	4.38	3.71	3.78
	H1	2.81E-05	1.42E-06	0.119	0.0128	3.73	4.29	14.10	19.10	106.67	89.23	118.27	113.11
	H2	2.99E-05	1.54E-06	0.195	0.0210	7.20	8.13	21.36	27.21	101.68	116.86	106.51	107.18
	M3	2.70E-05	1.36E-06	0.069	0.0092	2.06	2.11	7.16	6.91	34.20	31.53	58.10	51.82
	M4	2.70E-05	1.35E-06	0.067	0.0087	2.07	2.06	6.70	9.08	19.87	11.54	53.78	51.03
	M5	2.69E-05	1.36E-06	0.065	0.0088	1.91	1.87	4.91	5.24	12.16	11.79	14.09	14.65
	M6	2.69E-05	1.37E-06	0.069	0.0094	1.92	1.94	5.51	8.31	37.15	44.01	24.47	25.39
	T1	2.86E-05	1.42E-06	0.114	0.0125	3.51	3.87	15.40	19.64	92.87	98.03	94.39	104.45
	T2	3.01E-05	1.45E-06	0.141	0.0021	6.07	6.60	20.25	31.72	112.69	90.75	111.69	113.74

TABLA B . (Continuación)

CRITERIO DE SUPER POSICION	CA SO	DESPLAZAMIENTO MEDIO (cm)						C.V. DESPLAZAMIENTO (%)					
		PISO 1		PISO 2		PISO 3		PISO 1		PISO 2		PISO 3	
		Y	Z	Y	Z	Y	Z	Y	Z	Y	Z	Y	Z
PRIMI	X1	3.72E-05	2.04E-06	0.084	0.0100	2.17	2.11	4.64	4.59	4.79	4.71	2.95	3.01
	X2	3.72E-05	2.04E-06	0.084	0.0100	2.17	2.11	4.74	4.67	5.86	4.88	3.09	3.15
	X3	3.72E-05	2.04E-06	0.083	0.0100	2.17	2.11	4.64	4.50	4.69	4.66	2.95	3.01
	X4	3.69E-05	2.52E-06	0.069	0.0097	3.49	3.36	4.27	4.25	4.47	4.35	3.71	3.78
	M1	3.81E-05	2.07E-06	0.134	0.0134	3.91	4.49	13.96	18.35	108.16	87.58	121.34	116.37
	M2	3.97E-05	2.17E-05	0.221	0.0223	7.73	8.74	20.42	26.08	105.46	120.57	109.88	110.21
	M3	3.72E-05	2.04E-06	0.084	0.0104	2.22	2.25	7.10	6.82	31.78	30.24	47.98	52.86
	M4	3.74E-05	2.04E-06	0.084	0.0101	2.24	2.21	6.69	6.00	18.93	11.49	48.53	46.70
	M5	3.72E-05	2.04E-06	0.083	0.0182	2.17	2.13	4.92	5.11	11.86	11.85	13.87	14.38
	M6	3.71E-05	2.04E-06	0.085	0.0104	2.15	2.17	5.72	7.90	35.87	39.46	23.67	24.20
	T1	3.85E-05	2.05E-05	0.127	0.0130	3.64	4.02	14.89	19.67	89.58	88.23	94.34	106.45
	T2	3.99E-05	2.04E-06	0.160	0.0218	6.45	7.04	19.39	30.99	115.88	91.99	115.12	117.24
PRIMI2	X1	2.33E-05	1.19E-06	0.057	0.0074	1.62	1.58	4.63	4.58	4.79	4.74	4.78	4.74
	X2	2.33E-05	1.19E-06	0.057	0.0074	1.62	1.58	4.70	4.60	5.82	4.94	3.00	3.06
	X3	2.34E-05	1.19E-06	0.056	0.0074	1.62	1.58	4.64	4.50	4.69	4.66	2.95	3.01
	X4	2.32E-05	1.48E-06	0.046	0.0072	2.60	2.51	4.27	4.24	4.46	4.38	3.71	3.78
	M1	2.44E-05	1.24E-06	0.102	0.0109	3.19	3.68	14.05	18.89	106.63	89.16	118.08	112.93
	M2	2.58E-05	1.33E-06	0.167	0.0179	6.15	6.94	21.17	27.14	101.79	116.81	107.05	106.39
	M3	2.34E-05	1.19E-06	0.059	0.0079	1.76	1.81	7.16	6.86	33.91	31.43	51.92	58.25
	M4	2.35E-05	1.19E-06	0.058	0.0075	1.78	1.76	6.73	6.00	19.70	11.52	53.92	51.15
	M5	2.34E-05	1.19E-06	0.057	0.0076	1.64	1.61	4.91	5.18	12.08	11.78	14.05	14.62
	M6	2.34E-05	1.20E-06	0.060	0.0082	1.64	1.64	5.54	8.16	36.88	43.90	24.46	25.36
	T1	2.48E-05	1.23E-06	0.098	0.0107	3.00	3.31	15.33	19.63	91.82	89.87	94.38	104.35
	T2	2.60E-05	1.26E-06	0.122	0.0179	5.20	5.64	20.15	31.63	112.71	90.69	111.51	113.58
GH	X1	2.87E-05	1.47E-06	0.055	0.0063	1.75	1.70	4.64	4.59	4.78	4.73	3.00	3.00
	X2	2.88E-05	1.48E-06	0.055	0.0064	1.75	1.70	4.75	4.82	4.96	4.87	3.02	3.02
	X3	2.88E-05	1.47E-06	0.055	0.0063	1.74	1.78	4.64	4.50	4.69	4.66	3.01	3.01
	X4	2.84E-05	1.82E-06	0.045	0.0061	2.81	2.71	4.27	4.25	4.44	4.36	3.78	3.78
	M1	2.95E-05	1.49E-06	0.092	0.0092	3.11	3.57	13.30	17.34	107.37	88.96	121.89	116.87
	M2	3.89E-05	1.56E-06	0.151	0.0151	6.17	6.97	19.71	25.69	104.05	117.26	109.48	110.66
	M3	2.88E-05	1.47E-06	0.056	0.0068	1.77	1.79	6.79	7.02	32.41	31.16	47.52	52.14
	M4	2.89E-05	1.47E-06	0.055	0.0064	1.79	1.77	6.56	6.12	19.01	11.48	47.89	46.13
	M5	2.88E-05	1.47E-06	0.055	0.0065	1.75	1.71	4.87	5.03	11.88	11.77	13.86	14.35
	M6	2.88E-05	1.46E-06	0.056	0.0068	1.73	1.74	5.49	7.17	35.61	43.32	23.59	24.03
	T1	3.08E-05	1.49E-06	0.088	0.0098	2.89	3.18	14.32	19.01	90.23	89.88	94.36	106.73
	T2	3.08E-05	1.47E-06	0.109	0.0158	5.14	5.60	18.75	28.98	113.87	90.78	115.73	117.80

TABLA 8 . (Continuación)

CRITERIO DE SUPER POSICION	CA 50	DESPLAZAMIENTO MEDIO (cm)						C.V. DESPLAZAMIENTO (%)					
		PISO 1		PISO 2		PISO 3		PISO 1		PISO 2		PISO 3	
		Y	Z	Y	Z	Y	Z	Y	Z	Y	Z	Y	Z
TPM	K1	2.81E-05	1.39E-06	0.055	0.0063	1.75	1.70	4.63	4.50	4.78	4.73	2.95	3.00
	K2	2.81E-05	1.38E-06	0.055	0.0064	1.75	1.78	4.73	4.80	4.96	4.87	2.97	3.03
	K3	2.81E-05	1.40E-06	0.055	0.0063	1.75	1.70	4.64	4.50	4.69	4.66	2.96	3.01
	K4	2.79E-05	1.73E-06	0.045	0.0061	2.01	2.71	4.27	4.24	4.44	4.36	3.71	3.78
	H1	2.87E-05	1.42E-06	0.092	0.0092	3.11	3.57	13.80	17.15	107.38	88.95	121.89	116.88
	H2	2.99E-05	1.49E-06	0.151	0.0151	6.17	6.97	20.22	25.26	104.06	117.25	109.47	110.66
	H3	2.81E-05	1.39E-06	0.056	0.0067	1.77	1.79	6.98	6.92	32.41	31.16	47.52	52.15
	H4	2.83E-05	1.40E-06	0.055	0.0064	1.79	1.77	6.67	6.09	19.07	11.48	47.89	46.13
	H5	2.81E-05	1.40E-06	0.055	0.0065	1.75	1.71	4.90	5.02	11.88	11.77	13.86	14.85
	H6	2.81E-05	1.49E-06	0.056	0.0068	1.73	1.74	5.54	7.09	35.62	43.22	23.68	24.63
	T1	2.92E-05	1.42E-06	0.080	0.0898	2.89	3.19	14.83	18.73	90.23	89.80	106.74	94.36
	T2	3.01E-05	1.40E-06	0.109	0.0150	5.14	5.61	19.46	28.59	113.88	90.77	115.72	117.80
DSM	K1	2.85E-05	1.49E-06	0.060	0.0073	1.78	1.73	4.66	4.60	4.80	4.74	2.98	3.03
	K2	2.85E-05	1.50E-06	0.060	0.0073	1.78	1.73	4.76	4.84	5.03	4.78	3.01	3.07
	K3	2.86E-05	1.50E-06	0.060	0.0073	1.78	1.73	4.66	4.52	4.71	4.67	2.98	3.04
	K4	2.84E-05	1.85E-06	0.050	0.0071	2.86	2.75	4.29	4.26	4.48	4.37	3.73	3.80
	H1	2.93E-05	1.52E-06	0.097	0.0100	3.15	3.62	13.47	17.87	107.88	87.64	122.07	117.10
	H2	3.06E-05	1.61E-06	0.161	0.0165	6.25	7.86	19.88	26.20	105.15	119.19	109.62	110.82
	H3	2.85E-05	1.49E-06	0.061	0.0076	1.79	1.82	6.88	6.95	31.79	30.17	47.35	51.90
	H4	2.87E-05	1.49E-06	0.060	0.0074	1.81	1.79	6.61	6.09	18.86	11.48	47.65	45.93
	H5	2.86E-05	1.49E-06	0.060	0.0074	1.77	1.74	4.90	5.08	11.86	11.82	13.86	14.35
	H6	2.85E-05	1.49E-06	0.061	0.0076	1.76	1.77	5.53	7.50	35.18	40.61	23.57	23.99
	T1	2.97E-05	1.52E-06	0.093	0.0097	2.93	3.23	14.48	19.32	89.52	88.33	94.37	106.87
	T2	3.04E-05	1.51E-06	0.116	0.0162	5.21	5.68	18.99	30.04	114.58	91.52	115.90	117.99
DSC	K1	1.35E-05	1.07E-06	0.059	0.0068	0.82	1.68	4.69	4.57	4.80	4.74	2.85	3.03
	K2	1.35E-05	1.08E-06	0.059	0.0068	0.82	1.69	4.77	4.71	5.03	4.92	3.01	3.07
	K3	1.35E-05	1.07E-06	0.059	0.0068	0.82	1.69	4.61	4.50	4.70	4.66	2.85	3.04
	K4	1.34E-05	1.33E-06	0.048	0.0066	1.32	2.68	4.23	4.22	4.47	4.37	3.64	3.80
	H1	1.45E-05	1.11E-06	0.086	0.0092	2.74	2.78	12.17	19.14	87.60	83.05	141.64	88.87
	H2	1.57E-05	1.21E-06	0.127	0.0142	5.88	4.52	20.05	27.27	88.51	109.69	116.68	90.67
	H3	1.36E-05	1.07E-06	0.059	0.0072	1.09	1.77	6.20	6.95	31.90	30.40	65.76	50.57
	H4	1.36E-05	1.07E-06	0.059	0.0069	1.10	1.75	5.55	6.04	18.89	11.51	73.84	45.59
	H5	1.35E-05	1.07E-06	0.059	0.0070	0.85	1.79	4.82	5.14	11.87	11.80	14.92	14.36
	H6	1.34E-05	1.08E-06	0.060	0.0072	0.89	1.72	6.26	7.94	35.27	41.62	28.94	24.07
	T1	1.47E-05	1.10E-06	0.084	0.0090	2.53	2.57	13.44	19.99	78.37	84.66	112.84	83.86
	T2	1.56E-05	1.14E-06	0.096	0.0140	4.86	3.89	20.04	32.36	98.14	85.80	124.58	93.82

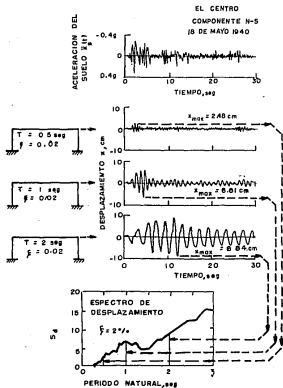


Fig.1. Construcción de un espectro de respuesta

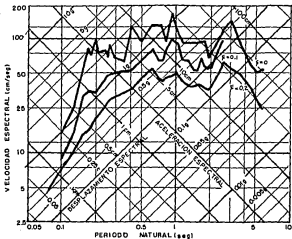


Fig.2. Espectro de respuesta que relaciona el desplazamiento la velocidad y la aceleración espectral

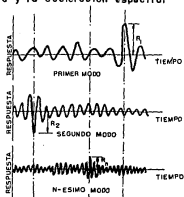
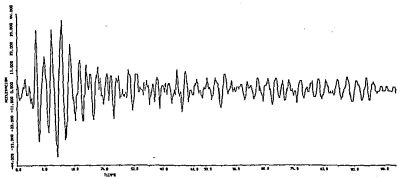
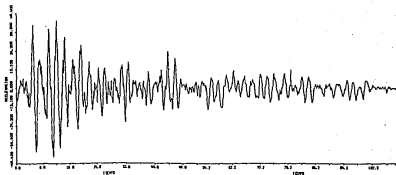


Fig.3. Ocurrencia de respuestas modales máximas en sistemas de más de un grado de libertad

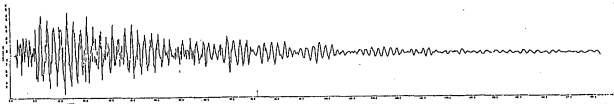


Sismo edificio Atizapan/cimentación, componente E-W
agosto 2, 1968.

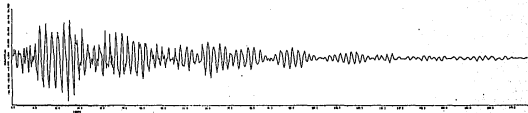


Sismo edificio Atizapan/patio, componente E-W
agosto 2, 1968.

Fig. 4. Registros de aceleraciones utilizados.

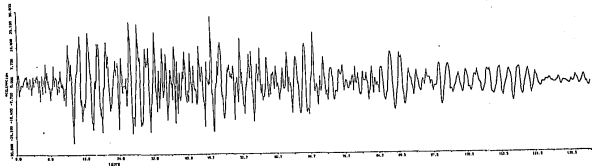


Sismo edificio Hidalgo/patio, componente E-W, julio 6, 1964.

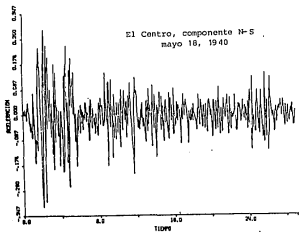


Sismo edificio Hidalgo/cimentación, componente E-W, julio 6, 1964

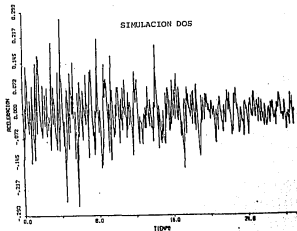
Fig. 4. (Continuación).



Sismo edificio Gonzalez, componente N-S, julio 6, 1964.



El Centro, componente N-S
mayo 18, 1940



SIMULACION DOS

Fig. 4. (continuación)

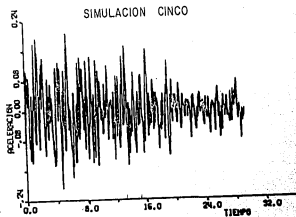
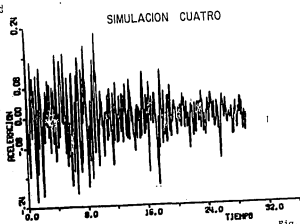
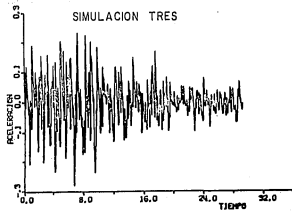
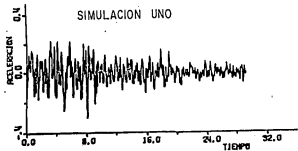
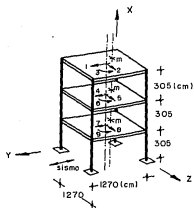


Fig. 4. (Continuación)



Propiedades geométricas de los elementos

elmta.	A(cm ²)	I _T (cm ⁴)	I ₂ (cm ⁴)	I ₃ (cm ⁴)
trabes	1350	7921	101250	227813
columnas	1500	9391	112500	312500

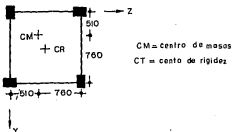


Fig.5. Características de la estructura estudiada

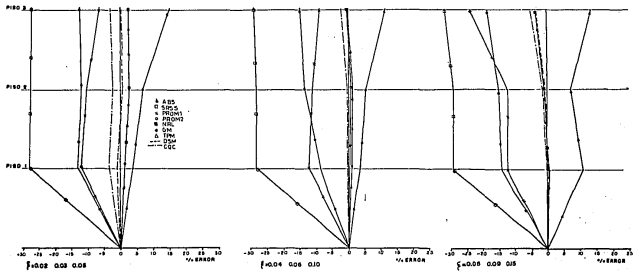


Fig.6. Desplazamientos máximos probables de traslación en el sentido paralelo al de excitación (suelo duro).

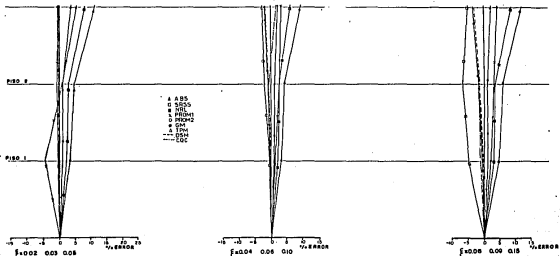


Fig. 7. Desplazamientos máximos posibles de rotación (suelo duro)

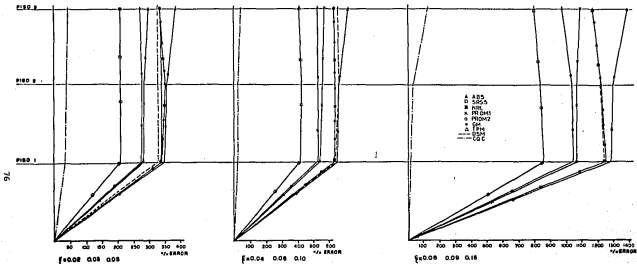


Fig. 6. Desplazamientos máximos probables de tracción en el sentido perpendicular al de excitación (suelo duro)

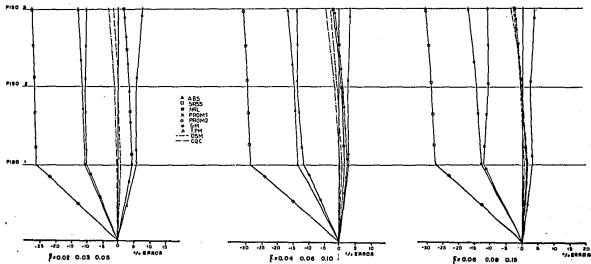


Fig.9. Desplazamientos máximos probables de tracción en el sentido paralelo al de excitación (suelo fijo)

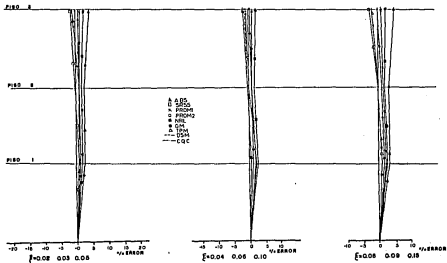


Fig.10. Desplazamientos máximos probables de rotación (suela blanda)

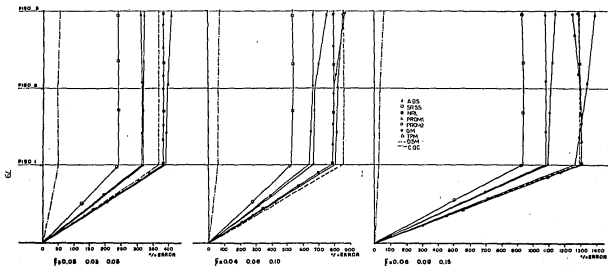


Fig. 11. Desplazamientos máximos probables de tracción en el sentido transversal al de excitación (suelo blando)

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

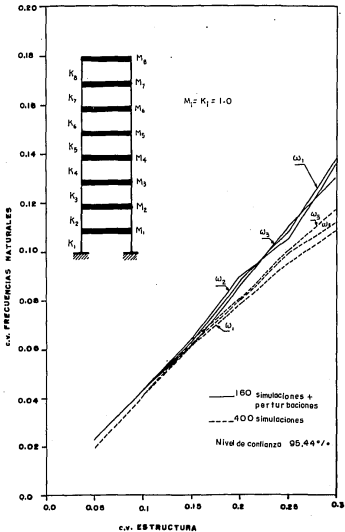


Fig.12. Comparación entre los métodos de simulaciones y simulaciones/perturbaciones para un marco plano

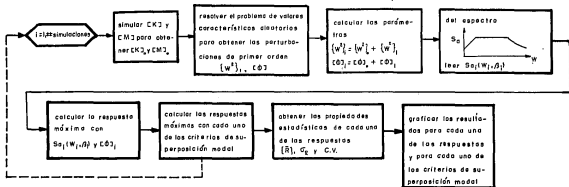


Fig.13. Planteamiento 1

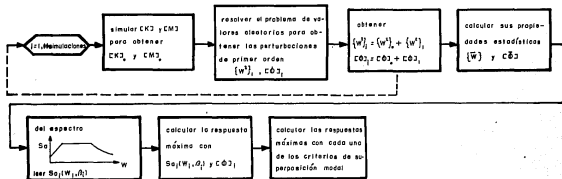
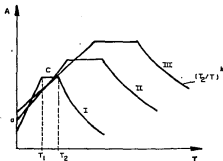


Fig.14. Planteamiento 2



Zona	α	C	T_1	T_2	k
I	0.030	0.16	0.3	0.8	1/2
II	0.045	0.20	0.5	2.0	2/3
III	0.060	0.24	0.8	5.3	1

Fig.15. Espectros de diseño

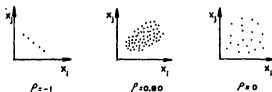


Fig.16. Dispersión y coeficiente de correlación

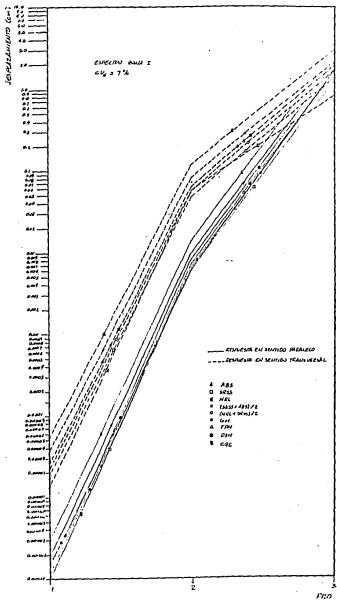


Fig. 17. Desplazamientos de la estructura, caso K1.

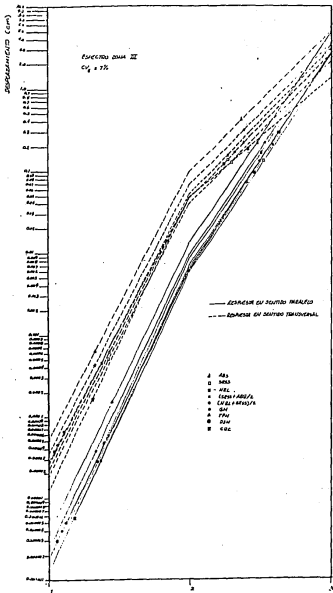


Fig. 18. Desplazamientos de la estructura, caso K4.

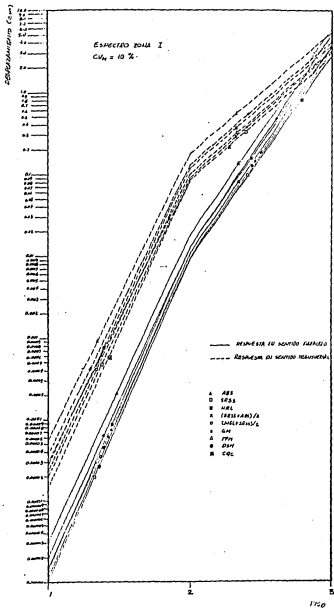


Fig. 19. Desplazamientos de la estructura, caso M1.

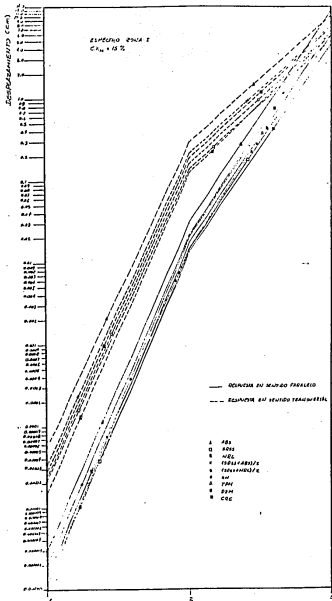


Fig. 20. Desplazamientos de la estructura, caso M2.

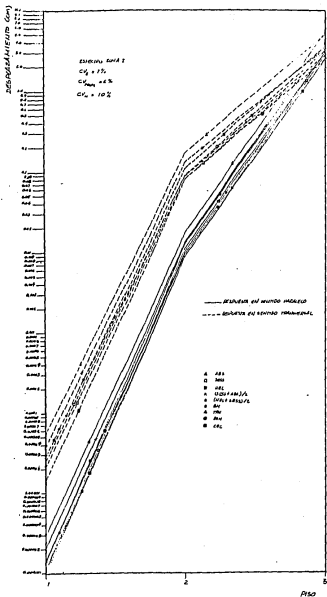


Fig. 21. Desplazamientos de la estructura, caso T1.

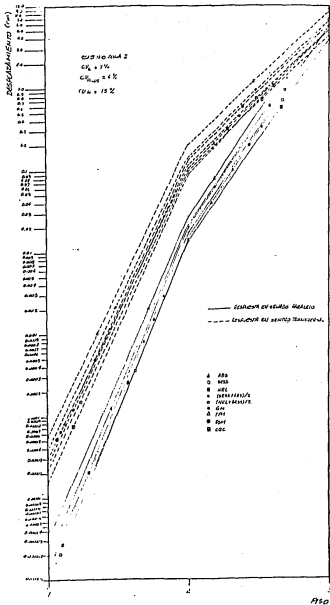


Fig. 22. Desplazamientos de la estructura, caso T2.