01161
les.
3

UNAM
FACULTAD DE INGENIERIA

ANALISIS POR VIENTO DE SILOS DE LAMINA DELGADA PARA ALMACENAMIENTO DE GRANOS

T E S I S

Que para obtener el grado de:

MAESTRO EN INGENIERIA
(ESTRUCTURAS)

presenta

RAFAEL CEDEÑO ROSETE

MEXICO ,D.F.,ABRIL 2, 1984

1. INTRODUCCION

La construcción de silos con hojas de lámina delgada para el almacenamiento de granos, ha proliferado debido ha su bajo costo de construcción y gran capacidad de almacenaje si se les compara con silos de concreto. Su forma más común consiste en un recipiente cilíndrico y una tapa cónica truncada en se extremo superior, dejando una abertura por la cuál se lleva a cabo el proceso de almacenamiento del grano.

En silos de este tipo construidos en la ciudad de Tampico Tamps., hay informes recientes que muestran daños ocasionados por la fuerza del viento, aún con velocidades del viento inferiores a las que podrían presentarse en zonas costeras, como la que se menciona.

Este problema despertó el interés por conocer los procedimientos empleados para el análisis de estas estructuras ante el efecto del viento, e intentar mejorarlos desarrollando una tecnología propia adecuada a las necesidades de nuestro país.

Las presiones y fuerzas de fricción generadas por el grano sobre las paredes del recipiente, cuando éste se encuentra almacenado y cuando el grano fluye durante el proceso de vaciado, han sido estudiados por Ravenet (ref 1) y han resultado ser significativos, pero cuando el silo se encuentra vacio, el efecto del viento resulta ser más importante que dichas acciones; el análisis por viento de estos silos lo han realizado Jerath y Boresi (ref 12), quienes plantearon las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio, tanto de la lámina cónica como de la cilíndrica; las condiciones de frontera naturales fueron obtenidas empleando los principios de energía potencial mínima; para facilitar la solución del problema, la distribución de presión del viento sobre la superficie de la lámina cilíndrica la consideraron como un desarrollo de serie de Fourier, con seis términos de la serie y empleando ésta misma distribución de presiones para la lámina cónica.

Esta representación de las cargas externas mediante serie de Fourier, permite transformar las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio y de frontera, en ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya solución llevaron a cabo con un método aproximado, consistente en particionar el dominio de la función en intervalos y aproximarla mediante un polinomio cúbico, la integral del error en un subintervalo se iguala a cero y aunque no se elimina el error punto a punto, el procedimiento permite reducirlo libremente, dependiendo del número de intervalos elegidos en la solución.

En este trabajo se demuestra que en la representación de la distribución de presiones en el cilindro no son suficientes seis términos de la serie, pues si bien resulta adecuadamente representada en la zona de barlovento, no lo es en la zona de sotavento. Por otra parte la distribución de presión del viento en la tapa cónica es totalmente diferente a la del cilindro, considerandose que la solución obtenida por Jerath y Boresi introduce un error importante al establecer el sistema de cargas en la solución del problema.

Se ha determinado que con doce términos de la serie de Fourier se logra representar en forma precisa la variación de la presión alrededor del cilindro; con este criterio y con la obtención de los coeficientes de presiones correctos en la tapa cónica, se optimará la solución obtenida hasta el momento con lo cual se pueda evitar la falla de este tipo de estructuras.

Para determinar los coeficientes de presión en la tapa cónica, se realizaron pruebas en túnel de viento de modelos representativos de silos reäles, que permitirán a su vez verificar la distribución de presiones en el cuerpo cilíndrico.

2. DESCRIPCION GEOMETRICA DE LOS SILOS Y PROPIEDADES DE LA LAMINA

2.1 ASPECTOS GENERALES

Los silos en estudio están formados por un recipiente cilíndrico y una tapa en forma de cono truncado provisto de un anillo de acero en su extremo superior, por cuyo orificio se lleva a cabo el proceso de almacenamiento del grano (fotografías 1,2,3).

Los silos se construyen con láminas de acero galvanizado con corrugaciones semicirculares colocándolas de tal forma que la corrugación queda en sentido circunferencial (fotografías 3,4).

Para este tipo de láminas, aún cuando están fabricadas con un material isotrópico, es válido considerar que tienen un comportamiento ortotrópico debido a la corrugación de las hojas.

Las relaciones constitutivas para láminas cilindricas construidas con este tipo de hojas fueron determinadas experimentalmente (ref 2) y son funciones de las dimensiones de la corrugación de la lámina y su espesor multiplicadas por las respectivas relaciones constitutivas correspondientes a una lámina isotrópica. En este análisis se considera al cuerpo cilíndrico ortotrópico y a la tapa cónica, isotrópica. La condicion de sujeción en la base es por medio de anclas que permiten el giro libre de la lámina, por lo que se han considerado las condiciones de frontera correspondientes a una articulación en todo el perímetro. En el extremo superior del silo las deformaciones de la lámina deberán ser compatibles con las deformaciones del anillo de acero al cual se encuentra unida.

2.2 LAMINA ORTOTROPICA IDEAL

Para el caso de una lámina ortotrópica ideal, el material tiene tres planos de simetría con respecto a sus propiedades elásticas, esos planos son los planos coordenados x, θ, y z.

La relación entre las componentes de esfuerzo y deformación, para el caso de esfuerzos planos en los planos x y θ, está dada por la exprsión:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & E_\mu & 0 \\ E_\mu & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \end{bmatrix} \quad \text{--- (2.1)}$$

En la que:

$$E_1 = \frac{E_x}{1-\mu_1\mu_2} \qquad E_2 = \frac{E_y}{1-\mu_1\mu_2} \qquad E = \mu_1 E_2 = \mu_2 E_1 \quad \text{-- (2.2)}$$

Los elementos mecánicos obtenidos por la integración de los esfuerzos dados por la ec 1 a traves del espesor "t", quedan expresados en función de las siguientes propiedades mecánicas:

$$D_x = E_1\, t \qquad\qquad B_x = \frac{E_1\, t^3}{12}$$

$$D_\theta = E_2\, t \qquad\qquad B_\theta = \frac{E_1\, t^3}{12}$$

$$D_\mu = E_\mu\, t \qquad\qquad B_\mu = \frac{E_\mu\, t^3}{12}$$

$$D_{x\theta} = G\, t \qquad\qquad B_{x\theta} = \frac{G\, t^3}{6} \qquad --- \quad (2.3)$$

2.3 PROPIEDADES DE UNA LAMINA CILINDRICA CORRUGADA

Una lámina cilíndrica corrugada hecha con hojas de acero puede tratarse, como ya se ha mencionado, considerándola como un material ortotrópica y sus propiedades mecánicas, obtenidas experimentalmente, son las siguientes (ref 2):

$$D_x = \frac{E\, t}{6(1-\mu^2)}\left(\frac{t}{f}\right) \qquad\qquad B_x = \frac{E\, t^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{c}{L}\right)$$

$$D_\theta = E\, t\left(\frac{L}{c}\right) \qquad\qquad B_\theta = 0.522\, E\, t\, f^2$$

$$D_{x\theta} = \frac{E\, t}{2(1+\mu)}\left(\frac{c}{L}\right) \qquad\qquad B_{x\theta} = \frac{E\, t^3}{12(1+\mu)}\left(\frac{L}{c}\right) \qquad --- \quad (2.4)$$

Los efectos de las relaciones de Poisson, $\mu_2 E_x$, y $\mu_1 E_y$ son despreciables y no tienen influencia en las propiedades mecánicas de las hojas, por lo tanto se considera que $D_\mu \doteq B_\mu \doteq 0$.

3. DETERMINACION DE LAS FUERZAS DEL VIENTO

3.1 PRUEBAS EN TUNEL DEL VIENTO

La presión que la fuerza del viento ejerce sobre una superficie se determina con la expresión:

$$P = \frac{1}{2} \rho C_p V^2 \qquad --- (3.1)$$

En donde:

ρ = Densidad del aire.
C_p = Coeficiente adimensional de presión o succión.
V = Velocidad de diseño del viento en km/hr.
P = Presión o succión en kg/m^2, actuando normal a la superficie de contacto.

La presión de diseño en cualquier punto de una superficie depende de la variación del C_p en ella.

Para obtener los valores de los coeficientes de presión en los silos, se realizaron pruebas en el túnel del viento en cinco modelos de lámina delgada a escala; el cuerpo cilíndrico era de 60 cm de diámetro por 20 cm de altura; las tapas del modelo se fueron cambiando, siendo las cuatro primeras de forma cónica, con ángulos de inclinación de su generatriz de 40°, 30°, 20°, y 10°; la última tapa fué plana.

Se instrumentaron cuatro líneas correspondientes a 0°, 90°, 180° y 270°; cada línea se instrumentó con trece estaciones en la generatriz del cono y ocho estaciones a lo largo de la altura del cilindro, todas simétricamente distribuidas, siendo ochenta y cuatro puntos de medición, más un punto adicional en el vértice del cono.

En cada uno de los puntos de medición se tiene un tubo de cobre de 20 mm de largo y 3 mm de diámetro conectado por medio de una manguera a un tubo de vidrio conteniendo agua coloreada hasta un cierto nivel.

El viento es generado por un ventilador de madera conectado a un motor de 75 HP, que genera una corriente de aire con velocidades en la zona de prueba hasta de 150 km/hr. La sección de prueba es de forma prismática, de dimensiones 0.80x1.15x1.75 m, construida de madera. El modelo se coloca sobre una de las paredes verticales de la sección de prueba.

Cuando la corriente de aire llega a los tubos de medición, una disminución o aumento en el nivel de agua en los correspondientes tubos de vidrio, en el tablero de medición, indica el valor de la presión o succión generada por la corriente de aire.

La obtención de los valores de los diferentes cambios de nivel en los tubos de agua, se hace por medio de fotografías tomadas en el momento en que se estabiliza el flujo de aire.

Girando el modelo a cada 15° y tomando fotografías en posiciones de 0° a 75°, se obtienen lecturas para cada tubo instrumentado de 0° a 360°. La velocidad del viento generada en las pruebas realizadas fué de 150 km/hr, así por ejemplo, para una disminución del nivel de agua de 5 cm en un tubo de medición y para un incremento de 9 cm en el nivel de agua en otro, los correspondientes coeficientes de presión son los siguientes:

$$P = \frac{1}{2} \rho C_p V^2 = \frac{1}{2} (0.011) C_p (150)^2 = 123.8 C_p \quad kg/m^2$$

Para $h = 5$ cm $\quad P = \gamma h = (1000 \frac{kg}{m^2})(0.05m) = 50 \frac{kg}{m^2}$

$$C_p = \frac{50}{123.8} = 0.40$$

Para $h = -9$ cm $\quad P = -(1000 \frac{kg}{m^2})(0.09m) = 90 \frac{kg}{m^2}$

$$C_p = -\frac{90}{123.8} = -0.72$$

Los coeficientes de presión obtenidos para uno de los modelos, se muestran en la tabla 3.1; la variación de estos coeficientes de presión en la parte media del cilindro y en la parte media del cono se muestran gráficamente en las figs 3.1 y 3.2 .

3.2 SERIE DE FOURIER PARA C_p

Es indispensable contar con una expresión matemática que permita obtener la variación del coeficiente de presión C_p alrededor del perímetro del cilindro y de las secciones del cono, ésto se puede lograr mediante su desarrollo en serie de Fourier del tipo:

$$C_p = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cos n\theta \qquad \text{--- (3.2)}$$

Rish (ref 3), ha propuesto seis términos de la serie para representar la variación de C_p. Toshio (ref 4), estableció que era necesario considerar diecinueve términos de la serie para obtener la variación del coeficiente de presión en la circunferencia del cilindro.

En la tabla 3.2, se muestran los valores del coeficiente de presión C_p para un cilindro con relación de esbeltez H/D= 1 a cada cinco grados, y los valores correspondientes obtenidos con series de Fourier con diferente número de términos del tipo 3.2, considerando cinco, seis, doce, y dieciocho términos de la serie respectivamente. En la tabla 3.3, se indican los coeficientes de Fourier de cada una de las series mencionadas.

Se puede observar de la tabla 3.2, que la solución para el coeficiente de presión para seis términos de la serie de Fourier tiene un error máximo del 54%, mientras que la obtenida con doce términos tiene un error máximo del 2.7% y el error máximo para dieciocho términos es de 2.2%. Los errores promedio obtenidos para seis, doce y dieciocho términos de la serie de Fourier son 8.7%, 0.49%, y 0.40% respectivamente.

La solución con seis términos, tiene un porcentaje de error demasiado grande por lo que no se considera adecuada. La solución con doce y dieciocho términos son prácticamente iguales y no se justifica emplear más de doce términos de la serie; por lo tanto, la presión que el viento ejerce en cualquier punto del silo se puede obtener con la siguiente expresión:

$$P = 0.0055 C_p V^2; \quad C_p = \sum_{n=0}^{n=11} a_n \operatorname{Cos} n\theta$$

En este análisis, para cada modelo, se han considerado los coeficientes de la serie de Fourier que representan la variación de C_p a la mitad del cilindro y en trece secciones del cono.

4. METODO DE SOLUCION DE LA ESTRUCTURA

4.1 PLANTEAMIENTO

Para el análisis de los silos es necesario obtener las ecuaciones de equilibrio de la lámina cónica isotrópica, y las correspondientes a la lámina cilíndrica ortotrópica del recipiente.

Las condiciones de frontera que deben prevalecer, tanto en la unión de la tapa cónica y el cuerpo cilíndrico, como en la unión del anillo metálico y el extremo superior del cono, se pueden determinar con el principio de energía potencial mínima.

Este grupo de ecuaciones, junto con las ecuaciones de equilibrio se resuelven numéricamente empleando el método de subdominios.

Las coordenadas de referencia son x, θ, y z; longitudinal, circunferencial y radial respectivamente, las componentes de desplazamiento de la superficie media de la lámina en las direcciones x, θ, z son u, v, y w respectivamente (fig 4.1). Las expresiones para valuar deformaciones, elementos mecánicos y las ecuaciones de equilibrio para una lámina curvilínea, se pueden expresar en función de coordenadas de superficie.

4.2 SUPERFICIES

Los conceptos básicos de coordenadas de superficie son los siguientes:

Una superficie se define por ecuaciones del tipo:

$$X = f(x,y) \qquad Y = g(x,y) \qquad Z = h(x,y) \qquad --- \quad (4.1)$$

En donde (X, Y,Z) son coordenadas rectangulares y (x,y) son parámetros llamados coordenadas de superficie (fig 4.2).

Si i, j, k, son vectores unitarios a lo largo de los ejes X, Y, Z, el punto (X, Y, Z) se localiza por el vector:

$$\vec{r} = Xi + Yj + Zk = f(x,y)i + g(x,y)j + h(x,y)k \quad --- \quad (4.2)$$

Una línea en la superficie en la que sólo x o y varíen, se llama línea coordenada en x o línea coordenada en y respectivamente, por lo tanto:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\,dy = \vec{r}_x\,dx + \vec{r}_y\,dy \qquad --- \quad (4.3)$$

Los vectores $\vec{r}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}$ y $\vec{r}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}$ son tangentes a las líneas coordenadas x, y, respectivamente. Los módulos de los vectores $\vec{r}_x$ y $\vec{r}_y$ serán A y B respectivamente y se obtienen con las siguientes expresiones:

$$A^2 = \left|\vec{r}_x\right| = \vec{r}_x \cdot \vec{r}_x = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 \quad --- \quad (4.4a)$$

$$B^2 = \left|\vec{r}_y\right| = \vec{r}_y \cdot \vec{r}_y = \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 \quad --- \quad (4.4b)$$

El vector unitario normal a la superficie es:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_x \times \vec{r}_y}{A\ B} \qquad \text{---} \quad (4.5)$$

Los valores extremos de las curvaturas de planos normales a las secciones transversales de la superficie en cualquier punto son:

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{e}{A^2} \qquad \frac{1}{r_2} = -\frac{g}{B^2} \qquad \text{---} \quad (4.6)$$

Donde:

$$e = \frac{1}{AB}\begin{vmatrix} X_{xx} & Y_{xx} & Z_{xx} \\ X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \end{vmatrix} \qquad g = \frac{1}{AB}\begin{vmatrix} X_{yy} & Y_{yy} & Z_{yy} \\ X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \end{vmatrix}$$

$$\text{---} \quad (4.7)$$

En donde los índices x,y indican derivadas con respecto a las coordenadas de superficie x,y. Las cantidades $1/r_1$ y $1/r_2$ se conocen como curvaturas principales.

Si las líneas de curvatura principal son líneas coordenadas, esto es si $\vec{r}_x \cdot \vec{r}_y = 0$, entonces:

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial x} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \qquad \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} = \frac{1}{r_2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \qquad \text{---} \quad (4.8)$$

4.3 COORDENADAS DE LAMINA

La superficie media de una lámina se puede definir por:

$$X = f(x,y) \qquad Y = g(x,y) \qquad Z = h(x,y)$$

Donde (X, Y, Z) son coordenadas rectangulares y (x,y) son coordenadas de superficie. La distancia normal a la superficie media se indica por $\pm z$. Cualquier conjunto de valores (x,y,z) le corresponde un punto en la superficie de la lámina. Por lo tanto (x,y,z) son coordenadas curvilíneas en el espacio, y se les llama coordenadas de lámina.

Si el vector de posición de un punto en la superficie media es $\vec{r}$ y el vector de posición correspondiente de un punto a una distancia z de la superficie media es $\vec{R}$ (fig 4.3), entonces:

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{n}z$$

Derivando:

$$\vec{R}_x = \vec{r}_x + \vec{n}_x z \qquad \vec{R}_y = \vec{r}_y + \vec{n}_y z$$

$$\vec{R}_x = (1 + \frac{z}{r_1})\vec{r}_x \qquad \vec{R}_y = (1 + \frac{z}{r_2})\vec{r}_y \qquad \vec{R}_z = \vec{n}$$

La distancia ds entre dos puntos de la lámina sería:

$$ds^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = R_x{}^2dx^2 + R_y{}^2dy^2 + R_z{}^2dz^2$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{z}{r_1}\right)^2\vec{r}_x\cdot\vec{r}_x dx^2 + \left(1 + \frac{z}{r_2}\right)^2\vec{r}_y\cdot\vec{r}_y dy^2 + \vec{n}\cdot\vec{n}dz^2$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{z}{r_1}\right)^2 A^2dx^2 + \left(1 + \frac{z}{r_2}\right)^2 B^2dy^2 + dz^2$$

$$ds^2 = \alpha^2\, dx^2 + \beta^2\, dy^2 + \gamma^2\, dz^2$$

En donde:

$$\alpha = A(1 + \frac{z}{r_1}) \qquad \beta = B(1 + \frac{z}{r_2}) \qquad \gamma = 1 \quad \text{-- (4.9)}$$

Conocidos los parámetros A, B, $1/r_1$, $1/r_2$, α y β de las coordenadas de lámina para una lámina curvilínea cualquiera, las deformaciones, elementos mecánicos y ecuaciones de equilibrio se pueden determinar de la siguiente manera.

4.4 DEFORMACIONES DE LAMINAS CURVILINEAS

Mediante la hipótesis de Kirchhoff, de que las líneas normales a la superficie media permanecen rectas y normales después de la deformación y despreciando términos de segundo orden, las deformaciones unitarias de una lámina curvilínea en función de los desplazamientos u, v, w de la superficie media según las direcciones de los ejes coordenados son (ref 5):

$$\varepsilon_x = e_x + zk_x \quad \text{---} \quad (4.10a)$$

$$\varepsilon_y = e_y + zk_y \quad \text{---} \quad (4.10b)$$

$$\gamma_{xy} = e_{xy} + zk_{xy} \quad \text{---} \quad (4.10c)$$

En donde:

$$e_x = \frac{u_x}{A} + \frac{A_y v}{A\,B} + \frac{w}{r_1} \quad \text{---} \quad (4.11a)$$

$$e_y = \frac{v_y}{B} + \frac{uB_x}{A\,B} + \frac{w}{r_2} \quad \text{---} \quad (4.11b)$$

$$e_{xy} = \frac{v_x}{A} + \frac{u_y}{B} - \frac{A_y u}{A\,B} - \frac{B_x v}{A\,B} \quad \text{---} \quad (4.11c)$$

$$k_x = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w_x}{A}\right) - \frac{A_y\,w_y}{AB^2} \quad \text{---} \quad (4.11d)$$

$$k_y = -\frac{B_x\,w_x}{A^2\,B} - \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{w_y}{B}\right) \quad \text{---} \quad (4.11e)$$

$$k_{xy} = \frac{2}{AB}\left(\frac{A_y\,w_x}{A} + \frac{B_x\,w_y}{B} - w_{xy}\right) \quad \text{---} \quad (4.11f)$$

Los subíndices x,y, en los miembros derechos de las ecuaciones, indican derivadas con respecto a las coordenadas de lámina.

4.5 ELEMENTOS MECANICOS DE LAMINAS CURVILINEAS

Integrando los esfuerzos existentes en la lámina a traves del espesor t, se obtienen los elementos mecánicos en cualquier sección transversal por medio de las siguientes expresiones:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x\left(1 + \frac{z}{r_2}\right)dz \quad \text{--- (4.12a)}$$

$$N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y\left(1 + \frac{z}{r_1}\right)dz \quad \text{--- (4.12b)}$$

$$N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy}\left(1 + \frac{z}{r_2}\right)dz \quad \text{--- (4.12c)}$$

$$N_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy}\left(1 + \frac{z}{r_1}\right)dz \quad \text{--- (4.12d)}$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz}\left(1 + \frac{z}{r_2}\right)dz \quad \text{--- (4.12e)}$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz}\left(1 + \frac{z}{r_1}\right)dz \quad \text{--- (4.12f)}$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} z\,\sigma_x\left(1 + \frac{z}{r_2}\right)dz \quad \text{--- (4.12g)}$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} z\,\sigma_y\left(1 + \frac{z}{r_1}\right)dz \quad \text{--- (4.12h)}$$

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} z\,\tau_{xy}\left(1 + \frac{z}{r_2}\right)dz \quad \text{--- (4.12i)}$$

$$M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} z\ \tau_{xy}(1 + \frac{z}{r_1})dz \qquad \text{--- (4.12j)}$$

4.6 ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE UNA LAMINA CURVILINEA

Del equilibrio de fuerzas de un diferencial de lámina, se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio, los sentidos positivos para fuerzas y momentos se muestran en la fig 4.4.

$$\frac{\partial}{\partial x}(BN_x) + \frac{\partial}{\partial y}(A\ N_{yx}) + \frac{\partial A}{\partial y}N_{xy} - \frac{\partial B}{\partial x}N_y + \frac{AB\ Q_x}{r_1} + AB\ P_x = 0 \qquad \text{--- (4.13a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(B\ N_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(A\ N_y) + \frac{\partial B}{\partial x}N_{yx} - \frac{\partial A}{\partial y}N_x + \frac{AB\ Q_y}{r_2} + AB\ P_y = 0 \qquad \text{--- (4.13b)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(B\ Q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(A\ Q_y) + \frac{A\ B}{r_1}N_x - \frac{A\ B}{r_2}N_y + AB\ P_z = 0 \qquad \text{--- (4.13c)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(B\ M_x) + \frac{\partial}{\partial y}(A\ M_{yx}) + \frac{\partial A}{\partial y}M_{xy} - \frac{\partial B}{\partial x}M_y - AB\ Q_x = 0 \qquad \text{--- (4.13d)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(B\ M_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(A\ M_y) + \frac{\partial B}{\partial x}M_{yx} - \frac{\partial A}{\partial y}M_x - AB\ Q_y = 0 \qquad \text{--- (4.14)}$$

Con las expresiones anteriores es posible plantear las ecuaciones de equilibrio que gobiernan el comportamiento de un diferencial de lámina curvilínea. Para el problema en cuestión, procederemos a particularizar esas ecuaciones para el caso de una lámina cilíndrica ortotrópica y para una lámina cónica isotrópica.

4.7 LAMINA CILINDRICA ORTOTROPICA

Para una lámina ortotrópica ideal, las relaciones esfuerzo deformación están dadas por la ec. (2.1) y para una superficie cilíndrica, las coordenadas de lámina son x, la longitud a lo largo del meridiano y θ, el ángulo del meridiano (fig 4.5).

Así las coordenadas rectangulares X, Y, Z expresadas en función de las coordenadas de lámina anteriores serán:

$$
\begin{aligned}
X &= x \\
Y &= -a \cos\theta \\
Z &= a \cos\theta
\end{aligned}
\qquad \text{--- (4.15)}
$$

Donde: a = Radio del cilindro.

Aplicando las ecs 4.4, 4.6, y 4.7 a las ecs 4.15 se obtiene:

$$
\begin{aligned}
A &= 1 \\
B &= a \\
1/r_1 &= 0 \\
1/r_2 &= -1/a
\end{aligned}
\qquad \text{--- (4.16)}
$$

El signo menos de $1/r_2$ se debe a que el centro de curvatura de r_2 está del lado positivo del plano tangente a n. Sustituyendo los valores anteriores y las respectivas derivadas de A y B con respecto a las coordenadas de lámina x, θ en las ecuaciones 4.11 éstas quedan como sigue:

$$
\begin{aligned}
e_x &= u_x & k_x &= -w_{xx} \\
e_\theta &= \frac{v_\theta}{a} - \frac{w}{a} & k_\theta &= -\frac{w_{\theta\theta}}{a^2} \\
e_{x\theta} &= \frac{u_\theta}{a} - v_x & k_{x\theta} &= -\frac{2w_{x\theta}}{a}
\end{aligned}
\qquad \text{--- (4.17)}
$$

Los subíndices x,θ en los miembros derechos de las ecuaciones indican derivadas con respecto a las coordenadas de lámina x, θ.

Al considerar las deformaciones de membrana, haciendo $\varepsilon_x = e_x$, $\varepsilon_\theta = e_\theta$ y $\varepsilon_{x\theta} = e_{x\theta}$; mediante la sustitución de la ec. 3.14 en las ecs. 4.12a, 4.12b, y 4.12c, después de integrar se obtiene:

$$N_x = E_1 t\, u_x + \frac{E_\mu t}{a}(v_\theta - w) \qquad \text{--- (4.18a)}$$

$$N_\theta = E_\mu t\, u_x + \frac{E_2 t}{a}(v_\theta - w) \qquad \text{--- (4.18b)}$$

$$N_{x\theta} = Gt(\frac{u_\theta}{a} + v_x) \qquad \text{--- (4.18c)}$$

$$N_{\theta x} = Gt(\frac{u_\theta}{a} + v_x) \qquad \text{--- (4.18d)}$$

Considerando las deformaciones por flexión como $\varepsilon_x = z\, k_x$, $\varepsilon_\theta = z\, k_\theta$, y $\varepsilon_{x\theta} = z\, k_{x\theta}$; sustituyendo la ec. 2.1 en las ecs. 4.12g, 4.12h, 4.12i, después de integrar se obtiene:

$$M_x = -\frac{t^3}{12}(E_1\, w_{xx} + E_\mu \frac{w_{\theta\theta}}{a^2}) \qquad \text{--- (4.18e)}$$

$$M_\theta = -\frac{t^3}{12}(E_\mu\, w_{xx} + E_2 \frac{w_{\theta\theta}}{a^2}) \qquad \text{--- (4.18f)}$$

$$M_{x\theta} = -\frac{G\, t^3}{6}\frac{w_{x\theta}}{a} \qquad \text{--- (4.18g)}$$

$$M_{\theta x} = -\frac{G\, t^3}{6}\frac{w_{x\theta}}{a} \qquad \text{--- (4.18h)}$$

Mediante las relaciones 2.3, las ecs. 4.18 finalmente quedan:

$$N_x = D_x\, u_x + \frac{D_\mu}{a}(v_\theta - w) \qquad \text{--- (4.19a)}$$

$$N_\theta = D_\mu\, u_x + \frac{D_\theta}{a}(v_\theta - w) \qquad \text{--- (4.19b)}$$

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} = \frac{D_{x\theta}}{a}(u_\theta + a\, v_x) \qquad \text{--- (4.19c)}$$

$$M_x = B_x\, w_{xx} - \frac{B_\mu}{a^2}\, w_{\theta\theta} \qquad \text{--- (4.19d)}$$

$$M_\theta = - B_\mu w_{xx} - \frac{B_\theta}{a^2} w_{\theta\theta} \qquad \text{--- (4.19e)}$$

$$M_{x\theta} = M_{\theta x} = - \frac{B_{x\theta}}{a} w_{x\theta} \qquad \text{--- (4.19f)}$$

Las ecs. 4.19, son las fuerzas de membrana y momentos flexionantes de un elemento diferencial de lámina cilíndrica ortotrópica, en función de los desplazamientos u, v, w de la superficie media de la lámina.

Las ecuaciones de equilibrio para esta lámina se obtienen sustituyendo las ecs. 4.16 y las correspondientes derivadas de A y de B en las ecs. 4.13, éstas se reducen a las siguientes expresiones:

$$a \frac{\partial}{\partial x} N_x + \frac{\partial}{\partial \theta} N_{\theta x} + a P_x = 0$$

$$a \frac{\partial}{\partial x} N_{x\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} N_\theta - Q_\theta + a P_\theta = 0$$

$$a \frac{\partial}{\partial x} Q_x + \frac{\partial}{\partial \theta} Q_\theta + N_\theta + a P_z = 0$$

$$a \frac{\partial}{\partial x} M_x + \frac{\partial}{\partial \theta} M_{\theta x} - a Q_x = 0$$

$$a \frac{\partial}{\partial x} M_{x\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} M_\theta - a Q_\theta = 0$$

Despejando Q_x y Q_θ de las dos últimas ecuaciones y sustituyendo en las tres primeras se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} N_x + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{N_{x\theta}}{a} + P_x \qquad \text{--- (4.20a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N_{x\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{N_\theta}{a} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{M_{x\theta}}{a} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{M_\theta}{a^2} + P_\theta = 0 \qquad \text{--- (4.20b)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} M_x + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \frac{M x\theta}{a} + \frac{\partial^2}{\partial o^2} \frac{M\theta}{a^2} + \frac{N\theta}{a} + P_z = 0 \qquad \text{--- (4.20c)}$$

Las ecs. 4.20 fueron establecidas por primera vez por Flügge (ref 6); estas ecuaciones fueron difíciles de usar al intentar resolver muchos problemas prácticos, particularmente de estabilidad.

Se han propuesto ecuaciones simplificadas usando diversas aproximaciones en las condiciones de equilibrio y las relaciones geométricas de la lámina (refs 7 a 9).

La aproximación propuesta por Donnell (ref 7), es muy adecuada para el tipo de estructura que nos interesa. Originalmente, Donnell estudió las láminas cilíndricas isotrópicas, para las cuales $E_1 = E/(1-\mu^2)$, $E_2 = E/(1-\mu^2)$ y $E\mu = \mu E/(1-\mu^2)$; llevando estos valores a las ecs. 4.18 y sustituyendo en las ecs. 4.20, después de simplificar, los términos correspondientes a los momentos $M_{x\theta}$ y M_θ, en la ecuación 4.20b, resultan multiplicados por $(t/a)^2$ como se muestra a continuación:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_\theta}{a} + v_x\right) + \frac{1}{a(1-\mu)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\mu u_x + \frac{1}{a}(v_0 - w)\right] - \left(\frac{t}{a}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x}\frac{w_{x\theta}}{12}$$

$$- \frac{1}{12(1-\mu)}\left(\frac{t}{a}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\mu w_{xx} + \frac{w_{\theta\theta}}{a^2}\right] + \frac{(1+\mu)}{E\,t} P_\theta = 0 \qquad \text{--- (4.20b)}$$

Puesto que el valor $(t/a)^2$ resulta ser demasiado pequeño, Donnell ha propuesto que los términos correspondientes a los momentos $M_{x\theta}$ y M_θ en las ecs. 4.20b se pueden despreciar, como se puede ver de la ecuación anterior. Considerando la simplificación propuesta por Donnell, las ecs. 4.20 de equilibrio para la lámina cilíndrica se reducen en la forma siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} N_x + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{N_{x\theta}}{a} + P_x = 0 \quad \text{---} \quad (4.21a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N_{x\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{N_\theta}{a} + P_\theta = 0 \quad \text{---} \quad (4.21b)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} M_x + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \frac{M_{x\theta}}{a} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{M_\theta}{a^2} + \frac{N_\theta}{a} + P_z = 0 \quad \text{---} \quad (4.21c)$$

La importancia de la simplificación de Donnell radica en que se logra tener un sistema de ecuaciones que se puede resolver más fácilmente sin la introducción de errores importantes; la validez de esta hipótesis para láminas cilíndricas ortotrópicas ha sido estudiada por Marzouk (ref 2), los cuales obtuvieron el error promedio y el error máximo en las raices de la solución homogénea de las ecs. 4.21 propuestas por Donnell, comparadas con la solución exacta (ecs. 4.20), para láminas cilíndricas ortotrópicas e isotrópicas. El error introducido por la aproximación de Donnell es relativamente bajo para relaciones L/a de 1 y 2 siendo L y a la longitud y el radio del cilindro respectívamente.

Para un radio de 3.05 m, el error máximo para L/a de 1 y 2 fueron 0.82% y 1.5% respectívamente para una lámina isotrópica, y de 0.99% y 2% en una lámina ortotrópica.
Por lo tanto, la simplificación introducida por Donnell en las ecuaciones de equilibrio de una lámina cilíndrica son justificables y permiten su aplicación en los silos cilíndricos cuyos radios suelen ser hasta de 16.0 m, lo mismo que su altura.

Sustituyendo las ecs. 4.19 en las 4.21, se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio para una lámina cilíndrica ortotrópica, en función de los desplazamientos u, v, w de su superficie media.

$$a^2D_xu_{xx} + D_{x\theta}u_{\theta\theta} + a(D_\mu + D_{x\theta})v_{x\theta} - aD_\mu w_x + a^2P_x = 0 \quad \text{-- (4.22a)}$$

$$a(D_\mu + D_{x\theta})u_{x\theta} + a^2D_{x\theta}v_{xx} + D_\theta v_{\theta\theta} - D_\theta w_\theta + a^2P_\theta = 0 \quad \text{-- (4.22b)}$$

$$a^3D_\mu u_x + a^2D_\theta v_\theta - a^4B_xw_{xxxx} - 2a^2(B_\mu + B_{x\theta})w_{xx\theta\theta}$$

$$-B_\theta w_{\theta\theta\theta\theta} - a^2D_\theta w + a^4P_z \qquad = 0 \quad \text{-- (4.22c)}$$

4.8 LAMINA CONICA ISOTROPICA

Las relaciones esfuerza deformación para una lámina isotrópica ideal son:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \end{bmatrix} \quad \text{--- (4.23)}$$

Las coordenadas de lámina correspondientes serían s, la longitud a lo largo del meridiano (fig 4.6), θ. Las coordenadas rectangulares X, Y, Z, en función de las coordenadas de lámina serían:

$$X = s\ \mathrm{Sen}\alpha$$
$$Y = -r\ \mathrm{Sen}\ \theta$$
$$Z = r\ \mathrm{Cos}\ \theta$$

Donde $r = s\ \mathrm{Cos}\alpha$, por lo tanto:

$$X = s\ \mathrm{Sen}\alpha$$
$$Y = -\ s\ \mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Sen}\ \theta$$
$$Z = s\ \mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Cos}\ \theta \qquad \text{---}\ (4.24)$$

Aplicando las ecs. 4.4, 4.6, y 4.7 a las ecs. 4.24 se obtiene:

$$A = 1$$
$$B = \frac{s}{\mathrm{Sec}\alpha}$$
$$1/r_1 = 0$$
$$1/r_2 = -\ \frac{tg\alpha}{s} \qquad \text{---}\ (4.25)$$

Las deformaciones de la lámina cónica se obtienen con las ecs. 4.11 mediante la sustitución en ellas de las ecs. 4.25 y son las siguientes:

$$e_s = \bar{u}_s$$
$$e_\theta = \frac{1}{s}\ (\bar{v}_\theta \mathrm{Sec}\ \ + \bar{u} - \bar{w}\ tg\ )$$
$$e_{s\theta} = \frac{1}{s}\ (\bar{v}_s\ s + \bar{u}_\theta\ \mathrm{Sec}\alpha - \bar{v})$$
$$k_s = -\ \bar{w}_{ss}$$
$$k_\theta = -\ \frac{1}{s^2}\ (\bar{w}_s\ s + \bar{w}_{\theta\theta}\ \mathrm{Sec}^2\alpha)$$
$$k_{s\theta} = \frac{2\ \mathrm{Sec}\alpha}{s}(\frac{\bar{w}_\theta}{s} - \bar{w}_{s\theta}) \qquad \text{---}\ (4.26)$$

Los subíndices s, θ en los miembros derechos de las ecuaciones indican derivadas con respecto a las coordenadas de lámina s, θ; $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ son los desplazamientos de la superficie media de la lámina cónica.

Haciendo $\varepsilon_x = e_s$, $\varepsilon_\theta = e_\theta$ y $\varepsilon_{x\theta} = e_{s\theta}$, para la evaluación de las fuerzas de membrana y $\varepsilon_x = z\ k_s$, $\varepsilon_\theta = z\ k_\theta$ y $\varepsilon_{x\theta} = z\ k_{s\theta}$

para la determinación de los momentos flexionantes y torsionante, mediante las ecs. 4.23, 4.25, y 4.26, después de sustituir e integrar las ecs. 4.12, se obtienen las siguientes expresiones para los elementos mecánicos en función de los desplazamientos $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ de la superficie media de la lámina.

$$
\begin{aligned}
N_s &= E'\left[u_s + \frac{\mu}{s}(\bar{v}_\theta \operatorname{Sec}\alpha + \bar{u} - \bar{w}\operatorname{tg}\alpha)\right] \\
N_\theta &= E'\left[\mu\bar{u}_s + \frac{1}{s}(\bar{v}_\theta \operatorname{Sec}\alpha + \bar{u} - \bar{w}\operatorname{tg}\alpha)\right] \\
N_{s\theta} &= N_{\theta s} = \frac{(1-\mu)E'}{2}\left(\bar{v}_s - \frac{\bar{v}}{s} + \frac{\bar{u}_\theta \operatorname{Sec}\alpha}{s}\right) \\
M_s &= -D\left[\bar{w}_{ss} + \frac{\mu}{s}\left(\bar{w}_s + \frac{\bar{w}_{\theta\theta}\operatorname{Sec}^2\alpha}{s}\right)\right] \\
M_\theta &= -D\left[\mu\bar{w}_{ss} + \frac{1}{s}\left(\bar{w}_s + \frac{\bar{w}_{\theta\theta}\operatorname{Sec}^2\alpha}{s}\right)\right] \\
M_{s\theta} &= M_{\theta s} = (1-\mu)\,D\left[\frac{\operatorname{Sec}\alpha}{s}\left(\frac{\bar{w}_\theta}{s} - \bar{w}_{s\theta}\right)\right] \qquad \text{--- (4.27)}
\end{aligned}
$$

Donde: $\quad E' = \dfrac{E\ t}{(1-\mu^2)} \qquad D = \dfrac{E\ t^3}{12(1-\mu^2)}$

Similarmente al caso de la lámina cilíndrica, las ecuaciones de equilibrio para la lámina cónica se obtienen de las ecs. 4.13 después de eliminar los términos Q_x y Q_θ y de sustituir las ecs. 4.25 y 4.27, las ecuaciones de equilibrio en función de los desplazamientos $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ de la superficie media del cono, considerando la simplificación de Donnell, resultan ser las siguientes ecuaciones:

$$
s^2\bar{u}_{ss} + s\bar{u}_s + \frac{(1-\mu)\operatorname{Sec}^2\alpha}{2}\,\bar{u}_{\theta\theta} - \bar{u} + \frac{(1+\mu)\operatorname{Sec}\alpha\, s}{2}\,\bar{v}_{s\theta} - \frac{(3-\mu)\operatorname{Sec}\alpha}{2}\bar{v}_\theta
$$

$$
-\mu\operatorname{tg}\alpha\, s\bar{w}_s + \operatorname{tg}\alpha\,\bar{w} + \frac{s^2\bar{P}_s}{E'} = 0 \qquad \text{--- (4.28a)}
$$

$$\frac{(1+\mu)}{2}\text{Sec}\alpha s\bar{u}_{s\theta} + \frac{(3-\mu)}{2}\text{Sec}\alpha\bar{u}_{\theta} + \frac{(1-\mu)}{2}s^2\bar{v}_{ss} + \text{Sec}^2\alpha\bar{v}_{\theta\theta} + \frac{(1-\mu)}{2}s\bar{v}_s$$

$$- \frac{(1-\mu)}{2}\,\bar{v} - tg\alpha\,\text{Sec}\alpha\,\bar{w}_{\theta} + \frac{s^2\,\bar{p}_{\theta}}{E'} \quad = 0 \qquad \text{---} \quad (4.28b)$$

$$k\,(s^2\bar{w}_{ssss} + 2\text{Sec}^2\alpha\,\,\bar{w}_{ss\theta\theta} + \frac{\text{Sec}^4\alpha}{s^2}\,\bar{w}_{\theta\theta\theta\theta} + 2s\,\bar{w}_{sss} - \frac{2\text{Sec}^2\alpha}{s}\,\bar{w}_{s\theta\theta}$$

$$- \bar{w}_{ss} + \frac{4\text{Sec}^2\alpha}{s^2}\,\bar{w}_{\theta\theta} + \frac{\bar{w}_s}{s}) - tg\alpha\text{Sec}\alpha\,\bar{v}_{\theta} - tg\alpha\,\bar{u} - \mu\,tg\alpha s\,\bar{u}_s$$

$$+ tg^2\alpha\,\bar{w} - \frac{s^2\,\bar{p}_z}{E'} \qquad = 0 \qquad \text{---} \quad (4.28c)$$

Donde: $\quad k = \frac{t^2}{12} \quad$ y $\quad E' = \frac{Et}{(1-\mu^2)}$

Las ecuaciones de equilibrio 4.22 y 4.28, son ecuaciones diferenciales parciales dependientes de las coordenadas de lámina x,θ y s,θ respectivamente.

La dependencia sobre la variable θ se puede eliminar de esas ecuaciones, si las cargas en cada una de las direcciones en consideración y los desplazamientos $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, se expresan como desarrollos de series de Fourier del tipo siguiente:

$$\begin{aligned} P_x &= \sum P_{xn}\,(x)\ \text{Cos}\ n\theta \\ P_{\theta} &= \sum P_{\theta n}\,(x)\ \text{Sen}\ n\theta \\ P_r &= \sum P_{rn}\,(x)\ \text{Cos}\ n\theta \qquad \text{---} \quad (4.29a) \\ u &= \sum U_n\,(x)\ \text{Cos}\ n\theta \\ v &= \sum V_n\,(x)\ \text{Sen}\ n\theta \\ w &= \sum W_n\,(x)\ \text{Cos}\ n\theta \qquad \text{---} \quad (4.29b) \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en las ecs. de equilibrio 4.22 y 4.28, y mediante el cambio de variable $T_n = W_{n,xx}$, éstas se reducen a la siguiente forma:

$$a^2 D_x U_{n,xx} - n^2 D_{x\theta} U_n + na(D_{x\theta} + D_\mu) V_{n,x} - aD_\mu W_{n,x} + a^2 P_{xn} = 0 \quad \text{-- (4.22a')}$$

$$a^2 D_{x\theta} V_{n,xx} - n^2 D_\theta V_n - na(D_{x0} + D_\mu) U_{n,x} + nD_\theta W_n + a^2 P_{\theta n} = 0 \quad \text{-- (4.22b')}$$

$$T_n = W_{n,xx} \quad \text{-- (4.22c')}$$

$$a^4 B_x T_{n,xx} - 2n^2 a^2 (B_{x\theta} + B_\mu) T_n + n^4 B_\theta W_n - a^3 D_\mu U_{n,x} - a^2 n D_\theta V_n$$

$$+ a^2 D_\theta W_n - a^4 P_{rn} = 0 \quad \text{-- (4.22d')}$$

$$s^2 \bar{U}_{n,ss} + s\bar{U}_{n,s} - (\tfrac{1-\mu}{2} n^2 \sec^2\alpha + 1)\bar{U}_n + \tfrac{1+\mu}{2} ns\sec\alpha \bar{V}_{n,s}$$

$$- \tfrac{3-\mu}{2} n\sec \bar{V}_n - s\mu tg\alpha \bar{W}_{n,s} + tg\alpha \bar{W}_n + \frac{\bar{P}_{sn} s^2}{E'} = 0 \quad \text{-- (4.28a')}$$

$$\frac{s^2(1-\mu)}{2} \bar{V}_{n,ss} + \frac{s(1-\mu)}{2} \bar{V}_{n,s} - (n^2 \sec^2\alpha + \tfrac{1-\mu}{2}) \bar{V}_n - ns\left(\tfrac{1+\mu}{2}\right)\sec \bar{U}_{n,s}$$

$$-n(\tfrac{3-\mu}{2})\sec\alpha \bar{U}_n + n\sec\alpha tg\alpha \bar{W}_n + \frac{\bar{P}_{\theta n}\, s^2}{E'} = 0 \quad \text{-- (4.28b')}$$

$$\bar{T}_n = \bar{W}_{n,ss} \quad \text{-- (4.28c')}$$

$$k\left[s^2\bar{T}_{n,ss} + 2s\bar{T}_{n,s} - (1+2n^2 Sec^2\alpha)\bar{T}_n + \frac{(2n^2 Sec^2_\alpha + 1)}{s}\bar{W}_{n,s}\right.$$

$$\left.+ \frac{n^2}{s^2} Sec^2\alpha\ (n^2 Sec^2\alpha - 4)\ \bar{W}_n\right] - \mu s tg\alpha\,\bar{U}_{n,s} - tg\alpha\,\bar{U}_n - nSec\alpha tg\alpha\bar{V}_n$$

$$+ tg^2\alpha\,\bar{W}_n - \frac{\bar{P}_{rn}\ s^2}{E'} = 0 \qquad \text{--- (4.28d')}$$

Las ecs. de equilibrio 4.22' y 4.28' son ahora ecuaciones diferenciales ordinarias, y el problema espacial se ha transformado a un problema unidimensional.

4.9 CONDICIONES DE FRONTERA

Adicionalmente a las ecuaciones de equilibrio, tanto del cono como del cilindro, se deben satisfacer ciertas condiciones de frontera en el extremo superior del cono, en la unión del cono y el cilindro y en la base del cilindro.

La unión del cono y del cilindro es contínua, por lo que la pendiente será contínua en el cono y el cilindro; así, las condiciones de frontera forzadas que deben prevalecer entre los desplazamientos y pendiente del cono y el cilindro para satisfacer la compatibilidad son las siguientes:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}\ Sen\alpha + \bar{w}\ Cos\alpha \\ \dot{v} &= \bar{v} \\ w &= -\bar{u}\ Cos\alpha + \bar{w}\ Sen\alpha \\ w_{,x} &= \bar{w}_{,s} \end{aligned} \qquad \text{--- (4.30)}$$

Sustituyendo las ecs. 4.29 en las 4.30 se obtiene:

$$
\begin{aligned}
U_n &= \bar{U}_n \operatorname{Sen}\alpha + \bar{W}_n \operatorname{Cos}\alpha \\
V_n &= \bar{V}_n \\
W_n &= -\bar{U}_n \operatorname{Cos}\alpha + \bar{W}_n \operatorname{Sen}\alpha \\
W_{,x} &= \bar{W}_{n,s}
\end{aligned} \qquad --- \quad (4.31)
$$

Además de las condiciones de frontera forzadas anteriores, existen cuatro condiciones de frontera naturales en la unión que deben satisfacerse. Estas se obtienen usando el principio de energía potencial mínima, el cual establece que cuando la energía de deformación de un cuerpo es mínima, la configuración de deformación corresponde a la de equilibrio.
La energía de deformación total en la unión cono - cilindro, es la combinación de la energía de deformación de membrana y de flexión tanto del cono como del cilindro. El diferencial de energía de deformación de una placa plana es:

$$dU = \frac{1}{2}\,(\sigma_x\,\varepsilon_x + \sigma_y\,\varepsilon_y + \tau\gamma)\,dx\;dy\;dz \quad -- \quad (4.32)$$

Para una lámina isotrópica curvilínea, la integral de la ecuación anterior conduce a la siguiente expresión (ref 5).

$$U = \frac{E\,t}{2(1-\mu^2)}\iint \left[e_x^{\,2} + e_y^{\,2} + 2\mu\, e_x e_y + \frac{1}{2}\,(1-\mu^2)\; e_{xy}^{\,2}\right] AB\,dx\;dy$$

$$+ \frac{E\,t^3}{24(1-\mu^2)}\iint \left[k_x^{\,2} + k_y^{\,2} + 2\mu\, k_x k_y + \frac{1}{2}\,(1-\mu^2) k_{xy}^{\,2}\right] AB\;dx\;dy \quad -- \quad (4.33)$$

Para una lámina ortotrópica curvilínea, la integral de la ec. 4.32 conduce a:

$$U = \frac{1}{2}\iint \left[D_x e_x^{\,2} + D_\theta e_y^{\,2} + 2D_\mu e_x e_y + D_{x\theta} e_{xy}^{\,2}\right] \;AB\;dx\;dy$$

$$+ \frac{1}{2}\iint \left[B_x k_x^{\,2} + B_\theta k_y^{\,2} + 2B_\mu k_x k_y + 2B_{x\theta} k_{xy}^{\,2}\right] \;AB\;dx\;dy \quad -- \quad (4.34)$$

En las ecuaciones anteriores x,y son coordenadas de lámina.

La energía de deformación para la lámina cónica en función de los desplazamientos $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ se puede obtener sustituyendo las ecs. 4.25 y 4.26 en las ecs. 4.33, con lo que se obtiene:

$$U_{cono} = \frac{EtCos\alpha}{2(1-\mu^2)}\int_0^{asec}\int_0^{2\pi}\Big[s\bar{u}_s{}^2 + \frac{1}{s}\,(Sec\alpha\bar{v}_\theta + \bar{u} - tg\alpha\,\bar{w})^2$$

$$+ 2\mu\bar{u}_s(Sec\alpha\,\bar{v}_\theta + \bar{u} - tg\alpha\,\bar{w}) + \frac{1-\mu}{2s}(s\bar{v}_s + Sec\alpha\,\bar{u}_\theta - \bar{v})\Big]ds\;d\theta$$

$$+ \frac{Et^3Cos\alpha}{24(1-\mu^2)}\int_0^{aSec}\int_0^{2\pi}\Big[s\bar{w}_{ss}{}^2 + \frac{1}{s^3}\,(s\bar{w}_s + Sec^2\alpha\,\bar{w}_{\theta\theta})^2$$

$$+ \frac{2\mu}{s}\,\bar{w}_{ss}(s\bar{w}_s + Sec^2\alpha\,\bar{w}_{\theta\theta}) + \frac{2(1-\mu)}{s}\,(\bar{w}_{s\theta} - \frac{1}{s}\,\bar{w}_\theta)^2Sec^2\alpha\Big]ds\;d\theta \quad --- \; (4.35)$$

La energía de deformación para la lámina cilíndrica ortotrópica en función de los desplazamientos u, v, w, se puede obtener sustituyendo las ecs 4.16 y 4.17 en la 4.34 obteniendose la siguiente expresión:

$$U_{cil} = \frac{a}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\Big[D_xu_x{}^2 + \frac{D_\theta}{a^2}\,(v_\theta - w)^2 + \frac{2D\mu}{a}\,u_x(v_\theta - w)$$

$$D_{x\theta}(\frac{u_\theta}{a} + v_x)^2\Big]\,dx\;d\theta + \frac{a}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\Big[B_xw_{xx}{}^2 + \frac{B_\theta}{a^4}\,w_{\theta\theta}{}^2$$

$$+ \frac{2B\mu}{a^2}\,w_{xx}w_{\theta\theta} + \frac{2B_{x\theta}}{a^2}\,w_{x\theta}{}^2\Big]\;dx\;d0 \quad --- \; (4.36)$$

La energía de deformación total en la unión cono - anillo es:

$$U = U_{cono} + U_{cil} \qquad \text{--- (4.37)}$$

Una función obtiene un valor estacionario (mínimo o máximo), si su primera variación es cero; la primera variación $\delta U = \delta U_{cono} + \delta U_{cil}$ para la energía de deformación se determina con el cálculo de variaciones (ref 5, 10), después de integrar por partes se obtienen estas expresiones:

$$\delta U_{cono} = \frac{EtCos\alpha}{(1-\mu^2)} \int_0^{2\pi} \left[aSec\alpha\, \bar{u}_s + \mu(Sec\alpha\, \bar{v}_\theta + \bar{u} - tg\alpha\, \bar{w}) \right] \delta u$$

$$+ \left[\frac{1-\mu}{2}(Sec\alpha\, \bar{u}_\theta + aSec\alpha\, \bar{v}_s - \bar{v}) \right] \delta v + \frac{Et^3 Cos\alpha}{12(1-\mu^2)} \left[\frac{Cos\alpha\, \bar{w}_s}{a} \right.$$

$$\left. - \bar{w}_{ss} - aSec\alpha\, \bar{w}_{sss} + \frac{(3-\mu)\bar{w}_{\theta\theta}}{a^2} - \frac{(2-\mu)Sec\alpha\, \bar{w}_{s\theta\theta}}{a} \right] \delta w$$

$$+ \frac{Et^3\ Cos\alpha}{12(1-\mu^2)} \left[aSec\alpha\, \bar{w}_{ss} + \mu\, \bar{w}_s + \frac{\mu Sec\alpha\, \bar{w}_{\theta\theta}}{a} \right] \delta w_s\ d\theta \qquad \text{--- (4.38)}$$

$$U_{cil} = a \int_0^{2\pi} \left\{ \left[D_x u_x + \frac{D\mu}{a}(v_\theta - w) \right] \delta u + \left[D_{x\theta}\left(\frac{u_\theta}{a} + v_x\right) \right] \delta v \right.$$

$$\left. - \left[B_x w_{xxx} + \frac{(B_\mu + 2B_{x\theta})}{a^2} w_{x\theta\theta} \right] \delta w + \left[B_x w_{xx} + \frac{B\mu}{a^2} w_{\theta\theta}\ \ \delta w_x \right] \right\} d\theta \qquad \text{--- (4.39)}$$

Las variaciones de los desplazamientos u, v, w, del cono y del cilindro, deben satisfacer las condiciones de frontera forzadas en la unión, por lo tanto están relacionadas con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \delta u &= \delta \bar{u}\ Sen\alpha + \delta \bar{w}\ Cos\alpha \\ \delta v &= \delta \bar{v} \\ \delta w &= -\delta \bar{u}\ Cos\alpha + \delta \bar{w}\ Sen\alpha \\ \delta w_{,x} &= \delta \bar{w}_{,s} \end{aligned} \qquad \text{--- (4.40)}$$

Sustituyendo las ecs 4.40 en la 4.39 y aplicando el principio de energía potencial mínima ($\delta U = 0$); la primera variación de la energía de deformación debe anularse para funciones arbitrarias $\delta\bar{u}$, $\delta\bar{v}$, $\delta\bar{w}$ y $\delta\bar{w}_{,s}$; esto conduce a las siguientes cuatro ecuaciones de frontera natural, en la unión cono - cilindro

Para $\delta\bar{u} = 0$

$$\left[aD_x u_x + D_\mu\,(v_\theta - w)\right] \text{Sen}\alpha + \left[aB_x w_{xxx} + \frac{B_\mu + 2B_{x\theta}}{a}\, w_{x\theta\theta}\right] \text{Cos}\alpha$$

$$= \frac{Et\ \text{Cos}\alpha}{(1-\mu^2)} \left[a\text{Sec}\alpha\,\bar{u}_s + (\text{Sec}\alpha\,\bar{v}_\theta + \bar{u} - \text{tg}\alpha\,\bar{w})\right] \quad \text{---} \quad (4.41a)$$

Para $\delta\bar{v} = 0$

$$D_{x0}(u_\theta + av_x) = \frac{Et\text{Cos}\alpha}{(1-\mu^2)} \left[\frac{(1-\mu)}{2}(\text{Sec}\alpha\,\bar{u}_\theta + a\text{Sec}\alpha\,\bar{v}_s - \bar{v})\right] \quad \text{--} \quad (4.41b)$$

Para $\delta\bar{w} = 0$

$$\left[aD_x u_x + D_\mu(v_\theta - w)\right] \text{Cos}\alpha - \left[aB_x w_{xxx} + \frac{B_\mu + 2B_{x\theta}}{a}\, w_{x\theta\theta}\right] \text{Sen}\alpha$$

$$= \frac{Et^3\text{Cos}\alpha}{12(1-\mu^2)} \left[\frac{\text{Cos}\alpha}{a}\,\bar{w}_s - w_{ss} - a\text{Sec}\alpha\,\bar{w}_{sss} + \frac{(3-\mu)}{a^2}\,\bar{w}_{\theta\theta}\right.$$

$$\left. - \frac{(2-\mu)\text{Sec}\alpha}{a}\,\bar{w}_{s\theta\theta}\right] \quad \text{---} \quad (4.41c)$$

Para $\delta\bar{w}_s = 0$

$$aB_x w_{xx} + \frac{B_\mu}{a} w_{\theta\theta} = \frac{Et^3 \cos\alpha}{12(1-\mu^2)} \left[a\sec\alpha\, \bar{w}_{ss} + \mu \bar{w}_s + \frac{\mu \sec\alpha}{a} \bar{w}_{\theta\theta} \right] \quad --- \quad (4.41d)$$

La dependencia sobre la variable θ puede eliminarse de las ecs. 4.41 mediante la sustitución de las ecs 4.29; finalmente, las condiciones de frontera natural quedan de la siguiente forma:

$$aD_x \operatorname{Sen}\alpha\, U_{n,x} + D_\mu \operatorname{Sen}\alpha\, nV_n - D_\mu \operatorname{Sen}\alpha\, W_n + aB_x \cos\alpha\, T_{n,x}$$

$$- \cos \frac{(B_\mu + 2B_{x\theta})n^2 W_{n,x}}{a} = \frac{Et}{1-\mu^2}(a\bar{U}_{n,s} + \mu \cos\alpha\, \bar{U}_n + n\bar{V}_n - \operatorname{Sen}\alpha\, \bar{W}_n) \quad --- \quad (4.42a)$$

$$- D_{x\theta} nU_n + aD_{x\theta} V_{n,x} = \frac{E\ t}{2(1+\ )} (- n\bar{U}_n + a\bar{V}_{n,s} - \cos\alpha \bar{V}_n) \quad --- \quad (4.42b)$$

$$aD_x \cos\alpha\, U_{n,x} + D_\mu \cos\alpha\, nV_n - D_\mu \cos\alpha\, W_n - aB_x \operatorname{Sen}\alpha\, T_{n,x}$$

$$+ \frac{(B_\mu + 2B_{x\theta})\operatorname{Sen}\alpha\, n^2 W_{n,x}}{a} = \frac{E\ t^3}{12(1-\mu^2)} \left[- \cos\alpha\, \bar{T}_n - a\bar{T}_{n,s} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a}(\cos^2\alpha + (2-\mu)n^2)\, \bar{W}_{n,s} - \frac{(3-\mu)}{a^2} \cos\alpha\, n^2\, \bar{W}_n \right] \quad --- \quad (4.42c)$$

$$aB_x T_n - \frac{B_\mu n^2}{a} W_n = \frac{E\ t^3}{12(1-\mu^2)} (a\bar{T}_n + \mu \cos\alpha\, \bar{W}_{n,s} - \frac{\mu n^2}{a} \bar{W}_n) \quad --- \quad (4.42d)$$

Similarmente, en el extremo superior del cono, existen cuatro condiciones de frontera natural para la unión cono-anillo que deben satisfacerse; la energía de deformación para un anillo de área A e inercia ${}_aI$ considerando deformaciones axiales y por flexión es la siguiente:

$$U_{anillo} = \frac{E_a A r}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{{}_a v_\theta - {}_a w}{r}\right)^2 d\theta + \frac{E_a I r}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{{}_a v_\theta \pm {}_a w_{\theta\theta}}{r^2}\right)^2 d\theta \quad \text{-- (4.43)}$$

La energía de deformación total en la unión cono - anillo es:

$$U = U_{anillo} + U_{cono} \quad \text{-- (4.44)}$$

Los desplazamientos del cono y del anillo en la unión, están relacionados mediante las siguientes condiciones de continuidad (fig 4.7).

$$\begin{aligned} {}_a w &= -\bar{u}\,\mathrm{Cos}\alpha + \bar{w}\,\mathrm{Sen}\alpha \\ {}_a v &= \bar{v} \end{aligned} \quad \text{-- (4.45)}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ec 4.43, después de integrar por partes la primera variación de la energía de deformación (ec 4.44), se obtiene la siguiente expresión:

$$\delta U = \frac{E\,{}_a A}{S_T \mathrm{Cos}\alpha}\int_0^{2\pi}\left\{\left[\bar{v}_\theta + \mathrm{Cos}\alpha\,\bar{u} - \mathrm{Sen}\alpha\,\bar{w}\right](\delta u \mathrm{Cos}\alpha + \delta\bar{v}_\theta - \delta\bar{w}\mathrm{Sen}\alpha)\right\}d\theta$$

$$+ \frac{E\,{}_a I}{(S_T\mathrm{Cos}\alpha)^3}\int_0^{2\pi}\left\{\left[\bar{v}_\theta - \mathrm{Cos}\alpha\,\bar{u}_{\theta\theta} + \mathrm{Sen}\alpha\,\bar{w}_{\theta\theta}\right](\delta\bar{v}_\theta - \right.$$

$$\left.\delta\bar{u}_{\theta\theta}\mathrm{Cos}\alpha + \delta\bar{w}_{\theta\theta}\mathrm{Sen}\alpha)\right\}d\theta - \frac{Et\mathrm{Cos}\alpha}{1-\mu^2}\int_0^{2\pi}\left\{\left[S_T\bar{u}_s + \mu(\mathrm{Sec}\alpha\,\bar{v}_\theta\right.\right.$$

$$\left.\left. + \bar{u} - \mathrm{tg}\alpha\,\bar{w})\right]\delta\bar{u} + \left[\frac{1-\mu}{2}(\mathrm{Sec}\alpha\,\bar{u}_\theta + S_T\bar{v}_s - \bar{v})\right]\delta v\right\}d\theta$$

$$+ \frac{Et^3\mathrm{Cos}\alpha}{12(1-\mu^2)}\int_0^{2\pi}\left\{\left[-S_T\bar{w}_{sss} - \bar{w}_{ss} + \frac{\bar{w}_s}{S_T} + \frac{(3-\mu)\mathrm{Sec}^2\alpha}{S_T{}^2}\bar{w}_{\theta\theta}\right.\right.$$

$$- \frac{(2-\mu)\mathrm{Sec}^2\alpha}{S_T}\ \bar{w}_{s\theta\theta}\Bigg]\ \delta\bar{w}\ +\ \left[S_T\bar{w}_{ss} + \mu\,\bar{w}_s + \frac{\mu\,\mathrm{Sec}^2\alpha}{S_T}\ \bar{w}_{\theta\theta}\right]\delta w_s\Bigg\}\ d\theta \qquad \text{---}\ (4.45)$$

Aplicando el principio de energía potencial mínima a la ec 4.45 δU se anulará para funciones arbitrarias $\delta\bar{u}$, $\delta\bar{v}$, $\delta\bar{w}$, y $\delta\bar{w}_s$.

Así, las condiciones de frontera en el extremo superior del cono resultan ser:

$$\left(\frac{\mu t}{S_T(1-\mu^2)} - \frac{a^A}{S_T^{\,2}}\right)\bar{u} + \frac{t}{1-\mu^2}\ \bar{u}_s + \left(\frac{\mu t}{S_T(1-\mu^2)} - \frac{a^A}{S_T^{\,2}}\right)\frac{\bar{v}_\theta}{\mathrm{Cos}\alpha}$$

$$- \left(\frac{\mu t}{S_T(1-\mu^2)} - \frac{a^A}{S_T^{\,2}}\right)\mathrm{tg}\alpha\,\bar{w} = 0 \qquad \text{---}\ (4.46a)$$

$$S_T\mathrm{Sec}\alpha\,\bar{u}_\theta + \bar{v}_s - \frac{\bar{v}}{S_T} = 0 \qquad \text{---}\ (4.46b)$$

$$\bar{w}_{ss} + \frac{\mu}{S_T}\ \bar{w}_s + \frac{\mu\,\mathrm{Sec}^2\alpha}{S_T^{\,2}}\ \bar{w}_{\theta\theta} = 0 \qquad \text{---}\ (4.46c)$$

$$- \frac{a^A}{S_T^{\,2}}\ \mathrm{tg}\alpha\,\bar{u} - \frac{a^A\ \mathrm{tg}\alpha}{S_T^{\,2}\mathrm{Cos}\alpha}\ \bar{v}_\theta + \frac{a^A\ \mathrm{tg}^2\alpha}{S_T^{\,2}}\ \bar{w} + \frac{t^3}{12(1-\mu^2)}\Bigg[\bar{w}_{sss} + \frac{1}{S_T}\ \bar{w}_{ss}$$

$$+ \frac{(2-\mu)\mathrm{Sec}^2\alpha}{S_T^{\,2}}\ \bar{w}_{s\theta\theta} - \frac{(3-\mu)\mathrm{Sec}^2\alpha}{S_T^{\,3}}\ \bar{w}_{\theta\theta} - \frac{\bar{w}_s}{S_T^{\,2}}\Bigg] = 0 \quad \text{--}\ (4.46d)$$

Sustituyendo las ecs 4.29 en las 4.46, las condiciones de frontera en el extremo superior del cono quedan como sigue:

$$\left(\frac{\mu t}{S_T(1-\mu^2)} - \frac{a^A}{S_T^2}\right)\bar{U}_n + \frac{t}{(1-\mu^2)}\bar{U}_{n,s} + n\mathrm{Sec}\alpha\left(\frac{\mu t}{S_T(1-\mu^2)} - \frac{a^A}{S_T^2}\right)\bar{V}_n$$

$$-\left(\frac{\mu t}{S_T(1-\mu^2)} - \frac{a^A}{S_T^2}\right)\mathrm{tg}\alpha\,\bar{W}_n = 0 \qquad \text{---} \quad (4.47a)$$

$$-\frac{\mathrm{Sec}\alpha n}{S_T}\bar{U}_n + \bar{V}_{n,s} - \frac{\bar{V}_n}{S_T} = 0 \qquad \text{---} \quad (4.47b)$$

$$\bar{T}_n + \frac{\mu}{S_T}\bar{W}_{n,s} - \frac{\mu\,\mathrm{Sec}^2\alpha\, n^2}{S_T^2}\bar{W}_n = 0 \qquad \text{---} \quad (4.47c)$$

$$-\frac{a^A\,\mathrm{tg}\alpha}{S_T^2}\bar{U}_n - \frac{a^A\,\mathrm{tg}\alpha\mathrm{Sec}\alpha}{S_T^2}n\bar{V}_n + \frac{t^3}{12(1-\mu^2)}\left[\bar{T}_{n,s} + \frac{\bar{T}_n}{S_T}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2-\mu}{S_T^2}\mathrm{Sec}^2\alpha\, n^2 + \frac{1}{S_T^2}\right)\bar{W}_{n,s} + \left(\frac{3-\mu}{S_T^3}\mathrm{Sec}^2\alpha\, n^2\right)\bar{W}_n\right] + \frac{a^A\,\mathrm{tg}^2\alpha}{S_T^2}\bar{W}_n = 0$$

$$\text{---} \quad (4.47d)$$

Las condiciones de frontera en la base del cilindro corresponden a suponer una articulación en todo el perímetro, ya que las características de sujeción de la lámina permite el libre giro de éstas, por lo tanto, las condiciones de frontera en la base del cilindro serán:

$$u = 0 \qquad v = 0 \qquad w = 0 \qquad M_x = 0$$

Mediante las ecs 4.29, se transforman a:

$$U_n = 0 \qquad V_n = 0 \qquad W_n = 0 \qquad T_n = 0 \qquad \text{---} \quad (4.48)$$

4.10 SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de equilibrio 4.22' y

4.28' se deben resolver conjuntamente con las 16 condiciones de frontera correspondientes a las ecs 4.31, 4.42, 4.47, y 4.48.

El método numérico empleado en la solución de las ecuaciones es un procedimiento de partición, con aproximación mediante un polinomio de tercer grado (ref 11). El método consiste en dividir en "n" partes al intervalo cerrado [a,b] en estudio del dominio de la función. La función "y'(fig 4.8), se determina con la siguiente expresión:

$$y = \{1, x, x^2, x^3\}\left[C_j\right]\{Y_j'\} \qquad \text{---} \quad (4.49)$$

En donde:

$$\{Y_j'\} = \begin{bmatrix} y_{j-1} \\ y_{j-1,x} \\ y_j \\ y_{j,x} \end{bmatrix}$$

$$\left[C_j\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \dfrac{x_j(x_j-3x_{j-1})}{(x_j-x_{j-1})^3} & -\dfrac{x_{j-1}x^2}{(x_j-x_{j-1})^2} & \dfrac{x_{j-1}^2(x_{j-1}-3x_j)}{(x_{j-1}-x_j)^3} & -\dfrac{x_j x_{j-1}^2}{(x_{j-1}-x_j)^2} \\ \hline \dfrac{6x_{j-1}x_j}{(x_j-x_{j-1})^3} & \dfrac{x_j(2x_{j-1}+x_j)}{(x_j-x_{j-1})^2} & \dfrac{6x_j x_{j-1}}{(x_{j-1}-x_j)^3} & \dfrac{x_{j-1}(2x_j+x_{j-1})}{(x_{j-1}-x_j)^2} \\ \hline -\dfrac{3(x_{j-1}+x_j)}{(x_j-x_{j-1})^3} & -\dfrac{(x_{j-1}+2x_j)}{(x_j-x_{j-1})^2} & -\dfrac{3(x_j+x_{j-1})}{(x_{j-1}-x_j)^3} & \dfrac{-(x_j+2x_{j-1})}{(x_{j-1}-x_j)^2} \\ \hline \dfrac{2}{(x_j-x_{j-1})^3} & \dfrac{1}{(x_{j-1}-x_j)^3} & \dfrac{2}{(x_{j-1}-x_j)^3} & \dfrac{1}{(x_{j-1}-x_j)^2} \end{array}\right]$$

Cuando la partición del intervalo $[a,b]$ se especifica, la matriz $[C_j]$ se determina exclusivamente con los valores de las coordenadas de los extremos del subintervalo j, esto es x_j, x_{j-1}; si se conoce el vector $\{Y_j\}$ del subintervalo, es decir el valor de la función y su derivada en los extremos del subintervalo j, la función se puede determinar en cualquier punto del subintervalo mediante la ec 4.49. La aproximación nos permite resolver una ecuación diferencial de segundo orden del tipo:

$$L\ (y) = f\ (x) \qquad \text{---}\ (4.50)$$

Si L es un operador diferencial de segundo orden, la ec 4.49 será una solución con aproximación de un polinomio cúbico en el intervalo cerrado $[a,b]$, particionado en n partes. La solución aproximada sería la siguiente expresión:

$$L(y) = \{L(1),\ L(x),\ L(x^2),\ L(x^3)\}\ [C_j]\ \{Y_j'\} \ = f(x) + e(x) \qquad \text{---}\ (4.51)$$

Para el subintervalo $x_{j-1} \angle x \angle x_j$

En esta ecuación $e(x)$, es el error resultante de la aproximación; ya que se emplea un polinomio cúbico, cada intervalo $(x_{j-1},\ x_j)$ se divide tambien en dos partes por su punto medio ξ_j y se considera la integral del error nula en cada subintervalo. De esta manera , cada una de las "n" partes del intervalo $[a,b]$, da dos ecuaciones con un total de "2n" ecuaciones.

Para el intervalo $(x_{j-1},\ \xi_j)$ se tendría:

$$\left[\int_{x_{j-1}}^{\xi_j} L(1)dx,\ \int_{x_{j-1}}^{\xi_j} L(x)dx,\ \int_{x_{j-1}}^{\xi_j} L(x^2)dx,\ \int_{x_{j-1}}^{\xi_j} L(x^3)dx\right] [C_j]\{Y_j\}$$

$$= \int_{x_{j-1}}^{\xi_j} f(x)dx \qquad \text{---}\ (4.52)$$

Con una ecuación similar para el intervalo (ξ_j, x_j).

Si contamos con dos condiciones de frontera, se plantean 2n+2 ecuaciones algebraicas lineales para determinar las 2n+2 incognitas (y_j, y_{jx}) en el intervalo $[a,b]$.

Una ecuación diferencial de cuarto orden puede ser transformada a dos ecuaciones de segundo orden mediante el cambio de variable $T = y_{xx}$, y la aproximación del método del polinomio se puede emplear para resolver una ecuación de cuarto orden.

Las ecuaciones de equilibrio de la lámina cónica y la cilíndrica, forman un sistema de ocho ecuaciones diferenciales de segundo orden con las funciones desplazamientos incognitas U, V, W, y $T = W_{xx}$. Para el cilindro estas funciones se aproximan mediante los polinomios cúbicos en x siguientes:

$$
\begin{aligned}
U &= \{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}[C_j]\{U_j'\} \\
V &= \{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}[C_j]\{V_j'\} \\
W &= \{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}[C_j]\{W_j'\} \\
T &= \{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}[C_j]\{T_j'\}
\end{aligned}
\qquad \text{--- (4.53)}
$$

En donde:

$$
\{U_j'\} = \begin{bmatrix} U_{j-1} \\ U_{j-1,x} \\ U_j \\ U_{j,x} \end{bmatrix} \qquad \text{--- (4.54)}
$$

Con significado similar para $\{V_j'\}$, $\{W_j'\}$ y $\{T_j'\}$.

Para las funciones desplazamientos incognitas en el cono $\bar{U}$, $\bar{V}$,

$\bar{W}$, y $\bar{T} = \bar{W}_{ss}$, se aproximan con polinomios cúbicos en s, en forma similar a las funciones desplazamientos del cilindro.

$$\bar{U} = \{1,\ s,\ s\ ,\ s\}\ \left[C_j\right] \{U'_j\}$$
$$\bar{V} = \{1,\ s,\ s\ ,\ s\}\ \left[C_j\right] \{V'_j\}$$
$$\bar{W} = \{1,\ s,\ s\ ,\ s\}\ \left[C_j\right] \{W'_j\}$$
$$\bar{T} = \{1,\ s,\ s\ ,\ s\}\ \left[C_j\right] \{T'_j\} \qquad \text{---} \quad (4.55)$$

En este análisis, la generatriz del cono se divide en 12 intervalos con 13 nudos y la altura del cilindro en 24 intervalos con 25 nudos, cada uno de esos intervalos se subdivide por su punto medio.

Las cuatro ecuaciones de equilibrio para el cilindro (4.22') y las correspondientes del cono (4.28') se plantean dos veces en cada intervalo generandose 192 y 96 ecuaciones algebraicas respectivamente.

En combinación con las 16 condiciones de frontera (ecs 4.31, 4.32, 4.47 y 4.48), se obtiene un sistema de 304 ecuaciones algebraicas lineales para el mismo número de incognitas correspondientes a los valores de U, V, W, T y sus derivadas en cada nudo.

En cada una de las ecuaciones, intervienen exclusivamente 16 de las incognitas; la matriz de coeficientes del sistema presenta un ancho de banda de 23, por lo que el trabajo numérico para la solución se reduce considerablemente.

Las ecuaciones de equilibrio 4.22 y 4.28, fueron deducidas para carga asimétrica. Para el caso particular de carga axisimétrica, los esfuerzos y desplazamientos son independientes de la variable θ y las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio en función de desplazamientos, se reducen a ecuaciones diferenciales ordinarias con derivadas en x y en s para el cilindro y el cono respectivamente. También para este caso, la función desplazamiento v y $\bar{v}$ en la dirección circunferencial es nula; debido a esto, las 8 ecuaciones diferenciales de equilibrio de lámina se reducen a 6 y las 16 condiciones de frontera se reducen a 12; también, las funciones desplazamientos incognitas ahora serán exclusivamente U, W, T y sus derivadas en cada nudo.

Para el caso de carga axisimétrico, resulta por lo tanto, un sistema de 228 ecuaciones algebraicas, cuyo ancho de banda de la matriz de coeficientes es de 17. La solución de los sistemas de ecuaciones involucrados se realizó con el método de eliminación de Gauss, considerando el ancho de banda de la matriz de coeficientes.

Al considerar la acción del viento, la presión que ejerce sobre la superficie del silo se obtuvo mediante un desarrollo de serie de Fourier considerando 12 términos de la serie, variando n de cero a once. El término cero de la serie corresponde a la componente media de la acción del viento.

Una vez obtenidas las soluciones para los doce sistemas de ecuaciones algebraicas, los desplazamientos u, v, y w en cualquier punto de la superficie, se pueden determinar fácilmente con las ecs 4.29b, particularizadas para el presente caso en que se consideran doce términos de la serie.

Los elementos mecánicos para el cilindro y para el cono (ecs 4.19 y 4.27), en función de las ecs 4.29b quedan de la forma siguiente.

$$N_x = \sum_{n=0}^{n=11} \left[D_x U_{n,x} + \frac{D\mu}{a} (nV_n - W_n) \right] \text{Cos } n\theta$$

$$N_\theta = \sum_{n=\theta}^{n=11} \left[D_\mu U_{n,x} + \frac{D\theta}{a} (nV_n - W_n) \right] \text{Cos } n\theta$$

$$N_{x\theta} = \frac{D_{x\theta}}{a} \sum_{n=0}^{n=11} \left[-nU_n + aV_{n,x} \right] \text{Sen } n\theta$$

$$M_x = \sum_{n=0}^{n=11} \left[- B_x T_n + \frac{B\, n^2}{a^2} W_n \right] \text{Cos } n\theta$$

$$M_\theta = \sum_{n=0}^{n=11} \left[\frac{B_\theta n2}{a^2} W_n - B_\mu T_n \right] \text{Cos } n\theta$$

$$M_{x\theta} = \frac{B_{x\theta}}{a} \sum_{n=0}^{n=11} \left[n\, W_{n,x} \right] \text{Sen } n\theta \qquad \text{---} \quad (4.19')$$

$$N_s = E' \sum_{n=0}^{n=11} \left[\bar{U}_{n,s} + \frac{\mu}{s} (n\text{Sec}\alpha\, \bar{V}_n + \bar{U}_n - tg\alpha \bar{W}_n) \right] \text{Cos } n\theta$$

$$N_\theta = E' \sum_{n=0}^{n=11} \left[\mu \bar{U}_{n,s} + \frac{1}{s} (n\text{Sec}\alpha\, \bar{V}_n + \bar{U}_n - tg\alpha \bar{W}_n) \right] \text{Cos } n\theta$$

$$N_{s\theta} = \frac{E'(1-\mu)}{2} \sum_{n=0}^{n=11} \left[\bar{V}_{n,s} - \frac{1}{s} (\bar{V}_n + n\text{Sec}\alpha \bar{U}_n) \right] \text{Sen } n\theta$$

$$M_s = - D \sum_{n=0}^{n=11} \left[\bar{T}_n + \frac{\mu}{s} (\bar{W}_{n,s} - \frac{n^2 \text{Sec}^2\alpha}{s} \bar{W}_n) \right] \text{Cos } n\theta$$

$$M_\theta = - D \sum_{n=0}^{n=11} \left[\mu \bar{T}_n + \frac{1}{s} (\bar{W}_{n,s} - \frac{n^2 \text{Sec}^2\alpha}{s} \bar{W}_n) \right] \text{Cos } n\theta$$

$$M_{s0} = \frac{D(1-\mu)\text{Sec}\alpha}{s} \sum_{n=0}^{n=11} - \left[\frac{\bar{W}_n}{s} + \bar{W}_{n,s} \right] n\text{Sen } n\theta \qquad \text{---} \quad (4.27')$$

Donde: $E' = \frac{E\ t}{(1-\mu^2)}$ $D = \frac{E\ t^3}{12(1-\mu^2)}$

En forma similar, los elementos mecánicos en cualquier punto de la superficie del silo se pueden determinar en forma sencilla, una vez que sean conocidas las soluciones de los doce sistemas de ecuaciones algebraicas planteadas, como se puede ver de las ecuaciones anteriores.

5. SOLUCION NUMERICA DEL PROBLEMA

5.1 ESTRUCTURACION DEL PROGRAMA

Se elaboró un programa para ordenador digital en lenguaje Fortran, para la solución de las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de frontera planteadas en el capítulo anterior.

Todo el conjunto de datos involucrados en la solución del problema se lee en formato libre (apéndice B) y son los siguientes:

a) Características geométricas del silo.
b) Propiedades geométricas de la lámina corrugada.
c) Espesor de la lámina del cono.
d) Velocidad de diseño del viento.
e) Coeficientes de presión en el cilindro.
f) Coeficientes de presión en el cono.

El programa se estructuró por medio de un conjunto de subrutinas independientes cuyo contenido es el siguiente:

La primera subrutina calcula los doce coeficientes de la serie de Fourier que representa la variación de cada distribución de presión; una para el cuerpo cilíndrico y trece para la tapa cónica.

La siguiente subrutina obtiene todas las constantes involucradas en las ecuaciones de equilibrio y de frontera, que no dependen de "n" o de la coordenada "s" del cono. A continuación se determina para cada intervalo, el producto de la integral del polinomio cúbico de aproximación por la matriz $\left[C_j'\right]$ del intervalo, para la función y sus primeras dos derivadas con las expresiones siguientes:

$$y = \left\{ \int_{xi}^{xs} dx, \quad \int_{xi}^{xs} x\, dx, \quad \int_{xi}^{xs} x^2\, dx, \quad \int_{xi}^{xs} x^3\, dx \right\} \left[C_j'\right] \quad \text{--- (5.1)}$$

$$y' = \left\{ 0, \quad \int_{xi}^{xs} dx, \quad \int_{xi}^{xs} 2x\, dx, \quad \int_{xi}^{xs} 3x^2\, dx \right\} \left[C_j'\right] \quad \text{--- (5.2)}$$

$$y'' = \left\{ 0, \quad 0, \quad \int_{xi}^{xs} 2\, dx, \quad \int_{xi}^{xs} 6x\, dx \right\} \left[C_j'\right] \quad \text{--- (5.3)}$$

En donde xi y xs son las coordenadas inferior y superior del subintervalo en donde se lleva a cabo la integración. Estos vectores se calculan dos veces en cada intervalo puesto que se ha divido en dos cada uno de ellos por su punto medio.

A continuación se forma la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones así como el correspondiente vector de cargas y se resuelve el sistema de ecuaciones por el método de eliminación de Gauss, ésto se realizará para valores de "n" de cero a once correspondientes a los doce términos de la serie de Fourier en consideración. El orden de las variables para evitar

singularidad de la matriz de coeficientes es U', V', T, T', U, V, W, y W' en cada nudo, se formó directamente la matriz de coeficientes en banda, exclusivamente.
Una vez resueltos los doce sistemas de ecuaciones, la última subrutina calcula los desplazamientos totales y elementos mecánicos en cada nudo en estudio tanto del cono como del cilindro a cada 15° a partir de 0° hasta 180°. Los pasos anteriores se muestran esquemáticamente en la fig 5.1

6. RESULTADOS OBTENIDOS

6.1 ANALISIS DE UN SILO

Se ha realizado el análisis tanto por peso propio como por fuerzas de viento, de un tamaño de silo de construcción común.

Las dimensiones se muestran en la fig 6.1, siendo su diámetro de 32.0 m y su altura de 20.89 m. La generatriz de la tapa cónica tiene una inclinación de 30° y el diámetro del hueco superior por donde se lleva a cabo el proceso de almacenamiento del grano es de 1.54m.

La geometría de la lámina corrugada se indica en la fig 6.2, los valores de sus características geométricas son las siguientes:

f = 0.635 cm
c = 6.77 cm
L = 7.38 cm
t = 0.35 cm
A = 0.38 cm^2/cm
I_x = 0.0742 cm^4/cm

$w = 25.0 \ \ kg/m^2$

Donde f es la flecha de media onda, c es la distancia entre dos crestas o valles, L la longitud entre dos valles , t el espesor de la lámina, A el área, I_x el momento de inercia y W el peso de la lámina.

Los parámetros de rigidez dados por las ecs 2.4, que consideran a la lámina corrugada como ortotrópica, para los valores geométricos dados anteriormante son los siguientes:

$D_x = 39\,285 \ \ (kg/cm)/cm$

$D_\theta = 805\,461 \ \ (kg/cm)/cm$

$D_{x\theta} = 271\,124 \ \ (kg/cm)/cm$

$D_\mu = 0$

$B_x = 7\,381 \ \ (kg\text{-}cm)/cm$

$B_\theta = 157\,982 \ \ (kg\text{-}cm)/cm$

$B_{x\theta} = 6\,578 \ \ (kg\text{-}cm)/cm$

$B_\mu = 0$

Para una lámina isotrópica de espesor t (0.35 cm), las constantes de rigidez anteriores se deducen de las ecs 2.3 haciendo $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $E_1 = E_2 = E/(1-\mu^2)$ y $G = E/2(1+\mu)$, estas constantes se reducen a las siguientes expresiones:

$$D_x = D_\theta = \frac{Et}{1-\mu^2}$$

$$D_\mu = \mu D_x$$

$$D_{x\theta} = Gt = \frac{Et}{2(1+\mu)}$$

$$B_x = B_\theta = \frac{E\ t^3}{12(1-\mu^2)}$$

$B\mu = \mu B_x$

$B_{x\theta} = \frac{G\ t^3}{6} = \frac{E\ t^3}{12(1+\mu)}$

Para valores de $E = 2\ 111\ 100\ kg/cm^2$ y $\mu = 0.30$, correspondientes al acero y para un espesor de lámina de 0.35 cm, las constantes de rigidez para la lámina isotrópica resultan ser :

$D_x = D_\theta =$ 788 144 (kg/cm)/cm

$D_{x\theta} =$ 295 554 (kg/cm)/cm

$D\mu =$ 197 036 (kg/cm)/cm

$B_x = B_\theta =$ 8 046 (kg-cm)/cm

$B_{x\theta} =$ 6 034 (kg-cm)/cm

$B\mu =$ 2 011 (kg-cm)/cm

Los valores obtenidos son por centímetro de ancho de lámina.

De la comparación de estos valores con los correspondientes a la lámina ortotrópica, se puede observar que la lámina isotrópica es más rígida que la ortotrópica, ésto se debe básicamente a que la ondulación de la lámina disminuye su rigidez en la dirección x (fig 6.2), y que cuando la lámina se esfuerza en esta dirección, prácticamente no se deforma en la dirección transversal, por lo que los valores de $D\mu$ y $B\mu$ se consideran despreciables.

La diferencia de rigidez entre los dos casos se verá reflejada en los valores de los desplazamientos y elementos mecánicos resultantes en cada análisis.

Los resultados del análisis por peso propio, se muestran en las figs 6.3a y 6.3b, para el caso de lámina cilíndrica ortotrópica y lámina cónica isotfopica; en las figs 6.4a y 6.4b se muestran los resultados para el caso en que la lámina cilindrica y la cónica son isotrópicas.

Se puede observar que para el segundo caso los desplazamientos son menores y que los elementos mecánicos son prácticamente los mismos, excepto los valores de N_θ que disminuyen en el cilindro, debe observarse tambien la aparicion de momento M_θ en el cilindro, ésto es claro al observar en las ecs 4.19' la correspondiente a M_θ, que aunque "n" sólo toma el valor de cero por ser carga axisimétrica, $B\mu$ es diferente de cero por ser el cilindro una lámina isotrópica.

En las tablas 6.1 y 6.2 se muestran los valores calculados de la fuerza axial N_s y N_x para el cono y el cilindro respectívamente, y los valores correspondientes obtenidos en el programa.

El error máximo ocurre cerca del hueco superior del cono donde el nivel de esfuerzos es menor, el error en las secciones restantes es del orden del 1% excepto en la unión del cono y el cilindro en donde resulta ser del 3.4%, valor que se considera dentro del rango aceptable de errores en problemas de ingeniería.

Este error en el extremo superior del cilindro se disipa a lo largo de la altura del mismo llegando a ser del 1.7% en la base, ésto se debe a que el cuerpo cilíndrico no introduce error ya que la diferencia de fuerza axial en la base y el extremo superior del cilindro multiplicado por el perímetro resulta ser el peso del mismo.

Las condiciones de compatibilidad y equilibrio se cumplen tanto en la unión cono cilindro como en la base del cilindro.

En las figs 6.5 a 6.15, se muestran los resultados obtenidos del análisis por viento del modelo (fig 6.1) para el caso en que la lámina cilíndrica se considera ortotrópica, la velocidad del viento considerada fué de 110 km/hr y los coeficientes de presión C_p que definen la variacion de la presión del viento en la superficie del silo son los contenidos en la tabla 3.1, obtenidos en el túnel del viento para el modelo correspondiente.

Los resultados obtenidos para el caso en que la lámina cilíndrica se considera isotrópica se muestran en las figs 6.16 a 6.26.

7. OBSERVACIONES FINALES

De los resultados obtenidos del análisis del modelo, mostrados en las figs 6.5 a 6.15, se puede observar que en general, los desplazamientos y elementos mecánicos son mayores cuando se considera a la lámina cilíndrica ortotrópica; esto se debe a la menor rigidez de la lámina corrugada, por otra parte, construir a los silos con lámina lisa de comportamiento isotrópico, si bien es más rígida, tendría problemas de pandeo local, por lo tanto considerar a la lámina corrugada como un material ortotrópico, es una suposición más congruente con la realidad.

Como observación adicional, las condiciones de compatibilidad de deformaciones en la base del cilindro, se satisfacen plenamente, pero el equilibrio horizontal proporcionado por las fuerzas $N_{x\theta}$ no es exacto en la base, satisfaciendose en la sección inmediata superior. Esto pone de manifiesto la carencia de presición del método empleado en los extremos del modelo como ya se había observado en el anillo superior del cono, hay que hacer nótar que ésto no afecta a la solución general del modelo.

Una conclusión importante resulta de la observación de la fuerza

cortante en la base proporcionada por $N_{x\theta}$, que ocasiona un flujo de cortante máximo de 25.6 kg/cm. Considerando un esfuerzo permisible a cortante de 700 kg/cm^2, éste flujo puede absorberse con anclas de 3/4" de diámetro, con área neta de 2 cm^2, separadas a 54 cm de distancia, o bien con anclas de 1" de diámetro con área neta de 3.55 cm^2 separadas a 95 cm.
Los silos construidos en la actualidad similares al modelo en estudio, tienen un sistema de sujeción a base de anclas de 5/8" separadas a cada 143 cm; de lo anterior, se concluye que son insuficientes para resistir el empuje de vientos de 110 km/hr.

Un punto interesante del problema es determinar la influencia que la inclinación de la generatriz de la tapa cónica tiene en el comportamiento general de la estructura. Con este objetivo se efectuó tambien el análisis de silos para inclinaciones de la generatriz de la tapa cónica de 4°, 10°, 20°, y 40° para los dos casos considerados aquí, lámina cilíndrica de comportamiento ortotrópica y lámina cilíndrica isotrópica.

Un resumen de los resultados obtenidos del análisis de estos modelos incluyendo el correspondiente a 30° de inclinación, se muestra en las tablas 7.1 y 7.2. En ellas se indican los valores máximos de los desplazamientos y elementos mecánicos obtenidos en cada modelo, en tres secciones diferentes; la sección 1 corresponde al extremo superior del cono, la sección 2 es el extremo superior de el cilindro y la sección 3 es la base del cilindro. Estos valores máximos no ocurren para la misma posición de la coordenada θ de los modelos. Los valores de los coeficientes de presión en la tapa cónica de cada modelo se obtuvieron en pruebas de túnel de viento.

Se puede observar de las tablas que la inclinación de la tapa cónica si influye en las deformaciones y fuerzas generadas en el cilindro y que no es 30° el valor del ángulo de inclinación más óptima, si no que éste se encuentra comprendido entre 20° y 30°.

A pesar de ésto, es recomendable la construcción de la tapa cónica con una inclinación de 30°, debido a que es el ángulo de reposo aproximado de los granos y así se evita el empuje de ellos sobre la lámina cónica.

Si bien los desplazamientos y fuerzas en la tapa cónica resultan menores para la inclinación de 20°, el efecto que ésta tiene sobre el cilindro resulta menor para inclinaciones de la tapa de 40°, aunque para este caso la fuerza de tensión en la base del cilindro se incrementa.

El modelo correspondiente a tapa cónica de 4° de inclinación presenta desplazamientos radiales excesivos de su extremo superior, debido a la discontinuidad provocada por el hueco, por lo que se puede afirmar que no se podrían construir silos con esas características, a menos que sean reforzados adecuadamente.

La tabla 7.2, obtenida del análisis de los modelos considerando tanto al cono como al cilindro como materiales isotrópicos, permite observar el efecto que tiene sobre la tapa cónica, el cambio en la rigidez del cilindro; se aprecia que los desplazamientos y elementos mecánicos en la tapa cónica disminuyen considerablemente con respecto al modelo con cilindro ortotrópico menos rígido, ésto se debe a que al disminuir las deformaciones en el cilindro disminuirán también en el cono.

En el cilindro isotrópico los desplazamientos disminuyen y los elementos mécanicos disminuyen también aunque prácticamente permanecen iguales a excepción de M_θ que es mayor, y la presencia de N_θ en la base del cilindro; la razón de esto es que M_θ depende de la rigidez B_μ y N_θ del valor D_μ, los cuales son nulos para la lámina corrugada.

El nivel de esfuerzos en la lámina puede determinarse mediante la superposición de los efectos de flexión y de membrana, las propiedades geometricas de la lámina se repiten a continuación y son:

$I_x = 0.0742 \quad cm^4/cm$

$I_\theta = 0.00357 \quad cm^4/cm$

$A_x = 0.38 \quad cm^2/cm$

$A_\theta = 0.35 \quad cm^2/cm$

$t = 0.35 \quad cm$

$f = 0.635 \quad cm$

Con estos valores, se pueden obtener esfuerzos en la lámina cónica y cilindrica de la combinación del efecto del viento y del peso propio.

Considerando los valores máximos de los elementos mecánicos correspondientes al modelo con tapa cónica de 30° de inclinación los esfuerzos en la lámina cilíndrica resultan ser los siguientes:

Elementos mecánicos por viento.

$M_x = (41.35 \text{ kg-cm})/cm$

$N_x = (\ 4.86 \text{ kg})/cm$

$M_\theta = (-0.40 \text{ kg-cm})/cm$

$N_\theta = (-238 \text{ kg})/cm$

Elementos mecánicos por peso propio.

$M_x = (-19.10 \text{ kg-cm})/cm$

$N_x = (-\ 2.23 \text{ kg})/cm$

$M_\theta = 0$

$N_\theta = (104.3 \text{ kg})/cm$

$$\sigma_x = \pm \frac{M_x y}{I_\theta} + \frac{N_x}{A_x} \qquad \sigma_\theta = \pm \frac{M_\theta y}{I_x} + \frac{N_\theta}{A_\theta}$$

$$\sigma_x = - \frac{(41.35-19.1)(0.175)}{0.00357} + \frac{(4.86-2.23)}{0.38} = - 1090.7 + 6.9$$

$$\sigma_x = - 1083.7 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_\theta = - \frac{(0.4)(0.317)}{0.0742} + \frac{(-238+104.3)}{0.35} = - 1.7 - 382 = - 384 \text{ kg/cm}^2$$

Estos son los esfuerzos máximos en la estructura debido a la combinación de los esfuerzos provocados por el empuje del viento y los originados por el peso propio de la estructura.

Los momentos tienen grandes valores exclusivamente en la unión cono cilindro, el momento M_x máximo ocurre en la sección inmediata a la unión mencionada y es de -2.02 kg-cm /cm por lo que no resulta desfavorable aún con la combinación del correspondiente al peso propio.

De lo anterior se concluye que los esfuerzos provocados por el peso propio son favorables cuando se presenta la acción del viento pués resultan ser de signos contrarios, a los inducidos por efectos de peso propio.

Es conveniente hacer notar la necesidad que existe de crear un reglamento, que especifique los esfuerzos permisibles en este tipo de láminas, para su comparación.

8. REFERENCIAS

1. Ravenet, J, " Silos teoría investigación construccón ", Editores técnicos asociados S. A. Barcelona 1977, 115-199

2. Osman A.Marzouk and George Abdel Sayed, " Linear theory of ortotropic cylindrical shells ", Journal of the structural division, Vol 99 Part 11 Nov, 1973, ASCE.

3. Rish R. F., "Force in cylindrical chimneyes due to wind", Proceedings institution of civil engineers, London, England, Vol 36, Apr 1967, 791-803.

4. Chiba Toshio, " Finite element analysis program for shells of revolution ISTRAN/SR ", IHI Engineering Review, Vol 13, N 3, July 1980, 8-13.

5. Henry L. Langhaar, "Energy methods in applied mechanics", Jhon Wiley and Sons, 1962.

6. Flügge W, " Die stabilitat der kreiszylinderschate ", Ingenieur archiv, Vol 3, 1932, 463-506.

7. Donnell L. H., " Stability of thin walled tubes under torsion ", Technical report N 479, National advisory comittee for aeronautics, 1933.

8. Schorer H, " Line load action on thin cylindrical shells ", Proceedings, ASCE Vol 61, March 1965.

9. Vlasov V. Z., " General theory of shells and its applications in engineering ", Nasa technical translation F-99, National aeronautics and space administration, 1964.

10. Kantorovich and V.I. Krylov, " Aproximate methods of higer analysis.

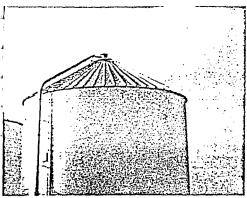
11. Langhaar H. L. and Chu S. C. , " Piecewise polynomials and the partition method for ordinary differential equations ", Developments in theorical and applied mechanics, Pergamon Press New York, N. Y., Vol 8, 1970.

12. Sukhvarsh Jerath and Arthur P. Boresi, " Stress analysis of bins by shells bending theory ", Journal of the structural division, Jun 1979, ASCE.

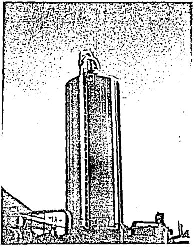
RECONOCIMIENTOS

Este trabajo fué realizado en la coordinación de Estructuras del Instituto de Ingeniería de la UNAM como parte del proyecto 3712.

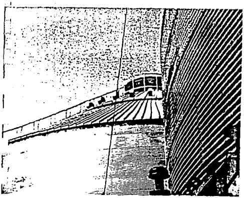
Se agradece al M en C. Neftalí Rodriguez Cuevas la dirección de este trabajo.



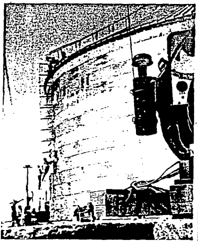
FOTOGRAFIA 1



FOTOGRAFIA 2



FOTOGRAFIA 3



FOTOGRAFIA 4

TABLA 3.1 COEFICIENTES DE PRESION PARA UN MODELO OBTENIDOS EN EL TUNEL DEL VIENTO

Angulo / Punto	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°	Angulo / Punto
85	- 0.64	- 0.64	- 0.64	- 0.64	- 0.64	- 0.64	- 0.64	- 0.64	- 0.64	- 0.64	- 0.64	- 0.64	- 0.64	85
1	- 0.53	- 0.81	- 1.08	- 1.05	- 1.32	- 1.40	- 0.92	- 0.81	- 0.69	- 0.55	- 0.84	- 0.77	- 0.55	1
2	- 0.40	- 0.57	- 0.79	- 0.85	- 1.12	- 1.29	- 0.76	- 0.59	- 0.53	- 0.50	- 0.87	- 0.79	- 0.56	2
3	- 0.31	- 0.41	- 0.63	- 0.77	- 1.04	- 1.24	- 0.95	- 0.96	- 0.85	- 0.59	- 0.89	- 0.82	- 0.58	3
4	- 0.15	- 0.19	- 0.50	- 0.60	- 0.96	- 1.22	- 0.94	- 0.97	- 0.84	- 0.62	- 0.88	- 0.83	- 0.62	4
5	- 0.12	- 0.26	- 0.45	- 0.64	- 0.86	- 1.11	- 0.88	- 0.88	- 0.72	- 0.60	- 0.83	- 0.85	- 0.64	5
6	- 0.22	- 0.20	- 0.36	- 0.54	- 0.78	- 1.03	- 0.90	- 0.95	- 0.76	- 0.62	- 0.74	- 0.83	- 0.68	6
7	- 0.10	- 0.12	- 0.27	- 0.48	- 0.72	- 0.98	- 0.89	- 0.97	- 0.75	- 0.59	- 0.65	- 0.76	- 0.62	7
8	+ 0.03	- 0.08	- 0.19	- 0.40	- 0.68	- 0.93	- 0.85	- 0.92	- 0.68	- 0.55	- 0.55	- 0.68	- 0.57	8
9	+ 0.10	+ 0.02	- 0.16	- 0.32	- 0.60	- 0.84	- 0.80	- 0.90	- 0.64	- 0.49	- 0.46	- 0.60	- 0.50	9
10	+ 0.19	+ 0.12	- 0.03	- 0.25	- 0.43	- 0.76	- 0.75	- 0.83	- 0.60	- 0.40	- 0.38	- 0.47	- 0.39	10
11	+ 0.05	+ 0.00	- 0.09	- 0.33	- 0.43	- 0.72	- 0.68	- 0.72	- 0.42	- 0.33	- 0.32	- 0.39	- 0.31	11
12	- 0.84	- 0.82	- 0.73	- 0.59	- 0.71	- 0.79	- 0.68	- 0.71	- 0.29	- 0.21	- 0.20	- 0.31	- 0.23	12
13	- 0.86	- 0.80	- 0.71	- 0.84	- 0.67	- 0.76	- 0.72	- 0.74	- 0.21	- 0.18	- 0.18	- 0.27	- 0.25	13
14	+ 0.86	+ 0.77	+ 0.45	- 0.05	- 0.48	- 0.85	- 0.81	- 0.65	- 0.18	- 0.17	- 0.21	- 0.27	- 0.19	14
15	+ 0.99	+ 0.88	+ 0.50	+ 0.03	- 0.42	- 0.85	- 0.90	- 0.75	- 0.21	- 0.18	- 0.21	- 0.26	- 0.19	15
16	+ 1.05	+ 0.93	+ 0.52	+ 0.02	- 0.46	- 0.90	- 0.98	- 0.79	- 0.22	- 0.18	- 0.22	- 0.28	- 0.19	16
17	+ 1.00	+ 0.88	+ 0.50	+ 0.02	- 0.49	- 0.95	- 1.02	- 0.69	- 0.21	- 0.19	- 0.23	- 0.30	- 0.19	17
18	+ 1.10	+ 0.97	+ 0.53	+ 0.03	- 0.37	- 0.85	- 0.95	- 0.58	- 0.18	- 0.15	- 0.23	- 0.30	- 0.18	18
19	+ 1.08	+ 0.95	+ 0.52	+ 0.04	- 0.32	- 0.74	- 0.88	- 0.40	- 0.19	- 0.19	- 0.23	- 0.30	- 0.16	19
20	+ 1.07	+ 0.91	+ 0.50	- 0.05	- 0.48	- 0.91	- 0.90	- 0.37	- 0.21	- 0.20	- 0.23	- 0.28	- 0.12	20
21	+ 1.04	+ 0.88	+ 0.49	- 0.05	- 0.53	- 0.92	- 0.79	- 0.36	- 0.23	- 0.24	- 0.23	- 0.23	- 0.06	21

TABLA 3.2 DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER DE C_P

GRA-DOS	C_P	TERMINOS 5		TERMINOS 6		TERMINOS 12		TERMINOS 18	
		C_P	ERROR	C_P	ERROR	C_P	ERROR	C_P	ERROR
0	1.00	0.98	2.0	1.00	---	1.01	1.0	1.01	1.0
5	1.00	0.95	5.0	0.97	3.0	0.99	1.0	0.99	1.0
10	0.94	0.88	6.4	0.89	5.6	0.92	2.1	0.93	1.0
15	0.80	0.75	6.6	0.76	5.3	0.80	---	0.80	---
20	0.60	0.59	1.7	0.59	1.7	0.61	1.6	0.60	---
25	0.36	0.38	5.5	0.37	2.7	0.37	2.7	0.36	---
30	0.10	0.15	50.0	0.14	40.0	0.10	---	0.10	---
35	-0.17	-0.10	70.0	-0.11	54.5	-0.17	---	-0.17	---
40	-0.45	-0.36	25.0	-0.38	18.4	-0.45	---	-0.44	2.2
45	-0.70	-0.61	14.7	-0.64	9.3	-0.70	---	-0.70	---
50	-0.92	-0.86	6.9	-0.88	4.5	-0.91	1.1	-0.92	---
55	-1.09	-1.09	----	-1.10	0.9	-1.08	0.9	-1.08	0.9
60	-1.20	-1.29	7.5	-1.29	7.5	-1.22	1.6	-1.21	0.8
65	-1.34	-1.45	8.2	-1.45	8.2	-1.35	0.7	-1.34	---
70	-1.48	-1.57	6.0	-1.56	5.4	-1.47	0.7	-1.48	---
75	-1.60	-1.64	2.5	-1.63	1.8	-1.59	0.6	-1.60	---
80	-1.68	-1.67	0.6	-1.65	1.8	-1.68	---	-1.68	---
85	-1.72	-1.65	4.2	-1.64	4.8	-1.73	0.6	-1.72	---
90	-1.70	-1.60	6.2	-1.58	7.6	-1.70	---	-1.70	---
95	-1.61	-1.50	7.3	-1.49	8.0	-1.60	0.6	-1.62	0.6
100	-1.45	-1.38	5.0	-1.36	6.6	-1.43	1.4	-1.44	0.6
105	-1.20	-1.24	3.3	-1.23	2.5	-1.22	1.6	-1.22	1.6
110	-1.01	-1.08	6.9	-1.08	6.9	-1.01	---	-1.01	---
115	-0.84	-0.93	10.7	-0.93	10.7	-0.84	---	-0.84	---
120	-0.70	-0.79	12.8	-0.78	11.4	-0.70	---	-0.71	1.4
125	-0.61	-0.66	8.2	-0.65	6.5	-0.61	---	-0.60	1.6
130	-0.54	-0.56	3.7	-0.55	1.8	-0.54	---	-0.54	---
135	-0.50	-0.47	6.4	-0.46	8.7	-0.50	---	-0.50	---
140	-0.45	-0.42	7.1	-0.40	12.5	-0.45	---	-0.46	2.2
145	-0.42	-0.38	10.5	-0.37	13.5	-0.42	---	-0.42	---
150	-0.40	-0.36	11.1	-0.35	14.3	-0.40	---	-0.40	---
155	-0.40	-0.36	11.1	-0.36	11.1	-0.40	---	-0.40	---
160	-0.40	-0.37	8.1	-0.37	8.1	-0.40	---	-0.40	---
165	-0.40	-0.39	2.6	-0.39	2.6	-0.40	---	-0.40	---
170	-0.40	-0.41	2.5	-0.41	2.5	-0.40	---	-0.40	---
175	-0.40	-0.42	5.0	-0.42	5.0	-0.40	---	-0.40	---
180	-0.40	-0.42	5.0	-0.43	7.5	-0.40	---	-0.40	---

TABLA 3.3 COEFICIENTES DE FOURIER PARA SERIES CON DIFERENTE NUMERO DE TERMINOS

TERMINO	NUMERO DE TERMINOS			
	5	6	12	18
a_0	-0.602	-0.598	-0.603	-0.603
a_1	0.301	0.296	0.300	0.300
a_2	0.937	0.932	0.934	0.935
a_3	0.401	0.408	0.413	0.412
a_4	-0.056	-0.047	-0.049	-0.048
a_5		0.010	0.018	0.019
a_6			0.066	0.066
a_7			-0.013	-0.014
a_8			-0.046	-0.044
a_9			-0.004	-0.002
a_{10}			0.008	0.008
a_{11}			-0.005	-0.004
a_{12}				-0.0001
a_{13}				-0.0007
a_{14}				-0.0044
a_{15}				-0.0077
a_{16}				0.0003
a_{17}				0.0040

TABLA 6.1 ANALISIS POR PESO PROPIO. ESFUERZO Ns EN EL CONO

PUNTO	AREA M2	PESO KG	PERIMETRO CM	Ns CALCULADO	Ns PROGRAMA	Nsp/Nsc
1	2.2	54	---	----	----	--
2	15.1	323	1282	0.50	0.57	14
3	39.7	939	2079	0.90	0.97	7
4	76.0	1846	2876	1.28	1.34	4
5	124.0	3046	3674	1.66	1.71	3
6	183.7	4538	4471	2.03	2.07	2
7	255.1	6323	5269	2.40	2.44	2
8	338.1	8399	6066	2.76	2.80	1
9	432.9	10767	6864	3.14	3.17	1
10	539.3	13428	7661	3.50	3.54	1
11	657.4	16381	8458	3.87	3.91	1
12	789.2	19626	9256	4.24	4.19	1
13	928.7	23162	10053	4.60	4.45	3

TABLA 6.2 ANALISIS POR PESO PROPIO. ESFUERZO Nx EN EL CILINDRO

PUNTO	AREA M2	PESO KG	PERIMETRO CM	Nx CALCULADO	Nx PROGRAMA	Nxp/Nxc
1	928.7	23162	10053	2.30	2.22	3
2	1030.7	25767	10053	2.56	2.48	3
3	1132.8	28320	10053	2.82	2.73	3
4	1234.9	30872	10053	3.07	2.99	2
5	1337.0	33425	10053	3.32	3.24	2
6	1439.2	35980	10053	3.58	3.49	2
7	1541.3	38532	10053	3.83	3.75	2
8	1643.4	41085	10053	4.08	4.00	2
9	1745.5	43637	10053	4.34	4.26	2
10	1847.6	46190	10053	4.59	4.51	2
11	1949.8	48745	10053	4.85	4.76	2
12	2051.9	51297	10053	5.10	5.01	2
13	2154.0	53850	10053	5.36	5.27	2

TABLA 7.1 ELEMENTOS MECANICOS MAXIMOS PARA CADA MODELO LAMINA CILINDRICA ORTOTROPICA.

CONCEPTO	ANGULO α				
	4°	10°	20°	30°	40°
SECCION 1					
DESPLAZAMIENTO W	-55.0	-21.1	7.3	9.3	13.2
FUERZA N_x	-43.2	8.1	1.8	3.2	3.9
FUERZA N_O	-427.4	79.8	17.8	31.7	39.0
FUERZA N_{xO}	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MOMENTO M_x	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MOMENTO M_O	-167.4	-34.8	69.4	85.4	139.8
MOMENTO M_{xO}	63.4	-22.2	-14.5	-24.6	-31.9
SECCION 2					
DESPLAZAMIENTO W	1.9	2.4	1.4	1.5	1.7
FUERZA N_x	3.1	8.7	5.0	4.9	2.9
FUERZA N_O	-732.0	-1070.0	-340.6	-238.0	-129.7
FUERZA N_{xO}	19.9	-25.1	-4.6	7.9	-9.8
MOMENTO M_x	84.5	141.2	53.7	41.3	19.5
MOMENTO M_O	0.3	-0.5	-0.4	-0.4	0.6
MOMENTO M_{xO}	-0.2	-0.3	0.1	-0.1	-0.1
SECCION 3					
FUERZA N_x	-29.9	-54.1	36.3	31.8	34.7
FUERZA N_O	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FUERZA N_{xO}	-58.4	-230.7	-106.8	-49.9	67.7
MOMENTO M_x	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MOMENTO M_O	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MOMENTO M_{xO}	2.6	-12.5	5.2	1.6	-2.9

TABLA 7.2 ELEMENTOS MECANICOS MAXIMOS PARA CADA MODELO LAMINA CILINDRICA ISOTROPICA.

CONCEPTO	ANGULO α				
	4°	10°	20°	30°	40°
SECCION 1					
DESPLAZAMIENTO W	-29.0	-12.2	1.2	4.5	5.9
FUERZA N_x	-17.8	3.8	-1.1	1.4	2.1
FUERZA N_Θ	-176.2	37.4	4.9	13.7	21.0
FUERZA $N_{x\Theta}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MOMENTO M_x	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MOMENTO M_Θ	-66.6	30.5	7.5	37.9	75.4
MOMENTO $M_{x\Theta}$	23.4	8.5	-5.4	-11.5	-16.4
SECCION 2					
DESPLAZAMIENTO W	1.5	2.1	0.8	0.8	0.8
FUERZA N_x	3.3	8.5	4.9	5.1	4.6
FUERZA N_Θ	-699.4	-970.1	-313.6	-233.2	-178.0
FUERZA $N_{x\Theta}$	25.1	19.9	-4.7	-8.9	-12.1
MOMENTO M_x	92.9	139.9	54.5	44.4	32.9
MOMENTO M_Θ	23.2	34.9	13.6	11.1	8.3
MOMENTO $M_{x\Theta}$	0.3	0.3	0.1	0.1	-0.1
SECCION 3					
FUERZA N_x	28.5	46.7	27.7	39.3	51.4
FUERZA N_Θ	7.1	11.7	6.9	9.8	12.9
FUERZA $N_{x\Theta}$	32.5	85.5	-49.5	-33.2	-34.4
MOMENTO M_x	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MOMENTO M_Θ	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MOMENTO $M_{x\Theta}$	-0.9	-3.9	1.8	-0.5	-1.0

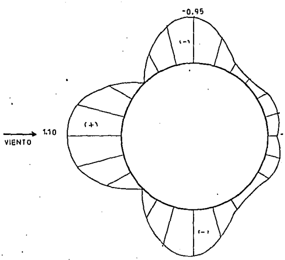


FIGURA 3.1 VARIACION DE C_p EN EL CILINDRO

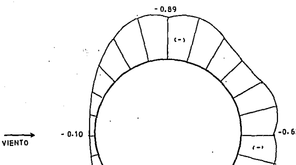


FIGURA 3.2 VARIACION DE C_p EN UNA SECCION DEL CONO

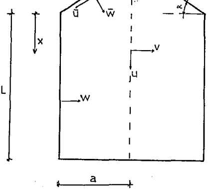


FIGURA 4.1 COMPONENTES DE DESPLAZAMIENTO

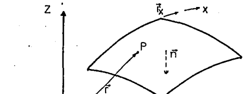


FIGURA 4.2 COORDENADAS DE SUPERFICIE

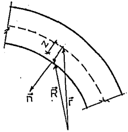


FIGURA 4.3 COORDENADAS DE LAMINA

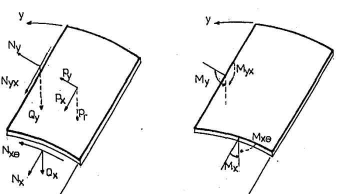


FIGURA 4.4 ELEMENTOS MECANICOS EN UN DIFERENCIAL DE LAMINA.

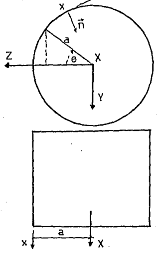


FIGURA 4.5 SISTEMA COORDENADO EN EL CILINDRO

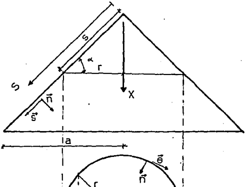


FIGURA 4.6 SISTEMA COORDENADO EN EL CONO

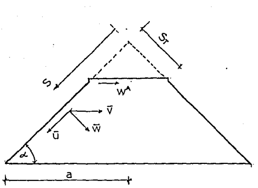


FIGURA 4.7 GEOMETRIA DEL CONO

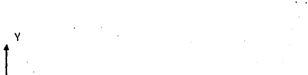


FIGURA 4.8 INTERVALO DE UNA FUNCION

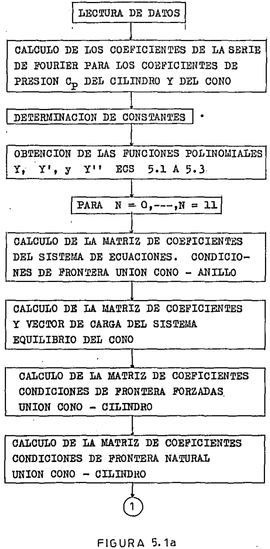

LECTURA DE DATOS
CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE LA SERIE DE FOURIER PARA LOS COEFICIENTES DE PRESION C_P DEL CILINDRO Y DEL CONO
DETERMINACION DE CONSTANTES
OBTENCION DE LAS FUNCIONES POLINOMIALES Y, Y', y Y'' ECS 5.1 A 5.3
PARA N = 0,---,N = 11
CALCULO DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES DEL SISTEMA DE ECUACIONES. CONDICIONES DE FRONTERA UNION CONO - ANILLO
CALCULO DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES Y VECTOR DE CARGA DEL SISTEMA EQUILIBRIO DEL CONO
CALCULO DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES CONDICIONES DE FRONTERA FORZADAS UNION CONO - CILINDRO
CALCULO DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES CONDICIONES DE FRONTERA NATURAL UNION CONO - CILINDRO
1

FIGURA 5.1a

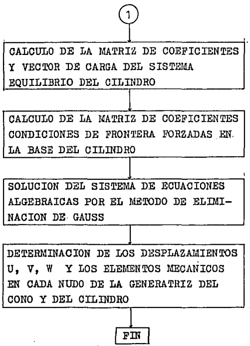


DIAGRAMA DE FLUJO ESQUEMATICO DEL PROGRAMA
UTILIZADO PARA EL ANALISIS DE LOS SILOS

FIGURA 5.1b

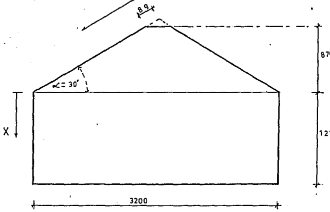


FIGURA 6.1 GEOMETRIA DEL SILO (cm)

FIGURA 6.2 GEOMETRIA DE LA LAMINA(cm)

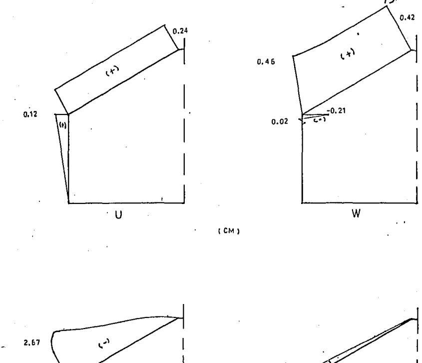


FIGURA 6 3a ANALISIS POR PESO PROPIO (ORTOTROPICO)

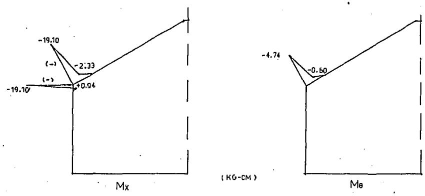


FIGURA 6.3b ANALISIS POR PESO PROPIO (ORTOTROPICO)

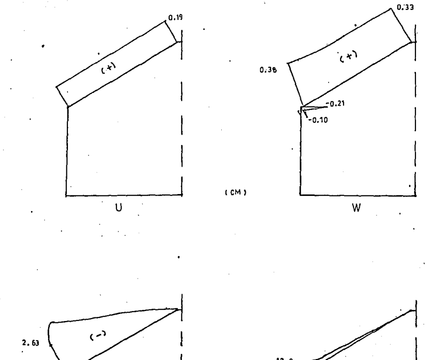


FIGURA 6.4a ANALISIS POR PESO PROPIO (ISOTROPICO)

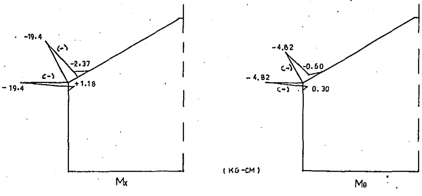
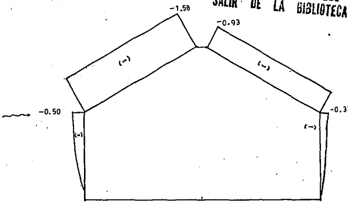


FIGURA 6.4b ANALISIS POR PESO PROPIO (ISOTROPICO)



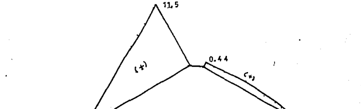
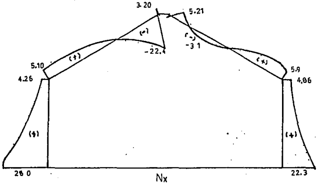


FIGURA 6.5 ANALISIS POR VIENTO (ORTOTROPICO)



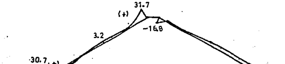
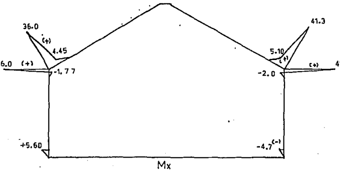


FIGURA 6.6 ANALISIS POR VIENTO (ORTOTROPICO)



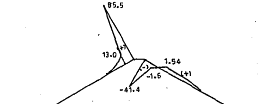
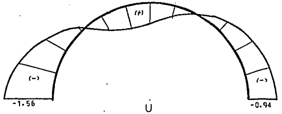
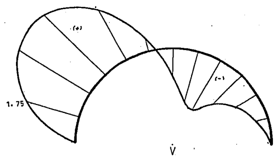


FIGURA 6.7 ANALISIS POR VIENTO (ORTOTROPICO)





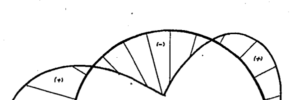
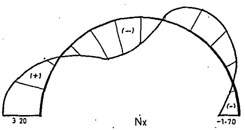


FIGURA 6.8 ANALISIS POR VIENTO (ORTOTROPICO)
EXTREMO SUPERIOR DEL CONO



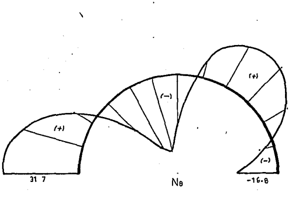


FIGURA 6.9 ANALISIS POR VIENTO (ORTOTROPICO)
EXTREMO SUPERIOR DEL CONO

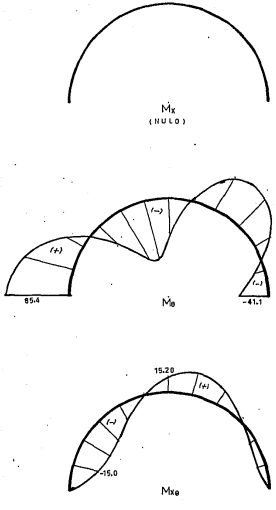


FIGURA 6.10 ANALISIS POR VIENTO (ORTOTROPICO)
EXTREMO SUPERIOR DEL CONO

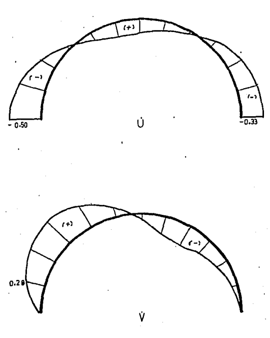


FIGURA 6.11 ANALISIS POR VIENTO (ORTOTROPICO)
EXTREMO SUPERIOR DEL CILINDRO

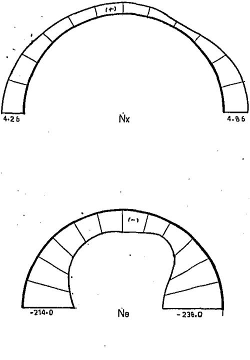


FIGURA 6.12 ANALISIS POR VIENTO (ORTOTROPICO)
EXTREMO SUPERIOR DEL CILINDRO

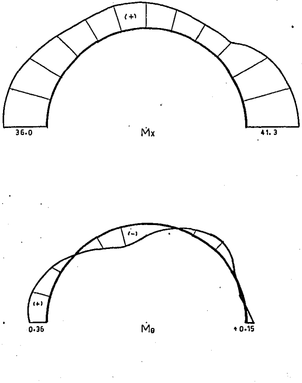


FIGURA 6.13 ANALISIS POR VIENTO (ORTOTROPICO)
EXTREMO SUPERIOR DEL CILINDRO

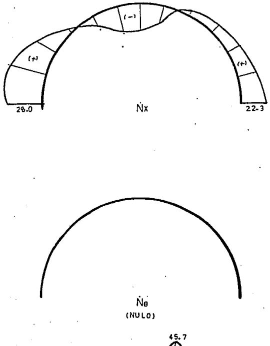
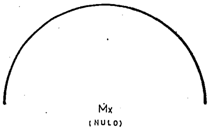
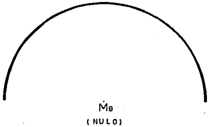


FIGURA 6.14 ANALISIS POR VIENTO (ORTOTROPICO)
BASE DEL CILINDRO





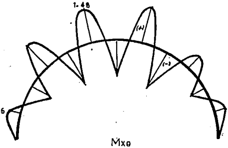
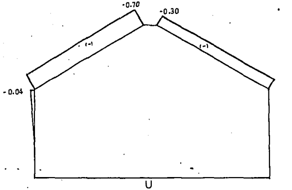


FIGURA 6.15 ANALISIS POR VIENTO (ORTOTROPICO)
BASE DEL CILINDRO



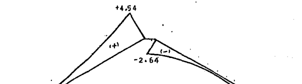
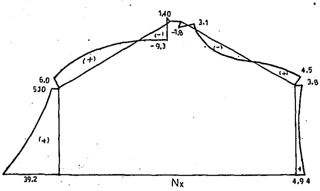


FIGURA 6 16 ANALISIS POR VIENTO (ISOTROPICO)



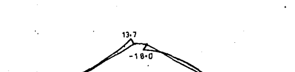
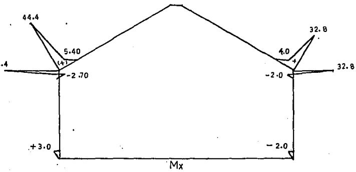


FIGURA 6.17 ANALISIS POR VIENTO (ISOTROPICO)



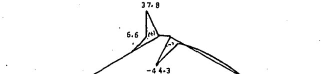


FIGURA 6.18 ANALISIS POR VIENTO (ISOTROPICO)

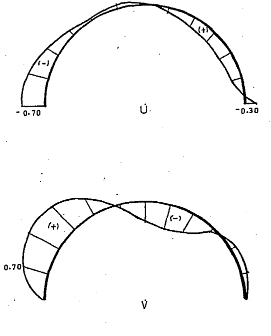
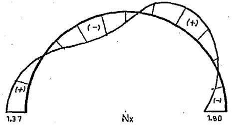


FIGURA 6.19 ANALISIS POR VIENTO (ISOTROPICO)
EXTREMO SUPERIOR DEL CONO



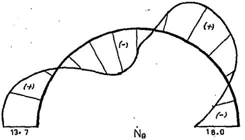


FIGURA 6.20 ANALISIS POR VIENTO (ISOTROPICO)
EXTREMO SUPERIOR DEL CONO

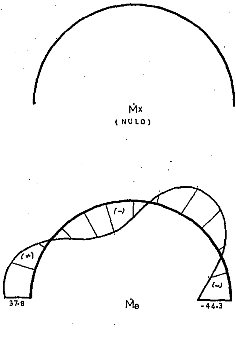


FIGURA 6.21 ANALISIS POR VIENTO (ISOTROPICO)
EXTREMO SUPERIOR DEL CONO

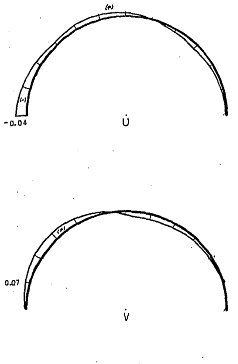
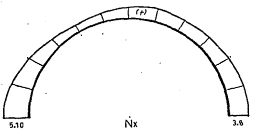


FIGURA 6.22 ANALISIS POR VIENTO (ISOTROPICO)
EXTREMO SUPERIOR DEL CILINDRO



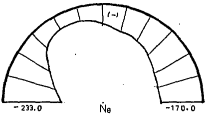


FIGURA 6.23 ANALISIS POR VIENTO (ISOTROPICO) EXTREMO SUPERIOR DEL CILINDRO

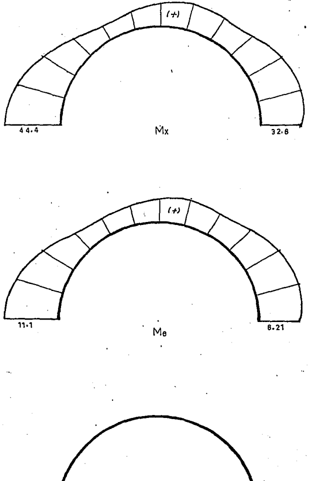


FIGURA 6.24 ANALISIS POR VIENTO (ISOTROPICO)
EXTREMO SUPERIOR DEL CILINDRO

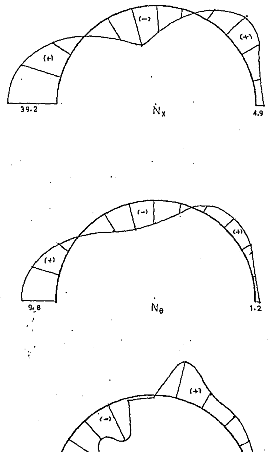


FIGURA 6.25 ANALISIS POR VIENTO (ISOTROPICO)
BASE DEL CILINDRO

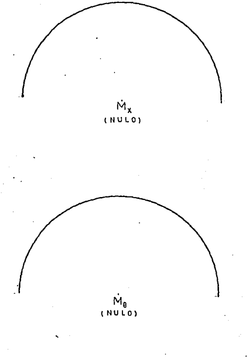


FIGURA 6.26 ANALISIS POR VIENTO (ISOTROPICO)
BASE DEL CILINDRO

APENDICE A

TAPA CONICA ORTOTROPICA

Se ha visto que la ortotropía del cuerpo cilíndrico del silo, modifica su comportamiento ante cargas externas con respecto a la estructura isotrópica. Por lo tanto es deseable poder analizar también estas estructuras considerando la ortotropía de la tapa cónica, para considerar su efecto en la estabilidad del silo. Esto se puede efectuar realizando pruebas de laboratorio con modelos representativos de la tapa cónica para cada silo en particular y poder obtener los parámetros de rigidez de dicha tapa que dependeran de la geometría de la lámina en la superficie cónica.

Los elementos mecánicos y ecuaciones de equilibrio correspondientes se modifican y se pueden obtener en forma similar a la del cuerpo cilíndrico como se muestra a continuación:

Para una lámina ortotropica, las relaciones esfuerzo deformación están dadas por la ec 4.14, sustituyendolas en las ecs 4.12 que representan a los elementos mecánicos en la superficie cónica, después de integrar estas ecuaciones quedan en la forma siguiente:

$$N_s = D_s u_s + \frac{D_\mu}{s}\,(v_\theta \mathrm{Sec}\alpha + u - w\,tg\,\alpha)$$

$$N_\theta = D_\mu u_s + \frac{D_\theta}{s}\,(v_\theta \mathrm{Sec} \quad + u - w\,tg\alpha)$$

$$N_{s\theta} = D_{s\theta}\,(v_s - \frac{v}{s} + \frac{u_\theta \mathrm{Sec}\,\alpha}{s})$$

$$M_s = -\left[B_s w_{ss} + \frac{B_\mu}{s}\,(w_s + \frac{\mathrm{Sec}^2\alpha}{s}\,w_{\theta\theta})\right]$$

$$M_\theta = -\left[B_\mu w_{ss} + \frac{B_\theta}{s}\,(w_s + \frac{\mathrm{Sec}^2\alpha}{s}\,w_{\theta\theta})\right]$$

$$M_{s\theta} = B_{s\theta}\,\frac{\mathrm{Sec}\alpha}{s}\,(\frac{w_\theta}{s} - w_{s\theta})$$

En donde:

$D_s = E_1\,t$	$B_s = E_1 t^3/12$
$D_\mu = E_\mu\,t$	$B_\mu = E_\mu t^3/12$
$D_\theta = E_2\,t$	$B_\theta = E_2 t^3/12$
$D_{s\theta} = G\,t$	$B_{s\theta} = G\,t^3/6$

Estos parámetros de rigidez deben obtenerse experimentalmente para cada tipo de tapa cónica.

Con estos valores de los elementos mecánicos, las ecuaciones de equilibrio se pueden obtener mediante las ecs 4.13 con los valores correspondientes de A, B, $1/r_1$, y $1/r_2$, para una lámina cónica. Después de sustituir y considerar la simplificación de Donnell, las ecuaciones de equilibrio quedan de la siguiente manera:

$$D_s s^2\, \bar{u}_{ss} + D_s s\, \bar{u}_s + D_{s\theta} \mathrm{Sec}^2\alpha\, \bar{u}_{\theta\theta} - D_\theta\, \bar{u} + s(D_\mu + D_{s\theta}) \mathrm{Sec}\,\alpha\, \bar{v}_{s\theta}$$

$$- (D_\theta + D_{s\theta}) \mathrm{Sec}\,\alpha\, \bar{v}_\theta - s D_\mu \mathrm{tg}\,\alpha\, \bar{w}_s + D_\theta \mathrm{tg}\,\alpha\, \bar{w} + s^2\, \bar{P}_s = 0$$

$$(D_{s\theta} + D_\mu) \mathrm{Sec}\,\alpha\, s\, \bar{u}_{s\theta} + (D_\theta + D_{s\theta}) \mathrm{Sec}\,\alpha\, \bar{u}_\theta + D_{s\theta} s^2\, \bar{v}_{ss} + D_{s\theta} s \bar{v}_s$$

$$+ D_\theta \mathrm{Sec}^2\alpha\, \bar{v}_{\theta\theta} - D_{s\theta}\, \bar{w} - D_\theta \mathrm{Sec}\,\alpha\, \mathrm{tg}\,\alpha\, \bar{w}_\theta + \bar{P}_\theta\, s^2 = 0$$

$$s^2\, B_s\, \bar{w}_{ssss} + 2 B_s s\, \bar{w}_{sss} - B_\theta\, \bar{w}_{ss} + \frac{B_\theta}{s}\, \bar{w}_s + \mathrm{tg}^2\alpha\, D_\theta\, \bar{w} +$$

$$2 \mathrm{Sec}^2\alpha\, (B_\mu + B_{s\theta}) \bar{w}_{ss\theta\theta} - (B_\mu + B_{s\theta})\, \frac{2 \mathrm{Sec}^2\alpha}{s}\, \bar{w}_{s\theta\theta} + \frac{B_\theta \mathrm{Sec}^4\alpha}{s^2} \bar{w}_{\theta\theta\theta\theta}$$

$$+ \frac{2(B_\mu + B_{s\theta} + B_\theta)}{s^2} \mathrm{Sec}^2\alpha\, \bar{w}_{\theta\theta} - \mathrm{tg}\,\alpha\, \mathrm{Sec}\,\alpha\, D_\theta\, \bar{v}_\theta - \mathrm{tg}\,\alpha\, s D_\mu\, \bar{u}_s - \mathrm{tg}\,\alpha\, \bar{u} - s^2 \bar{P}_z = 0$$

Conocidos los parámetros de rigidez, las ecuaciones anteriores junto con las correspondientes a los elementos mecánicos, se pueden utilizar para analizar el silo considerando tanto al cuerpo cilíndrico como a la tapa cónica formados por un material ortotrópico.

APENDICE B

INSTRUCTIVO DEL PROGRAMA

Los datos de entrada del programa se almacenan en un archivo de trabajo en formato libre; el orden de lectura es el siguiente:

1. PRIMERA LINEA

Velocidad del viento en km/hr	(Real)
Peso de la lámina en kg/m^2	(Real)
Indice para indicar análisis isotrópico u ortotrópico	(Entero)
Indice para definir análisis por peso propio o por viento	(Entero)
Valor del incremento del ángulo en que se desea la salida de resultados	(Real)

2. SEGUNDA LINEA

Radio del cilindro en cm	(Real)
Altura del cilindro en cm	(Real)

Angulo de inclinación de la generatriz de la tapa cónica en grados	(Real)
Distancia del vértice del cono al anillo superior en cm	(Real)
Area de la sección transversal del anillo superior en cm^2	(Real)

3. TERCERA LINEA

Módulo de elasticidad de la lámina en kg/cm^2	(Real)
Módulo de Poisson	(Real)
Espesor de la lámina cilíndrica en cm	(Real)
Distancia horizontal entre dos crestas o valles de la corrugación de la lámina cilíndrica (c) en cm (fig 6.2)	(Real)
Longitud curvilínea entre dos crestas o valles (L) en cm (fig 6.2)	(Real)
Flecha de la corrugación de la lámina (f) en cm	(Real)

4. CUARTA LINEA

Coeficientes de presión del viento para el cuerpo cilíndrico a cada 15° de 0° a 180° (Trece datos)	(Real)

5. QUINTA LINEA

Coeficientes de presión del viento para la tapa cónica en trece secciones circulares, iniciando en el vértice y finalizando en la unión con el cilindro. Serán a cada 15° de 0° a 180°; trece datos por sección circular.	(Real)

El dispositivo de entrada de datos puede ser modificado empleandose, por ejemplo, tarjetas perforadas.

El índice para indicar análisis isotrópico será cero y cualquier valor diferente de cero para análisis ortotrópico.

El índice para definir análisis por peso propio será cualquier valor diferente de cero y valdrá cero para definir análisis por viento.

Los resultados serán los desplazamientos y elementos mecánicos a lo largo de una generatriz y se obtendrá para ángulos de 0° a 180° con un incremento definido por el dato " valor del incremento del ángulo".