

01162

RECEIVED
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
MARZO 1987

"ANALISIS UNIVARIADO DE FRECUENCIAS DE SEQUIAS"

JOSE CARLOS DOURIET CARDENAS

TESIS

Presentada a la División de Estudios de
posgrado de la
FACULTAD DE INGENIERIA
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
como requisito para obtener
el grado de

**MAESTRO EN INGENIERIA
(HIDRAULICA)**

CIUDAD UNIVERSITARIA, MARZO DE 1987.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

En este trabajo, se presenta a la función de distribución General de Valores Extremos para mínimos, como una alternativa en el análisis de frecuencias de sequías. Se realiza una investigación bibliográfica para conocer el estado del arte, se desarrollan las expresiones que permiten estimar los ~~parámetros~~ de esta función, así como sus límites de confianza, a través de los métodos de momentos y de máxima verosimilitud, se efectúa un análisis comparativo de dicha función de distribución con respecto a las funciones de distribución Lognormal de 3 parámetros y la Pearson Tipo III al aplicarlas al análisis de frecuencias de sequías de la región noroeste de país y se describen los resultados obtenidos.

I N D I C E

CAPITULOS	PAGINA
I).- INTRODUCCION.....	1
II).- REVISION DE LITERATURA	6
III).- CARACTERISTICAS Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD GENERAL DE VALORES EXTREMOS, LOGNORMAL DE 3 PARAMETROS Y PEARSON TIPO III	
III.1).- Consideraciones Generales	18
III.2).- La función de Distribución de Probabilidad General de Valores Extremos para Mínimos	33
III.3).- La función de Distribución Lognormal de 3 parámetros	45
III.4).- La función de Distribución Pearson Tipo III o Gamma de 3 parámetros	51
IV).- METODOS DE ESTIMACION DE PARAMETROS DE LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD GENERAL DE VALORES EXTREMOS PARA MINIMOS, LOGNORMAL DE 3 PARAMETROS Y PEARSON TIPO III	
IV.1).- Introducción	54
IV.2).- Estimación de Parámetros de la Función de Distribución General de Valores Extremos para Mínimos	59
IV.3).- Estimación de Parámetros de la Función de Distribución Lognormal de 3 Parámetros	69
IV.4).- Estimación de Parámetros de la Función de distribución de Probabilidad Gamma de 3 Parámetros	73

V).- LIMITES DE CONFIANZA	
V.1).- Introducción	78
V.2).- Límites de Confianza de la Distribución General de Valores Extremos para Mínimos	82
V.3).- Límites de Confianza de la Distribución Lognormal de 3 Parámetros	86
V.4).- Límites de Confianza de la Distribución Pearson Tipo III o Gamma de 3 parámetros	88
VI).- APLICACIONES	91
VII).- DISCUSION DE RESULTADOS	130
VIII).- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	140
BIBLIOGRAFIA	142

CAPITULO I

INTRODUCCION

Los datos científicos pueden ser clasificados en dos tipos: datos experimentales y datos históricos. La mayoría de los datos hidrológicos son de tipo histórico los cuales son observados de fenómenos hidrológicos naturales.

Los datos hidrológicos son la información sobre la cual generalmente se basan las investigaciones hidrológicas. Las cantidades cuantitativas de datos hidrológicos pueden ser expresados en términos estadísticos y tratados con teorías de probabilidad.

Uno de los problemas más importantes en hidrología es la interpretación de un registro de eventos hidrológicos del pasado para pronosticar las futuras probabilidades de ocurrencia. En este problema está involucrado la estimación de frecuencias de avenidas, sequías, lluvias, etc.. El procedimiento involucrado es conocido como análisis de frecuencias.

La sequía es definida, en un sentido amplio, como un período extenso de aridez. Pero para definirla y analizarla convenientemente es necesario considerarla en dos dimensiones que son: magnitud y duración. Sin embargo en este trabajo solamente se analizarán las magnitudes de sequías.

En un análisis de magnitudes de sequías se considera la descarga

mínima (gasto mínimo) durante cada año, la cual es definida como la descarga mínima promedio para un periodo dado de tiempo dentro de un año. La variación de estas descargas es de naturaleza probabilística por lo que es imposible pronosticarlas en forma exacta y la manera de estimarlas es por medio de la teoría de probabilidades. Por esta razón el análisis de frecuencias de sequías es de gran importancia para el diseño de plantas de tratamiento, de plantas hidroeléctricas, para proyectos de irrigación, para construcción de presas, embalses, etc., pues se basan más en una aproximación probabilística que en una aproximación determinística.

En el análisis de frecuencias de sequías, para efectos de diseño, interesa conocer la probabilidad de ocurrencia $F(x)$ de que una sequía anual X sea menor o igual que un determinado valor fijo x , llamada la sequía de diseño, en un número determinado de años en promedio $T(x)$, llamado periodo de retorno. Esta relación matemáticamente se expresa así, (Joseph, 1970):

$$T(x) = 1/F(x) \quad (1.1)$$

y

$$F(x) = \text{prob}(X \leq x) \quad (1.2)$$

La probabilidad de ocurrencia $F(x)$ se determina con base en los registros de gastos mínimos. Estos registros están formados de n valores de gastos mínimos anuales obtenidos de n años de observación. Se supone que estos n valores son una muestra de una población infinita de valores de gastos mínimos. También se supone que existe una distribución de probabilidad teórica de flujos mínimos

para cada registro. La forma de esta distribución puede ser alterada si ocurre algún cambio climatológico o alteración física en cuenca de drenaje.

Una aproximación empírica para determinar la forma de la distribución de probabilidad teórica de gastos mínimos es ajustar las principales funciones de distribución de probabilidad a los registros de gastos mínimos observados y decidir, por criterio adecuado, cuál función de distribución se ajusta mejor a dichos registros.

En este trabajo se propone el uso de la función de distribución General de Valores Extremos para Mínimos, como una alternativa para el ajuste de los registros de flujos mínimos en el análisis de frecuencias de sequías. La función de distribución de probabilidad General de Valores Extremos es la solución general al Postulado de Estabilidad, el cual debe cumplir cualquier extremo, y contempla como caso particular a la distribución de valores extremos tipo III, la muy conocida distribución Weibull, la cual es la más popular en el análisis de frecuencias de sequías. Se proporcionan las expresiones de los estimadores de momentos y de máxima verosimilitud para los parámetros de la distribución General de Valores Extremos Para Mínimos. También se efectúa un análisis comparativo de la función de distribución General de Valores Extremos para Mínimos con respecto a las funciones de distribución Lognormal de 3 Parámetros y la Pearson Tipo III o Gamma de 3 Parámetros en el ajuste de 17 registros de gastos mínimos de la región noroeste del país.

A continuación se describe brevemente el contenido de este trabajo.

En el capítulo II se presenta una revisión de literatura sobre algunos de los trabajos de investigación ~~más importantes~~ que se han efectuado sobre el análisis de frecuencias de sequías. En el capítulo III se presentan las características y propiedades más importantes de las funciones de distribución General de Valores Extremos (GVE) para Mínimos, la Lognormal de 3 Parámetros y la Pearson tipo III. En el capítulo IV se desarrollan las expresiones de los estimadores de momentos y de máxima verosimilitud para los parámetros de la función de distribución General de Valores Extremos para Mínimos y se presentan los estimadores de momentos y de máxima verosimilitud para las funciones de distribución Lognormal y Pearson Tipo III. En el capítulo V se desarrollan las expresiones para estimar los límites de confianza de la GVE para Mínimos por los métodos de Momentos y de Máxima Verosimilitud y se presentan las expresiones para calcular los límites de confianza de la Lognormal y de la Pearson tipo III. En el capítulo VI se aplican los resultados obtenidos en los capítulos III, IV y V a 17 registros de gastos mínimos de las estaciones que se encuentran sobre los ríos de la región noroeste del país, y a 5 registros para cada una de las sequías de 10, 30, 60, 90 y 180 días consecutivos de duración. Para seleccionar la función de distribución de mejor ajuste se usó el método del Error Estándar de Ajuste (EEA). También se consideró el caso de 9 registros que tienen datos de flujo cero. El método ~~que se usó~~ para el tratamiento de este tipo de registros se basa en un axioma de probabilidad

conjunta y fue desarrollado por Joseph (1970). En el capítulo VII se discuten los resultados obtenidos en el capítulo VI. Finalmente en el capítulo VIII se presentan conclusiones derivadas de los capítulos VI Y VII y se dan algunas recomendaciones para futuros trabajos de investigación y de aplicación.

CAPITULO II

REVISION DE LITERATURA

No han publicado muchos artículos sobre las aplicaciones de la estadística teórica al análisis de frecuencias de avenidas (eventos máximos), pero el análisis de frecuencias de sequías (flujos bajos o eventos mínimos) ha sido comparativamente escaso. Esto puede deberse al hecho de que una avenida severa es instantánea y dinámica, en tanto una sequía prolongada tiene un efecto lento y acumulativo en años. Sin embargo las sequías son tan devastadoras como las avenidas en términos del sufrimiento humano. Además un análisis estadístico de sequías es de gran importancia para la construcción de presas, plantas hidroeléctricas, embalses, etcétera.

Para un análisis estadístico, las sequías han sido definidas como los volúmenes anuales más pequeños de las descargas medias diarias de un río, Gumbel, E. J. (1933), los cuales son mayores o iguales al valor x .

En el análisis estadístico de frecuencias de sequías, para efecto de diseño, interesa conocer la probabilidad $F(x)$ de que una sequía (anual) X , sea menor o igual que un valor fijo x , sequía de diseño, en un número esperado de años $T(x)$, período de retorno. Esta relación matemáticamente se expresa así, (Joseph, 1970):

$$T(x) = 1/F(x) \quad (2.1)$$

donde $T(x)$ es el número esperado de años correspondientes a una

sequía menor que x y $F(x)$ es la probabilidad de que una sequía sea menor que x , o sea,

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (2.2)$$

La probabilidad de que una variable X sea igual o mayor que un cierto valor de x , es:

$$R(x) = P(X > x) \quad (2.3)$$

y la relación entre ambas probabilidades, $F(x)$ y $R(x)$, es:

$$F(x) = 1 - R(x) \quad (2.4)$$

Una aproximación empírica para determinar la forma de la distribución de probabilidad $F(x)$ es ajustar las principales funciones de distribución a datos observados y decidir, usando un criterio adecuado, cual es la que mejor se ajusta a los datos (registro histórico de flujos bajos de los ríos donde se requiera este tipo de análisis). Las funciones de probabilidad deben cumplir con las restricciones estadísticas y físicas siguientes, Matelas (1963):

1.-Que tengan un límite inferior igual o mayor que cero, ya que las sequías observadas son mayores o iguales a cero.

2.-Que la función de distribución esté definida, a lo más, por 3 (tres) parámetros. Esto es debido al hecho de que el número de años del registro, n , es pequeño y los errores muestrales grandes están asociados con parámetros los cuales son definidos por momentos de cuarto orden o mayores.

Gumbel, E.J. (1958) fue el primero en investigar el ajuste de las funciones de probabilidad a flujos bajos. Él discutió el uso de la tercera distribución asintótica de valores pequeños, también conocida como Weibull, basado en la teoría asintótica de valores pequeños la cual considera las hipótesis siguientes:

- 1.- La distribución inicial es tal que $n=365$ es un número grande
- 2.- La descarga diaria, la cual es interdependiente para unos cuantos días sucesivos, son independientes para diferencias grandes en el tiempo.

La función de distribución de probabilidad (Weibull) es de la siguiente forma:

$$R(x) = e^{-\left(\frac{x-m}{u-m}\right)^K} \quad (2.5)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-m}{u-m}\right)^K} \quad (2.6)$$

y su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \left(\frac{K}{u-m}\right) \left(\frac{x-m}{u-m}\right)^{K-1} e^{-\left(\frac{x-m}{u-m}\right)^K} \quad (2.7)$$

donde: m es llamada la sequía mínima y es el límite inferior de la función. m es la sequía para la cual:

$$T(m)=\infty, R(m)=1, F(m)=0$$

u es llamada la sequía característica y es la sequía para la cual:

$$T(u)=1.58198, \quad R(u)=1/e=0.3679, \quad F(u)=1-1/e=0.6321$$

k es un parámetro sin dimensiones que está relacionado con el parámetro de forma λ , así:

$$\lambda=1/k$$

Estimaciones previas indican que:

$$0 < \lambda < 1$$

m y u tienen las mismas dimensiones que x y están relacionados así:

$$u = m^k$$

cuando $k=1$ se tiene la distribución exponencial y cuando $k=2$ se tiene la distribución Rayleigh.

Los parámetros de la función de distribución Weibull han sido estimados por Gumbel (1958): 1) a través del método de momentos, 2) usando un orden estadístico sobre la sequía característica, Gumbel (1963); 3) por medio de un método que hace uso de la sequía observada más pequeña, Matalas (1963); 4) haciendo uso del método de máxima verosimilitud, Deininger, R.A. et al (1969); 5) usando una técnica basada en una secuencia de mínimos cuadrados y en una búsqueda de Fibonacci y finalmente por Greenwood et al (1979) usando el método de momentos de probabilidad pesada.

Matalas, N. (1963) investigó el ajuste de cuatro (4) funciones de distribución de probabilidad a flujos bajos. Las funciones de distribución usadas fueron: 1) la distribución Weibull, anteriormente discutida, 2) la distribución Lognormal de 3 parámetros, 3) la

distribución Pearson tipo III y 4) la distribución Pearson tipo V.

Los parámetros de tales funciones de distribución fueron estimados por los métodos de momentos y de ~~máxima~~ ~~verosimilitud~~ siendo este método el que mejor ajuste dió.

La evaluación de la aplicabilidad de estas funciones se hizo con base en dos(2) criterios, que son:

1).-Este criterio se basa en la relación entre el valor mínimo observado de los flujos bajos y el límite inferior de la función de distribución de probabilidad considerada.

2).-Este criterio está basado sobre la relación observada entre el coeficiente de asimetría y la kurtosis con respecto a las relaciones teóricas entre asimetría y kurtosis.

La forma de las funciones de probabilidad utilizadas, aparte de la función de distribución Weibull, son:

DISTRIBUCION LOGNORMAL DE 3 PARAMETROS. -Su función de densidad de probabilidad $f(x)$, es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v (x-a)} \exp\left\{-\frac{1}{2v^2} [\ln(x-a)-m]^2\right\} \quad (2.8)$$

donde m , v y a son los parámetros de la función y

m es la media de $\ln(x-a)$

v es la desviación estándar de $\ln(x-a)$

a es el límite inferior

Su función de distribución de probabilidad acumulada $F(x)$, es:

$$F(x) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp \left[-\frac{1}{2} z^2 \right] dz \quad (2.9)$$

siendo

$$z = \frac{1}{\sqrt{v}} [\ln(x-a)-m]$$

La expresión (2.9) es idéntica a la forma estandarizada de la distribución normal.

DISTRIBUCION PEARSON TIPO III.—Su función de densidad de probabilidad $f(x)$, es:

$$f(x) = \frac{1}{a \Gamma(b+1)} \left(\frac{x-m}{a} \right)^b \exp \left[- \left(\frac{x-m}{a} \right) \right] \quad (2.10)$$

donde a, m y b son parámetros de la función

$\Gamma(\cdot)$ indica la función gamma completa.

Su función de probabilidad acumulada $F(x)$, es:

$$F(x) = F(u) = \frac{1}{\Gamma(A^2)} \int_0^u e^{-u} u^{A^2-1} du \quad (2.11)$$

siendo $A^2 = b+1$; $u = A + (t+A)$ y $t = (x-R)/s$; \bar{x} es la media de la muestra y s es la desviación estándar de la muestra.

En (2.11) $2u$ es distribuida como CHI-cuadrada con $2A$ grados de libertad.

DISTRIBUCION PEARSON TIPO V.--Su función de densidad de probabilidad $f(x)$, es:

$$f(x) = \frac{1}{a\Gamma(b-1)} \left(\frac{x-m}{a}\right)^{-b} \exp\left[-\frac{a}{x-m}\right] \quad (2.12)$$

donde m, a y b son parámetros de la función y $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma completa.

Su función de probabilidad acumulada $F(x)$, es:

$$F(x) = F(u) = \frac{1}{\Gamma(b-1)} \int_0^u u^{b-2} e^{-u} du \quad (2.13)$$

siendo

$$u = \left[(b-3)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x-\bar{x}}{s} \right)^2 \right]^{-1} (b-2)(b-3)^{\frac{1}{2}}$$

En (2.13) $2u$ es distribuida como CHI-cuadrada con $2(b-1)$ grados de libertad.

Las funciones de distribución anteriormente descritas han sido ampliamente tratadas en el análisis de frecuencias de eventos máximos, por: Huxham, et al (1969); Lowery (1970); Gupta (1970); Ewart et al (1972); Kirby (1972); Bobee (1972, 1973); Matalas (1973); Burges et al (1975, 1978); Kite (1975, 1977); NERC (1975); Buckett et al (1977); Charbeneau (1978); Greenwood et al (1979); Stedinger (1980); Hoshi et al (1981); Rao et al (1981); Lal et al (1982); Condie et al (1982); Cheng et al (1980); Salas et al (1982); Sangal et al (1970) y Singh et al (1985) entre otros.

Raynal (1985) propuso el uso de la distribución General de Valores Extremos para Mínimos como una alternativa en el análisis de frecuencia de sequías, estimando sus parámetros a través del método de Momentos de Probabilidad Pesada. La función de distribución de probabilidad acumulada, $F(x)$, para esta función es:

$$F(x) = 1 - \exp\left\{- \left[1 - \left(\frac{\omega-x}{\alpha}\right)\beta\right]^{1/\beta}\right\} \quad (2.14)$$

donde ω , α y β son los parámetros de ubicación, escala y de forma respectivamente.

La función de densidad de probabilidad de la General de Valores Extremos para Mínimos, $f(x)$, es:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{\omega-x}{\alpha}\right)\beta\right]^{1/\beta-1} e^{-\left[1 - \left(\frac{\omega-x}{\alpha}\right)\beta\right]^{1/\beta}} \quad (2.15)$$

En el capítulo III se discuten ampliamente las propiedades y características de esta función de distribución de probabilidad.

La distribución General de Valores Extremos es la solución general del postulado de estabilidad que deben cumplir los extremos, la cual fue obtenida por Jenkinson (1955). La relación entre eventos extremos mínimos y eventos extremos máximos está dado por el principio de simetría, Gumbel (1958):

$$F(-x) = 1 - F(x) \text{ o } F(x)_{\min} = 1 - F(-x)_{\max} \quad (2.16)$$

La función de distribución de probabilidad acumulada de la General de Valores Extremos para máximos es, NERC(1975):

$$F(x) = \exp\left\{- \left[1 - \frac{(x-w)}{\alpha}\right]^\beta\right\} \quad (2.17)$$

La función de distribución General de Valores Extremos contempla a las funciones de distribución de valores extremos tipo I, II y III como casos particulares.

Para la tipo, III	$\beta > 0$,	$\alpha > 0$,	$-\infty < x \leq w + \frac{\alpha}{\beta}$
II	$\beta < 0$,	$\alpha > 0$,	$w + \frac{\alpha}{\beta} < x < \infty$
I	$\beta = 0$,	$\alpha > 0$,	$-\infty < x < \infty$

y es el límite entre la tipo II y la tipo III

Entre las investigaciones que se han efectuado con la función general de valores extremos para el caso de eventos máximos destacan las siguientes:

Fisher y Tippett (1928) mostraron que los valores extremos satisfacían una ecuación funcional llamada "El Postulado de Estabilidad". Jenkinson (1955) obtuvo la solución general del postulado de estabilidad. Esta solución es una función de probabilidad a la que posteriormente se le llamaría función de distribución general de valores extremos. El evaluó los parámetros a través de los métodos de momentos y de máxima verosimilitud. Años más tarde el mismo Jenkinson (1969) estimó los parámetros de esta función por los métodos de percentiles y de máxima verosimilitud. NERC (1975) le da la forma de la ecuación (2.17) y estima sus parámetros por los méto-

dos gráfico, de momentos, de máxima verosimilitud y de sextiles.

Lynn et al (1979) presentaron un método para generar muestras ordenadas de números aleatorios usando la distribución general de valores extremos.

Prescott et al (1980) estimaron los parámetros de la distribución general de valores extremos usando el método de máxima verosimilitud. En este mismo año Otten et al (1980) estimaron los parámetros de la GVE con este método pero introduciendo algunas modificaciones al procedimiento de Jenkinson, para de esta manera reducir el número de iteraciones y la probabilidad de falla del procedimiento. Años más tarde Reynal (1984) aplica el método de momentos de probabilidad pesada para estimar los parámetros de la GVE y los compara con los estimadores de máxima verosimilitud.

Hosking et al (1985) estiman los parámetros de la GVE por el método de momentos de probabilidad pesada y los compara con los estimadores de máxima verosimilitud y de sextiles.

El método de momentos de probabilidad pesada también resulta un método conveniente y poderosa prueba para saber si una distribución de valores extremos es tipo I, II o III. Anteriormente ya se habían desarrollado otras pruebas al respecto como las debidas a Otten et al (1978) y Hosking (1984).

Con respecto a otro tipo de problemas referentes al análisis de frecuencia de sequías como son: 1) El cálculo del período de retor-

no de un proyecto de diseño de sequeas y 2) La estimación de la sequía anual para un proyecto, la cual es tratada como una función de la vida útil y de los niveles de seguridad del proyecto. Estos problemas ya han sido tratados por: a) Joseph (1970) quien muestra un método para estimar la probabilidad y el período de retorno asociado con la sequía de diseño de un proyecto. b) Ewart et al (1972) quienes analizan los flujos mínimos medios diarios anuales para descargas mínimas de 5, 15 y 30 días consecutivos del Río Mekong Bajo, usando la distribución Weibull, a la cual le estimó sus parámetros, por el método de momentos. c) Mashidani et al (1980) quienes analizan las sequeas sobre el Río Tigris usando para ello las funciones de distribución: VEII, VEI, Gamma-2, Raíz Cuadrada de la Normal, Normal y Lognormal, usando una metodología que les evitó el dilema de elegir la función de distribución más adecuada para la estimación de la sequía. d) Prakash (1981) quien aplicó la transformación SMAX a 66 registros de flujos bajos, normalizando los datos de los registros y obteniendo estimadores razonables de flujos bajos a intervalos de recurrencia de 100 años. Además realizó un análisis comparativo entre las distribuciones: Lognormal, LogPearson Tipo III, Gumbel y el SMAX para determinados períodos de retorno. e) Metcalfe et al (1981) hicieron una aplicación de la distribución Weibull a un caso real. f) Kumar et al (1982) quienes usaron la transformación de potencias a un caso semejante al analizado por Prakash y realiza un análisis comparativo de la transformación de potencias y el SMAX.

Un problema que comúnmente se presenta en el análisis de frecuencias de sequeas es el ajuste de funciones de probabilidad a re-

registros que tienen datos de cero flujo. Este problema ha sido estudiado por: a) Condie (1969), b) Jennings et al (1969), c) Joseph (1970), d) Kilmer et al (1972) y e) Kite (1977).

Los problemas que se presentan cuando se ajusta una función de distribución a un registro que tiene cero en sus datos son:

1.- La función de distribución ~~comúnmente~~ usada para registros con datos todos mayores que cero ya no se ajusta adecuadamente cuando el registro tiene datos de flujo cero.

2.- Si se aplica una transformación logarítmica al conjunto de datos, resulta que el logaritmo de cero es $-\infty$ y no se puede calcular.

El método que usaron Condie (1969) y Joseph (1970) para superar estas dificultades se basa en el uso de una función de probabilidad conjunta, donde la probabilidad de cero flujo se combina conjuntamente con la condición de que ocurra flujo (capítulo VI).

CAPITULO III

CARACTERISTICAS Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD GENERAL DE VALORES EXTREMOS, LOGNORMAL DE 3 PARAMETROS Y LA PEARSON TIPO III.

Antes de discutir las características y propiedades de las funciones de distribución de probabilidad General de Valores Extremos para Mínimos, Lognormal de 3 parámetros y la Pearson Tipo III se ha considerado conveniente presentar las características más importantes de las funciones de distribución de probabilidad en general y las definiciones de los parámetros estadísticos más importantes.

III.1).-CONSIDERACIONES GENERALES

La definición de probabilidad puede ser considerada desde el punto de vista de filosofía, psicología o matemáticas. Pero es suficiente poder distinguir entre dos tipos de probabilidad, que son: la probabilidad subjetiva y la frecuencia relativa de probabilidad.

Frecuencia relativa de probabilidad. - Se define por

$$p(A/B) = \lim_{M \rightarrow \infty} m(A)/M$$

donde $p(A/B)$ es la frecuencia relativa de probabilidad de A dado B

A es el evento de que un flujo que excede un determinado

valor a ocurra

B es el valor de un año

m(A) es el número de años en los cuales ocurre A

La información sobre la cual $p(A/B)$ está basada, para la aplicación de la estadística teórica, es obtenida de la probabilidad de frecuencia relativa estimada de los flujos anuales observados.

La manipulación algebraica de probabilidades y la estadística usadas en este trabajo están basadas sobre los 3 axiomas siguientes:

i) $0 < p(A/B) < 1$

ii) Si A_1, A_2, \dots, A_n son exclusivos dado B entonces

$$p(A_1 \text{ o } A_2 \text{ o } \dots \text{ o } A_n) = p(A_1/B) + p(A_2/B) + \dots + p(A_n/B)$$

iii) $p(C/AB) p(A/B) = p(AC/B)$ siendo A y C estadísticamente independientes.

Variable aleatoria. - Es una variable definida sobre un espacio muestral y que pertenece a cualquier intervalo de los números reales. Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas.

Variable aleatoria discreta. - Es la variable aleatoria cuyo conjunto de valores es finito (o infinitamente contable)

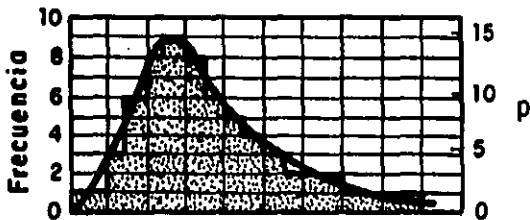
Variable aleatoria continua. - Es la variable aleatoria cuyo conjunto de valores es infinito

La variable aleatoria se designa con X y al valor individual que toma la variable X se designa con x .

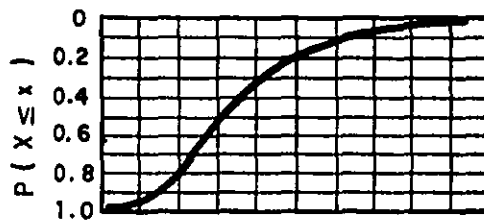
Para variables aleatorias discretas, al número de ocurrencia de x se le llama frecuencia. Cuando el número de frecuencia se dibuja contra x como abscisa se obtiene el patrón de distribución, llamado distribución de frecuencia, (figura 1).

Cuando el número de frecuencia de una variable aleatoria discreta se divide entre el número total de ocurrencia se obtiene la frecuencia de ocurrencia de la variable x . Cuando el número de experimentos tiende a ∞ entonces la frecuencia se iguala con la probabilidad de ocurrencia. A la distribución de probabilidades de todas las x se le llama distribución de probabilidad, (figura 1).

La probabilidad acumulada de x es la probabilidad de que la variable aleatoria, X , sea menor o igual que x , y es designada por $P(X \leq x)$, (figura 2).



(1)



(2)

Fig 1 Se ilustra la distribución de frecuencia y la probabilidad p de la variable aleatoria discreta x

Fig 2 Ilustra la probabilidad acumulada de x , $P(X \leq x)$, correspondiente a la probabilidad p

Para variables aleatorias continuas se tienen las siguientes definiciones, Woodroof (1975), Hann (1977), NERC (1975):

Función de densidad de probabilidad univariada (f). - Se define como la función f valuada en los reales y que satisface

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty \quad (3.1.1)$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (3.1.2)$$

La figura 3 ilustra una función de densidad de probabilidad.

Función de distribución de probabilidad acumulada (F). - Se define como la probabilidad de que la variable X sea menor o igual que un determinado valor de x ; y se designa por

$$F(x) = P(X \leq x) \quad \text{y}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty \quad (3.1.3)$$

o

$$F(x) = P(a \leq x < b)$$

$$F(x) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b \quad (3.1.4)$$

La figura 4 ilustra la función de distribución de probabilidad acumulada correspondiente a la función de densidad de probabilidad de la figura 3.

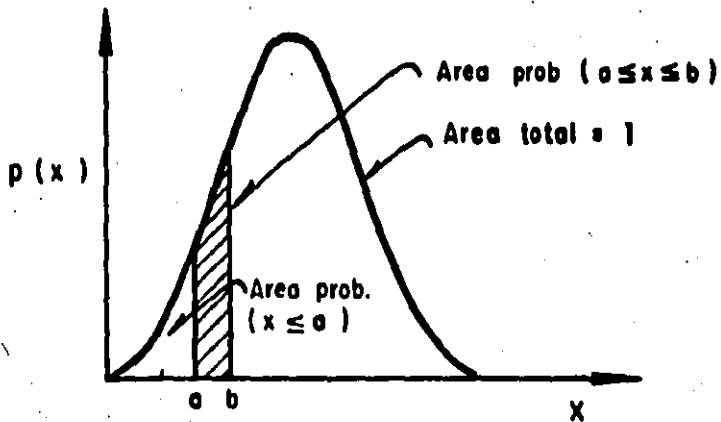


Fig 3 Función de densidad de probabilidad

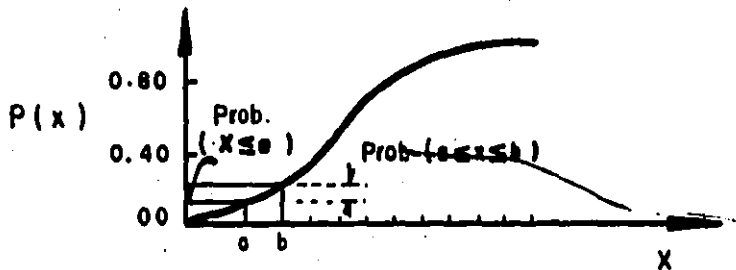


Fig 4 Función de distribución de probabilidad acumulada

De la ecuación (3.1.3) se observa que la relación entre $f(x)$ y $F(x)$ está dada por

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) \quad \text{o} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty \quad (3.1.5)$$

para la cual f es continua y F es continuamente diferenciable

La figura 5 ilustra las formas más comunes que puede tomar la función de densidad de probabilidad.

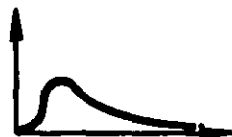
Se observa de las definiciones anteriores que $f(x)$ no es una probabilidad y puede tomar valores mayores que uno, en cambio $F(x)$ sí es una probabilidad y su intervalo de valores es $0 \leq F(x) \leq 1$

La probabilidad de que la variable aleatoria X sea mayor o igual que x está dada por

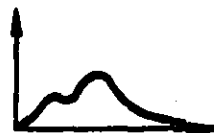
$$P(X > x) = 1 - F(x) \quad (3.1.6)$$



Uniforme



Asimétrico derecha (o izquierda)



Multimodal



Forma de "J"



Forma de "J" invertida



Forma de "U"



Exponencial

Fig 5 Algunas posibles formas para funciones de densidad

Para el análisis de frecuencias de sequías se considera al espacio muestral como al conjunto de gastos mínimos que puedan presentarse en una determinada estación hidrológica. Una muestra de este espacio muestral sería el conjunto de gastos mínimos que se hayan registrado en dicha estación. Por lo tanto, con base en las

definiciones anteriores, se tiene que un registro de gastos mínimos es una variable aleatoria discreta, pero para facilitar el análisis matemático y el análisis estadístico se usan las distribuciones continuas como una aproximación conveniente de las variables aleatorias discretas. Este uso está basado en las hipótesis siguientes: 1) los datos observados están distribuidos independientemente en el tiempo, 2) los escurrimientos siguen una distribución específica, 3) la estimación de los parámetros es no sesgada y 4) el tamaño de la muestra es razonablemente grande. Aunque la validez de cada hipótesis es cuestionable, rara vez la probabilidad estimada está sujeta al análisis de sensibilidad, para valorar los efectos de estas hipótesis en los resultados.

Como puede observarse una variable aleatoria es caracterizada por su distribución de probabilidad y está usualmente es descrita en dos maneras:

a) Por su función de distribución de probabilidad acumulada (fpa) $F(x)$ y por su función de densidad de probabilidad (fdp) $f(x)$.

b) Expresando la variable x como una función de otra variable y

$$x = H(y) \tag{3.1.7}$$

donde la fpa $F(y)$ de y es conocida.

Este método es más usual cuando

$$x = a + b.y \quad (3.1.8)$$

donde a y b son los parámetros de ubicación y de escala, respectivamente, de la distribución x ; y para la distribución y el parámetro de escala es 1 y el parámetro de ubicación es 0; en este caso a y b se la conoce como la variable reducida o estandarizada con respecto a x .

PROPIEDADES IMPORTANTES DE LAS VARIABLES ALEATORIAS

Momentos y Esperanza de las distribuciones univariadas.

El ~~crisis~~ momento con respecto al origen (μ'_r) está dado por

$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \quad (3.1.9)$$

y el ~~crisis~~ momento (μ_r) con respecto a la media (μ'_1) está dado por

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu'_1)^r f(x) dx \quad (3.1.10)$$

El Valor Esperado de la variable aleatoria X ($E(x)$) está dado por

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3.1.11)$$

Si $g(x)$ es una función de x entonces

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \quad (3.1.12)$$

$$E(x) = \mu'_1 = \bar{x} \quad (3.1.13)$$

$$E[(x - \mu'_1)^r] = \mu_r \quad (3.1.14)$$

$$E(c) = c \quad (3.1.15.a)$$

$$E[c \cdot g(x)] = c \cdot E[g(x)] \quad (3.1.15.b)$$

$$E[g_1(x) \pm g_2(x)] = E[g_1(x)] \pm E[g_2(x)] \quad (3.1.15.c)$$

donde c es una constante

Media y Varianza de una función lineal de variables aleatorias

Sean x e y variables aleatorias relacionadas por la ecuación (3.1.8). Entonces la media y la varianza de x en términos de y son

$$E(x) = a + b \cdot E(y) \quad (3.1.16)$$

$$\text{Var}(x) = b^2 \cdot \text{var}(y) \quad (3.1.17)$$

Si la variable x está relacionada con su correspondiente variable reducida y por

$$x = \mu + \sigma y \quad (3.1.18)$$

donde μ y σ son la media y la desviación estándar de x , entonces

$$E(x) = \mu + \sigma E(y) \quad (3.1.19)$$

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 \text{var}(y) \quad (3.1.20)$$

Si

$$x = a + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \quad (3.1.21)$$

siendo b_1, b_2 y b_3 constantes entonces

$$E(x) = a + b_1 E(y_1) + b_2 E(y_2) + b_3 E(y_3) \quad (3.1.22)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) = & b_1^2 \text{Var}(y_1) + b_2^2 \text{Var}(y_2) + b_3^2 \text{Var}(y_3) + 2 b_1 b_2 \text{Cov}(y_1, y_2) \\ & 2 b_1 b_3 \text{Cov}(y_1, y_3) + 2 b_2 b_3 \text{Cov}(y_2, y_3) \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Otras propiedades

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}(x)/n = \frac{\sigma^2}{N} \quad (3.1.24)$$

$$E(xy) = E(x) \cdot E(y) \quad (3.1.25)$$

$$\text{Var}(xy) = E(xy)^2 - E^2(xy) \quad (3.1.26)$$

$$\text{Cov}(x, y) = E(xy) - E(x) \cdot E(y) \quad (3.1.27)$$

siendo x e y independientes

Momentos de la muestra

Si x_i $V_i=1, n$ es una muestra aleatoria entonces el **estadístico momento** con respecto al origen está dado por

$$M_r^* = \sum_{i=1}^N x_i^r / N \quad (3.1.28)$$

y el **estadístico momento** con respecto a la media (m_i) por

$$M_r = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^r / N \quad (3.1.29)$$

El valor esperado de los momentos de la muestra son iguales a los momentos de la población.

Dos de las propiedades más importantes de los momentos son

a) El primer momento con respecto a la media es cero

$$E(x - \mu_1^i) = 0 \quad (3.1.30)$$

b) El segundo momento con respecto al origen es igual a la varianza más el cuadrado de la media

$$E(X^2) = \sigma^2 + \bar{\mu}^2 = \sigma^2 + \bar{X}^2 \quad (3.1.31)$$

Los momentos con respecto a la media están relacionados con los momentos con respecto al origen por

$$M_r = \sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} \mu_1^{r-s} M'_{r-s} \quad (3.1.32)$$

Los resultados para los 4 primeros momentos de la muestra son

$$M = 0 \quad (3.1.33)$$

$$M = M'_2 - \bar{X}^2 \quad (3.1.34)$$

$$M = M'_3 - 3 \bar{X} M'_2 + 2 \bar{X}^3 \quad (3.1.35)$$

$$M = M'_4 - 4 \bar{X} M'_3 + 6 \bar{X}^2 M'_2 - 3 \bar{X}^4 \quad (3.1.36)$$

PARAMETROS ESTADISTICOS

Las características de una distribución estadística pueden ser definidas por parámetros estadísticos. A continuación se definen los parámetros estadísticos más importantes y útiles para el análisis de frecuencias de sequías.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Media aritmética.- Es un valor promedio

$$\mu_X = E(X) = \mu'_1 \quad (3.1.37)$$

μ_x es la media de una variable aleatoria X

\bar{X} es un estimador muestral de la media de la población y se estima con

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (3.1.38)$$

donde n es el número de datos de la muestra

Media geométrica.

$$X_g = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \quad (3.1.39)$$

Mediana. - La mediana de la muestra X_{md} , es la observación tal que divide a la muestra en dos partes iguales.

La mediana de la población, μ_{md} , debe satisfacer

$$\int_{-\infty}^{\mu_{md}} f(x) dx = 0.5 \quad (3.1.40)$$

Moda. - Es el valor que más frecuentemente ocurre.

La moda de la población, μ_{mo} , será el valor de X que maximice a $f(x)$ y satisfaga las ecuaciones

$$df(x)/dx = 0 \quad \text{y} \quad d^2f(x)/dx^2 < 0 \quad (3.1.40.a)$$

La moda de la muestra, X_{mo} , es el valor que más frecuentemente ocurre en la muestra.

MEDIDAS DE DISPERSION

Rango. - El rango de una muestra es la diferencia entre los valores máximo y mínimo.

El rango de la población puede ser de $-\infty$ a ∞ ó de 0 a ∞ .

Varianza.—La varianza de una variable aleatoria X está definida como el segundo momento con respecto a la media.

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \mu_2 = E[(x - \mu_x^2)] = E(x^2) - E^2(x) \quad (3.1.41)$$

La estimación de σ^2 de la muestra está denotado por S^2

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (3.1.42)$$

S^2 es un estimador sin sesgo para σ^2 .

Se dice que un estimador $\hat{\theta}$ es sin sesgo si $E(\hat{\theta}) = \theta$.

La varianza de algunas funciones de la variable aleatoria X puede ser determinada de las siguientes relaciones:

$$\text{Var}(c) = 0 \quad (3.1.43.a)$$

$$\text{Var}(cx) = c^2 \text{Var}(x) \quad (3.1.43.b)$$

$$\text{Var}(a+bx) = b^2 \text{Var}(x) \quad (3.1.43.c)$$

Una medida dimensional de dispersión es el coeficiente de variación C_v

$$\text{para la muestra} \quad C_v = \frac{S}{\bar{X}} \quad (3.1.44)$$

$$\text{para la población} \quad C_v = \frac{\sigma}{\mu_x} \quad (3.1.45)$$

MEDIDAS DE ASIMETRÍA

La mayoría de las funciones de distribución no son simétricas. Estas pueden estar cargadas hacia la derecha o hacia la izquierda y se dice que son asimétricas. La medida de asimetría más comúnmente usada es el coeficiente de asimetría y está dado por, Haan (1977):

para la población

$$\gamma = \mu_3 / \mu_2^{3/2} \quad (3.1.46)$$

Un estimador sin sesgo para el coeficiente de asimetría basado en el tamaño n de la muestra es

$$G = n^2 M_3 / (n-1)(n-2) S^3 \quad (3.1.47)$$

donde M_3 es el estimador de la muestra para μ_3 .

El coeficiente de asimetría puede ser estimado de la muestra por

$$g = \hat{G} = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^3 + 2 \bar{x}^3 - 3 \bar{x} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right] / s^3 \quad (3.1.48)$$

En la figura (6) se muestran distribuciones simétricas, asimétricamente negativa y asimétricamente positiva.

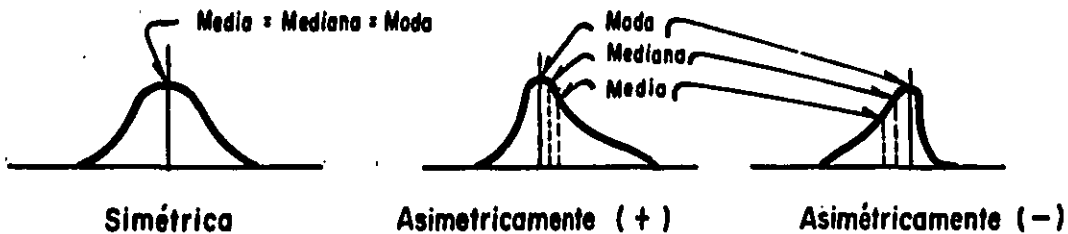


Fig 6 Ubicación de Media, Mediana y Moda

MEDIDA DE APUNTAMIENTO

Kurtosis.- Se refiere a que tan achatada o alargada es una distribución de probabilidad en comparación con la distribución de probabilidad normal).

Kurtosis de la población

$$K = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad (3.1.49)$$

Estimador de la muestra para la kurtosis

$$K = M_4 / S^4 \quad (3.1.50)$$

donde M_4 es el estimador de la muestra para μ_4 .

Un estimador no sesgado para la kurtosis es obtenido con

$$\hat{K} = (n^3 / [(n-1)(n-2)(n-3)]) * K \quad (3.1.51)$$

La kurtosis para una distribución normal es 3 y es llamada mesocúrtica. Si $K > 3$ se tiene una distribución leptocúrtica y si $K < 3$ se tiene una distribución platicúrtica.

Coefficiente de exceso (e) está definido por $e = K - 3$

En la figura (7) se muestran las distribuciones mesocúrtica, leptocúrtica y platicúrtica.

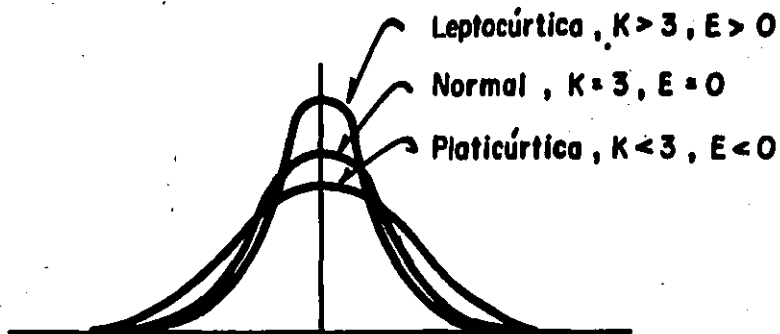


Fig 7 Ilustración de Kurtosis

III.2).- LA FUNCION DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD GENERAL DE VALORES EXTREMOS PARA MINIMOS.

Su función de distribución de probabilidad acumulada $E(x)$, (Raynal, 1985), es

$$F(x) = 1 - e^{-\left[1 - \left(\frac{w-x}{\alpha}\right)^\beta\right]^{1/\beta}} \quad (3.2.1)$$

Con base en la ecuación (3.1.5), su función de densidad de probabilidad $f(x)$, es:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{w-x}{\alpha}\right)^\beta\right]^{1/\beta - 1} e^{-\left[1 - \left(\frac{w-x}{\alpha}\right)^\beta\right]^{1/\beta}} \quad (3.2.2)$$

donde w es el parámetro de ubicación, α es el parámetro de escala y β es el parámetro de forma.

La ecuación (3.2.1) consta de 3 ramas, dependiendo del valor que adquiera el parámetro de forma β , que son

Tipo III	$\beta > 0$;	$\alpha > 0$;	$w - \frac{\alpha}{\beta} < x < \infty$
II	$\beta < 0$;	$\alpha > 0$;	$-\infty < x < w - \frac{\alpha}{\beta}$
I	$\beta = 0$;	$\alpha > 0$;	$-\infty < x < \infty$

Como puede observarse de las expresiones anteriores el parámetro de escala α , siempre es positivo, y para $\beta > 0$ el límite inferior para la función de distribución representada por la ecuación (3.2.1) es $w - \frac{\alpha}{\beta}$

La rama tipo I se presenta en el límite entre las ramas tipo II y la tipo III.

Cuando $\beta = 0$ la ecuación (3.2.1) adquiere la forma

$$F(x) = 1 - \exp(-\exp[-(\frac{w-x}{a})]) \quad (3.2.3)$$

y podría decirse que es la función de distribución Gumbel para mínimos.

Comprobación de que la ecuación (3.2.3) es un caso particular de la ecuación (3.2.1) para $\beta = 0$

Considerando la ecuación

$$\mu = (w - x)/a \quad (3.2.4)$$

y sustituyéndola en la ecuación (3.2.1) se obtiene

$$F(x) = 1 - \exp(-[1-\beta\mu]^{1/\beta}) \quad (3.2.5)$$

Ahora usando los logaritmos en series de Taylor como una aproximación para $\ln [1-\beta\mu]^{1/\beta}$

$$\ln[1-\beta\mu]^{1/\beta} = \frac{1}{\beta} \ln [1-\beta\mu] = \frac{1}{\beta} [-\beta\mu - \frac{(\beta\mu)^2}{2} - \frac{(\beta\mu)^3}{3} - \dots]$$

$$\ln [1-\beta\mu] = -\mu - \frac{\beta\mu^2}{2} - \frac{\beta^2\mu^3}{3} - \dots \quad (3.2.6)$$

sacando antilogaritmo a ambos miembros de la ecuación (3.2.6) se tiene

$$e^{\ln(1-\beta\mu)^{1/\beta}} = (1-\beta\mu)^{1/\beta} = e^{-\mu - \frac{\beta\mu^2}{2} - \frac{\beta^2\mu^3}{3} \dots} \quad (3.2.7)$$

y en el límite para cuando $\beta \rightarrow 0$ la ecuación (3.2.7) se transforma en

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} [1-\beta\mu]^{1/\beta} = e^{-\mu} \quad (3.2.8)$$

sustituyendo (3.2.4) en la ecuación (3.2.8) se tiene

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} [1 - \beta (w-x)/\alpha]^{1/\beta} = e^{-(w-x)/\alpha} \quad (3.2.9)$$

en el límite cuando $\beta \rightarrow 0$, se sustituye la ecuación (3.2.9) en la ecuación (3.2.1) y resulta

$$F(x) = 1 - \exp \{-[e^{-(w-x)/\alpha}]\} \quad (3.2.10)$$

La ecuación (3.2.10) es idéntica a la ecuación (3.2.3) con lo cual queda demostrado que (3.2.3) es un caso particular de (3.2.1) cuando $\beta \rightarrow 0$.

Considerando la variable reducida

$$y = \left(\frac{w-x}{\alpha}\right) \quad (3.2.11)$$

la ecuación (3.2.3) puede expresarse en la forma reducida

$$F(x) = 1 - \exp \{-\exp (-y)\} \quad (3.2.12)$$

y adquiere el nombre de Gumbel para Mínimos reducida.

Relacionando la variable reducida, y , de la ecuación (3.2.12) con la variable original, x , de la ecuación (3.2.1) se obtiene

$$[1 - \beta (w-x)/\alpha]^{1/\beta} = e^{-y} \quad (3.2.13)$$

de donde

$$x = w - \alpha (1 - e^{-\beta y})^{1/\beta} \quad (3.2.14)$$

La ecuación (3.2.14) establece la relación entre la variable reducida, y , y la variable original x .

La ecuación (3.2.14) es una línea recta cuando $\beta \rightarrow 0$, representada por

$$x-w = -\alpha y \quad (3.2.15)$$

La ecuación (3.2.15) es una línea recta con pendiente negativa

Demostración.

De la ecuación (3.2.14) pasando w al miembro izquierdo y sacando el límite a ambos miembros de la ecuación cuando $\beta \rightarrow 0$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} x-w = \lim_{\beta \rightarrow 0} -\alpha (1-e^{-\beta y})/\beta = -\alpha y$$

además de la ecuación (3.2.11)

$$x-w = -\alpha y$$

lo cual es una relación lineal.

Despejando la variable y de la ecuación (3.2.13), se tiene

$$Y = -\frac{1}{\beta} \text{LN} [1 - \beta(w - x)/\alpha] \quad (3.2.16)$$

la cual es la variable reducida de la función de distribución GVE para mínimos.

Para expresar los valores reducidos de las ramas tipo II y tipo III se hace uso de la variable reducida

$$y = 1 - \beta(\omega - x)/\alpha \quad (3.2.17)$$

que para la rama tipo III se expresa por

$$Y_3 = 1 - \beta(\omega - x_3)/\alpha, \quad 0 \leq Y_3 < 1, \quad \beta > 0 \quad (3.2.18)$$

La función de distribución de probabilidad acumulada para la variable reducida, de la ecuación (3.2.1), es

$$G(Y_3) = 1 - e^{-Y_3^{1/\beta}} \quad (3.2.19)$$

y la función de densidad de probabilidad, de la ecuación (3.2.2), es

$$g(Y_3) = \frac{1}{\beta} e^{-Y_3^{1/\beta}} Y_3^{1/\beta - 1} \quad (3.2.20)$$

Para expresar los valores originales x_3 en función de la variable reducida Y_3 , se despeja x_3 de la ecuación (3.2.18)

$$x_3 = \left(\omega - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{\alpha}{\beta} Y_3 \quad (3.2.21)$$

y haciendo

$$A_3 = \omega - \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{y} \quad B_3 = \frac{\alpha}{\beta} \quad (3.2.22)$$

La ecuación (3.2.21) se puede expresar como

$$x_3 = A_3 + B_3 Y_3 \quad (3.2.23)$$

Procediendo de la misma manera para la rama tipo II se obtiene

$$-Y_2 = 1 - \beta(\omega - x_2)/\alpha, \quad -\infty < Y_2 \leq 0, \beta < 0 \quad (3.2.24)$$

$$G(Y_2) = 1 - e^{-(-Y_2)^{1/\beta}} \quad (3.2.25)$$

$$g(Y_2) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-(-Y_2)^{1/\beta}} (-Y_2)^{1/\beta - 1} \quad (3.2.26)$$

$$x_2 = (\omega - \frac{\alpha}{\beta}) - \frac{\alpha}{\beta} Y_2 \quad (3.2.27)$$

$$\text{Haciendo } A_2 = (\omega - \frac{\alpha}{\beta}) \quad \text{y} \quad B_2 = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (3.2.28)$$

La expresión (3.2.28) se puede expresar como

$$x_2 = A_2 + B_2 Y_2 \quad (3.2.29)$$

Con base en los resultados de las ecuaciones (3.2.22) y (3.2.29) las ecuaciones (3.2.23) y (3.2.29) pueden ser representadas por la ecuación general

$$x = A + B y \quad (3.2.30)$$

donde $A = (\omega - \frac{\alpha}{\beta})$ puede ser considerado como un nuevo parámetro de ubicación (límite inferior de x cuando $\beta > 0$ y límite superior de x cuando $\beta < 0$) y

$$B = (-1)^j \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \quad \begin{array}{l} j=1 \text{ para } \beta < 0 \\ j=2 \text{ para } \beta > 0 \end{array} \quad (3.2.31)$$

de tal manera que $B > 0$ es un nuevo parámetro de escala.

Y es la variable reducida y se obtendrá con la ecuación (3.2.18) si $\beta > 0$ y por la ecuación (3.2.24) si $\beta < 0$

Puede verse de las ecuaciones (3.2.19), (3.2.20), (3.2.25) y (3.2.26) que éstas dependen únicamente del parámetro β , conocida la variable reducida y_2 o y_3 según sea el caso y es por esta razón que β determina el tipo de rama de la distribución GVE.

La relación entre las variables reducidas de las ramas tipo I, II y III de la GVE para mínimos respectivamente está dado por

$$y_2 = -\exp[-\beta y], \quad \beta < 0 \quad (3.2.32)$$

$$y_3 = \exp[-\beta y], \quad \beta > 0 \quad (3.2.33)$$

La función General de Valores extremos para mínimos, ecuación (3.2.1), es una función explícita por lo que su forma inversa se obtiene despejando x de esta ecuación.

La forma inversa de la GVE para mínimos es

$$x = \omega + \frac{\alpha}{\beta} \left\{ \left[-\ln(1-F(x)) \right]^\beta - 1 \right\} \quad (3.2.34)$$

Características Estadísticas de la Función de Distribución General de Valores Extremos (GVE) para Mínimos

Con base en las definiciones de la media, ecuación (3.1.37), varianza, ecuación (3.1.41), coeficiente de asimetría, ecuación (3.1.46) y con base en la relación lineal de variables aleatorias, ecuación (3.1.37), la media, ecuación (3.1.16) y la varianza, ecuación (3.1.17), para las ecuaciones (3.2.23) y (3.2.29) son

Para la cama positiva (tipo III)

$$\text{Media} = A_3 + B_3 E(y_3) \quad (3.2.35)$$

$$\text{Varianza} = B_3^2 \text{Var}(y_3) \quad (3.2.36)$$

Los momentos de la variable reducida y_3 con respecto al origen se calculan con la ecuación general, NERC(1975)

$$E(y_3^r) = \Gamma(1 + r\beta) = \mu^r y \quad (3.2.37)$$

y los primeros 6 momentos resultan ser

$$r \quad E(y_3^r) = \Gamma(1 + r\beta) \quad (3.2.38)$$

$$1 \quad E(y_3) = \Gamma(1 + \beta) \quad (3.2.39)$$

$$2 \quad E(y_3^2) = \Gamma(1 + 2\beta) \quad (3.2.40)$$

$$3 \quad E(y_3^3) = \Gamma(1 + 3\beta) \quad (3.2.41)$$

$$4 \quad E(y_3^4) = \Gamma(1 + 4\beta) \quad (3.2.42)$$

$$5 \quad E(y_3^5) = \Gamma(1 + 5\beta) \quad (3.2.43)$$

$$6 \quad E(y_3^6) = \Gamma(1 + 6\beta) \quad (3.2.44)$$

y los momentos de y_3 con respecto a la media se calculan con la expresión general, NERC(1975)

$$\mu^r y = E[y_3 - E(y_3)]^r \quad (3.2.45)$$

y los primeros 6 momentos resultan ser

Segundo momento con respecto a la media

$$\mu_{2y} = E[y_3 - E(y_3)]^2 = \Gamma(1+2\beta) - \Gamma^2(1+\beta) = \text{Var}(y_3) \quad (3.2.45)$$

Tercer momento con respecto a la media

$$\mu_3 y = E[\bar{y}_3 - E(y_3)]^3 = \Gamma(1+3\beta) - 3\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+\beta) + 2\Gamma^3(1+\beta) \quad (3.2.46)$$

Cuarto momento con respecto a la media

$$\mu_4 y = E[\bar{y}_3 - E(y_3)]^4 = \Gamma(1+4\beta) - 4\Gamma(1+3\beta)\Gamma(1+\beta) + 6\Gamma(1+2\beta)\Gamma^2(1+\beta) - 3\Gamma^4(1+\beta) \quad (3.2.47)$$

Quinto momento con respecto a la media

$$\begin{aligned} \mu_5 y = E[\bar{y}_3 - E(y_3)]^5 &= \Gamma(1+5\beta) - 5\Gamma(1+4\beta)\Gamma(1+\beta) \\ &+ 10\Gamma(1+3\beta)\Gamma^2(1+\beta) - 10\Gamma(1+2\beta)\Gamma^3(1+\beta) + 4\Gamma^5(1+\beta) \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

Sexto momento con respecto a la media

$$\begin{aligned} \mu_6 y = E[\bar{y}_3 - E(y_3)]^6 &= \Gamma(1+6\beta) - 6\Gamma(1+5\beta)\Gamma(1+\beta) + 15\Gamma(1+4\beta)\Gamma^2(1+\beta) \\ &- 20\Gamma(1+3\beta)\Gamma^3(1+\beta) + 15\Gamma(1+2\beta)\Gamma^4(1+\beta) - 5\Gamma^6(1+\beta) \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

Para la rama negativa (tipo II)

$$\text{Media} = A_2 + B_2 E(y_2) \quad (3.2.50)$$

$$\text{Varianza} = B_2^2 \text{Var}(y_2) \quad (3.2.51)$$

Los momentos de la variable reducida y_2 con respecto al origen estan dados por la ecuación general, NERC(1975)

$$\mu^r y = E(y_2^r) = (-1)^r \Gamma(1+r\beta) \quad (3.2.52)$$

y los primeros 6 momentos resultan ser

$$r \quad E(y_2^r) = (-1)^r \Gamma(1+r\beta)$$

$$1 \quad E(y_2) = -\Gamma(1+\beta) = \mu_1^y \quad (3.2.53)$$

$$2 \quad E(y_2^2) = \Gamma(1+2\beta) \quad (3.2.54)$$

3	$E(y_2^3) = -\Gamma(1+3\beta)$	(3.2.55)
4	$E(y_2^4) = \Gamma(1+4\beta)$	(3.2.56)
5	$E(y_2^5) = -\Gamma(1+5\beta)$	(3.2.57)
6	$E(y_2^6) = \Gamma(1+6\beta)$	(3.2.58)

y los momentos con respecto a la media están dados por la expresión general, NERC(1975)

$$\mu_r y = E[y_2 - E(y_2)]^r \quad (3.2.59)$$

Los primeros 6 momentos resultaron ser

Segundo momento con respecto a la media

$$\mu_2 y = E[y_2 - E(y_2)]^2 = \Gamma(1+2\beta) - \Gamma^2(1+\beta) = \text{Var}(y_2) \quad (3.2.60)$$

Tercer momento con respecto a la media

$$\mu_3 y = E[y_2 - E(y_2)]^3 = -\Gamma(1+3\beta) + 3\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+2\beta) - 2\Gamma^3(1+\beta) \quad (3.2.61)$$

Cuarto momento con respecto a la media

$$\begin{aligned} \mu_4 y = E[y_2 - E(y_2)]^4 = & \Gamma(1+4\beta) - 4\Gamma(1+3\beta)\Gamma(1+\beta) \\ & + 6\Gamma(1+2\beta)\Gamma^2(1+\beta) - 3\Gamma^4(1+\beta) \end{aligned} \quad (3.2.62)$$

Quinto momento con respecto a la media

$$\begin{aligned} \mu_5 y = E[y_2 - E(y_2)]^5 = & -\Gamma(1+5\beta) + 5\Gamma(1+4\beta)\Gamma(1+\beta) \\ & - 10\Gamma(1+3\beta)\Gamma^2(1+\beta) + 10\Gamma(1+2\beta)\Gamma^3(1+\beta) - 4\Gamma^5(1+\beta) \end{aligned} \quad (3.2.63)$$

Sexto momento con respecto a la media

$$\begin{aligned} \mu_6 y = E[y_2 - E(y_2)]^6 = & \Gamma(1+6\beta) - 6\Gamma(1+5\beta)\Gamma(1+\beta) + 15\Gamma(1+4\beta)\Gamma^2(1+\beta) \\ & - 20\Gamma(1+3\beta)\Gamma^3(1+\beta) + 15\Gamma(1+2\beta)\Gamma^4(1+\beta) - 5\Gamma^6(1+\beta) \end{aligned} \quad (3.2.64)$$

Con base en las ecuaciones (3.1.16) y (3.1.17) y los resultados anteriores los momentos de la variable original x con respecto a la media y al origen resultaron ser

Primer momento de x con respecto al origen

$$\mu_1' = \omega + \frac{\alpha}{\beta} [\Gamma(1+\beta) - 1] \quad (3.2.65)$$

Segundo momento de x con respecto a la media

$$\mu_2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} [\Gamma(1+2\beta) - \Gamma^2(1+\beta)] \quad (3.2.66)$$

Tercer momento con respecto a la media

$$\mu_3 = \frac{\alpha^3}{\beta^3} (-1)^j [\Gamma(1+3\beta) - 3\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+2\beta) + 2\Gamma^3(1+\beta)]; \quad \begin{matrix} j = 1 \text{ PARA } \beta < 0 \\ j = 2 \text{ PARA } \beta > 0 \end{matrix} \quad (3.2.67)$$

Cuarto momento con respecto a la media

$$\mu_4 = \frac{\alpha^4}{\beta^4} [\Gamma(1+4\beta) - 4\Gamma(1+3\beta)\Gamma(1+\beta) + 6\Gamma(1+2\beta)\Gamma^2(1+\beta) - 3\Gamma^4(1+\beta)] \quad (3.2.68)$$

Quinto momento con respecto a la media

$$\mu_5 = \frac{\alpha^5}{\beta^5} (-1)^j [\Gamma(1+5\beta) - 5\Gamma(1+4\beta)\Gamma(1+\beta) + 10\Gamma(1+3\beta)\Gamma^2(1+\beta) - 10\Gamma(1+2\beta)\Gamma^3(1+\beta) + 4\Gamma^5(1+\beta)] \quad \begin{matrix} j = 1 \text{ PARA } \beta < 0 \\ j = 2 \text{ PARA } \beta > 0 \end{matrix} \quad (3.2.69)$$

Sexto momento con respecto a la media

$$\mu_6 = \frac{\alpha^6}{\beta^6} [\Gamma(1+6\beta) - 6\Gamma(1+5\beta)\Gamma(1+\beta) + 15\Gamma(1+4\beta)\Gamma^2(1+\beta) - 20\Gamma(1+3\beta)\Gamma^3(1+\beta) + 15\Gamma(1+2\beta)\Gamma^4(1+\beta) - 5\Gamma^6(1+\beta)] \quad (3.2.70)$$

Los resultados anteriores de los momentos con respecto a la media de x , μ_r , (μ_r) pueden relacionarse con los momentos con respecto a la media de y , μ_{ry} , ($\mu_{ry} = E[y - E(y)]^r$) mediante la siguiente expresión

$$\mu_r = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r E[y - E(y)]^r \quad (3.2.71)$$

El coeficiente de asimetría, ecuación (3.1.46), resultó ser

$$\gamma = \frac{(-1)^j [\Gamma(1+3\beta) - 3\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+2\beta) + 2\Gamma^3(1+\beta)]}{[\Gamma(1+2\beta)\Gamma^2(1+\beta)]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.2.72)$$

$j=1$ para $\beta < 0$

$j=2$ para $\beta > 0$

III.3).- LA FUNCION DE DISTRIBUCION LOGNORMAL DE 3 PARAMETROS

Esta función de distribución ha sido ampliamente tratada para eventos máximos, como se mencionó en el capítulo II, pero para mínimos solo ha sido empleada por Matélas (1963)

Su función de densidad de probabilidad es. (Matélas, 1963, NERC, 1975):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y (x-x_0)} e^{-\frac{1}{2} \frac{[\ln(x-x_0)-\mu_y]^2}{\sigma_y^2}} \quad (3.3.1)$$

donde μ_y es el parámetro de escala
 σ_y es el parámetro de forma
 y x_0 es el parámetro de ubicación o límite inferior de la función.

Se considera la variable reducida

$$y = \ln(x-x_0) \quad (3.3.2)$$

el parámetro de ubicación será de tal manera que y sea normalmente distribuida

μ_y y σ_y son la media y la desviación estándar de y respectivamente, esto es

$$\mu_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\ln(x_i-x_0)] \quad (3.3.3)$$

$$\sigma_y = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\ln(x_i-x_0)-\mu_y]^2 \right\}^{1/2} \quad (3.3.4)$$

Una de las limitantes de la ecuación (3.3.1) es que $x-x_0$ tiene que ser mayor que cero, esto es

$$x-x_0 > 0 \quad (3.3.5)$$

porque el logaritmo de un número negativo o cero tiende a infinito.

La relación entre la variable reducida y y la variable original está dada por

$$x = x_0 + e^y \quad (3.3.6)$$

La Función de Distribución de Probabilidad Acumulada de la Lognormal de 3 parámetros es

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \int_{-\infty}^x \frac{1}{x-x_0} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x-x_0) - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right] dx \quad (3.3.7)$$

Las características estadísticas de esta función de distribución son, (NERC, 1975):

$$\text{Media} = x_0 + e^{\mu_y + \frac{1}{2} \sigma_y^2} \quad (3.3.8)$$

$$\text{Varianza} = e^{(2\mu_y + \sigma_y^2)} \cdot (e^{\sigma_y^2} - 1) \quad (3.3.9)$$

$$\text{Coeficiente de Asimetría} = (e^{\sigma_y^2} - 1)^{\frac{3}{2}} (e^{\sigma_y^2} + 2) \quad (3.3.10)$$

Cuando el parámetro de ubicación es cero, $x_0=0$, se tiene el caso particular de la Función de Distribución Lognormal de 2 parámetros y la ecuación (3.3.1) se reduce a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y x} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right] \quad (3.3.11)$$

que es la función de densidad de probabilidad de la Lognormal-2 Parámetros.

La variable reducida es, de la ecuación (3.3.2):

$$y = \text{LN } x \quad (3.3.12)$$

Las características estadísticas de esta distribución son

$$\text{Media} = e^{\mu y + \frac{1}{2} \sigma_y^2} \quad (3.3.13)$$

$$\text{Varianza} = e^{(2\mu y + \sigma_y^2)} \cdot (e^{\sigma_y^2} - 1) \quad (3.3.14)$$

$$\text{Coeficiente de variación} = \text{Cv} = (e^{\sigma_y^2} - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.15)$$

El coeficiente de asimetría se estima con la ecuación (3.3.10)

La relación entre la variable reducida de la ecuación (3.3.12) y la variable original de la ecuación (3.3.11), está dada por

$$x = e^y \quad (3.3.16)$$

La Función de Distribución de Probabilidad Acumulada de la Lognormal-2 Parámetros, correspondiente a la ecuación (3.3.11), es

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \int_0^x \frac{1}{x} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\text{LN } x - \mu y}{\sigma_y}\right)^2\right] dx \quad (3.3.17)$$

Las ecuaciones (3.3.11) y (3.3.17) solamente son válidas para valores de x mayores que cero, $x > 0$.

Las ecuaciones (3.3.7) y (3.3.17) no pueden ser resueltas directamente, y para obtener el valor de $F(x)$ se usa un algoritmo de integración.

Una manera indirecta para evaluar $F(x)$, consiste en usar la variable reducida y , dadas por las ecuaciones (3.3.2) y (3.3.12), la cual se sustituye en las ecuaciones (3.3.7) y (3.3.17), según sea el caso, y se obtiene la expresión:

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma y} \int_{-\infty}^y \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-uy}{\sigma y}\right)^2\right] dy \quad (3.3.18)$$

Esta expresión nos permite hacer uso de la variable estandarizada

$$u = \frac{y-uy}{\sigma y} \quad (3.3.19)$$

Por lo que con base en la ecuación (3.3.19), la ecuación (3.3.18) puede escribirse así:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp\left[-\frac{1}{2} u^2\right] du \quad (3.3.20)$$

Para obtener los valores de $F(u)$, en la ecuación anterior, Abramowitz et al (1965) proponen la siguiente aproximación polinomial, la cual permite un error de $<10^{-5}$,

$$F(u) = 1 - f(u) (0.43618V - 0.12017V^2 + 0.9373V^3) \quad (3.3.21)$$

donde

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} u^2\right] \quad (3.3.22)$$

$$V = 1/[1+0.33267u] \text{ para } u \geq 0 \quad (3.3.23)$$

y para $u < 0$ $F(u) = 1 - F(u)$

Para estimar $F(u)$, también puede usarse la aproximación propuesta por la IBM (1968), la cual está dada por

$$F(u) \approx 1 - F(u) W \{0.3193815 + W[-0.3565638 + W[1.781478 + W(-1.821256 + 1.330274 W)]]\} \quad (3.3.24)$$

W definido para $u \geq 0$ por

$$W = 1/(1+0.2316419 u) \quad (3.3.25)$$

Donde el valor de u , para el caso de la Lognormal-3 parámetros,

será dado por

$$u = \frac{\ln(x/x_0) - \mu y}{\sigma y} \quad (3.3.26)$$

y para el caso de la Lognormal-2 parámetros, por

$$u = \frac{\ln x - \mu y}{\sigma y} \quad (3.3.27)$$

La inversa de la función de distribución Lognormal-3 parámetros, ecuación (3.3.7), puede ser determinada por, despejada de la ecuación (3.3.26),:

$$x_1 = x_0 + \exp\{\mu y + U(\sigma y)\} \quad (3.3.28)$$

y para la Lognormal-2 parámetros, ecuación (3.3.16), despejada de la ecuación (3.3.27), por:

$$x_1 = \exp\{\mu y + U(\sigma y)\} \quad (3.3.29)$$

donde

x_1 es la inversa correspondiente a la función de distribución acumulada $F(x)$, ecuaciones (3.3.7) y (3.3.17), según sea el caso

U es la inversa de la variable normal estandarizada correspondiente a la probabilidad $F(x)$.

Para estimar u se usa la aproximación siguiente, Abramowitz et al (1965):

$$u = V - \frac{a_0 + a_1 V + a_2 V^2}{1 + b_1 V + b_2 V^2 + b_3 V^3} \quad (3.3.30)$$

donde	$a_0 = 2.515517$	$b_1 = 1.432788$
	$a_1 = 0.802853$	$b_2 = 0.189269$
	$a_2 = 0.010328$	$b_3 = 0.001308$

$$v = [-2 \ln F(x)]^{1/2}, \quad 0 < F(x) \leq 0.5 \quad (3.3.31)$$

$$v = [-2 \ln(1-F(x))]^{1/2}, \quad 0.5 < F(x) \leq 1.0, \quad u = -u \quad (3.3.32)$$

III.4).- LA FUNCION DE DISTRIBUCION PEARSON TIPO III O GAMMA DE 3 PARAMETROS

Su función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \frac{1}{|\alpha| \Gamma(\beta)} \left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)} \quad (3.4.1)$$

donde x es la variable aleatoria; α , es el parámetro de escala; x_0 , es el parámetro de ubicación; β , es el parámetro de forma; $\Gamma(\beta)$ es la función gamma con argumento β .

La ecuación (3.4.1) con $\alpha > 0$ es equivalente a la ecuación (2.10), que uso Matias (1963) en su estudio sobre el análisis de frecuencias de flujos mínimos. Además es igual a la presentada por NERC (1975), Kite (1977) y por Salas (1982).

La función de distribución de probabilidad acumulada correspondiente a la ecuación (3.4.1) es:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{|\alpha| \Gamma(\beta)} \left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)} \quad \text{si } \alpha > 0 \quad (3.4.2)$$

$$F(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{|\alpha| \Gamma(\beta)} \left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)} \quad \text{si } \alpha < 0 \quad (3.4.3)$$

Un caso particular de la ecuación (3.4.1) es cuando $x_0 = 0$, y esta expresión se reduce a

$$f(x) = \frac{1}{|\alpha| \Gamma(\beta)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-x/\alpha} \quad (3.4.4)$$

La ecuación (3.4.4) es conocida como la función de densidad de probabilidad Gamma de 2 parámetros y su función de distribución

de probabilidad acumulada correspondiente es

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{|\alpha| \Gamma(\beta)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-(x/\alpha)} \quad \text{si } \alpha > 0 \quad (3.4.5)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{|\alpha| \Gamma(\beta)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-(x/\alpha)} \quad \text{si } \alpha < 0 \quad (3.4.6)$$

Una manera de obtener los valores de $F(x)$ para un valor determinado de x , mediante las ecuaciones (3.4.2), (3.4.3), (3.4.5) o (3.4.6) según sea el caso, es usando un algoritmo de integración. (ver referencia 1).

Para obtener la inversa de las ecuaciones anteriores se propone el procedimiento siguiente:

- 1.- Se fija un valor cualquiera de $F(x)$
- 2.- Se propone un valor de x y mediante el algoritmo de integración, aplicado a las ecuaciones (3.4.2)-(3.4.6) según sea el caso, se obtiene un valor $F(x_1)$.
- 3.- Si $F(x_1)$ es aproximadamente igual a $F(x)$, dentro de una tolerancia razonable, entonces el valor de x_1 es la inversa de $F(x)$.

Si sucede lo contrario se propondrá otro valor de x , hasta que el valor de $F(x)$ calculado sea aproximadamente igual al valor de $F(x)$ fijado en el paso 1.

Las características de asimetría de la función Gamma (positiva o negativa), ecuaciones (3.4.1) o (3.4.4), está definida por el valor que adquiere el parámetro de escala: Es asimétricamente positiva

cuando $\alpha > 0$ y su límite inferior es x_0 , el rango para x es: $x_0 < x < \infty$

Si $\alpha < 0$ la función Gamma resulta ser asimétricamente negativa y el rango de valores para x es: $-\infty < x < x_0$.

Las características estadísticas de la función de distribución Gamma-3 parámetros, con base en las ecuaciones (3.1.9), (3.1.10), (3.1.37), (3.1.41), (3.1.46), (3.1.49) y (3.4.1), son:

$$\text{Media} = \mu_1 = \frac{\alpha}{|\alpha|} [x_0 + \alpha\beta] \quad (3.4.7)$$

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = \beta \cdot \alpha^2 \quad (3.4.8)$$

$$\text{Coeficiente de asimetría} = \frac{\alpha}{|\alpha|} \cdot \frac{2}{\sqrt{\beta}} \quad (3.4.9)$$

$$\text{Coeficiente de kurtosis} = 3 + 6/\beta \quad (3.4.10)$$

Siendo la desviación estándar positiva por definición; para su cálculo, partiendo de la ecuación (3.4.8), el parámetro de escala, α , debe ser considerado en su valor absoluto: $\alpha = |\alpha|/\sqrt{\beta}$

Como se observa en la ecuación (3.4.9) el parámetro de forma debe ser siempre positivo.

Para el caso particular de $x_0 = 0$, función de distribución Gamma-2 parámetros, las características estadísticas son:

$$\text{Media} = \mu_1 = \frac{\alpha}{|\alpha|} [\alpha\beta]$$

La Varianza, el coeficiente de asimetría y el coeficiente de Kurtosis se estiman igual que para la Gamma-3 parámetros, ecuaciones (3.4.8)-(3.4.10).

CAPITULO IV

MÉTODOS DE ESTIMACION DE PARÁMETROS DE LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD GENERAL DE VALORES EXTREMOS PARA MINIMOS, LOGNORMAL Y PEARSON TIPO III.

IV.1).-INTRODUCCION

Las funciones de distribución de probabilidad, como las presentadas en los capítulos II y III, están expresadas en su forma funcional y para poder definir las completamente para una población o una muestra en particular es necesario estimar sus parámetros, θ , con base en los datos de la muestra representativa de la población.

Los parámetros $\hat{\theta}$, obtenidos con base en los datos de la muestra se dice que son los estimadores de los parámetros θ , de la población o de dichas distribuciones de probabilidad.

Los estimadores $\hat{\theta}$, deben ser eficientes, suficientes y consistentes, Hoan (1977). Se dice que un estimador $\hat{\theta}$ será el estimador más eficiente de θ si es insesgado (sin sesgo) y su varianza, $\text{Var}(\hat{\theta})$, es menor que la de cualquier otro estimador de θ sin sesgo. Un estimador $\hat{\theta}$ de un parámetro θ es insesgado si $E(\hat{\theta}) = \theta$. Por lo tanto el sesgo está dado por $E(\hat{\theta}) - \theta$.

Se dice que un estimador $\hat{\theta}$ es un estimador suficiente para θ , si usa toda la información relativa a θ que está contenida en la

muestra.

Un estimador $\hat{\theta}$ de un parámetro θ se dice que es consistente si la probabilidad de que $\hat{\theta}$ difiera de θ por más de una constante arbitraria es aproximadamente cero cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito. Esto es:

$$p(|\hat{\theta}-\theta|>\epsilon) \sim 0 \quad (4.1.1)$$

Como esta propiedad es asintótica entre más grande sea la muestra la probabilidad de que $\hat{\theta}$ converga a θ es mayor, y entre más pequeña sea la muestra es más factible que se presenten problemas de sesgo e inconsistencia. Por lo tanto entre más grande sea la muestra la $Var(\hat{\theta})$ será más pequeña y por ende más fácil elegir métodos que nos proporcionen estimadores insesgados y consistentes.

Entre los principales métodos de estimación de parámetros destacan los siguientes: método de Momentos (M), de Máxima Verosimilitud (MV), de Mínimos Cuadrados, de Sextiles, de Momentos de Probabilidad Pésada y Gráfico.

Para los propósitos que se persiguen en este trabajo se eligieron los métodos más tradicionales de estimación de parámetros que son el método de Momentos (M) y el de Máxima Verosimilitud (MV), los cuales se explican a continuación.

METODO DE MOMENTOS

Para una distribución de m parámetros, el procedimiento consiste en igualar los primeros m momentos de la población a los primeros m momentos de la muestra. De esto resultan m ecuaciones las cuales se resuelven simultáneamente para los m parámetros desconocidos. Esto es, los momentos de la función de distribución están directamente ligados con los parámetros estadísticos de la muestra a la cual se quiere ajustar.

El primer momento con respecto al origen, μ_1' , es igual a la media de la muestra, \bar{x} . Esto es

$$\mu_1' = \bar{x} \quad (4.1.2)$$

El segundo momento con respecto a la media, μ_2 , es igual a la varianza de la muestra, S^2 o $\hat{\sigma}^2$. Esto es

$$\mu_2 = \hat{\sigma}^2 = S^2 \quad (4.1.3)$$

Y el coeficiente de asimetría de la muestra, g , está relacionado con el segundo, μ_2 , y tercer momento, μ_3 , con respecto a la media por la expresión siguiente:

$$g = \hat{\gamma} = \mu_3 / \mu_2^{3/2} \quad (4.1.4)$$

METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD

Se supone que si se tienen n observaciones aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n su distribución de probabilidad conjunta es

$$f_x(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \quad (4.1.5)$$

por lo tanto para una muestra aleatoria, cuando las X_i son independientes y su distribución de probabilidad conjunta puede escribirse como

$$f_x(x_1; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \cdot f_x(x_2; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \dots \quad (4.1.6)$$

La ecuación (4.1.6) es proporcional a la probabilidad de que la muestra aleatoria particular pueda ser obtenida de la población y se conoce como la función de verosimilitud, la cual puede escribirse así

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = \prod_{i=1}^n f_x(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \quad (4.1.7)$$

donde los θ_i , $i=1, m$ parámetros son desconocidos. A los valores de estos m parámetros, que maximizan la función de verosimilitud de la muestra particular, son conocidos como los estimadores de máxima verosimilitud.

El procedimiento de estimación de parámetros consiste en encontrar los valores $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ que maximizan a la función de verosimilitud, ecuación (4.1.7). Esto se logra usando un algoritmo de programación no lineal o tomando las derivadas parciales de $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ con respecto a cada uno de los θ_i 's e igualando las ecuaciones resultantes a cero. Esto es:

$$-\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0; \quad -\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0; \quad \dots; \quad -\frac{\partial L}{\partial \theta_m} = 0 \quad (4.1.8)$$

con esto se obtienen m ecuaciones las cuales son resueltas para los m parámetros desconocidos.

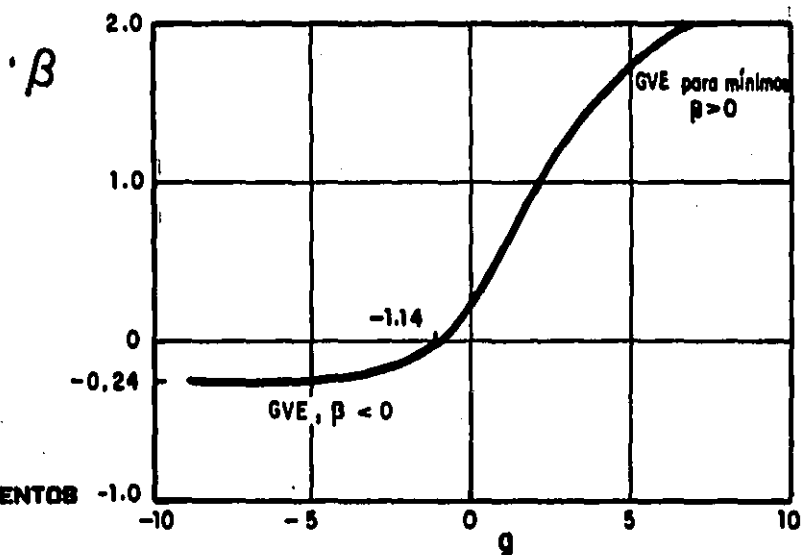
Como muchas distribuciones de probabilidad involucran funciones exponenciales, es mucho más fácil maximizar los logaritmos naturales de la función de verosimilitud. Por lo tanto la ecuación (4.1.7) puede escribirse así:

$$LL(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = \text{LN} \left[\sum_{i=1}^N f_{x_i}(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \right] = \sum_{i=1}^N \text{LN} f_{x_i}(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \quad (4.1.9)$$

y puesto que la función logarítmica es monotónica, los valores de los θ_i que maximizan a LL también maximizan a L.

IV.2).- ESTIMACION DE PARAMETROS DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION GENERAL DE VALORES EXTREMOS PARA MINIMOS

Como se ha mencionado anteriormente, capítulo III, el tipo de rama de la distribución GVE para mínimos depende estrictamente del valor del parámetro de forma, β , y por lo tanto depende de la asimetría de la muestra de datos usada en el análisis. En la figura (4.1) se muestra la relación antes mencionada.



METODO DE MOMENTOS

De acuerdo al procedimiento anteriormente descrito y con base en las ecuaciones (4.1.2)-(4.1.4), (3.2.65), (3.2.66) y (3.2.72) se tiene:

$$\mu_1 = w + \frac{\alpha}{\beta} [\Gamma(1+\beta) - 1] = \bar{x} \quad (4.2.1)$$

$$\mu_2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} [\Gamma(1+2\beta) - \Gamma^2(1+\beta)] = S^2 = \sigma^2 \quad (4.2.2)$$

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = (-1)^j \frac{[\Gamma(1+3\beta) - 3\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+2\beta) + 2\Gamma^3(1+\beta)]}{[\Gamma(1+2\beta) - \Gamma^2(1+\beta)]^{3/2}} \hat{\gamma} = g \quad (4.2.3)$$

$j=1$ para $\beta < 0$

$j=2$ para $\beta > 0$

Despejando w de la ecuación (4.2.1) y α de (4.2.2) se tiene

$$\hat{\sigma} = \bar{x} + \frac{\hat{\sigma}}{\beta} [1 - \Gamma(1 + \beta)] \quad (4.2.4)$$

$$\hat{\alpha} = \hat{\sigma} \beta / [\Gamma(1 + 2\beta) - \Gamma^2(1 + \beta)]^{1/2} \quad (4.2.4)$$

Para obtener los valores de los estimadores $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ y $\hat{\beta}$ se resuelve el sistema de ecuaciones planteado (4.2.3)-(4.2.5) mediante el procedimiento siguiente:

1.- Se calculan los parámetros estadísticos de la muestra. La media, \bar{x} , la desviación estándar, $\hat{\sigma}$, y el coeficiente de asimetría, g .

\bar{x} , con la ecuación (3.1.3B), $\hat{\sigma}$ con la ecuación (3.1.42) y \hat{g} con la ecuación (3.1.4B) y para corregirle el sesgo g , \hat{g} , se sugiere:

$$g = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{N-2} \hat{g} \quad (4.2.6)$$

2.- Se calcula el valor del parámetro β , con los polinomios siguientes, obtenidos del ajuste polinomial y de la inversión de la ecuación (4.2.3), según sea el caso:

$$\text{para } \hat{\beta} < 0 \quad -19.04 \leq g \leq -1.1396$$

$$\hat{\beta} = 0.2466205 + 0.286679 g + 0.07245423g^2 + 0.01017619g^3 + 0.00081625g^4 + 0.000036853g^5 + 8.6489314 \times 10^{-7}g^6 + 8.144635 \times 10^{-9}g^7 \quad (4.2.7)$$

para $\beta > 0$ $-1.1396 \leq g \leq 11.353$

$$\hat{\beta} = 0.279434 + 0.333536g + 0.048306g^2 - 0.0244142g^3 + 0.00376531g^4 - 0.000263166g^5 + 7.013595 \times 10^{-6}g^6 \quad (4.2.8)$$

3.- Se sustituyen los valores de $\hat{\sigma}$ y $\hat{\beta}$, calculados en los pasos 1 y 2 respectivamente, en la ecuación (4.2.5) y se estima el parámetro de escala, $\hat{\alpha}$.

4.- El parámetro de ubicación, $\hat{\omega}$, se calcula sustituyendo los valores de los parámetros \bar{x} , $\hat{\beta}$ y $\hat{\alpha}$, obtenidos en los pasos 1, 2 y 3 respectivamente, en la ecuación (4.2.4).

La inversión de la ecuación (4.2.3) se hizo mediante el programa de regresión polinomial APMI/PROG/REGPOL.

METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD

De acuerdo al método, la ecuación (3.2.2) puede ser expresada como la función de verosimilitud, ecuación (4.1.7), de la función de distribución GVE para mínimos, así:

$$L(x_i, \omega, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^N \left[\frac{1}{\alpha} \left(1 - \left(\frac{\omega - x_i}{\alpha} \right) \beta \right)^{1/\beta - 1} \right] e^{-\sum_{i=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega - x_i}{\alpha} \right) \beta \right]^{1/\beta}} \quad (4.2.9)$$

sacándole el logaritmo natural a la ecuación (4.2.9) se obtiene la función Logarítmica de Verosimilitud de la distribución GVE para mínimos, la cual se expresa así:

$$L.L. = -N \ln(\alpha) + \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \sum_{i=1}^N \ln \left[1 - \left(\frac{\omega - x_i}{\alpha} \right) \beta \right] - \sum_{i=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega - x_i}{\alpha} \right) \beta \right]^{1/\beta} \quad (4.2.10)$$

Considerando la variable reducida, y , de la GVE para mínimos, ecuación (3.2.16), la ecuación (4.2.10) puede expresarse así:

$$LL = -N \ln a - (1-\beta) \sum_{i=1}^N y_i - \frac{N}{\beta} \sum_{i=1}^N e^{-y_i} \quad (4.2.11)$$

donde

$$y_i = -\frac{1}{\beta} \ln(1 - (\frac{w-x_i}{a})^\beta)$$

A partir de aquí, para estimar los parámetros (w, α, β) de la ecuación (3.2.1) pueden seguirse dos caminos. El primero consiste en maximizar la ecuación (4.2.10) mediante el algoritmo de regresión no lineal de Rosenbrock. Y el segundo consiste en obtener las derivadas parciales de la ecuación (4.2.11) con respecto a w, α y β , respectivamente, e igualarlas a cero como se muestra a continuación:

$$-\frac{\partial LL}{\partial w} = -Q/\alpha \quad (4.2.12)$$

$$-\frac{\partial LL}{\partial \alpha} = \frac{(P+Q)}{(\alpha\beta)} \quad (4.2.13)$$

$$-\frac{\partial LL}{\partial \beta} = [R - (P+Q)/\beta]/\beta \quad (4.2.14)$$

donde

$$Q = \sum_{i=1}^N e^{(\beta-1)y_i} - (\frac{1}{\beta}-1) \sum_{i=1}^N e^{\beta y_i}$$

$$P = N - \sum_{i=1}^N e^{-y_i}$$

$$R = N - \sum_{i=1}^N y_i + \sum_{i=1}^N y_i e^{-y_i}$$

Estas ecuaciones pueden ser resueltas simultáneamente para encontrar los estimadores de los parámetros w, α y β .

Como no se tiene una solución explícita posible para determinar \hat{w} , $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, Jenkinson (1969) propuso una solución iterativa, en la cual las funciones $-\frac{\partial LL}{\partial w}$, $-\frac{\partial LL}{\partial \alpha}$ y $-\frac{\partial LL}{\partial \beta}$ son expresadas en series de

Taylor alrededor de los valores máximos de verosimilitud $\hat{\omega}$, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ en las cuales solamente se consideran los términos de primer y segundo orden, esto proporciona

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial LL}{\partial \omega} \\ \frac{\partial LL}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial LL}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 LL}{\partial \omega^2} & -\frac{\partial^2 LL}{\partial \omega \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 LL}{\partial \omega \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \omega} & -\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 LL}{\partial \beta \partial \omega} & -\frac{\partial^2 LL}{\partial \beta \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 LL}{\partial \beta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \omega \\ \Delta \alpha \\ \Delta \beta \end{bmatrix} \quad (4.2.15)$$

resolviendo para los incrementos de los parámetros, la ecuación

(4.2.15) da

$$\begin{bmatrix} \Delta \omega \\ \Delta \alpha \\ \Delta \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 LL}{\partial \omega^2} & -\frac{\partial^2 LL}{\partial \omega \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 LL}{\partial \omega \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \omega} & -\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 LL}{\partial \beta \partial \omega} & -\frac{\partial^2 LL}{\partial \beta \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 LL}{\partial \beta^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial LL}{\partial \omega} \\ \frac{\partial LL}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial LL}{\partial \beta} \end{bmatrix} \quad (4.2.16)$$

Las derivadas parciales $\frac{\partial LL}{\partial \theta_j}$, en donde $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\omega, \alpha, \beta)$, pueden ser calculadas de las ecuaciones (4.2.12)-(4.2.14) asumiendo un conjunto de parámetros, por decir $(\omega_i, \alpha_i, \beta_i)$, en la i -ésima iteración de la solución buscada. Por otro lado, las segundas derivadas parciales de la ecuación (4.2.16) pueden ser calculadas en los puntos donde $\hat{\omega}$, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son los valores de máxima verosimilitud. como estas derivadas aún son desconocidas, Jenkinson sugiere usar los valores esperados $E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \theta_i \partial \theta_j})$ como una aproximación a éstas. Por lo tanto al sustituir los valores esperados de las segundas derivadas en lugar de éstas, la ecuación (4.2.16) toma la forma

$$\begin{bmatrix} \Delta\omega_i \\ \Delta\alpha_i \\ \Delta\beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial\omega^2}) & E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial\omega\partial\alpha}) & E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial\omega\partial\beta}) \\ E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial\alpha\partial\omega}) & E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial\alpha^2}) & E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial\alpha\partial\beta}) \\ E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial\beta\partial\omega}) & E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial\beta\partial\alpha}) & E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial\beta^2}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\frac{\partial LL}{\partial\omega})_i \\ (\frac{\partial LL}{\partial\alpha})_i \\ (\frac{\partial LL}{\partial\beta})_i \end{bmatrix} \quad (4.2.17)$$

La inversa de la matriz cuadrada de la ecuación (4.2.17), es llamada la matriz de Varianza-Covarianza y es la matriz de los estimadores de MV para muestras grandes (Kendall y Stuart, 1967). Jenkinson (1969) expresó tal matriz de Var-Cov en la forma:

$$\begin{bmatrix} \text{Var}(\omega) & \text{Cov}(\omega, \alpha) & \text{Cov}(\omega, \beta) \\ \text{Cov}(\alpha, \omega) & \text{Var}(\alpha) & \text{Cov}(\alpha, \beta) \\ \text{Cov}(\beta, \omega) & \text{Cov}(\beta, \alpha) & \text{Var}(\beta) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} a^2 b & a^2 h & af \\ a^2 h & a^2 a & ag \\ af & ag & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.18)$$

De las ecuaciones (4.2.17) y (4.2.18) se obtuvieron las expresiones siguientes:

$$\Delta\omega_i = \left(\frac{1}{N}\right) a_i \left\{ b\alpha_i \left(\frac{\partial LL}{\partial\omega}\right)_i + h\alpha_i \left(\frac{\partial LL}{\partial\alpha}\right)_i + f \left(\frac{\partial LL}{\partial\beta}\right)_i \right\} \quad (4.2.19)$$

$$\Delta\alpha_i = \left(\frac{1}{N}\right) a_i \left\{ h\alpha_i \left(\frac{\partial LL}{\partial\omega}\right)_i + a\alpha_i \left(\frac{\partial LL}{\partial\alpha}\right)_i + g \left(\frac{\partial LL}{\partial\beta}\right)_i \right\} \quad (4.2.20)$$

$$\Delta\beta_i = \left(\frac{1}{N}\right) \left\{ f\alpha_i \left(\frac{\partial LL}{\partial\omega}\right)_i + g\alpha_i \left(\frac{\partial LL}{\partial\alpha}\right)_i + c \left(\frac{\partial LL}{\partial\beta}\right)_i \right\} \quad (4.2.21)$$

Finalmente los nuevos estimadores en la iteración $i+1$ son obtenidos con

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \Delta\omega_i \quad (4.2.22)$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \Delta\alpha_i \quad (4.2.23)$$

$$\beta_{i+1} = \beta_i + \Delta\beta_i \quad (4.2.24)$$

Los coeficientes a, b, c, f, g y h se obtienen mediante el siguiente procedimiento:

1.- De las ecuaciones (4.2.17) y (4.2.18) se tiene

$$\begin{bmatrix} E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \omega^2}) & E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \omega \partial \alpha}) & E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \omega \partial \beta}) \\ E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \omega}) & E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha^2}) & E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \beta}) \\ E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \beta \partial \omega}) & E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \beta \partial \alpha}) & E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \beta^2}) \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} a^2 b & a^2 h & a f \\ a^2 h & a^2 a & a g \\ a f & a g & c \end{bmatrix} \quad (4.2.25)$$

2.- Por definición de valor esperado, ecuación (3.1.11), se tiene:

$$E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \omega^2}) = - \int_a^b \frac{\partial^2 LL}{\partial \omega^2} f(x) dx \quad (4.2.26)$$

$$E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \omega}) = - \int_a^b \frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \omega} f(x) dx \quad (4.2.27)$$

$$E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \beta \partial \omega}) = - \int_a^b \frac{\partial^2 LL}{\partial \beta \partial \omega} f(x) dx \quad (4.2.28)$$

$$E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \beta}) = - \int_a^b \frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \beta} f(x) dx \quad (4.2.29)$$

$$E(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha^2}) = - \int_a^b \frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha^2} f(x) dx \quad (4.2.30)$$

$$E(-\frac{\partial^2 LL}{\alpha \beta^2}) = - \int_a^b \frac{\partial^2 LL}{\alpha \beta^2} f(x) dx \quad (4.2.31)$$

donde las segundas derivadas están dadas por

$$-\frac{\partial^2 LL}{\partial \omega^2} = \frac{1}{\alpha^2} \left\{ (1-\beta) \sum_{t=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega - x_t}{\alpha} \right) \beta \right]^{(1/\beta)-2} - \beta(\beta-1) \sum_{t=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega - x_t}{\alpha} \right) \beta \right]^{-2} \right\} \quad (4.2.32)$$

$$-\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \omega} = \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \sum_{t=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega - x_t}{\alpha} \right) \beta \right]^{(1/\beta)-1} + \beta(\beta-1) \sum_{t=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega - x_t}{\alpha} \right) \beta \right]^{-2} \left(\frac{\omega - x_t}{\alpha} \right) + \right. \\ \left. (\beta-1) \sum_{t=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega - x_t}{\alpha} \right) \beta \right]^{-1} - (1-\beta) \sum_{t=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega - x_t}{\alpha} \right) \beta \right]^{(1/\beta)-2} \left(\frac{\omega - x_t}{\alpha} \right) \right\} \quad (4.2.33)$$

$$-\frac{\partial^2 LL}{\partial \beta \partial \omega} = \frac{1}{\alpha} \left\{ (1-\beta) \sum_{t=1}^N \left(\frac{\omega - x_t}{\alpha} \right) \left[1 - \left(\frac{\omega - x_t}{\alpha} \right) \beta \right]^{-2} - \sum_{t=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega - x_t}{\alpha} \right) \beta \right]^{-1} + \right. \\ \left. \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \sum_{t=1}^N \left(\frac{\omega - x_t}{\alpha} \right) \left[1 - \left(\frac{\omega - x_t}{\alpha} \right) \beta \right]^{(1/\beta)-2} + \frac{1}{\beta^2} \sum_{t=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega - x_t}{\alpha} \right) \beta \right]^{1/\beta-1} \ln \left[1 - \left(\frac{\omega - x_t}{\alpha} \right) \beta \right] \right\} \quad (4.2.34)$$

$$-\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right) \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]^{-1} - (1-\beta) \sum_{i=1}^N \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right) \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]^{-2} \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \sum_{i=1}^N \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]^{1/\beta-2} - \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right) \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]^{1/\beta-1} \text{LN} \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right] \right) \quad (4.2.35)$$

$$-\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} \left(-N-2 \sum_{i=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]^{1/\beta-1} \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right) + 2(1-\beta) \sum_{i=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]^{-1} \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right) \right) \quad (4.2.36)$$

$$+ (1-\beta) \sum_{i=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]^{1/\beta-2} \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)^2 + (1-\beta) \sum_{i=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]^{-2} \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)^2 \right)$$

$$-\frac{\partial^2 LL}{\partial \beta^2} = \frac{2}{\beta^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right) \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]^{1/\beta-1} - \frac{2}{\beta^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right) \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]^{-1} + \frac{2}{\beta^3} \sum_{i=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]^{1/\beta}$$

$$\text{LN} \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right] + \frac{2}{\beta^3} \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right) \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]^{1/\beta-1} \text{LN} \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right] - \frac{2}{\beta^3} \sum_{i=1}^N \text{LN} \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]$$

$$+ \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \sum_{i=1}^N \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]^{-2} + \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta}\right) \sum_{i=1}^N \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]^{1/\beta-2}$$

$$+ \frac{1}{\beta^4} \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]^{1/\beta} \text{LN}^2 \left[1 - \left(\frac{\omega-x_i}{\alpha}\right)\beta\right]$$

(4.2.37)

3.- Considerando la variable reducida z

$$z = F(x) = 1 - \exp \left\{ - \left[1 - \left(\frac{\omega-x}{\alpha}\right)\beta\right]^{1/\beta} \right\} \quad (4.2.38)$$

derivando la ecuación anterior con respecto a x y con base en la ecuación (3.2.2), se llega a que

$$dz = f(x) dx \quad (4.2.39)$$

ahora, como z=F(x) entonces

$$0 \leq z \leq 1 \quad (4.2.40)$$

4.- Con base en el punto 3, las ecuaciones (4.2.32)-(4.2.37) y la ecuación siguiente:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^N (\cdot) f(x) dx = N \int_a^b (\cdot) f(x) dx \quad (4.2.41)$$

las ecuaciones (4.2.26)-(4.2.31) pueden expresarse en función de la variable z, así:

$$E \left(- \frac{\partial^2 LL}{\partial \omega^2} \right) = \frac{N}{\alpha^2} \int_0^1 \left\{ (1-\beta) A^{1-2\beta} - \beta(\beta-1) A^{-2\beta} \right\} dz \quad (4.2.42)$$

$$E \left(- \frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \omega} \right) = \frac{N}{\alpha^2} \int_0^1 \left\{ A^{1-\beta} + (\beta-1) A^{-2\beta} (1-A^\beta) + (\beta-1) A^{-\beta} \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) A^{1-2\beta} (1-A^\beta) \right\} dz \quad (4.2.43)$$

$$E \left(- \frac{\partial^2 LL}{\partial \beta \partial \omega} \right) = \frac{N}{\alpha} \int_0^1 \left\{ \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) (1-A^\beta) (A^{-2\beta}) A^{-\beta} + \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta}\right) (1-A^\beta) (A^{1-2\beta}) + \frac{1}{\beta^2} A^{1-\beta} \text{LN} A^\beta \right\} dz \quad (4.2.44)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha \partial \beta}\right) = \frac{N}{\alpha} \int_0^1 \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2}\right) (A^{-2\beta} - 2A^{-\beta} + 1) + \frac{1}{\beta} (A^{-\beta} - 1)$$

$$- \left(\frac{1}{\beta^3} - \frac{1}{\beta^2}\right) (A^{1-2\beta} - 2A^{1-\beta} + A) - \frac{1}{\beta^3} (A^{1-\beta} - A) \ln A^\beta \, dz \quad (4.2.45)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \alpha^2}\right) = \frac{N}{\alpha^2} \left\{ (-1 - \frac{2}{\beta} (A^{1-\beta} - A) + 2(\frac{1}{\beta} - 1)(A^{-\beta} - 1) + (\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta})(A^{1-2\beta} + A) \right. \\ \left. + (\frac{1}{\beta} - 1)(A^{-2\beta} - 2A^{-\beta} + 1)) \right\} dz \quad (4.2.46)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 LL}{\partial \beta^2}\right) = \int_0^1 \left\{ \frac{2}{\beta^3} (A^{1-\beta} - A) - \frac{2}{\beta} (A^{-\beta} - 1) + \frac{2}{\beta^4} (A^{1-\beta} - A) \ln A^\beta - \frac{2}{\beta^2} \ln A^\beta + \frac{2}{\beta^3} (A \ln A^\beta) \right. \\ \left. + (\frac{1}{\beta} - 1) \frac{1}{\beta^2} (1 - 2A^\beta + A^{2\beta}) A^{-2\beta} + (\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta}) (\frac{1}{\beta^2}) (1 - 2A^\beta + A^{2\beta}) A^{1-2\beta} \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta^4} \ln^2 A^\beta \right\} dz; \text{ donde } A = [-\ln(1-z)]^{-2\beta} \quad (4.2.47)$$

5.- Como puede observarse de las ecuaciones (4.2.42)-(4.2.47) los valores esperados, y por lo tanto los coeficientes a, b, c, f, g y h están única y exclusivamente en función del parámetro de forma, β . Por lo que pueden obtenerse diferentes valores de estos coeficientes para los diferentes valores de β . Para cada valor dado de β se obtienen los valores esperados, mediante el algoritmo de integración de Ohara y Smith. Ya calculados los valores esperados se procede a invertir la matriz de Var-Cov, mediante un algoritmo de inversión de matrices, y por tanto se obtienen los valores de dichos coeficientes. Para efectuar la estimación de los valores esperados y la inversión de la Matriz de Var-Cov, se usó el programa APMI/PROG/MLCEVI.

Los valores de los coeficientes a, b, c, f, g y h obtenidos para cada valor de β se muestran en la tabla 1.

En resumen, el procedimiento de estimación es como sigue:

1.- Se dan los valores iniciales $\hat{\omega}_1, \hat{\alpha}_1$ y $\hat{\beta}_1$ (estimadores de momentos o de sextiles) y se calculan las primeras derivadas

$(\frac{\partial LL}{\partial \omega})_1$, $(\frac{\partial LL}{\partial \alpha})_1$ y $(\frac{\partial LL}{\partial \beta})_1$, con las ecuaciones del (4.2.12) al (4.2.14), respectivamente.

2.- Los coeficientes a, b, c, f, g y h se obtienen de la tabla IV.1, mediante interpolación lineal de ser necesario, para el valor dado de β_1 .

3.- Los incrementos $\Delta \omega_1$, $\Delta \alpha_1$ y $\Delta \beta_1$ se obtienen con las ecuaciones (4.2.19)-(4.2.21), respectivamente.

4.- Los nuevos valores de $\hat{\omega}_2$, $\hat{\alpha}_2$ y $\hat{\beta}_2$ se calculan con las ecuaciones (4.2.22)-(4.2.24), respectivamente.

5.- El procedimiento de iteración sigue hasta que el conjunto de nuevos valores sea el mismo que el conjunto anterior, o dentro de un error especificado.

TABLA IV.1

En esta tabla se presentan los valores de los coeficientes a, b, c, f, g y h de la matriz de Var-Cov, ecuación (4.2.18), para diferentes valores de β .

β	a	b	c	f	g	h
-1.1	2.2212	1.2199	-0.6809	0.1484	0.1505	-1.6461
-1.0	1.8337	1.2550	-0.8188	0.0081	0.4029	-1.5170
-0.9	1.6531	1.2795	-0.9952	0.0223	0.4729	-1.4543
-0.8	1.6118	1.3078	-1.2101	0.1427	0.4419	-1.4518
-0.7	1.3443	1.1879	-1.5393	0.2768	0.4374	-1.2637
-0.6	1.2270	1.1529	-1.9583	0.4251	0.4600	-1.1894
-0.5	1.1243	1.0367	-2.5384	0.7183	0.3948	-1.0796
-0.4	0.9977	0.8722	-3.3882	1.0601	0.3515	-0.9328
-0.3	0.9157	0.5713	-4.5259	1.6672	0.0838	-0.7233
-0.2	0.7789	0.1939	-5.4608	2.3025	-0.3947	-0.3886
-0.1	0.5408	0.0008	-4.8961	2.3576	-0.8893	0.0213
0.1	0.2043	0.5109	-1.5889	0.9519	-0.7132	0.3231
0.2	0.1714	0.7273	-0.7818	0.5063	-0.4679	0.3531
0.3	0.1846	0.8461	-0.3862	0.2667	-0.2844	0.3952
0.4	0.2398	0.9298	-0.1998	0.1425	-0.1638	0.4722
0.5	0.3185	1.0109	-0.1147	0.0628	-0.1034	0.5674
0.6	0.4214	1.1004	-0.0731	0.0085	-0.0798	0.6810
0.7	0.2675	0.5012	-0.0484	0.0310	-0.0317	0.3661
0.8	0.0794	0.1575	-0.0299	-0.0094	-0.0419	0.1118
0.9	-0.3597	-0.5854	-0.0577	0.1227	0.0628	-0.4588

IV.3).- ESTIMACION DE PARAMETROS DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION LOGNORMAL DE 3 PARAMETROS

La estimación de parámetros de esta función de distribución ya ha sido ampliamente tratado por Norc (1975), Kite (1977) y Salas et al (1980) entre otros destacados investigadores.

METODO DE MOMENTOS

De acuerdo al método y con base en las ecuaciones (3.3.8) - (3.3.10) para estimar los parámetros μ_y , σ_y y λ , de la función de distribución lognormal de 3 parámetros, ecuación (3.3.1), se sugiere el procedimiento siguiente, (Kite, 1977, Salas et al, 1980):

1.- Se calculan los parámetros estadísticos: media, \bar{X} , desviación estándar, $\hat{\sigma}$, y el coeficiente de asimetría, $\hat{\gamma}$, de los datos de la muestra.

La media, la desviación estándar y el coeficiente de asimetría se obtienen mediante las ecuaciones (3.1.38), (3.1.42) y (3.1.47), respectivamente.

2.- Se calcula Z_1 con

$$Z_1 = \frac{\hat{\sigma}}{\bar{X}} \quad (4.3.1)$$

y Z_2 con

$$Z_2 = \frac{1-W}{W} \frac{2/3}{1/3} \quad (4.3.2)$$

donde

$$W = \frac{-\hat{\gamma} + (\hat{\gamma}^2 + 4)^{1/2}}{2} \quad (4.3.3)$$

3.- El parámetro de ubicación o límite inferior, X_0 , se calcula con

$$\hat{X}_0 = \bar{X}(1 - z_1/z_2) \quad (4.3.4)$$

4.- El parámetro de escala, μ_y , se estima con

$$\hat{\mu}_y = L_N\left(\frac{\hat{Q}_y}{z_2}\right) - \frac{1}{2} L_N(z_2^2 + 1) \quad (4.3.5)$$

o con

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_N(X_i - X_0) \quad (4.3.6)$$

5.- El parámetro de forma, σ_y , se estima con

$$\hat{\sigma}_y = [L_N(z_2^2 + 1)]^{1/2} \quad (4.3.7)$$

o con

$$\hat{\sigma}_y = \left(\frac{\sum_{i=1}^N [L_N(X_i - X_0) - \hat{\mu}_y]^2}{N} \right)^{1/2} \quad (4.3.8)$$

donde $M = n$ si el estimador $\hat{\sigma}_y$ es sesgado

y $M = n-1$ si el estimador $\hat{\sigma}_y$ es sin sesgo.

Para el caso particular de $X_0 = 0$, Función de Distribución Lognormal de 2 parámetros, las ecuaciones (4.3.6) y (4.3.8) se reducen a

Estimación del parámetro de escala

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_N X_i \quad (4.3.9)$$

y

$$\hat{\sigma}_y = \left(\frac{\sum_{i=1}^N [L_N(X_i) - \mu_y]^2}{N} \right)^{1/2} \quad (4.3.10)$$

con la cual se estima el parámetro de forma.

METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD

Puede mostrarse que la función logaritmo verosimilitud de la distribución lognormal de 3 parámetros puede expresarse como (NERC, 1975, Kite, 1977, Salas et al 1980):

$$LL(X_1; \mu_y, \sigma_y, X_0) = - \sum_{i=1}^N \ln(X_i - X_0) - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - N \ln \sigma_y - \left\{ \sum_{i=1}^N [\ln(X_i - X_0) - \mu_y]^2 \right\} / (2\sigma_y^2) \quad (4.3.11)$$

y que las primeras derivadas de LL con respecto a μ_y , σ_y y X_0 , e igualadas a cero, son:

$$- \frac{\partial LL}{\partial \mu_y} = - \left\{ \sum_{i=1}^N [\ln(X_i - X_0) - \mu_y] \right\} / \sigma_y^2 = 0 \quad (4.3.12)$$

$$- \frac{\partial LL}{\partial \sigma_y} = \frac{N}{\sigma_y} - \left\{ \sum_{i=1}^N [\ln(X_i - X_0) - \mu_y]^2 \right\} / \sigma_y^3 = 0 \quad (4.3.13)$$

$$- \frac{\partial LL}{\partial X_0} = \sum_{i=1}^N (X_i - X_0)^{-1} \ln(X_i - X_0) - \sum_{i=1}^N (X_i - X_0)^{-1} (\mu_y - \sigma_y^2) \quad (4.3.14)$$

Las cuales al ser resueltas simultáneamente proporcionan los estimadores $\hat{\mu}_y$, $\hat{\sigma}_y$ y \hat{X}_0 .

De la ecuación (4.3.12) se tiene

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(X_i - \hat{X}_0) \quad (4.3.15)$$

y de la ecuación (4.3.13)

$$\hat{\sigma}_y = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\ln(X_i - \hat{X}_0) - \hat{\mu}_y]^2 \right\}^{1/2} \quad (4.3.16)$$

El estimador \hat{X}_0 , puede obtenerse de la ecuación (4.3.14), mediante un procedimiento de tanteos, o de la ecuación siguiente, Salas (1980):

$$F(\hat{X}_0) = \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{X_i - \hat{X}_0} \right] \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln^2(X_i - \hat{X}_0) - \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(X_i - \hat{X}_0) \right]^2 \right) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(X_i - \hat{X}_0) + \sum_{i=1}^N \frac{\ln(X_i - \hat{X}_0)}{X_i - \hat{X}_0} = 0 \quad (4.3.17)$$

La ecuación anterior no tiene solución explícita. Por lo tanto debe ser resuelta por un procedimiento iterativo, como por ejemplo el método de la tangente de Newton.

Para obtener los estimadores de máxima verosimilitud $\hat{\mu}_y$, $\hat{\sigma}_y$ y $\hat{\lambda}_0$, se sugiere el procedimiento siguiente:

- 1.- Con el método de Newton se resuelve la ecuación (4.3.17), para obtener el estimador $\hat{\lambda}_0$.
- 2.- Con la ecuación (4.3.15) y el estimador $\hat{\lambda}_0$ obtenido en el paso anterior, se obtiene el valor del estimador, $\hat{\mu}_y$.
- 3.- Con la ecuación (4.3.16) y los estimadores $\hat{\lambda}_0$ obtenido en el paso 1, y el estimador $\hat{\mu}_y$, obtenido en el paso 2, se obtiene el estimador $\hat{\sigma}_y$.

Para el caso de $\lambda_0=0$, Función de Distribución Lognormal-2 parámetros, los estimadores $\hat{\mu}_y$ y $\hat{\sigma}_y$ se calculan con las ecuaciones (4.3.15) y (4.3.16), respectivamente, las cuales son idénticas a las ecuaciones (4.3.9) y (4.3.10). Esto es, los estimadores $\hat{\mu}_y$ y $\hat{\sigma}_y$ de momentos y los de máxima verosimilitud, para el caso de la Lognormal-2 parámetros se calculan con las mismas expresiones.

IV.4).- ESTIMACION DE PARAMETROS DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD GAMMA DE 3 PARAMETROS.

METODO DE MOMENTOS

De acuerdo al método y con base en las ecuaciones (3.4.7)-(3.4.9) se tienen las 3 ecuaciones siguientes:

$$\bar{X} = \frac{\alpha}{|\alpha|} [\chi_0 + \alpha \beta] \quad (4.4.1)$$

$$\sigma^2 = S^2 = \beta \alpha^2 \quad (4.4.2)$$

$$\rho^2 = \frac{\alpha}{|\alpha|} \frac{2}{\sqrt{\beta}} \quad (4.4.3)$$

las cuales al ser resueltas simultáneamente, proporcionan los valores de los estimadores $\hat{\chi}_0$, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$. Despejando de la ecuación (4.4.3), a $\hat{\alpha}$ de la ecuación (4.4.2) y a $\hat{\chi}_0$ de la ecuación (4.4.1), se tiene que:

$$\hat{\beta} = 4/\rho^2 \quad (4.4.4)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\hat{\beta}}} = \frac{1}{2} \hat{\sigma} \hat{\rho} \quad (4.4.5)$$

$$\hat{\chi}_0 = \frac{|\hat{\alpha}|}{\hat{\alpha}} \bar{X} - \hat{\alpha} \hat{\beta} = \bar{X} - \hat{\alpha} \hat{\beta} \quad (4.4.6)$$

De la ecuación (4.4.5) se observa que si el coeficiente de asimetría, ρ , es negativo entonces el parámetro de escala, $\hat{\alpha}$, también es negativo. Esto es si $\hat{\alpha}$ es negativo entonces la distribución Gamma tendrá asimetría negativa. Ahora con la ecuación (4.4.4) se comprueba, lo que anteriormente se comentó, que $\hat{\beta}$ será siempre positivo.

Para estimar $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\chi}_0$, con base en las ecuaciones (4.4.4) = (4.4.6) se sugiere el procedimiento siguiente:

1.- Calcular los parámetros estadísticos $(\bar{X}, \hat{\sigma}, \hat{\gamma})$ con la ecuación (3.1.38) y para corregir el sesgo de $\hat{\sigma}$ y de $\hat{\gamma}$ se sugieren las ecuaciones siguientes:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{N}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \right)} \quad (4.4.7)$$

$$\hat{\gamma} = \frac{(1 + 8.5/N) \sqrt{N(N-1)}}{N-2} \cdot \frac{1/N \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^3}{S^3} \quad (4.4.8)$$

2.- Calcular el parámetro de forma, $\hat{\beta}$, con la ecuación (4.4.4) y el coeficiente de asimetría, $\hat{\gamma}$, estimado en el paso anterior.

3.- Calcular el parámetro de escala, $\hat{\alpha}$, con la ecuación (4.4.5) y con $\hat{\sigma}$ y $\hat{\gamma}$, estimados en el paso 1.

4.- Estimar el parámetro de ubicación, $\hat{\chi}_0$, con la ecuación (4.4.6) y con \bar{X} , estimada en el paso 1, y con los estimadores $\hat{\beta}$ y $\hat{\alpha}$ obtenidos en los pasos 2 y 3 respectivamente.

Para el caso particular de $\chi_0 = 0$, Función de Distribución Gamma-2 parámetros, los parámetros de forma, $\hat{\beta}$, y de escala, $\hat{\alpha}$, se estiman con las ecuaciones (4.4.4) y (4.4.5), respectivamente, y siguiendo este procedimiento hasta el paso 3.

METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD

De acuerdo al método, la ecuación (3.4.1) puede ser expresada como la función Logarítmica de Verosimilitud de la Función de Distribución Gamma-3 parámetros así:

$$LL = \sum_{i=1}^N \{ \beta \ln(X_i - X_0) - \beta \ln \alpha - \ln(X_i - X_0) + \ln \alpha \} - \frac{X_i - X_0}{\alpha} - \ln|\alpha| - \ln \Gamma(\beta) \quad (4.4.9)$$

cuyas primeras derivadas parciales con respecto a X_0 , α y β son:

$$- \frac{\partial LL}{\partial \alpha} = \frac{N\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^N (X_i - X_0) \quad (4.4.10)$$

$$- \frac{\partial LL}{\partial \beta} = N\psi(\beta) - \sum_{i=1}^N \ln\left(\frac{X_i - X_0}{\alpha}\right) \quad (4.4.11)$$

$$- \frac{\partial LL}{\partial X_0} = (\beta - 1) \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{X_i - X_0}\right) - \frac{N}{\alpha} \quad (4.4.12)$$

las cuales al ser igualadas a cero, proporcionan un sistema de ecuaciones que al ser resueltas simultáneamente, permiten obtener los estimadores \hat{X}_0 , $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, de los parámetros X_0 , α y β de la ecuación (3.4.1), mediante las ecuaciones siguientes:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{X_i - \hat{X}_0}\right)}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{X_i - \hat{X}_0}\right) - \frac{N}{\hat{\alpha}}} \quad (4.4.13)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{N\hat{\beta}} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{X}_0) \quad (4.4.14)$$

$$S(\hat{X}_0) = \sum_{i=1}^N \ln\left(\frac{X_i - \hat{X}_0}{\hat{\alpha}}\right) - N\psi(\hat{\beta}) = 0 \quad (4.4.15)$$

donde $\psi(\beta)$ es la función Digamma con argumento β .

Para estimar los parámetros X_0 , α y β de la función de distribución Gamma-3 parámetros, por este método, se sugiere usar el procedimiento siguiente:

1.- Proponer un valor de \hat{X}_0 comprendido entre los límites dados por la expresión, de la ecuación (4.4.15), siguiente:

$$\frac{X_i - \hat{X}_0}{\alpha} > 0 \quad (4.4.16)$$

esto es

$$\text{si } \hat{\alpha} > 0 \rightarrow X_1 - \hat{\alpha}_0 > 0 \rightarrow X_1 > \hat{\alpha}_0 \rightarrow \hat{\alpha}_0 < X_1 < \infty; -\infty < \hat{\alpha}_0 \leq X_{\min}$$

$$\hat{\alpha} < 0 \rightarrow X_1 \hat{\alpha}_0 < 0 \rightarrow X_1 < \hat{\alpha}_0 \rightarrow -\infty < X < \hat{\alpha}_0; X_{\max} < \hat{\alpha}_0 < \infty$$

2.- Calcular $\hat{\beta}$ con la ecuación (4.4.13)

3.- Evaluar $\hat{\alpha}$ con la ecuación (4.4.14)

4.- Estimar $S(\hat{\alpha}_0)$ con un algoritmo para búsqueda de raíces, por ejemplo el método de Newton.

5.- El proceso termina cuando el valor absoluto de $S(\hat{\alpha}_0)$ es menor o igual que $1.E-08$.

La restricción a estas ecuaciones es $\beta \leq 1$ como se observa en la ecuación (4.4.12) y para que se satisfaga tal condición el coeficiente de existencia debe estar entre los límites $-2 \leq \hat{\gamma} \leq 2$, deducido de la ecuación (4.4.3).

Para el caso de $\hat{\alpha}_0 = 0$. Función de Distribución Gamma-2 parámetros, la ecuación (4.4.14) se reduce a

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{X}}{\hat{\beta}} \quad (4.4.17)$$

y de la ecuación (4.4.11), se obtiene.

$$S(\hat{\beta}) = L_N(\hat{\beta}) - \psi(\hat{\beta}) - L_N \bar{X} + \mu_y = 0 \quad (4.4.18)$$

donde

$$\mu_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_N X_i$$

Para estimar los parámetros $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ de la distribución Gamma-2 parámetros se sugiere el procedimiento siguiente:

1.- Obtener el valor inicial del parámetro de forma, $\hat{\beta}$, mediante la expresión siguiente, (Yevjevich, 1972):

$$\hat{\beta} = \{1 + [1 + \frac{4}{3}(L_N \bar{x} - \mu_y)]^{3/2}\} / 4(L_N \bar{x} - \mu_y) \quad (4.4.19)$$

si $\hat{\beta} > 5.6$ el valor obtenido de $\hat{\beta}$ es correcto. En caso de que el valor de $\hat{\beta}$ obtenido con la ecuación (4.4.19) sea menor o igual que 5.6, servirá como el valor inicial para estimar $\hat{\beta}$ mediante un algoritmo de búsqueda de raíces, por ejemplo el método de Newton.

2.- Evaluar $\hat{\alpha}$ con la ecuación (4.4.17)

La función Digamma, $\psi(\beta)$, ecuaciones (4.4.15) y (4.4.18), se puede evaluar con la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} \psi(\beta) = L_N(\beta+2) - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{2(\beta+2)} - \frac{1}{12(\beta+2)^2} \\ + \frac{1}{120(\beta+2)^4} - \frac{1}{252(\beta+2)^6} \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

CAPITULO V

LIMITES DE CONFIANZA

V.1).-INTRODUCCION

Los objetivos primarios del análisis de frecuencias son determinar los periodos de retorno de eventos registrados de magnitud conocida y entonces estimar las magnitudes de eventos para periodos de retorno dentro del rango registrado. El intermediario entre estos dos objetivos es la distribución de probabilidad teórica. Los datos de la muestra son usados como un estimador de una población desconocida para calcular los parámetros de una distribución de probabilidad seleccionada. Entonces la distribución ajustada es usada para estimar magnitudes de eventos correspondientes a periodos de retorno mayores o menores que los de los eventos registrados.

Para cualquier distribución elegida las magnitudes de los eventos de diseño pueden ser calculados con la ecuación general, (Chow, 1964):

$$X_T = \bar{X} + KS \quad (5.1.1)$$

donde \bar{X} y S son la media y la desviación estándar estimadas de la muestra y K es un factor de frecuencia específico a la distribución elegida. Para cada distribución el factor de frecuencia K puede ser derivado de los parámetros de la distribución, tamaño de la muestra, y requiere de la probabilidad de excedencia del evento de diseño.

Con la ecuación (5.1.1) se calcula la magnitud del evento acontecido X_T para cualquier periodo de retorno T . Ahora bien más que tener un estimador puntual para X_T , es más adecuado dar un intervalo tal que la probabilidad de que este intervalo contenga a Y_T , pueda ser especificada. Tal intervalo es conocido como intervalo de confianza. Esto puede ser escrito así, (Haan, 1975):

$$P(X_1 < Y_T < X_5) = 1 - \alpha \quad (5.1.2)$$

Y_T es el evento que puede presentarse en T años

donde X_1 y X_5 son los límites de confianza inferior y superior. Para el intervalo de X_1 a X_5 que es el intervalo de confianza, y $1-\alpha$ es el nivel de confianza o coeficiente de confianza. La ecuación (5.1.2) indica la probabilidad $1-\alpha$ de que el intervalo X_1 a X_5 contenga a Y_T .

Si la distribución de X_T es conocida, entonces los límites inferior X_1 y superior X_5 pueden ser establecidos para cualquier nivel de confianza requerido.

Existen 2 métodos para determinar la distribución de eventos de T -Años (X_T) de la distribución de frecuencia de la muestra, y por lo tanto de los límites de confianza. Estos dos métodos son, (Kite, 1975):

1).- Método analítico

Esta aproximación analítica utiliza la distribución de probabilidad ajustada a los datos observados, (Kite, 1975).

"Las técnicas analíticas válidas para determinar los límites de confianza de eventos extremos son difíciles, tediosas e involucran aproximaciones limitantes" , (Kite,1975)

ii).- Método empírico

Esta técnica está basada en la hipótesis siguiente:

" Las distribuciones de eventos extremos generados de distribuciones comúnmente usadas en hidrología son estadísticamente indistinguibles de la distribución normal", (Kite,1975).

y es como sigue:

El intervalo de confianza está dado por:

$$X_{\alpha} = X_T \pm \alpha S_T \quad (5.1.3)$$

donde: X_T es el evento promedio en T años

S_T es el error estándar del evento en T años

U_{α} es la desviación estándar normal correspondiente al nivel de confianza α .

X_T se estima con la ecuación (5.1.1)

U_{α} se calcula con

$$U_{\alpha} = U \quad (5.1.4)$$

donde U se calcula con las ecuaciones (3.3.30)-(3.3.32)

para

$$F(X) = [1. - (1 - \alpha)]/2$$

S_T se puede estimar por diferentes métodos. En este trabajo se

usan los métodos de momentos y de máxima verosimilitud

La ecuación general para estimar el error estándar, S_T para las distribuciones de 3 parámetros puede escribirse así, (Kite, 1976):

$$S_T^2 = \frac{\mu_2}{N} \left(1 + KY + \frac{K^2}{4} (K_K - 1) + \frac{\partial K}{\partial Y} [2K_K - 3Y^2 - 6 + K \left(\frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} - \frac{6Y}{4} K_K - \frac{10}{4} Y \right) + \left(\frac{\partial K}{\partial Y} \right)^2 \left[\frac{\mu_6}{\mu_2^3} - \frac{3\mu_5}{\mu_2^{5/2}} Y - 6K_K + 9Y^2 \frac{K_K}{4} + \frac{35}{4} Y^2 + 9 \right] \right) \quad (5.1.5)$$

donde:

K es el factor de frecuencia

Y es el coeficiente de asimetría

K_K es el coeficiente de kurtosis

μ_2, μ_4, μ_5 y μ_6 son el segundo, cuarto, quinto y sexto momento de la distribución con respecto a la media y sus estimadores muestrales, de la ecuación (3.1.2B), son:

$$\mu_2 = \hat{\mu}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \quad (5.1.6)$$

$$\mu_4 = \hat{\mu}_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^4 \quad (5.1.7)$$

$$\mu_6 = \hat{\mu}_6 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^6 \quad (5.1.8)$$

El estimador por máxima verosimilitud de S_T puede ser calculado así, (Kite, 1977):

$$S_T^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)^2 \text{Var } \alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial \beta} \right)^2 \text{Var } \beta + \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^2 \text{Var } \omega + 2 \frac{\partial X}{\partial \alpha} \frac{\partial X}{\partial \beta} \text{Cov}(\alpha, \beta) + 2 \frac{\partial X}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial X}{\partial \omega} \text{Cov}(\alpha, \omega) + 2 \frac{\partial X}{\partial \beta} \frac{\partial X}{\partial \omega} \text{Cov}(\beta, \omega) \quad (5.1.7)$$

V.2).- LÍMITES DE CONFIANZA DE LA DISTRIBUCIÓN GENERAL DE VALORES EXTREMOS PARA MINIMOS

METODO DE MOMENTOS

Con base en las ecuaciones (5.1.1), (3.2.65) y (3.2.66) se obtiene la expresión

$$X_T = \omega + \frac{\alpha}{\beta} \left\{ \left[-L_N \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right]^\beta - 1 \right\} \quad (5.2.1)$$

la cual permite calcular el evento promedio, X_T , en T años. Los parámetros ω , α y β son constantes en este caso.

Con base en las ecuaciones (5.1.1), (3.2.34) y (1.1) se obtiene la expresión

$$K = \frac{[-L_N(1 - \frac{1}{T})]^\beta - \Gamma(1 + \beta)}{[\Gamma(1 + 2\beta) - \Gamma^2(1 + \beta)]^{1/2}} \quad (5.2.2)$$

la cual permite estimar el factor de frecuencia, K, para cualquier periodo de retorno, T, en función del parámetro β el cual ya ha sido previamente estimado y es considerado constante en esta estimación.

La ecuación (5.2.2) puede ser derivada parcialmente con respecto al coeficiente de asimetría, γ , haciendo uso de la siguiente expresión:

$$\frac{\partial K}{\partial \gamma} = \frac{\partial K}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \gamma} \quad (5.2.3)$$

derivando parcialmente el factor de frecuencia K con respecto a el parámetro de forma β , se obtiene

$$\frac{\partial K}{\partial \beta} = \frac{[L_N Y, Y^\beta - G_1 P_1] - [Y^\beta - G_1] [G_2 - G_1^2]^{-1} [G_2 P_2 - G_1^2 P_1]}{[G_2 - G_1^2]^{3/2}} \quad (5.2.4)$$

y derivando parcialmente la ecuación (3.2.72) con respecto a el parámetro de forma β , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \beta} = & 3 \{ [G_2 - G_1^2] \cdot [G_1 P_1 - G_1 G_2 (P_1 + 2P_2) + 2G_1^3 P_1] \\ & - [G_1 - 3G_1 G_2 + 2G_1^3] \cdot [G_2 P_2 - G_1^2 P_1] \} / [G_2 - G_1^2]^{5/2} \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

a) obtener el inverso multiplicativo de la ecuación anterior y sustituyéndolo, junto con la ecuación (5.2.4), en la ecuación (5.2.3) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial Y} = & [G_2 - G_1^2]^2 \{ [Y^\beta \cdot L_N Y - G_1 P_1] - [Y^\beta - G_1] \cdot [G_2 - G_1^2]^{-1} [G_2 P_2 - G_1^2 P_1] \} / \\ & 3 \{ [G_2 - G_1^2] \cdot [G_1 P_1 - G_1 G_2 (P_1 + 2P_2) + 2G_1^3 P_1] - [G_2 P_2 - G_1^2 P_1] \cdot \\ & \cdot [G_1 - 3G_1 G_2 + 2G_1^3] \} \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

donde

$$Y = -L_N \left(1 - \frac{1}{T}\right) \quad (5.2.7)$$

$$Gr = \Gamma(1 + r\beta) \quad (5.2.8)$$

$$Pr = \psi(1 + r\beta) \quad (5.2.9)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma completa con argumento (\cdot)

$\psi(\cdot)$ es la función Digamma con argumento (\cdot)

Para estimar los límites de confianza de la distribución GVE para mínimos usando el método de momentos se sugiere el procedimiento siguiente:

1.- Calcular el evento promedio, X_T , con la ecuación (5.2.1)

- 2.- Determinar el valor de U_0 con la ecuación (5.1.4)
- 3.- Calcular el factor de frecuencia K con la ecuación (5.2.2)
- 4.- Obtener el valor de $\frac{\alpha K}{\alpha Y}$ con la ecuación (5.2.6)
- 5.- Determinar el valor de S_T con la ecuación (5.1.5)
- 6.- Estimar los límites de confianza con la ecuación (5.1.3)

METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD

Con base en las ecuaciones (3.2.14) y (3.2.16) se obtiene la expresión

$$X_T = X_0 + \frac{\alpha}{\beta} \{ [-\text{LN}(1 - \frac{1}{T})]^\beta - 1 \} = X_0 + \alpha w \quad (5.2.10)$$

donde $w = (e^{\beta Y} - 1) / \beta$ (5.2.11)

y $y = -\text{LN}\{-\text{LN}[1 - \frac{1}{T}]\} = -\frac{1}{\beta} \text{LN}\{L - (\frac{w - X}{\alpha})\beta\}$ (5.2.12)

con la cual podemos calcular el evento promedio, X_T , en T años

Con base en las ecuaciones (5.1.7) y (4.2.18) se obtiene la siguiente expresión

$$S_T^2 = \frac{\alpha^2 w^2}{N} \{ a + \frac{b}{w^2} + \frac{c}{w^2} (\frac{dw}{d\beta})^2 + 2\frac{h}{w} + 2(\frac{g}{w} + \frac{f}{w^2}) \frac{dw}{d\beta} \} \quad (5.2.13)$$

con la cual podemos calcular el error estándar S_T .

Derivando la ecuación (5.2.11) con respecto al parámetro de forma β , se obtiene la expresión siguientes:

$$\frac{dw}{d\beta} = \{-ye^{-\beta Y} - w / \beta\} \quad (5.2.14)$$

Para estimar los límites de confianza de la distribución GVE acerca de sí mismo a través del método de máxima verosimilitud se sigue el siguiente procedimiento:

- 1.- Estimar \bar{X}_T con la ecuación (5.2.10) para el periodo de retorno T.
- 2.- Calcular U_0 con la ecuación (5.1.4)
- 3.- Estimar \bar{Y} con la ecuación (5.2.12)
- 4.- Calcular W con la ecuación (5.2.11)
- 5.- Determinar el valor de $\frac{dw}{d\beta}$ con la ecuación (5.2.14)
- 6.- Obtener el valor de los coeficientes a, b, c, f, g y h de la tabla IV.1
- 7.- Calcular el error estándar S_T con la ecuación (5.2.13)
- 8.- Estimar los límites de confianza con la ecuación (5.1.3)

**V.3).- LIMITES DE CONFIANZA DE LA DISTRIBUCION LOGNORMAL DE 3
PARAMETROS**

METODO DE MOMENTOS

Para obtener los límites de confianza de la distribución Lognormal de 3 parámetros se sugiere el procedimiento siguiente. (Kite, 1977, Salas, 1980) :

1.- Calcular X_T con la siguiente expresión

$$X_T = \hat{X}_0 + \exp\{y + U_T \hat{\sigma}_y\} \quad (5.3.1)$$

donde \hat{X}_0 es el parámetro de ubicación, $\hat{\mu}_y$ es el parámetro de escala, $\hat{\sigma}_y$ es el parámetro de forma y U_T es la variable normal estándar correspondiente al periodo de retorno T se calcula con las ecuaciones (3.3.30)-(3.3.32)

2.- Calcular el error estándar S_T con la siguiente expresión

$$S_T = (1 + U_T^2/2)^{1/2} \hat{\sigma}_y / \sqrt{N} \quad (5.3.2)$$

donde N es el tamaño de la muestra y U_T y $\hat{\sigma}_y$ anteriormente ya fueron definidos

3.- Calcular U_α con la ecuación (5.1.4)

4.- Estimar los límites de confianza X_0 para el evento de T-años, X_T , con la ecuación (5.1.3).

METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD

Para estimar los límites de confianza de la distribución Lognormal por el método de máxima verosimilitud se sigue el procedimiento (Kite, 1977; Balas, 1990):

1.- Calcular el evento promedio en T-años con la ecuación (5.3.1)

2.- Calcular el error estándar S_T con

$$S_T^2 = \text{Var}(\hat{X}_0) + \left(\frac{U_T Z_T}{2\hat{\sigma}_y}\right)^2 \text{Var}(\hat{\sigma}^2) + Z_T^2 \text{Var}(\hat{\mu}_y) + \frac{U_T Z_T}{\hat{\sigma}_y} \text{Cov}(\hat{X}_0, \hat{\sigma}_y^2) + 2 Z_T \text{Cov}(\hat{X}_0, \hat{\mu}_y) + \frac{U_T Z_T^2}{\hat{\sigma}_y} \text{Cov}(\hat{\sigma}_y, \hat{\mu}_y) \quad (5.3.3)$$

donde

$$Z_T = \exp\{\hat{\mu}_y + U_T \hat{\sigma}_y\} \quad (5.3.4)$$

$$\text{Var}(\hat{X}_0) = 1/(2ND) \quad (5.3.5)$$

$$\text{Var}(\hat{\mu}_y) = \hat{\sigma}_y^2 [0.5(1 + \hat{\sigma}_y^{-2})(a/b)^2 - a/b^2]/(ND) \quad (5.3.6)$$

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_y^2) = \hat{\sigma}_y^2 [(1 + \hat{\sigma}_y^2)(a/b)^2 - a/b^2]/(ND) \quad (5.3.7)$$

$$\text{Cov}(\hat{X}_0, \hat{\mu}_y) = -\sqrt{a}/(2ND)b \quad (5.3.8)$$

$$\text{Cov}(\hat{X}_0, \hat{\sigma}_y^2) = \hat{\sigma}_y^2 \sqrt{a}/(bND) \quad (5.3.9)$$

$$\text{Cov}(\hat{\mu}_y, \hat{\sigma}_y^2) = -\hat{\sigma}_y^2 a/b^2 ND \quad (5.3.10)$$

$$D = 0.5(1 + \hat{\sigma}_y^{-2})(a/b)^2 - \left(1 + \frac{1}{2\hat{\sigma}_y^2}\right)(a/b^2) \quad (5.3.11)$$

$$a = \exp\{\hat{\sigma}_y^2\} \quad (5.3.12)$$

y

$$b = \exp\{\hat{\mu}_y\} \quad (5.3.13)$$

3.- Calcular U_α con la ecuación (5.1.4)

4.- Estimar los límites de confianza χ_L para el evento de T-años, χ_T , con la ecuación (5.1.3).

**V.4).- LIMITES DE CONFIANZA DE LA DISTRIBUCION PEARSON TIPO III
O GAUSS-3 PARAMETROS**

METODO DE MOMENTOS

Para estimar los límites de confianza de la distribución Gauss-3 parámetros a través del método de momentos se sugiere el procedimiento siguiente. (Kite, 1977, Salas, 1980):

1.- Calcular el factor de frecuencia K_T con la ecuación siguiente:

$$K_T = U_T + (U_T^2 - 1)(\hat{\gamma}/6) + (1/3)(U_T^3 - 6U_T)(\hat{\gamma}/6)^2 - (U_T^2 - 1)(\hat{\gamma}/6)^3 + U_T(\hat{\gamma}/6)^4 + (1/3)(\hat{\gamma}/6)^5 \quad (5.4.1)$$

donde U_T es la variable normal estandarizada correspondiente al periodo de retorno T .

$\hat{\gamma}$ es el coeficiente de asimetría estimado de la muestra

2.- Estimar el evento promedio en T -años X_T con la ecuación (5.1.1), la cual es:

$$X_T = \hat{\mu} + K_T \hat{\sigma} = \bar{X} + K_T S$$

3.- Estimar el error estándar S_T con la ecuación siguiente:

$$S_T^2 = \frac{\hat{\mu}_2}{N} \left[1 + K_T \hat{\gamma} + \frac{K_T^2}{2} (3\hat{\gamma}^2/4 + 1) + 3K_T \frac{\partial K_T}{\partial \hat{\gamma}} \left(\hat{\gamma} + \frac{\gamma^3}{4} \right) + 3 \left(\frac{\partial K_T}{\partial \hat{\gamma}} \right)^2 (2 + 3\hat{\gamma}^2 + 5\hat{\gamma}^4/8) \right] \quad (5.4.2)$$

donde

$$\frac{\partial K_T}{\partial \hat{\gamma}} = \left\{ (U_T^2 - 1) \left[1 - 3 \left(\frac{\hat{\gamma}}{6} \right)^2 \right] + 4 U_T \left(\frac{\hat{\gamma}}{6} \right)^3 \right\} (1/6) + \left(\frac{\hat{\gamma}}{6} \right) 4 (U_T^3 - 6U_T) - 10 \left(\frac{\hat{\gamma}}{6} \right)^3 (1/6)^2 \quad (5.4.3)$$

4.- Calcular U_0 con la ecuación (5.1.4)

5.- Estimar los límites de confianza X_L para el evento de T-años, X_T , con la ecuación (5.1.3).

METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD

Para estimar los límites de confianza de la distribución Gamma-3 parámetros a través del método de máxima verosimilitud se sigue el procedimiento siguiente:

1.- Calcular el factor de frecuencia K_T con la ecuación (5.4.1)

2.- Estimar el evento promedio en T-años X_T con la ecuación (5.1.1)

3.- Estimar el error estándar S_T con la ecuación siguientes:

$$S_T^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right)^2 \text{Var} \alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial \beta}\right)^2 \text{Var} \beta + \left(\frac{\partial X}{\partial X_0}\right)^2 \text{Var} X_0 + 2\left(\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial \beta}\right) \cdot \text{Cov}(\alpha, \beta) + 2\left(\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial X_0}\right) \text{Cov}(\alpha, X_0) + 2\left(\frac{\partial X}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial X_0}\right) \text{Cov}(\beta, X_0) \quad (5.4.4)$$

donde

$$\text{Var} \alpha = \frac{1}{N \alpha^2 D} \left(\frac{\psi'(\beta)}{\beta-2} - \frac{1}{(\beta-1)^2} \right) \quad (5.4.5)$$

$$\text{Var} \beta = 2/[N \alpha^4 D(\beta-2)] \quad (5.4.6)$$

$$\text{Var} X_0 = [\beta \psi'(\beta) - 1]/N \alpha^2 D \quad (5.4.7)$$

$$\text{Cov}(\alpha, \beta) = - \left[\frac{1}{\beta-2} - \frac{1}{\beta-1} \right] / N \alpha^3 D \quad (5.4.8)$$

$$\text{Cov}(\alpha, X_0) = \left[\frac{1}{\beta-1} - \psi'(\beta) \right] / N \alpha^2 D \quad (5.4.9)$$

$$\text{Cov}(\beta, X_0) = - \left[\frac{\beta}{\beta-1} - 1 \right] / N \alpha^3 D \quad (5.4.10)$$

donde D es el determinante de la matriz de las derivadas de verosimilitud

$$D = \left[2 \psi'(\beta) - \frac{2\beta-3}{(\beta-1)^2} \right] / [(\beta-2)\alpha^4] \quad (5.4.11)$$

y $\psi'(\beta)$ es la función trigama la cual se calcula con la aproximación siguiente:

$$\psi'(\beta) = \frac{1}{\beta+2} + \frac{1}{2(\beta+2)^2} + \frac{1}{6(\beta+2)^3} - \frac{1}{30(\beta+2)^5} + \frac{1}{42(\beta+2)^7} - \frac{1}{30(\beta+2)^9} + \frac{1}{(\beta+1)^2} + \frac{1}{\beta^2} \quad (5.4.12)$$

y finalmente las derivadas parciales son

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = \left[\beta^{1/3} - \frac{1}{q \beta^{2/3}} + \frac{U}{3 \beta^{1/6}} \right]^3 \quad (5.4.13)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \beta} = 3\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^{2/3} \left[\frac{1}{3 \beta^{2/3}} + \frac{2}{27 \beta^{5/3}} - \frac{U}{18 \beta^{7/6}} \right] \quad (5.4.14)$$

$$\frac{\partial X}{\partial X_0} = 1 \quad (5.4.15)$$

donde U es la variable normal estándar.

CAPITULO VI
APLICACIONES

Para ilustrar lo presentado en los capítulos III, IV y V y para mostrar la bondad de ajuste de la distribución GVE para mínimos, de registros históricos, comparado con el ajuste proporcionado por las distribuciones Lognormal de 3 parámetros y Gamma de 3 parámetros se presenta el siguiente caso de aplicación:

para efectuar el caso de aplicación se eligió trabajar con registros históricos de las estaciones que están sobre los ríos de la región noroeste del país, específicamente con los ríos de las regiones hidrológicas #9 y #10 que corresponden a Sonora Sur y Sinaloa, respectivamente.

El caso de aplicación consiste en analizar las frecuencias de sequías de 1, 10, 30, 60, 90 y 180 días de duración, con base en los registros históricos de las estaciones siguientes:

N	ESTACION	DIVISION	CUENCA	CORRIENTE	PERIODO
1	Huites	Sinaloa	Río Fuerte	Río Fuerte	(1942-1981)
2	Choir	Sinaloa	Río Fuerte	Río Choir	(1955-1981)
3	Chinipas	Sinaloa	Río Fuerte	R. Oteros	(1966-1981)
4	Palo Dulce	Sinaloa	Río Fuerte	R. Chinipas	(1958-1981)
5	Urique II	Sinaloa	Río Fuerte	R. Urique	(1966-1981)

y de analizar las sequías de 1 día de duración de las estaciones siguientes:

N ESTACION	DIVISION	CIENCA	CORRIENTE	PERIODO
6 Acetitón	Sinaloa	Rio Elote	R. Elote	(1954-1982)
7 Guatenipa II	Sinaloa	R. Culiacán	R. Humaya	(1965-1981)
8 Tepalino	Sinaloa	R. Piaxtla	R. Piaxtla	(1953-1981)
9 La Huerta	Sinaloa	R. Culiacán	R. Humaya	(1969-1981)
10 Santa Cruz	Sinaloa	R. San Lorenzo	R. San L.	(1943-1981)
11 Tamazula	Sinaloa	R. Culiacán	R. Tamazula	(1962-1981)
12 Badiraguato	Sinaloa	R. Culiacán	R. Badiraguato	(1959-1981)
13 El Cajón	Sonora	R. Sonora	R. San Miguel	(1970-1981)
14 Jairo	Sinaloa	R. Sinaloa	R. Sinaloa	(1941-1980)
15 Orégano	Sonora	R. Sonora	R. Sonora	(1941-1981)
16 San Bernardo	Sonora	R. Mayo	R. Mayo	(1960-1981)
17 Toahayana	Sinaloa	R. Sinaloa	R. Sinaloa	(1957-1981)

N indica el número de orden de las estaciones

El caso de aplicación se efectuó conforme al **procedimiento general siguiente:**

1.- Se formaron los registros de gastos mínimos de las estaciones anteriormente señaladas, para las duraciones de sequías mencionadas y el periodo de registro indicado, de la manera siguiente:

Para los registros de sequía de un día de duración se tomó el valor mínimo de los gastos medios diarios en un año.

Para los registros de sequía de 10 días de duración se tomó la suma mínima de 10 gastos medios diarios consecutivos en un año. y así para los registros de sequía de 30, 60, 90 y 180 días de duración se tomó las suma mínimas de 30, 60, 90 y 180 gastos medios dia-

rios consecutivos en un año, respectivamente.

La información se obtuvo de los boletines hidrológicos de la Secretaría de Recursos Hidráulicos (refs. 12 y 13) e información que la Dirección de Hidrología, de esta misma dependencia, proporcionó.

En total se formaron 42 registros de los cuales 9 tienen datos de gasto cero. Las estaciones cuyos registros tienen datos de gasto cero son: Estación Choix, tiene datos de gasto cero en los registros de sequía de 1, 10 y 30 días de duración; y las estaciones numeradas del 12 al 17. La forma en que fueron tratados estos archivos se describe más adelante.

Los registros de datos fueron almacenados en los archivos de datos siguientes:

En los archivos dou/datmin, dou/datmin10, dou/datmin30, dou/datmin60, dou/datmin90 y dou/datmin180 se almacenaron los registros correspondientes a las sequías de 1, 10, 30, 60, 90 y 180 días de duración, respectivamente.

2.- Se ajustaron las funciones de distribución GVE para mínimos, la Lognormal de 2 y 3 parámetros y la Gamma de 2 y 3 parámetros a todos los registros de datos anteriormente señalados. La estimación de parámetros, correspondientes a cada función de distribución, se efectuó de acuerdo a los métodos indicados y procedimientos sugeridos en el capítulo IV. Para tal efecto se elaboraron los programas de cómputo que ha continuación se indican:

a).- Programa **APHI/zyemin/ozm**.- Con este programa se estiman los parámetros estadísticos, de los 42 registros de sequías, sin sesgo y los parámetros de ubicación, $\hat{\omega}$, de escala, $\hat{\sigma}$, y de forma, $\hat{\beta}$, de la distribución GVE para mínimos, por el método de momentos. Los parámetros estadísticos se muestran en las tablas VI.1 y VI.2. Los parámetros de la distribución se presentan en las Tablas VI.3 y VI.4.

Este programa se elaboró con base en el programa **APHI/zyemin/ozm**

b).- Programa **APHI/zyemin/over**.- Con este programa se estimaron los parámetros de ubicación, $\hat{\omega}$, de escala, $\hat{\sigma}$, y de forma, $\hat{\beta}$, de la distribución de probabilidad GVE para mínimos, a través del método de máxima verosimilitud. Para estimar los parámetros se usó el algoritmo de programación no lineal de Rosenbrock. Los estimadores resultantes se presentan en las tablas VI.3 y VI.4.

Este programa se elaboró con base en el programa **APHI/zyemin/over**.

c).- Programa **APHI/Lognor/ozm**.- Con este programa se estimaron los parámetros de ubicación, \hat{x}_0 , de escala, $\hat{\mu}_y$, y de forma, $\hat{\sigma}_y$, de la distribución Lognormal de 2 y 3 parámetros usando el método de momentos. Los estimadores resultantes se presentan en las tablas VI.5 y VI.6.

d).- Programa **APHI/Lognor/over**.- Con este programa se estimaron los parámetros de ubicación, \hat{x}_0 , de escala, $\hat{\mu}_y$, y de forma, $\hat{\sigma}_y$, de la distribución Lognormal de 2 y 3 parámetros a través del método de máxima verosimilitud. Los estimadores resultantes se presentan en las tablas VI.5 y VI.6.

b). - Programa APHI/gamma/mom. - Con este programa se estimaron los parámetros de ubicación, \hat{x}_0 , de escala, $\hat{\sigma}$, y de forma, $\hat{\beta}$, de la distribución Gamma de 2 y 3 parámetros a través del método de momentos. Los estimadores resultantes se presentan en la tablas VI.7 y VI.8. En la tabla VI.7 también se presenta la probabilidad de que ocurra una sequía de gasto cero. En la tabla VI.8 también se presenta el valor mínimo de cada uno de los registros de las estaciones correspondientes a esa tabla.

f). - Programa APHI/gamma/mver. - Con este programa se estimaron los parámetros de ubicación, \hat{x}_0 , de escala, $\hat{\sigma}$, y de forma, $\hat{\beta}$, de la distribución Gamma de 2 y 3 parámetros a través del método de máxima verosimilitud. Los estimadores resultantes se presentan en las tablas VI.7 y VI.8. En la tabla VI.8 también se presenta el coeficiente de asimetría sin sesgo, estimado para esta distribución, para cada uno de los registros de las estaciones correspondientes a esa tabla.

3. - Se realizó un análisis comparativo para saber, cual distribución, y con cual método de estimación de parámetros, se ajusta mejor a cada uno de los 42 registros de sequías. Para tal hecho se utilizó el Error Estándar de Ajusto (EEA).

El EEA está definido por, (Kite, 1977):

$$EEA = \left[\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - y_i)^2}{n-3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

donde los x_i son los valores de los eventos observados (datos históricos), n es el número de datos del registro y los y_i son los valores obtenidos con el modelo de 3 parámetros.

Los Y_i fueron obtenidos mediante el siguiente procedimiento:

i).- Se ordenan los datos, X_i , de los registros de mayor a menor

ii).- Se obtiene la probabilidad acumulada empírica de no excedencia, $P(X \leq x)$, para cada X_i con:

$$P(X \leq x) = (n+1-m) / (n+1) \quad (6.2)$$

donde n es el número de datos del registro y m es el número de orden de X_i

iii).- Las Y_i se estiman con la ecuación (3.2.34) para el caso de la distribución GVE para mínimos y para la probabilidad calculada en el paso 2.

Para el caso de la distribución lognormal las Y_i se estimaron con la ecuación (3.3.28) para la lognormal de 3 parámetros y con la ecuación (3.3.29) para la lognormal de 2 parámetros y para la probabilidad calculada en el paso 2.

Para el caso de la distribución Gamma las Y_i se estimaron con el procedimiento propuesto en esa sección y haciendo uso del algoritmo de integración de O'hara y Smith (1969), (ref.71).

Para estimar los EEA se generó el programa de cómputo **EEA**

Los EEA estimados para cada función de distribución por los métodos de momentos y de máxima verosimilitud se presentan en las tablas VI.10 y VI.11. Se ha subrayado al valor del EEA más pequeño, obtenido en el ajuste de cada registro. El valor más pequeño indica a la función de distribución y al método de mejor ajuste.

4).- Se estimaron los límites de confianza para las funciones de distribución de mejor ajuste por los métodos que proporcionaron dicho ajuste. Para estimar los límites de confianza se elaboraron los programas de cómputo siguientes:

a.- Programa OPH/Lognormal/LEOM. Con este programa se estimaron los límites de confianza de la distribución GVE para mínimos por el método de momentos, siguiendo el procedimiento sugerido en el capítulo V.

b.- Programa OPH/Lognormal/LEOM. Con este programa se estiman los límites de confianza de la distribución GVE para mínimos a través del método de máxima verosimilitud, de acuerdo a el procedimiento sugerido en el capítulo V.

c).- Programas OPH/Lognormal/LEOM y OPH/Lognormal/LEOM. Con estos programas se estiman los límites de confianza de la distribución Lognormal por los métodos de momentos y de máxima verosimilitud, respectivamente, de acuerdo a los procedimientos sugeridos en el capítulo V.

d).- Programas OPH/Gamma/LEOM y OPH/Gamma/LEOM. Con estos programas se estiman los límites de confianza de la distribución Gamma de 3 parámetros por los métodos de momentos y de máxima verosimilitud, respectivamente, de acuerdo a los procedimientos sugeridos en el capítulo V.

En la tabla VI.12 se presentan los límites de confianza de las

distribuciones que se ajustaron mejor a los registros de sequías de 1 día de duración de las estaciones siguientes: Acatitán, Guatenipa II, Ixpalino, La Huerta, Santa Cruz y Tamazula. Los límites de confianza se estimaron por los métodos que proporcionaron el mejor ajuste y para un nivel de confianza de 0.95, $1-\alpha=0.95$. Los periodos de retorno para los cuales fueron obtenidos los límites de confianza son: $T=2, 5, 10, 25, 50$ y $T=100$.

5).- Se graficaron las funciones de distribución de mejor ajuste y se indica el método de estimación que proporcionó dicho ajuste.

Las gráficas se presentan de la manera siguiente:

Las figuras del VI.1 al VI.5 muestran a las funciones de distribución de mejor ajuste de los registros de sequías de 1, 10, 30, 60, 90 y 180 días consecutivos de las estaciones Huixtla, Choix, Chinipas, Palo Dulce y Urique II, respectivamente.

Se observa de las gráficas que las curvas de las distribuciones se cruzan, a pesar de que se han ajustado a un conjunto de valores muy distintos entre sí, esto es debido a que las curvas se han graficado a una misma escala horizontal pero a distintas escalas verticales de tal manera que se pudieran mostrar, las 6 curvas, en una misma gráfica. La manera de graficar las curvas anteriores sin que éstas se crucen es dividiendo los datos de los registros entre el gasto promedio anual de periodo largo de la estación a donde corresponden dichos registros y graficar los porcentajes obtenidos contra su probabilidad de excedencia correspondiente. En este caso no se hizo así por lo laborioso que es obtener este gasto promedio anual de periodo largo y no contar

con la información suficiente para obtenerlo.

La nomenclatura usada en las gráficas anteriores es:

Función de distribución GVE para mínimos: GVE MIN

Función de distribución Lognormal-3 parámetros: LN-3

Función de distribución Lognormal-2 parámetros: LN-2

Función de distribución Gamma-3 parámetros: GAMMA-3

Función de distribución Gamma-2 parámetros: GAMMA-2

Método de momentos: MOM

Método de máxima verosimilitud: MV

En las figuras del VI.6 al VI.11 se muestran las gráficas de los datos históricos y la curva de la distribución del mejor ajuste de los registros de sequías de 1 día de duración correspondientes a las estaciones Acatitán, Guatenipa II, Ixpalino, La Huerta, Santa Cruz y Tamazula, respectivamente. En estas gráficas también se presentan los límites de confianza para dichas distribuciones.

En las figuras del VI.12 al VI.17 se muestran las gráficas de los datos históricos y la curva de la distribución del mejor ajuste de los registros de sequías de 1 día de duración, que tienen datos de gasto cero, correspondientes a las estaciones Badiraguato, El Cajón, Jaina, Orégano, San Bernardo y Toahayana, respectivamente.

TRATAMIENTO ESTADISTICO DE REGISTROS DE SEQUIAS QUE TIENEN DATOS DE CERO GASTO

Quando se tiene un registro de sequias con incidencia de cero flujo, se emplea un procedimiento, de dos pasos, basado en una probabilidad condicional. Se separan los datos observados diferentes de cero de los igual a cero. Se estiman los parámetros de la función de probabilidad que se ajusta a los eventos diferentes de cero, $F(x)$, y se relaciona con la probabilidad de que ocurran gastos cero de la manera siguiente, (Jennings, 1969, Joseph, 1970, Elia Martin, 1972, Kite, 1977, Condie, 1979):

$$F(x) = P_0 + (1 - P_0) \cdot F(x) \quad (6.3)$$

donde $F(x)$ es la probabilidad de ocurrencia de que una sequia X sea menor o igual que x .

P_0 es la probabilidad de que ocurra cero gasto.

$F(x)$ es la función de probabilidad acumulada que se ajusta a los datos diferentes de cero del registro dado.

La probabilidad de ocurrencia de cero gasto se calcula con la siguiente expresión:

$$P_0 = z/n \quad (6.4)$$

donde z es el número de datos de cero gasto

n es el número de datos del registro.

En este trabajo las funciones de probabilidad acumulada, $F(x)$, que se ajustaron a los datos diferentes de cero, de los registros

de sequías que tienen datos de cero gasto, son: la distribución GVE para mínimos, La distribución Lognormal y la distribución Gamma. Los parámetros de estas funciones fueron estimados por los métodos de momentos y de máxima verosimilitud. Una de las condiciones es de que el límite inferior fuera igual a cero. Por lo que para el caso de las distribuciones Lognormal y Gamma de 3 parámetros al hacer el límite inferior igual a cero éstas se redujeron al caso particular de las distribuciones Lognormal y Gamma de 2 parámetros y sus parámetros fueron estimados con los programas mencionados en el paso 2 del procedimiento general indicado en este capítulo.

TABLA VI.1

En esta tabla se presentan los parámetros estadísticos sin sesgo de 33 registros de sequías, útiles para estimar los parámetros de la Distribución GVE para mínimos por el método de momentos, dichos parámetros son: media, \bar{x} , desviación estándar, $\hat{\sigma}$, coeficiente de asimetría, g , y coeficiente de kurtosis, K_k .

N	ESTACION	\bar{x}	$\hat{\sigma}$	g	K_k
1	Palo Dulce	0.6718	0.4448	1.1574	4.3992
	Chinipas	0.3351	0.3105	1.0465	5.0367
	Urique II	2.9978	2.5967	2.6057	12.419
	La Huerta	1.5334	0.7389	0.4132	4.6704
	Tamazula	0.4051	0.2343	1.1114	5.6502
	Guatemipa II	1.0983	0.9319	1.9481	8.9006
	Acaticán	0.1976	0.0829	1.3761	5.6073
	Topalino	1.0057	0.6744	1.7335	6.4487
	Santa Cruz	1.8990	0.8266	1.5144	8.2131
Huiles	4.1242	2.2651	2.1393	10.017	
10	Huiles	44.964	25.289	2.4757	12.399
	Chinipas	6.0471	3.4347	1.3060	5.1658
	Palo Dulce	2.6137	1.9744	1.2737	4.6079
	Urique II	31.225	22.012	2.4617	11.367
30	Huiles	159.13	93.062	2.5511	12.844
	Chinipas	25.912	14.283	1.5898	6.7423
	Palo Dulce	28.115	19.233	1.4951	5.5479
	Urique II	100.08	87.600	2.2321	9.5184
60	Huiles	397.74	235.18	2.3023	10.357
	Chinipas	59.051	32.811	1.9594	8.6795
	Palo Dulce	76.892	52.460	1.4001	5.0829
	Urique II	220.27	191.39	2.1207	8.4919
	Choix	10.117	8.3218	1.4057	4.7569
90	Huiles	933.47	557.13	2.4067	10.952
	Chinipas	123.87	84.200	2.1737	10.141
	Palo Dulce	166.28	147.62	2.5753	11.386
	Urique II	352.42	203.64	2.0973	8.2463
	Choix	23.636	18.001	1.6879	6.4528
180	Huiles	6468.3	6117.3	1.7630	5.7544
	Chinipas	1503.1	1503.8	1.3584	4.3392
	Palo Dulce	1403.3	1227.8	1.4034	4.4203
	Urique II	1070.4	782.82	1.6339	7.2500
	Choix	232.86	224.04	1.4672	4.5746

N indica el número de días consecutivos de sequías.

TABLA VI.2

En esta tabla se presentan los parámetros estadísticos sin sesgo de 7 registros de sequías que tienen ceros entre sus datos, útiles para estimar los parámetros de la distribución GVE para mínimos por el método de momentos. Los parámetros estadísticos fueron obtenidos para los datos diferentes de cero. También se presenta la probabilidad de ocurrencia de cero flujo, P_0 . Los parámetros estadísticos son: media, \bar{X} , desviación estándar, $\hat{\sigma}$, coeficiente de asimetría, g , y el coeficiente de kurtosis, k_k .

N	ESTACION	\bar{X}	$\hat{\sigma}$	g	k_k	P_0
1	Choiix	0.1052	0.1551	3.6922	20.233	0.0370
	Badiraguato	0.2991	0.4835	2.2427	8.7527	0.1304
	Jaina	0.7449	0.8120	1.8016	6.0047	0.1000
	Orégano	0.0236	0.0159	0.6585	3.9958	0.6098
	El Cajón	0.1184	0.1223	0.7739	9.3258	0.5833
	San Bernardo	0.4002	0.4653	2.0751	7.6365	0.0909
	Toahayana	0.5473	0.4244	1.0938	3.8136	0.0400
10	Choiix	0.9517	0.9083	1.5134	5.3924	0.0370
30	Choiix	3.7263	3.0725	1.2155	4.1686	0.0370

N indica el número de días consecutivos de sequías

TABLA VI.3

En esta tabla se presentan los parámetros de ubicación, $\hat{\omega}_i$, de escala, $\hat{\alpha}_i$, y de forma, $\hat{\beta}_i$, de la distribución GVE para mínimos, estimados por los métodos de momentos y de máxima verosimilitud, correspondientes a los registros que contienen entre sus datos, ceros

N	ESTACION	$\hat{\omega}_1$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_2$
1	Choiix	0.81727	0.11681	1.45976	0.08175	0.11644	1.46005
	Badiraguato	0.28423	0.46711	1.07536	0.39705	0.44650	1.16564
	Jaina	0.77000	0.83468	0.92904	0.90951	1.01458	1.24410
	Orégano	0.02743	0.01724	0.51371	0.02195	0.01894	1.05434
	El Cajón	0.14483	0.13293	0.55646	0.10394	0.10266	1.03759
	San Bernardo	0.39614	0.46106	1.02109	0.41989	0.43852	1.11898
	Toahayana	0.61284	0.46132	0.67508	0.47335	0.37802	1.01249
10	Choiix	1.02258	0.96281	0.82787	1.18852	1.17477	1.08421
30	Choiix	4.13009	3.32469	0.71989	3.76445	3.56211	1.14927

i=1 indica los estimadores de momentos

i=2 indica los estimadores de máxima verosimilitud

N indica el número de días consecutivos de sequías

TABLA VI.4

En esta tabla se presentan los parámetros de ubicación, $\hat{\omega}_1$, de escala, $\hat{\sigma}_1$, y de forma, $\hat{\beta}_1$, estimados por los métodos de momentos y de máxima verosimilitud, de la distribución DVE para mínimos

N ESTACION	$\hat{\omega}_1$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\beta}_2$
1 Acatitán	0.1520	0.0889	0.7785	1.3612	3.2487	2.4515
Ixpallino	1.1137	0.3989	0.9085	1.1082	0.6856	0.9432
La Huerta	1.7439	0.7842	0.4239	1.7442	0.7486	0.3961
Huites	4.0846	2.2234	1.0421	4.1082	2.2350	1.0512
Palo Dulce	0.7363	0.4916	0.6965	0.7320	0.4843	0.7172
Chinipas	0.5872	0.3466	0.6576	0.5585	0.3589	0.8297
Urique II	2.8110	2.3627	1.1865	2.8366	2.2500	1.1845
Tamazula	0.4403	0.3516	0.6016	0.4461	0.2491	0.6188
Santa Cruz	1.9633	0.8762	0.8282	3.3355	3.5097	1.0758
Guatenipa II	1.7059	0.8291	0.9789	4.0040	4.5033	1.4887
10 Huites	43.494	23.516	1.1470	41.624	22.485	1.1364
Chinipas	6.5046	3.7183	0.7164	6.5600	3.6994	0.7160
Palo Dulce	8.2158	5.3980	0.7412	8.4265	5.3937	0.6863
Urique II	29.767	25.192	1.1435	29.921	23.821	1.1747
30 Huites	152.96	85.473	1.1704	150.41	85.046	1.1587
Chinipas	23.041	15.932	0.8551	24.094	14.761	0.7773
Palo Dulce	29.711	20.419	0.8213	31.581	20.604	0.7014
Urique II	98.290	84.966	1.0720	98.478	83.876	1.2146
60 Huites	303.78	225.08	1.0942	300.38	224.16	1.0787
Choix	10.922	8.0999	0.7892	10.757	8.5351	0.8222
Chinipas	60.130	38.084	0.9827	60.155	35.923	1.0125
Palo Dulce	82.023	56.128	0.7872	84.885	55.529	0.6939
Urique II	217.40	188.38	1.0360	311.18	217.53	0.8713
90 Huites	727.30	524.25	1.1267	800.44	499.19	1.0158
Choix	24.535	12.584	0.8896	23.780	18.377	0.9155
Chinipas	122.02	82.219	1.0532	122.54	84.904	1.0349
Palo Dulce	156.12	135.02	1.1776	147.04	138.59	1.0718
Urique II	349.82	299.90	1.0284	359.56	282.04	1.1487
180 Huites	6694.3	6317.7	0.9157	6695.6	5998.5	1.1001
Choix	252.13	238.44	0.8113	259.36	224.25	0.9760
Chinipas	1661.8	1613.8	0.7720	1693.7	1575.1	1.1547
Palo Dulce	1522.6	1313.3	0.7883	1554.2	1225.1	0.9748
Urique II	1113.6	820.16	0.8706	1057.7	820.42	1.0307

n indica el número de días consecutivos de sequías
 i=1 indica los estimadores de momentos
 i=2 indica los estimadores de máxima verosimilitud

TADLA VI.5

En esta tabla se presentan los parámetros de ubicación, \hat{x}_{01} , de escala, $\hat{\mu}_{y1}$ y de forma, $\hat{\sigma}_{y1}$, estimados por los métodos de momentos y de máxima verosimilitud, de la distribución Lognormal-3 parámetros

N ESTACION	\hat{x}_{01}	$\hat{\mu}_{y1}$	$\hat{\sigma}_{y1}$	\hat{x}_{01}	$\hat{\mu}_{y1}$	$\hat{\sigma}_{y1}$
1 Acatlán	-0.0706	1.3933	0.3786	-0.0041	-2.0184	0.5266
Ixpialco	-0.7274	0.1722	0.4264	*	*	*
La Huerta	-1.3482	1.7646	0.1200	*	*	*
Huites	0.4823	1.1549	0.5087	*	*	*
Palo Dulce	-0.6056	0.1711	0.3208	-0.1284	-0.3683	0.5558
Chinipas	-0.4756	-0.0395	0.2899	-0.0857	-0.5979	0.5160
Urique II	-0.7279	1.1693	0.4741	*	*	*
Tamozula	-0.3868	-0.4188	0.3150	-0.1335	-0.7047	0.4274
Santa Cruz	**	**	**	-1.8353	1.2959	0.2090
Guatemala II	0.4180	0.2774	0.4629	*	*	*
10 Huites	0.5898	3.4225	0.5784	19.735	2.7984	0.9836
Chinipas	-3.1271	2.1295	0.3239	0.3602	1.7308	0.5232
Palo Dulce	-5.2747	2.4236	0.3450	-1.5899	2.0920	0.5146
Urique II	-9.2713	3.5660	0.4802	7.4811	2.7051	1.0240
30 Huites	28.362	1.6772	0.5646	72.009	3.9602	1.0882
Chinipas	-7.9045	3.3436	0.3790	-0.0279	2.9723	0.5846
Palo Dulce	-14.780	3.6789	0.3892	-5.3557	3.3752	0.5292
Urique II	-41.714	4.8406	0.4518	22.891	3.8890	1.0211
60 Huites	39.263	5.7298	0.5225	166.13	5.0002	1.0018
Choix	-9.4281	2.9000	0.3662	-1.2390	2.1973	0.6991
Chinipas	-3.1236	4.1089	0.4462	21.097	3.2477	0.9740
Palo Dulce	-47.316	4.7491	0.3705	-15.409	4.3884	0.5311
Urique II	-104.385	5.6710	0.4348	52.402	4.6466	1.0223
90 Huites	5.7115	6.5509	0.5286	262.46	5.9513	0.8980
Choix	13.217	3.5291	0.4203	0.6366	2.8472	0.7883
Chinipas	-14.256	4.8043	0.4828	25.889	4.3000	0.7857
Palo Dulce	-42.222	5.1821	0.5228	-9.3171	4.9382	0.6659
Urique II	-166.72	6.1437	0.4502	96.819	5.0275	1.0732
180 Huites	3173.6	9.3520	0.4182	1035.3	8.0435	1.1033
Choix	-273.50	6.1817	0.3681	18.951	4.8630	1.0527
Chinipas	-2235.13	8.1640	0.3361	*	*	*
Palo Dulce	-1497.6	7.7027	0.3559	247.11	6.5071	1.1187
Urique II	-523.44	7.3320	0.3267	121.15	6.5549	0.8319

N indica el número de días consecutivos de sequías

i=1 indica los estimadores de momentos

i=2 indica los estimadores de máxima verosimilitud

* indica que no se encuentran raíces en el intervalo especificado esto es, el parámetro de ubicación es mayor que el dato mínimo de la muestra.

** indica que se violó la restricción $x - x_0 > 0$.

TABLA VI.6

En esta tabla se presentan los parámetros de escala, $\hat{\mu}_{y1}$, y de forma, $\hat{\sigma}_{y1}$, estimados por los métodos de momentos y de máxima verosimilitud, de la distribución Lognormal-2 parámetros, así como también la probabilidad de que se presente una sequía de gasto cero, P_0 . El parámetro de ubicación en este caso es cero, $\hat{x}_0=0$.

N ESTACION	$\hat{\mu}_{y1}$	$\hat{\sigma}_{y1}$	$\hat{\mu}_{y2}$	$\hat{\sigma}_{y2}$	P_0
1 Choix	-2.9143	1.1962	-2.9143	1.2199	0.0370
Badiraguato	-2.2621	1.4072	-2.2621	1.4438	0.1304
Jaina	-0.7698	0.9562	-0.7698	0.9698	0.1000
Drégano	-4.0212	0.8118	-4.0212	0.8385	0.6098
El Cajón	-2.9302	1.5178	-2.9302	1.6969	0.5833
San Bernardo	-1.4216	1.0083	-1.4216	1.0345	0.0909
Toahayana	-0.8948	0.7838	-0.8948	0.8007	0.0400
10 Choix	-0.4715	0.9442	-0.4715	0.9629	0.0370
30 Choix	0.9873	0.8315	0.9873	0.8480	0.0370

i=1 indica los estimadores de momentos
 i=2 indica los estimadores de máxima verosimilitud
 N indica el número de días consecutivos de sequías

TABLA VI.7

En esta tabla se presentan los parámetros de escala, $\hat{\alpha}_1$, y de forma, $\hat{\beta}_1$, estimados por los métodos de momentos y de máxima verosimilitud, de la distribución Gamma-2 parámetros. Así como también la probabilidad de que se presente una sequía de gasto cero, P_0 . El parámetro de ubicación en este caso es cero, $\hat{x}_0=0$.

N ESTACION	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_2$	P_0
1 Choix	0.2288	0.4597	0.1188	0.8850	0.0370
Badiraguato	0.7816	0.3827	0.5092	0.5874	0.1304
Jaina	0.8851	0.8416	0.6254	1.1911	0.1000
Drégano	0.0108	2.1975	0.0120	1.9635	0.6098
El Cajón	0.1264	0.9371	0.1576	0.7514	0.5833
San Bernardo	0.5409	0.7400	0.3556	1.1256	0.0909
Toahayana	0.3290	1.6634	0.2941	1.8612	0.0400
10 Choix	0.8668	1.0979	0.7174	1.3267	0.0370
30 Choix	2.5335	1.4708	2.2296	1.6713	0.0370

i=1 indica los estimadores de momentos
 i=2 indica los estimadores de máxima verosimilitud
 N indica el número de días consecutivos de sequías

TABLA VI.B

En esta tabla se presentan los parámetros de ubicación, \hat{x}_0 , de escala, \hat{a} , y de forma, $\hat{\beta}$, estimados por el método de momentos, de la distribución Gamma-3 parámetros. También se presenta el valor más pequeño de cada uno de los registros de la estación correspondiente, x_m .

N Estación	\hat{x}_0	\hat{a}	$\hat{\beta}$	x_m
1 Acetitán	0.0543	0.0738	1.2633	0.036
Ixpalino	0.4840	0.7558	0.7961	0.383
La Huerta	0.6294	0.2525	8.5669	0.222
Huites	2.3776	2.9377	0.5945	1.982
Palo Dulce	0.0935	0.3552	1.6283	0.075
Chinipas	0.1376	0.2552	1.5576	0.134
Urique II	1.7577	5.4371	0.2281	0.937
Tamazula	0.1022	0.1856	1.5947	0.065
Santa Cruz	1.0024	0.7623	1.1758	0.073
Guatenipa II	1.3360	1.2008	0.4684	0.979
10 Huites	28.121	37.942	0.4439	21.84
Chinipas	2.3273	37.715	1.1729	1.581
Palo Dulce	1.8221	4.3073	1.3445	0.799
Urique II	17.638	53.444	0.2556	9.643
30 Huites	98.958	143.93	0.4181	77.02
Chinipas	11.178	17.386	0.6749	5.784
Palo Dulce	9.1520	19.468	0.9758	2.760
Urique II	51.933	157.49	0.3108	29.42
60 Huites	222.24	328.26	0.5133	182.6
Choir	1.1118	7.6905	1.1709	0.486
Chinipas	34.544	56.723	0.4443	24.68
Palo Dulce	21.535	49.732	1.1127	7.208
Urique II	107.96	326.16	0.3443	65.52
90 Huites	443.62	812.88	0.4697	309.0
Choir	6.6932	20.863	0.8121	3.784
Chinipas	73.272	140.13	0.3610	40.51
Palo Dulce	81.624	257.40	0.3289	17.73
Urique II	173.26	511.74	0.3521	114.0
180 Huites	744.25	6538.3	0.8754	1243.
Choir	0.5857	216.10	1.0749	29.77
Chinipas	57.126	1564.0	0.9246	329.7
Palo Dulce	111.17	1162.6	1.1076	298.8
Urique II	474.14	1027.0	0.5801	261.7

N indica el número de días consecutivos de sequías

TABLA VI.9

En esta tabla se presentan los parámetros de ubicación, \hat{x}_0 , de escala, $\hat{\alpha}$, y de forma, $\hat{\beta}$, estimados por el método de máxima verosimilitud, de la distribución Gamma-3 parámetros. También se presentan los coeficientes de asimetría sin sesgo estimados para esta distribución, $\hat{\gamma}$.

N ESTACION	\hat{x}_0	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
1 Acatitán	*	*	*	1.7794
Ixpálino	**	**	**	2.2416
La Huerta	-1.8195	0.1508	22.2345	0.6833
Huites	**	**	**	2.5939
Palo Dulce	*	*	*	1.5673
Chinipas	*	*	*	1.6025
Urique II	**	**	**	4.1878
Tamazula	*	*	*	1.5838
Santa Cruz	-1.0669	0.2058	14.4665	1.8444
Guatenipa II	**	**	**	2.9222
10 Huites	**	**	**	3.0018
Chinipas	1.1056	2.3297	2.1212	1.8467
Palo Dulce	0.0301	2.9772	2.5471	1.7248
Urique II	**	**	**	3.9562
30 Huites	**	**	**	3.0932
Chinipas	**	**	**	2.4344
Palo Dulce	**	**	**	2.0246
Urique II	**	**	**	3.5874
60 Huites	**	**	**	2.7915
Choix	0.2079	6.4751	1.5303	1.8483
Chinipas	**	**	**	3.0004
Palo Dulce	0.1381	31.657	2.4246	1.8960
Urique II	**	**	**	3.4083
90 Huites	**	**	**	2.9181
Choix	**	**	**	2.2193
Chinipas	**	**	**	3.3285
Palo Dulce	**	**	**	3.4874
Urique II	**	**	**	3.3707
180 Huites	**	**	**	2.1376
Choix	*	*	*	1.9291
Chinipas	**	**	**	2.0800
Palo Dulce	*	*	*	1.9004
Urique II	**	**	**	2.6259

N indica el número de días consecutivos de sequías

* indica que no se encontraron raíces en el intervalo considerado, esto es, el parámetro de ubicación es mayor que el valor más pequeño de la muestra considerada.

** indica que se está violando la restricción $-2 \leq \hat{\gamma} \leq 2$

TABLA VI.10

En esta tabla se presentan los Errores Estándar de Ajuste (EEA), estimados para las funciones de ~~Distribución~~ GVE para mínimos, la Lognormal-3 parámetros y la Gamma-3 parámetros. Los parámetros de las funciones de distribución anteriormente mencionadas, fueron estimados por los métodos de momentos y de máxima verosimilitud.

N ESTACION	EEA ₁	EEA ₂	EEA ₃	EEA ₄	EEA ₅	EEA ₆
1 Acaticán	0.0233	0.0186	**	*	0.0195	6.6140
Tapalco	0.2387	*	**	**	0.1564	0.1586
La Huerta	0.2435	*	0.2297	0.2401	0.2270	0.2381
Huites	0.8037	1	**	**	0.5931	0.5293
Palo Dulce	0.1730	0.0844	**	*	0.0911	0.0929
Chinipas	0.0917	0.0632	**	*	0.0732	0.0670
Urique II	1.5380	*	**	*	1.1740	1.2220
Tamazula	0.0635	0.0533	**	*	0.0548	0.0580
Santa Cruz	**	0.5016	**	0.2906	0.2452	2.7860
Guatenipa II	0.3424	*	**	**	0.2663	4.3280
10 Huites	7.8370	6.0820	**	**	7.6500	8.7210
Chinipas	1.1500	0.5128	**	0.9716	0.9349	0.9279
Palo Dulce	1.6010	1.3080	**	1.3910	1.2700	1.3080
Urique II	15.720	11.310	**	**	11.680	10.680
30 Huites	36.860	30.670	**	**	27.890	29.000
Chinipas	5.5830	4.5160	**	**	4.4650	4.8050
Palo Dulce	6.6760	5.5380	**	**	5.1620	5.5710
Urique II	50.030	36.620	**	**	37.150	33.60
60 Huites	86.070	22.000	**	**	55.820	57.390
Choix	2.8500	2.0020	**	2.1780	2.0922	2.1030
Chinipas	17.180	10.220	**	**	12.640	13.390
Palo Dulce	18.390	15.490	**	16.510	14.720	15.800
Urique II	110.00	84.540	**	**	82.920	107.90
90 Huites	219.80	123.10	**	**	142.90	179.00
Choix	6.4760	3.5050	**	**	4.3300	4.9840
Chinipas	39.620	30.120	**	**	30.480	30.230
Palo Dulce	74.570	65.770	**	**	53.040	61.020
Urique II	174.90	132.90	**	**	131.20	126.60
180 Huites	2433.0	1480.0	1436.0	**	1583.0	1342.0
Choix	87.740	65.980	50.240	*	65.330	61.710
Chinipas	712.30	*	510.20	**	568.80	425.80
Palo Dulce	486.90	357.80	322.40	*	360.20	344.00
Urique II	318.10	176.10	**	**	236.00	219.40

* y ** indican que no se calculó el EEA debido a que no fue posible estimar los parámetros de las distribuciones correspondientes por violar restricciones, tal como se indica en las tablas VI.5, VI.8 y VI.9

EEA₁ = EEA de la Lognormal por momentos

EEA₂ = EEA de la Lognormal por Máxima verosimilitud

EEA₃ = EEA de la Gamma-3 por momentos

EEA₄ = EEA de la Gamma-3 por máxima verosimilitud

EEA₅ = EEA de la GVE para mínimos por momentos

EEA₆ = EEA de la GVE para mínimos por máxima verosimilitud

TABLA VI.11

En esta tabla se presentan los EEA de las distribuciones GVE para mínimos, Lognormal y la Gamma, a) ser ajustadas a los registros que tienen datos de flujo cero.

N ESTACION	EEA ₁	EEA ₂	EEA ₃	EEA ₄	EEA ₅	EEA ₆
1 Chojix	0.0630	0.0625	0.0629	0.0883	0.0742	0.0743
Badiraguato	0.2394	0.2186	0.1190	0.2147	0.1888	0.2011
Jaina	0.2262	0.1968	0.1908	0.2751	0.2195	0.2883
Drégano	0.0046	0.0046	0.0040	0.0037	0.0039	0.0056
El Cajón	0.0788	0.0653	0.0688	0.0693	0.0646	0.1052
San Bernardo	0.1741	0.1542	0.1557	0.2048	0.1680	0.1601
Toahayana	0.0954	0.0908	0.0909	0.1037	0.0951	0.1651
10 Chojix	0.1864	0.1735	0.1984	0.2511	0.2150	0.2621
30 Chojix	0.6505	0.6067	0.6266	0.7404	0.6664	0.6570

La nomenclatura es la misma que la de la tabla VI.10

TABLA VI.12

En esta tabla se presentan los límites de confianza obtenidos a través de las funciones de distribución que han dado el mejor ajuste a los registros de sequías de 1 día de duración. Los límites de confianza se han obtenido para un nivel de confianza, $1-\alpha$, de 0.95.

Estación Acaticán, Sin.; distribución Lognormal-3 parámetros; método de máxima verosimilitud; $\hat{x}_0 = -0.00410$; $\hat{\mu}_y = -2.0184$; $\hat{\sigma}_y = 0.5266$

T	P(X ≤ x)	x_1	x_T	x_5
2.0	0.50	0.10171	0.12877	0.15582
5.0	0.20	0.06177	0.08121	0.10064
10.0	0.10	0.04601	0.06355	0.08110
25.0	0.04	0.03097	0.04874	0.06651
50.0	0.02	0.02180	0.04094	0.06009
100.0	0.01	0.01392	0.03492	0.05592

Estación Tamazula, Sin.; distribución Lognormal-3 parámetros; método de máxima verosimilitud; $\hat{x}_0 = -0.13335$; $\hat{\mu}_y = -0.7047$; $\hat{\sigma}_y = 0.4274$

T	P(X ≤ x)	x_1	x_T	x_5
2.0	0.50	0.26188	0.36076	0.45963
5.0	0.20	0.13489	0.21146	0.28802
10.0	0.10	0.07968	0.15229	0.22489
25.0	0.04	0.02278	0.10034	0.17790
50.0	0.02	-0.01388	0.07193	0.15773
100.0	0.01	-0.04646	0.04934	0.14513

Estación Santa Cruz, Sin.; distribución GVE para mínimos; método de momentos; $\hat{\omega} = 1.9633$; $\hat{\alpha} = 0.8762$; $\hat{\beta} = 0.8282$

T	P(X ≤ x)	x_1	x_T	x_5
2.0	0.50	1.47402	1.68632	1.89863
5.0	0.20	0.94258	1.21081	1.47904
10.0	0.10	0.75232	1.06942	1.38652
25.0	0.04	0.62642	0.98016	1.33390
50.0	0.02	0.57834	0.94713	1.31592
100.0	0.01	0.55105	0.92878	1.30651

TABLA VI.12 (continuación)

Estación Ixpalino, Sin.; distribución GVE para mínimos; método de momentos; $\hat{\omega} = 1.1137$; $\hat{\alpha} = 0.6989$; $\hat{\beta} = 0.9055$

T	P(X<x)	x_l	x_T	x_s
2.0	0.50	0.70175	0.89571	1.08968
5.0	0.20	0.34117	0.54032	0.73947
10.0	0.10	0.19387	0.44245	0.69103
25.0	0.04	0.09583	0.38449	0.67315
50.0	0.02	0.05894	0.36441	0.66987
100.0	0.01	0.03841	0.35384	0.66927

Estación Guatenipa II, Sin.; distribución GVE para mínimos; método de momentos; $\hat{\omega} = 1.90590$; $\hat{\alpha} = 0.82910$; $\hat{\beta} = 0.97890$

T	P(X<x)	x_l	x_T	x_s
2.0	0.50	1.41833	1.65056	1.88280
5.0	0.20	0.70408	1.25400	1.80393
10.0	0.10	0.39558	1.15251	1.90943
25.0	0.04	0.19245	1.09592	1.99939
50.0	0.02	0.11617	1.07751	2.03885
100.0	0.01	0.07390	1.06831	2.06272

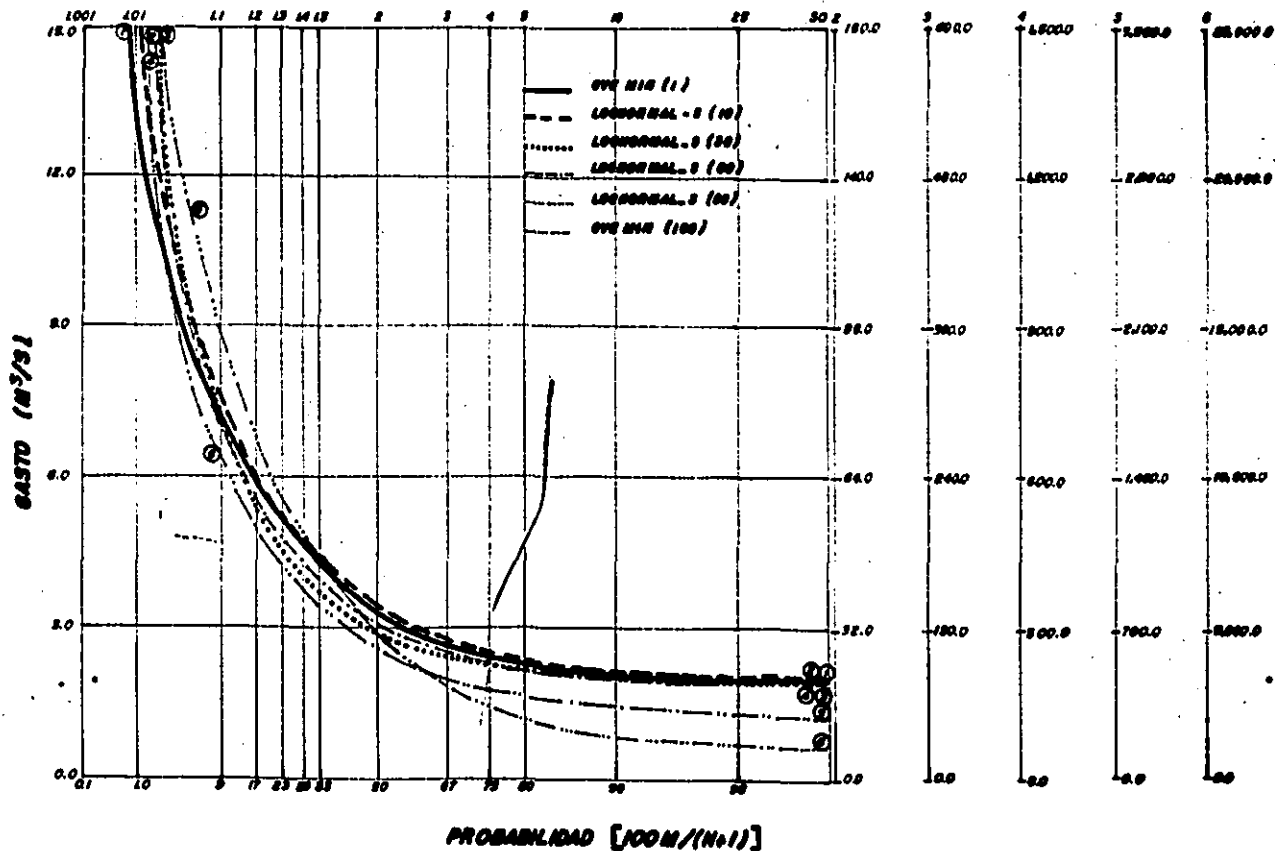
Estación La Huerta, Sin.; distribución GVE para mínimos; método de momentos; $\hat{\omega} = 1.74390$; $\hat{\alpha} = 0.78420$; $\hat{\beta} = 0.42390$

T	P(X<x)	x_l	x_T	x_s
2.0	0.50	1.08124	1.47770	1.87415
5.0	0.20	0.40448	0.87349	1.34250
10.0	0.10	0.04904	0.60659	1.16413
25.0	0.04	-0.27999	0.37072	1.02143
50.0	0.02	-0.45512	0.24779	0.95071
100.0	0.01	-0.58549	0.15714	0.89976

- T periodo de retorno
- P(X<x) probabilidad de no excedencia asociada al periodo de retorno T
- x_T valor esperado de X para el periodo de retorno T
- x_l límite de confianza inferior asociado al periodo de retorno T
- x_s límite de confianza superior asociado al periodo de retorno T

PERIODO DE RETORNO (AÑOS).

ESCALAS

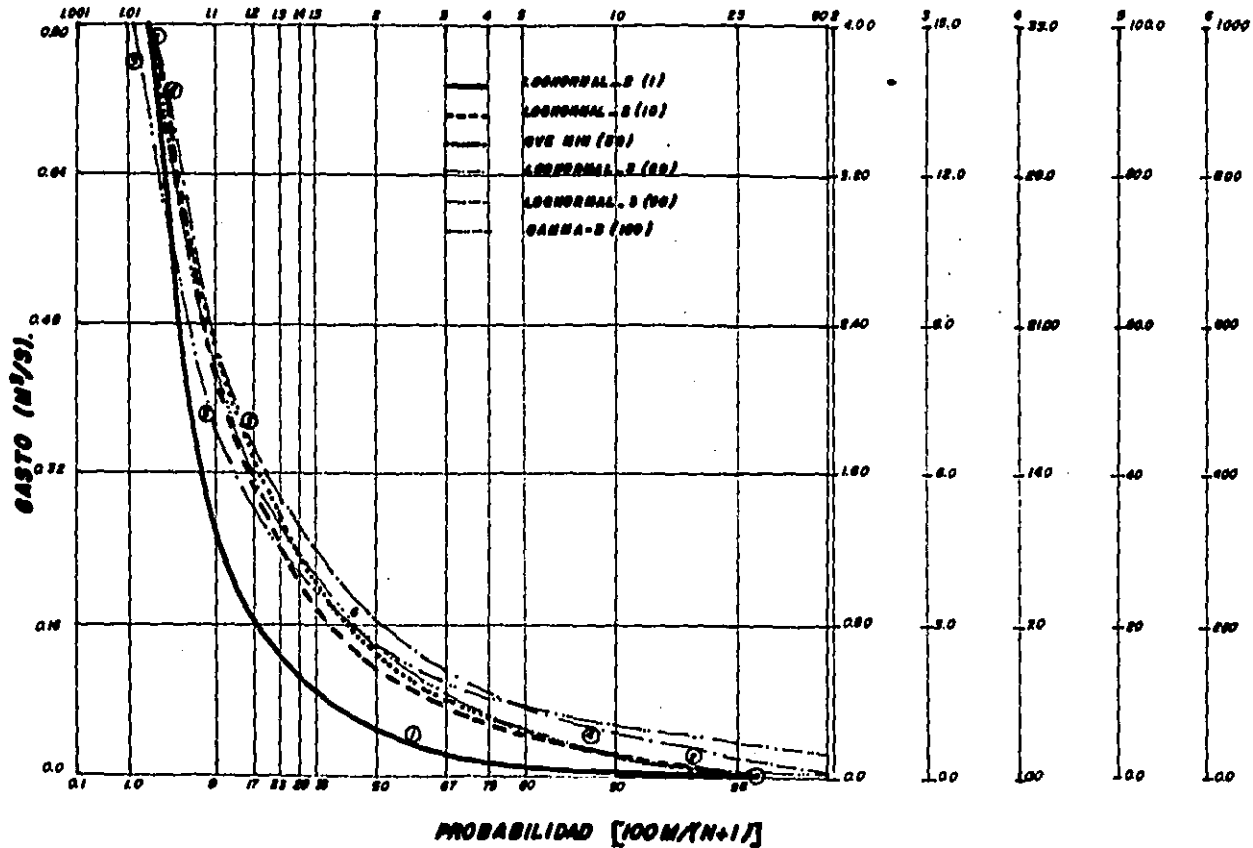


ESTACION NUITES, SIM. (1942-1981): (1) OVE MIN, MV; (2) LN-3, MV; (3) LN-3, MV; (4) LN-3, MV; (5) LN-3, MV; (6) OVE MIN, MV.

Fig VI.1

PERIODO DE RETORNO (AÑOS)

ESCALA S

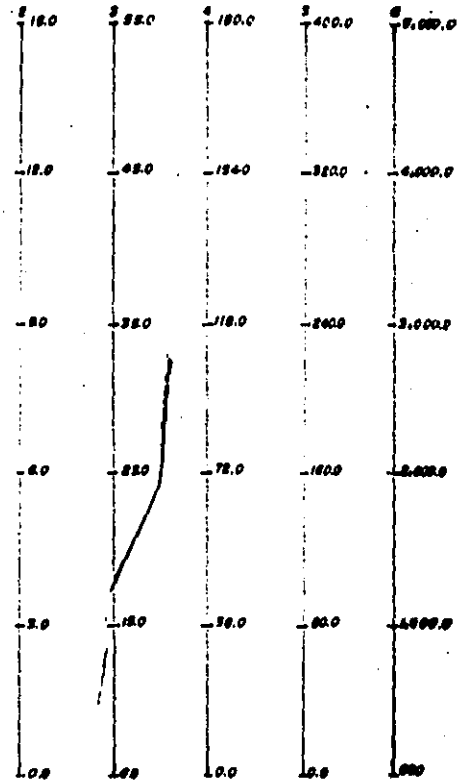
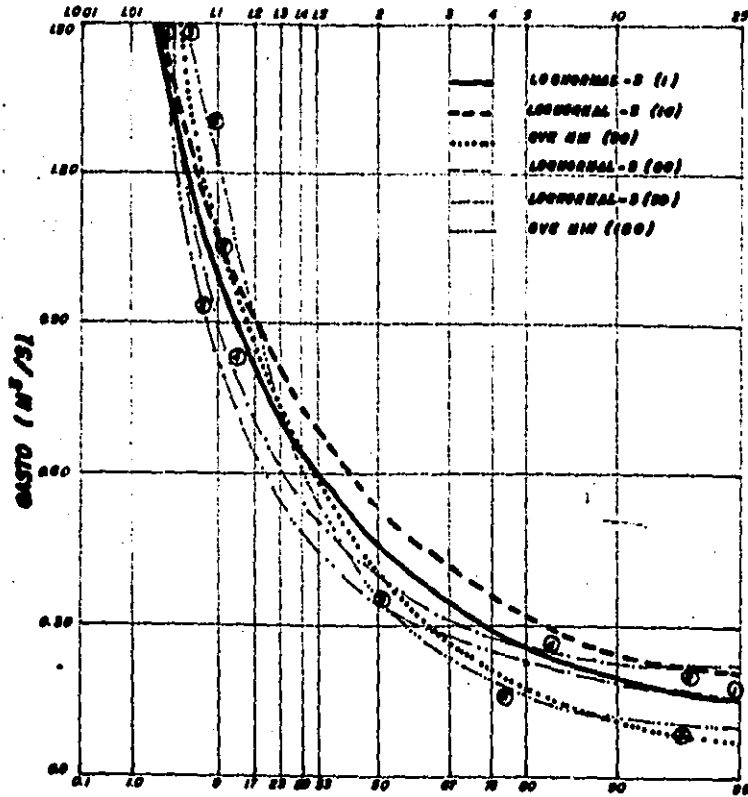


ESTACION CHOIX, SIN., (1955-1961): (1) LN-2, MV; (2) LN-2, MV; (3) GVE MIN, MV; (4) LN-3, MV; (5) LN-3, MV; (6) GAMMA-3, NON.

Fig VI.2

PERIODO DE RETORNO (AÑOS).

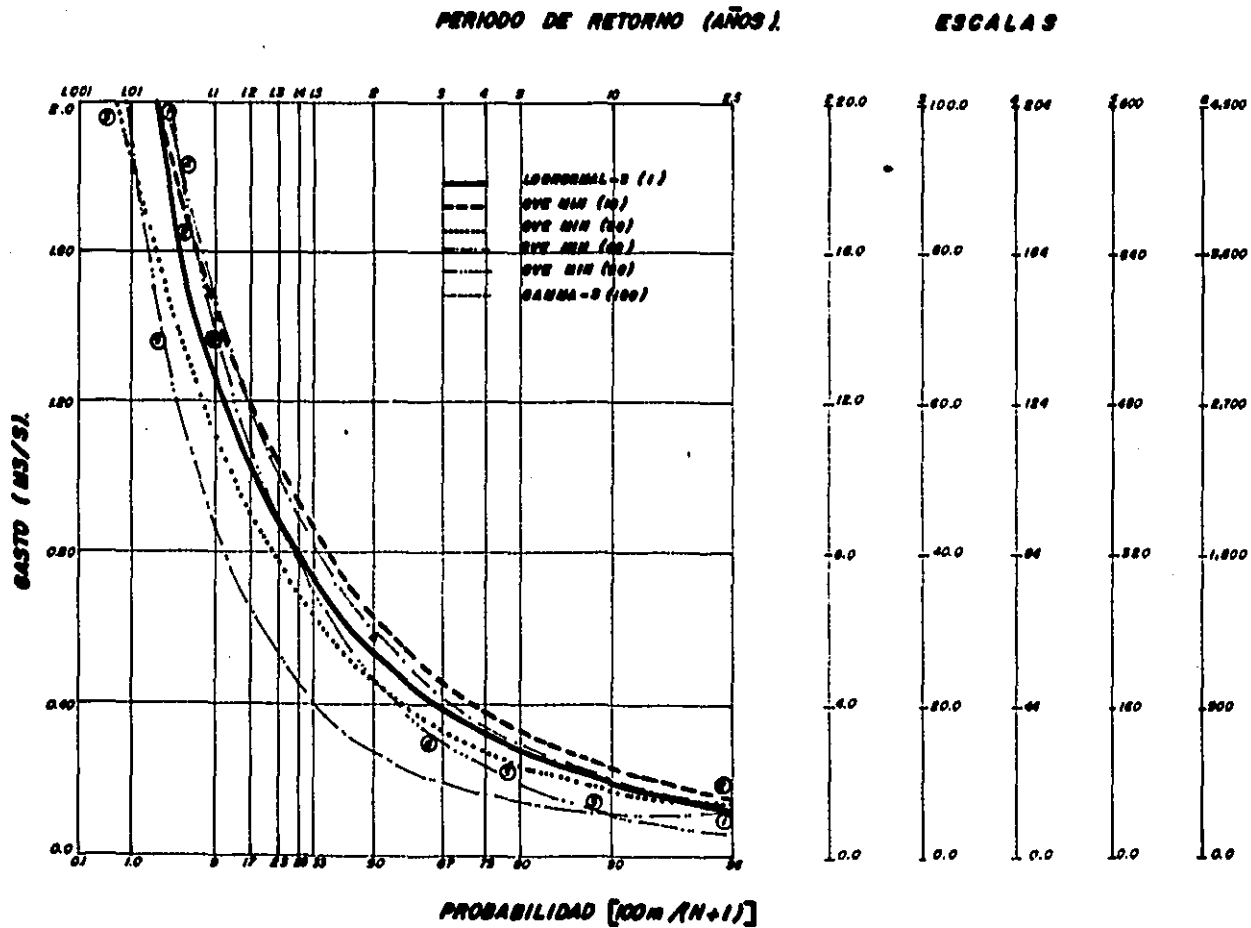
ESCALAS



PROBABILIDAD $[100/(N+1)]$

ESTACION CHINIPAS, CHIHUAHUA, (1966-1981): (1) LN-S, MV; (2) LN-S, MV; (3) OVE MN, NOM; (4) LN-S, MV; (5) LN-S, MV; (6) OVE MN, MV.

Fig VI.3

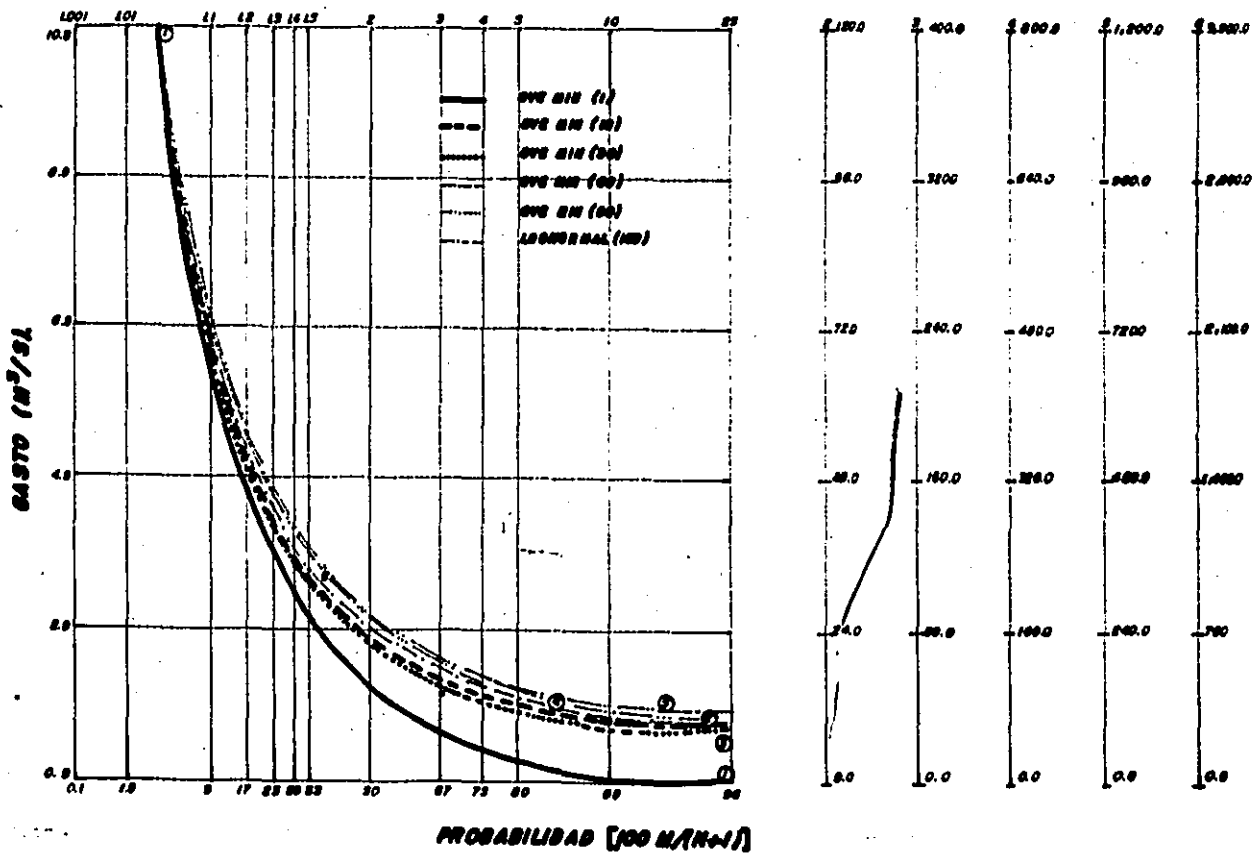


ESTACION PALO DULCE, SIN., (1958-1981): (1) LN-3, MV; (2) GVE MIN, MOM; (3) GVE MIN, MOM; (4) GVE MIN, MOM; (5) GVE MIN, MOM; (6) GAMMA-3, MOM.

Fig VI.4

PERIODO DE RETORNO (AÑOS)

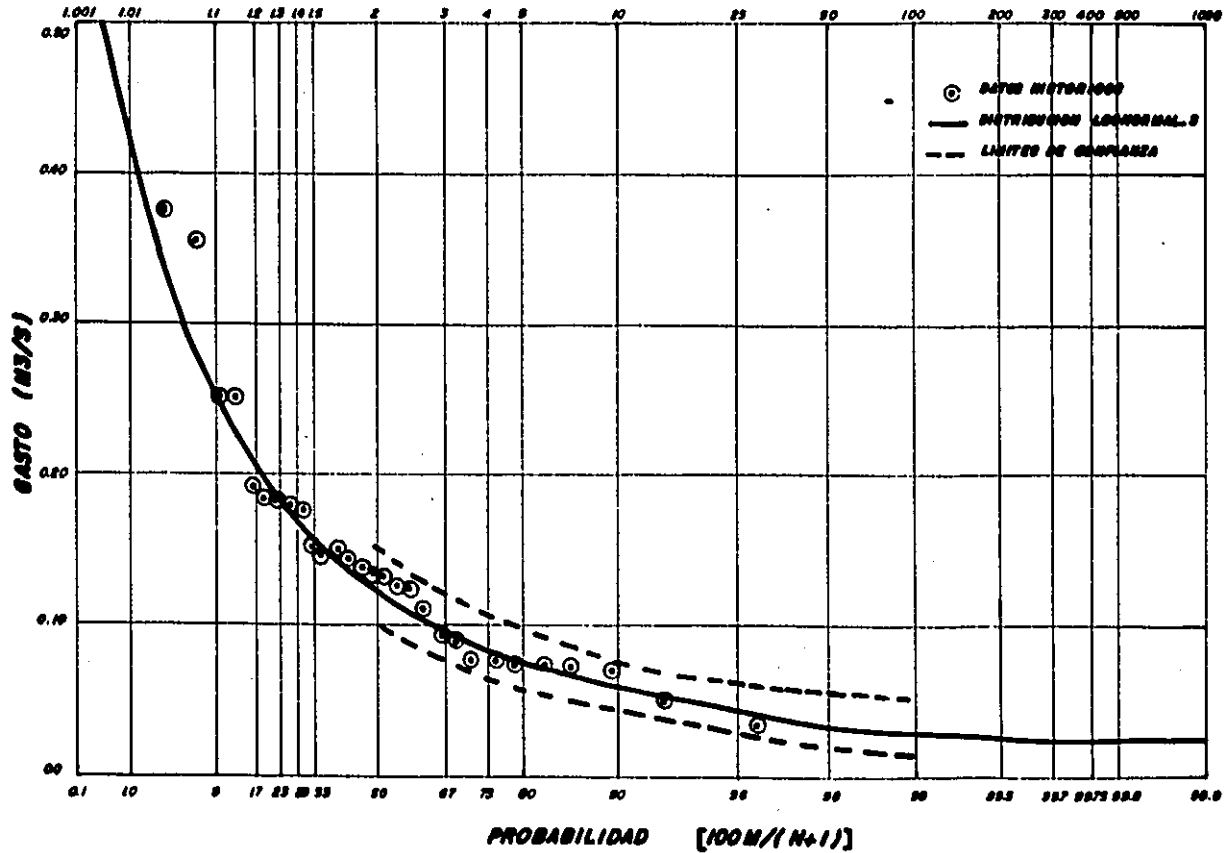
ESCALAS



PROBABILIDAD $[100 N/(N+1)]$
 ESTACION URIQUE II, CHIHUAHUA (1966-1981): (1) GVE MIN, MOM; (2) GVE MIN, MV; (3) GVE MIN, MV;
 (4) GVE MIN, MOM; (5) GVE MIN, MV; (6) LN-3, MV.

Fig VI.5

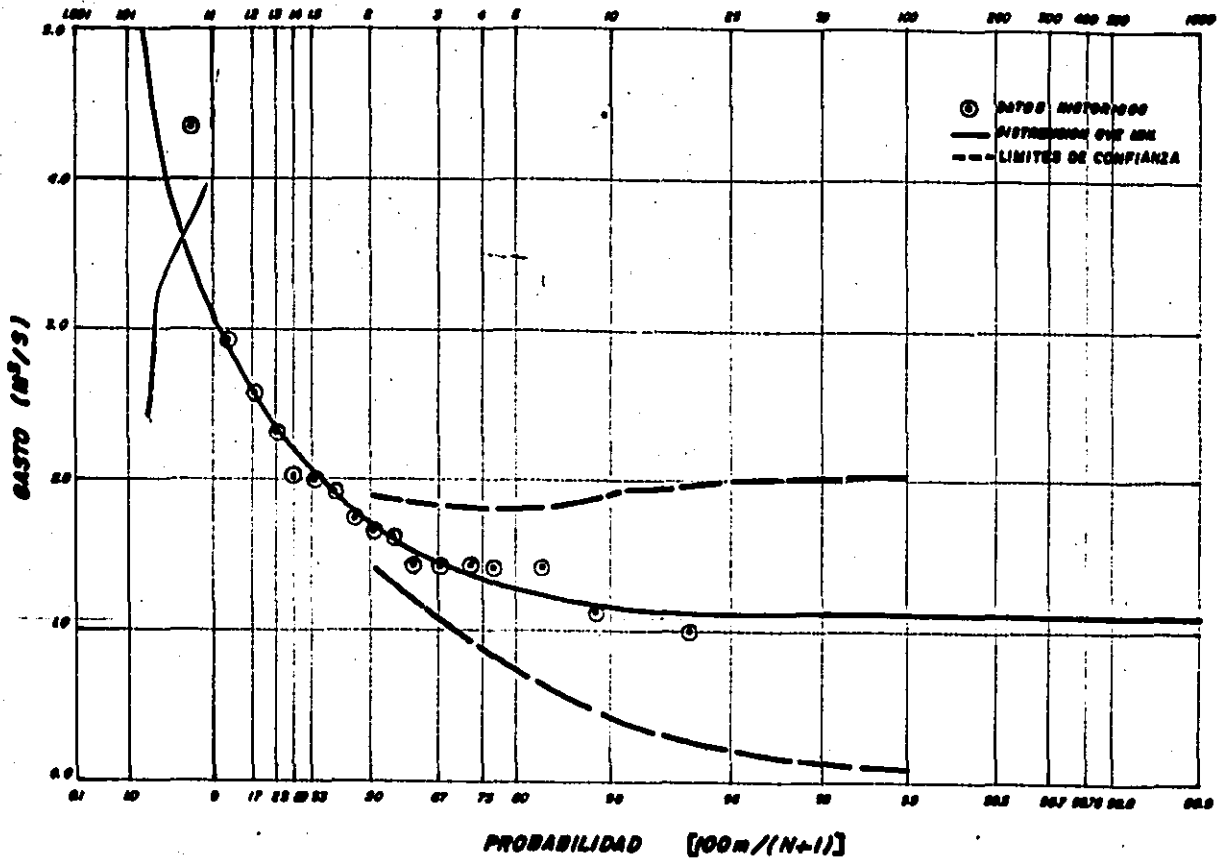
PERIODO DE RETORNO (AÑOS)



ESTACION ACATITAN, SIN, (1954-1982): (1) LOGNORMAL-3 MV.

Fig VI.6

PERIODO DE RETORNO (AÑOS)



ESTACION GUATEMALA II, SIN, (1965-1981): (1) GVE MIN, NOM.

Fig VI.7

- 119 -

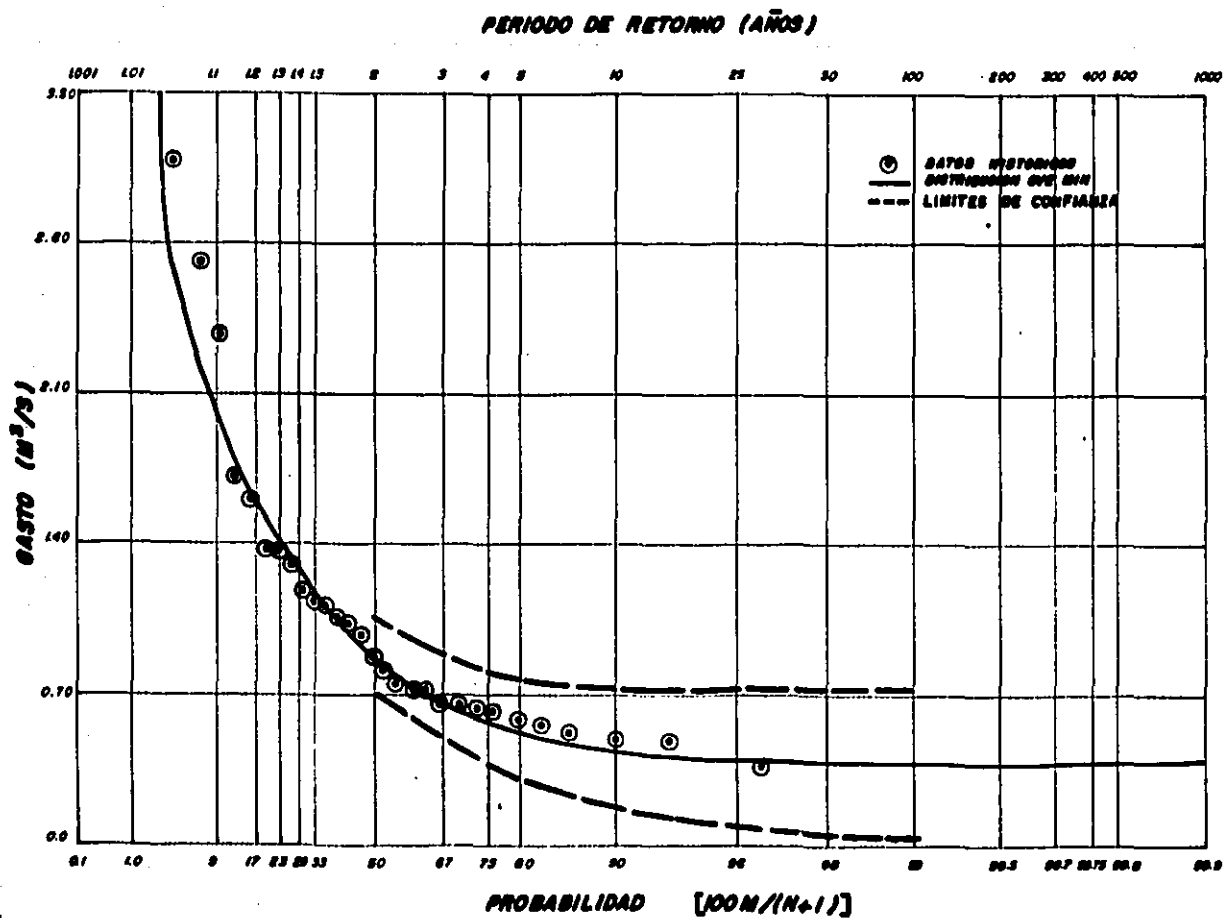
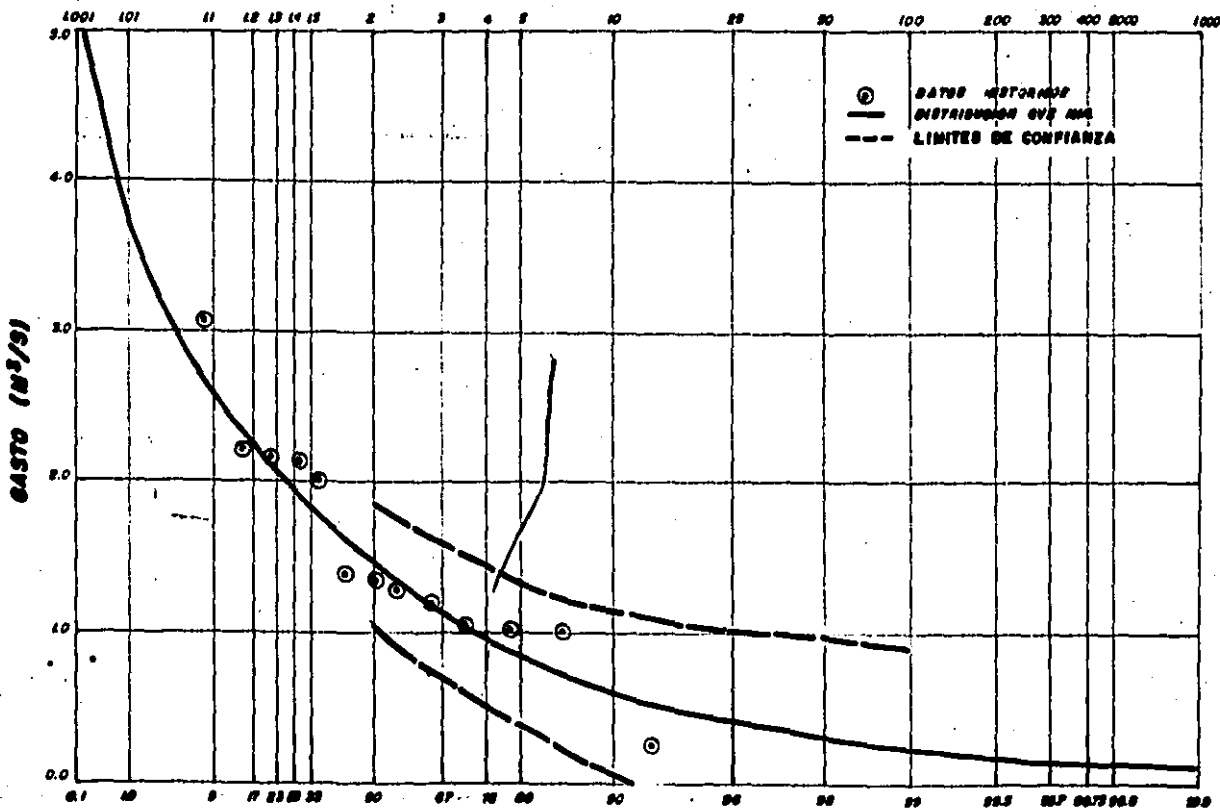


Fig VI.8

PERIODO DE RETORNO (AÑOS)



PROBABILIDAD $[100N/(N+1)]$

ESTACION LA HUERTA, S.W., (1969-1981); GVE MIN, MOM.

Fig VI.9

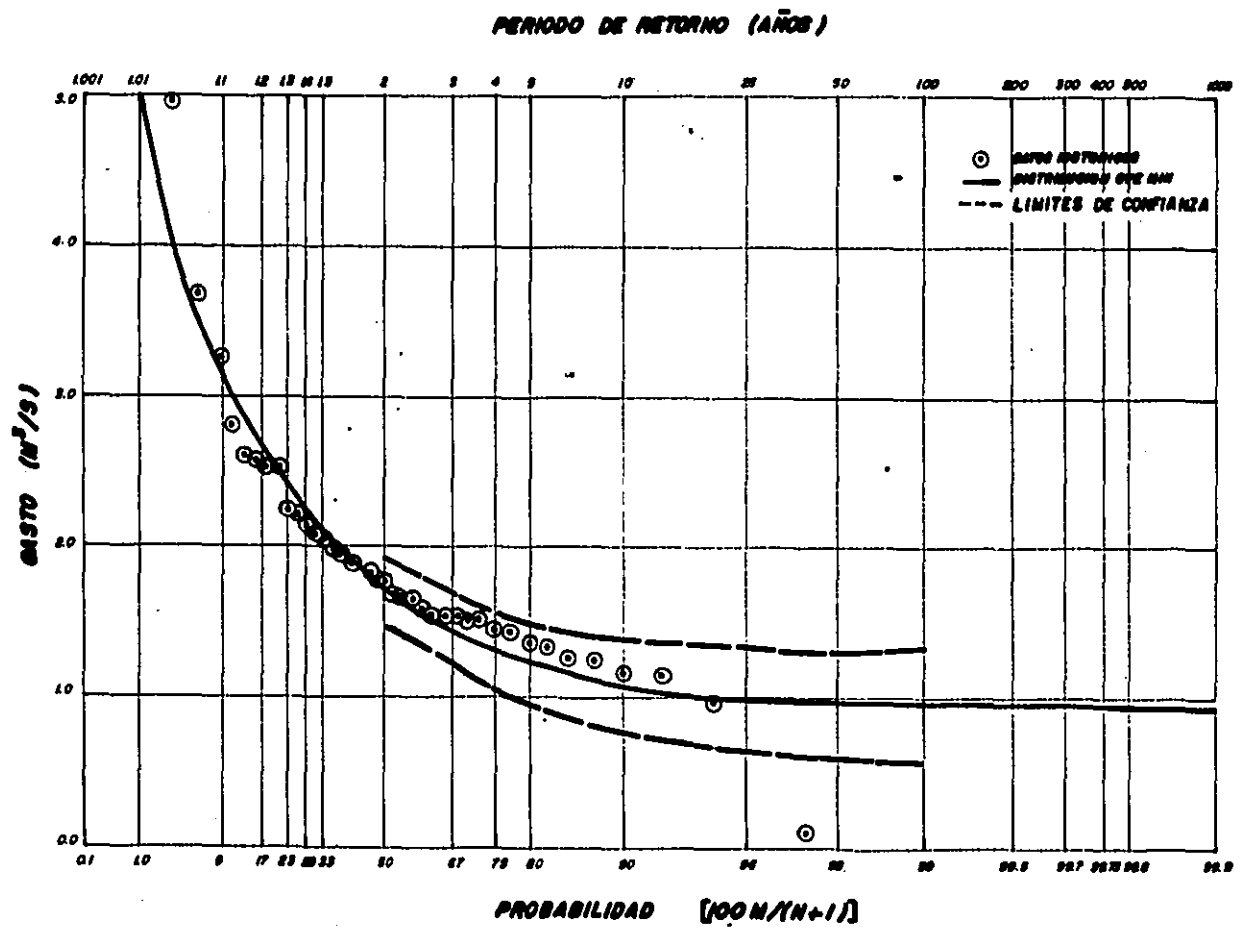
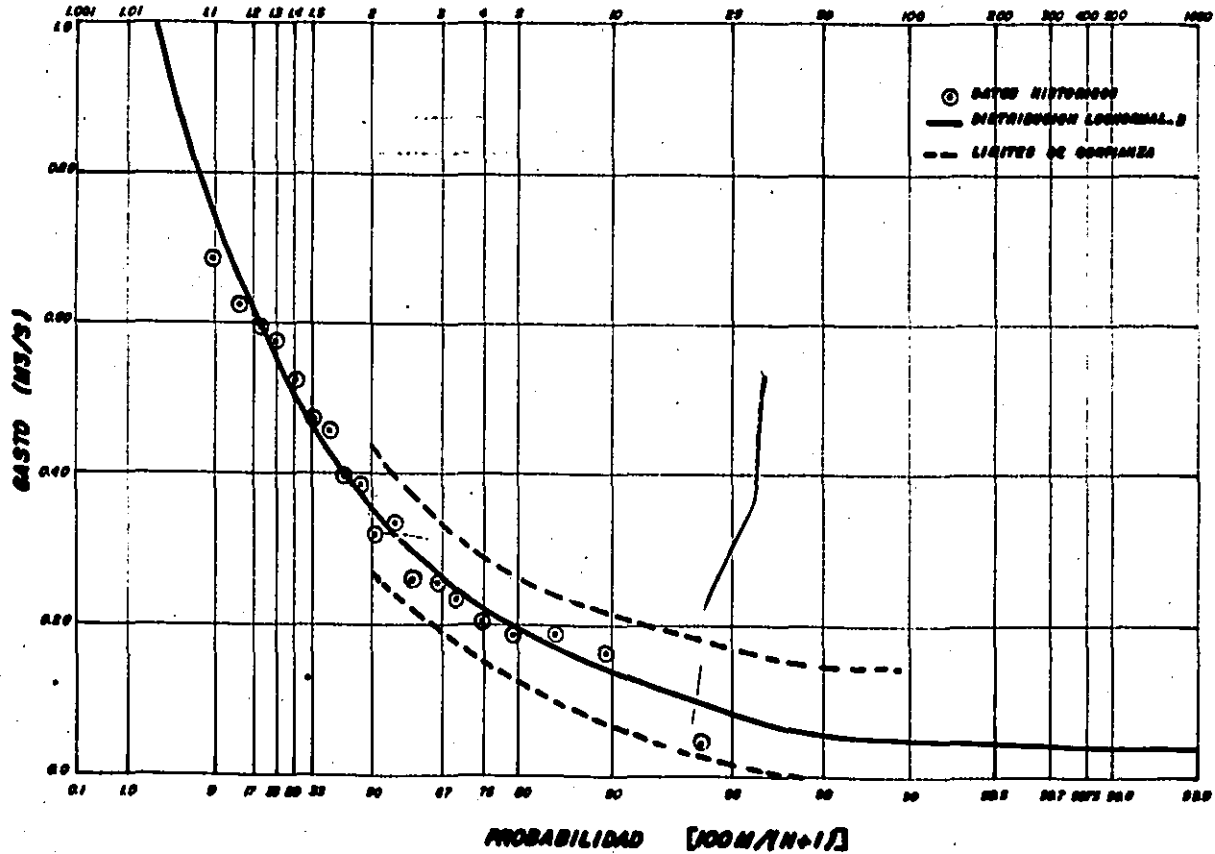


Fig VI.10

PERIODO DE RETORNO (AÑOS)



ESTACION TAMAZULA, SIN., (1962-1981): (1) LOGNORMAL-3, MV

Fig VI.11

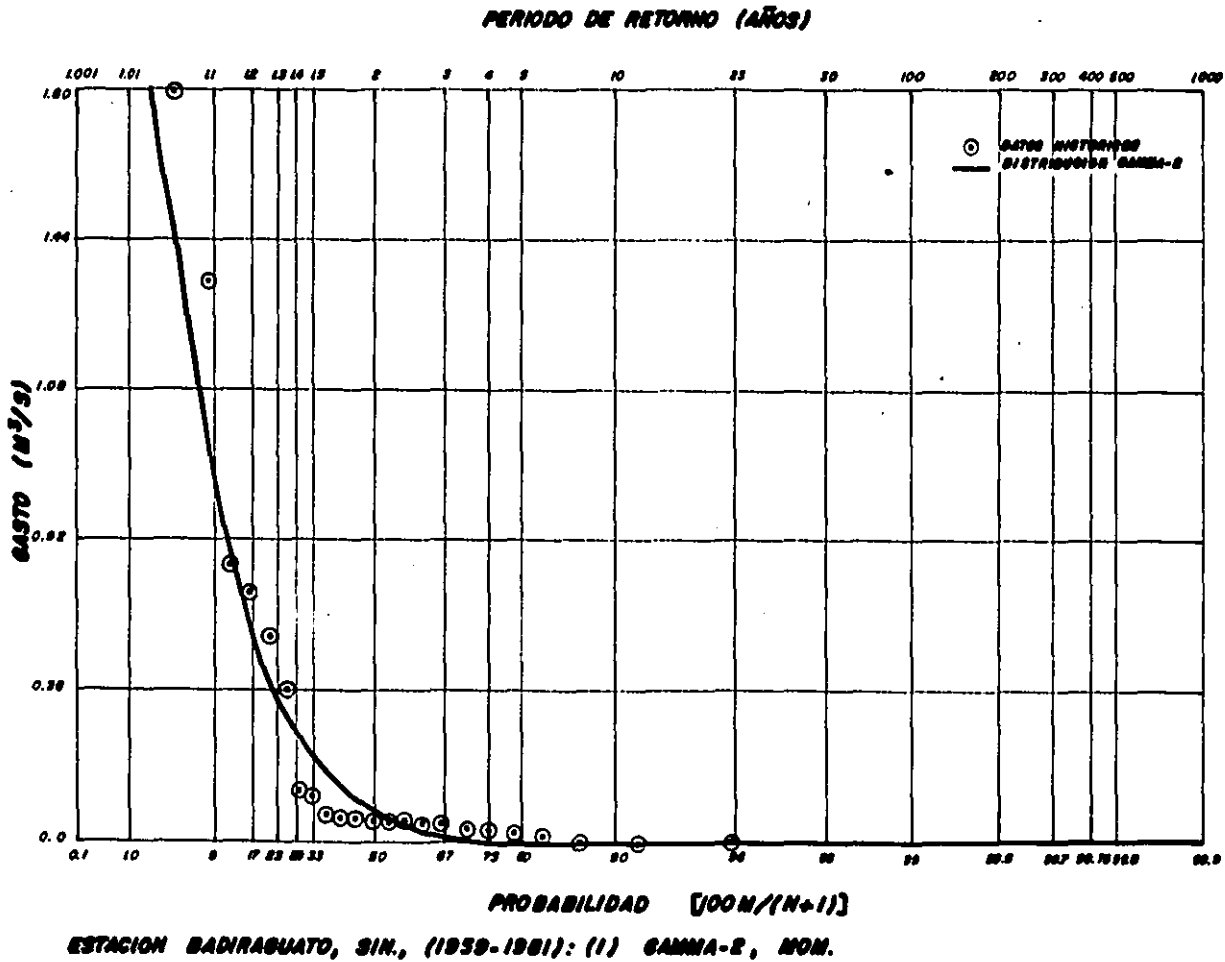


Fig VI.12

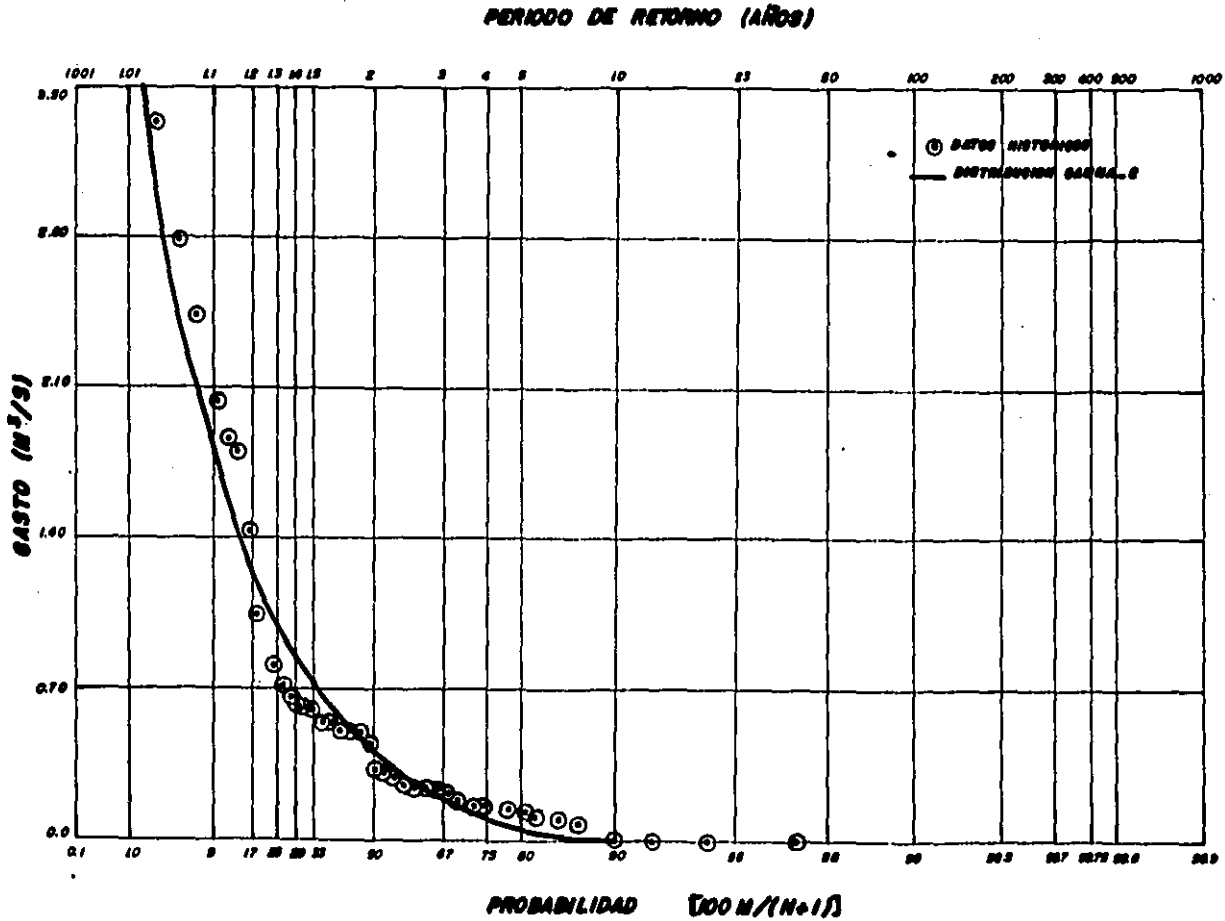
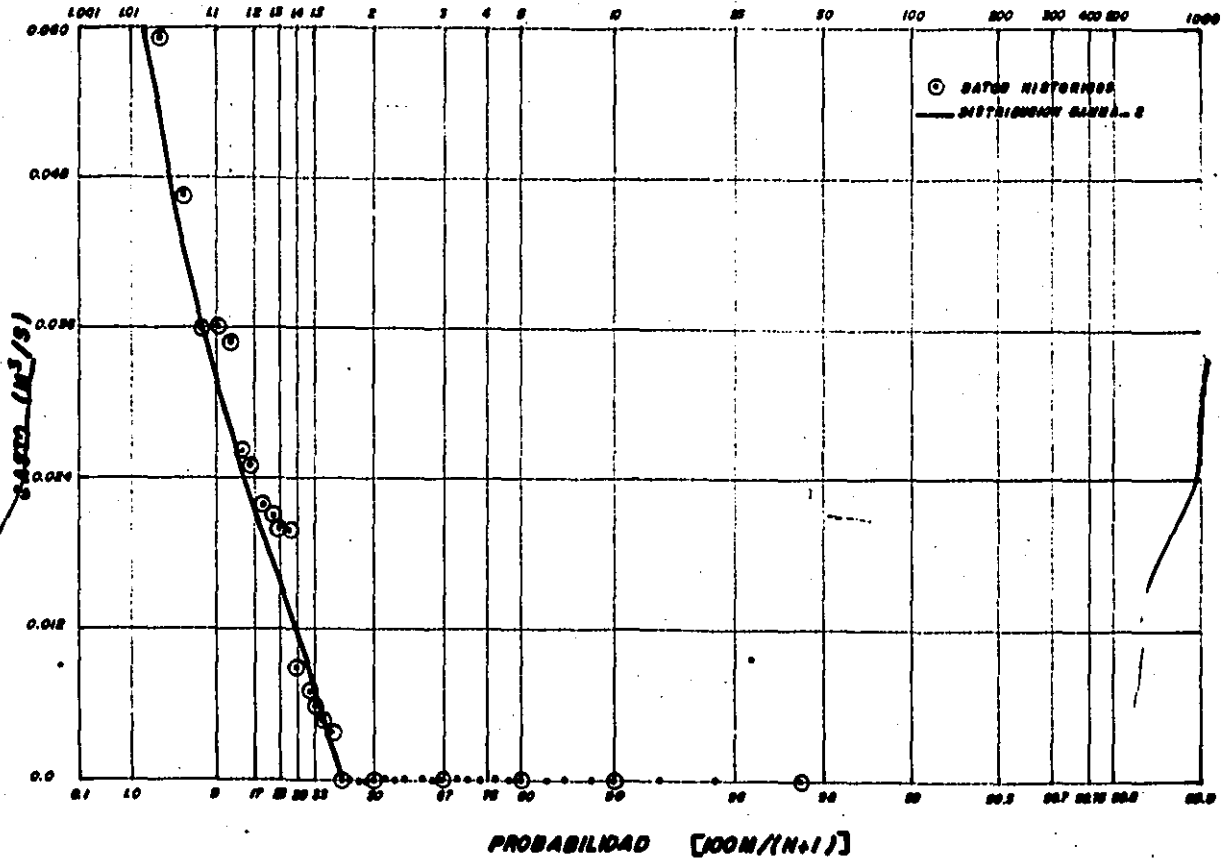


Fig VI.14

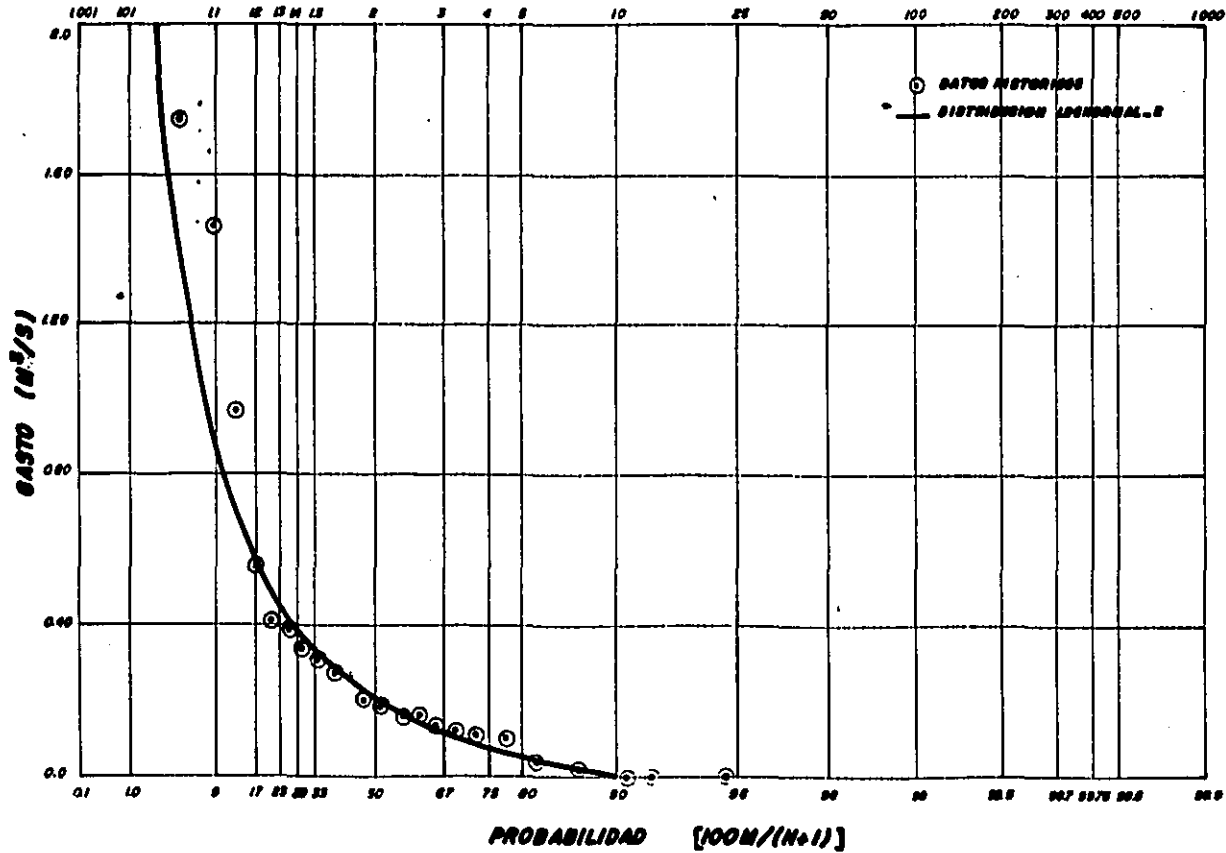
PERIODO DE RETORNO (AÑOS)



ESTACION ORESANO, SON., (1961-1981): (1) GAMMA-2, MV.

Fig VI.15

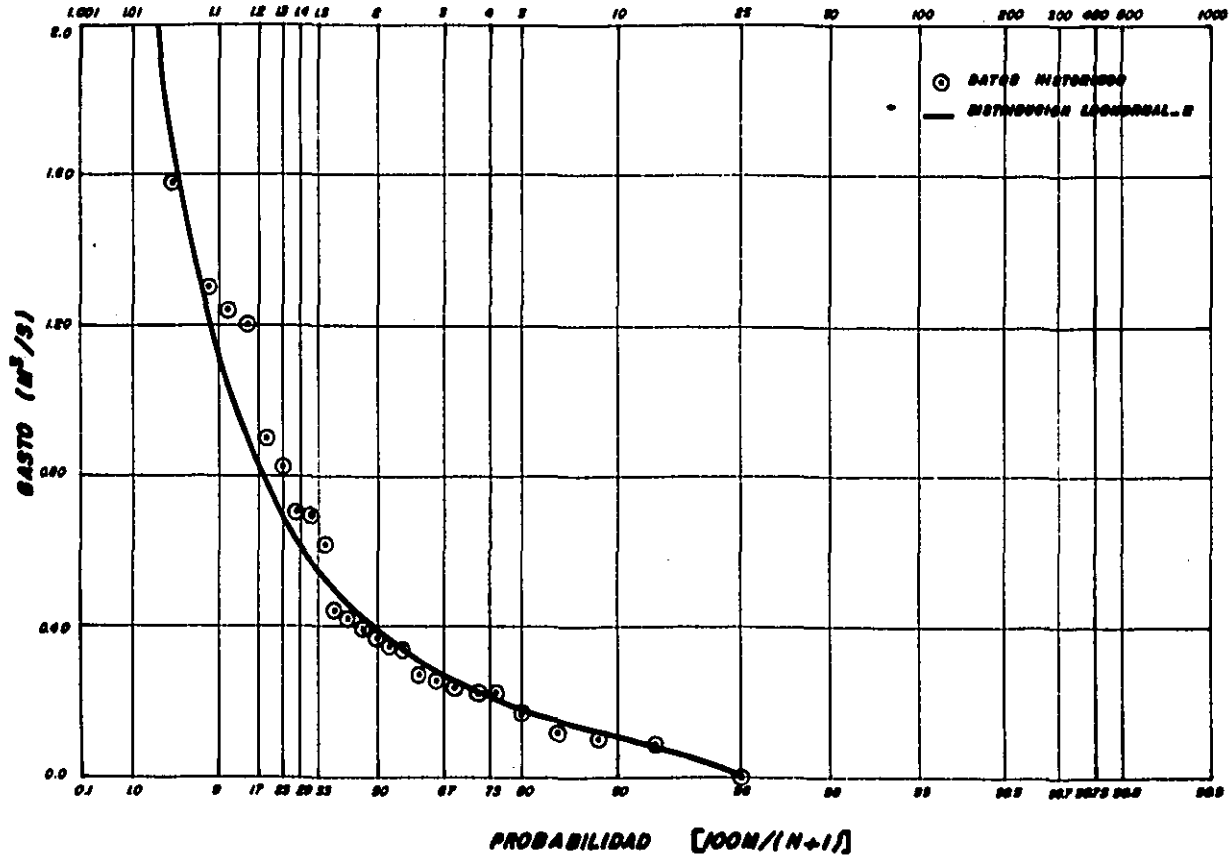
PERIODO DE RETORNO (AÑOS)



ESTACION SAN BERNARDO, SON., (1960-1981): (1) LOGNORMAL-E, MV

Fig VI.16

PERIODO DE RETORNO (AÑOS)



ESTACION TOANAYANA, CHIHUAHUA. (1957-1981): (1) LOGNORMAL - E. NV.

Fig VI.17

CAPITULO VII

DISCUSION DE RESULTADOS

En este capítulo se presenta una discusión crítica de los resultados obtenidos en el capítulo VI. La discusión de los resultados se hará en el siguiente orden: Parámetros estadísticos, estimación de parámetros, las funciones de distribución de probabilidad y métodos que proporcionan el mejor ajuste y límites de confianza.

PARAMETROS ESTADISTICOS

Puede observarse de las tablas de resultados VI.1, VI.2 y VI.9 que los valores de asimetría sin sesgo para la distribución GVE para mínimos fluctúa en el rango: a) Para los registros que no tienen datos de cero flujo $0.4132 \leq g \leq 2.6057$ y b) Para los que sí tienen $0.6585 \leq g \leq 3.6922$. y los valores de asimetría sin sesgo para la distribución Gamma $0.6033 \leq g \leq 1.1878$, para los registros que no tienen datos de cero flujo.

Con base en lo anterior se puede decir que en general los registros de las estaciones hidrológicas del noroeste del país son de tendencia altamente asimétrica, con asimetría positiva.

También se observa en estas tablas que todos los coeficientes de kurtosis, Kk , son mayores que 3, $Kk > 3$, esto indica que en todos los casos se tiene una distribución leptocúrtica. El rango de variación de Kk es: a) $4.3392 \leq Kk \leq 12.811$ para el caso de los registros que no tienen datos de cero flujo y b) $3.8136 \leq Kk \leq 20.233$

para los que sí tienen.

También se observa que en los registros de las estaciones Huitos, Choix, Chinipas, Palo Dulce y Urique II conforme aumenta el número de días de sequías la media y la desviación estándar aumentan de valor, pero no así los coeficientes de asimetría y de kurtosis.

ESTIMACION DE PARAMETROS

DISTRIBUCION GVE PARA MINIMOS

Parámetro de ubicación.— Todos los valores de este parámetro son positivos y en el caso de las estaciones Huitos, Choix, Chinipas, Palo Dulce y Urique II, conforme aumenta el número de días de sequías aumenta de valor, como puede observarse en las tablas VI.3 y VI.4 .

Parámetro de escala.— Su comportamiento es similar al del parámetro de ubicación. Para ambos parámetros los estimadores de momentos (M) y los de máxima verosimilitud (MV) difieren poco entre sí, excepto en pocos casos como puede observarse en las tablas VI.3 y VI.4 .

Parámetro de forma.— En todos los casos el parámetro de forma es positivo, esto es, en todos los casos se cae en la rama tipo III (rama positiva) de esta distribución.

En el caso de los registros que tienen datos de cero flujo los estimadores de MV son mayores que los estimadores de M. En el caso de los estimadores de MV todos son mayores que y cercanos a 1. En el caso de los estimadores de M la mayoría son menores que 1 y algunos son mayores y cercanos a 1. Los estimadores de MV fluctúan en el rango $1.03739 \leq \hat{\beta}_2 \leq 1.46003$ y los de M $0.3565 \leq \hat{\beta}_1 \leq 1.46$, tabla VI.3.

En el caso de los registros de un día de sequía, sin datos de flujo cero, en general los estimadores de MV son mayores que los de M. 5 de los estimadores de MV son > 1 , uno de los estimadores, correspondiente a la estación Acatitán, resultó muy disparado y los valores de estos estimadores fluctúan en el rango $0.3961 \leq \hat{\beta}_2 \leq 2.4515$. De los estimadores de M, 8 son < 1 y de los 10 estimadores fluctúan alrededor de 1, y su rango es $0.4239 \leq \hat{\beta}_1 \leq 1.1865$.

Puede observarse que en general los valores de $\hat{\beta}_2$, estimados por MV y M fluctúan alrededor de 1. por M $0.7164 \leq \hat{\beta}_2 \leq 1.1776$ y por MV $0.6063 \leq \hat{\beta}_2 \leq 1.2146$, siendo en el caso de 180 días de sequías mayores los estimadores de MV que los de M.

DISTRIBUCION LOGNORMAL (tablas VI.5 y VI.6)

Parámetro de ubicación. - En general los valores de este parámetro, estimados por M, son negativos, excepto para la estación Huixtla en los registros de 1, 10, 30, 60 y 90 días de sequías. En el caso de las estaciones Chínipas, Palo Dulce y Urique II conforme

aumenta el número de días de sequía disminuye el valor de este parámetro. Los estimados por MV resultaron todos negativos para los registros de 1 día de sequía y para los registros de 10,30,60,90 y 180 días de sequía también existen valores negativos pero en menor cantidad que los de H, los que resultaron positivos aumentan de valor conforme el número de días de sequía aumenta.

Parámetro de regularidad.- En el caso de los registros de 1 día de sequía, sin datos de cero flujo, este parámetro adquiere algunos valores positivos al ser estimados por H. En el caso de las estaciones Huites, Choix, Chinipas, Palo Dulce y Urique II aumenta de valor conforme aumenta el número de días de sequía (N), tanto al ser estimados por H que por MV, todos los estimadores son positivos. Regresando al caso de $N=1$ los estimadores de MV resultaron negativos excepto los correspondientes a la estación Guatenipa II. En el caso de los registros de $N=1$ pero con datos de cero flujo todas las valoraciones de este parámetro resultaron negativas excepto los correspondientes al registro de $N=30$ de la estación Choix.

Parámetro de forma.- Para el caso de los registros sin datos de cero flujo los valores de este parámetro, estimados por H, resultaron positivos y con su valor pequeño fluctuando en el rango de valores $0.12 \leq \hat{\sigma}_f \leq 0.5615$ y en el caso de los registros que tienen datos de cero flujo, los valores de $\hat{\sigma}_f$ resultaron positivos fluctuando alrededor de 1 en el rango $0.7838 \leq \hat{\sigma}_f \leq 1.5178$, estimados por H y MV.

Para el caso de los registros de $n=1$, estimados por MV, resultaron positivos y pequeños fluctuando su valor en el rango 0.2090

$\hat{\sigma}_y \leq 0.5558$. Y para el caso de las estaciones Huites, Choix, Chinipas y Palo Dulce los valores de este parámetro aumentaron conforme N aumenta.

En todos los casos $\hat{\sigma}_y$ resultó ser mayor que $\hat{\sigma}_x$.

Los parámetros para la estación Santa Cruz no pudieron ser estimados por el método de M por violar la restricción $X - X_0 > 0$.

Los parámetros correspondientes a las estaciones Ixpalino, La Huerta, Huites (en $N=1$ y $N=100$), Urique II y Guatenipa II no pudieron ser estimados sus parámetros por no poder encontrar raíces en el intervalo considerado y esto es equivalente a violar la restricción $\hat{X}_0 < X_m$

DISTRIBUCION GAMMA (tablas VI.7, VI.8, VI.9)

METODO DE MOMENTOS

Parámetro de ubicación ... Los valores de este parámetro resultaron ser mayores que el valor mínimo de cada registro con datos diferentes de cero, $\hat{X}_0 > X_m$ violándose con ello la restricción $\hat{X}_0 < X_m$, pues todos los valores del parámetro de escala resultaron positivos. Los valores del parámetro de ubicación resultaron ser todos positivos excepto los correspondientes a la estación La Huerta. La violación ocurrió en todos los casos excepto para las estaciones La Huerta ($N=1$), Huites, Choix, Chinipas y Palo Dulce ($N=100$). Los valores del parámetro de forma de estas estaciones fluctúa alrededor de 1 en el rango $1.1076 > \hat{\beta}_1 > 0.8754$, excepto para la estación La Huerta donde resulta un valor muy disparado de

METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD

La mayoría de los parámetros de ubicación, $\hat{\chi}_{02}$, de escala, $\hat{\alpha}_2$, de forma, $\hat{\beta}_2$, no se pudieron estimar, excepto 6 casos, por violar las restricciones $-2 \leq \hat{\gamma} \leq 2$, esto es, $\beta < 1$ y la restricción $x_0 > x_{\min}$. En los casos donde sí se pudieron estimar los parámetros corresponden a las estaciones La Huerta y Santa Cruz (N=1), Chínipas y Palo Dulce (N=10) y Chojil y Palo Dulce (N=60). Los parámetros de ubicación de La Huerta y Santa Cruz son negativos los otros restantes son positivos. Todos los parámetros de escala son positivos, $\hat{\alpha}_2 > 0$, y los estimadores del parámetro de forma son mayores que cero, $\hat{\beta}_2 > 0$, y de valores grandes (tabla VI.9).

Para los registros con datos de cero flujo los estimadores del parámetro de escala, obtenidos por M y MV, son mayores que cero.

Los estimadores de $\hat{\beta}$ por MV, $\hat{\beta}_2$, en general son mayores que los de M, $\hat{\beta}_1$. La mayoría de los estimadores de $\hat{\beta}_2$ son mayores que 1.

Para el caso de la estación Chojil el parámetro de forma, estimados por M ($\hat{\beta}_1$) y por MV ($\hat{\beta}_2$) aumentan cuando N aumenta (tabla VI.7).

**LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD Y METODOS QUE
PROPORCIONAN EL MEJOR AJUSTE**

REGISTROS QUE NO TIENEN DATOS DE CERO FLUJO (tabla VI.10)

. REGISTROS DE 1 DIA DE SEQUIA

La GVE para mínimos es la que se ajusta mejor al mayor número de registros de sequía de N=1, 6 a través de M y 1 por MV. Le sigue la Lognormal, ajustada a través de MV, con 4.

. REGISTROS CON 10 DIAS DE SEQUIAS

La GVE para mínimos fue la que mejor se ajustó a 2 registros, 1 por M y 1 por MV, al igual que la Lognormal por MV.

. REGISTROS DE 30 DIAS DE SEQUIAS

La GVE para mínimos fue la que mejor se ajustó al mayor número de registros con 3, 2 con M y 1 con MV, le sigue la Lognormal con 1 a través de MV.

.REGISTROS DE 60 DIAS DE SEQUIAS

La Lognormal fue la que mejor se ajustó al mayor número de registros con 3 a través de MV y le sigue la GVE para mínimos con 2 por el método de M

. REGISTROS DE 90 DIAS DE SEQUIAS

La Lognormal fue la que mejor se ajustó al mayor número de registros con 3 a través de MV y lo sigue la GVE para mínimos con 2, 1 con M y 1 con MV.

. REGISTROS DE 180 DIAS DE SEQUIAS

La GVE para mínimos fue la que mejor se ajustó al mayor número de registros con 2 a través de MV; al igual que la Gamma con 2 a través de M y finalmente la Lognormal con 1 a través de MV.

De los 33 registros representados en la tabla VI.10 a través del EEA se obtiene que la que se ajustó mejor al mayor número de registros es la GVE para mínimos con 17, 11 a través de M y 6 con MV, lo sigue la Lognormal con 14, todos ellos a través de MV y finalmente la Gamma con 2 usando el método de momentos.

REGISTROS QUE TIENEN DATOS DE CERO FLUJO

La función de distribución Lognormal es la que mejor se ajusta al mayor número de casos con 4, los 4 a través de MV, lo sigue la distribución Gamma con 3, 2 con el método de M y 1 con MV, finalmente la GVE para mínimos con 2, 1 con M y 1 con MV.

En este caso la distribución Gamma se ajustó a todos los registros y de mejor manera porque al hacer el parámetro de ubicación igual a cero las restricciones que tenía en el caso anterior de-

saparenten.

De la tabla VI.10 se observa que la Lognormal se ajusta mejor, en todos los casos, a los registros de sequías, siendo estimados sus parámetros por el método de MV que si se estimaran por M. También se observa que la distribución Gamma es la que en menor número de veces da el mejor ajuste, esto es debido a las fuertes restricciones que le imponen los dos métodos y finalmente también se observa que la GVE para mínimos se ajusta mejor en el mayor número de los casos al ser ajustada a través del método de M más que si es ajustada por el método de MV.

Del análisis de sequías de la estación Huites se observa que la distribución Lognormal por M es la que mejor se ajusta a los registros de sequías de $N=10, N=30, N=60$ y $N=90$ y la GVE para mínimos por MV a los registros de sequías de $N=1$ y $N=180$.

Del análisis de sequías de la estación Choix la distribución Lognormal, por M, es la que mejor se ajusta a los registros de sequías de $N=1, N=10, N=60$ y $N=90$ y la GVE para mínimos al registro de $N=30$ y la Gamma al de $N=180$.

En el análisis de la estación Chinipas la distribución Lognormal, por M, es la que mejor se ajusta a los registros de sequías de $N=1, N=10, N=60$ y $N=90$ y la GVE para mínimos, por M para $N=30$ y por MV para $N=180$.

En el análisis de sequías de la estación Palo Dulce la distribución que mejor se ajusta es la GVE para mínimos, por M a los re-

gistros de $N=10, N=30, N=60$ y $N=90$, la Lognormal por M para $N=1$ y finalmente la Gamma por M para $N=180$

En el análisis de sequías de la estación Urique II la distribución GVE para mínimos, por M para $N=1$ y $N=60$ y por MV para $N=10, N=30$ y $N=90$ y finalmente la Lognormal por MV para $N=180$.

LIMITES DE CONFIANZA



Como se presenta en la tabla VI.12 y se muestran en las figuras del VI.6 al VI.11, los datos históricos caen dentro del intervalo de confianza, esto indica que la confiabilidad en la predicción es buena. Por otro lado también se observa que el intervalo de confianza crece conforme el periodo de retorno es mayor, esto es debido a que entre mayor es el periodo de retorno la probabilidad de acertar al valor exacto, del evento que se presente en T años, es menor.

CAPITULO VIII

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Con base en la discusión de resultados del capítulo VII se presentan las siguientes conclusiones:

1.- Debido a la tendencia altamente asimétrica de los registros de sequías, de las estaciones que están sobre los ríos de la región noroeste del país, y a las restricciones tan fuertes que se imponen en los métodos de estimación de parámetros, de momentos y de máxima verosimilitud, la función de distribución Gamma de 3 parámetros no puede ser ajustada a la mayoría de los registros de sequías que no contienen datos de flujo cero y donde pudo ser ajustada los resultados no fueron muy favorables, por tal razón no se recomienda su uso en el ajuste de este tipo de registros de sequías. Sin embargo los ajustes que proporcionó a los registros de sequías que tienen datos de cero flujo fue bueno por lo que se sugiere sea usado como una alternativa en el ajuste de este tipo de registros.

2.- En todos los casos, en el ajuste de los registros de sequías del caso de aplicación, la distribución Lognormal se ajustó mejor por el método de máxima verosimilitud que por el método de momentos y además fue de las que mayor número de veces se ajustó mejor a los registros de sequías, por lo que se sugiere su uso en el análisis de frecuencias de sequías, tanto en registros que tienen datos de flujo cero como en los que no lo tienen.

3.- La función de distribución General de Valores Extremos para Mínimos fue la que en mayor número de veces se ajustó mejor a los registros de sequías, del caso de aplicación, por lo que se constituye en una buena alternativa para el análisis de frecuencias de sequías, a través de sus dos opciones que son el método de momentos y el método de máxima verosimilitud. Aunque en este caso en particular resultó ser de mejor ajuste la opción del método de momentos en otros casos puede resultar de mejor ajuste la opción del ajuste por máxima verosimilitud. Una de las ventajas de la opción a través del método de momentos es que este es muy fácil de usar, ya que sólo requiere de una calculadora programable, y además es el que tiene menos limitantes de las opciones que se usaron en este caso de aplicación.

4.- Para efectuar un análisis de frecuencias de sequías se sugiere usar el procedimiento general empleado en este caso de aplicación.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Abramowitz, M., and Stegun, I. A., (1965), "Handbook of Mathematical Functions," Dover Publications, New York
- 2.-Al-masbidi, G. I. L., B. B. and Madri, I. (1980) "Drought flow analysis of the river Tigris at Baghdad" Hydrological Sciences-Bulletin-Des Sciences Hydrologiques, 25, 4, 12/1980, pp. 453-459
- 3.-Askeew, A. J., Yeh, W. W. B and Hall, W. A. (1971) "A comparative study of critical drought simulation" Water Resources Research, vol. 7, No. 1, Feb. 1971, pp. 52-62 (DEPFI)
- 4.-Becan, M. A. and A. Gustad (1977) "A study into the low-flow characteristics of British river" Journal of Hydrology, 35 (1977) pp. 147-157 (DEPFI).
- 5.-Becan, M. A. (1979) "Drought predictability: Problems and possibilities"
- 6.-Becan, M. A. and Lynn, P. P. (1979) "A fast method for generating ordered samples of random numbers from the extreme value distributions" Journal of Hydrology, 40 (1979), pp. 377-379 (DEPFI).
- 7.-Bohee, B. (1973) "Sample error of T-year events computed by fitting a pearson type III distribution" Water res. res., vol. 9/No 5, october 1973/pp. 1264-1270 (DEPFI).
- 8.-Bohee, B. (1975) "The log pearson type III distribution and its application in hidrology" Water res. res., vol. 11, No. 5, october, 1975, pp. 681-689 (DEPFI)
- 9.-Bohee, B. (1976) "Comment on: Confidence limits for design events by B. W. Kite" Water res. res., vol. 12, No. 4, august. 1976, pp. 825, DEPFI
- 10.-Bohee, B. (1979) "Comment on: Fitting the pearson type III distribution in practice by J. Buckett and F.R. Oliver" Water res. res., vol. 15, No. 3, june 1979 (DEPFI), pp. 730
- 11.-Bohee, B. et Villeneuve, J. P. (1973) "Precision des variables Hydrologiques" Bulletin of the international association of hydrological sciences, XVIII, 1 3/1973, pp. 7-13 (DEPFI).
- 12.-Boletin Hidrologico #40, Region Hidrologica #9, Sonora Sur, Tomos I y III, SARH. (DEPFI)
- 13.-Boletin Hidrologico #36, Region Hidrologica #10, Sinaloa, Tomos I, II, III, IV y VI, SARH. (DEPFI).
- 14.-Brutsaert, W. and Nieber, J. L. (1977) "Regionalized drought flow hydrographs from a mature glaciated plateau" Water res. res., vol. 13, No. 3, june 1977 (DEPFI), pp. 637-
- 15.-Buckett, J. and Oliver, F. R. (1977) "Fitting the pearson type III distribution in practice" Water res. res., vol. 13, No. 5, october

1977, pp. 851-852 (DEPFI).

16. -Duggen, S. L., Lettenmaier, D. E. and Bates, G. L. (1975) "Properties of the three-parameter log normal probability distribution" water res. res., vol. 11, No. 2, april 1975, pp. 227-236 (DEPFI).

17. -Duggen, S. L. and Hoshi, K. (1978) "Approximation of a normal distribution by a three parameter lognormal distribution" Water res. res., vol. 14, No. 4, august 1978, pp. 620-622 (DEPFI).

18. -Duggen, S. L. and Hoshi, K. (1981) "Approximate estimation of the derivate of a standard gamma quantile for use in confidence interval estimates" Journal of hydrology, 53 (1981), pp. 317-325 (DEPFI)

19. -Castafio, E. and Duckstein, L. (1978) "Choice of distribution functions for hydrologic design" Water res. res., vol. 14, No. 4 august 1978, pp. 643-652 (DEPFI).

20. -Gondle, B. (1979) "Drought frequency analysis for intermittent streams" Hydrological aspects of droughts; International symposium New Delhi, 3-7 december 1979, vol. 1.

21. -Gondle, B. and Lee, K. S. (1982) "Flood frequency analysis with historic information" Journal of hydrology, 58 (1982), pp. 47-61

22. -Cheng, N. and Boyer, D., D. (1977) "Estimates of low flows using watershed and climatic parameters" Water res. res., vol. 13, No. 6 december, 1977, pp. 997-1001 (DEPFI).

23. -Charbeneau, R., J. (1978) "Comparison of the two-and three-parameter lognormal distributions used in streamflow synthesis" Water res. res., vol. 18, No. 1, pp. 149-150 (DEPFI).

24. -Cheng, S. C. H., Amin, M. A. K. (1983) "Estimating parameters in continuous univariate distributions with a shifted origin", J. R. statist. soc. B, 45, No. 3, pp. 394-403 (IHAS).

25. -Chow, V. T. (1964) "HandBook of applied hydrology" section 18, pp. 18.10-18.15

26. -Chow, V. T. and Takase, H. and ASCE N. (1977) "Design criteria for hydrologic extremes" Journal of the hydraulics division, Hy4, april 1977, pp. 425-436 (DEPFI).

27. -Deininger, Rolf O. and McElfield, J. D. (1969) "Estimation of the parameters of Gumbel's third asymptotic distribution by different methods" Water res. res., vol. 5, No. 6, december 1969, pp. 1238-1243 (DEPFI).

28. -Deceun, J. A., Lee, K. S. and Paulsen, E. R. (1980) "On the statistical characteristics of drought events" and "On the definition of droughts" Water res. res., vol. 16, No. 2, pp. 287-302, april 1980 (DEPFI)

29. -Deceun, J. A. and Lee, K. S. (1981) "REPLY", Water res. res., vol. 17, No. 4, pp. 1240, august 1981 (DEPFI).

- 30.-Ewart, Ch. J. and Brutsaert (1972) "Some generalized characteristics of the floods and droughts of the lower Mekong" Bulletin of the International Association of Hydrological Sciences, XVII, 3 10/1972, pp. 323-338 (DEPFI).
- 31.-Gledwell, J. S. and Lin, Ch. n. (1969) "Confidence limits determined using order statistics" Water res. res., vol. 5, No. 5, October 1969, pp. 1120-1123 (DEPFI)
- 32.-Glantz, M. H. (1982) "Consequences and responsibilities in drought forecasting: The case of Yakima, 1977" Water res. res., vol. 8, No. 1, pp. 3-13, February 1982 (DEPFI).
- 33.-Greenwood, J. A., Magiunoz, L., Metcalas, N. G. and Wallis, J. R. (1979), "Probability Weighted Moments: Definition and Relation to Parameters of Several Distributions Expressible in Inverse Form" Wat. Res. Res., Vol. 15, No. 5, pp. 1049-1054, October 1979.
- 34.-Gumbel, E. J. (1958) "Statistics of extremes" Columbia University Press, New York (DEPFI)
- 35.-Gumbel, E. J. (1963) "Statistical forecast of droughts" Bull. Int. Ass. Sci. Hydro., 8(1), 5, April 1963, pp. 5-20 (Inst. de Geo., UNAM)
- 36.-Gupta, V. L. (1970) "Selection of frequency distribution models" Water res. res., vol. 6, No. 4, August 1970, pp. 1193-1198 (DEPFI)
- 37.-Gupta, V. K. and Duckstein L. (1975) "A stochastic analysis of extreme droughts" Water res. res., vol. 11, No. 2, April 1975, pp. 221-228 (DEPFI).
- 38.-Guyen, O. (1983) "A simplified semiempirical approach to probabilities of extreme hydrologic droughts" Water res. res., vol. 19, No. 2, pp. 441-453, April 1983 (DEPFI)
- 39.-Haan, Ch. I. (1977) "Statistical Methods in hidrology" cap. 2, pp. -13, pp. 17-28, pp. 40; cap. 3 pp. 44-65; cap. 6 pp. 97-118; cap. 7 pp. 128-152; cap. 8 pp. 161-166.
- 40.-Hamlin, M. J. and Kottegoda, N. I. (1971) "Extending the record on the terna" Journal of Hydrology 12(1971), pp. 100-116 (DEPFI).
- 41.-Hoeking, J. R. M. (1984) "Testing whether the shape parameter is zero in the generalized extreme-value distribution" Biometrika, 71, 2, pp. 367-374 printed in Great Britain (IIMAS).
- 42.-Hoeking, J. R. M., Wallis, J. R. and Wood, E. F. (1985) "Estimation of the generalized extreme-value distribution by the method of probability-weighted moments" Technometrics, August 1985, vol. 27, No. 3, pp. 251-261 (Estudios avanzados del I.P.N.).
- 43.-Humbam, S. H. and McElchrist, C. A. (1969) "On the extreme value distribution for describing annual flood series" Water res. res., vol. 5, No. 6, December 1969, pp. 1404-1405 (DEPFI)

44. -IBI (1982), "Scientific Subroutine Package", IBI 340.
45. -Jackson, B.B. (1975) "Markov mixture models for drought lengths" Water res. res., vol. 11, No. 1, february 1975, pp. 64-74 (DEPFI).
46. -Jeonings, M.E. and Benson, M.S. (1969) "Frequency curves for annual flood series with some zero events or incomplete data" Water res. res., vol. 5, No. 1, february 1969, pp. 274-280 (DEPFI).
47. -Jenkinson, D.E. (1955) "The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements" G.J.R. meteorol. soc., 81, pp. 158-171 (Inst. de geo. UNAM).
48. -Jenkinson, D.E. (1969) "Estimation of maximum floods" H.M.O. Technical note 98, pp. 183-227 (Inst. geo. UNAM).
49. -Johnson, N.L. and Kotz, S. (1970) "Continuous univariate distributions in statistics, distributions-1 (IIMAS).
50. -Joseph, E.S. (1970) "frequency of design drought" Water res. res., vol. 6, No. 4, august 1970, pp. 1199-1201 (DEPFI).
51. -Kendall, M.B. and Stuart, J. (1967) "The advanced theory of statistics", vol. II, Inference and Relationship, Griffin London (IIMAS).
52. -Kilpatrick, B.E. and J.B. Peterson (1972) "Rainfall-Runoff regression with logarithmic transforms and zeros in the data" Wat. res. res., vol. 6, No. 2, pp. 505-515.
53. -Kirby, W. (1971) "Computer-Oriented Wilson-Hilferty transformation that preserves the first three moments and the lower bound of the pearson type III distribution" Water res. res., vol. 8, No. 5, october 1971, pp. 1251-1254 (DEPFI).
54. -Kite, G.W. (1975) "Confidence limits for design events" Water res. res., vol. 11, No. 1, february 1975, pp. 48-53 (DEPFI).
55. -Kite, G.W. (1976) "REPLY" Water res. res., vol. 12, No. 4, august, pp. 826 (DEPFI).
56. -Kite, G.W. (1977) "Frequency and risk analyses in hidrology" Nat. res. publications, fort collins Colorado, 3a. Impresion 1985, (DEPFI-85, 309).
57. -Kumbakshamy, G. (1980) "A generalized probability density function for double-bounded random processes" Journal of hydrology, 46 (1980), pp. 79-88 (DEPFI).
58. -Kumbakshamy, G. and Devi, R. (1982) "Statistical determination of design low flows - A comment" Journal of hydrology, 58 (1982), pp. 175-177 (DEPFI).
59. -Lall, V. and Beard, L.R. (1983) "Estimation of pearson type III moments" Water res. res., vol. 18, No. 5, pp. 1563-1569, october 1982

(DEPFI).

60. --Lettenmaier, D. and Burgess, S. J. (1982) "Gumbels extreme value I distribution: A new look" Journal of the Hydraulics Division, April 1982, Hy4, pp. 502-514 (DEPFI).

61. --Leytham, K. M. (1984) "Maximum likelihood estimates for the parameters of mixture distribution" Water res. res., vol. 20, No. 7, pp. 896-902, July 1984 (DEPFI).

62. --Linsley, B. K., Kohler, M. O. and Paulhus, J. L. H. (1975) "Hydrology for Engineers" Chap. 11, pp. 360-361 (DEPFI).

63. --Lowery, M. R. and Nash, J. E. (1970) "A comparison of methods of fitting the double exponential distribution" Journal of hydrology 10, 1970, pp. 259-278 (DEPFI).

64. --Matalas, N. C. (1963) "Probability distribution of low flows" statistical studies in hydrology, Geological survey professional paper 434-A, 1963, pp. A1-A27 (Instituto de geologia, UNAM).

65. --Matalas, N. C. and Wallis (1973) "Eureka! It Fits a pearson Type III distribution" Water res. res., vol. 9, No. 2, April 1973, pp. 281-289 (DEPFI).

66. --Metcalfe, O. V. and Mandlery, J. A. (1981) "Estimation of extreme low flows for pumped storage reservoir design" Water res. res., vol. 17, No. 6, pp. 1715-1721, december 1981 (DEPFI).

67. -- ---- (1982) "Correction to: Estimation of extreme low flows for pumped storage reservoir design" Water res. res., vol. 18, No. 2, pp. 44B, April 1982 (DEPFI).

68. --Michel, N. (1981) "Characteristics of low flows", Hy4, April 1981 Journal of the Hydraulics division, pp. 523-526 (Discussion), (DEPFI).

69. --Mustafa, S. (1981) "Comment on: On the statistical characteristics of drought events and On the definition of droughts" By John A. Dracup et. al., Water res. res., vol. 17, No. 2, pp. 441, April 1981 (DEPFI).

70. --Natural Environment Research Council, NERC. (1975), "Flood Studies Report, Vol. 1, Hydrologic Studies", Whitefriars Press Ltd., London.

71. --O'Hara, H. and Smith, E. J., (1969), "The Evaluation of Definite Integrals by Interval Subdivision", Computer Journal, Vol. 12, pp. 179-182.

72. --Phien, H. N. (1980) "The extreme-value type I Distribution and the principle of maximum entropy-Comments" Journal of hydrology, 47, 1980, pp. 385-388 (DEPFI).

73. --Prakash, O. (1981) "Statistical determination of design low flows" Journal of hydrology, 51, 1981, pp. 109-118 (DEPFI).

- 74.-Prescott, E. and Walden, A. I. (1980) "Maximum Likelihood estimation of the parameters of the generalized extreme-value distribution" *Biometrika*, 67, 3, pp. 723-724 (IIMAS).
- 75.-Rao, D. V. (1981) "Three-parameter probability distributions" *Journal of the hydraulics division*, Hy3, march 1981, pp. 339-358 (DEPFI).
- 76.-Raynal, V. J. A. (1984) "Aplicacion del metodo de momentos de probabilidad pesada a la estimacion de los parametros de la distribucion general de valores extremos" *AIHR, AIII, IAHR, XI Congreso Latinoamericano de Hidraulica*.
- 77.-Raynal, V. J. A. (1985) "Momentos de probabilidad pesada en el analisis de sequias", *XI Congreso de la Academia Nacional de Ingenieria, San Luis Potosi, SLP*.
- 78.-Research Report (1980) "Low flow studies" Report No. 1, Institute of hydrology, Crowmarsh Gifford, Wallingford, Oxon, January 1980.
- 79.-Salas, J. D. and Smith, R. A. (1980) "Computer programs of probability distribution functions in hydrology" Fort Collins, Colorado (Colorado State University).
- 80.-Sengul, D. E. and G. K. Biswas (1970) "The 3-parameter Lognormal Distribution and its Applications in Hydrology" *Wat. Res. Res.*, Vol. 6, No. 2, pp. 505-515 (DEPFI).
- 81.-Sen, Z. (1980) "Statistical analysis of hydrologic critical droughts" *Journal of the hydraulics division*, Hy1, January 1980, pp. 99-115 (DEPFI).
- 82.-Sen, Z. (1980) "Regional Drought and flood frequency analysis: Theoretical consideration" *Journal of hydrology*, 46, pp. 265-279 (DEPFI).
- 83.-Singh, K. P. and Nakashima, M. () "A new methodology for flood frequency analysis with objective detection and modification of outliers/inliers
- 84.-Snyder, W. M. and Mills, W. C. (1979) "Comment on: Comparison of the two- and three-parameter lognormal distributions used in streamflow synthesis, by R. J. Charbeneau" *Water res. res.*, vol. 15, NO. 2, April 1979, pp. 510 (DEPFI).
- 85.-Stedinger, J. R. (1980) "Fitting lognormal distributions to hydrologic data" *Water res. res.*, vol. 16, No. 3, pp. 481-490, June 1980 (DEPFI).
- 86.-Stedinger, J. R. (1983) "Confidence intervals for design events" *Journal of the hydraulics division*, pp. 13-27 (DEPFI).
- 87.-Tase, N. and Yevjevich, V. (1978) "Effects of size and shape of a region on drought coverage" *Hydrological Sciences-Bulletin-Des Sciences Hydrologiques*, 23, 2, 6/1978, pp. 203-212 (DEPFI).

88. Task Committee on low-flow evaluation (1980) "Characteristics of low flows" Journal of the hydraulics division, Hy5, may 1980, pp. 717-731 (DEPFI).
89. (1981) "characteristics of low flows" J.H.D., pp. 1274-1275, october 1981 (DEPFI).
90. Van Montfort, M.A.J. (1970) "On testing that the distribution of extremes is of type I when type II is the alternative" Journal of hydrology 11, 1970, pp. 421-427 (DEPFI).
91. Van Montfort, M.A.J. and Utten, O. (1978) "The power of two test on the type of distributions of extremes" Journal of Hydrology, 37, 1978, pp. 195-199 (DEPFI).
92. Van Montfort, M.A.J. and Utten, O. (1980) "Maximum-likelihood estimation of the general extreme value distribution parameter" Journal of hydrology, 47, 1980, pp. 187-192 (DEPFI).
93. Mood, G. (1975) "Probability with applications", Cap. 2, pp. 36, cap. 5, pp. 110-134, cap. 7, pp. 169-176, cap. 10, pp. 268-272
94. Yezhovitch, V. (1972), "Probability and Statistics in Hydrology", Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, (DEPFI)
95. Yezhovitch, V. and Obaysekera, J.L.R. (1984) "Estimation of skewness of hydrologic variables" Water res. res., vol. 20, No. 7, pp. 935-943, July 1984 (DEPFI).