

09177  
1  
lej.

SIMULACION DE LA CONTAMINACION DE UN ACUIFERO POR INYECCION DE  
AGUAS RESIDUALES.

LUIS ANTONIO ACEVEDO ARREGUIN.

T E S I S

Presentada a la División de Estudios de  
Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERIA

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener

el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA

(AMBIENTAL)

CIUDAD UNIVERSITARIA, Diciembre 1986.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## RESUMEN

Acevedo Arreguín Luis Antonio, "Simulación de la contaminación de un acuífero por inyección de aguas residuales". Tesis de Maestría, DEFI-UNAM, 1986.

En este trabajo se hace una revisión de las principales actividades de recarga de acuíferos que se han realizado en el mundo, y en las cuales se utilizan aguas residuales. Así también se presentan varios de los modelos matemáticos que se han propuesto para interpretar el movimiento del agua subterránea así como de los constituyentes químicos que la contaminan. Se plantea un modelo, se obtiene su solución numérica empleando el método del elemento finito y se aprecia su bondad aplicándolo al caso del estudio de recarga del acuífero de Palo Alto, California, del cual se dispone de información experimental para comparar los resultados de la simulación. Debido a que este reporte final presenta la metodología para simular la contaminación de cualquier acuífero, partiendo desde los principios básicos de la hidráulica subterránea, así como de los conceptos fundamentales de la física del movimiento y de la química del agua subterránea, constituye una aportación a la bibliografía que sobre el tema es muy escasa en español.

## INDICE GENERAL.

### INTRODUCCION, 1.

Objetivos, 4.

### CAPITULO 1. ANTECEDENTES HISTORICOS DE LA EVALUACION DE LOS RECURSOS HIDRAULICOS DEL SUBSUELO, 5.

### CAPITULO 2. ASPECTOS BASICOS DE LA HIDRAULICA SUBTERRANEA, 10.

El ciclo hidrológico, 10. El agua del subsuelo, 10. Intersticios, 11. Porosidad, 11. Clasificación del suelo, 12. Propiedades acuíferas, estratigrafía y estructura de las rocas, 13. Causas del movimiento del agua subterránea, 13. Acuíferos confinados y no confinados, 15. Gradiente hidráulico y velocidades, 15. Ley de Darcy, 17. Tasa de infiltración del flujo, 17. Porosidad de Darcy, - 19. Permeabilidad, 19. Transmisividad, 20. Coeficiente de almacenamiento, 20. Generalización de la Ley de Darcy, 22.

### CAPITULO 3. FISICA DEL MOVIMIENTO DEL AGUA SUBTERRANEA, 24.

Ley de Darcy, 24. Potencial de fuerza de Hubbert, 24. La ley de Darcy en tres dimensiones, 28. Ecuación de continuidad para el flujo en estado estacionario, 29. La ecuación de Laplace, 31. Sistema regional de flujo de aguas subterráneas, 31. La ecuación de Poisson, 34. Recarga de islas, 35. Descarga de pozos (acuífero confinado), 36. Acuífero no confinado bajo las hipótesis de Dupuit, 36. Infiltración en presas, 38. Descarga de pozos (acuífero no confinado), 39. Ecuación para flujo transitorio, 39. Descarga transitoria de pozos (problema de Theis), 40. Hipótesis de Dupuit y condiciones transitorias para acuíferos no confinados, 40. Flujo transitorio en acuíferos anisótropos y heterogéneos, 41.

### CAPITULO 4. QUIMICA DEL AGUA SUBTERRANEA, 42.

Constituyentes químicos, 42. Constituyentes orgánicos, 43. Gases disueltos, 44. Equilibrio químico, 44. Efectos de los gradientes de concentración, 44. Disolución y solubilidad de minerales, 45. Desequilibrio e índice de saturación, 47. Procesos de oxidación y reducción, 47. Adsorción e intercambio iónico, 48.

## CAPITULO 5. APLICACION DE AGUAS RESIDUALES AL SUELO PARA RECARGA DE ACUIFEROS, 53.

Teoría de la operación, 53. Operaciones de recarga de aguas subterráneas en el Estado de California, 58. Selección de procesos de tratamiento para cumplir los requerimientos para reuso del agua, 59. Confiabilidad de la Planta Purificadora de Agua WF-21, California, 60. Selección de sitios de recarga, 61. Procesos que afectan el movimiento y destino de los orgánicos trazas, 62. Destino de los micro contaminantes inorgánicos durante la recarga, 63. Remoción de patógenos durante la recarga, 66. El proyecto de la región del Dan, en Israel, 66. Filtración en las riberas del Rin, 66. Filtración en bancos de arena en Holanda, 70. Recarga de aguas subterráneas y efectos en la salud, en California del Sur, 72. Sistemas de infiltración rápida, 72. Diseño de la operación de recarga en Palo Alto, California, 76. Evaluación del reuso agrícola de aguas residuales del río de los Remedios, México, 80.

## CAPITULO 6. MODELOS DE TRANSPORTE DE CONTAMINANTES EN EL AGUA SUBTERRANEA, 83.

Descripción general de la contaminación del agua subterránea, 83. Modelos, 84. Procesos de transporte, 86. Constituyentes no reactivos en medio homogéneo, 86. Constituyentes no reactivos en medio heterogéneo, 89. Transporte de constituyentes reactivos, 92. Solución de la ecuación diferencial de dispersión longitudinal en medio poroso, 95. Método numérico para estimar el flujo simultáneo de agua y sales en suelos no saturados, 95. Transporte simultáneo de agua y cloruros durante la infiltración, 96. Transporte simultáneo de agua y solutos en condiciones de flujo transitorio no saturado, 97. Modelación de los cambios en el flujo y en la calidad química en un sistema acuífero-riachuelo, 99. Solución analítica de la ecuación de transporte de solutos reactivos a través del suelo, 100. Distribuciones del  $2, 4\text{-D}$  y del agua en el suelo, durante la infiltración y la redistribución, 101. Transporte de solutos reactivos a través de suelos de varias capas, 102. Modelación matemática de la infiltración en el suelo, de agua contaminada con fósforo, 103. Transporte de solutos reactivos durante el flujo transitorio del agua en suelos multiestratificados y no saturados, 104. Transporte de cationes en reactores de suelo, 105. Modelo combinado de transporte de sales y equilibrio químico para suelos calcáreos y que contienen yeso, 106. Cálculos de intercambio catiónico en un modelo de transporte de sales, 107. Descripción de la química del suelo durante el transporte transitorio de solutos, 109. Transporte de solutos intercambiadores de iones: teoría cromatográfica, 109.

## CAPITULO 7. EL METODO DEL ELEMENTO FINITO, 112.

Introducción, 112. El método de Galerkin, 112. Integración por partes, 114. Elementos triangulares, 115. Malla de elementos finitos, 115. El elemento arquetípico, 115. Composición de elementos, 118. Ensamble de la matriz de conductancia, 119. Matriz de conductancia de cada elemento, 120. Matriz de conductancia global, 121. Condiciones de frontera, 123. La ecuación de Poisson, 124.

## CAPITULO 8. SIMULACION COMPUTARIZADA DE LA CONTAMINACION DE UN ACUIFERO, 126.

Geometría del acuífero, 126. Hidrodinámica del acuífero, 127. Contaminación del acuífero, 127.

## CAPITULO 9. APLICACIONES Y RESULTADOS DE LA SIMULACION, 131.

Validez de una solución numérica, 131. Calibración, 132. Verificación, 133. Ejemplos numéricos, 133.

## CONCLUSIONES, 141.

## ANEXOS, 142.

Función error complementaria, 143. Listado de los programas "Acuífero" (Introducción explicatoria) y "Geometría", 144. Listado del programa "Hidrodinámica", 159. Listado del programa "Contaminación", 168. Referencias bibliográficas, 176.

## INDICE DE FIGURAS.

- 2.1. Dirección del flujo del agua subterránea, 14.
  - 2.2. Concepto de carga, 14.
  - 2.3. Acuífero confinado y no confinado, 16.
  - 2.4. Gradiente hidráulico, 16.
  - 2.5. Velocidad aparente, 18.
  - 2.6. Velocidad real, 18.
  - 2.7. Bloque elemental de subsuelo, 18.
  - 2.8. Descenso del nivel piezométrico, 21.
  - 2.9. Definición del concepto de almacenamiento, 21.
- 
- 3.1. Columna de arena utilizada en el experimento de Darcy, 25.
  - 3.2. Resultados de Darcy que demuestran que el flujo es proporcional a la pérdida de carga, 26.
  - 3.3. Carga total en un punto del suelo, 26.
  - 3.4. Análisis del flujo volumétrico neto, por unidad de tiempo, a través de un cubo infinitesimal, 30.
  - 3.5. Representación de las fronteras del sistema regional bidimensional de flujo de aguas subterráneas, 30.
  - 3.6. Modelo matemático del sistema regional mostrado en la figura 3.5, 33.
  - 3.7. Acuífero horizontal bidimensional que contiene un volumen elemental representativo, para la derivación de la ecuación de Poisson, 33.
  - 3.8. Modelo unidimensional de Long Island, New York, 37.
  - 3.9. Volumen infinitesimal de un acuífero no confinado, 37.
  - 3.10. Ilustración esquemática del nivel freático y de las condiciones de frontera para el ejemplo de infiltración a través de una presa de tierra, la cual no se muestra explícitamente en la figura, 37.
- 
- 5.1. Ciclo de conservación y renovación de las aguas residuales, 57.
  - 5.2. Procesos y puntos de muestreo en la Planta Purificadora WF-21 de Orange, California, 57.
  - 5.3. Plano del proyecto de recuperación de agua de desecho de la región del Dan, Israel, 68.
  - 5.4. Diagrama básico del sistema de recuperación y recarga mediante distribución superficial, 69.
  - 5.5. Localización de las áreas de infiltración y sus abastecimientos en Holanda, 69.
  - 5.6. Distribución de los cloruros en el acuífero de Zwolle, Holanda, 71.
  - 5.7. Distribución del olor en el acuífero de Zwolle, Holanda, 71.
  - 5.8. Cuencas de agua subterránea e instalaciones de recarga en el Condado de Los Angeles, Estados Unidos, 73.
  - 5.9. Recolección de agua renovada en sistemas de infiltración rápida, 74.

- 5.10. Plano del proyecto de Flushing Meadows, 75.
- 5.11. Plano de las instalaciones de recarga de aguas subterráneas en Palo Alto Baylands, 77.
- 5.12. Corte del acuífero y diagrama de los pozos de observación en las cercanías del pozo de inyección 11, correspondientes al estudio de recarga de Palo Alto, California, 77.
- 5.13. Avance, calculado como fracción de 1, de agua inyectada en el estudio de Palo Alto, California, 78.
- 5.14. Líneas de contorno de los tiempos medios de residencia correspondientes al estudio de Palo Alto, California, 79.
- 5.15. Retraso de las trazas de solutos orgánicos en el pozo de observación más cercano, en el estudio de Palo Alto, California, 79.
- 5.16. Río de los Remedios, Estado de México, 81.

- 6.1. Representaciones en diferencias finitas y elemento finito de la región de un acuífero, 85.
- 6.2. Dispersión longitudinal de un trazador que pasa a través de una columna de medio poroso, 88.
- 6.3. Distribución de un trazador en una región de flujo uniforme bidimensional de arena isótropa, 88.
- 6.4. Efecto de los estratos en los recorridos de flujo, en sistemas de aguas subterráneas, 91.
- 6.5. Dispersión de un contaminante en un sistema de aguas subterráneas, 91.
- 6.6. Avance de los solutos adsorbidos y no adsorbidos en una columna de materiales porosos, 94.
- 6.7. Efecto del coeficiente de distribución en el retraso del contaminante durante su transporte en un sistema de aguas subterráneas, 94.

- 7.1. Ejemplo de una región cercana a un pozo, 116.
- 7.2. Elemento triangular arquetípico e, 117.
- 7.3. Definición de las funciones básicas nodales  $N_L(x,y)$  dentro de la composición de elementos que contiene al nodo L, 117.
- 7.4. Diagrama esquemático que muestra la relación entre las matrices de conductancia elementales y globales, 122.
- 7.5. Tratamiento de los elementos finitos en el caso de condiciones de frontera con flujos específicos, 122.

- 8.1. Diagrama de flujo del programa "Geometría", 128.
- 8.2. Diagrama de flujo del programa "Hidrodinámica", 129.
- 8.3. Diagrama de flujo del programa "Contaminación", 130.

- 9.1. Gráfica de los resultados de la simulación del transporte de cloruros durante las operaciones de recarga del acuífero de Palo Alto, California, 140.



## INDICE DE TABLAS.

- 1.1. Niveles de contaminación en las cuencas hidrológicas de máxima prioridad en nuestro país, 3.
- 2.1. Rangos representativos de porosidad de rocas seleccionadas, 12.
- 4.1. Clasificación simple del agua subterránea según su contenido de sólidos disueltos totales, 42.
- 4.2. Clasificación de los constituyentes inorgánicos disueltos en el agua subterránea, 43.
- 4.3. Reacciones de disociación, constantes de equilibrio, y solubilidades de algunos minerales que se disuelven congruentemente en agua a 25°C y 1 atm de presión total, 46.
- 4.4. Algunos procesos de oxidación inorgánica que consumen oxígeno disuelto en el agua subterránea, 49.
- 4.5. Algunos procesos redox que consumen materia orgánica y reducen compuestos inorgánicos en el agua subterránea, 49.
- 5.1. Calidad de efluentes secundarios seleccionados para su aplicación al suelo, 54.
- 5.2. Valores recomendados para los constituyentes inorgánicos principales en el agua aplicada al suelo, 55.
- 5.3. Concentraciones máximas recomendadas para los elementos trazas en aguas de irrigación, 56.
- 5.4. Límites recomendados para la salinidad en las aguas de irrigación, 56.
- 5.5. Resumen de los costos de pretratamiento y recarga de las aguas subterráneas en los EE UU, 61.
- 5.6. Adsorción del Cadmio por varios suelos, expresada por la isoterma de Langmuir, 65.
- 5.7. Mejoras en la calidad del efluente debidas a la percolación a través de la zona no saturada y al flujo a través del acuífero (región del Dan, Israel), 67.
- 5.8. Remoción de metales pesados por filtración en las riberas del río en el Bajo Rhin (Duisberg), 67.
- 5.9. Eficiencia de remoción de orgánicos trazas del río Rhin, 70.
- 9.1. Datos de entrada del problema 9.1., 134.
- 9.2. Resultados del problema 9.1., 134.
- 9.3. Cargas hidráulicas en los nodos de la malla establecida para resolver el problema 9.2., 137.
- 9.4. Información que debe suministrarse al programa "Hidrodinámica" para solucionar el problema 9.3., 137.
- 9.5. Información que debe suministrarse al programa "Contaminación" para solucionar el problema 9.3., 138.
- 9.6. Resultados correspondientes al problema 9.3., 138.
- 9.7. Información requerida para resolver la hidrodinámica del problema 9.4. (acuífero de Palo Alto, CA, EE UU), 139.
- 9.8. Información requerida para resolver el transporte de contaminantes del problema 9.4., 139.
- 9.9. Resultados de la simulación del transporte de cloruros en el acuífero de Palo Alto, California, EE UU, 140.

## INTRODUCCION.

El hombre es parte integral de la Naturaleza, depende de ella para vivir y desarrollarse en sociedad e individualmente. No obstante, los impactos que el ser humano genera sobre los ecosistemas al satisfacer sus necesidades y aspiraciones, han derivado en un desequilibrio que, en grandes extensiones del planeta, se muestra irreversible hoy en día.

Aunque la Naturaleza posee cierta capacidad para tolerar y amortiguar las alteraciones provocadas por el hombre, cuando sus modos y formas de apropiación, manejo y transformación de los recursos naturales superan dicha capacidad, los procesos naturales de intercambio de energía y materia se rompen y aparecen la contaminación y el deterioro del ambiente.

En México, durante el presente siglo, se han alcanzado grados significativos de perturbación en nuestro ecosistema. La erosión, la presencia de contaminantes en el aire de las ciudades y la desaparición de especies silvestres, son algunas de las manifestaciones de esta situación.

La preocupación acerca de estos problemas, denominados ecológicos en los últimos años, ha rebasado el ámbito científico y de la administración de los recursos naturales, para convertirse en una demanda social. Por tal motivo, se hace imprescindible evaluar y dar a conocer las condiciones del medio y los elementos físicos y bióticos que lo componen, para detectar las causas y efectos de los mismos y actuar en consecuencia.

La contaminación ambiental se origina principalmente por el crecimiento no planificado de los centros de población, las actividades industriales y las transformaciones en los hábitos de comportamiento, orientados al consumismo. Este fenómeno ocurre cuando se rebasa la capacidad de autodepuración de los ecosistemas al arrojarse al medio natural elementos y sustancias en concentraciones tales que no pueden ser absorbidos o biodegradados.

La importancia del control y la prevención de la contaminación radica en el hecho de que ésta no sólo significa un deterioro de las condiciones naturales del entorno, sino una amenaza a la salud humana y a la calidad de vida de la población, además de la cancelación de opciones productivas.

El crecimiento demográfico e industrial observado a partir de la década de los cuarenta, derivó en un aumento significativo en el consumo de agua y en consecuencia, en mayores volúmenes de aguas residuales que afectan sensiblemente la calidad del recurso, el equilibrio ecológico y la existencia de gran cantidad de especies de flora y fauna acuáticas en ríos y lagos, lagunas, estuarios y zonas costeras.

Las prácticas asociadas con el manejo y disposición de las aguas residuales también han traído consigo diversos efectos de naturaleza socioeconómica. Con la contaminación del recurso se ha reducido la disponibilidad del agua superficial de buena calidad, ocasionando una explotación

mayor de los mantos acuíferos y la importación desde fuentes cada vez más lejanas a los centros de desarrollo urbano-industriales, con el consecuente incremento en los costos del suministro y el déficit constante en la dotación a los sectores más pobres de la población.

Por otra parte, el empleo de aguas procedentes de cuerpos contaminados eleva considerablemente los requerimientos y costos del tratamiento para adecuar el recurso a los usos doméstico e industrial, aumentando así los riesgos en la salud pública cuando es usado en la agricultura. La contaminación del agua repercute además en la disminución o cancelación de opciones productivas e influye de manera negativa en el desarrollo turístico de algunas zonas del país.

El deterioro de la calidad del agua y los requerimientos para el control de la contaminación están en función directa de la evolución y el crecimiento de las actividades productivas y el desarrollo urbano.

En 1980, la SARH estimó a nivel nacional una descarga total de aguas residuales de 14.41 millones de metros cúbicos. Las descargas previstas para los años 1990 y 2000 son de 24.42 y 31.68 millones de metros cúbicos, respectivamente. Durante este período el mayor volumen de aguas residuales será generado por la agricultura y los núcleos urbanos. (Secretaría de Desarrollo Urbano y Ecología, 1986).

Para 1985, la SEDUE calculó que en las principales cuencas hidrológicas del país se generaron 160 m<sup>3</sup>/seg a nivel urbano-industrial. La capacidad instalada para tratar estas aguas ascendió en 1985 a 28 m<sup>3</sup>/seg,

lo que representa el 17.5% del gasto descargado. La SEDUE ha registrado la existencia de 193 plantas de tratamiento municipal, con una capacidad de 16 m<sup>3</sup>/seg y 60 plantas que tratan residuos líquidos industriales con una capacidad de 12 m<sup>3</sup>/seg en total. (SEDUE, 1986).

Debido al mal estado de algunas plantas o a problemas de operación, el caudal de aguas tratadas con una calidad aceptable para los diversos usos a que se destinan, es de 7.6 m<sup>3</sup>/seg a nivel municipal (4.2 m<sup>3</sup>/seg tratados en el D.F.) y 7.2 m<sup>3</sup>/seg a nivel industrial, lo que representa el 9.25% del gasto total descargado. (SEDUE, 1986).

El impacto de las aguas residuales industriales en el país es posiblemente mayor que el que producen las aguas residuales municipales debido al tipo de compuestos que aportan: metales pesados, compuestos orgánicos sintéticos, sales disueltas, etc. (Véase la Tabla I.1.)

En muchos casos, como en el Distrito Federal, las aguas residuales industriales y municipales tienen como cuerpo receptor a grandes zonas agrícolas. No obstante que durante los primeros años se obtienen beneficios en la producción agrícola, es innegable que también se ocasionan diversos perjuicios como riesgos a la salud, efectos a largo y mediano plazo en la producción por deterioro del suelo, contaminación de los acuíferos, etc. (Iturbe, 1983).

La evolución tanto de las aguas residuales dispuestas en una zona, como del suelo que las recibe, constituye un problema complejo por la cantidad de factores que en él intervienen por lo que se hace necesario estudiarlo y resolver aquella parte

TABLA I.1. Niveles de contaminación en las cuencas hidrológicas de máxima prioridad en nuestro país.



CONTAMINACION					
CUENCA	SUPERFICIE KM <sup>2</sup>	POBLACION hab.	VOLUMEN DE DESCARGA DE AGUAS RESIDUALES -millones de m <sup>3</sup> /año-	DEMANDA BIQUIMICA DE OXIGENO	
				CARGA ORGANICA ton/año	URBANO INDUSTRIAL
1. LEYMA-SANTIAGO	129 632	11 344 467	536	350 046	33 67
2. PANUCO	67 872	1 775 088	1407	632 535	47 53
3. SAN JUAN	32 678	2 907 920	296	116 076	42 58
4. BALSAS	111 300	7 280 632	258	120 686	36 64
5. BLANCO	2 738	828 674	162	116 511	6 04
6. CULIACAN	21 677	470 559	113	85 701	8 92
7. COLORADO	5 180	489 634	30	14 314	67 33
8. FUERTE	33 550	386 057	80	64 455	4 96
9. NAZAS	59 632	1 062 295	61	22 601	51 49
10. JAMAPA	3 874	592 413	74	46 180	16 85
11. LA ANIGUJA	3 519	463 725	55	40 720	11 89
12. SONDHA	28 885	322 038	25	9 098	58 42
13. GUAYATELAN	17 184	117 089	45	33 648	4 96
14. YAGUAJ	72 640	445 791	28	13 642	31 63
15. SAI ADD	61 347	149 389	62	16 462	70 30
16. GONCHIOS	11 964	832 828	77	20 680	51 49
17. ARIEHUA	9 725	469 848	36	22 920	19 81
18. COAHUILTECA	7 301	287 667	34	23 571	12 84
19. TIBIANA	3 233	489 613	44	19 240	55 45
20. BIRAVO	8 750	615 288	41	13 897	77 73

Fuente: SEME, 1986.

que resulte prioritaria en cada caso.

Por ejemplo, si lo más importante es purificar el agua residual y únicamente se utiliza al suelo como un medio para lograrlo, entonces el objetivo será el diseño de un sistema de tratamiento en base a las características físicas, químicas y biológicas de las aguas residuales.

Si el problema es mantener una producción agrícola adecuada en una zona que requiere el riego con aguas residuales, entonces el objetivo será diseñar un sistema en el que el suelo utilice las aguas residuales de tal manera que no se afecte la capacidad productiva.

Si el problema es la extracción de agua del subsuelo con fines potables, es evidente que el objetivo será mantener el acuífero libre de contaminación; aunque en cualquier caso el diseño correspondiente debe considerarse la no contaminación del acuífero. (Iturbe, 1983).

#### OBJETIVOS.

En este trabajo se estudia el tercer problema, considerando el efecto que tendría la inyección directa de agua contaminada a un acuífero, lo cual puede ser el punto de partida para estudios más elaborados donde la fuente de contaminación ya no sea puntual, sino de área, como es el caso de la irrigación de cultivos con aguas residuales, práctica común en nuestro país.

Los principales objetivos de este trabajo son:

1. Presentar en forma ordenada los principios básicos necesarios pa-

ra el estudio del movimiento y contaminación del agua subterránea, de manera que se pueda disponer de una fuente de información en español acerca de este tema, ya que es escasa la bibliografía en nuestro idioma sobre el particular.

2. Conocer los mecanismos de acumulación y transporte de los contaminantes a través del subsuelo.

3. Plantear un modelo matemático que permita conocer la distribución de un contaminante en un acuífero, en función del tiempo, considerando la influencia de los mecanismos de advección, dispersión, así como de las reacciones fisicoquímicas entre el agua y el suelo.

4. Resolver el modelo planteado, empleando el método del elemento finito, a fin de aplicarlo a problemas con geometrías irregulares.

5. Diseñar un programa de computadora tan versátil que pueda aplicarse a problemas en condiciones variadas, como geometrías diferentes e irregulares, localización y número variable de pozos de inyección, extracción y/u observación, así como diversos contaminantes, sin necesidad de modificar la estructura básica del programa.

6. Revisar la bondad del modelo y la confiabilidad del programa, mediante la comparación con los resultados experimentales y/o calculados por otros investigadores porque la realización de un experimento queda fuera del alcance de este estudio.

## CAPITULO 1.

### ANTECEDENTES HISTORICOS DE LA EVALUACION DE LOS RECURSOS HIDRAULICOS DEL SUBSUELO.\*\*

Muchos siglos se requirieron para establecer el concepto de ciclo hidrológico. La solución del problema acerca del origen del agua subterránea contribuyó al desarrollo y lenta aceptación del concepto (Parizek, 1963). Según Keilhack (1912), el origen del agua subterránea se mencionó en el Libro 21 de la Ilíada de Homero, escrita por el año 1000.. a.C., como sigue: "Ni el poderoso río Achelous, ni la potente fuerza de las corrientes profundas del Oceanus, combatirían con Zeus, a partir del cual fluyen todos los ríos y cualquier mar, así como todos los manantiales y pozos profundos". Herodoto (484-425 a.C.) razonó que el sol "atrae el agua, y después de atraerla, otra vez la repele a las regiones superiores, donde los vientos la sostienen, la dispersan y la reducen a vapor". Antes de que el sol retorne otra vez a su posición de verano en el cielo, "los ríos corren abundantes por la cantidad de agua de lluvia que hacen bajar de los campos, en donde existe demasiada humedad en tal magnitud que la tierra es surcada por muchos arroyos; pero en el verano, cuando las lluvias se van y el sol atrae su agua, ellos vuelven a ser pequeños" (Herodoto, Guerras Persas).

Anaxágoras (500-428 a.C.) reconoció la importancia de la evaporación y de la lluvia como fuentes de agua para los ríos, pero pensó en términos de grandes depósitos del ti-

po de cavernas inmensas del Tartarus. Anaxágoras también advirtió la importancia de la lluvia, la recarga, y el almacenamiento en el subsuelo, aún cuando entendió incorrectamente la naturaleza de este almacenamiento.

Platón escribió en Critias, alrededor del 350 a.C., acerca de algunos fragmentos del ciclo, como el de lluvia-escorrentamiento, el de infiltración del agua superficial y el almacenamiento en el subsuelo, e hizo afirmaciones correctas concernientes a los orígenes de los manantiales y las corrientes. Aristóteles (384-322 a.C.) reconoció el camino cíclico del agua entre la tierra y el aire, la evaporación y la condensación así como su importancia en la lluvia, y que parte de ella es descargada a las corrientes, mientras que otra parte se percola en el suelo y reaparece en los manantiales (Meteorología). La importancia de la evaporación, la lluvia y la infiltración, en el origen del agua subterránea, fue enunciada clara y correctamente por Vitruvius, quien vivió en la época de Cristo (Vitruvius, Arquitectura).

Leonardo da Vinci comprendió los sistemas artesianos subterráneos y Bernard Palissy (1509-1589) explicó correctamente la relación entre pozos y ríos, el origen de los manantiales y los ríos, el ciclo hidrológico y los cambios en los niveles de

\*\* Este capítulo es una traducción y adaptación de una sección del libro "Groundwater Resource Evaluation" de Walton, Mc Graw Hill, 1970.

agua en los pozos (Palissy, Discursos Admirables). Pierre Perrault (1608-1680), científico francés, demostró que la lluvia es más que suficiente para explicar el caudal de ríos y manantiales. Su trabajo fue ampliado algunos años más tarde por otro científico francés; Mariotte (1620-1684), quien correlacionó la filtración en una cueva con la lluvia, y demostró que el flujo de los manantiales varía de acuerdo con la lluvia y que la infiltración de ésta abastece los manantiales y los pozos con su agua. En 1693, Edmund Halley (1656-1742), astrónomo británico, demostró que la evaporación es capaz de suministrar una cantidad similar de agua que la que retorna al mar por los ríos que fluyen a él. Bernardino Ramazzini dió una explicación precisa del origen de la presión artesiana, en 1691. Vallesiere (1715) reconoció la importancia de los estratos impermeables que sirven como capas de confinamiento en los sistemas artesianos. La Metheric explicó en 1791 que una parte del agua de lluvia y de nieve fluye superficialmente, una segunda parte humedece el suelo y se evapora o alimenta a las plantas, y una tercera parte penetra hasta depósitos subsuperficiales a mayores profundidades, desde las cuales brota gradualmente en forma de manantiales.

Ferris y Sayre (1955) describen la serie de cambios habidos entre 1856 y 1955, que ayudaron a establecer los principios de la evaluación de los recursos hidráulicos subterráneos como ciencia cuantitativa. Darcy (1856) trabajó experimentalmente con el flujo de agua a través de arenas, y derivó una fórmula conocida como ley de Darcy, la cual expresa la relación entre la velocidad de percolación, la permeabilidad de los

materiales saturados con agua, y el gradiente hidráulico. La ley de Darcy sirve de base para numerosos métodos cuantitativos de evaluación de recursos hidráulicos subterráneos. Dupuit (1863) fue el primer científico en desarrollar una fórmula para el estado estacionario del flujo de agua desde un pozo. A. Thiem (1870) desarrolló ecuaciones para el flujo de pozos y galerías. Forchheimer (1886) introdujo los conceptos de mapeo conformacional y la construcción de redes de flujo, el método de las imágenes y la teoría de las funciones de variable compleja. Fue el primero en resolver el problema del flujo de agua subterránea en una formación semiinfinita saturada de agua y limitada por una corriente permanente, así como el problema del pozo que descarga desde una formación saturada de agua y abastecida por recarga uniforme. Badon Guyben (1889) estableció las leyes de equilibrio entre el agua del mar y el agua dulce subterránea. Slichter (1898) demostró la relación entre el tamaño de grano de las rocas y la permeabilidad, así como el movimiento del agua subterránea. Chamberlin (1885) definió los controles geológicos, necesarios para la ocurrencia de pozos artesianos. La información detallada de la relación entre la carga y el movimiento del agua del subsuelo fue presentada por King (1892).

Turneure y Russell (1901) publicaron un libro de texto sobre abastecimientos de aguas públicas, el cual incluyó sus contrapartes de las ecuaciones de Thiem y de Slichter para el flujo radial hacia un pozo de descarga. G. Thiem (1906) desarrolló un método de campo para la determinación de la permeabilidad de formaciones saturadas de agua y sus tasas de flujo, utilizando un pozo

de bombeo y midiendo las pérdidas de carga resultantes en los pozos de observación. Horton (1906) extendió las fórmulas de estado estacionario de Slichter a fin de obtener un método para la determinación de la profundidad y espaciamiento adecuados de las tuberías de barro cocido para drenaje. Meinzer (1923) evaluó los estudios anteriores para el planteamiento de los principios y metodología de investigación de la ocurrencia y distribución del agua subterránea, y proporcionó el primer manual para hidrologistas subterráneos.

El transporte del agua en el suelo fue investigado por Gardner y colaboradores (1928), Israelson y McLaughlin (1935), y Kirkham (1945), quienes analizaron la hidráulica del flujo hacia drenes situados encima de formaciones artesianas saturadas de agua. El trabajo de Hopf y Trefftz (1921), Pavlovsky (1922), Kozeny (1933), Lindquist (1933), Hamel (1934), Mizkat (1935), Verdemikov (1934), Melaschenko (1936), así como de Vradenburgh y Stevens (1936), aumentó considerablemente el desarrollo de soluciones para el flujo bi y tridimensional hacia canales y drenes.

De Glee (1930) proporcionó una solución al problema del flujo estacionario hacia un pozo de una formación artesiana permeable saturada de agua, surtida por una formación acuífera superyacente. Lewis (1932) proporcionó la primera solución práctica para el flujo radial estacionario hacia un pozo en una formación acuífera que recibe recarga uniforme y permanente. La distribución del potencial cerca de un pozo de penetración parcial fue analizada por Forchheimer (1930), Kozeny (1932), Mizkat (1932) y Huntush (1964). Los métodos

para la determinación de las pérdidas de carga en un pozo de bombeo, fueron descritos por Kano (1939), Jacob (1947), Rorabaugh (1953), y Inge Lund (1953). Los métodos para la estimación de la recarga o descarga a partir de los cambios en el almacenamiento del agua subterránea, fueron proyectados por Smith (1924), White (1932), Meinzer (1928), así como por Williams y Lohman (1949). Una de las más importantes aportaciones al desarrollo de la evaluación de los recursos hidráulicos subterráneos, fue la introducción de la ecuación de Theis (1935) para el flujo hacia un pozo en estado estacionario.

Los modelos de tanques de arena fueron aplicados a problemas de flujo radial por Wyckoff y colaboradores (1932), Babbitt y Caldwell (1948), Hanson (1952), Childs y colaboradores (1953), Kozeny (1932), Mizkat (1935), Vaidhianathan y colaboradores (1934), Baumann (1951), así como Day y Luthin (1954). Los modelos análogos eléctricos fueron desarrollados para la solución de problemas de flujo complejos, por Mizkat (1935), Babbitt y Caldwell (1948), Wyckoff y colaboradores (1933), y Zanger (1953). Mondenhall (1905), Piper (1939), Houk (1921), y Meinzer (1928) analizaron los registros de los flujos para determinar la recarga de los depósitos de agua subterránea y su descarga hacia las corrientes. Mizkat (1937) publicó un texto extenso sobre flujo de fluidos a través del medio poroso.

Theis (1937) fue el primero en formular el flujo, en estado transitorio, del agua subterránea de fosas o drenes de descarga. Kirkham (1945), Childs (1945), y Inge Lund (1951) proporcionaron un análisis completo del flujo del agua del sub-



suelo hacia los drenes.

Hubbert (1940) derivó a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes - la ley de Darcy e introdujo el concepto de potencial de fuerza en su derivación matemática. Hubbert apuntó también (1940) los principios físicos de la relación agua dulce-agua salada bajo la condición hidrodinámica. Jacob (1940) clarificó cuantitativamente cómo se aplica el coeficiente de almacenamiento a la formación acuífera artesiana. Varias ecuaciones útiles, como corolario a la fórmula de Theis, fueron desarrolladas por Theis (1935) y Jacob (1950). Guyton (1941) demostró que las pérdidas de carga calculadas con la fórmula de Theis concordaban aproximadamente con las observaciones reales de campo. Los análisis matemáticos del flujo del agua subterránea, a escala de grandes cuencas, fueron realizados por Hubbert (1940), Jacob (1945), Steggewent (1933), Wernor y Noren (1951), y Ferris (1951). El asentamiento del suelo debido a las extracciones de agua subterránea, fue investigado por Tolman y Poland (1940). Los métodos para la investigación de la infiltración del agua de rfo a pozos adyacentes,

fueron presentados por Theis (1941), Rorabaugh (1951), Huntush (1964), Kazmann (1948), y Walton (1963). La aplicación de la fórmula de Theis y del método de las imágenes para la localización de las fronteras de formaciones acuíferas, fue descrita por Ferris (1948).

Los principios del intercambio catiónico fueron descritos por Piper (1953) y Love (1944). El intercambio de bases en el agua subterránea fue estudiado por Renick

(1925), así como Poland y colaboradores (1948). Los métodos cuantitativos para el estudio de la afluencia de aguas mineralizadas en áreas de intenso bombeo, fueron desarrollados por Hill (1942), Langelier y Ludwig (1942), y Piper (1944).

Las discusiones detalladas acerca del uso de los métodos numéricos para la solución de problemas que involucran el flujo en acuíferos, fueron proporcionadas por Yang (1949), Boulton (1951), Kashef y colaboradores (1952), Luthin y Scott (1952), Shaw y Southwell (1941), y Stallman (1955). Las relaciones cuantitativas entre la calidad del agua y la resistividad eléctrica fueron desarrolladas y usadas por Jones y Buford (1951). Hansen (1952) y Zanger (1953) usaron modelos mecánicos (elásticos) para resolver problemas de agua subterránea. Stuart y colaboradores (1954) analizaron problemas de agua subterránea asociados con el beneficio de minerales de hierro. Ahrens (1957) presentó criterios para el diseño de pozos. Kem (1959) resumió los métodos para la interpretación de las características químicas del agua natural. Henry (1959), y Bear y Dagen (1963) derivaron ecuaciones concernientes a la intrusión de agua salada en acuíferos de agua dulce. Kohout (1960) presentó datos acerca del flujo cíclico del agua salada en formaciones acuíferas costeras. La dispersión hidrodinámica y el mezclado de agua en acuíferos fue analizado por Bear (1961).

Koenig (1960) analizó los aspectos económicos de la simulación de pozos de agua. Rasmussen y Andrewsen (1959), así como Schicht y Mul-

ton (1961), prepararon presupuestos hidrológicos para cuencas. Back (1961) presentó técnicas para el mapeo de frentes hidrodinámicos. Sklitzke (1961) aplicó técnicas analógicas eléctricas para resolver problemas complejos del sistema de aguas subterráneas. Walton y Prickett (1963) extendieron la aplicación de las técnicas analógicas para la solución de los mismos problemas. Walton y Neill (1961) analizaron los problemas de agua subterránea con una computadora digital. Poland (1961) describió el coeficiente de almacenamiento en una región de mayor asentamiento causado por la compactación de las formaciones acuíferas. Lusczynski (1961) derivó ecuaciones para la carga y flujo del agua subterránea de densidad variable. Patten y Bennett (1963) resumieron las aplicaciones del transporte eléctrico y radioactivo a la hidrología subterránea. Sniegocki (1963) resumió los problemas de recarga artificial a través de pozos.

Toth (1963) suministró un análisis teórico del flujo de agua subterránea en pequeñas cuencas de desagüe. Walton y Neill (1963) analizaron datos de capacidad específica para determinar las propiedades hidráulicas de formaciones acuíferas. Boulton (1963) ideó un método para el análisis de pruebas de bombeo bajo el nivel freático, el cual fue ampliado por Prickett (1965). Huntash (1964) proporcionó soluciones para muchos problemas de hidráulica de pozos, incluyendo aquellos asociados con condiciones artesianas permeables, pozos que penetran parcialmente, infiltración inducida por el flujo de las corrientes, y colectores horizontales. Walton y colaboradores (1967) analizaron con computadoras

la recarga por infiltración inducida por las corrientes, en condiciones variables del nivel del agua subterránea y de la época de la corriente. Cooper y Rorabaugh (1963) analizaron el movimiento del agua subterránea en época de avenidas.

## CAPITULO 2.

### ASPECTOS BASICOS DE LA HIDRAULICA SUBTERRANEA.

Este capítulo intenta proporcionar únicamente las definiciones básicas, junto con los aspectos prácticos, del movimiento del agua en el subsuelo, así como de sus mediciones. Por ejemplo, se aproxima el concepto de "carga" sólo por su asociación con el nivel de agua en un pozo siendo ésta la única forma práctica de medir esta carga en un acuífero. Información más detallada acerca de la teoría del movimiento del agua subterránea, se puede encontrar en excelentes libros de texto como los de Jacob Bear (1972), David Todd (1959) y De Wiest (1965).

#### EL CICLO HIDROLOGICO. [35]

La cadena de eventos que describen la historia del agua se denomina ciclo hidrológico. El ciclo involucra al sistema total de la Tierra: atmósfera, hidrósfera y litósfera. La atmósfera es la envoltura gaseosa encima de la hidrósfera; la hidrósfera consta de los cuerpos de agua que cubren la superficie de la tierra, y la litósfera es el ambiente de roca sólida debajo de la hidrósfera. El ciclo de actividades del agua se extiende en estas tres partes del sistema terrestre, desde una profundidad media de 0.8 km en la litósfera, hasta una altura de cerca de 17 km en la atmósfera.

En el ciclo hidrológico, el agua se evapora desde los océanos y el suelo y pasa a formar parte de la atmósfera. La humedad evaporada se

eleva y se mantiene en la atmósfera hasta que se precipita a la Tierra, ya sea al suelo o a los océanos. El agua precipitada puede ser interceptada o transpirada por las plantas, puede viajar sobre la superficie del terreno en corrientes hacia los océanos, o puede infiltrarse en el suelo. La mayor parte del agua interceptada y transpirada, así como parte del agua de escurrimiento superficial, retorna al aire mediante evaporación y transpiración. El agua infiltrada puede percolarse hacia abajo para ser almacenada temporalmente como agua subterránea, la cual después fluye fuera de las rocas como manantial, o se filtra en corrientes como escurrimientos hacia el océano, o se evapora hacia la atmósfera, para completar el ciclo. Así, el ciclo hidrológico sufre varios procesos complicados de evaporación, precipitación, interceptación, transpiración, infiltración, percolación y escurrimiento.

#### EL AGUA DEL SUBSUELO. [35]

La mayoría de las rocas contienen numerosos espacios abiertos, denominados intersticios, en los cuales el agua puede ser almacenada, y a través de los cuales el agua puede moverse. El agua que existe en los intersticios de las rocas se denomina agua subsuperficial (Meinzer, 1959); esa parte del agua subsuperficial contenida en intersticios completamente saturados, se denomina agua subterránea. El agua subsuperfi

\*\* La mayor parte de este capítulo es una traducción y adaptación de una sección del libro "Groundwater Pollution" de Jean J. Fried, Elsevier Scientific Publishing Company, 1975. Las otras referencias se indican en los subtítulos.

cial de los intersticios de la zona de aireación, arriba de la zona de saturación, donde éstos sólo están parcialmente saturados con agua, se denomina agua vadosa.

Un acuffero es un lecho, formación o grupo de formaciones, saturado, el cual produce agua en cantidad suficiente para ser considerado, en consecuencia, una fuente de abastecimiento. Un acuffero sirve de conducto de transmisión y depósito de almacenamiento. Transporta agua desde las áreas de recarga hacia los cuerpos superficiales de agua, terrenos húmedos, manantiales, áreas de evapotranspiración, así como pozos y otros dispositivos abastecedores de agua. Como depósito de almacenamiento, un acuffero proporciona agua de reserva para usarla durante períodos cuando las descargas superan la recarga. La cantidad de agua disponible en almacenamiento, en algunos acufferos, puede ser tan grande que durante años de altas descargas no se observe evidencia marcada de agotamiento.

#### INTERSTICIOS. [35]

Las diferencias en el número, tamaño, forma, interconexión y arreglo de los intersticios de los acufferos, resultan de la gran diversidad de procesos geológicos por los cuales las rocas fueron producidas y más tarde modificadas. La mayoría de los intersticios son pequeños e interconectados, algunos son cavernosos en tamaño, y otros son pequeños y aislados en tal manera que hay poca oportunidad para el movimiento del agua de un intersticio a otro. La naturaleza de los intersticios está determinada por la estructura geológica de las rocas, siendo esencial

una descripción ordenada de la geología e historia geológica de una región, para el entendimiento del movimiento y almacenamiento del agua subterránea.

Los intersticios de las rocas pueden clasificarse en dos grupos, originales y secundarios (Meinzer, 1959). Los intersticios originales existen desde que las rocas se formaron y se pueden subdividir en aquellos de origen sedimentario, y de origen ígneo. Los intersticios secundarios son el resultado de los procesos por los cuales las rocas se modificaron después de formarse, e incluyen principalmente las fracturas así como las aberturas por disolución. Los intersticios originales consisten de espacios entre fragmentos adyacentes de rocas sedimentarias, y de pequeñas cavidades o inclusiones dentro de los cristales, así como de pequeños espacios intercristalinos desarrollados en las rocas ígneas durante su enfriamiento. Los intersticios secundarios, producidos principalmente por contracción, presión y deformación de las rocas, son también generados por la descomposición química de las rocas, la disolución y consecuente remoción de los productos solubles, o por solución y eliminación de rocas solubles.

#### POROSIDAD. [35]

La porosidad de una roca es una medida de su espacio intersticial, y se expresa cuantitativamente como el porcentaje del volumen total de roca ocupado por los intersticios (Meinzer, 1959). Los rangos representativos de porosidad para rocas seleccionadas, se presentan en la tabla 2.1. En general, una porosidad mayor del 20% se considera grande, entre 5 y -

**TABLA 2.1 RANGOS REPRESENTATIVOS DE POROSIDAD DE ROCAS SELECCIONADAS.**

ROCAS	POROSIDAD, %
ARCILLA	45-55
ARENA	35-40
GRAVA	30-40
ARENA Y GRAVA	20-35
PIEDRA ARENISCA	10-20
PIZARRA (LUTITA)	1-10
PIEDRA CALIZA	1-10

Fuente: Walton, 1970.

20% se considera media, y menor del 5% baja. La más alta porosidad conocida es de 80 a 95%, la cual ha sido reportada para aluvión recién depositado en el delta del Mississippi.

#### CLASIFICACION DEL SUELO. [5]

La clasificación de los suelos es importante debido a su variabilidad en características de funcionamiento y éstas incluyen no solamente la porosidad y la permeabilidad, sino también el esfuerzo cortante y la compresibilidad. Se han hecho varias aproximaciones al problema. En 1952, el Departamento del Interior, el Colegio de Ingenieros y A. Casagrande de Harvard, en Estados Unidos, modificaron la clasificación Airfield de este último, para crear la Clasificación Unificada del Suelo. De esta fueron excluidos los granos que exceden las 3 pulgadas de diámetro, encontrándose en esta categoría tanto los guijarros (de 3 a 12 pulgadas de diámetro) como las piedras (de más de 12 pulgadas de diámetro).\*

En el esquema hay dos divisiones que son granos gruesos y granos finos. La línea divisoria es el tama

ño de malla número 200, es decir de 0.074 mm, y una subdivisión más detallada es la siguiente:

G (grava) gruesa 3" a malla N° 4 (3/16")  
 fina 3" a 3/4"

S (arena) gruesa 3/4" a malla N° 4

S (arena) gruesa malla N° 4 a malla 200  
 media malla 10 a malla 40  
 fina malla 40 a malla 200

M (sedimentos, aluvión)

C (arcilla)

Los sedimentos pueden separarse de la arcilla en base a su tamaño de grano, el cual ha sido establecido por algunos autores en 5 µm (0.005 mm) y por otros en 2 µm (0.002 mm). Sin embargo, las propiedades ingenieriles no parecen depender de tamaños de grano en particular, por lo que no hay una distinción real del tamaño en el sistema de la Clasificación Unificada del Suelo, distinguiéndose más bien dos materiales según su comportamiento. Las arcillas son cohesivas y complejas, y de naturaleza alu

\* 3 pulgadas = 7.62 cm; 12 pulgadas = 30.48 cm.

mino-silico-ácidas con una estructura que refleja capas de varios espesores.

Los suelos pueden ser de clase buena o pobre.

Precuentemente con tienen agua y la cantidad de ésta produce tres consistencias principales. Estas son las siguientes:

1) Líquidos: el suelo está en suspensión o se comporta como un fluido viscoso.

2) Plásticos: el suelo es deformable sin recuperación elástica.

3) Sólidos: el suelo se quiebra con la deformación o se recupera elásticamente.

Estos tres principales estados de la consistencia del suelo se describen normalmente con referencia a la fracción de suelo más pequeña que el tamaño de malla 40, o sea, el límite superior del comportamiento fino de la arena. Para esta fracción de suelo en particular, el contenido de agua como porcentaje de peso seco, para el cual el suelo pasa del estado líquido al plástico, se denomina límite líquido. De la misma manera, el contenido de agua del suelo en la frontera entre el estado plástico y el sólido, se denomina límite plástico. La diferencia de los límites líquido y plástico constituye el índice de plasticidad, y éste corresponde al rango de contenido de agua dentro del cual el suelo es plástico. Los límites antes mencionados comprenden los famosos límites de Atterberg, y se utilizan para distinguir las arcillas (plásticas) de los sedimentos (no plásticos, o pobremente plásticos).

## PROPIEDADES ACUIFERAS, ESTRATIGRAFIA Y ESTRUCTURA DE LAS ROCAS. [35]

Las rocas de la Tierra se pueden dividir en dos grandes clases: (1) las rocas consolidadas, o rocas firmes, y (2) los materiales no consolidados. Con respecto a su origen, las rocas pueden ser divididas en tres clases (Meinzer, 1959): (1) las rocas ígneas, las cuales son producidas por el enfriamiento y solidificación de materiales fundidos; (2) las rocas sedimentarias, las cuales son producidas por la depositación de materiales intemperizados de rocas más viejas, derivadas de restos de animales y plantas, o precipitados de las soluciones acuosas, y (3) las rocas metamórficas, las cuales son producidas por alteración profunda de otras rocas, principalmente por los agentes del calor y la presión.

Los depósitos no consolidados de arena y grava son los más importantes acuíferos; probablemente más del 90% de toda el agua subterránea bombeada en los Estados Unidos proviene de la arena y la grava.

## CAUSAS DEL MOVIMIENTO DEL AGUA SUBTERRÁNEA.

La fuerza impulsora del flujo de agua en el subsuelo es el potencial o carga hidráulica. Este potencial es representado por el nivel de agua en las perforaciones: la diferencia de carga entre dos puntos es igual a la diferencia de los niveles de agua en dos pozos perforados en estos puntos. Posiblemente, la causa del movimiento es la diferencia de potencial:

1) Si el fluido tiene la misma carga en cualquier punto, no hay flujo.



Figura 2.1. Dirección del flujo del agua subterránea.

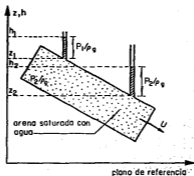


Figura 2.2. Concepto de carga.

ii) Si existe una diferencia de carga en el espacio, el agua fluye en la dirección en que disminuyen las cargas (figura 2.1).

La hidrostática nos dice que:

$$p_1 = \rho g(h_1 - z_1), \quad [\text{ec. 2.1}]$$

donde  $p$  es la presión,  $\rho$  la densidad y  $g$  la aceleración de la gravedad;  $h$  y  $z$  se definen en la figura 2.2.

$$h_1 = \frac{p_1}{\rho g} + z_1 \quad [\text{ec. 2.2}]$$

es la carga en el punto 1, que estrictamente hablando, está dada por la siguiente relación:

$$h_1 = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z_1, \quad [\text{ec. 2.3}]$$

donde  $v$  es la velocidad del agua. En un medio poroso,  $v^2$  puede ser despreciada. A lo largo de una línea de corriente, de acuerdo con Bernoulli, se tiene que:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta h, \quad [\text{ec. 2.4}]$$

donde  $\Delta h$  es la pérdida de carga debida a la disipación del calor por la viscosidad. De esta manera, la pérdida de carga es igual a la diferencia de los niveles de agua,  $h_1 - h_2$ .

#### ACUIFEROS CONFINADOS Y NO CONFINADOS.

Un pozo es perforado en un acuífero; la perforación se suspende cuando se encuentra agua por vez primera:

i) Si el nivel del agua dentro de la perforación se estabiliza más arriba del fondo del agujero, el acuífero es confinado.

ii) Si por el contrario, el nivel del agua no se eleva dentro de la perforación, el acuífero es no confinado.

El mismo acuífero puede ser confinado en algunas regiones y no confinado en otras. El hecho de que sea confinado o no es una propiedad local del acuífero. Es una aplicación muy sencilla del principio de los vasos comunicantes (figura 2.3).

El agua dentro de una perforación se estabiliza en un nivel que se denomina nivel piezométrico. La superficie que une todos los niveles de agua es la superficie piezométrica. Si ésta coincide con el manto freático, se trata de una superficie libre y el acuífero es no confinado. En el caso contrario, la superficie piezométrica está encima del manto freático.

#### GRADIENTE HIDRAULICO Y VELOCIDADES.

Considérense dos puntos 1 y 2 y sus correspondientes cargas (o niveles piezométricos)  $h_1$  y  $h_2$ , a lo largo de una línea de corriente horizontal. La distancia entre 1 y 2, a lo largo de la línea de corriente es  $l$  (figura 2.4).

El gradiente hidráulico en la dirección de 1 a 2 es:

$$i = \frac{h_2 - h_1}{l}, \quad [\text{ec. 2.5}]$$

Se trata de un número algebraico: si el gradiente hidráulico se toma en la dirección del flujo, es negativo, porque se dijo que el flujo ocurre en la dirección en que disminuyen las cargas.



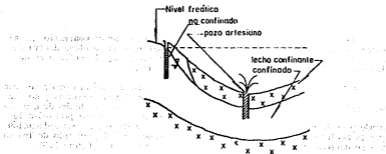


Figura 2.3. Acuífero confinado y no confinado.

El diagrama muestra un perfil de un acuífero. En la parte superior, una línea horizontal con una flecha hacia abajo indica el "Nivel freático no confinado". A la izquierda, un pozo perfora hasta un nivel más profundo, etiquetado como "pozo artesiano". Debajo del nivel freático no confinado, hay una zona sombreada con cruces que representa el "lecho confinante confinado". En la base del diagrama, una línea curva con cruces representa el "lecho confinante no confinado".

El diagrama muestra un perfil de un acuífero.

El diagrama muestra un perfil de un acuífero.

El diagrama muestra un perfil de un acuífero.

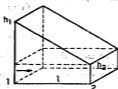


Figura 2.4. Gradiente hidráulico.

El diagrama muestra un perfil de un acuífero.

La cantidad  $h_1 - h_2$  se denomina pérdida de carga entre 1 y 2.

Respecto a las velocidades, existen varios tipos:

1) la velocidad aparente es la velocidad general del flujo a través del medio poroso;

2) la velocidad real es la velocidad de una gota microscópica en el medio poroso.

Considérese un ejemplo (figura 2.5).

Estando A y B sobre una línea de corriente, se inyecta cierta cantidad de trazador radioactivo en el pozo 1. Después de un período de tiempo T, un medidor en el pozo 2 registra la presencia de agua radioactiva. La velocidad aparente es:

$$V = L/T \quad [\text{ec. 2.6}]$$

siendo L la distancia horizontal entre los pozos.

Realmente, las moléculas no siguen un camino rectilíneo en el medio poroso, sus velocidades son mayores que la velocidad aparente, porque la longitud del recorrido es mayor que L, debido a la matriz sólida (figura 2.6).

La velocidad aparente se denomina velocidad macroscópica  $V_M$  o velocidad porosa media  $V_M$ . La velocidad real se denomina velocidad microscópica  $V_m$ .

#### LEY DE DARCY.

A lo largo de una línea de corriente se tiene que:

$$V_M = -K_M i, \quad [\text{ec. 2.7}]$$

donde  $K_M$  es un coeficiente dimensionalmente igual a la velocidad. El signo resulta del hecho de que el desplazamiento ocurre en la dirección en que disminuyen las cargas.

La ley de Darcy dice que la velocidad del agua subterránea es proporcional al gradiente hidráulico.

#### TASA DE INFILTRACION DEL FLUJO.

Se calcula a continuación la tasa del flujo a través de una sección de subsuelo (figura 2.7).

Considérese el flujo de agua subterránea a través de una sección de espesor e, de ancho t, perpendicular a las líneas de flujo. Supóngase primero un fenómeno más sencillo, un fluido continuo sin la matriz porosa. Entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , un volumen q de fluido pasa a través de la sección, definiéndose la longitud L por la relación:

$$q = t \cdot e \cdot L. \quad [\text{ec. 2.8}]$$

L puede interpretarse como la distancia virtual recorrida por la sección durante el tiempo  $t_2 - t_1$ .

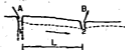
Entonces, la velocidad media  $V_M$  entre  $t_1$  y  $t_2$  se define por:

$$V_M = \frac{L}{t_2 - t_1}, \quad [\text{ec. 2.9}]$$

y la tasa de flujo  $Q$  a través de la sección se expresa como:

$$Q = \frac{q}{t_2 - t_1} = V_M \cdot t \cdot e. \quad [\text{ec. 2.10}]$$

Por analogía, la tasa de flujo  $Q$  a través de una sección de medio poroso, se expresa como:



**Figura 2.5. Velocidad aparente.**



**Figura 2.6. Velocidad real.**



**Figura 2.7. Bloque elemental de subsuelo.**

$$Q = V_D \cdot t \cdot c, \quad [\text{ec. 2.11}]$$

donde  $V_D$  es la velocidad de Darcy. A partir de la forma en que ha sido introducida, es obvio que la velocidad de Darcy no es una velocidad real, sino un concepto abstracto. La ecuación 2.11 define  $V_D$  a partir de cantidades medibles:  $Q$ ,  $t$  y  $c$ .

#### POROSIDAD DE DARCY.

La tasa de flujo  $Q$  también puede expresarse en términos de la velocidad macroscópica  $V_M$  por:

$$Q = V_M S, \quad [\text{ec. 2.12}]$$

donde  $S$  es el área de los poros en la sección.

La porosidad de Darcy se define por:

$$\phi_D = V_D / V_M \quad [\text{ec. 2.13}]$$

y estableciendo que:

$$K_D = \phi_D K_M \quad [\text{ec. 2.14}]$$

se encuentra otra forma de la ley de Darcy:

$$V_D = -K_D i, \quad [\text{ec. 2.15}]$$

y  $K_D$  se denomina permeabilidad.

Debería subrayarse que la porosidad de Darcy tiene un significado hidráulico, ya que representa la fracción del medio poroso que realmente conduce agua por el flujo bajo presión. Es una porosidad efectiva: la medición del porcentaje de huecos en un medio poroso indica una porosidad real  $\phi$  mayor que  $\phi_D$ ; esto se explica por la ocurrencia de poros sin salida, agua adsorbida, y en forma

más general por el agua unida a la matriz sólida que toma parte en el flujo.

#### PERMEABILIDAD. [5]

El coeficiente de permeabilidad  $K_D$  siempre es mayor para un estrato en particular si éste constituye parte de la zona saturada que si está en la zona de aireación. Se puede pensar en la permeabilidad como el factor gobernante del flujo y su estimación es crítica, pero desafortunadamente es inexacta por el gran rango de variabilidad en la porosidad de los materiales naturales.

Si el diámetro del grano de un lecho es  $d$ , entonces la permeabilidad específica está dada por:

$$k = Cd^2, \quad [\text{ec. 2.16}]$$

donde  $C$  es una constante adimensional. Esta expresión no hace referencia a la viscosidad, peso específico y resistencia al corte del líquido involucrado. Es, en efecto, una simplificación y  $k$  asume dimensiones de área, las cuales se refieren al área porosa que gobierna el flujo. La fórmula para la permeabilidad de Fair-Hatch es más idónea, y esta se expresa, siendo  $\phi$  la porosidad, como:

$$k = \frac{1}{m(1-\phi)^2/\phi^3((6/100)(p/d_m))^2}, \quad [\text{ec. 2.17}]$$

donde  $m$  es el factor de empacamiento,  $\theta$  es el factor de forma del grano (6 para granos esféricos, 7.7 para granos angulosos),  $p$  es el porcentaje de retención que queda entre dos mallas adyacentes y  $d_m$  es la media geométrica de los tamaños nominales de las mallas adyacentes.

Actualmente se han diseñado ins-

tramentos de laboratorio para medir la permeabilidad, y éstos se denominan permeámetros. La permeabilidad también puede ser medida en el campo.

#### TRANSMISIVIDAD.

La descarga real de un fluido es:

$$Q = -K_D \cdot c \cdot i, \quad [\text{ec. 2.18}]$$

que puede escribirse como:

$$Q = -(K_D c) i = -T \cdot i, \quad [\text{ec. 2.19}]$$

por el establecimiento de:

$$T = K_D c, \quad [\text{ec. 2.20}]$$

donde T es la transmisividad, dimensionalmente igual a  $L^2 T^{-1}$ .

Como ejemplo, una transmisividad de  $1 \text{ m}^2/\text{seg}$  para un ancho  $i$  de  $1 \text{ m}$  y un gradiente  $i$  de  $-1$ , produce una tasa de flujo de  $1 \text{ m}^3/\text{seg}$ .

El concepto de transmisividad se usa generalmente para acuíferos confinados, donde  $c$  representa el espesor del acuífero. Permite el tratamiento de casos tridimensionales con modelos bidimensionales, especialmente con respecto a la estimación de recursos hidráulicos; estos modelos son menos adecuados para determinar el movimiento, requiriéndose entonces la ley generalizada de Darcy.

#### COEFICIENTE DE ALMACENAMIENTO.

ACUIFEROS NO CONFINADOS. El término "coeficiente de almacenamiento" se utiliza erróneamente en el caso de acuíferos no confinados, pero de

cualquier modo, se dará su definición usual en este caso.

Cuando se bombea en el acuífero, el nivel piezométrico desciende desde  $h_A$  hasta  $h_B$  (figura 2.8). Un volumen de agua  $V_W$  se extrae de la sección A. El volumen del medio poroso  $V_P$  recorrido por el manto freático es:

$$V_P = (h_A - h_B) \cdot A, \quad [\text{ec. 2.21}]$$

donde A es el área de la sección.

$$V_W = \phi_D \cdot V_P = \phi_D (h_A - h_B) \cdot A \quad [\text{ec. 2.22}]$$

y como  $\phi_D < 1$ , se tiene que  $V_W < V_P$ . El coeficiente de almacenamiento es la porosidad efectiva.

ACUIFEROS CONFINADOS. El término de coeficiente de almacenamiento, realmente se aplica sólo a los acuíferos confinados. Aunque en ambos casos los esquemas son los mismos, los mecanismos físicos son diferentes.

Siendo  $V_W$  el volumen real de agua extraída durante el recorrido bajo presión de un "volumen"  $V_P$  (figura 2.9), se define el coeficiente de almacenamiento S por:

$$V_W = S \cdot V_P, \quad [\text{ec. 2.23}]$$

siendo S adimensional.

El mecanismo puede ser explicado como sigue. Cuando el nivel piezométrico desciende, el agua queda menos comprimida, produciéndose una primera fracción de agua  $V_1$ . A partir del coeficiente de compresibilidad definido de acuerdo con:

$$\beta = -\frac{\Delta V}{V \Delta P} \quad [\text{ec. 2.24}]$$

se tiene que:

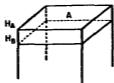


Figura 2.8. Descenso del nivel piezométrico.

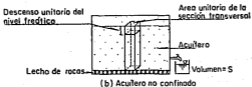
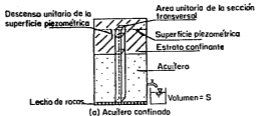


Figura 2.9. Definición del coeficiente de almacenamiento.

$$[\Delta V] = \beta [\Delta p] V \quad , \quad [\text{ec. 2.25}]$$

siendo  $\Delta V$  el volumen de agua contenido en un volumen de subsuelo  $V = A\epsilon$ , donde  $\epsilon$  es el espesor del acuífero y  $A$  es el área superficial definida en la figura 2.8. De esta manera,

$$V_1 = \beta [(h_B - h_A) \rho g] A \epsilon \phi \quad , \quad [\text{ec. 2.26}]$$

donde  $\phi$  es la porosidad del acuífero.  $A\epsilon\phi$  es el volumen de los poros. Conforme la presión disminuye, la matriz sólida se expande y empuja otra fracción de agua  $V_2$ :

$$V_2 = \alpha [(h_B - h_A) \rho g] A \epsilon (1 - \phi) \quad , \quad [\text{ec. 2.27}]$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de compresibilidad de la matriz sólida.  $A\epsilon(1-\phi)$  es el volumen de la matriz sólida. Por lo tanto, el volumen total de agua extraída es:

$$V = V_1 + V_2 = A [h_B - h_A] [\phi \beta \rho g + (1 - \phi) \alpha \rho g] c \quad [\text{ec. 2.28}]$$

y el coeficiente de almacenamiento:

$$S = [\phi \beta \rho g + (1 - \phi) \alpha \rho g] c \quad . \quad [\text{ec. 2.29}]$$

Otra forma útil de definir  $S$  es: el coeficiente de almacenamiento es el volumen de agua que un acuífero suministra o toma para almacenamiento, por unidad de área superficial de acuífero, por unidad de cambio de la carga normal a esa superficie.

#### GENERALIZACION DE LA LEY DE DARCY.

**GRADIENTE HIDRAULICO.** Considérese el nivel piezométrico  $h(x, y, z)$  en un punto  $(x, y, z)$  y la línea de flujo que pasa a través de los puntos  $A$  y  $B$  de coordenadas respectivas  $(a_1, a_2, a_3)$  y  $(b_1, b_2, b_3)$  en algún sistema de referencia. El gradiente hi-

dráulico entre  $A$  y  $B$  es el vector definido por:

$$i_{AB} = \begin{pmatrix} [h(b_1, b_2, b_3) - h(a_1, a_2, a_3)] / (b_1 - a_1) \\ [h(b_1, b_2, b_3) - h(a_1, a_2, a_3)] / (b_2 - a_2) \\ [h(b_1, b_2, b_3) - h(a_1, a_2, a_3)] / (b_3 - a_3) \end{pmatrix}$$

Si  $B$  tiende hacia  $A$ ,  $i_{AB}$  tiende hacia el vector  $i_A$ :

$$i_A = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(a_1, a_2, a_3) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(a_1, a_2, a_3) \\ \frac{\partial h}{\partial z}(a_1, a_2, a_3) \end{pmatrix}$$

$i_A$  se denominará gradiente hidráulico en  $A$ , grad  $h$ .

**LEY DE DARCY.** Siendo  $K_M$  el coeficiente de la velocidad macroscópica y  $K_D$  el coeficiente de Darcy, la ley de Darcy se generaliza en una primera etapa como:

$$V_M = -K_M \text{ grad } h \quad [\text{ec. 2.30}]$$

$$V_D = -K_D \text{ grad } h \quad [\text{ec. 2.31}]$$

y los componentes de los vectores  $V_M$  y  $V_D$  son:

$$\begin{aligned} V_{Mx} &= -K_M \frac{\partial h}{\partial x} \\ V_{My} &= -K_M \frac{\partial h}{\partial y} \\ V_{Mz} &= -K_M \frac{\partial h}{\partial z} \\ V_{Dx} &= -K_D \frac{\partial h}{\partial x} \\ V_{Dy} &= -K_D \frac{\partial h}{\partial y} \\ V_{Dz} &= -K_D \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned}$$

Si el medio no es isotrópico ni homogéneo, la ley de Darcy se generaliza adicionalmente como:

$$V_D = \begin{matrix} V_{Dx} = -K_{xx} \frac{ah}{\partial x} - K_{xy} \frac{ah}{\partial y} - K_{xz} \frac{ah}{\partial z} \\ V_{Dy} = -K_{yx} \frac{ah}{\partial x} - K_{yy} \frac{ah}{\partial y} - K_{yz} \frac{ah}{\partial z} \\ V_{Dz} = -K_{zx} \frac{ah}{\partial x} - K_{zy} \frac{ah}{\partial y} - K_{zz} \frac{ah}{\partial z} \end{matrix}$$

La forma más general de la ley de Darcy, aplicable a flujo no potencial se escribe como:

$$V_D = -\frac{k}{\mu} (\text{grad } p + \rho g \text{ grad } z) \quad [\text{ec. 2.32}]$$

Esta forma debe usarse cuando la densidad no es constante, lo cual ocurre en algunos problemas de contaminación.

$k$  es el coeficiente de permeabilidad específica, dimensionalmente igual a  $L^2$ , y  $\mu$  es la viscosidad dinámica. Si  $\rho$  es constante la densidad  $\rho$ , obtenemos la forma usual de la ley de Darcy:

$$V_D = -\frac{k \rho g}{\mu} \text{ grad } \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \\ = -K_D \text{ grad } h \quad [\text{ec. 2.33}]$$

con:

$$K_D = \frac{k \rho g}{\mu} \quad [\text{ec. 2.34}]$$

y:

$$h = \frac{p}{\rho g} + z \quad [\text{ec. 2.35}]$$

LA UNIDAD DE  $V_D$  ES  $\text{cm}^3/\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$

LA UNIDAD DE  $K_D$  ES  $\text{cm}^2/\text{seg}$



### CAPITULO 3.

## FISICA DEL MOVIMIENTO DEL AGUA SUBTERRANEA.\*\*

### LEY DE DARCY.

Darcy encontró experimentalmente qué factores gobiernan el flujo de agua a través de un filtro de arena (figura 3.1). El midió la descarga cronometrando la tasa a la cual el agua llenó un recipiente de 1 metro cuadrado de base, así como la pérdida de carga a través de la arena. Darcy definió la carga como la altura, con respecto al fondo de la arena, a la cual el agua se elevó en cada tubo con forma de U. Aunque Darcy utilizó manómetros de mercurio, siempre reportó sus datos de carga en términos de la altura equivalente de agua. Se demostrará que la carga es proporcional a la suma del potencial de presión del mercurio (o cualquier fluido) en el tubo en U, más el potencial de elevación referido al nivel de la base. La aplicación del término carga a la altura por encima del nivel del mar, del agua en un pozo, es el uso corriente en el campo en el sentido original que Darcy le dio al término.

A partir de una serie de experimentos, Darcy estableció que para un tipo dado de arena, la tasa de descarga volumétrica  $Q$  es directamente proporcional a la pérdida de carga  $h_2 - h_1$  y al área de la sección transversal,  $A$ , pero es inversamente proporcional a la diferencia de longitud de  $\ell_2 - \ell_1$ . Denominando a la constante de proporcionalidad  $K_p$  como la conductividad hidráulica, obtenemos la ley de Darcy:

$$Q = -K_p A \frac{h_2 - h_1}{\ell_2 - \ell_1} \quad [\text{ec. 3.1}]$$

El signo negativo significa que el agua subterránea fluye en la dirección de la pérdida de carga. La figura 3.2 es una gráfica que muestra los datos experimentales de Darcy. Ilustra la relación lineal entre la tasa de descarga y la pérdida de carga para dos diferentes arenas.

### POTENCIAL DE FUERZA DE HUBBERT.

El agua subterránea fluye en respuesta a las diferencias de presión y a las diferencias de elevación. Numerosas personas caen en el error de igualar la carga con la presión y despreciar a la elevación. Hubbert (1940) clarificó el concepto de potencial del agua subterránea y su relación con la carga de Darcy, derivándola a partir de principios físicos. El potencial del agua subterránea en un punto dado es la energía requerida para transportar una masa unitaria de agua desde un estado estándar de referencia hacia ese punto. Las diferencias de potencial ocasionan el flujo del agua subterránea; esto es, el agua se mueve desde un potencial mayor hacia el menor. El potencial se denomina potencial de fuerza porque su derivada espacial tiene unidades de fuerza por unidad de masa.

Se presenta ahora la derivación de Hubbert del potencial del agua subterránea. Dos potenciales de fuer

\*\* Este capítulo es una traducción y adaptación de una sección del libro "Introduction to Groundwater Modeling" de Wang y Anderson, W.H. Freeman and Company, 1982.

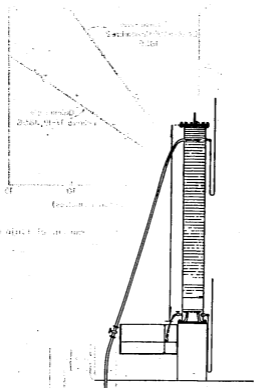


Figura 3.1. Columna de arena utilizada en el experimento de Darcy.  
 El dibujo es un facsímil de la figura 3 de la obra de  
 Henry Darcy, "Les Fontaines de la Ville de Dijon", Vica-  
 tor Palmont, París, 1856.

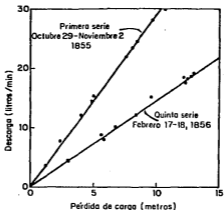


Figura 3.2. Resultados de Darcy que demuestran que el flujo es proporcional a la pérdida de carga.

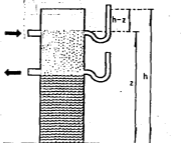


Figura 3.3. Carga total en un nunto del suelo.

za, presión y elevación, actúan por separado sobre una masa unitaria de agua subterránea. Suponga que se tiene un tubo lleno de arena saturada de agua, y que la presión es  $p$  a la altura  $z$ . La energía potencial por masa unitaria de agua, se define como el trabajo requerido para llevar una masa unitaria de agua desde una posición de referencia  $z_{ref}$  hacia su posición actual  $z$ . Si consideramos que la presión en la posición de referencia es cero, entonces la presión  $p$  coincide con la presión del manómetro.

Considérese por separado el trabajo requerido para tener la masa unitaria de agua a la presión  $p$ , y el requerido para elevar la masa unitaria a la elevación  $z$ . En el primer caso, el trabajo requerido es:

$$K = \frac{1}{m} \int_0^p V dp \quad , \quad [ec. 3.2]$$

donde  $m$  es la masa de agua y  $V$  su volumen, el cual es igual a  $m/\rho_w$ , siendo  $\rho_w$  la densidad del agua. Si se asume que el agua es incompresible, es decir, que su densidad es la misma a cualquier presión, entonces el trabajo requerido por masa unitaria para elevar la presión del agua a  $p$  es  $p/\rho_w$ . Por otra parte, el trabajo requerido por masa unitaria para elevar el fluido a la elevación  $z$  es  $p(z-z_{ref})$ , siendo  $g$  la aceleración de la gravedad. Por lo tanto, el potencial total del agua subterránea es:

$$\phi = \frac{p}{\rho_w} + g(z-z_{ref}) \quad [ec. 3.3]$$

Se ha expresado el potencial en un lenguaje para el flujo del agua subterránea, en términos físicos fundamentales. ¿Cómo se relaciona el potencial  $\phi$  con la carga de Darcy  $h$ ?

¿Cómo se relacionan los términos de la ecuación anterior con las cantidades medidas físicamente en el experimento de Darcy? Observe la figura 3.3. Sea  $z_{ref}$  la línea de referencia para la elevación. Entonces la presión  $p$  del agua a una elevación  $z$  es  $p = \rho_w g(h-z)$ . Si esta expresión se sustituye en la ecuación 3.3 y si  $z_{ref}=0$ , entonces:

$$0 = gh \quad [ec. 3.4]$$

No olvide que  $\phi$  y  $h$  son funciones de la elevación  $z$ . La ecuación 3.4 dice que el potencial  $\phi$  derivado a partir de la mecánica de fluidos, es directamente proporcional a la carga experimental de Darcy. En efecto, puede pensarse en la carga como un potencial expresado en términos de energía por unidad de peso de agua, mientras que el potencial  $\phi$  de Hubbert se expresa en términos de energía por unidad de masa. También puede considerarse por separado los términos de carga por presión y carga por elevación, los cuales tienen unidades de energía por unidad de peso; esto es:

$$h = \frac{p}{\rho_w g} + z \quad [ec. 3.5]$$

donde  $h$  es la carga total,  $p/\rho_w g$  es la carga por presión, y  $z$  es la carga por elevación. La pérdida de carga en la ley de Darcy es proporcional a la pérdida de energía que resulta de la fricción del fluido al chocar contra las paredes de los canales porosos. La ley de Darcy es una expresión del hecho de que el agua subterránea se mueve en una dirección en que disminuye la energía desde una carga mayor hacia una menor.

## LA LEY DE DARCY EN TRES DIMENSIONES

Ahora se desea generalizar el potencial para que sea una función de las tres coordenadas espaciales, o sea,  $h = h(x, y, z)$ , así como también  $dh/dt$ , la tasa de cambio de carga con respecto a la posición. Hasta aquí se ha considerado sólo la dirección vertical, donde  $h = h(z)$ . Supóngase un medio poroso isotropo y que la tasa de descarga  $Q$  no depende del tiempo.

Defínase  $q = Q/A$  como la tasa volumétrica de flujo por unidad de área. La cantidad  $q$  se denomina descarga específica. En el límite, con forme la pérdida de carga  $h_2 - h_1$  ocurre en un intervalo cada vez más pequeño  $t_2 - t_1$ , se puede escribir la ley de Darcy en forma diferencial:

$$q = -k_p \frac{dh}{dz} \quad [\text{ec. 3.6}]$$

La descarga específica  $q$  tiene unidades de velocidad y se conoce también como velocidad de Darcy. La velocidad aparente es  $q/\phi$ , siendo  $\phi$  la porosidad.

La generalización tridimensional de la ley de Darcy requiere que la forma unidimensional, ecuación 3.6, sea cierta para cada uno de los componentes del flujo  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned} q_x &= -k_p \frac{\partial h}{\partial x} \\ q_y &= -k_p \frac{\partial h}{\partial y} \\ q_z &= -k_p \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \quad [\text{ec. 3.7}]$$

Note que las derivadas espaciales son derivadas parciales porque ahora la carga es una función de las tres coordenadas espaciales. La ecuación 3.7 puede escribirse en la

forma abreviada de la notación vectorial como sigue:

$$q = -k_p \text{grad } h \quad [\text{ec. 3.8}]$$

El vector de velocidad  $q$  tiene los componentes  $q_x, q_y$  y  $q_z$ , y el vector del gradiente  $\text{grad } h$  tiene los componentes  $\partial h/\partial x, \partial h/\partial y$  y  $\partial h/\partial z$ . Debido a que cada componente de  $q$  es un múltiplo escalar  $k_p$  de los componentes correspondientes de  $(-\text{grad } h)$ , ambos vectores  $q$  y  $(-\text{grad } h)$  apuntan en la misma dirección. Esta conclusión se obtiene de la consideración de isotropía. Para una dirección arbitraria en un medio anisótropo, el vector de velocidad  $q$  generalmente no apunta en la misma dirección que  $(-\text{grad } h)$ .

Considérese una situación bidimensional  $h = h(x, y)$  para ilustrar las propiedades del gradiente de carga. Las líneas de contorno de la carga se definen por la condición:

$$\Delta h = \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial h}{\partial y} \Delta y = 0 \quad [\text{ec. 3.9}]$$

La pendiente de la tangente  $\Delta y/\Delta x$  a la línea de contorno es igual a  $-(\partial h/\partial x)/(\partial h/\partial y)$ . La pendiente de  $\text{grad } h$ , por otra parte, es igual a la relación de sus componentes  $(\partial h/\partial y)/(\partial h/\partial x)$ . El producto de la pendiente del vector del gradiente por la dirección de la línea de contorno en cada punto es 1 negativo. Por lo tanto, el vector del gradiente es perpendicular al contorno de carga constante. El flujo es perpendicular a las líneas de contorno por que, para un medio isotropo, el vector de velocidad tiene la dirección contraria o negativa del vector del gradiente.

**ECUACION DE CONTINUIDAD PARA EL FLUJO EN ESTADO ESTACIONARIO.**

La ley de Darcy, ecuación 3.8, resume mucho de la física del flujo del agua subterránea, al relacionar el vector de velocidad con el gradiente del potencial. La continuidad o conservación es una segunda ley importante. Para condiciones de estado estacionario, la continuidad requiere que la cantidad de agua que entra en un volumen elemental representativo sea igual a la cantidad que sale de él. La existencia de condiciones de estado estacionario implica que la carga es independiente del tiempo. Por el momento, se harán otras dos suposiciones simplificatorias. Primero, se asumirá que el agua es incompresible. Si no lo fuera, podría comprimirse y almacenarse en el volumen elemental. La masa siempre se conserva, pero el volumen sólo se conserva para el caso de un líquido incompresible. Segundo, se asumirá que el volumen elemental no contiene fuentes ni sumideros. Esto significa que no se permitirá la adición o remoción de agua del acuífero por medio de pozos o por precipitación o transpiración, por citar algunos ejemplos.

Se empezará el análisis considerando el flujo de entrada y salida en un volumen elemental cúbico, cuyos lados son de longitud  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$  (figura 3.4). El volumen del cubo es  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ . El balance de masa se calcula sumando, para cada dirección, las resultantes de los componentes. Por ejemplo, el componente  $q_x$  representa la tasa volumétrica de flujo por unidad de área a través de la cara izquierda del cubo. La descarga a través de la cara izquierda, o la derecha, es el producto de la tasa de flujo por unidad de área por

el área  $\Delta x \Delta z$  de la cara a través de la cual ocurre el flujo. En la cara derecha,  $q_x$  es diferente por una cantidad  $(\partial q_x / \partial x) \Delta x$ . Por lo tanto, el cambio neto de la tasa de descarga en la dirección  $x$  es:

$$(\partial q_x / \partial x) \Delta x (\Delta y \Delta z) = (\partial q_x / \partial x) \Delta V.$$

La convención de signos indica que si la derivada es positiva, el flujo neto del agua es hacia afuera. Se puede realizar un análisis similar para las direcciones  $y$  y  $z$ , a fin de obtener el cambio neto de la tasa de descarga, que para la dirección  $x$  es  $(\partial q_x / \partial x) \Delta V$  mientras que para  $z$  es  $(\partial q_z / \partial z) \Delta V$ . La suma:

$$(\partial q_x / \partial x) \Delta V + (\partial q_y / \partial y) \Delta V + (\partial q_z / \partial z) \Delta V$$

debe ser igual a cero. Podemos dividir por  $\Delta V$  y obtener así la ecuación de continuidad para condiciones de estado estacionario:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0. \quad [\text{ec. 3.10}]$$

El lado izquierdo de la ecuación 3.10 representa el cambio neto de la tasa volumétrica del flujo por unidad de volumen. Se denomina divergencia de  $q$  y se escribe:

$$\text{div } q = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}. \quad [\text{ec. 3.11}]$$

La divergencia es una operación que se ejecuta sobre un vector y produce una cantidad escalar. Por el otro lado, el gradiente es una operación que se ejecuta sobre un escalar y produce una cantidad vectorial.

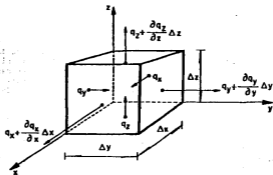


Figura 3.4. Análisis del flujo volumétrico neto, por unidad de tiempo, a través de un cubo infinitesimal.

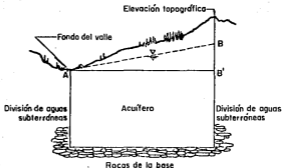


Figura 3.5. Representación de las fronteras del sistema regional bidimensional de flujo de aguas subterráneas.

## LA ECUACION DE LAPLACE.

La ecuación de Laplace combina la ley de Darcy y la ecuación de continuidad en una ecuación diferencial parcial de segundo orden sencilla. La ley de Darcy se sustituye en cada uno de los componentes de la ecuación 3.10:

$$\frac{\partial}{\partial x}(-K\frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(-K\frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(-K\frac{\partial h}{\partial z}) = 0, \quad [\text{ec. 3.12}]$$

con  $K_D = K(x, y, z)$ . Si se asume que  $K$  es independiente de  $x, y, z$ , es decir, que la región es homogénea o isótropa, entonces la ecuación 3.12 se convierte en:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0. \quad [\text{ec. 3.13}]$$

La ecuación 3.13 es la ecuación de Laplace, expresión gobernante del flujo del agua subterránea a través de un acuífero isótropo y homogéneo, bajo condiciones de estado estacionario. La ecuación de Laplace se utiliza también en otras ramas de la física. Por ejemplo, es la ecuación que gobierna la conducción del calor en un sólido bajo condiciones de estado estacionario.

**CONDICIONES DE FRONTERA.** ¿Qué significa resolver la ecuación de Laplace? La cantidad física de interés es la carga como una función de  $x, y, z$ . La ecuación de Laplace solamente enuncia que la suma de las segundas derivadas parciales de  $h$  con respecto a  $x, y, z$  es igual a cero. La solución de la ecuación de Laplace requiere la especificación de condiciones de frontera que limiten el problema y tenga así una solución (ai-

ca. Los diferentes tipos de condiciones de frontera son:

i) cuando se conoce la carga en las superficies que delimitan la región de flujo (condiciones de Dirichlet);

ii) cuando se conoce el flujo a través de las superficies que delimitan la región (condiciones de Neumann);

iii) cuando se conoce alguna combinación de las condiciones anteriores para las superficies que delimitan la región de estudio (condiciones mixtas).

El hidrólogo del subsuelo algunas veces debe aproximar las condiciones de frontera para limitar la región de dominio del problema. Si se especifican condiciones de frontera inconsistentes o incompletas, el problema mismo queda indefinido.

## SISTEMA REGIONAL DE FLUJO DE AGUAS SUBTERRANEAS.

Como ejemplo de un modelo para agua subterránea que involucre la ecuación de Laplace junto con adecuadas condiciones de frontera, se presenta enseguida un problema regional de hidráulica del subsuelo, descrito por Toth (1962). El fue capaz de obtener conclusiones acerca de la configuración de sistemas regionales de aguas subterráneas, utilizando un modelo matemático.

La figura 3.5 representa la sección transversal de una pequeña cuenca, limitada por un lado por una elevación topográfica que marca una división regional de agua subterránea,



y por el otro lado por una corriente principal que constituye un área de descarga de agua al subsuelo y que marca otra división regional de agua subterránea. Se asume que el acuífero consiste de material poroso homogéneo e isotrópico, situado encima de roca impermeable.

Primero se considerarán las condiciones de frontera. Las divisiones izquierda y derecha se pueden representar matemáticamente como impermeables, o fronteras de no flujo. Aunque no exista una barrera física, una división de agua subterránea tiene el mismo efecto que una barrera impermeable porque el agua subterránea no la cruza. Esto es porque el agua subterránea a la derecha del fondo del valle, descarga en el punto A, mientras que al otro lado de la elevación topográfica, el agua fluye más allá del punto B. La frontera inferior también se trata de una frontera de no flujo, porque la roca impermeable de la base forma una barrera física contra el flujo. La frontera superior del modelo matemático es la línea horizontal AB' aun cuando el nivel freático del sistema físico se sitúa por encima de AB'. De esta manera, el dominio rectangular del problema en el modelo matemático constituye una aproximación de la forma real de la región saturada de flujo. A lo largo de la frontera AB', la carga se considera igual a la altura del nivel freático y la configuración de este nivel se asume como una línea recta.

Toth (1962, 1963) encontró que este modelo matemático es una representación realista de la configuración general del sistema de flujo donde la topografía es dominante y la pendiente del nivel freático es suave. Toth (1963) también utilizó

una expresión más general para la configuración del nivel freático en una región de topografía suavemente ondulada.

Se debe expresar en términos matemáticos las condiciones de frontera mostradas en la figura 3.5. El sistema de coordenadas se define en la figura 3.6. Se requiere una ecuación para cada frontera. Considérese primero la frontera superior. La frontera se localiza en  $y = y_0$  para  $x$  dentro del rango de 0 a  $s$ , la distribución de la carga a lo largo de esta frontera se asume que es lineal y la ecuación para una variación lineal tal que  $h(0, y_0) = y_0$  es  $h(x, y_0) = cx + y_0$ , para  $0 \leq x \leq s$ , donde  $c$  es la pendiente del nivel freático. La especificación de la carga a lo largo de la frontera superior constituye una condición de frontera de Dirichlet.

Las otras tres condiciones de frontera son para fronteras de no flujo. La ley de Darcy relaciona el flujo al gradiente de la carga. A lo largo de una frontera vertical de no flujo,  $q_x = 0$  implica que  $\partial h / \partial x = 0$ , y a lo largo de una frontera horizontal de no flujo,  $q_y = 0$  implica que  $\partial h / \partial y = 0$ . La especificación del flujo a través de estas tres fronteras constituye condiciones de frontera de Neumann. En este ejemplo, se han especificado tanto condiciones de carga como de flujo, por lo que se trata de un problema mixto. El juego completo de condiciones de frontera se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Arriba:} & \quad h(x, y_0) = cx + y_0; \quad 0 \leq x \leq s \\ \text{Abajo:} & \quad \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad 0 \leq x \leq s \\ \text{Izquierda:} & \quad \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad 0 \leq y \leq y_0 \\ \text{Derecha:} & \quad \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=s} = 0; \quad 0 \leq y \leq y_0 \end{aligned}$$

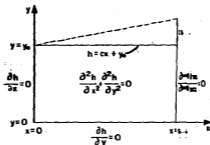


Figura 3.6. Modelo matemático del sistema regional mostrado en la figura 3.5.

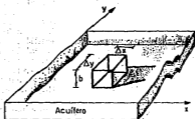


Figura 3.7. Acuifero horizontal bidimensional que contiene un volumen elemental representativo, para la derivación de la ecuación de Poisson.

Ahora considérese la ecuación gobernante. Sabemos que la ecuación de Laplace simula el flujo del agua subterránea en un acuífero homogéneo e isótropo si no hay acumulación ni pérdida de agua dentro del sistema. Toth asumió que en una cuenca subsarrollada las fluctuaciones del nivel freático eran pequeñas sobre una base anual. Esto es, él utilizó una posición promedio del nivel freático y asumió que el sistema estaba en estado estacionario sobre una base anual. La posición del nivel freático al principio del año era la misma que al final; no hubo acumulación o pérdida neta de agua del sistema. Por lo tanto, con esta idealización, la ecuación bidimensional de Laplace,  $\partial^2 h/\partial x^2 + \partial^2 h/\partial y^2 = 0$ , es la ecuación gobernante requerida. El modelo matemático, que consta de la ecuación gobernante junto con las cuatro condiciones de frontera, se resume en la figura 3.6.

Para resolver el modelo se requiere el cálculo de los valores de la carga en cada punto del sistema. Usando las técnicas del Cálculo Diferencial e Integral, algunas veces es posible escribir una expresión para la carga como una función de las coordenadas del espacio. Es así que obtenemos una solución analítica. Por ejemplo, Toth (1962) presentó una solución analítica para el modelo del sistema regional de flujo de aguas subterráneas, que ya se discutió, la cual es:

$$h(x,y) = y_1 + \frac{CS}{2} - \frac{4CS}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} F_m \quad \text{[ec. 3.14]}$$

en donde:

$$F_m = \frac{\cos[(2m+1)\pi x/s] \cosh[(2m+1)\pi y/s]}{(2m+1)^2 \cosh[(2m+1)\pi y_0/s]}$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

## LA ECUACION DE POISSON.

La recarga por precipitación y la descarga por un pozo son ejemplos de una fuente distribuida y de un sumidero puntual de aguas subterráneas, respectivamente. La adición o sustracción de agua subterránea significa que la divergencia de la tasa volumétrica de flujo de agua hacia los alrededores, por unidad de volumen de acuífero, no es igual a cero en alguna parte dentro del dominio del problema, por lo que la ecuación de Laplace ya no es la ecuación gobernante.

Considérese un acuífero horizontal bidimensional, cuyo espesor es uniforme e igual a  $b$  (figura 3.7). La primera etapa en la derivación de una nueva ecuación gobernante, es hacer un análisis de continuidad similar al descrito anteriormente. Considérese el volumen elemental dentro del acuífero mostrado en la figura 3.7. Sea  $R(x,y)$  el volumen de agua añadida, por unidad de tiempo por unidad de área de acuífero, al volumen infinitesimal alrededor del punto  $(x,y)$ . Para condiciones de estado estacionario, la tasa volumétrica de flujo de agua hacia los alrededores debe ser igual a  $R(x,y)\Delta x\Delta y$ . Esto significa que:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x(\Delta y) + \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta y(\Delta x) = R(x,y)\Delta x\Delta y \quad \text{[ec. 3.15]}$$

Se usará la ley de Darcy para substituir  $q_x$  y  $q_y$ . También se incorporará la transmisividad  $T$  que es el producto de la conductividad hidráulica  $K$  por el espesor  $b$  del acuífero. Haciendo estas substituciones y dividiendo todo por  $\Delta x\Delta y$ , se obtie-

ne la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{R(x,y)}{T} \quad [\text{ec. 3.16}]$$

Si  $R(x,y)$  es igual a cero en cualquier parte del dominio del problema, la ecuación de Poisson se reduce a la ecuación de Laplace. El término  $R(x,y)$  se usa para simular tanto fuentes (valores positivos) como sumideros (valores negativos), ya sean puntuales o distribuidas, y tiene dimensiones de longitud por unidad de tiempo.

#### RECARGA DE ISLAS.

Jacob (1943) consideró la versión unidimensional de la ecuación 3.16, con  $R$  igual a una constante, para simular el flujo de agua subterránea debajo de Long Island, New York (figura 3.8). La ecuación gobernante es:

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = -\frac{R}{T} \quad [\text{ec. 3.17}]$$

Jacob utilizó esta ecuación gobernante para simular un acuífero confinado asumiendo que el espesor realmente saturado  $h+b$  casi era igual a la distancia  $b$ . Esto es, asumió que  $b \gg h$ . También supuso en el modelo que el nivel freático intersecta al nivel del mar en los bordes de la isla y que el perfil del nivel freático es simétrico dentro de la isla. Por lo tanto, sólo necesitamos considerar la mitad del dominio del problema, ya sea  $0 \leq x \leq b$  ó  $-x \leq 0$ . Si se considera la parte derecha del dominio del problema, las condiciones de frontera son  $h = 0$  para  $x = b$  y  $dh/dx = 0$  para  $x = 0$ . El modelo se puede resolver analíticamente por integración doble respecto a  $x$ . La so-

lución general es:

$$h(x) = -\frac{R}{T} \frac{x^2}{2} + a_1 x + a_2, \quad [\text{ec. 3.18}]$$

donde  $a_1$  y  $a_2$  son constantes arbitrarias que se pueden determinar a partir de las condiciones de frontera. La condición para  $x = 0$  se utiliza para encontrar que  $a_1 = 0$ , y la condición para  $x = b$  se usa para encontrar que  $a_2 = Rb^2/2T$ . Por lo tanto, la solución del modelo es:

$$h(x) = \frac{R}{2T} (b^2 - x^2) \quad [\text{ec. 3.19}]$$

Si se calcula  $h(x,y)$  dados los valores de  $T$  y  $R$ , trabajamos en lo que se conoce como problema directo o hacia adelante. El cálculo de  $R$  dada la carga en un punto, es el problema inverso o hacia atrás. La ventaja de la solución analítica para el problema unidimensional es que el problema inverso se puede resolver por simple álgebra, y no se requiere ningún procedimiento de ensayo y error. Pero, en el caso bidimensional, el problema inverso se tiene que resolver encontrando la solución para el problema directo varias veces ensayando valores cada vez mejores de  $R$ .

Otro tipo de problema inverso involucra el cálculo de valores para la transmisividad o para la conductividad hidráulica, a partir de valores medidos de las cargas. Este problema inverso podría ser resuelto también por ensayo y error. Sin embargo, se ha demostrado que varias diferentes distribuciones de transmisividad pueden generar la misma distribución de las cargas, porque éstas no son particularmente sensibles a los cambios en la transmisividad (Gillham and Farvolden, 1974). Recientemente varios investigadores están intentando formular maneras más

eficientes para solucionar el problema inverso para las transmisividades. Para mayores detalles consultar Cooley (1977, 1979), Neumann (1973), Neumann y Yakowitz (1979), Neumann et al. (1980), y Neumann (1980).

#### DESCARGA DE POZOS (ACUIFERO CONFINADO).

Las fuentes y sumideros se representan matemáticamente en la ecuación de Poisson por la función de recarga  $R(x,y)$ . Se usará la ecuación de Poisson para describir la descarga de un pozo que penetra completamente en un acuífero horizontal isotrópico de espesor  $b$ . Si se asume que el pozo tiene agujeros a lo largo del espesor completo del acuífero, entonces el flujo será horizontal y bidimensional. Debido a que el pozo está localizado en un solo punto  $(x_0, y_0)$ , constituye un sumidero puntual (o fuente si se trata de un pozo de inyección), mientras que la recarga por precipitación pluvial es una fuente de área.

Se presume para el análisis que el eje del pozo está centrado dentro de un volumen infinitesimal  $dx dy$  tal como se muestra en la figura 3.7. Supóngase que el pozo bombea a una tasa  $Q$ , donde  $Q$  tiene unidades de volumen/tiempo. Entonces, la función de recarga para el área superficial infinitesimal alrededor de  $(x_0, y_0)$  es:

$$R(x_0, y_0) = -\frac{Q}{\Delta x \Delta y} \quad [\text{ec. 3.20}]$$

porque  $R(x,y)$  es el volumen de recarga por unidad de tiempo por unidad de área de acuífero. El signo negativo en la ecuación 3.20 existe por la convención establecida cuando se derivó la ecuación de Poisson (ecuación

3.16) de que las descargas del acuífero son negativas.  $R(x,y)$  es igual a cero fuera del volumen infinitesimal que contiene al pozo. Así se tiene completamente definido  $R(x,y)$  en el dominio del problema y se ha descrito matemáticamente la descarga de un pozo de penetración completa, en términos de la ecuación de Poisson.

La solución analítica está dada por la ecuación de Thiem, la cual es para el flujo radial de un pozo que bombea bajo condiciones de estado estacionario. La ecuación de Thiem es:

$$h(r) - h(r_c) = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r}{r_c}, \quad [\text{ec. 3.21}]$$

donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $r_c$  es la distancia a la cual el nivel del agua permanece inalterado por la descarga del pozo.

#### ACUIFERO NO CONFINADO BAJO LAS HIPOTESIS DE DUPUIT.

Si un acuífero es no confinado, su espesor saturado varía con la altura del nivel freático. Considérese el flujo unidimensional a través de un acuífero no confinado. El flujo es unidimensional por las suposiciones de Dupuit de que:

- i) el flujo es horizontal, y
- ii) el gradiente hidráulico es igual a la pendiente de la superficie libre.

Estas consideraciones implican la ausencia de una cara permeable en la frontera superior. Para derivar la ecuación gobernante del flujo no confinado con las suposiciones de Dupuit, primero se hará un

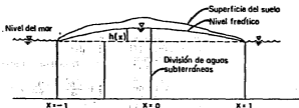


Figura 3.8. Modelo unidimensional de Long Island, New York (Jacob, 1943).

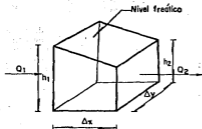


Figura 3.9. Volumen infinitesimal de un acuífero no confinado.

$Q_1$  y  $Q_2$ : Tasa volumétrica del flujo a través del elemento

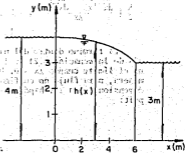


Figura 3.10. Ilustración esquemática del nivel freático y de las condiciones de frontera para el ejemplo de infiltración a través de una presa de tierra, la cual no se muestra explícitamente en la figura.

análisis de continuidad para una rebanada infinitesimal de acuífero (figura 3.9). La rebanada está orientada perpendicularmente al flujo. La parte superior del volumen representativo es el manto freático y tiene una altura  $h(x) = h_1$  en la cara izquierda y una altura  $h(x) = h_2$  en la cara derecha. La suposición de Dupuit de flujo horizontal implica que la pendiente del nivel freático debe ser pequeña. Sean  $Q_1$  y  $Q_2$  las tasas volumétricas de flujo a través de las caras izquierda y derecha, respectivamente. Aplicando la ley de Darcy y multiplicando por el área de cada cara, tenemos:

$$Q_2 - Q_1 = -K\Delta y \left[ h_2 \frac{dh}{dx} \Big|_{x_2} - h_1 \frac{dh}{dx} \Big|_{x_1} \right] \quad [\text{ec. 3.22}]$$

Si  $R$  es la tasa de recarga en la parte superior del volumen representativo, entonces por la continuidad:

$$Q_2 - Q_1 = R\Delta x\Delta y \quad [\text{ec. 3.23}]$$

Cada término dentro del paréntesis de la ecuación 3.22 se puede expresar como una derivada de  $h^2$ , porque  $d(h^2)/dx = 2h(dh/dx)$ . Después de dividir las ecuaciones 3.22 y 3.23 por  $\Delta x\Delta y$ , se tiene que:

$$-\frac{K}{2} \left[ \frac{dh^2}{dx} \Big|_{x_2} - \frac{dh^2}{dx} \Big|_{x_1} \right] = R \quad [\text{ec. 3.24}]$$

El término dentro del paréntesis de la ecuación 3.24 es  $d^2h^2/dx^2$  en el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . De esta manera, para flujo no confinado unidimensional con las hipótesis de Dupuit:

$$\frac{K}{2} \frac{d^2h^2}{dx^2} = -R \quad [\text{ec. 3.25}]$$

Para flujo bidimensional:

$$\frac{K}{2} \left( \frac{d^2h^2}{dx^2} + \frac{d^2h^2}{dy^2} \right) = -R \quad [\text{ec. 3.26}]$$

La ecuación 3.26 se puede convertir en la ecuación de Poisson, ecuación (3.16), si se hace el cambio de variable  $u = h^2$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2R}{K} \quad [\text{ec. 3.27}]$$

Las condiciones de frontera deben ser recalculadas en términos de  $u$  en lugar de  $h$ . Después de que se ha obtenido la solución en función de  $u$ , la carga se obtiene extrayendo la raíz cuadrada de  $u$ .

#### INFILTRACION EN PRESAS.

Un problema clásico de sistemas de flujo no confinado se localiza en la frontera superior de la zona saturada en una presa de tierra. En la sección transversal mostrada en la figura 3.10, el agua del depósito tiene una elevación de 4 m y fuera de la presa, de 3 m. El fondo de la presa en  $y = 0$  descansa sobre roca impermeable. En esta sección se resolverá la versión unidimensional de este problema, usando la aproximación de Dupuit de que el flujo es horizontal a través de la presa y que la frontera superior saturada intersecta los niveles de los estanques en los dos extremos de la presa.

La formulación exacta de este problema de infiltración requiere que la superficie superior se trate como una frontera de no flujo y que la

carga en cada punto de esta frontera sea igual a su elevación.

En una dimensión, la ecuación gobernante para este problema es la 3.25 con  $R = 0$ . Las condiciones de frontera son  $h = 4$  m para  $x = 0$ , y  $h = 3$  m para  $x = 6$  m. La solución analítica se puede obtener por integración de  $d^2h^2/dx^2 = 0$ , conduciendo a la solución general  $h^2 = a_1x + a_2$ , donde  $a_1$  y  $a_2$  son constantes determinadas por la substitución de las condiciones de frontera. La solución analítica final para las condiciones de frontera usadas en este problema, es:

$$h(x) = \sqrt{-\frac{7x}{6} + 16}. \quad [\text{ec. 3.28}]$$

#### DESCARGA DE POZOS (ACUIFERO NO CONFINADO).

La ecuación gobernante es la 3.26. Una diferencia con respecto al caso confinado es el hecho de que el producto de la conductividad hidráulica por el espesor saturado no es una constante para un acuífero no confinado. Para problemas en los cuales la descarga es pequeña comparada con el espesor del acuífero, el producto  $Kh$  casi es constante e igual al valor de la transmisividad del acuífero confinado equivalente. La solución analítica es:

$$h^2(r) - h^2(r_e) = \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{r}{r_e}, [\text{ec. 3.29}]$$

donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $r_e$  es el radio de influencia de la descarga.

#### ECUACION PARA FLUJO TRANSITORIO.

Un problema transitorio es aquél en el cual la variable desconocida es dependiente del tiempo. Esto es, la carga cambia con el tiempo en

cualquier problema transitorio. Estos problemas también se denominan -denominados del tiempo, inestables, en desequilibrio, o en estado no estacionario. En la derivación de la ecuación gobernante para condiciones transitorias, la ecuación de continuidad se modifica de tal forma que la tasa volumétrica de salida es igual a la tasa volumétrica de entrada más la tasa de liberación de agua de almacenamiento. Esta expresión involucra el uso del coeficiente de almacenamiento  $S$ , el cual representa el volumen de agua liberada del almacenamiento, por unidad de área de acuífero por unidad de descenso de la carga. Esto es:

$$S = -\frac{\Delta V_w}{\Delta x \Delta y \Delta h} \quad [\text{ec. 3.30}]$$

donde  $\Delta V_w$  es el volumen de agua liberada del almacenamiento dentro del volumen elemental cuya área es  $\Delta x \Delta y$ , y cuyo espesor es  $b$ . La presencia del signo menos en la ecuación 3.30 se explica de acuerdo con la siguiente convención de signos. Cuando el agua es liberada del almacenamiento,  $\Delta V_w$  es positivo y  $\Delta h$  es negativo; cuando el agua es recogida para almacenamiento,  $\Delta V_w$  es negativo y  $\Delta h$  es positivo. La tasa de liberación de agua del almacenamiento es  $\Delta V_w / \Delta t$  y se puede escribir como  $-S \Delta x \Delta y (dh / \Delta t)$  y conforme  $\Delta t \rightarrow 0$ , esta expresión se convierte en  $-S (dh / \Delta t) (\Delta x \Delta y)$ . Por lo tanto, la forma de la ecuación de continuidad, ecuación 3.15, para condiciones transitorias es:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x (\Delta y) + \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta y (\Delta x) = R(x, y, t) \Delta x \Delta y - S \frac{\partial h}{\partial t} (\Delta x \Delta y).$$

[ec. 3.31]



Substituyendo la ley de Darcy en  $q_x$  y  $q_y$ , y dividiendo todo por  $-T\Delta x\Delta y$ , siendo  $T = Kb$ , se obtiene la ecuación para flujo transitorio:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = S \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{R(x,y,t)}{T} \quad [\text{ec. 3.32}]$$

### DESCARGA TRANSITORIA DE POZOS (PROBLEMA DE THEIS).

Considérese un problema transitorio de descarga de un pozo, el cual está bombeando a una tasa constante  $Q$ , en un acuífero confinado de extensa área donde la superficie piezométrica inicialmente es horizontal e igual a  $h_0$ . Este problema es uno de los que resolvió Theis (1935). La pérdida de carga a una distancia radial  $r$  del pozo es:

$$h_0 - h = \frac{Q}{4\pi T} W(u), \quad [\text{ec. 3.33}]$$

donde:

$$W(u) = \int_u^\infty \frac{e^{-\psi}}{\psi} d\psi \quad [\text{ec. 3.34}]$$

y:

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} \quad [\text{ec. 3.35}]$$

$W(u)$  se denomina la función de pozo y puede encontrarse en forma tabular en la mayoría de los textos introductorios de hidrogeología o hidráulica de pozos (por ejemplo, Freeze and Cherry, 1979, p. 318).

La aproximación de Jacob a la solución de Theis es:

$$h_0 - h = \frac{Q}{4\pi T} \ln \left( \frac{2.25 T t}{r^2 S} \right) \quad [\text{ec. 3.36}]$$

En la aproximación de Jacob, la función de pozo se aproxima por  $w(u) = -0.5772 - \ln u$ , para  $u$  menor de 0.01.

### HIPOTESIS DE DUPUIT Y CONDICIONES TRANSITORIAS PARA ACUIFEROS NO CONFINADOS.

Para derivar la ecuación gobernante para flujo transitorio no confinado, se debe incorporar en la ecuación 3.26 un término que explique los cambios en el almacenamiento del agua. Este término es  $S(\partial h/\partial t)$ , donde  $S$  es el coeficiente de almacenamiento no confinado definido por la ecuación 3.30. La ecuación gobernante para flujo transitorio en un acuífero no confinado es:

$$\frac{K}{Z} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} - R(x,y,t). \quad [\text{ec. 3.37}]$$

El coeficiente de almacenamiento para un acuífero no confinado también se denomina productividad específica. Es 100 a 1000 veces mayor que el de un acuífero confinado, debido a los cambios de almacenamiento que resultan de la deshidratación o saturación del acuífero, mientras que en un acuífero confinado el agua es liberada debido a la compresión del acuífero y, en menor grado, en respuesta a la disminución de la presión.

Otra vez se hace el cambio de variable  $u = h^2$ . En virtud de que  $\partial u/\partial t = 2h(\partial h/\partial t)$ , se puede reescribir la ecuación 3.37 como:

$$\frac{K}{Z} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{S}{2h} \frac{\partial u}{\partial t} - R(x,y,t). \quad [\text{ec. 3.38}]$$

**FLUJO TRANSITORIO EN ACUIFEROS ANISOTROPOS Y HETEROGENEOS.**

Los dos modelos bidimensionales más ampliamente usados y bien documentados, son los desarrollados por Prickett y Lonquist (1971) y Trescott et al. (1976) para flujo del agua subterránea. Ambos modelos resuelven una forma de la ecuación para flujo transitorio que permite la consideración de heterogeneidad y anisotropía:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} - R(x,y,t) \quad [\text{ec. 3.39}]$$

Aunque sólo es estrictamente válida para acuíferos confinados, la ecuación 3.39 también puede usarse para acuíferos no confinados permitiendo que  $T_x$  y  $T_y$  varíen con el tiempo conforme el espesor saturado cambia.

## CAPITULO 4.

### QUIMICA DEL AGUA SUBTERRANEA. \*\*

#### CONSTITUYENTES QUIMICOS.

El agua es solvente para muchas sales y algunos materiales orgánicos. El agua es efectiva en la disolución de las sales debido a su muy alta constante dieléctrica, y porque sus moléculas tienden a combinarse con iones para formar iones hidratados. La formación de éstos promueve la estabilidad de los iones en solución acuosa. Cada ion cargado positivamente, conocido como catión, atrae los extremos negativos de las moléculas polares del agua, uniéndose varias moléculas en arreglos relativamente estables. El número de moléculas unidas a cada catión se determina por el tamaño del catión. Por ejemplo, el pequeño catión  $Be^{2+}$  forma el ion hidratado  $Be(H_2O)_6^{2+}$ . Iones más grandes como  $Mg^{2+}$  ó  $Al^{3+}$ , tienen formas hidratadas como  $Mg(H_2O)_6^{2+}$  y  $Al(H_2O)_6^{3+}$ . Las especies cargadas negativamente, conocidas como aniones, exhiben una tendencia menor a la hidratación. En este caso, los aniones atraen los extremos positivos de las moléculas polares del agua. Los tamaños de los iones en sus formas hidratadas, son importantes con respecto a muchos procesos que ocurren en el ambiente del agua subterránea.

Como resultado de las interacciones químicas y bioquímicas entre el agua subterránea y los materiales geológicos a través de los cuales fluye, y en un menor grado debido a las contribuciones de la atmósfera y cuerpos de agua superficial, el agua

subterránea contiene una amplia variedad de constituyentes químicos - inorgánicos disueltos en varias concentraciones. La concentración de sólidos disueltos totales (SDT) en el agua subterránea, se determina por el peso del residuo sólido obtenido por evaporación hasta sequedad de un volumen medido de muestra filtrada. La concentración de SDT en el agua subterránea varía en muchos órdenes de magnitud. Un esquema simple, pero ampliamente usado, para la clasificación de estas aguas se presenta en la tabla 4.1. Para poner en perspectiva los rangos de concentración, puede ser útil notar que el agua que contiene más de 2000-3000 mg/l de SDT generalmente es demasiado salada para beberse. Los SDT del agua de mar son aproximadamente 35 000 mg/l.

TABLA 4.1. CLASIFICACION SIMPLE DEL AGUA SUBTERRANEA SEGUN SU CONTENIDO DE SOLIDOS DISUELTOS TOTALES.

CATEGORIA	SOLIDOS DISUELTOS TOTALES (MG/L Ó G/M <sup>3</sup> )
AGUA DULCE	0 - 1000
AGUA SALOBRE	1000 - 10,000
AGUA SALINA	10,000 - 100,000
SALINERA	Más de 100,000

Fuente: Freeze y Cherry, 1979.

Una clasificación de las especies inorgánicas que contiene el agua subterránea se muestra en la tabla 4.2. Las categorías de la concentración son sólo una guía general.

\*\* Este capítulo fue traducido y adaptado de una sección del libro "Groundwater", de Freeze y Cherry, Prentice Hall, 1979.

**TABLA 4.2. CLASIFICACION DE LOS CONSTITUYENTES INORGANICOS DISUELTOS EN EL AGUA SUBTERRANEA.**

**CONSTITUYENTES PRINCIPALES (MAS DE 5 MG/L):**

Acido carbonico	Magnesio
Bicarbonatos	Silicio
Calcio	Sodio
Cloruros	Sulfatos

**CONSTITUYENTES MENORES (0.01 - 10.0 MG/L):**

Boro	Hierro
Carbonatos	Nitratos
Estroncio	Potasio
Fluoruros	

**CONSTITUYENTES TRAZAS (MENOS DE 0.1 MG/L):**

Aluminio	Molibdeno
Antimonio	Niobio
Arsenico	Niquel
Bario	Oro
Berilio	Plata
Bismuto	Platino
Bromuros	Plomo
Cadmio	Radio
Cerio	Rubidio
Cesio	Putenio
Cobalto	Selenio
Cobre	Talio
Cromo	Titanio
Escandio	Torio
Estaño	Tungsteno
Fosfatos	Uranio
Galio	Vanadio
Germanio	Yoduro
Indio	Yterbio
Lantano	Ytrio
Litio	Zinc
Manganeso	Zirconio

Fuente: Froeze y Cherry, 1979.

En algunos casos se exceden los rangos de concentración. Los constituyentes principales de la tabla 4.2

ocurren principalmente en forma iónica y comúnmente se denominan iones principales ( $\text{Na}^+$ ,  $\text{Mg}^{2+}$ ,  $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{Cl}^-$ ,  $\text{HCO}_3^-$ ,  $\text{SO}_4^{2-}$ ). La concentración total de estos seis iones principales, normalmente constituye más del 90% de los SDF en el agua, sin importar si está diluida o tiene una salinidad mayor que el agua de mar.

Las concentraciones de los iones principales, menores y trazas en el agua subterránea, están controladas por la disponibilidad de los elementos en el suelo y las rocas a través de las cuales pasa el agua, por limitaciones geoquímicas tales como solubilidad y adsorción, por las tasas (cinética) de los procesos geoquímicos, y por la secuencia en la cual el agua entra en contacto con los diversos minerales que contienen los materiales geológicos, a lo largo de su camino. Cada vez es más común que las concentraciones de los constituyentes inorgánicos disueltos estén influidas por las actividades del hombre.

**CONSTITUYENTES ORGANICOS.**

La materia orgánica disuelta es típicamente presente en el agua subterránea natural, aunque las concentraciones son generalmente bajas en comparación con las de los constituyentes inorgánicos. Poco se sabe acerca de la naturaleza química de la materia orgánica del agua subterránea. Investigaciones del agua del suelo han sugerido que la materia orgánica que se encuentra más disuelta en los sistemas de flujo subsuperficial, es el ácido fúlvico y el ácido húmico. Estos términos se refieren a tipos particulares de materias orgánicas que persisten en las aguas subsuperficiales debido a su resistencia a la degradación por los microorganismos.

## GASES DISUELTOS.

Los gases disueltos más abundantes en el agua subterránea son  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$ ,  $CH_4$ ,  $H_2S$  y  $N_2O$ . Los tres primeros componen la atmósfera terrestre, y por lo tanto no es sorprendente que ocurran en aguas subsuperficiales.  $CH_4$ ,  $H_2S$  y  $N_2O$  existen frecuentemente en el agua subterránea en concentraciones significativas debido a que son productos de procesos biogeoquímicos que suceden en zonas subsuperficiales no aireadas.

## EQUILIBRIO QUÍMICO.

La ley de acción de masas es una de las relaciones más útiles para el análisis de los procesos químicos del agua subterránea. Se ha sabido desde hace más de un siglo que la fuerza impulsora de una reacción química se relaciona con las concentraciones de los constituyentes que están reaccionando y las concentraciones de los productos de la reacción. Considérense los constituyentes B y C que reaccionan para producir D y E según la expresión:

$$bB + cC = dD + eE, \quad [\text{ec. 4.1}]$$

donde b, c, d y e son el número de moles de los constituyentes químicos B, C, D y E, respectivamente.

La ley de acción de masas expresa la relación entre los reactivos y los productos cuando la reacción está en equilibrio:

$$K = \frac{[D]^d [E]^e}{[B]^b [C]^c}, \quad [\text{ec. 4.2}]$$

donde K es un coeficiente conocido como constante de equilibrio termodinámico o constante de estabilidad.

## EFFECTOS DE LOS GRADIENTES DE CONCENTRACION.

La difusión en las soluciones es el proceso donde los constituyentes iónicos o moleculares se mueven por la influencia de su actividad química en la dirección de su gradiente de concentración. La difusión ocurre en ausencia de cualquier movimiento hidráulico de la masa de solución. Si la solución fluye, la difusión es un mecanismo junto con la dispersión mecánica que causa el mezclado de los constituyentes iónicos o moleculares. La difusión cesa sólo cuando los gradientes de concentración dejan de existir.

La masa de sustancia difusiva que pasa a través de una sección transversal dada, por unidad de tiempo, es proporcional al gradiente de concentración. Esto se conoce como primera ley de Fick. Se expresa así:

$$F = -D \frac{dc}{dx}, \quad [\text{ec. 4.3}]$$

donde F, que es el flujo másico, es la masa de soluto por unidad de área y por unidad de tiempo [ $M/L^2T$ ]; D es el coeficiente de difusión [ $L^2/T$ ]; C es la concentración de soluto [ $M/L^3$ ] y  $dc/dx$  es el gradiente de concentración, el cual es una cantidad negativa en la dirección de la difusión. Los coeficientes de difusión para electrolitos en solución acuosa son bien conocidos. Los iones principales del agua subterránea ( $Na^+$ ,  $K^+$ ,  $Mg^{2+}$ ,  $Ca^{2+}$ ,  $Cl^-$ ,  $HCO_3^-$ ,  $SO_4^{2-}$ ) tienen coeficientes de difusión en el rango de  $1 \times 10^{-5}$  a  $2 \times 10^{-5}$   $m^2/s$  a  $25^\circ C$  (Robinson and Stokes, 1965). Los coeficientes son dependientes de la temperatura. Por ejemplo, a  $5^\circ C$ ,

los coeficientes son aproximadamente 50% más pequeños. El efecto de la fuerza iónica es menor.

En medio poroso, los coeficientes de difusión aparente para estos iones son más pequeños que en agua, debido a que los iones siguen caminos más largos durante la difusión por la presencia de partículas en la matriz sólida y debido a la adsorción en los sólidos. El coeficiente de difusión aparente para especies no adsorbidas en medio poroso,  $D^*$ , se representa por la relación:

$$D^* = wD, \quad [\text{ec. 4.4}]$$

donde  $w$ , que es menor a 1, es un coeficiente empírico que explica el efecto de la fase sólida del medio poroso en la difusión. En estudios de laboratorio sobre difusión de iones no adsorbidos en materiales geológicos porosos, se observan comúnmente valores de  $w$  entre 0.5 y 0.1 aproximadamente.

A partir de la primera ley de Fick y de la ecuación de continuidad es posible derivar una ecuación diferencial que relacione la concentración de la sustancia difusiva con el espacio y el tiempo. En una dimensión, esta expresión conocida como segunda ley de Fick, es:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D^* \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad [\text{ec. 4.5}]$$

Para obtener una indicación de las tasas a las cuales se difunden los solutos en materiales geológicos porosos, considérese una situación hipotética donde dos estratos que contienen diferentes concentraciones de soluto están en contacto. Asígnase que los estratos están saturados de agua y que los gradientes hidráulicos en estos estratos son desprecia-

bles. En un tiempo inicial, uno de los estratos tiene especies de soluto  $i$  a la concentración  $C_0$ . En el otro, la concentración inicial de  $i$  es lo suficientemente pequeña que se aproxima a cero. Debido al gradiente de concentración a través de la intercara, el soluto se difundirá desde la capa de mayor concentración hacia la de menor. También asígnase que la concentración de soluto en la capa más concentrada, permanece constante en el tiempo, que sería el caso en el que la concentración de soluto estuviera en equilibrio por disolución mineral. Los valores de  $C$  en la dirección de  $x$ , se pueden calcular con respecto al tiempo, usando la siguiente relación (Crank, 1956):

$$C_i(x,t) = C_0 \cdot \text{erfc}(x/2\sqrt{D^*t}), \quad [\text{ec. 4.6}]$$

donde  $\text{erfc}$  es la función error complementaria. Asumiendo un valor de  $5 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$  para  $D^*$ , se puede calcular el perfil de concentraciones de soluto a un intervalo de tiempo específico. Por ejemplo, si elegimos una concentración relativa  $C/C_0$  de 0.1 y una distancia  $x$  de 10 m, la ecuación 4.6 indica que el tiempo aproximado de difusión será de 500 años. Es evidente, por lo tanto, que la difusión es un proceso relativamente lento. En zonas de flujo activo del agua subterránea, sus efectos usualmente son dominados por los efectos del movimiento de la masa de agua.

#### DISOLUCIÓN Y SOLUBILIDAD DE MINERALES.

Cuando el agua entra en contacto con los minerales, la disolución de éstos comienza y continuará hasta que se alcancen las concentraciones

de equilibrio en el agua, o hasta que se consuman todos los minerales. La solubilidad de un mineral se define como su masa que se disolverá en un volumen unitario de solución bajo condiciones específicas. Las solubilidades de los minerales que el agua subterránea encuentra a su paso cuando está en movimiento, varían en muchos órdenes de magnitud. Así, dependiendo de los minerales que el agua encuentre durante la historia de su flujo, puede resultar ligeramente con mayor cantidad de sólidos disueltos que el agua de lluvia, o varias veces más salada que el agua de mar.

La tabla 4.3 indica las solubilidades de varios minerales sedimentarios en agua pura a 25°C y 1 atmósfera de presión total. Esta tabla

atmósfera. La solubilidad de los minerales de carbonatos depende de la presión parcial del CO<sub>2</sub>.

Todos los minerales enlistados en la tabla 4.3 normalmente se disuelven congruentemente. Esta afirmación significa que los productos de la reacción de disolución del mineral, son todas especies disueltas. Muchos minerales que afectan la evolución química del agua subterránea, se disuelven incongruentemente; esto es, uno o más de los productos de la disolución ocurren como minerales o como sustancias sólidas amorfas. La mayoría de los minerales de silicatos de aluminio se disuelven incongruentemente. El feldespato, o albita, es un buen ejemplo:

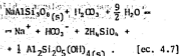
TABLA 4.3. REACCIONES DE DISOCIACION, CONSTANTES DE EQUILIBRIO, Y SOLUBILIDADES DE ALGUNOS MINERALES QUE SE DISUELVEN CONGRUENTEMENTE EN AGUA A 25°C Y 1 ATM DE PRESION TOTAL.

MINERAL	REACCION DE DISOCIACION	CONSTANTE DE EQUILIBRIO K <sub>EQ</sub>	SOLUBILIDAD A P <sub>H<sub>2</sub>O</sub> (MG/L Ó G/M <sup>3</sup> )
GIBBSITA	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ·2H <sub>2</sub> O+H <sub>2</sub> O = 2Al <sup>3+</sup> +6OH <sup>-</sup>	10 <sup>-34</sup>	0.001
CUARZO	SiO <sub>2</sub> +2H <sub>2</sub> O = Si(OH) <sub>4</sub>	10 <sup>-3.7</sup>	12
HIDROXIAPATITA	Ca <sub>5</sub> (OH)(PO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> = 5Ca <sup>2+</sup> +3PO <sub>4</sub> <sup>3-</sup> +OH <sup>-</sup>	10 <sup>-55.6</sup>	30
SILICA AMORFA	SiO <sub>2</sub> +2H <sub>2</sub> O = Si(OH) <sub>4</sub>	10 <sup>-2.7</sup>	120
FLUORITA	CaF <sub>2</sub> = Ca <sup>2+</sup> +2F <sup>-</sup>	10 <sup>-9.8</sup>	160
DOLOMITA	CaMg(CO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> = Ca <sup>2+</sup> +Mg <sup>2+</sup> +2CO <sub>3</sub> <sup>2-</sup>	10 <sup>-17.8</sup>	90, *480+
CALCITA	CaCO <sub>3</sub> = Ca <sup>2+</sup> +CO <sub>3</sub> <sup>2-</sup>	10 <sup>-8.4</sup>	100, *500+
YESO	CaSO <sub>4</sub> ·2H <sub>2</sub> O = Ca <sup>2+</sup> +SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> +2H <sub>2</sub> O	10 <sup>-4.5</sup>	2100
SILVITA	KCl = K <sup>+</sup> +Cl <sup>-</sup>	10 <sup>-3.9</sup>	264,000
EPSOMITA	MgSO <sub>4</sub> ·7H <sub>2</sub> O = Mg <sup>2+</sup> +SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> +7H <sub>2</sub> O	10 <sup>-3.9</sup>	267,000
MIRABILITA	Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> ·10H <sub>2</sub> O = 2Na <sup>+</sup> +SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> +10H <sub>2</sub> O	10 <sup>-1.6</sup>	280,000
HALITA	NaCl = Na <sup>+</sup> +Cl <sup>-</sup>	10 <sup>-1.6</sup>	360,000

\* Presión parcial del CO<sub>2</sub> = 10<sup>-3</sup> atm. Fuente: Freeze y Cherry, 1979.

+ Presión parcial del CO<sub>2</sub> = 10<sup>-1</sup> atm.

también enlista las reacciones de disolución de estos minerales y sus constantes de equilibrio a 25°C y 1



En esta reacción la albita se disuelve por la acción lixiviante del ácido carbónico ( $H_2CO_3$ ) para producir especies disueltas y el mineral de arcilla caolinita. Esta es una reacción común en zonas de aguas subterráneas de terrenos graníticos. A partir de la ley de acción de masas:

$$K_{alb-caol} = \frac{[Na^+][HCO_3^-][H_4SiO_4]^2}{[H_2CO_3]} \quad [ec. 4.8]$$

donde la constante de equilibrio  $K$  depende de la temperatura y la presión. La solubilidad de la albita y otros aluminosilicatos catiónicos se incrementa conforme aumenta la presión parcial del  $CO_2$ .

#### DESEQUILIBRIO E ÍNDICE DE SATURACION.

Considerando la ecuación 4.1 en condiciones de desequilibrio, la relación entre los reactivos y los productos se puede expresar como:

$$Q = \frac{[P]^d[E]^c}{[R]^b[C]^c} \quad [ec. 4.9]$$

donde  $Q$  es el cociente de la reacción y los otros parámetros se consideran como en la ecuación 4.2. La siguiente relación es útil para comparar el estado de una reacción de disolución-precipitación de minerales en un punto particular en el tiempo o en el espacio, con respecto a la condición de equilibrio termodinámico:

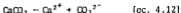
$$S_i = \frac{Q}{K_{eq}} \quad [ec. 4.10]$$

donde  $S_i$  se denomina índice de saturación. Para calcita en contacto con agua subterránea, el índice de saturación es:

$$S_i = \frac{[Ca^{2+}][CO_3^{2-}]}{K_{cal}} \quad [ec. 4.11]$$

Las actividades iónicas del numerador se pueden obtener a partir del análisis de muestras de agua subterránea y de la reacción de disociación del ácido carbónico, mientras que  $K_{cal}$  se puede conocer a partir de datos de energía libre, o directamente de tablas de valores de constantes de equilibrio.

Si  $S_i > 1$ , el agua contiene un exceso de constituyentes iónicos. Por lo tanto, la reacción:



debe proceder hacia la izquierda, lo cual requiere que ocurra la precipitación del mineral. Si  $S_i < 1$ , la reacción procede hacia la derecha con la disolución del mineral. Si  $S_i = 1$ , la reacción está en equilibrio, lo cual significa que está saturada con respecto al mineral en cuestión.

#### PROCESOS DE OXIDACION Y REDUCCION.

Muchas reacciones que ocurren en el ambiente del agua subterránea involucran la transferencia de electrones entre los constituyentes disueltos, pasivos o sólidos. Como resultado de la transferencia electrónica hay cambios en los estados de oxidación de los reactivos y los productos.

Los ríos y lagos no contaminados, generalmente presentan condiciones oxidantes debido a su mezcla con



el oxígeno de la atmósfera terrestre. Sin embargo, la tendencia en los sistemas de aguas subterráneas es hacia la disminución de oxígeno y condiciones reductoras. Debido a que el agua que circula a través del sub suelo, generalmente está aislada de la atmósfera, el oxígeno que se consume por reacciones hidroquinicas y bioquinicas no se recupera. Para que ocurra la reducción de constituyentes inorgánicos, algunos otros constituyentes se deben oxidar. Los compuestos oxidados son generalmente materia orgánica. Las reacciones son catalizadas por bacterias o enzimas aisladas que producen energía al tiempo que facilitan el proceso de transferencia de electrones.

La tabla 4.4 enlista algunas reacciones redox en las cuales se consume oxígeno. En algunas reacciones se producen iones  $H^+$ . En muchos sistemas de aguas subterráneas los iones  $H^+$  son consumidos por reacciones con minerales. Por lo tanto, el pH no disminuye apreciablemente. Sin embargo, en otros sistemas los minerales que reaccionan así no están presentes, en cuyo caso los procesos de oxidación causan que el agua sea ácida.

Cuando se ha consumido todo el  $O_2$  del agua subterránea, todavía puede suceder la oxidación de materia orgánica, pero los agentes oxidantes (los constituyentes que sufren reducción) son  $NO_3^-$ ,  $MnO_2$ ,  $Fe(OH)_3$ ,  $SO_4^{2-}$  y otros como se indica en la tabla 4.5. Conforme se agotan estos agentes oxidantes, el ambiente del agua subterránea se hace más reductor. Si los procesos continúan lo suficiente, el ambiente puede convertirse en fuertemente reductor de tal manera que los compuestos orgánicos pueden sufrir degradación anaeróbica.

## ABSORCION E INTERCAMBIO IONICO.

Los materiales pedológicos porosos que contienen un porcentaje apreciable de partículas de tamaño coloidal, tienen la capacidad de intercambiar constituyentes iónicos adsorbidos en las superficies de dichas partículas. Estas tienen diámetros en el rango de  $10^{-3}$  a  $10^{-4}$  mm, los cuales son grandes en comparación con el tamaño de moléculas químicas, pero son suficientemente pequeñas tal que las fuerzas interfaciales son significativas en el control de su comportamiento. La mayoría de los minerales de la arcilla son de tamaño coloidal. Los productos de la alteración geoquímica de las rocas, frecuentemente son coloides inorgánicos y amorfos (no cristalinos o pobremente cristalizados) que están en un estado metaestable persistente. Estos productos coloidales pueden formar capas en la superficie de partículas más grandes. Aún un depósito que parezca estar compuesto de arena o grava limpia, puede tener un contenido coloidal significativo.

Los procesos de intercambio iónico están limitados exclusivamente a partículas coloidales porque éstas tienen una gran carga eléctrica relativa a sus áreas superficiales. La carga superficial es resultado de:

- (1) imperfecciones o substituciones iónicas dentro de la red cristalina, o
- (2) reacciones de disociación química en la superficie de la partícula.

Las substituciones iónicas causan una carga neta positiva o nega-

TABLE 4.4. ALGUNOS PROCESOS DE OXIDACION INORGANICA QUE CONSUMEN OXIGENO DISUELTO EN EL AGUA SUBTERRANEA.

PROCESO	REACCION*
OXIDACION DE SULFUROS	$O_2 + \frac{1}{2} HS^- \rightarrow \frac{1}{2} SO_4^{2-} + \frac{1}{2} H^+$
OXIDACION DEL HIERRO	$\frac{1}{2} O_2 + Fe^{2+} + H^+ \rightarrow Fe^{3+} + \frac{1}{2} H_2O$
NITRIFICACION	$O_2 + \frac{1}{2} NH_4^+ \rightarrow \frac{1}{2} NO_3^- + H^+ + \frac{1}{2} H_2O$
OXIDACION DEL MANGANESO	$O_2 + 2 Mn^{2+} + 2 H_2O \rightarrow 2 MnO_2(s) + 4 H^+$
OXIDACION DE HIERRO Y SULFUROS†	$(15/4) O_2 + FeS_2(s) \rightarrow (7/2) H_2O + Fe(OH)_3(s) + 2 SO_4^{2-} + 4 H^+$

\* (s), sólido.

Fuente: Freeze y Cherry, 1979.

† Expresada como una reacción combinada.

TABLE 4.5. ALGUNOS PROCESOS PEROX QUE CONSUMEN MATERIA ORGANICA Y REDUCEN COMPUESTOS INORGANICOS EN EL AGUA SUBTERRANEA.

PROCESO	ECUACION*
DENITRIFICACION†	$CH_2O + (4/5) NO_3^- \rightarrow (2/5) N_2(g) + HCO_3^- + (1/5) H^+ + (2/5) H_2O$
REDUCCION DE MANGANESO (IV)	$CH_2O + 2MnO_2(s) + 3H^+ \rightarrow 2Mn^{2+} + HCO_3^- + 2H_2O$
REDUCCION DE HIERRO (III)	$CH_2O + 4Fe(OH)_3(s) + 7H^+ \rightarrow 4Fe^{2+} + HCO_3^- + 10 H_2O$
REDUCCION DE SULFATOS‡	$CH_2O + \frac{1}{2} SO_4^{2-} \rightarrow \frac{1}{2} HS^- + HCO_3^- + \frac{1}{2} H^+$
FERMENTACION DE METANO	$CH_2O + \frac{1}{2} H_2O \rightarrow \frac{1}{2} CH_4 + \frac{1}{2} HCO_3^- + \frac{1}{2} H^+$

\* (g), gaseoso o forma disuelta; (s), sólido.

†  $CH_2O$  representa materia orgánica; también se pueden oxidar otros compuestos orgánicos.

‡  $H_2S$  existe como una especie disuelta en el agua:  $HS^- + H^+ = H_2S$ . El  $H_2S$  es la especie dominante a un pH < 7.

Fuente: Freeze y Cherry, 1979.

tiva en la red cristalina. Este desbalance de cargas se compensa por una acumulación superficial de iones de carga opuesta, conocidos como contraiones. Estos componen una capa adsorbida de composición variable. Los iones en esta capa pueden ser intercambiados por otros iones, siempre

que continúe el desbalance de cargas eléctricas en la red cristalina. La naturaleza de la carga superficial es una función del pH. A valores bajos de pH prevalece una superficie cargada positivamente; a valores altos se desarrolla una superficie cargada negativamente.

Por lo tanto, la tendencia de adsorción de cationes o de aniones, depende del pH de la solución.

La capacidad de intercambio catiónico (CIC) de un material coloidal se define, según van Olphen (1963), como el exceso de contraiones en la zona adyacente a la superficie o capa cargada, el cual puede ser intercambiado por otros cationes. La capacidad de intercambio catiónico de los materiales geológicos normalmente se expresa como el número de miliequivalentes de catión que se pueden intercambiar en una muestra de 100 g de masa seca. La prueba estándar para determinar la CIC de estos materiales involucra:

(1) el ajuste del pH del agua de los poros a 7.0,

(2) la saturación de los sitios de intercambio con  $\text{NH}_4^+$ , mezclando la muestra de suelo con una solución de acetato de amonio;

(3) la remoción del  $\text{NH}_4^+$  adsorbido, por lixiviación con una solución concentrada de NaCl (el  $\text{Na}^+$  reemplaza al  $\text{NH}_4^+$  de los sitios de intercambio), y

(4) la determinación del contenido de  $\text{NH}_4^+$  de la solución de lixiviado después de que se ha alcanzado el equilibrio.

Los valores de la CIC obtenidos a partir de las pruebas estándar de laboratorio, son una medida de la capacidad de intercambio bajo las condiciones específicas del ensayo. Para los minerales que dependen de su capacidad de intercambio a las reacciones químicas de disociación de su superficie, la capacidad de intercambio real puede depender considerablemente del pH.

Para desarrollar las relaciones cuantitativas de los procesos de intercambio catiónico, se asume que el sistema de intercambio consiste de dos fases discretas, la fase de solución y la fase de intercambio. La fase de intercambio consta de todo o parte del medio poroso. El proceso de intercambio iónico se representa entonces simplemente como una permutación de iones entre estas dos fases:



donde A y B son los iones intercambiables, a y b son el número de moles y el sufijo (ad) representa al ion adsorbido. La ausencia de este sufijo denota un ion en solución. A partir de la ley de acción de masas:

$$K_{A-B} = \frac{[A_{(ad)}]^a [B]^b}{[A]^a [B_{(ad)}]^b}, \quad [\text{ec. 4.14}]$$

donde las cantidades entre corchetes representan las actividades. La razón de las actividades de los iones en solución, se puede expresar en términos de la molaridad y los coeficientes de actividad como:

$$\frac{[B]^b}{[A]^a} = \frac{\gamma_B (B)^b}{\gamma_A (A)^a}, \quad [\text{ec. 4.15}]$$

donde los valores de los coeficientes de actividad ( $\gamma_A$ ,  $\gamma_B$ ) se pueden obtener de la manera usual. Para que la ecuación 4.14 sea útil, es necesario obtener los valores para las actividades de los iones adsorbidos en la fase de intercambio. Vanselow (1932) propuso que las actividades de los iones adsorbidos fueran igual a sus fracciones molares. Las fracciones molares de A y B son:

$$N_A = \frac{(A)}{(A) + (B)} \quad \text{y} \quad N_B = \frac{(B)}{(A) + (B)},$$

donde (A) y (B), expresados en moles son los constituyentes adsorbidos. La expresión de equilibrio se convierte en:

$$\bar{K}_{(A-B)} = \frac{y_B^b (B)^b N_A^a (ad)}{y_A^a (A)^a N_B^b (ad)} \quad [\text{ec. 4.16}]$$

Vanselow y otros investigadores han encontrado experimentalmente que para algunos sistemas de intercambio que involucran electrólitos y arcillas,  $\bar{K}$  es una constante. En consecuencia,  $\bar{K}$  se ha conocido como coeficiente de selectividad. En los casos en que no es una constante, es más apropiado denominarla función de selectividad (Babcock, 1963). En muchas investigaciones no se incluyen los términos de los coeficientes de actividad de la ecuación 4.15. Sin embargo, Babcock y Schulz (1963) han demostrado que el efecto del coeficiente de actividad puede ser particularmente importante en el caso del intercambio catiónico monovalente-divalente.

Argersinger junto con sus colaboradores (1950), extendió la teoría de Vanselow para explicar más completamente los efectos de los iones adsorbidos. Los coeficientes de actividad para iones adsorbidos, fueron introducidos en forma análoga a los coeficientes de actividad de los solutos:

$$y_{A(ad)} = \frac{[A(ad)]}{N_{A(ad)}} \quad \text{y} \quad y_{B(ad)} = \frac{[B(ad)]}{N_{B(ad)}}$$

[ec. 4.17]

Por lo tanto, la constante de equilibrio de la acción de masas,  $K_{A-B}$ , se relaciona con la función de selectividad de acuerdo con:

$$K_{A-B} = \frac{y_A^a (ad)}{y_B^b (ad)} \bar{K}_{(A-B)} \quad [\text{ec. 4.18}]$$

Aunque en teoría esta ecuación proporciona un método válido para predecir los efectos del intercambio iónico en las concentraciones de los cationes del agua subterránea, los estudios de intercambio catiónico generalmente no incluyen la determinación de los valores de  $K$  y  $\gamma(ad)$ , con la notable excepción de las investigaciones de Jensen y Babcock (1973), y El-Prince y Babcock (1975).

El interés en los procesos de intercambio catiónico en la zona saturada, comúnmente se enfoca a la cuestión de qué es lo que pasará a las concentraciones de los cationes conforme se mueve el agua dentro de una zona en la cual existe una capacidad de intercambio catiónico significativa. Los estratos que pueden alterar la química del agua subterránea por el intercambio catiónico, pueden poseer otras propiedades geoquímicas importantes. Estas son excluidas para simplificar la discusión. Cuando agua subterránea de una composición particular se mueve dentro de una zona de intercambio catiónico, las concentraciones de los cationes se ajustarán a las condiciones de equilibrio. Las concentraciones catiónicas en el equilibrio dependen de las condiciones iniciales, tales como:

(1) las concentraciones catiónicas del agua que entra al espacio de los poros en los cuales ocurre el intercambio, y

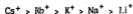
(2) las fracciones molares de los cationes adsorbidos en la superficie de los poros, inmediatamente

antes de la entrada de nueva agua en los poros.

Cada vez que un nuevo volumen de agua se mueve a través del espacio de los poros, un nuevo equilibrio es establecido en respuesta al nuevo juego de condiciones iniciales. El movimiento continuo del agua subterránea a través de la zona de intercambio catiónico puede estar acompañado de una química de los poros gradualmente cambiante, aun cuando el equilibrio del intercambio en el agua de los poros se mantenga durante todo el tiempo. Esta condición de equilibrio cambiante es particularmente característica de los procesos de intercambio catiónico en la zona saturada, y también está asociada con otros procesos hidroquímicos donde el flujo hidrodinámico cause el desplazamiento continuo del agua de los poros conforme ocurren las rápidas reacciones mineral-agua.

El intercambio que involucra cationes de la misma valencia, se caracteriza por la preferencia de uno de los iones si el coeficiente de selectividad es mayor o menor de la unidad. El orden normal de preferencia de algunos cationes monovalentes y divalentes por las arcillas, es:

Afinidad para la adsorción:



más fuerte

más débil



Los iones divalentes normalmente tienen una afinidad para la adsorción más fuerte que los iones monovalentes, aunque esto depende en alguna medida de la naturaleza del intercambiador y la concentración de las soluciones (Wiklander, 1964).

Las reacciones de intercambio catiónico más importantes en los sistemas de aguas subterráneas, son aquellas que involucran cationes monovalentes y divalentes, tales como  $\text{Na}^+ - \text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{Na}^+ - \text{Mg}^{2+}$ ,  $\text{K}^+ - \text{Ca}^{2+}$  y  $\text{K}^+ - \text{Mg}^{2+}$ . Para estas reacciones:



[ec. 4.19]

$$K_{\text{A-B}} = \frac{[\text{B}^{2+}] \text{N}_{\text{A}}^2}{[\text{A}^+]^2 \text{N}_{\text{B}}} \quad [\text{ec. 4.20}]$$

La reacción de intercambio  $\text{Na}^+ - \text{Ca}^{2+}$  es de importancia especial cuando ocurre en arcillas montmorilloníticas debido a que puede causar grandes cambios en la permeabilidad. Las arcillas del grupo montmorillonita se pueden expandir y contraer en respuesta a los cambios en composición de los cationes adsorbidos entre las plaquitas de arcilla. Los radios hidratados de  $\text{Na}^+$  y  $\text{Ca}^{2+}$  son de tal magnitud que dos  $\text{Na}^+$  hidratados requieren más espacio que un  $\text{Ca}^{2+}$ . De aquí que el remplazamiento de  $\text{Ca}^{2+}$  por  $\text{Na}^+$  de los sitios de intercambio cause un incremento en la dimensión de la red cristalina. Esto ocasiona una disminución de la permeabilidad. Esto puede causar una degradación en la productividad agrícola de los suelos.

## CAPITULO 5.

### APLICACION DE AGUAS RESIDUALES AL SUELO PARA RECARGA DE ACUIFEROS.

La descarga en el suelo es una de las tres posibles maneras de recirculación y/o disposición final de los desechos (las otras dos son la descarga en cuerpos de agua y hacia la atmósfera). Factores tales como usos adecuados del suelo, impacto en la salud pública, requerimientos de energía, estética y efectos biológicos, se deben considerar antes de decidir si se hace la descarga en el suelo, agua o atmósfera. Sin embargo, los problemas que se tienen en los procesos de selección son complejos y demandan una atención multidisciplinaria que incluya a científicos del suelo e hidrogeólogos.

La aceptación creciente de la necesidad del reuso intencional del agua residual, ha conducido a la consideración seria de las técnicas de disposición en el suelo. Aunque no se trata de una alternativa nueva para el tratamiento y disposición final de las aguas residuales, la comunidad técnica está investigando ciertos métodos de aplicación al suelo para determinar su factibilidad bajo las condiciones presentes y futuras. La literatura reciente contiene mucha información y datos que apoyan el retorno de las aguas residuales domésticas al suelo.

El éxito del tratamiento del agua residual mediante su aplicación al suelo, se basa en la premisa de que la corteza de suelo es un filtro masivo capaz de remover los materiales contenidos en el agua. Generalmente el suelo es capaz de renovar las aguas residuales municipales

que contienen gran cantidad de contaminantes. Sin embargo, ciertos contaminantes a determinadas concentraciones requerirán grandes áreas de suelo y largos tiempos de filtración o decaimiento. Otros contaminantes, por ejemplo las sales, se concentrarán en el suelo y permanecerán indefinidamente. También algunos suelos no tienen adecuadas características de filtración. El costo de alterar o remover aquellos contaminantes nocivos al suelo o al agua subterránea, puede ser alto. En consecuencia la aplicación al suelo puede ser una técnica no costosa en algunos casos. La combinación de estas consideraciones de "rentabilidad" con el criterio más importante, el efecto potencial en la salud pública, ha originado una revisión en el presente de los alcances prácticos de la aplicación al suelo. El sentimiento actual es que el agua residual municipal debe ser tratada hasta un nivel secundario. En algunos casos es recomendable la desinfección antes de su retorno al suelo (véase la tabla 5.1).

#### TEORIA DE LA OPERACION.

El concepto básico de la conservación y la renovación de las aguas residuales, se puede describir mediante un ciclo que consta de retorno, renovación, recarga y reuso del agua residual (figura 5.1). El retorno al suelo se realiza mediante un sistema de irrigación.

Las plantas y las capas superficiales de suelo renuevan

**TABLA 5.1. CALIDAD DE EFLUENTES SECUNDARIOS SELECCIONADOS PARA SU APLICACION AL SUELO.**

CONSTITUYENTE	CONCENTRACIONES (EN MG/L, EXCEPTO DONDE SE INDIQUE)	
	RANGO	PROMEDIO
DBO	6-42	26
SS	12-88	48
SDT <sup>1</sup>	480-1235	900
Nitrógeno total	6.5-33.4	18.5
Fósforo total	2.1-16.0	8.8
Sodio	40-260	160
RAS <sup>2</sup>	1.3-7.4 meq/l	4.1
Boro	0.4-1.0	0.7
NMP	2,2-23/100 ml	-

<sup>1</sup> Sólidos disueltos totales. Fuente: WPCF y ASCE, 1982.

<sup>2</sup> Relación de adsorción de sodio.

este desecho líquido. El agua renova da queda disponible para la recarga de los suministros de agua subterráneos. Tanto los nutrientes como el agua renovada pueden usarse.

**RETORNO.** Hay tres factores concernientes a la fase de retorno dentro del ciclo que son importantes para un diseño efectivo:

1) Los desechos líquidos se deben distribuir uniformemente sobre el área.

2) La tasa de aplicación debe ser lo suficientemente baja para que toda el agua se infiltre a través del suelo.

3) La cantidad de agua residual que realmente se aplique por intervalo de tiempo, debe ser compatible con el crecimiento de los cultivos y con el tipo de suelo, para asegurar la renovación.

**RENOVACION.** La remoción de los contaminantes por medio de la aplicación del agua residual al suelo, se obtiene como resultado de mecanismos físicos, químicos y/o biológicos. Los constituyentes orgánicos e inorgánicos de los desechos, así como las bacterias y los virus, están sujetos a la filtración del desecho líquido por las plantas y las capas superficiales de suelo, a cambios químicos y biológicos por separado, y a una combinación de las alteraciones resultantes de la remoción de una porción del desecho, conforme el efluente se mueve a través del perfil de suelo. El principal riesgo de los sistemas de tratamiento con suelos, es la acumulación a largo plazo de material inorgánico. Las concentraciones de boro, sodio, cloruros y carbonatos que podrían causar efectos perjudiciales, se enlistan en la tabla 5.2. Las concentraciones máximas recomendadas para elementos trazas en aguas de irrigación, se dan

**TABLA 5.2. VALORES RECOMENDADOS PARA LOS CONSTITUYENTES INORGANICOS PRINCIPALES EN EL AGUA APLICADA AL SUELO.**

PROBLEMA Y CONSTITUYENTE RESPECTIVO	IMPACTO EN EL SUELO *		
	NULO	PROBLEMATICO	SEVERO
<b>SALINIDAD:</b>			
Conductividad del agua de irrigación, milimhos/cm	< 0.75	0.75-3.0	> 3.0
<b>PERMEABILIDAD:</b>			
Conductividad del agua de irrigación, mmho/cm	> 0.5	< 0.5	< 0.2
RAS (Relación de adsorción de sodio), [(me/l) <sup>1</sup> ]	< 6.0	6.0-9.0	> 9.0
<b>TOXICIDAD POR IONES ESPECIFICOS:</b>			
Por absorción de las raíces:			
Sodio (evaluado por el RAS), me/l	< 3	3.0-9.0	> 9.0
Cloruros, me/l	< 4	4.0-10	> 10
Cloruros, mg/l	< 142	142-355	> 355
Boro, mg/l	< 0.5	0.5-2.0	> 2.0-10.0
Por absorción de las hojas (riego por aspersores):			
Sodio, me/l	< 3.0	> 3.0	-
Sodio, mg/l	< 69	> 69	-
Cloruros, me/l	< 3.0	> 3.0	-
Cloruros, mg/l	< 106	> 106	-
<b>DIVERSOS:</b>			
N-NO <sub>3</sub> <sup>-</sup> , N-NH <sub>4</sub> <sup>+</sup> mg/l para cultivos sensibles	< 5	5-30	> 30
HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup> , me/l (sólo con aspersores sobrecargados)	< 1.5	1.5-8.5	> 8.5
HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup> , mg/l (sólo con aspersores sobrecargados)	< 90	90-520	> 520
pH	Rango normal 6.5-8.4		-

\* Las interpretaciones se basan en los efectos posibles de los constituyentes en los cultivos y/o en los suelos. Los valores recomendados son flexibles y deberán ser modificados cuando lo garantice la experiencia local o condiciones especiales de los cultivos, suelo y método de irrigación.

Fuente: WPCF y ASCE, 1982.



**TABLA 5.3. CONCENTRACIONES MAXIMAS RECOMENDADAS PARA LOS ELEMENTOS TRAZAS EN AGUAS DE IRRIGACION.\***

ELEMENTO	PARA AGUAS DE APLICACION CONTINUA EN TODOS LOS SUELOS, MG/L	PARA USO HASTA DURAR 20 AÑOS EN SUELOS DE FINA TEXTURA (PH DE 6.0 A 8.5), MG/L
Aluminio	5.0	20.0
Arsénico	0.10	2.0
Berilio	0.10	0.50
Boro	0.75	2.0-10.0
Cadmio	0.010	0.050
Cobalto	0.050	5.0
Cobre	0.20	5.0
Cromo	0.10	1.0
Fluoruros	1.0	15.0
Hierro	5.0	20.0
Litio	2.5	2.5
Manganeso	0.20	10.0
Molibdeno	0.010	0.050
Níquel	0.20	2.0
Plomo	5.0	10.0
Selenio	0.020	0.020
Zinc	2.0	10.0

\* Estos niveles no afectarán adversamente a las plantas o a los suelos.  
Fuente: WPCF y ASCE, 1982.

**TABLA 5.4. LIMITES RECOMENDADOS PARA LA SALINIDAD EN LAS AGUAS DE IRRIGACION.**

RESPUESTA DEL CULTIVO	SOLIDOS DISUELTOS TOTALES, MG/L	CONDUCTIVIDAD ELECTRICA, MMHOS/CM
Usualmente no se notarán efectos de destrucción leve o parcial	500	0.75
Puede haber deterioros leves en cultivos sensibles	500-1000	0.75-1.50
Pueden presentarse efectos adversos en muchos cultivos	1000-2000	1.50-3.00
Se pueden usar para plantas tolerantes de sales en suelos permeables con prácticas de administración cuidadosa	2000-5000	3.00-7.50

Fuente: WPCF y ASCE, 1982.

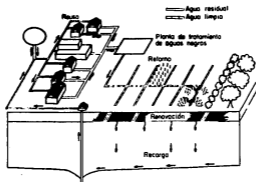


Figura 5.1. Ciclo de conservación y renovación de las aguas residuales.

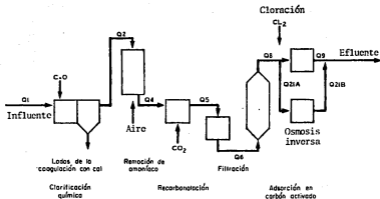


Figura 5.2. Procesos y puntos de muestreo en la Planta Purificadora WF-21 de Orange, California.

en la tabla 5.3. Los límites sugeridos para salinidad en aguas de irrigación, se dan en la tabla 5.4.

Las concentraciones de los iones de sodio, calcio y magnesio, se utilizan para el cálculo de la relación de adsorción de sodio (RAS):

$$RAS = \frac{Na}{\sqrt{[(Ca + Mg)/2]}} \quad , \quad [ec. 5.1]$$

donde Na, Ca y Mg son las concentraciones de los iones respectivos en miliequivalentes por litro de agua. Los valores del RAS mayores a 9 pueden afectar adversamente la permeabilidad de los suelos (tabla 5.2).

**RECARGA.** La tasa a la cual el agua residual se aplica al suelo, depende de la localización geográfica y del reuso anticipado del agua subterránea. Como ejemplos, una tasa de descarga de 1.8 a 2.4 m/día (6 a 8 ft/día) se considera apropiada para Arizona, porque el agua subterránea sólo se utiliza para irrigación. Sin embargo, en la Universidad del Estado de Pennsylvania se usa una tasa de 50 mm/semana (2 pulgadas/semana) con la intención de alcanzar estándares de agua potable para afluentes que pasen por una profundidad de 1.2 m (4 ft) de suelo.

Las condiciones del perfil de suelo que permitan un rápido drenaje interno, ocasionarán que el agua residual renovada se mueva verticalmente hacia abajo con dirección a los depósitos de agua subterránea. Sin embargo, capas de arcilla interdispersadas pueden causar que el agua renovada se mueva lateralmente y posiblemente que se descargue en la superficie del suelo o en un cuerpo de agua superficial. Cada disposición tiene sus ventajas y desventajas de-

pendiendo de las necesidades de agua de la comunidad, de la opinión pública, y de los estatutos regulatorios oficiales.

**REUSO.** Potencialmente, el reuso de aguas residuales tratadas puede ayudar a satisfacer las demandas agrícolas, industriales y domésticas. El reuso del agua residual en los cultivos es un método obvio. Su distribución, eventualmente puede recuperar las reservas de agua subterránea, sirviendo en último caso como fuente de abastecimiento de agua industrial y doméstica que ayude a aliviar los problemas de suministro. El agua residual tratada no se ha "aceptado" todavía para reuso como agua potable. Sin embargo, ante un abastecimiento limitado y una demanda creciente de agua potable en alguna área, se deben considerar el reuso y la conservación.

#### OPERACIONES DE RECARGA DE AGUAS SUBTERRÁNEAS EN EL ESTADO DE CALIFORNIA (TAKASHI ASANO Y KURT L. WASSERMAN, 1960).

La recarga de las aguas subterráneas con agua residual municipal recuperada, es una alternativa de reuso de agua que permite la planeación de reservas de agua subterránea. La recarga artificial por medio de cuencas de distribución superficial o con pozos de inyección, se está convirtiendo en una práctica importante en el presente y debe considerarse seriamente en la planeación de un reuso más intenso de agua en el futuro.

Los propósitos de la recarga artificial de las aguas subterráneas, han sido:

- 1) reducir, detener o aún inver

tir los descensos en el nivel de estas aguas.

2) proteger el agua dulce del subsuelo en acuíferos costeros, contra la intrusión de agua salada del océano, y

3) almacenar agua superficial, incluyendo las avenidas (inundaciones o crecientes) u otras aguas excedentes, así como efluentes tratados, para uso futuro.

Cerca del 40% del área de California corresponde a cuencas de agua subterránea, con una capacidad total de almacenamiento estimada en  $160.4 \times 10^6$  metros-hectárea de agua. Una estimación conservadora de la porción útil de la capacidad de almacenamiento es  $17.6 \times 10^6$  m-ha, más de tres veces la capacidad total de almacenamiento de los depósitos superficiales en el Estado. Estas cuencas satisfacen actualmente el 40% ( $1.9 \times 10^6$  m-ha/año) de las necesidades de agua en el Estado. Sin embargo, la descarga anual excede a la recarga en  $0.27 \times 10^6$  m-ha. Durante la sequía de 1976-77 de los Estados del oeste, aproximadamente 10,000 nuevos pozos se construyeron y los excesos aumentaron a  $1 \times 10^6$  m-ha/año.

Si no se mejora la administración de los recursos hidráulicos y se desarrollan nuevos abastecimientos, las demandas netas estatales excederán en el año 2000 las reservas probadas, en  $0.8 \times 10^6$  m-ha/año. Para corregir tales condiciones inaceptables, el Departamento de Recursos Hidráulicos desarrolló un Programa de Administración del Agua para llegar a cumplir las demandas proyectadas para el año 2000. Se espera que la recuperación y el reuso del agua residual, contribuyan al menos con  $74,000$  m-ha/año.

#### SELECCION DE PROCESOS DE TRATAMIENTO PARA CUMPLIR LOS REQUERIMIENTOS PARA REUSO DEL AGUA (RUSSELL L. CULP, 1980).

La recarga de los acuíferos puede hacerse directa o indirectamente. La recarga directa, usualmente se hace por medio de pozos de inyección. La indirecta por distribución superficial de agua residual tratada. En cualquier caso, se obtiene una dilución del agua de recarga al mezclarse con el agua subterránea, y alguna purificación a su paso a través de los materiales granulares del acuífero. Además para el caso de la distribución superficial se obtiene una purificación adicional por:

- percolación a través de la zona aeróbica del suelo,
- consumo de nitrógeno, fósforo y otras sustancias por los cultivos o la vegetación.
- filtración y adsorción en el suelo situado encima del acuífero, y
- acción bacteriana o química.

La remoción de contaminantes en la distribución superficial, depende de los siguientes factores:

- pretratamiento proporcionado,
- clima,
- tipo y profundidad del suelo,
- hidrogeología del acuífero,
- tipos y frecuencia de las cosechas,
- tasa de aplicación del agua

residual y de la precipitación, y

vii) tasa de movimiento del agua subterránea.

Sin embargo, las remociones obtenidas en las operaciones de distribución superficial son suficientes de modo tal que el pretratamiento requerido para el agua residual es menor que para el caso de la recarga por inyección directa.

En California, el agua para distribución superficial debe cumplir el siguiente tratamiento mínimo:

a) control de la fuente de compuestos químicos tóxicos de la industria,

b) oxidación adecuada,

c) adsorción en carbón con 30 minutos de contacto,

d) percolación a través de una distancia mínima de 10 pies de la zona aeróbica no saturada del suelo,

e) dilución con una cantidad igual de agua subterránea, y

f) almacenamiento por un año.

A su vez, la consideración de los estándares de calidad del agua para inyección con pozos, depende del caso en particular. Sin embargo, se acepta el siguiente pretratamiento:

i) desinfección adecuada,

ii) oxidación,

iii) coagulación,

iv) clarificación,

v) filtración,

vi) adsorción en carbón activado granular (GAC),

vii) ósmosis inversa, y

viii) remoción de orgánicos volátiles de bajo peso molecular.

COSTOS. La tabla 5.5 resume los costos de recarga y pretratamiento para cinco juegos de condiciones.

#### CONFIABILIDAD DE LA PLANTA PURIFICADORA DE AGUA WF-21, CA. (DAVID G. ARGO, 1980).

La planta purificadora de agua WF-21, construida por el Distrito de Agua del Condado de Orange en Fountain Valley, California, es una instalación recuperadora de aguas residuales, de diseño avanzado, que produce hasta 0.66 m<sup>3</sup>/seg (15 mgd) de agua a partir de un efluente secundario tratado biológicamente. El agua producida se inyecta en la cuenca de agua del subsuelo por medio de una serie de pozos de inyección a lo largo de la costa, para constituir una barrera contra la intrusión del agua de mar, al tiempo que se recuperan las reservas de agua subterránea.

Los procesos de tratamiento seleccionados para la WF-21 (figura 5.2), fueron diseñados para obtener un agua capaz de cumplir con los estándares para agua potable. Para determinar la confiabilidad de la calidad del agua obtenida, se condujeron investigaciones durante tres años por el Distrito de Agua del Condado de Orange y por la Universidad de Stanford.

Los procesos usados fueron clarificación con cal y recalcinación de los lodos, remoción de amoníaco, recarbonatación, cloración a punto de quiebre, filtración en medio mez-

**TABLA 5.5. RESUMEN DE LOS COSTOS DE PRETRATAMIENTO Y RECARGA DE LAS AGUAS SUBTERRANEAS EN LOS EE UU, (INCLUYENDO PROCESAMIENTO DE LODOS): COSTOS DE 1977.**

METODO DE RECARGA	SISTEMA DE PRETRATAMIENTO	COSTO UNITARIO EN \$ /1000 GALONES		
		1 MGD	10 MGD	50 MGD
DISTRIBUCION SUPERFICIAL	TRATAMIENTO SECUNDARIO EN LAGUNAS AIREADAS (PRETRATAMIENTO MINIMO)	38.1	19.7	15.8
DISTRIBUCION SUPERFICIAL	TRATAMIENTO SECUNDARIO CON LODOS ACTIVADOS (PROYECTO TIPO WITTIER NARROWS)	127.3	59.6	52.8
DISTRIBUCION SUPERFICIAL	LODOS ACTIVADOS, FILTRACION, ADSORCION EN GAC*	200.2	84.6	64.6
DISTRIBUCION SUPERFICIAL	LODOS ACTIVADOS, CAL EN EXCESO, RECARBONATACION, FILTRACION, ADSORCION EN GAC, CLORACION	238.7	100.6	75.5
INYECCION MEDIANTE POZOS	LODOS ACTIVADOS, CAL EN EXCESO, RECARBONATACION, IGUALACION DE PH, FILTRACION, REMOCION DE AMONIACO POR INTERCAMBIO IONICO, CLORACION A PUNTO DE QUIEBRE, ADSORCION EN GAC, OSMOSIS INVERSA, OZONACION, Y CLORACION	481.3	214.6	171.8

\* GAC son las siglas en inglés de Carbón Activado Granular. • Fuente: Culp, 1980.

clado, adsorción en carbón activado con regeneración de carbón, postcloración, y desmineralización por ósmosis inversa.

Este estudio demostró que los procesos AWT a una escala completa pueden ser confiables en la remoción de muchos contaminantes de las aguas residuales municipales tratadas biológicamente, obteniéndose reducciones de orgánicos trazas específicos a menos de 1 µg/l.

Finalmente, la inyección del agua recuperada en las cuencas de aguas subterráneas, aumenta la confiabilidad y seguridad de este sistema.

#### SELECCION DE SITIOS DE RECARGA (WARREN W. WOOD, 1980).

El problema del establecimiento de un criterio racional de diseño para recarga artificial, descan

sa en gran medida en la predicción de la reducción de la conductividad hidráulica como función de la calidad y cantidad del agua de entrada.

La reducción de la conductividad hidráulica del acuífero receptor usualmente ocurre en o cerca de la intercara agua-acuífero, por mecanismos físicos, químicos y biológicos. El taponamiento de acuíferos recarga dos artificialmente por crecimientos biológicos, es un problema serio y frecuentemente es un factor limitante del éxito de las operaciones de recarga artificial. La mayoría de los reportes publicados que tratan el problema del taponamiento biológico, sugiere que éste ocurre debido al crecimiento in-situ de bacterias en o cerca de la interfase agua-acuífero, más que por el transporte y acumulación de células muertas en la intercara. Hay evidencia de que gran parte de esta pérdida de la conductividad hidráulica se asocia con el cambio de condiciones aeróbicas a anaeróbicas cerca de la intercara agua-acuífero. Además, el taponamiento real resulta de la obstrucción física causada por el crecimiento de las células, así como por la acumulación de sus productos de desecho, incluyendo la generación de gas ligeramente soluble que queda atrapado en los poros.

El taponamiento inducido químicamente puede ocurrir en dos formas, una en la cual el agua de recarga reacciona con el agua intersticial o con la estructura esquelética para formar un precipitado; la segunda resulta de la dispersión de las arcillas presentes por naturaleza en el acuífero.

El taponamiento por precipitación mineral generalmente no ha sido un problema serio en la recarga de

agua potable, debido tal vez a la cinética lenta que causa que la precipitación ocurra en una gran área de acuífero más que en la intercara, y/o a que la precipitación ocurre en espacios de poros relativamente aislados con poco efecto en la conductividad hidráulica, y/o a que el volumen total de precipitación es demasiado pequeño como para afectar significativamente la conductividad hidráulica.

El taponamiento de acuíferos por la introducción de material particulado no se ha entendido bien. La mayor parte de la investigación en esta área ha tratado de la eficiencia de la filtración rápida en arena más que de la reducción de la conductividad hidráulica.

El desarrollo de la recarga artificial como herramienta efectiva en la administración del agua, requiere que los criterios técnicos para la selección del sitio que se desarrollen, puedan predecir satisfactoriamente el inicio del taponamiento del acuífero por mecanismos químicos, físicos y biológicos. Otros factores técnicos que afectan la recarga artificial tales como la cantidad y la calidad del agua disponible, la tasa de recarga, la disponibilidad de almacenamiento, y los cambios químicos después de la recarga, son de desarrollo más avanzado que la predicción de la reducción de la conductividad hidráulica.

PROCESOS QUE AFECTAN EL MOVIMIENTO Y DESTINO DE LOS ORGANICOS TRAZAS (PERRY L. MC CARTY, BRUCE E. RITTMANN AND MARTIN REINHARD, 1980).

El movimiento y destino de los materiales orgánicos contenidos en los ambientes subsuperficiales des-

pués de la recarga, son gobernados en gran medida por los procesos de sorción y de biodegradación. La sorción afecta la tasa de recarga del material orgánico a través de los sistemas subsuperficiales, en relación con la del agua. La sorción también permite la acumulación de compuestos orgánicos en el medio sólido subsuperficial. Parece que los materiales orgánicos hidrofóbicos son adsorbidos (ya sea adsorbidos o adsorbidos) por el material orgánico particulado contenido dentro o sobre el medio sólido; por lo tanto, la magnitud de la sorción parece ser una función de la fracción de carbono orgánico dentro de la matriz subsuperficial.

La partición de los orgánicos hidrofóbicos entre la fase acuosa y las partículas orgánicas subsuperficiales, se puede estimar a partir del coeficiente de partición octanol/agua de cada compuesto orgánico. Esto es un hallazgo importante porque tales valores son fácilmente disponibles para muchos compuestos orgánicos, o se pueden determinar con relativa facilidad en el laboratorio. Se encontraron buenas correlaciones entre las predicciones de los tiempos relativos de retención y las mediciones de campo, para varios compuestos basándose en la fracción orgánica del medio subsuperficial y el coeficiente octanol/agua. Tales predicciones no son aplicables a materiales orgánicos ionizados o relativamente hidrofílicos. Las especies atómicas pueden estar más sujetas a intercambio iónico en las arcillas.

El destino final de los compuestos orgánicos en el sistema subsuperficial, también depende de su biodegradabilidad. En la actualidad, la biodegradación parece ser el único proceso significativo que puede afectar

la transformación de los materiales orgánicos en este ambiente. Los modelos de película biológica son útiles para la explicación de la magnitud de la biodegradación que puede ocurrir, y de los efectos de la competencia entre los diferentes donadores y aceptores de electrones. Las predicciones de los modelos y los estudios de laboratorio han indicado que hay una concentración mínima a la cual un material orgánico sencillo puede descomponerse en condiciones de estado estacionario. Esta concentración es función de los diversos coeficientes de crecimiento y de cainiento de las bacterias, que a su vez son funciones de las variables ambientales tales como temperatura, pH, y de las especies bacterianas y aceptores electrónicos presentes. En general, la concentración mínima para orgánicos parece menor bajo condiciones aeróbicas que anaeróbicas.

Los materiales orgánicos trazas pueden ser biodegradables, pero se encuentran frecuentemente por debajo de su concentración mínima descrita anteriormente. La biodegradación de tales materiales ocurre generalmente sólo si se utilizan como substratos secundarios, condición que requiere la presencia de un substrato orgánico primario en una concentración mayor a su concentración mínima, así como la presencia de especies bacterianas capaces de descomponer tanto los substratos primarios como los secundarios.

#### DESTINO DE LOS MICRO CONTAMINANTES INORGANICOS DURANTE LA RECARGA. (A.C. CHANG AND A.L. PAGE, 1980).

Muchos contaminantes están presentes en el agua de recarga, en estado disuelto. Como la acción física de filtración no tiene efecto en la



remoción de los constituyentes disueltos, para que los metales trazas sean retenidos en el suelo, se requieren reacciones químicas y microbiológicas que los inmovilicen. En un sistema de recarga de aguas subterráneas, el impacto de las actividades microbianas en la atenuación de los microcontaminantes inorgánicos, es pequeño. Los mecanismos químicos que son importantes para la capacidad del suelo para reaccionar con elementos metálicos trazas, son los siguientes:

- i) reacciones de intercambio catiónico,
- ii) precipitación,
- iii) adsorción superficial, y
- iv) quelación y acomplejación.

Durante períodos largos de tiempo, los metales trazas también se pueden incrustar en los minerales de arcilla. Debido a que tienen tasas de reacción relativamente lentas, no se espera que alteren el sistema.

**INTERCAMBIO IÓNICO.** Cuando una solución de electrólitos entra en contacto con el suelo, exhibe propiedades de intercambio iónico que permite la permutación de cationes y de aniones entre la fase sólida (el suelo) y la fase líquida (la solución de electrólitos). En suelos normales, el intercambio de cationes es la reacción química predominante. La reacción electrostática reversible de intercambio de cationes en el suelo, se debe a la sustitución isomorfa de minerales de silicatos depositados en estratos, y a la hidratación de óxidos e hidróxidos amorfos de hierro, aluminio y sílice, y a la disociación de protones de varios grupos funcionales de la materia orgánica.

Quando sucede la sustitución de un ion de menor valencia en los silicatos presentes en las capas de suelo (por ejemplo,  $Al^{3+}$  por  $Si^{4+}$  en las capas tetraédricas, y  $Mg^{2+}$  por  $Al^{3+}$  en las capas octaédricas), resulta un desbalance de cargas en los minerales de arcilla que aumenta su capacidad para adsorber e intercambiar cationes.

Debido a que los metales trazas (Cu, Ni, Zn, etc.) ocurren en las aguas residuales y en las soluciones del suelo en concentraciones menores que los metales alcalinos (Na, K) y alcalinotérreos (Ca, Mg), no existe la certeza de que el intercambio iónico juegue un papel principal en la inmovilización de los elementos trazas en el suelo.

**ADSORCION.** Este término denota la adhesión química y física de sustancias disueltas, en la superficie de un medio sólido en una película delgada. Cuantitativamente, la reacción de adsorción puede ser descrita por isotermas que establecen la relación entre la cantidad adsorbida desde una solución y la concentración residual del adsorbato, en el equilibrio.

Estudios recientes han indicado una afinidad fuertemente selectiva de iones metálicos trazas en ciertos sitios de adsorción de los suelos. Se ha sugerido que esta fuerte adsorción ocurre en la superficie de formas cristalinas y amorfas de óxidos de hierro, manganeso y aluminio. Otras propiedades del suelo como textura y capacidad de intercambio catiónico, no parecen influir significativamente en las características de adsorción de los metales trazas en los suelos.

Los metales trazas que ocurren

como aniones en solución (As, Cr(VI), F, Mo, Se) también son retenidos por los suelos, con una alta afinidad. En los suelos, la química del Cr(VI) es única. Usualmente se reduce rápido a la forma catiónica Cr(III), la cual forma compuestos altamente insolubles en el suelo. Se ha pensado que el mecanismo por el cual los aniones metálicos trazas ( $AsO_4^{3-}$ ,  $AsO_3^{3-}$ ,  $F^-$ ,  $MoO_4^{2-}$ ,  $SeO_4^{2-}$ ,  $SeO_3^{2-}$ ) son retenidos, involucra una interacción con formas cristalinas o amorfas de óxidos de hierro y aluminio. Asimismo, la adsorción de aniones por los suelos depende del pH, y aumenta conforme el pH del sistema disminuye.

Comparado con otros metales, el boro es débilmente adsorbido por los suelos. La tabla 5.6 resume los coeficientes de Langmuir de máxima adsorción (B) y de energía relativa al enlace (K) para el Cd en 30 suelos.

TABLA 5.6. ADSORCIÓN DEL CADMIO POR VARIOS SUELOS, EXPRESADA POR LA ISOTERMA DE LANGMUIR.†

TIPO DE SUELO	NUMERO DE SUELOS	COEFICIENTES DE LANGMUIR	
		B, MG/G	K
SUELOS ORGANICOS	5	5.165 ± 0.085	0.144 ± 0.051
ARCILLAS PESADAS	8	4.879 ± 0.323	0.102 ± 0.045
ARCILLAS PLASTICAS			
ARENOSAS Y DE ALUVION	12	4.942 ± 0.639	0.108 ± 0.048
SUELOS ARENOSOS	5	4.989 ± 0.352	0.060 ± 0.042
	Total 30		

†  $\frac{c}{x/m} = \frac{1}{KB} + \frac{c}{B}$ , donde c es la concentración de equilibrio del Cd (mg/l) y x/m es la cantidad de Cd adsorbido por unidad de suelo; B es la adsorción máxima, y K es una constante relativa a la energía de enlace del suelo con el Cd.

Fuente: Chang y Page, 1980.

PRECIPITACION. Puesto que la adsorción y las reacciones de precipitación en el suelo, sirven para reducir la concentración de metales tra-

zas en el agua residual aplicada, es difícil distinguir entre los dos mecanismos. Numerosos estudios han demostrado que las concentraciones de la mayoría de los metales trazas en las aguas residuales y en las soluciones del suelo, son mucho menores que las predichas a partir de las constantes del producto de solubilidad de los carbonatos e hidróxidos metálicos. Estas concentraciones menores indican la formación de compuestos metálicos menos solubles o que las reacciones de adsorción controlan la concentración de equilibrio de los elementos metálicos trazas en la solución del suelo.

QUELACION Y COMPLEJACION. En soluciones acuosas, los iones metálicos son capaces de combinarse con ligandos orgánicos e inorgánicos para crear formas complejas. La ocu-

rrencia de estas reacciones conforme el agua se mueve a través del suelo, afecta la cinética y equilibrio químicos de las otras reaccio-

nes asociadas con los metales trazas.

#### REMOCION DE PATOGENOS DURANTE LA RECARGA (CHARLES P. GERBA AND J. CLARENCE LANCE, 1980).

La efectividad de la remoción de patógenos se determina por la supervivencia y la retención, los cuales dependen de:

- 1) el clima,
- 2) la naturaleza del suelo, y
- 3) la naturaleza del microorganismo.

La supervivencia de los virus:

i) se ve incrementada conforme aumenta la adsorción de virus al suelo, y cuando se elevan los niveles de aluminio intercambiable,

ii) disminuye cuando aumenta el pH y el fósforo extractable con resina, y cuando se eleva la temperatura, y

iii) los microorganismos aeróbicos del suelo afectan adversamente la supervivencia de los virus, mientras que los anaeróbicos no tienen efecto.

#### EL PROYECTO DE LA REGION DEL DAN, EN ISRAEL (EMANUEL IDELOVITCH, RICHARD TERKELTOUB AND MEDY MICHAIL, 1980).

La recarga de aguas subterráneas con efluentes terciarios, mediante cuencas de distribución, se practica en el proyecto de la región del Dan, para reuso indirecto del agua residual municipal del área metropolitana de Tel Aviv (figuras 5.3

y 5.4). Un programa de monitoreo acompaña la operación de recarga a gran escala. El ion cloruro es un trazador confiable del efluente recargado en el acuífero. La calidad del efluente (tabla 5.7) se mejora substancialmente a su paso por la zona no saturada y por el acuífero de piedra arenisca calcárea, particularmente con respecto a: materia orgánica, fósforo, estabilidad química, RAS y varios elementos trazas. Además del tratamiento del efluente, la recarga de las aguas subterráneas proporciona un almacenamiento estacional y multianual, tiene méritos económicos y psicológicos, y aumenta la confiabilidad del sistema de recarga.

#### FILTRACION EN LAS RIBERAS DEL RHIN (HEINRICH SONTHEIMER, 1980).

La filtración en la ribera del río se ha usado por muchas décadas en el Rin, en Alemania. Se han eliminado por precipitación el hierro, los fosfatos y metales pesados, sin causar obstrucciones en el acuífero (tabla 5.8). Todos los orgánicos son removidos hasta en un 75% por oxidación biológica (tabla 5.9), mientras que los nitratos sirven como aceptores de electrones en condiciones anaeróbicas. Los orgánicos halogenados por su baja biodegradabilidad penetran más fácilmente. Las mejoras en la calidad del río influyen tanto en el filtrado de la ribera como en el agua recuperada. Los orgánicos trazas específicos se remueven pobremente cuando su contenido de halógenos es relativamente alto. La filtración en la ribera ha probado ser una etapa valiosa en el tratamiento, y en combinación con filtros de carbón activado asegura un agua potable sin riesgos.

**TABLA 5.7. MEJORAS EN LA CALIDAD DEL EFLENTE DEBIDAS A LA PERCOLACION A TRAVES DE LA ZONA NO SATURADA Y AL FLUJO A TRAVES DEL ACUIFERO. (Región del Dan, Israel).**

PARAMETRO	EFLENTE DE RECARGA	POZO DE OBSERVACION N° 61 *
SOLIDOS SUSPENDIDOS, mg/l	15	0
DBO, mg/l	8	< 1
DQO, mg/l	60	10
KMnO <sub>4</sub> consumido como O <sub>2</sub> , mg/l	12	2
COD, mg/l	15	3
Amoníaco como N, mg/l	1-5	0
NITROGENO TOTAL, mg/l	7-10	5-8
FOSFORO, mg/l	1	0.02
pH	9.5-10	8
ALCALINIDAD como CaCO <sub>3</sub> , mg/l	130	120
SODIO, mg/l	180	25-170
BORO, mg/l	0.3-0.5	0.05-0.3
SELENIO, µg/l	6-9	< 1-2

\* Bombeando el 100% del efluente de recarga.

Fuente: Idelovitch, 1980.

**TABLA 5.8. REMOCION DE METALES PESADOS POR FILTRACION EN LAS RIBERAS DEL RIO EN EL BAJO RHIN (DUISBERG).**

METAL	RHIN	CONCENTRACION EN µg/L FILTRADO DE LA RIBERA	% DE REMOCION
Zn	180.	33.	82
Cu	31.8	7.5	51
Pb	12.6	3.2	75
Ni	9.5	4.7	51
Cr	7.9	0.5	94
Sn	4.5	3.6	20
As	4.2	0.3	93
Cd	2.0	0.5	75
Se	1.8	1.6	11
Ag	0.5	0.5	0
Hg	0.3	0.2	33
Be	0.1	0.1	0

Valores medios para 1975-78

Fuente: Sontheimer, 1980.

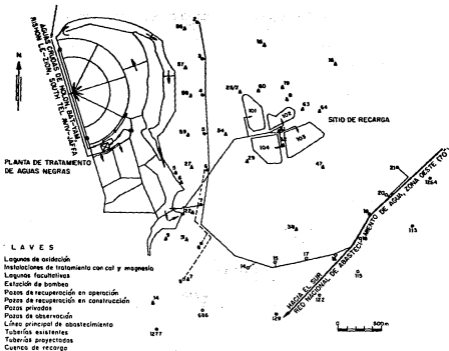


Figura 5.3. Plano del proyecto de recuperación de aguas de desecho de la región del Ban, Israel.

ESTADO DE AGUAS Y SANEAMIENTO  
 1988

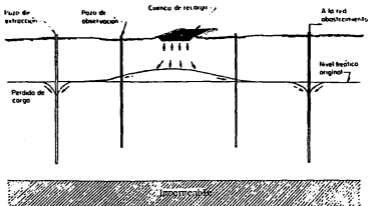


Figura 5.4. Diagrama básico del sistema de recuperación y recarga mediante distribución superficial.

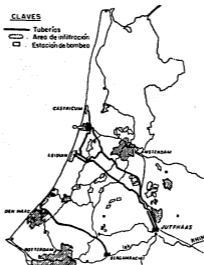


Figura 5.5. Localización de las áreas de infiltración y sus abastecimientos en Holanda.

**TABLA 5.9. EFICIENCIA DE REMOCION DE ORGANICOS TRAZAS DEL RIO RHIN.**

	RIO RHIN	FILTRADO DE LA RIBERA	% DE REDUCCION
Cl ORGANICO DISUELTO	99.	61.	38.4
$CHCl_3 + CCl_4$	3.4	2.80	17.6
$C_2H_5Cl_2$	0.6	0.45	25.0
$C_2HCl_3$	0.6	0.45	25.0
$C_2Cl_4$	1.5	0.50	66.7
$C_6H_5Cl$	2.30	0.09	96.1
$C_6H_4Cl_2$	2.98	1.65	44.6
$C_6H_3Cl_3$	0.33	0.29	12.1
$C_6H_2Cl_4$	0.02	0.02	0.
$C_6H_4ClCH_3$	1.06	0.06	94.3
$C_6H_3Cl_2OH_2$	0.37	0.14	62.2
$C_6H_6$	0.75	0.15	80.0
$C_6H_5CH_3$	1.90	0.10	94.7

Fuente: Sontheimer, 1980.

**FILTRACION EN BANCOS DE ARENA EN HOLANDA (G.J. PIET AND B.C.J. ZOETEMAN, 1980).**

La recarga artificial de aguas superficiales contaminadas, en dunaas se ha aplicado durante periodos de más de 20 años en Holanda (figura 5.5).

Los constituyentes químicos del agua que afectan su sabor y que tienen posibles efectos a largo plazo en el suelo y en la salud humana, son de gran interés debido al aumento de la contaminación del medio ambiente.

Aunque la recarga artificial se practica durante periodos de muchos años, en la actualidad se debe poner mayor atención al comportamiento de los microcontaminantes orgánicos.

Se recomienda seleccionar químicos orgánicos específicos o clases de químicos tales como compuestos orgánicos de nitrógeno y de cloro, aminas aromáticas, éteres clorados y

solventes clorados muy volátiles, para los estudios en modelos de laboratorio o en instalaciones de abastecimiento de agua que apliquen técnicas de infiltración.

Existe una variedad de compuestos que producen olor en el agua. Algunos de ellos afectan adversamente la calidad del agua, pero otros podrían contribuir a una calidad acorde con la del agua potable. Muchos éteres y ésteres de bajo peso molecular que se producen en el suelo, podrían contribuir a este efecto. Las sustancias olorosas que deterioran la calidad del agua infiltrada en las riberas, no se remueven fácilmente en el subsuelo. Esto ha sido demostrado por las observaciones en las instalaciones de abastecimiento de agua de Zwolle (figuras 5.6 y 5.7). El número de clasificación de olor relativamente alto del agua del Rhin infiltrada en las riberas (figura 5.7), se debe a la presencia de compuestos industriales tales como dicloro y tricloro

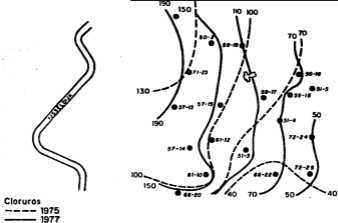


Figura 5.6. Distribución de los cloruros en el acuífero de Zwolle, Holanda.

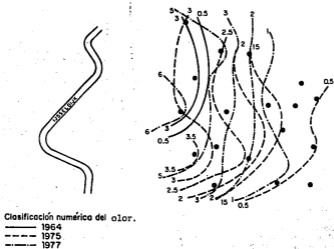


Figura 5.7. Distribución del olor en el acuífero de Zwolle, Holanda.



bencenos, monocloro y dicloroanilinas, 5-cloro-o-toluidina, hexaclorobutadieno y éter bis-(2-cloro isopropilo). Varias de estas substancias se detectaron en agua después de la infiltración, a concentraciones mayores al 1% de su concentración umbral de olor, lo que coincidió con los informes de varios consumidores. Es evidente que una intrusión de compuestos olorosos está teniendo lugar en las instalaciones abastecedoras de agua de Zwolle, las cuales utilizan la infiltración en las riberas desde 1952 con una producción de  $7.6 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{año}$  en 1976. Los pozos más cercanos al río fueron los primeros en ser afectados.

Las observaciones organolépticas de agua infiltrada en las dunas de la Haya (1976) y Holanda del Norte (1966-1970), demostraron que se obtiene una reducción considerable del sabor del agua del río por procesos de pretratamiento como coagulación y filtración rápida en arena. La ozonación antes de la infiltración tiene un efecto benéfico en la calidad organoléptica del agua.

#### RECARGA DE AGUAS SUBTERRANEAS Y EFECTOS EN LA SALUD, EN CALIFORNIA DEL SUR (N. GARRISON, M. NELLOR AND R. BAIRD, 1980).

En 1978, se estableció el Estudio de Reuso del Agua de los Condados de Orange y Los Angeles, para desarrollar un plan regional de reutilización del agua residual generada en esta área metropolitana del sur de California, así como para evaluar los aspectos de salud por la recarga de agua subterránea. Durante tres años y medio se ha investigado extensamente el área de la Bahía de Montebello del Condado de Los Angeles, debido a que desde 1962 parte de su agua

subterránea se ha restituido con agua recuperada (figura 5.8). Estos estudios incluyen caracterizaciones químicas y bacterianas de la calidad del agua, evaluaciones toxicológicas y desarrollo de datos de la población expuesta, así como un estudio epidemiológico.

Para aislar grandes cantidades de residuos orgánicos para el ensayo toxicológico, se ha construido un nuevo concentrador de orgánicos trazas, capaz de colectar y procesar hasta 200 litros de volumen de muestra.

#### SISTEMAS DE INFILTRACION RAPIDA (H. BOWER, F. RICE, J. LANCE AND R. GILBERT, 1980).

Los estudios de infiltración rápida en Phoenix han demostrado que la percolación de efluentes secundarios a través del suelo y del acuífero, produce la completa remoción de los sólidos suspendidos, DBO, bacterias y virus. La remoción de nitrógeno fue del 65% y la de fósforo del 94%. Las concentraciones residuales de carbón orgánico fueron de 3 a 5 mg/l, dependiendo del sitio de muestreo. El agua "renovada" resultante es así adecuada para la recreación e irrigación no restringida, y otros propósitos. La carga hidráulica fue de 60 m/año, pero debería duplicarse a expensas de la remoción de nitrógeno. La recolección del agua renovada con pozos, drenes o mediante la infiltración hacia áreas más bajas (figura 5.9), restringe la porción utilizada del acuífero para la renovación del agua residual, y permite darle un tratamiento adicional al agua renovada si es necesario.

El proyecto de Flushing Meadows consiste básicamente de seis

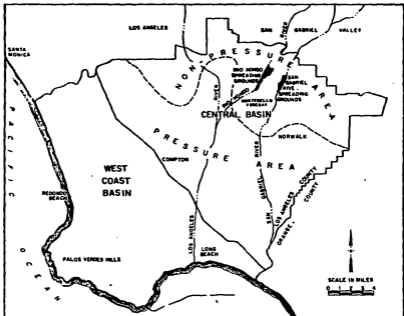


Figura 5.8. Cuencas de agua subterránea o instalaciones de recarga en el Condado de Los Angeles, Estados Unidos.

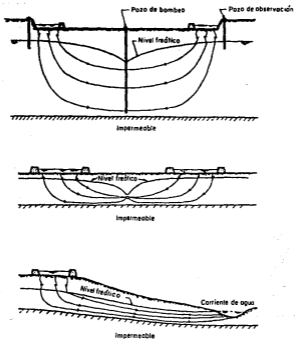


Figura 5.9. Recolección de agua renovada en sistemas de infiltración rápida, mediante pozos (arriba), drenes (centro), o por la filtración natural hacia las corrientes (abajo).

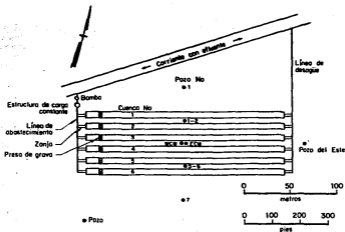


Figura 5:10. Plano del proyecto de Flushing Meadows.

cuenca de infiltración paralelas , de 6.1 x 213 m y separadas 6.1 m (fi gura 5.10). El efluente secundario - (todos activados, sin cloración) de la Planta de Tratamiento de la Aveni da 91, fue bombeado a un extremo de las cuencas dentro de una estructura de derrame que controla el acceso - del agua al otro extremo así como la profundidad del agua en la cuenca - (normalmente 30 o 15 cm).

El suelo de las cuencas consis- te de arena fina arcillosa de 1 m de profundidad situada encima de capas de grava y arena gruesa . El depósi- to de arcilla empieza a la profundi- dad de 75 m. las capas de grava y - arena gruesa forman un acuífero no confinado con un nivel freático a - 3 m de profundidad. Se instalaron po- zos de 6 a 9 m de hondo sobre una lí- nea perpendicular a las cuencas, para obtener muestras de agua renova- da. Se localizaron pozos entre cada par de cuencas y a diferentes puntos fuera del área de las cuencas, a fin de estudiar la calidad del efluente después de que ha alcanzado el acuí- fero debajo de las cuencas, y des- - pués de que se ha movido lateralmen- te fuera de ellas a través del acuí- fero.

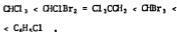
DISEÑO DE LA OPERACION DE RECARGA EN PALO ALTO, CALIFORNIA (P. ROBERTS, P. MC CARTY, W. ROMAN, J. SCHREINER, AND G. HOPKINS, 1978-1980).

Se obtuvieron datos de la cali- dad del agua a partir de un estudio de campo en el cual se inyectó agua recuperada a una tasa de 6 l/seg a un acuífero en Palo Alto Baylands en las márgenes de la bahía de San Fran- cisco (figura 5.11). Se observaron - cambios en la calidad del agua al - analizar muestras de los pozos a dis- tancias de 10 a 40 m y en diferentes

direcciones a partir del punto de in- yección. Los datos de los contaminan- tes orgánicos trazas mostraron evi- dencia del retraso de su movimiento en varios grados, presumiblemente - causado por interacciones adsorbtivas en el acuífero. Los compuestos de - trihalometanos mostraron señales de biodegradación. La concentración to- tal de las substancias orgánicas, me- dida como COF y DCO, disminuyó signi- ficativamente por biodegradación, pe- ro el total de halógenos orgánicos - parece inalterado a su paso por el - acuífero.

El tiempo de residencia del - agua en el acuífero antes de alcan- zar un determinado pozo de observa- ción (figura 5.12), se calculó como sigue: el volumen de agua desplazada a través de los poros se estimó por integración del área arriba de la - curva de avance de cloruros (figura 5.13); el volumen se dividió enton- ces por la tasa promedio de flujo in- yectado para estimar el tiempo de re- sidencia promedio (figura 5.14).

Los compuestos orgánicos difie- ren en el grado de retraso de su mo- vimiento a través del acuífero como lo muestra la figura 5.15. Los datos de avance para cloroformo, bromoformo y clorobenceno en el pozo P5 se - comparan con los del pozo de inyec- ción. El retraso de los compuestos - estudiados se incrementa en el orden



lo cual está en concordancia aproxi- mada con el orden de elución de es- tos compuestos en cromatografía ga- seosa.

Las características del in- - fluyente son:

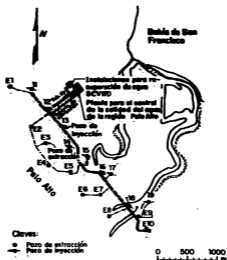


Figura 5.11. Plano de las instalaciones de recarga de aguas subterráneas en Palo Alto Raylands.

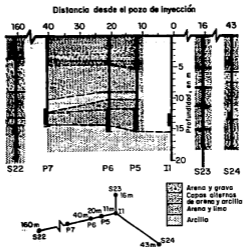


Figura 5.12. Corte del acuífero y diagrama de los pozos de observación en las cercanías del pozo de inyección I1, correspondientes al estudio de recarga de Palo Alto, California.

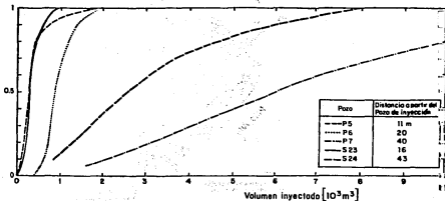


Figura 5.13. Avance, calculado como fracción de 1, del agua inyectada. Se obtuvo a partir de las mediciones de cloruros, ajustando las curvas resultantes para el estudio de Palo Alto, California.

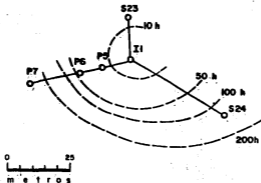


Figura 5.14. Líneas de contorno de los tiempos medios de residencia (en horas) correspondientes al estudio de Palo Alto, California.

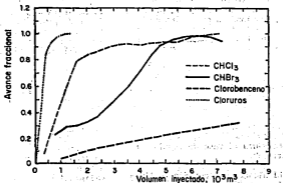


Figura 5.15. Retraso de las trazas de solutos orgánicos en el pozo de observación más cercano en el estudio de Palo Alto, California.



1. Flujo: 88 m<sup>3</sup>/seg.
2. DBO, 20 mg/l.
3. DQO, 30 mg/l.
4. Sólidos suspendidos, 30 mg/l.
5. Amoníaco, 25 mg/l de NH<sub>3</sub>.
6. Sustancias activas al azul de metileno, SAAM, 2 mg/l.
7. Turbiedad, 30 Jtu.
8. Bacterias coliformes, NMP <1000/100 ml.

Los niveles de calidad del efluente a las 24 horas, valores promedio y máximo, son:

1. DBO, 1.0 y 1.0 mg/l.
2. DQO, 10.0 y 15.0 mg/l.
3. SS, 1.0 y 5.0 mg/l.
4. Amoníaco, 2.0 y 5.0 mg/l.
5. SAAM, 0.1 y 0.2 mg/l.
6. Turbiedad, 0.3 y 0.5 Jtu.
7. Coliformes <2.2 y 23 NMP/100 ml.

#### EVALUACION DEL REUSO AGRICOLA DE AGUAS RESIDUALES DEL RIO DE LOS REMEDIOS, MEXICO (S. AYANEGUI, 1984).

Este estudio representa un trabajo pionero en México, dentro de su clase, destinado a profundizar el conocimiento de los problemas involucrados en el uso de aguas municipales residuales para fines agrícolas.

La ubicación del sitio donde se llevó a cabo la experimentación de campo se muestra en la figura 5.16. Como puede observarse, se trata de una parte del bordo de la margen derecha del río de los Remedios, cerca a la zona industrial de Naucalpan en el Estado de México, antes de su desembocadura al vaso de regulación "El Cristo".

El alcance del estudio se limitó a las actividades siguientes:

1. Selección de dos tipos de cultivo (cebolla y lechuga) para evaluar la productividad con distintas calidades de agua de riego.

2. Operación de una planta piloto para el tratamiento primario y biológico de las aguas residuales del río de los Remedios, así como evaluación de la calidad de su efluente.

3. Diseño de un programa estadístico de evaluación para comparar los parámetros de productividad de los cultivos (altura, peso y % de establecimiento) en función de los tratamientos experimentales, calidad del agua, variedad de cultivo, y niveles de fertilización.

4. Se diseñaron, trazaron, construyeron y operaron dos series de parcelas experimentales (replicación estadística) con los dos tipos de cultivo, tres tipos de calidad del agua y cuatro niveles de fertilización.

5. En otra parte se diseñó, construyó y operó una zona de infiltración rápida, sin crecimiento vegetativo, para efectuar comparaciones con las parcelas experimentales, operadas a regímenes de riego similares.

6. Se instalaron drenes a 0.6, 1.1 y 1.5 m de profundidad, para coleccionar y transportar el agua percolada de las parcelas experimentales y zona de infiltración rápida.

7. Se extrajeron muestras de suelo en las parcelas y zona de infiltración, antes, durante y después de efectuados los cultivos y su cosecha.

8. Se caracterizaron las aguas para riego, haciéndose las siguientes determinaciones: pH, DBO, DQO, Nitrógeno (amoniacoal, orgánico, nitritos, nitratos y total), dureza total, alcalinidad total, fosfato total, sólidos (ST, SS, SD y Ssed), iones mayores (Na, K, Ca, Mg, Fe), metales pesados (Cu, Al, Cr y Pb), CE, coliformes fecales y totales, así como estreptococos fecales.

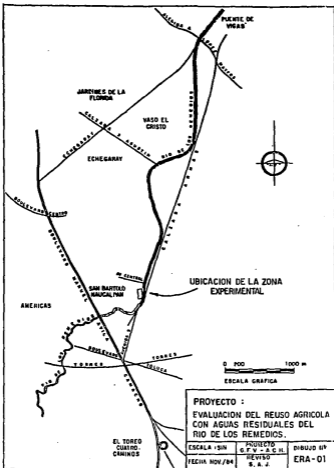


Figura 5.16. Río de los Remedios, Estado de México.

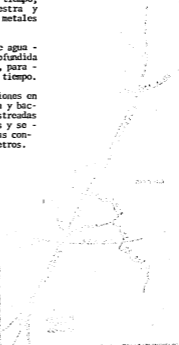
9. Se regaron las parcelas experimentales, utilizando láminas de riego - de acuerdo a las prácticas agronómicas convencionales que suponían la presencia de agua de percolado aún - en el dren de colección más profundo.

10. Se tomaron muestras de ambos cultivos a varios intervalos de tiempo, midiéndose altura de cada muestra y analizándose el contenido de metales pesados.

11. Se extrajeron muestras de agua - percolada a las distintas profundidades en los drenes colectores, para - los diferentes intervalos de tiempo.

12. Se analizaron las variaciones en las calidades física, química y bacteriológica de las aguas muestreadas a las distintas profundidades y se - obtuvieron los perfiles de las concentraciones de dichos parámetros.

INSTITUTO VENEZOLANO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS	
LABORATORIO DE ANÁLISIS QUÍMICO	
CALLE 5ta. N.º 1015, P.O. BOX 218, CARACAS, VENEZUELA	
Fecha:	13-1-66
Analizado:	13-1-66
Analista:	...



## CAPITULO 6.

### MODELOS DE TRANSPORTE DE CONTAMINANTES EN EL AGUA SUBTERRANEA.

#### DESCRIPCION GENERAL DE LA CONTAMINACION DEL AGUA SUBTERRANEA. [12]

En teoría, un hombre puede sobrevivir solamente con cinco litros de agua por día y algunas veces con menos. Aún así, un promedio de 40 a 50 litros por día se necesita para higiene personal y doméstica; más agua se requiere para las labores agrícolas: un campesino necesita 100 litros cuando menos; y en áreas industrializadas son requerimientos comunes 400 a 500 litros por habitante. Para satisfacer estos incrementos drásticos en la demanda de agua, constantemente se tienen que explotar los recursos hidráulicos existentes y se tienen que buscar nuevas fuentes; todos los recursos disponibles deben ser utilizados y especialmente el agua subterránea.

El agua subterránea generalmente ha sido una muy buena fuente de agua potable debido a las propiedades de purificación de los suelos; también se utiliza para irrigación y esparcimiento y, donde es escasa el agua superficial, para propósitos industriales. En muchas zonas áridas y semiáridas, es la principal fuente de agua. Un acuífero constituye normalmente un depósito natural de agua de alta calidad. Pero aunque está más protegida que las aguas superficiales, el agua subterránea parece estar sujeta a contaminación mayor, fenómeno que puede ser definido así:

La contaminación es una modificación de las propiedades físicas, -

químicas y biológicas del agua, restringiendo o previniendo su uso en varias aplicaciones donde normalmente toma parte.

La contaminación del agua subterránea usualmente proviene de cuatro orígenes principales: contaminación industrial, doméstica, agrícola y natural, cada una subdividida en tipos continuo y accidental.

1) La contaminación industrial es acarreada al acuífero por:

a) aguas usadas que contienen compuestos químicos y elementos traza (tales como metales, por ejemplo) o que tienen una alta temperatura. Igualmente por contaminación radioactiva de plantas atómicas.

b) infiltración de agua de lluvia a través de depósitos de desechos.

c) accidentes como el rompimiento de una tubería.

2) La contaminación doméstica se lleva al acuífero por:

a) infiltración de agua de lluvia a través de rellenos sanitarios.

b) accidentes como el rompimiento de tanques sépticos.

3) La contaminación agrícola se debe al agua de irrigación o de lluvia que acarrea fertilizantes, minerales, sales, herbicidas y pesticidas.

4) La contaminación natural se debe principalmente a la intrusión de agua de mar en los acuíferos costeros.

La contaminación bacteriológica se origina principalmente en los desechos domésticos tales como excrementos y no es objeto de un estudio por separado.

## MODELOS. [36]

Un modelo es una herramienta diseñada para representar la realidad en una versión simple. A partir de esta definición, es evidente que todos utilizamos los modelos en nuestra vida diaria. Por ejemplo, un mapa de carreteras es una forma de representar un arreglo complejo de caminos en una forma simbólica, de tal manera que es posible ensayar varias rutas sobre el mapa, más que intentar guiar el automóvil por ensayo y error. Un mapa de carreteras debe considerarse un tipo de modelo (Lehr 1979) por representar la realidad en forma simple. Similarmente, los modelos de agua subterránea también son representaciones de la realidad y si se construyen adecuadamente, pueden ser valiosas herramientas de predicción en la administración de los recursos hidráulicos del subsuelo. Por ejemplo, con el uso de un modelo de agua subterránea es posible ensayar varios esquemas de administración y predecir los efectos de ciertas acciones. Por supuesto, la validez de los pronósticos dependerá de qué tan bien se aproxima el modelo a las condiciones de campo. Son esenciales buenos datos de campo cuando se usa el modelo con propósitos predictivos. Sin embargo, un intento para modelar un sistema con inadecuados datos de campo, también puede ser instructivo, ya que servirá para

identificar aquellas áreas donde son críticos los datos de campo para el éxito del modelo.

Se han utilizado varios tipos de modelos para estudiar los sistemas de flujo de aguas subterráneas. Se pueden dividir en tres categorías principales (Prickett, 1975): modelos con tanques de arena, modelos análogos que incluyen modelos eléctricos y de fluidos viscosos, y modelos matemáticos, que incluyen los analíticos y numéricos. Un modelo con tanques de arena consiste de un depósito lleno con un medio poroso no compactado a través del cual se hace fluir el agua. El principal inconveniente de los modelos con tanques de arena es el problema de reducir la escala de la situación de campo a las dimensiones de un modelo de laboratorio.

Como veremos después, el flujo del agua subterránea se puede describir con ecuaciones diferenciales obtenidas a partir de los principios físicos básicos. Otros procesos, tales como el flujo de corriente eléctrica a través de un medio de resistencias, o el flujo de calor a través de un sólido, también operan bajo principios físicos similares. En otras palabras, estos sistemas son análogos al sistema de aguas subterráneas. Los modelos eléctricos consisten de tableros alambrales con redes eléctricas de resistores y capacitores. La similitud matemática de la ley de Darcy y la ley de Ohm, justifica que los cambios en el voltaje en el modelo eléctrico sean análogos a los cambios en las cargas hidráulicas subterráneas. Una desventaja de estos modelos es que cada uno se diseña para un sistema acuífero único. Cuando se desea estudiar un acuífero diferente, se debe construir un modelo eléctrico completamente nuevo.

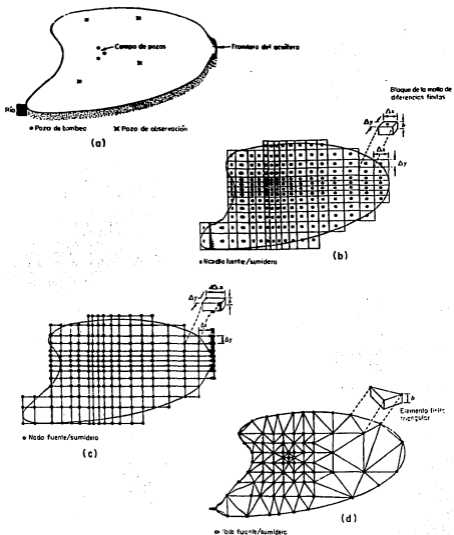


Figura 6.1. Representaciones en diferencias finitas y elemento finito de la región de un acuífero. (a) Vista de planta. (b) Malla para diferencias finitas con los nodos centrados en los bloques, y (c) con los nodos situados en la malla. (d) Elementos finitos.

Un modelo matemático consiste de un juego de ecuaciones diferenciales que gobiernan el flujo del agua subterránea. Se han utilizado desde 1800. Siempre se deben hacer suposiciones simplificadoras para construirlos debido a que las situaciones de campo son demasiado complicadas para simularse exactamente. Muchas soluciones analíticas requieren que el medio sea homogéneo e isotrópico. Tratar con situaciones más reales requiere resolver con aproximaciones los modelos matemáticos, usan do técnicas numéricas, ya sea de diferencias finitas o de elemento finito (figura 6.1).

### PROCESOS DE TRANSPORTE. [11]

El punto de partida en el desarrollo de ecuaciones diferenciales que describan el transporte de solutos en materiales porosos, es considerar el flujo de los solutos hacia adentro y hacia afuera de un volumen elemental fijo en la región de flujo. Una expresión de conservación de la masa para este volumen elemental, es:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{tasa neta de} \\ \text{cambio de ma} \\ \text{sa de soluto} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{flujo de so-} \\ \text{luto hacia} \\ \text{afuera} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{flujo de so-} \\ \text{luto hacia} \\ \text{adentro} \end{array} \right] \pm \left[ \begin{array}{l} \text{pérdidas o gan} \\ \text{ancias de masa de} \\ \text{solute debidas a} \\ \text{reacciones} \end{array} \right]$$

Los procesos físicos que controlan el flujo hacia adentro y hacia afuera del volumen elemental, son la advección (algunos autores emplean el término de convección) y la dispersión hidrodinámica. Las pérdidas o ganancias de masa de soluto dentro

del volumen elemental pueden ocurrir como resultado de reacciones químicas, bioquímicas o de decaimiento radioactivo.

La advección es el componente del movimiento del soluto, atribuido al transporte por el flujo de agua. La tasa de transporte es igual a la velocidad lineal promedio del agua subterránea  $\bar{v}$ , donde  $\bar{v} = v/\phi$ , siendo  $v$  la descarga específica y  $\phi$  la porosidad. El proceso de dispersión hidrodinámica ocurre como resultado del mezclado mecánico y de la difusión molecular.

Las descripciones matemáticas de la dispersión se limitan actualmente a materiales que son isotrópicos respecto a las propiedades dispersivas del medio. La ecuación diferencial principal que describe el transporte de constituyentes reactivos disueltos en medios porosos saturados o isotrópicos, se conoce como ecuación de advección-dispersión.

### CONSTITUYENTES NO REACTIVOS EN MEDIO HOMOGÉNEO. [11]

La forma unidimensional de la ecuación de advección-dispersión para constituyentes disueltos no reactivos en materiales isotrópicos, homogéneos y saturados, y en condiciones de estado estacionario con flujo uniforme, es:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \bar{v} \frac{\partial C}{\partial x} \quad \text{[ec. 6.1]}$$

donde  $x$  es la coordenada curvilínea cuya dirección se toma a lo largo de una línea de corriente,  $\bar{v}$  es la velocidad lineal promedio del agua subterránea,  $D_1$  es el coeficiente

de dispersión hidrodinámica en la dirección longitudinal (es decir, a lo largo del recorrido de flujo), y  $C_0$  es la concentración de soluto. Los efectos de las reacciones químicas, transformaciones biológicas y decaimiento radioactivo no se incluyen en esta forma de la ecuación de transporte.

El coeficiente de dispersión hidrodinámica se puede expresar en términos de dos componentes:

$$D_L = \alpha_L \bar{v} + D^* \quad \text{[ec. 6.2]}$$

donde  $\alpha_L$  es una propiedad característica del medio poroso conocida como dispersividad dinámica, o simplemente dispersividad [L], y  $D^*$  es el coeficiente de difusión molecular para el soluto en el medio poroso [ $L^2/T$ ]. La relación entre  $D^*$  y el coeficiente de difusión para especies de soluto en agua, se describe en el capítulo 4. Algunos autores han indicado que una forma más exacta del coeficiente de dispersión, es  $\alpha_L^m$ , donde  $m$  es una constante determinada empíricamente entre 1 y 2. Los estudios de laboratorio indican que para propósitos prácticos,  $m$  puede igualarse a la unidad para materiales geológicos granulares.

El experimento clásico mostrado en la figura 6.2, es una de las formas más directas de ilustrar el significado físico de la versión unidimensional de la ecuación de advección-dispersión. Las condiciones de frontera representadas por la función constante de entrada, se describen matemáticamente como:

$$\begin{aligned} C(x, 0) &= 0 & ; & & x \geq 0 \\ C(0, t) &= C_0 & ; & & t \geq 0 \\ C(x, t) &= 0 & ; & & t \geq 0 \end{aligned}$$

Para estas condiciones de frontera, la solución de la ecuación 6.1 para un medio poroso homogéneo y saturado, es (Ogata, 1970):

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2} \left\{ \text{ferc} \left( \frac{x - \bar{v}t}{\sqrt{2D_L t}} \right) + \exp \left( \frac{\bar{v}x}{D_L} \right) \text{ferc} \left( \frac{x + \bar{v}t}{\sqrt{2D_L t}} \right) \right\} \quad \text{[ec. 6.3]}$$

donde ferc representa la función error complementaria, tabulada en el Anexo 1;  $x$  es la distancia a lo largo del recorrido de flujo, y  $\bar{v}$  es la velocidad lineal promedio del agua.

Una de las características del proceso dispersivo es que causa la distribución del soluto, si existe la oportunidad, en direcciones transversales al recorrido de flujo, así como en las longitudinales. Esto se ilustra esquemáticamente para un caso bidimensional de flujo horizontal en la figura 6.3 (a). En esta caja experimental de arena, un trazador no reactivo se introduce continuamente en la región de flujo uniforme. La dispersión en este dominio bidimensional de flujo, se ilustra de manera diferente por el experimento mostrado en la figura 6.3 (b), en la cual el trazador se introduce como una fuente puntual instantánea (es decir, como un disparo de trazador) en el régimen de flujo uniforme.

Las expresiones unidimensionales para el transporte de constituyentes disueltos, como la ecuación 6.1, son útiles en la interpretación de columnas experimentales de laboratorio, pero son de alcance limitado en el análisis de problemas de campo debido a que la dispersión ocurre en direcciones transversales como longitudinales. Como ejemplo de la solución de la ecuación de advección-dispersión tridimensional siguiente:



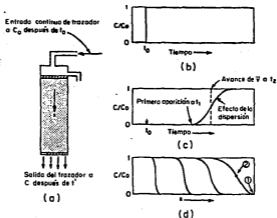


Figura 6.2. Dispersión longitudinal de un trazador que pasa a través de una columna de medio poroso. (a) Columna con flujo estacionario y suministro continuo del trazador después del tiempo  $t_0$ . (b) Entrada del trazador según la función constante. (c) Concentración relativa del trazador a la salida de la columna. (d) Perfil de concentración del trazador en la columna a diversos tiempos.

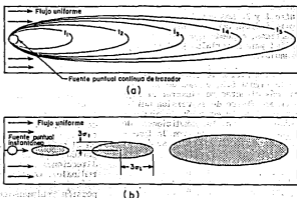


Figura 6.3. Distribución de un trazador en una región de flujo uniforme bidimensional de arena isotrópica. (a) Alimentación continua del trazador con la condición inicial de función constante. (b) Fuente puntual instantánea.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = [D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}] -$$

$$- [\bar{u}_x \frac{\partial C}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial C}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial C}{\partial z}]$$

[ec. 6.4]

se seguirá la aproximación descrita por Baetsle (1969). Considérese, como en la figura 6.3 (b), que el contaminante se origina con una descarga instantánea de una fuente puntual en  $x=0, y=0, z=0$ . Entonces, la masa de contaminante se acarrea fuera de la fuente por transporte en una región de flujo uniforme en estado estacionario, con movimiento en la dirección  $x$  en un medio isotrópico y homogéneo. Conforme se transporta la masa de contaminante a través del sistema de flujo, la distribución de la concentración del contaminante en el tiempo  $t$ , está dada por:

$$C(x,y,z,t) =$$

$$= \frac{M}{8(\pi t)^{1.5} \sqrt{D_x D_y D_z}} \exp\left(-\frac{X^2}{4D_x t} - \frac{Y^2}{4D_y t} - \frac{Z^2}{4D_z t}\right)$$

[ec. 6.5]

donde  $M$  es la masa de contaminante introducido en la fuente puntual,  $D_x, D_y$  y  $D_z$  son los coeficientes de dispersión en las direcciones  $x, y, z$ , y  $X, Y, Z$  son las distancias en las direcciones  $x, y, z$  desde el centro de gravedad de la masa de contaminante. La posición del centro de gravedad de esta masa en el tiempo  $t$  se situará a lo largo del recorrido de flujo en la dirección  $x$ , en las coordenadas  $(x_t, y_t, z_t)$ , donde  $y_t = z_t = 0$ , y  $x_t = \bar{u} t = ut/\phi$ , siendo  $\bar{u}$  la velocidad lineal promedio,  $\phi$  la descarga específica y  $\phi$  la porosi-

dad. En la ecuación 6.5,  $X = x - \bar{u}t$ ,  $Y = y$ , y  $Z = z$ . De acuerdo con la ecuación 6.5, parece que la concentración máxima se localiza en el centro de gravedad de la nube contaminante, donde  $X=0, Y=0, Z=0$ . La masa de contaminante introducida en la fuente puntual es igual a  $C_0 V_0$ , donde  $C_0$  es la concentración inicial y  $V_0$  es el volumen inicial. En la formulación matemática de las condiciones iniciales, la entrada de contaminante ocurre en un punto y por lo tanto tiene masa pero no volumen. En la práctica, sin embargo, esto se expresa por la cantidad  $C_0 V_0$ .

A partir de la ecuación 6.5 se obtiene que la concentración máxima que ocurre en el centro de gravedad de la nube contaminante, está dada por:

$$C_{\max} = \frac{C_0 V_0}{8(\pi t)^{1.5} \sqrt{D_x D_y D_z}} \quad [\text{ec. 6.6}]$$

La zona que contiene el 99.7% de la masa de contaminante está descrita por el elipsoide con dimensiones, medidas desde el centro de masa, de  $3\sigma_x = \sqrt{2D_x t}$ ,  $3\sigma_y = \sqrt{2D_y t}$ ,  $3\sigma_z = \sqrt{2D_z t}$ , donde  $\sigma$  es la desviación estándar de la distribución de la concentración.

#### CONSTITUYENTES NO REACTIVOS EN MEDIO HETEROGENEO. (III)

Si no fuera por el efecto de la heterogeneidad de los materiales geológicos naturales, el problema de la predicción y detección del comportamiento de los contaminantes en sistemas de flujo de agua subterránea, se ría fácilmente resuelto.

Para ilustrar el efecto en los patrones de transporte de las heterogeneidades en estratos simples, se utilizará la sección transversal de la región de flujo de la figura 6.4 (a). Supóngase que el flujo del agua subterránea ocurre en estado estacionario a través de la sección transversal y que la región de flujo es isótropa con respecto a la conductividad hidráulica. Además existe una zona de entrada de contaminante en la sección, lo que constituye un área de recarga del sistema. En situaciones de campo, esto sería representado por infiltración a través de lagunas de desechos, rellenos sanitarios, o cualquier otra fuente superficial o cercana a la superficie. Las figuras 6.4 (b), (c), (d) y (e) muestran los patrones de transporte de contaminante que ocurrirán con varias configuraciones hipotéticas de la estratigrafía. Se supone que el contaminante no es reactivo y que el efecto de la dispersión es despreciable. Las líneas de corriente que marcan los límites de los patrones de migración del contaminante, se obtuvieron resolviendo la forma bidimensional de la ecuación de flujo del agua subterránea en estado estacionario (ecuación 3.12), mediante el método del elemento finito (capítulo 7) en la manera descrita por Pickens y Lennox (1976).

Aproximadamente todos los estudios de dispersión reportados en la literatura han involucrado materiales arenosos relativamente homogéneos bajo condiciones controladas de laboratorio. Estos estudios indican que la dispersividad de estos materiales es pequeña. Los valores de dispersividad longitudinal están en el rango de 0.1 a 10 m, mientras que los de dispersividad transversal

normalmente son menores por un factor de 5 a 20. Muchos investigadores han concluido que los valores de las dispersividades longitudinal y transversal en sistemas de campo, son significativamente mayores que los valores obtenidos en experimentos de laboratorio, en materiales homogéneos o con heterogeneidades simples. Valores de dispersividad longitudinal tan grandes como 100 m y de dispersividad lateral de 50 m, se han utilizado en estudios de simulación matemática de la migración de grandes plumas de contaminantes en acuíferos arenosos (Pinder, 1973; Konikow and Bredehoeft, 1974; Robertson, 1974).

Para ilustrar el efecto de grandes dispersividades en la migración de contaminantes en un sistema hipotético de flujo de aguas subterráneas, se usará la sección transversal de una región de flujo similar a la mostrada en la figura 6.4 (a) y (b). La figura 6.5 muestra el efecto de la dispersividad en la distribución de la pluma contaminante que emana de una fuente ubicada en el área de recarga del sistema. Aunque la sección transversal de la figura 6.5 es homogénea, se supone que las dispersividades del sistema son grandes como resultado de heterogeneidades de pequeña escala. Con los valores asignados de dispersividad, se pueden simular los patrones de distribución de contaminante, utilizando la aproximación por elemento finito de la ecuación de transporte expresada en forma bidimensional para un medio isótropo, heterogéneo y saturado:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s_x} \left( D \frac{\partial C}{\partial s_x} \right) + \frac{\partial}{\partial s_z} \left( D \frac{\partial C}{\partial s_z} \right) - \frac{\partial}{\partial s_x} (\bar{v}_x C), \quad [\text{ec. 6.7}]$$

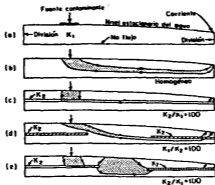


Figura 6.4. Efecto de los estratos en los recorridos de flujo, en sistemas de aguas subterráneas. (a) Condiciones de frontera. (b) Caso homogéneo. (c) Cava única de alta conductividad. (d) Dos estratos de baja conductividad. (e) Dos estratos de alta conductividad.

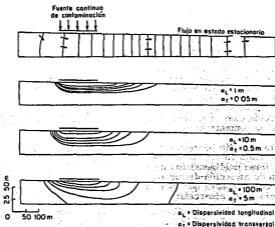


Figura 6.5. Dispersión de un contaminante en un sistema de aguas subterráneas. Porosidad del 30%. Conductividad hidráulica de 0.5 m/día. Contornos de concentración a  $C/C_0 = 0.9, 0.7, 0.5, 0.3$  y 0.1.

donde  $s_x$  y  $s_t$  son las direcciones de las líneas de corriente del agua subterránea y las perpendiculares a ellas, respectivamente. El modelo de elemento finito usado para obtener las distribuciones de contaminantes de la figura 6.5, fue descrito por Pickens y Lennox (1976).

#### TRANSPORTE DE CONSTITUYENTES REACTIVOS. [11]

Los cambios en la concentración pueden ocurrir por las reacciones químicas que tienen lugar dentro de la fase acuosa por completo, o por la transferencia de soluto hacia o desde otras fases, tales como la matriz sólida del medio poroso, o la fase gaseosa en la zona no saturada. Las numerosas reacciones químicas y bioquímicas que pueden alterar las concentraciones de contaminantes en los sistemas de flujo de aguas subterráneas, se pueden agrupar en seis categorías: reacciones de adsorción-desorción, ácido-básicas, de solución-precipitación, de oxidación-reducción, de complejación o apareamiento de iones, y de síntesis celular microbiana. Los contaminantes radioactivos son influidos por el decaimiento radioactivo además de los procesos no radiogénicos. En la siguiente discusión se hará énfasis en la adsorción como el mecanismo alterador de la concentración.

Para un medio homogéneo y saturado con flujo en estado estacionario, la forma unidimensional de la ecuación de advección-dispersión se expresa de una manera que incluya la influencia de la adsorción:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\rho_b}{\phi} \frac{\partial S}{\partial t},$$

[ec. 6.8]

donde  $\rho_b$  es la densidad global del medio poroso,  $\phi$  es la porosidad, y  $S$  es la masa de constituyente químico adsorbido en la parte sólida del medio poroso por unidad de masa de sólido,  $\partial S/\partial t$  representa la tasa a la cual se adsorbe el constituyente  $[M/MT]$ , y  $(\rho_b/\phi)(\partial S/\partial t)$  representa el cambio causado en la concentración en el fluido por la adsorción o desorción:

$$\frac{M}{L^3} \frac{M}{MT} = \frac{M}{L^3} \frac{1}{T}$$

Se ha visto que las reacciones de adsorción para los contaminantes de las aguas subterráneas, normalmente son muy rápidas en relación con la velocidad de flujo. La cantidad de contaminante que se adsorbe en los sólidos (es decir, el grado de adsorción) comúnmente es función de la concentración en solución,  $S=f(C)$  por lo que:

$$- \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial t}$$

y de aquí que:

$$- \frac{\rho_b}{\phi} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\rho_b}{\phi} \frac{\partial S}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial t} \quad [\text{ec. 6.9}]$$

en las cuales, el término  $\partial S/\partial C$  representa la partición del contaminante entre los sólidos y la solución.

Los resultados de los experimentos de adsorción comúnmente se grafican en papel logarítmico. Para especies de soluto a bajas o moderadas concentraciones, se obtienen relaciones gráficas lineales en amplios rangos de concentración. Esta condición se expresa como:

$$\log S = b \log C + \log K_d,$$

que es equivalente a:

$$S = K_d C^b, \quad [\text{ec. 6.10}]$$

donde S es la masa de especies de soluto adsorbidas o precipitadas sobre los sólidos por unidad de masa global seca de medio poroso, C es la concentración de soluto,  $K_d$  y b son coeficientes que dependen de las especies de soluto, naturaleza del medio poroso y otras condiciones del sistema. La ecuación 6.10 se conoce como Isoterma de Freundlich. Para una isoterma lineal, con b=1 en la ecuación 6.10, se tiene que:

$$\frac{dS}{dC} = K_d, \quad [\text{ec. 6.11}]$$

donde  $K_d$  se conoce como coeficiente de distribución.

La transferencia por adsorción u otros procesos químicos, de masa de contaminante desde el agua hacia la parte sólida del medio poroso, mientras ocurre el flujo, causa que la tasa de avance del frente contaminante disminuya. Para ilustrar este concepto, considérese que se agregan dos trazadores al agua que pasa a través de la columna de la figura 6.2 (a). Un trazador no se adsorbe y por lo tanto se mueve con el agua. El otro trazador sufre adsorción y conforme atraviesa la columna, parte de su masa se retiene en el medio poroso. Los dos trazadores se agregan simultáneamente al agua, en la entrada de la columna, de acuerdo con la función de ingreso constante mostrada en la figura 6.2 (b). Conforme ocurre el transporte, los dos trazadores se distribuyen en la columna, en la forma indicada por la figura 6.6.

Para casos en los cuales la partición del contaminante se describe adecuadamente por el coeficiente de distribución (es decir, adsorción rápida y reversible con isoterma lineal), el retraso del frente con respecto a la masa de agua, se describe por la expresión:

$$\frac{\bar{v}}{v_c} = 1 + \frac{\rho_b}{\phi} K_d, \quad [\text{ec. 6.12}]$$

donde  $\bar{v}$  es la velocidad lineal promedio del agua subterránea, y  $v_c$  es la velocidad del punto  $C/C_0=0.5$  del perfil de concentraciones del constituyente retardado. La ecuación 6.12 se conoce comúnmente como ecuación de retardación. El término  $1 + (\rho_b/\phi)K_d$  se denomina factor de retardación. El recíproco del factor anterior se conoce como velocidad relativa  $(\bar{v}/v_c)$ .

Para depósitos granulares no consolidados, la porosidad expresada como fracción varía comúnmente dentro del rango de 0.2 a 0.4. La densidad promedio de los minerales que constituyen a los depósitos consolidados, aproximadamente es 2.65. El rango de las densidades globales de masa,  $\rho_b$ , que corresponde al rango anterior de porosidad, es 1.6 a 2.1 g/cm<sup>3</sup>. Para estos rangos de porosidad y densidad global, los valores de  $\rho_b/\phi$  varían de 4 a 10 g/cm<sup>3</sup>. Por lo tanto, una aproximación de la ecuación 6.12 es:

$$\frac{\bar{v}}{v_c} = (1 + 4 K_d) \text{ a } (1 + 10 K_d).$$

Los coeficientes de distribución para solutos reactivos varían desde cero hasta 10<sup>3</sup> ml/g o más. De acuerdo con la expresión anterior para la velocidad relativa, parece que

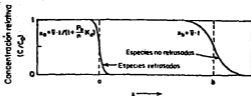


Figura 6.6. Avance de los solutos adsorbidos y no adsorbidos en una columna de materiales porosos. Las entradas de soluto son a la concentración  $C_0$  para tiempos mayores de cero.

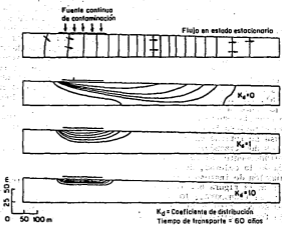


Figura 6.7. Efecto del coeficiente de distribución en el retraso del contaminante durante su transporte en un sistema de aguas subterráneas. Porosidad de 0.3. Conductividad hidráulica de 0.5 m/d.  $a_1 = 10$  m.  $a_2 = 0.5$  m. Contornos de concentración a  $C/C_0 = 0.9, 0.7, 0.5, 0.3$  y  $0.1$ .

si  $K_d = 1 \text{ ml/g}$ , el punto del 50% de la concentración de soluto se retrasará respecto al flujo global del agua subterránea por un factor entre 5 y 11. Para valores de  $K_d$  mayores a 1, el soluto permanecerá esencialmente inmóvil.

Para ilustrar adicionalmente el efecto de la partición líquido-fase sólida, se usará la sección transversal de la región de flujo de las figuras 6.4 y 6.5. El patrón de contaminación causado por el ingreso de agua con especies contaminantes con diferentes coeficientes de distribución, se muestra en la figura 6.7. Estos resultados fueron obtenidos por Pickens y Lennox (1973) usando el método del elemento finito en la ecuación de transporte con el término de reacción descrito por la ecuación 6.9.

#### SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE DISPERSION LONGITUDINAL EN MEDIO POROSO (A. OGATA AND R.B. BANKS, 1961).

La mayoría de los investigadores han usado la transformación de coordenadas  $(x - vt)$  para resolver la ecuación de dispersión de un fluido que se mueve en medio poroso. Además el uso de las condiciones de frontera  $C = 0$  a  $x = \infty$ , y  $C = C_0$  a  $x = 0$  para  $t > 0$  conduce a distribuciones de concentración que resultan simétricas. Este estudio presentó una solución de la ecuación diferencial sin usar esta transformación para obtener una distribución asimétrica de la concentración. Se demostró que la solución se aproxima a la obtenida con condiciones de frontera simétricas, siempre que el coeficiente de dispersión  $D$  sea pequeño y no se considere la región cercana a la

fuente.

El problema específico considerado es el de un medio semi infinito que tiene una fuente plana en  $x = 0$ . La ecuación gobernante es la 6.1 escrita en términos de  $x$  en vez de  $t$ .

Inicialmente, en el medio tiene lugar el flujo saturado de solución de concentración  $C = 0$ . Así, las condiciones de frontera apropiadas son:

$$\begin{aligned} C(0,t) &= C_0 ; t \geq 0 \\ C(x,0) &= 0 ; x \geq 0 \\ C(\infty,t) &= 0 ; t \geq 0 \end{aligned}$$

La solución analítica es similar a la ecuación 6.3.

#### METODO NUMERICO PARA ESTIMAR EL FLUJO SIMULTANEO DE AGUA Y SALES EN SUELOS NO SATURADOS (E. BRESLER AND R.J. HANKS, 1969).

En este estudio se presentó un método para estimar la distribución de un soluto no adsorbido en el suelo, en respuesta a diversas condiciones de humedad. Esencialmente, el modelo es una combinación de un método numérico desarrollado previamente por Hanks et al. (1969) para la predicción del flujo de agua en suelos no saturados, y de un modelo de distribución de sales descrito por Bresler (1967). El último modelo se modificó para calcular la concentración de las sales en función del tiempo y de la profundidad. Se utilizaron datos experimentales disponibles para probar la aplicabilidad del método.

Considérese el flujo unidimensional de un soluto que no interactúa con el suelo. La tasa de flujo en cualquier punto dado, en la dirección del flujo, está dada por:



$$\left[ \frac{\partial Q}{\partial t} \right]_x = \left[ -D_p \frac{\partial C}{\partial x} + \bar{v} C + s \right]_x, \quad [\text{ec. 6.13}]$$

donde Q es la cantidad de soluto transferido por unidad de área, t es el tiempo,  $D_p$  es el coeficiente de dispersión efectiva de soluto, C es la concentración de soluto, x es la distancia en la dirección del flujo,  $\bar{v}$  es la velocidad promedio de la solución,  $\theta$  es el contenido volumétrico de agua, y s es la tasa de cambio de soluto con el tiempo, por unidad de área, debida a fuentes o sumideros.

Para los problemas tratados en este estudio, la difusión contribuye muy poco en comparación con el flujo viscoso ( $D_p \frac{\partial C}{\partial x} \ll \bar{v} C$ ) y no existen fuentes ni sumideros. La ecuación 6.13 se reduce a:

$$\left[ \frac{dQ}{dt} \right]_x = \left[ \bar{v} C \right]_x \quad [\text{ec. 6.14}]$$

La tasa de acumulación de soluto en un volumen de suelo de área unitaria, con frontera superior fija en  $x = 0$ , y una longitud  $x = L$ , es:

$$\frac{dQ'}{dt} = \left[ \bar{v} C \right]_{x=0} - \left[ \bar{v} C \right]_{x=L} \quad [\text{ec. 6.15}]$$

donde

$$Q' = \int_0^L C(x) \cdot \theta(x) \cdot dx$$

es la cantidad acumulada de soluto.

El modelo se resolvió utilizando el método de diferencias finitas.

#### TRANSPORTE SIMULTANEO DE AGUA Y CLORUROS DURANTE LA INFILTRACION (C. KIRDA, D.R. NIELSEN AND J.W. BIGGAR, 1973).

Se estudió el desplazamiento de los cloruros durante la infiltración utilizando columnas de suelo para dos casos: distribución inicial de cloruros en la superficie del suelo, y mezcla inicial de cloruros con el suelo.

Considérese una columna de suelo uniformemente empacada con un contenido inicial de agua  $\theta_0$ . Cuando es te contenido se incrementa repentinamente a  $\theta_g$  en la superficie del suelo y se mantiene constante, se aplican las siguientes condiciones inicial y de frontera:

$$\theta = \theta_g \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad t > 0$$

$$\theta = \theta_0 \quad ; \quad x > 0 \quad ; \quad t = 0.$$

La ecuación que describe el proceso de infiltración es:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] - \frac{\partial K(\theta)}{\partial x}, [\text{ec. 6.16}]$$

en donde  $\theta$  es el contenido volumétrico de agua en el suelo ( $\text{cm}^3/\text{cm}^3$ ), x es la distancia (cm) medida positivamente hacia abajo,  $K(\theta)$  es la conductividad hidráulica (cm/min), y  $D(\theta)$  es la difusividad de agua del suelo ( $\text{cm}^2/\text{min}$ ). Los valores de conductividad hidráulica se calcularon usando la relación:

$$K(\theta) = D(\theta) \frac{d\theta}{dh}, \quad [\text{ec. 6.17}]$$

donde  $d\theta/dh$  es la pendiente de la curva característica del suelo suministrada como información inicial

junto con los valores de difusividad del agua, para la solución numérica.

La ecuación unidimensional de desplazamiento miscible aplicable a transporte de solutos, en condiciones de flujo transitorio de agua, es:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_S \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - A \frac{\partial C}{\partial x} \quad , \quad [\text{ec. 6.18}]$$

donde C es la concentración del soluto en solución (meq/cm<sup>3</sup>), D<sub>S</sub> es el coeficiente de difusión aparente del soluto (cm<sup>2</sup>/min) considerado constante, y A está dada por:

$$\lambda = \frac{q}{\theta} - \frac{D_S}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad [\text{ec. 6.19}]$$

siendo q el flujo de agua de Darcy (cm/min).

Las siguientes condiciones inicial y de frontera se usaron para describir los experimentos en donde los cloruros se distribuyeron originalmente sobre la superficie del suelo:

$$C = C_S \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad 0 < t \leq t_0$$

$$-D_S \theta \frac{\partial C}{\partial x} + qC = 0 \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad t > t_0$$

$$C = 0 \quad ; \quad x > d(t) \quad ; \quad t > 0$$

$$C = 0 \quad ; \quad x > 0 \quad ; \quad t = 0$$

Aquí t<sub>0</sub> es el tiempo requerido para la aplicación completa de los cloruros sobre la superficie del suelo, C<sub>S</sub> es la concentración superficial constante hasta alcanzar t<sub>0</sub>, y d(t) es la profundidad del frente de la solución desplazante.

Para obtener una solución estable de la expresión en diferencias -

finitas de la ecuación 6.16, se debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{D(\theta_s) \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Para el caso de la ecuación 6.18, los criterios de estabilidad para los incrementos en espacio y tiempo, respectivamente son:

$$\Delta x \leq 2 \frac{D_S}{\lambda_{\max}} \quad \text{y} \quad \Delta t < \frac{x}{\lambda_{\max}}$$

donde λ<sub>max</sub> es el valor máximo de A para un ciclo de cálculo.

#### TRANSPORTE SIMULTANEO DE AGUA Y SOLUTOS EN CONDICIONES DE FLUJO TRANSITORIO NO SATURADO (E. BRESLER, 1973).

La difusión de soluto en un cuerpo uniforme de agua se describe macroscópicamente por la primera ley de Fick. En los suelos, el coeficiente de difusión D<sub>p</sub> es menor que el coeficiente equivalente D<sub>0</sub> para un cuerpo de agua. Porter et al. (1960) y Kemper and van Schaik (1966) demostraron que para propósitos prácticos el coeficiente de difusión en un sistema arcilla-agua es independiente de la concentración de sales y depende únicamente del contenido de agua. La relación funcional entre D<sub>p</sub> y θ, de acuerdo con Kemper and van Schaik es del tipo:

$$D_p(\theta) = D_0 a \cdot \theta^{b\theta} \quad , \quad [\text{ec. 6.20}]$$

donde θ es el contenido volumétrico de agua, mientras que a y b son constantes empíricas características del suelo.

Para muchos suelos estudiados por Olsen and Kemper (1968), b fue igual a 10 y a varió de 0.001 a -

0.005, dependiendo del área granular del suelo en cuestión (arcilla a barro arenoso).

En general, la difusión molecular tiene lugar junto con el transporte convectivo, el cual debe tener en cuenta la velocidad promedio del flujo y la dispersión mecánica o hidrodinámica. Los solutos se transportan por convección a la velocidad promedio de la solución, y además se dispersan alrededor de la posición media del frente. Se ha demostrado que, en condiciones saturadas y de flujo estacionario, el coeficiente de dispersión mecánica  $D_h$  es proporcional a la primera potencia de la velocidad promedio del flujo (Ogata, 1970):

$$D_h(v) = \lambda|v| \quad , \quad [\text{ec. 6.21}]$$

donde  $v$ , en cm/seg, es la velocidad intersticial promedio del flujo, y  $\lambda$ , en cm, es una constante experimental que depende de las características del medio poroso.

En suelos agrícolas, los cambios en el contenido de agua debidos a la infiltración, redistribución, evaporación y transpiración, traen consigo el movimiento simultáneo de las sales y el agua. El flujo en estado estacionario raras veces ocurre en condiciones naturales. Una expresión matemática para condiciones transitorias y unidimensionales, se obtiene a partir de la consideración de la continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Q + \theta C) = \frac{\partial}{\partial z}(D(v, \theta) \frac{\partial C}{\partial z}) - \frac{\partial (qC)}{\partial z} + S \quad , \quad [\text{ec. 6.22}]$$

donde  $Q$  es la concentración local, positiva o negativa, de soluto en la

fase "adsorbida", meq/cm<sup>3</sup> de suelo;  $C$  es la concentración en la fase de solución, meq/cm<sup>3</sup> de solución de suelo;  $S$  es la tasa de cualquier fuente o sumidero de consumo, precipitación o disolución de sales;  $D$  es el coeficiente combinado de difusión-dispersión, cm<sup>2</sup>/seg, igual a  $D_h(v) + D_p(\theta)$  y  $q$  es el flujo volumétrico de la solución, cm<sup>3</sup>/cm<sup>2</sup>seg.

La ecuación de continuidad para el flujo vertical unidimensional de agua en un suelo no saturado, es:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial z} \quad . \quad [\text{ec. 6.23}]$$

Aquí, el flujo volumétrico de agua está dado por la ecuación de Darcy:

$$q = u\theta = - K(\theta) \frac{\partial h}{\partial z} \quad , \quad [\text{ec. 6.24}]$$

donde  $K(\theta)$  es la conductividad hidráulica del suelo (una función de  $\theta$ ), y  $h$  es la carga hidráulica, que es la suma de la carga debida a la presión  $p$  y la carga debida a la gravedad. La ecuación 6.24 considera al gradiente hidráulico como la única fuerza causante del flujo del agua. Observe que se ha supuesto una relación única entre  $K$  y  $\theta$  en la ecuación 6.24. Esta consideración es razonablemente buena siempre que la concentración total de electrolitos sea mayor que la  $C_{\min}$  expresada por la ecuación de Quirk (1971):

$$C_{\min} = 0.56 \frac{Na^+}{(Ca^{2+})^{0.5}} + 0.6 \quad , \quad [\text{ec. 6.25}]$$

donde  $C_{\min}$  es el nivel mínimo de electrolitos totales (en meq/l de solución de suelo) requerido para prevenir una disminución apreciable de la permeabilidad del suelo.

**MODELACION DE LOS CAMBIOS EN EL FLUJO Y EN LA CALIDAD QUIMICA EN UN SISTEMA ACUIFERO-RIACHUELO**  
(L. KONIKOM AND J. BREDEHOEFT, 1974).

De acuerdo con Pinder y Bredehoeft (1968), Pinder (1970), y Brodehoeft y Pinder (1973), la ecuación diferencial que describe el flujo bi-dimensional no estacionario de un fluido homogéneo compresible en un acuífero anisótropo y heterogéneo, es similar a la ecuación 3.39, que en notación tensorial se convierte en:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (T_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j}) = S \frac{\partial h}{\partial t} + W(x, y, t), \quad [ec. 6.26]$$

donde  $T_{ij}$  es el tensor de transmisividades,  $L^2/T$ ;  $h$  es la carga hidráulica,  $L$ ;  $S$  es el coeficiente de almacenamiento (adimensional);  $t$  es el tiempo,  $T$ ; y  $W$  es el flujo volumétrico por unidad de área,  $L/T$ . En el sistema acuífero-corriente de agua, que se estudió, el término de flujo puede representar el bombeo o la recarga del acuífero, o pérdidas o ganancias de la corriente de agua. Así  $W(x, y, t)$  se puede expresar como:

$$W(x, y, t) = Q(x, y) + \frac{K_z}{m} (H_r - h), \quad [ec. 6.27]$$

donde  $Q$  es la descarga o recarga,  $L/T$ ;  $K_z$  es la conductividad hidráulica vertical del suelo debajo de la corriente de agua,  $L/T$ ;  $m$  es el espesor del suelo debajo de la corriente con unidades de  $L$ , y  $H_r$  es la carga hidráulica del río,  $L$ .

Si se considera que no ocurre reacción química entre el agua y los materiales del acuífero o del suelo, que afecten la concentración de sólidos

disueltos, la ecuación que describe el transporte de masa y la dispersión de los constituyentes químicos disueltos en el medio poroso saturado, se puede escribir como:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} (D_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j}) - \frac{\partial (v_i C)}{\partial x_i} - W_i \quad [ec. 6.28]$$

donde  $C$  es la concentración de los sólidos disueltos,  $M/L^3$ ;  $D_{ij}$  es el coeficiente de dispersión hidrodinámica,  $L^2/T$ , y  $W_i$  es el flujo másico de una fuente o sumidero,  $M/L^3T$ .

El coeficiente de dispersión hidrodinámica es un tensor de segundo rango. Scheidegger (1961) expresa la relación entre el coeficiente de dispersión, la velocidad del fluido y la naturaleza del sistema poroso, como:

$$D_{ij} = \alpha_{ijmn} \frac{v_m v_n}{|v|}, \quad [ec. 6.29]$$

donde  $\alpha_{ijmn}$  es la dispersividad del medio poroso,  $L$ ;  $v_m$  y  $v_n$  son los componentes de la velocidad en las direcciones  $m$  y  $n$ ,  $L/T$ ; y  $|v|$  es la magnitud de la velocidad,  $L/T$ . También demostró que para un medio poroso isotrópico, el tensor de dispersividades se puede definir por dos componentes. Estos son las dispersividades longitudinal  $\alpha_L$  y transversal  $\alpha_T$  del medio. Estas se relacionan con los coeficientes de dispersión longitudinal y transversal por:

$$D_L = \alpha_L v \quad [ec. 6.30]$$

$$D_T = \alpha_T v, \quad [ec. 6.31]$$

respectivamente. En este estudio se consideró que las dispersividades longitudinal y transversal se relacionaban por:

$$\alpha_T = 0.3 \alpha_L \quad [ec. 6.32]$$

**SOLUCION ANALITICA DE LA ECUACION DE TRANSPORTE DE SOLUTOS REACTIVOS A TRAVES DEL SUELO (H.M. SELIM AND R.S. MANSELL, 1976).**

En condiciones de flujo en esta do estacionario, el transporte de solutos a través del suelo está gobernado por la ecuación convectiva-dispersiva, que se escribe así:

$$\frac{\partial S}{\partial T} + \theta \frac{\partial C}{\partial T} = e D_s \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} - v \frac{\partial C}{\partial X} - Q \quad , \quad [ec. 6.33]$$

donde C es la concentración del soluto en la solución del suelo ( $\mu\text{g}/\text{cm}^3$ ) y e es el contenido de agua del suelo ( $\text{cm}^3/\text{cm}^3$ );  $D_s$  es el coeficiente de dispersión hidrodinámica ( $\text{cm}^2/\text{hr}$ ) y v es la velocidad de Darcy del agua ( $\text{cm}/\text{hr}$ ); S es la cantidad de soluto adsorbido por unidad de volumen de suelo ( $\mu\text{g}/\text{cm}^3$ ); Q es la tasa de pérdidas o ganancias de soluto por unidad de volumen de suelo ( $\mu\text{g}/\text{cm}^3\text{h}$ ) y T es el tiempo (hr); X es la longitud de suelo (cm). El término Q es una fuente o sumidero que representa la producción (q negativa) o la remoción (Q positiva) irreversibles de soluto en la solución del suelo. Los procesos de adsorción o intercambio representados por  $\partial S/\partial T$  se suponen reversibles.

Un flujo continuo de soluto en la superficie, se puede expresar como:

$$vC = e D_s \frac{\partial C}{\partial X} = vC_0 ; X = 0, T > 0$$

mientras que una entrada tipo impulso como:

$$vC = e D_s \frac{\partial C}{\partial X} = vC_0 ; X = 0 ; T_1 \leq T$$

$$vC = e D_s \frac{\partial C}{\partial X} = 0 ; X = 0 ; T > T_1$$

donde  $C_0$  es la concentración de soluto en la solución aplicada (supuesta constante) y  $T_1$  es el tiempo de aplicación de esta solución, después del cual se alimenta solución libre de soluto.

Se supone que existe una relación de equilibrio entre S y C tal que:

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \rho k \frac{\partial C}{\partial T} \quad [ec. 6.34]$$

donde k es el coeficiente de distribución ( $\text{cm}^3/\text{g}$ ), que se puede obtener de las isotermas de adsorción; y  $\rho$  es la densidad global del suelo ( $\text{g}/\text{cm}^3$ ). Además, el término de fuente-sumidero se relaciona con la concentración en la forma:

$$Q = -\frac{C}{C_0} \quad , \quad [ec. 6.35]$$

donde c es la tasa constante de la fuente-sumidero, y  $C_0$  es la concentración de soluto en la solución aplicada.

Considérense los siguientes cambios de variable:

$$R_1 = 1 + (\rho k/\theta)$$

$$R_2 = c/\theta C_0$$

$$u_0 = v/\theta$$

$$x_1 = X/L$$

$$t = u_0 T/R_1 L$$

$$c_1 = (C - C_0)/(C_1 - C_0)$$

$$a = D_s/u_0 L$$

$$A = R_2 L/u_0$$

$$B = (R_2 L/u_0) [C_0/(C_1 - C_0)]$$

$$a = 1/2a$$

$$b = -(A + \frac{1}{2}a)$$

$$t_1 = T_1 v_0 / R_1 L$$

Utilizando las condiciones de - frontera para la entrada tipo impulso ( flujo pistón) presentadas en - la página anterior, así como la si- guiente condición inicial:

$$C = C_1; 0 < X < L, T = 0$$

donde  $C_1$  es la concentración inicial de soluto a lo largo de la columna - de suelo, cuya longitud es  $L$ , se ob- tiene la siguiente solución analítica para  $t \leq t_1$ :

$$c(x,t) = \exp(ax+bt) \cdot \sum_1^{\infty} \exp(-\alpha \lambda_m^2 t) \cdot \\ \cdot x(\lambda_m, x) (\alpha \lambda_m^2 - b)^{-1} \bar{u}(\lambda_m, t) |_{t=0} \cdot \\ \cdot [(\alpha \lambda_m^2 - b) + B - B \exp(\alpha \lambda_m^2 t - bt)]$$

[ec. 6.36]

Para  $t > t_1$ , la solución es:

$$c(x,t) = \exp(ax+bt) \cdot \sum_1^{\infty} \exp(-\alpha \lambda_m^2 t) \cdot \\ \cdot x(\lambda_m, x) (\alpha \lambda_m^2 - b)^{-1} \cdot (\bar{u}(\lambda_m, t) |_{t=0} \cdot \\ \cdot [(\alpha \lambda_m^2 - b) + B - B \exp(\alpha \lambda_m^2 t - bt)] - \\ \cdot x(\lambda_m, x) |_{x=0} C_0 (C_1 - C_0)^{-1} \exp(\alpha \lambda_m^2 t - bt) \\ + x(\lambda_m, x) |_{x=0} C_0 (C_1 - C_0)^{-1} \cdot \\ \cdot \exp(\alpha \lambda_m^2 t_1 - bt_1))$$

[ec. 6.37]

siendo  $R_1$  el factor de retardación - del soluto y  $v_0$  la velocidad del - agua dentro de los poros, así como:

$$x(\lambda_m, x) = \frac{\sqrt{2} [\lambda_m \cos(\lambda_m x) + a \operatorname{sen}(\lambda_m x)]}{\sqrt{\lambda_m^2 + a^2 + 2a}}$$

[ec. 6.38]

$$\bar{u}(\lambda_m, t) |_{t=0} = \\ = \sqrt{2} (2\lambda_m a) [(\lambda_m^2 + a^2) \sqrt{\lambda_m^2 + a^2 + 2a}]^{-1}$$

[ec. 6.39]

$$x(\lambda_m, x) |_{x=0} = \sqrt{2} \lambda_m / (\lambda_m^2 + a^2 + 2a)^{1/2}$$

[ec. 6.40]

Los eigen valores correspondien- tes  $\lambda_m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) son las raí- ces positivas de la ecuación trascen- dental:

$$\tan \lambda = \frac{2\lambda a}{\lambda^2 - a^2}$$

[ec. 6.41]

En este estudio se demostró que la entrada continua de soluto en -  $X = 0$  es un caso especial del proble- ma de entrada tipo impulso que se re- solvió antes, ya que se pueden can- bilar las condiciones de frontera pre- sentadas en la página anterior, de - un caso por el otro, o simplemente - hacerse  $T_1$  muy grande. También se de- mostró que la solución analítica pa- ra  $T \leq T_1$  para el problema de flujo tipo pistón es también la solución - para el problema de flujo continuo . En ambos casos, la condición de fron- tera para el extremo inferior de la columna de suelo, es:

$$\partial C / \partial X = 0; X = L; T > 0.$$

DISTRIBUCIONES DEL 2,4-D Y DEL AGUA EN EL SUELO, DURANTE LA INFILTRACION Y LA REDISTRIBUCION (H.M. SELIM, R.S. MANSELL AND A. ELZEFTAWY, 1976).

La ecuación unidimensional para el flujo transitorio del agua en sue- los no saturados, es:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}$$

[ec. 6.42]

donde  $t$  denota el tiempo (hr);  $z$  la distancia vertical en el suelo (cm), positiva hacia abajo;  $\theta$  el contenido volumétrico de agua en el suelo ( $\text{cm}^3/\text{cm}^3$ );  $D(\theta)$  la difusividad del agua en el suelo ( $\text{cm}^2/\text{hr}$ ), y  $K(\theta)$  la conductividad hidráulica ( $\text{cm}/\text{hr}$ ). La ecuación correspondiente que gobierna el transporte unidimensional y transitorio de solutos a través del suelo, se puede escribir como:

$$\frac{\partial(S+\theta C)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(\theta D_S(\theta) \frac{\partial C}{\partial z}) - \frac{\partial(vC)}{\partial z} \quad [\text{ec. 6.43}]$$

donde  $C$  es la concentración de soluto en la solución del suelo ( $\text{mg}/\text{cm}^3$ ) y  $S$  la cantidad de soluto adsorbido por la matriz del suelo por unidad de volumen de suelo ( $\text{mg}/\text{cm}^3$ );  $v$  es el flujo de agua de Darcy ( $\text{cm}/\text{hr}$ );  $D_S(\theta)$  es el coeficiente de dispersión del soluto ( $\text{cm}^2/\text{hr}$ ). El arreglo de la ecuación 6.43 conduce a:

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial t} = D_S(\theta) \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - A \frac{\partial C}{\partial z} \quad [\text{ec. 6.44}]$$

donde:

$$A = \frac{1}{\theta} [v - D_S(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} - \theta \frac{\partial D_S(\theta)}{\partial z}] \quad [\text{ec. 6.45}]$$

Usando las isothermas de adsorción para evaluar el término cinético de sorción  $\partial S/\partial t$ , la ecuación 6.44 se simplifica así:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \bar{D} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \bar{A} \frac{\partial C}{\partial z} \quad [\text{ec. 6.46}]$$

donde:

$$\bar{D} = D_S(\theta)/R(C)$$

$$\bar{A} = A/R(C)$$

$$R(C) = 1.0 + \rho k(C)/\theta$$

siendo  $\rho$  la densidad global del suelo ( $\text{g}/\text{cm}^3$ ),  $k(C)$  la función de distribución del soluto ( $\text{cm}^3/\text{g}$ ) deducida a partir de las isothermas de adsorción, y  $R(C)$  el factor de retención.

Utilizando las condiciones iniciales y de frontera apropiadas, las ecuaciones 6.42 y 6.46 se resolvieron por el método de diferencias finitas.

#### TRANSPORTE DE SOLUTOS REACTIVOS A TRAVÉS DE SUELOS DE VARIAS CAPAS (H.M. SELIM, J.M. DAVIDSON AND P.S.C. RAO, 1977).

La ecuación convectiva-dispersiva gobernante del transporte del soluto en el estrato  $i$ -ésimo, se puede expresar como:

$$\rho_i \frac{\partial S_i}{\partial t} + \theta_i \frac{\partial C_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\theta_i D_{13} \frac{\partial C_i}{\partial x}) - q_i \frac{\partial C_i}{\partial x} - Q_i \quad ; \quad 0 \leq x \leq L_i \quad [\text{ec. 6.47}]$$

donde  $C$  es la concentración de soluto en la solución del suelo ( $\mu\text{g}/\text{cm}^3$ );  $S$  la cantidad de soluto adsorbido por la matriz de suelo ( $\mu\text{g}/\text{g}$ );  $\rho$  la densidad global del suelo ( $\text{g}/\text{cm}^3$ );  $\theta$  el contenido volumétrico de agua en el suelo ( $\text{cm}^3/\text{cm}^3$ );  $D$  el coeficiente de dispersión del soluto ( $\text{cm}^2/\text{hr}$ ),  $q$  la velocidad de Darcy del agua en el suelo ( $\text{cm}/\text{hr}$ );  $Q$  una fuente (o sumidero) debida a interacciones irreversibles del soluto ( $\mu\text{g}/\text{cm}^3/\text{hr}$ );  $x$  la distancia a partir de la superficie del suelo (cm), y  $t$  el tiempo (hr).

Se usaron tres relaciones para describir el término reversible de adsorción  $S/st$ , de la ecuación 6.47.

Primero se asumió una adsorción lineal entre  $S$  y  $C$  tal que:

$$S = kC \quad [\text{ec. 6.48}]$$

donde  $k$  es el coeficiente de distribución ( $\text{cm}^3/\text{g}$ ). El factor de retarda- ción  $R$  obtenido es:

$$R = 1 + \frac{\rho k}{\theta} \quad [\text{ec. 6.49}]$$

En segundo lugar se consideró una adsorción no lineal:

$$S = kC^n \quad [\text{ec. 6.50}]$$

donde  $n < 1$ . Similarmente se obtiene el factor de retardación:

$$R = 1 + \frac{\rho k}{\theta} nC^{n-1} \quad [\text{ec. 6.51}]$$

Finalmente se consideró una ad- sorción lineal con cinética de primer orden:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = k_D[kC - S] \quad [\text{ec. 6.52}]$$

donde  $k_D$  es el coeficiente cinético de desorción de soluto ( $\text{hr}^{-1}$ ).

Además, el término de sumideros  $Q$  de la ecuación 6.47 se expresó como:

$$Q = mC \quad [\text{ec. 6.53}]$$

donde  $m$  es el coeficiente de rapidez ( $\text{hr}^{-1}$ ).

El procedimiento usado para resolver la ecuación 6.47 junto con sus condiciones inicial y de frontera, fue la técnica de aproximación explícita-implícita de diferencias

finitas.

#### MODELACION MATEMATICA DE LA INFILTRACION EN EL SUELO DE AGUA CONTAMINADA CON FOSFORO (V. NOVOTNY, H. TRAN, V. SIMSIMAN AND G. CHESTERS, 1978).

Matemáticamente se han propues- to varias descripciones del equili- brio de adsorción (isotermas), sien- do las más comunes la de Langmuir y la de Freundlich. El modelo de Lang- muir es válido para la adsorción en una capa, y fue expresada por Weber en la forma:

$$S = \frac{Q^0 b C}{1 + b C} \quad [\text{ec. 6.54}]$$

donde  $Q^0$  en  $\mu\text{g}/\text{g}$  es la adsorción má- xima a una temperatura dada, y  $b$  es una constante relacionada con la en- talpía neta de adsorción ( $1/\text{mg}$  o  $\text{ml}/\text{mg}$ ).

La isoterna de Freundlich es útil cuando el término de energía  $b$  de la isoterna de Langmuir varía en función de la magnitud de la cobertu- ra de superficie,  $S$ , la ecuación de Freundlich tiene la forma general:

$$S = kC^{1/n} \quad [\text{ec. 6.55}]$$

donde  $K$  y  $n$  son constantes.

La combinación de variables más satisfactoria encontrada por los au- tores para cuantificar las adsorcio- nes máximas ( $Q^0$ ), se describe por la siguiente ecuación de regresión para valores de pH del suelo menores de 7.0:

$$Q^0 = -3.47 + 11.60 \times 10^{-\text{pH}} + 10.66 \times (\% \text{ de arcilla}) + 49.52 \times (\% \text{ de C orgánico}).$$

[ec. 6.56]



El coeficiente de correlación múltiple para esta relación fue  $r = 0.80$ .

Para un pH = 7:

$$Q^e = 207.09 - 73,327 \times 10^{-\text{pH}} + 2.81 \times (\% \text{ de arcilla}) + 78.25 \times (\% \text{ de C orgánico}).$$

[ec. 6.57]

El coeficiente de correlación múltiple para esta relación fue  $r = 0.63$ .

El valor de la constante  $b$  se determinó con:

$$b = 0.061 + 169,832 \times 10^{-\text{pH}} + 0.027 \times (\% \text{ de arcilla}) + 0.76 \times (\% \text{ de C orgánico}).$$

[ec. 6.58]

El valor de  $r$  para esta relación fue de 0.54.

Se supuso un modelo de adsorción de primer orden para representar una aproximación razonable del proceso:

$$\frac{dS}{dt} = k(S_e - S) \quad [\text{ec. 6.59}]$$

donde:

$$S_e = \frac{Q^e b C}{1 + bC}$$

siendo  $S$  la cantidad de contaminante adsorbido, y  $k$  el coeficiente de adsorción estimado en  $0.12 \text{ hr}^{-1}$  por Ryan et al. (1972). Enfield discutió dos modelos cinéticos simplificados, descritos por las ecuaciones:

$$\frac{dS}{dt} = a(kC - S) \quad [\text{ec. 6.60}]$$

y:

$$\frac{dS}{dt} = aC^b S^c \quad [\text{ec. 6.61}]$$

donde  $C$  es la concentración de la solución en equilibrio, y  $a, k, a, b,$  y  $c$  son constantes estadísticas.

#### TRANSPORTE DE SOLUTOS REACTIVOS DURANTE EL FLUJO TRANSITORIO DEL AGUA EN SUELOS MULTIESTRATIFICADOS Y NO SATURADOS (H.M. SELIM, 1978).

Para flujo unidimensional en un perfil de suelo no saturado de varias capas, la ecuación de flujo del agua (en el estrato  $i$ ) es:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (K_i \frac{\partial h_i}{\partial z}) - \frac{\partial K_i}{\partial z} \quad [\text{ec. 6.62}]$$

válida en el rango  $0 < z < L_i$ , siendo  $\theta$  el contenido de agua del suelo ( $\text{cm}^3/\text{cm}^3$ ),  $h$  la carga hidráulica en el suelo debida a la presión ( $\text{cm}$ ),  $K = K(h)$  la conductividad hidráulica ( $\text{cm/hr}$ ),  $t$  el tiempo ( $\text{hr}$ ), y  $z$  la distancia ( $\text{cm}$ ). La ecuación correspondiente para el transporte transitorio unidimensional de soluto a través del suelo, es similar a la ecuación 6.47.

Las relaciones de  $\theta(h)$  y  $K(h)$ , usadas en este estudio, fueron las propuestas por Gardner (1958):

$$\theta(h) = \theta_s / [1 + (-h/a)^b] \quad [\text{ec. 6.63}]$$

$$K(h) = K_s \exp(ah) \quad [\text{ec. 6.64}]$$

donde  $\theta_s$  y  $K_s$  son el contenido de agua y la conductividad hidráulica en el suelo saturado, respectivamente. Los valores elegidos para  $\theta_s, K_s$  y las constantes arbitrarias  $a, b$  y  $\alpha$  fueron 0.55, 0.5, 1000, 0.5 y 0.05 para la capa de arcilla; así como 0.4, 1.0, 300, 1.0 y 0.03 para la capa de barro o arcilla plástica, respectivamente. Para la capa de arena, los valores de  $\theta_s, a$  y  $b$  fueron 0.35, 50 y 0.75. La relación de  $K(h)$  escogida para este estrato fue la de Selim, Mansell y Elzeftawy (1976):

$$K(h) = \exp[\gamma + \beta \log \theta], \quad [\text{ec. 6.65}]$$

donde los valores de las constantes arbitrarias  $\gamma$  y  $\beta$ , fueron 12.14 y 7.93, respectivamente. Las densidades globales del suelo fueron 1.25, 1.4 y 1.6 g/cm<sup>3</sup> para la arcilla, el barro y la arena, respectivamente.

Los mecanismos usados para describir el término de adsorción reversible de soluto  $\partial S/\partial t$  de la ecuación 6.47, fueron las reacciones de equilibrio lineal y no lineal, así como la cinética de primer orden para cada estrato del suelo. La reacción para el último caso fue:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = k_a \theta C - k_d \rho S \quad [\text{ec. 6.66}]$$

donde  $k_a$  y  $k_d$  (Giddings, 1965) son los coeficientes de rapidez de adsorción y desorción ( $h^{-1}$ ), respectivamente.

Los procesos irreversibles (tales como precipitación o transformación química) representados por el término de sumidero  $Q$  en la ecuación 6.47, se consideraron desde el punto de vista de la cinética de primer orden:

$$Q = k_c \theta C \quad [\text{ec. 6.67}]$$

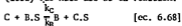
donde  $k_c$  es el coeficiente de rapidez ( $h^{-1}$ ) de la remoción irreversible de soluto de la solución del suelo.

#### TRANSPORTE DE CATIONES EN REACTORES DE SUELO (A. OVERMAN, B. MC MAHON, R. CHU AND F. WANG, 1980).

Se desarrolló un modelo de intercambio catiónico junto con un modelo de transporte a través de un reactor de lechos empacados. Luego

se consideró la solución por diferencias finitas.

Se supuso que era aplicable el modelo de intercambio catiónico reversible de Miester and Vermuelen (1952) que hace uso de la reacción:



para representar el sistema monovalente/monovalente en el cual C es la concentración del catión en solución que se incorpora al suelo; B.S es la concentración del catión intercambiable que se desprende; C.S es la concentración de intercambio del catión que se incorpora; B es la concentración en solución del catión que se desprende;  $k_C$  es el coeficiente de intercambio para el catión C, y  $k_B$  para el catión B. Suponiendo que el intercambio iónico está controlado por la ley de acción de masas, se tiene que:

$$\frac{\partial (C.S)}{\partial t} = k_C C(B.S) - k_B B(C.S), \quad [\text{ec. 6.69}]$$

siendo  $t$  el tiempo.

Para simplificar el modelo de transporte se consideró la fuerza iónica constante y uniforme, además de que por la neutralidad eléctrica:

$$B + C = A = \text{constante},$$

durante todo un experimento específico, en donde A es la concentración de aniones. Además se supuso constante la capacidad de intercambio catiónico.

Para describir el transporte de cationes a través del reactor se usó un modelo de flujo-dispersión, que para un lecho inicialmente libre de C y con una entrada constante, es:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\rho}{\phi} \frac{\partial (C.S)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V \frac{\partial C}{\partial x}$$

[ec. 6.70]

con:

$$C(x, 0) = 0,$$

$$C(0, t) = C_0,$$

$$C(\infty, t) = 0,$$

siendo D el coeficiente de dispersión, V la velocidad del agua dentro de los poros,  $\rho$  la densidad global del suelo y  $\phi$  su porosidad.

Debido a la naturaleza no lineal de la ecuación 6.69 se obtuvo una solución numérica por el método de diferencias finitas, de acuerdo con el procedimiento de Crank-Nicolson, en el cual para asegurar su convergencia, se estableció el criterio siguiente:

$$\Delta t^* < \frac{V\phi}{1K_c\rho Q}$$

siendo  $t^* = Vt/l$ ,  $Q = B.S + C.S$ , y  $l$  la profundidad del reactor.

MODELO COMBINADO DE TRANSPORTE DE SALES Y EQUILIBRIO QUÍMICO PARA SUELOS CALCAREOS Y QUE CONTIENEN YESO (C.W. ROBBINS, R.J. WAGENET AND J.J. JURINAK, 1980).

El modelo de precipitación química usado en este estudio, supone que:

1) El suelo contiene cal.

2) El suelo está suficientemente amortiguado, tal que el pH es constante en cada intervalo de profundidad, pero puede variar con la misma.

3) La solución del suelo en cada intervalo de profundidad es un sistema abierto al  $CO_2$ , gobernado por el pH del suelo.

Un "sistema abierto" significa que el  $CO_2$  puede entrar (por las raíces o por la materia orgánica en descomposición) o salir (por el movimiento del agua o el aire en el suelo) del sistema, y no significa que exista un equilibrio con el  $CO_2$  atmosférico. La constante  $K_{H1}$  de la ley de Henry para el  $CO_2$  se supuso independiente de la temperatura y de la concentración de sales.

La conductividad eléctrica de la solución del suelo (CE, en  $\mu mho/cm$ ) se calculó a partir de las concentraciones iónicas individuales (Mc Neal et al., 1970). A su vez la fuerza iónica de la solución (I, en moles/litro) se calculó a partir de la CE (Griffin and Jurinak, 1973), mientras que los coeficientes de actividad de los iones mono y divalentes ( $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ ) a partir de la relación de Davies (Stumm and Morgan, 1960).

La presión parcial del  $CO_2$  ( $P_{CO_2}$ ) para cada profundidad se calculó a partir del pH y de los datos del (Ca) usando expresiones termodinámicas estándares (aquí los paréntesis denotan actividades).

Utilizando las constantes apropiadas, se calculó ( $CO_2$ ) y ( $HCO_3^-$ ) a partir de los valores de (H) y  $P_{CO_2}$  (Robbins, 1979).

Los pares iónicos  $CaCO_3^0$ ,  $CaHCO_3^+$ ,  $CaOH^+$ ,  $CaSO_4^0$ ,  $MgCO_3^0$ ,  $MgHCO_3^+$ ,  $MgOH^+$ ,  $Na_2SO_4^0$ ,  $NaSO_4^-$  y  $NaCO_3^-$  fueron evaluados para los cálculos de las actividades iónicas, ilustrándose como ejemplo la corrección de los pares iónicos para (Ca).

La concentración analítica total de Ca en solución,  $Ca_T$ , se define como:

$$Ca_T = Ca^{2+} + CaHCO_3^+ + CaOH^+ + CaCO_3^0 + CaSO_4^0$$

donde las unidades de concentración son moles/litro.

La sustitución adecuada y el rearrreglo de la expresión anterior conduce a:

$$(Ca) = Ca_T \left[ \frac{1}{\gamma_2} + \frac{K_{a1}K_{a2}P_{H_2O}}{(H)^2 K_{d1} \gamma_2} + \frac{K_w}{(H) K_{d1} \gamma_1} + \frac{K_{a1} K_{a2} K_{a3} P_{H_2O}}{(H)^2 K_{d1}} + \frac{(SO_4)}{K_{d4}} \right] \quad [ec. 6.71]$$

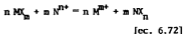
donde  $K_{d1}$  representa la constante de estabilidad adecuada para un par iónico dado y  $K_w = (OH)(H)$ . Se usaron expresiones similares para  $(Mg)$ ,  $(Na)$  y  $(SO_4)$  [Robbins, 1979].

Utilizando los valores corregidos de  $(Ca)$  y  $(CO_3)$  ó  $(SO_4)$ , así como el producto de solubilidad apropiado ( $K_{ps}$ ), se calculó la cantidad de sal ligeramente soluble que debe añadirse o removerse de la solución para alcanzar el equilibrio entre el sistema y la fase sólida constituida por  $CaCO_3$  y  $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ .

CALCULOS DE INTERCAMBIO CATIONICO EN UN MODELO DE TRANSPORTE DE SALES (C.W. ROBBINS, J.J. JURINAK AND R.J. WAGENET, 1980).

Las reacciones de intercambio catiónico se pueden describir por una de dos maneras. La convención de Vanselow designa la carga anióni-

ca de intercambio como -1, y los cationes reaccionantes mediante cantidades molares. La reacción de intercambio se representa como:



donde M y N son los cationes metálicos con cargas de +m y +n, respectivamente. La convención de Gapon representa los cationes reaccionantes mediante sus equivalente, y toma la forma:

$$nm \frac{M_1}{m} X + m N^{n+} = n M^{m+} + mn \frac{N_1}{n} X \quad [ec. 6.73]$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación 6.72 por nm, y usando una notación ligeramente diferente, la ecuación se convierte en:

$$\frac{X_1}{m} + \frac{1}{n} N^{n+} = \frac{X_1}{n} + \frac{1}{m} M^{m+}, [ec. 6.74]$$

manteniéndose todavía la carga de -1 para X. Debe reconocerse que  $(1/m)M^{m+}$  ó  $(1/n)N^{n+}$  no existen a escala molecular (para  $m > 1$  y  $n > 1$ ); sin embargo, a macroscala esta forma es termodinámicamente equivalente, pero de mayor utilidad, en la modelación de sistemas multicatiónicos.

La ecuación 6.74 se puede evaluar con al relación de equilibrio:

$$K = \frac{X_1/n N^{(n+)} 1/m}{X_1/m M^{(m+)} 1/n} \quad [ec. 6.75]$$

donde K es el coeficiente de selectividad.

La subrutina desarrollada para

este estudio considera que la capacidad de intercambio catiónico (CIC) es constante para un suelo de terminado, independiente del pH, tipo y concentración de iones, que la solución del suelo es una "solución verdadera" donde las actividades catiónicas no son afectadas por la presencia de superficies cargadas y que el intercambio catiónico es un proceso reversible. La subrutina no considera intercambio aniónico y además supone que la suma de cationes intercambiables es igual a CIC. Esto es:

$$CIC = X_{1Ca} + X_{1Mg} + X_{Na} + X_K \quad [ec. 6.76]$$

donde  $X_{1Ca}$ ,  $X_{1Mg}$ ,  $X_{Na}$  y  $X_K$  son los cationes intercambiables (meq/100 gramos) para el estudio realizado.

Los coeficientes de selectividad  $K_1$  hasta  $K_6$  para el equilibrio entre los cationes en solución y los cationes intercambiables, se definen como:

$$K_1 = \frac{(Ca)^{\frac{1}{2}} X_{1Mg}}{(Mg)^{\frac{1}{2}} X_{1Ca}} \quad [ec. 6.77]$$

$$K_2 = \frac{(Na) X_{1Ca}}{(Ca)^{\frac{1}{2}} X_{Na}} \quad [ec. 6.78]$$

$$K_3 = \frac{(K) X_{1Ca}}{(Ca)^{\frac{1}{2}} X_K} \quad [ec. 6.79]$$

$$K_4 = \frac{(K) X_{1Mg}}{(Mg)^{\frac{1}{2}} X_K} \quad [oc. 6.80]$$

$$K_5 = \frac{(Na) X_{1Mg}}{(Mg)^{\frac{1}{2}} X_{Na}} \quad [ec. 6.81]$$

$$K_6 = \frac{(Na) X_K}{(K) X_{Na}} \quad [ec. 6.82]$$

Las actividades catiónicas usadas en las ecuaciones anteriores se corrigen por el efecto de la fuerza iónica y del apareamiento de iones, en la subrutina química (Robbins et al., 1980).

La ecuación para calcular  $X_{1Ca}$  se desarrolla reescribiendo las ecuaciones 6.77, 6.78 y 6.79 en términos de  $X_{1Mg}$ ,  $X_{Na}$  y  $X_K$  y substituyéndolas en la ecuación 6.76. Factorizando  $X_{1Ca}$  y reorganizando la ecuación resultante, se obtiene:

$$X_{1Ca} = CIC \left[ \frac{(Mg)^{\frac{1}{2}} K_1}{(Ca)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(Na)}{(Ca)^{\frac{1}{2}} K_2} + \frac{(K)}{(Ca)^{\frac{1}{2}} K_3} + 1 \right] \quad [ec. 6.83]$$

Por este mismo procedimiento se obtienen las ecuaciones equivalentes para calcular  $X_{1Mg}$ ,  $X_{Na}$  y  $X_K$ .

Las cuatro ecuaciones resultantes son la base de la subrutina de intercambio catiónico que equilibra las actividades en solución con las concentraciones de cationes intercambiables, durante la precipitación o la disolución de sales.

En principio la técnica anterior se puede extender para cualquier número de cationes, siempre

que los coeficientes de selectividad se estimen para todas las posibles reacciones de intercambio de pares catiónicos.

DESCRIPCIÓN DE LA QUÍMICA DEL SUELO DURANTE EL TRANSPORTE TRANSITORIO DE SOLUTOS (L.M. DUDLEY, R.J. WAGENET AND J.J. JURINA, 1981).

El flujo del agua en presencia de la extracción por las plantas, se simula por la ley de Darcy incluyendo un término de extracción por raíces:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) \frac{\partial H}{\partial z} \right] + A(z, t) \quad [\text{ec. 6.84}]$$

donde  $\theta$  es el contenido volumétrico de agua ( $\text{cm}^3/\text{cm}^3$ );  $t$  es el tiempo (horas);  $z$  es la profundidad (cm),  $K(\theta)$  es la conductividad hidráulica ( $\text{cm/hr}$ ),  $H$  es la carga hidráulica (cm), y  $A(z, t)$  describe la extracción de agua por las raíces ( $\text{hr}^{-1}$ ).

El transporte de solutos y los cálculos de las reacciones químicas y de intercambio catiónico de la solución del suelo, se manejan por separado pero secuencialmente. El transporte de solutos se supone resultante de los procesos combinados de dispersión-difusión y flujo másico.

La distribución de soluto resultante de los procesos de transporte, se predice individualmente para los iones  $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{Mg}^{2+}$ ,  $\text{K}^+$ ,  $\text{Na}^+$ ,  $\text{SO}_4^{2-}$  y  $\text{Cl}^-$ . Una vez que estas concentraciones se conocen para cada profundidad, se ajustan individualmente de acuerdo a sus relaciones de equilibrio químico contenidas en una serie de subrutinas que describen la disolución-precipitación de

la cal y el yeso. En ellas se calcula la conductividad eléctrica de la solución del suelo a partir de (Mc Neal et al., 1970):

$$\begin{aligned} CE = & 0.05641 [\text{Ca}^{2+}]^{0.9202} + \\ & + 0.05099 [\text{Mg}^{2+}]^{0.9102} + \\ & + 0.04748 [\text{Na}^+]^{0.9495} + \\ & + 0.07263 [\text{K}^+]^{0.9706} + \\ & + 0.069 [\text{SO}_4^{2-}]^{0.8973} + \\ & + 0.0733 [\text{CO}_3^{2-}]^{0.8719} + \\ & + 0.04143 [\text{HCO}_3^-]^{0.9501} + \\ & + 0.07216 [\text{Cl}^-]^{0.9671} + \\ & + 0.1103 [(\text{Ca}, \text{Mg})\text{SO}_4]^{0.8463} \end{aligned} \quad [\text{ec. 6.85}]$$

donde las concentraciones denotadas por los corchetes son en  $\text{moq/l}$ .

Los demás cálculos de las subrutinas química y de intercambio catiónico ya fueron descritas anteriormente.

TRANSPORTE DE SOLUTOS INTERCAMBIADORES DE IONES: TEORÍA CROMATOGRÁFICA (A. VALOCCHI, R. STREER AND P. ROBERTS, 1981).

Las ecuaciones básicas que describen el transporte de especies reaccionantes, se han presentado por varios investigadores (Bear, 1972; Freeze and Cherry, 1979). Si la única reacción química considerada es la de intercambio iónico y además se supone una columna de suelo homogénea y unidimensional, estas ecuaciones se pueden expresar como:

$$\rho \frac{\partial C_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial \hat{C}_i}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} - q \frac{\partial C_i}{\partial x}, \quad i=1..n$$

[ec. 6.86]

donde  $C_i$  es la concentración de la especie  $i$  en la fase acuosa (meq/l),  $\hat{C}_i$  es la concentración de la especie  $i$  en la fase sorbida (meq/g),  $n$  es el número de iones intercambiables en el sistema,  $\rho$  es la porosidad del suelo,  $\rho$  su densidad global (g/l),  $D_0$  es el coeficiente de dispersión hidrodinámica (m<sup>2</sup>/h),  $q$  es la descarga específica del fluido dentro de los poros (m/h),  $t$  es el tiempo (h) y  $x$  la distancia (m). Se puede definir la concentración total de iones en el fluido dentro de los poros (normalidad total de la solución) como:

$$C_T = \sum_{i=1}^n C_i \quad [\text{ec. 6.87}]$$

En este estudio se usa el modelo clásico de dispersión delineado por Bear (1972) y otros investigadores. Para flujo unidimensional:

$$D = a_1 v \quad [\text{ec. 6.88}]$$

donde  $a_1$  es la dispersividad longitudinal del medio poroso (m), y  $v$  es la velocidad del agua dentro de los poros, igual a  $q/\theta$ .

Para resolver las ecuaciones representadas por la expresión 6.86, se requieren  $n$  ecuaciones adicionales. Estas se obtienen a partir de las leyes químicas que gobiernan los procesos de intercambio iónico. Una de estas ecuaciones se deduce de la definición de capacidad de intercambio catiónico  $\hat{C}_T$ :

$$\hat{C}_T = \sum_{i=1}^n \hat{C}_i \quad [\text{ec. 6.89}]$$

A partir de la suposición de equilibrio químico local entre los iones intercambiables en el sistema, existen  $n-1$  expresiones independien-

tes de equilibrio de la forma:

$$K_{ij} = \left( \frac{C_j^*}{C_j} \right)^{v_j} \left( \frac{\hat{C}_i}{\hat{C}_i^*} \right)^{v_i} \quad [\text{ec. 6.90}]$$

donde  $v_j$  es la valencia del ion  $j$ ,  $K_{ij}$  es el coeficiente de selectividad de intercambio iónico, y  $C_j^*$  es la fracción equivalente de especies  $j$  en la fase sorbida, definida como:

$$\hat{C}_j^* = \frac{\hat{C}_j}{C_T} \quad [\text{ec. 6.91}]$$

Las ecuaciones 6.86, 6.89 y 6.90 constituyen el modelo básico de transporte. Siguiendo la técnica de Rubin y James (1973), estas ecuaciones se convierten en un sistema de ecuaciones operacionales que son más adecuadas para la solución numérica. Si se consideran únicamente cationes monovalentes o sólo divalentes, las  $n$  ecuaciones químicas 6.89 y 6.90 se pueden combinar para producir  $n$  isotermas de intercambio de multicomponentes:

$$\hat{C}_i = F_i(C_1, C_2, \dots, C_n) \quad [\text{ec. 6.92}]$$

Estas isotermas, que son funciones algebraicas no lineales, se pueden substituir directamente en la ecuación 6.86 para dar:

$$\rho \frac{\partial C_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^n f_{ij} \frac{\partial C_j}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} - q \frac{\partial C_i}{\partial x} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad [\text{ec. 6.93}]$$

donde:

$$f_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial C_j} = \frac{\partial \hat{C}_i}{\partial C_j} \quad [\text{ec. 6.94}]$$

Con apropiadas condiciones iniciales y de frontera, las ecuaciones 6.93 no lineales se resuelven usando

el método del elemento finito de Galerkin (Pinder and Gray, 1977).

La naturaleza compleja de las ecuaciones de transporte de muchas especies, hace muy difícil la predicción a priori de las características generales de los perfiles resultantes de concentración.

El propósito de este estudio fue presentar una metodología analítica con la cual se pudieran obtener ciertas claves en los perfiles de concentración. Esta metodología está basada en la teoría cromatográfica, que se basa en simples balances de masa para deducir analíticamente la respuesta general de las concentraciones. Se extendieron estas teorías al caso de intercambio heterovalente de muchas especies en condiciones de normalidad total de la solución  $C_T$  variable.



## CAPITULO 7.

### EL METODO DEL ELEMENTO FINITO.\*\*

#### INTRODUCCION.

La aplicación del método del elemento finito a los problemas del agua subterránea, es un desarrollo relativamente reciente comparado con el método de diferencias finitas. Cada método conduce a un conjunto de ecuaciones algebraicas cuyas incógnitas son las cargas (o las concentraciones) en un número finito de puntos nodales. En la figura 6.1 del capítulo anterior se muestra una visión conceptual de cómo se aproxima el dominio del problema por los dos métodos. Usualmente el método de diferencias finitas se utiliza con celdas rectangulares, mientras que el del elemento finito con una variedad de tipos de elementos, siendo el triangular un ejemplo adecuado para describir el método. Los elementos triangulares se definen por tres nodos, uno en cada esquina. Estos no dos sirven para situar las cargas desconocidas; esto es, son los puntos dentro del dominio del problema, en los cuales se calcularán las cargas. Adicionalmente, la carga dentro de cada elemento se define en términos de los valores nodales mediante funciones básicas o de interpolación. La carga se define en todo el dominio del problema de una manera fraccionada en los elementos individuales. El uso de las funciones de interpolación para definir el potencial en toda la región del problema, es un importante concepto que distingue al método del elemento finito de diferencias finitas. En este último, la carga se define exclusivamente en los puntos nodales. La de-

finición de la carga en todo el dominio del problema en el método del elemento finito, permite la aplicación de los principios variacionales o de residuos pesados.

Los precursores del método del elemento finito destacan su flexibilidad en problemas cuyas fronteras son irregulares o cuyo medio es heterogéneo o anisótropo. Los programas de diferencias finitas también se aplican con estas complicaciones, pero la flexibilidad del elemento finito es útil en la solución de problemas acoplados, como el transporte de contaminantes, o en la solución de problemas de fronteras móviles, como los de variaciones del nivel freático. Al final de cuentas, la elección de cualquiera de los métodos depende de factores tales como la complejidad del problema y la familiaridad del usuario con cada método.

#### EL METODO DE GALERKIN.

El método de Galerkin y la técnica del elemento finito se combinan tan frecuentemente en la solución por computadora de problemas del agua subterránea que prácticamente se consideran sinónimos. El método de Galerkin se basa en un especial principio de los residuos pesados que resulta ser equivalente al principio variacional, si es que existe para el problema bajo consideración.

La filosofía detrás del principio variacional es que una cantidad física, tal como la tasa de disipa-

\*\* Este capítulo es una traducción y adaptación de la obra de Wang [Ref. 36].

ción de energía, sea minimizada dentro del dominio del problema. Esta tasa puede expresarse en términos del potencial (carga) dentro del dominio. Si el potencial se expresa en función de sus valores nodales, el principio variacional conduce a ecuaciones algebraicas.

El principio de residuos pesados se expresa directamente en términos de la ecuación diferencial parcial gobernante sin necesidad de recurrir a una cantidad física. El residuo en cada punto del dominio del problema, es una medida del grado en el cual la carga no satisface la ecuación gobernante. Si un particular promedio pesado de los residuos es forzado a desaparecer, se obtienen las cargas nodales al solucionar un sistema de ecuaciones algebraicas.

Se procederá enseguida a los detalles de la aplicación del método de Galerkin a la ecuación de Laplace. El primer paso es definir una aproximación o solución de prueba,  $\hat{h}(x,y)$ , expresada como una sumatoria, en donde cada término es el producto de una carga nodal  $h_L$  y una función básica asociada al nodo,  $N_L(x,y)$ :

$$\hat{h}(x,y) = \sum_{L=1}^{NN} h_L N_L(x,y) \quad [\text{ec. 7.1}]$$

El subíndice  $L$  indica el número de nodo y  $NN$  es el número total de nodos en el dominio del problema. Observe que un subíndice sencillo designa el número de nodo.

Las funciones básicas en la ecuación 7.1 son análogas a los vectores unitarios. La solución de prueba se construye como una combinación lineal de las funciones básicas. Las funciones básicas también se denominan funciones de interpolación por-

que definen la solución de prueba dentro del dominio del problema en términos de las cargas nodales.

El siguiente paso es requerir un total de  $NN$  condiciones para determinar los  $NN$  valores de  $h_L$ . En el método de Galerkin, las  $NN$  condiciones son que los residuos de la ecuación gobernante, pesados por cada una de las  $NN$  funciones básicas sean igual a cero después de su integración dentro del dominio del problema:

$$\iint_D \left( \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial y^2} \right) N_L(x,y) \, dx \, dy = 0, \quad [\text{ec. 7.2}]$$

donde  $L = 1, 2, \dots, NN$ , y  $D$  significa que la integración se hace dentro del dominio completo del problema.

La cantidad entre paréntesis es el residuo. Si la solución de prueba  $\hat{h}(x,y)$  fuera exacta, la ecuación de Laplace resultaría satisfecha en todo el dominio del problema y el residuo sería cero en cualquier parte. El residuo es una medida de la magnitud en la cual  $\hat{h}(x,y)$  no satisface la ecuación de Laplace. En el método de Galerkin, se impone el requerimiento de que los  $NN$  promedios pesados de los residuos se igualen a cero; las funciones básicas  $N_L(x,y)$  son las funciones de peso.

La elección de  $N_L(x,y)$  como las funciones de peso podría parecer ad hoc. Por ejemplo, uno podría requerir que los residuos desaparecieran dentro de los  $NN$  pequeños subdominios alrededor de cada punto nodal; esto es:

$$\iint_D \left( \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial y^2} \right) N_L \, dx \, dy = 0 \quad [\text{ec. 7.3}]$$

donde  $N_L$  es 1 dentro del subdominio  $I$ , y 0 fuera de él,  $L = 1, 2, \dots, NN$ . En realidad, la ecuación 7.3 conduce a un sistema de ecuaciones para resolver aproximadamente la ecuación de Laplace. Este método se conoce como método del subdominio. Una de las razones del uso más frecuente del método de Galerkin es que el sistema de ecuaciones representado por la expresión 7.2, es el mismo que el generado a partir del principio de mínima disipación. Los principios variacionales no existen para todas las ecuaciones gobernantes. En tales situaciones, el método de Galerkin o cualquier otro de residuos pesados, toda vía resulta aplicable.

#### INTEGRACION POR PARTES.

Las funciones básicas  $N_L(x, y)$  se definen usualmente de manera fraccionada pero continua dentro del dominio  $D$  del problema. Sin embargo, las primeras derivadas de  $N_L$  pueden no ser continuas. Debido a que  $h(x, y)$  es una combinación lineal de  $N_L$ , sus segundas derivadas no se definen fácilmente en las discontinuidades escalonadas de las primeras derivadas, complicando así la evaluación de la integral en la ecuación 7.2. Si se aplica la integración por partes a la ecuación 7.2, entonces se puede reducir el orden de las derivadas en uno, dentro del integrando.

Debido a que la fórmula unidimensional para la integración por partes es más familiar, considérese primero su aplicación a la forma unidimensional de la ecuación 7.2:

$$\int_a^b \frac{d^2 h}{dx^2} N_L(x) dx = 0. \quad [\text{ec. 7.4}]$$

La fórmula para la integración

por partes es:

$$\int_a^b u dv = - \int_a^b v du + u|_a^b. \quad [\text{ec. 7.5}]$$

Para aplicar esta fórmula a la ecuación 7.4, sea  $u = N_L$ , y  $v = dh/dx$ . Entonces:

$$\int_a^b \frac{d^2 h}{dx^2} N_L(x) dx = - \int_a^b \frac{dh}{dx} \frac{dN_L}{dx} dx + N_L \frac{dh}{dx} \Big|_a^b \quad [\text{ec. 7.6}]$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación 7.6 es proporcional al flujo a través de la frontera, pesado por  $N_L$ , en los puntos de la frontera.

La generalización de la ecuación 7.6 a dos dimensiones, es:

$$\begin{aligned} & \iint_D \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) N_L dx dy = \\ & = - \iint_D \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right) dx dy + \\ & + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial h}{\partial x} n_x + \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) N_L ds, \end{aligned} \quad [\text{ec. 7.7}]$$

donde  $\Gamma$  es la frontera de  $D$ ,  $s$  es una variable generalizada que representa la distancia a lo largo de la frontera en el sentido contrario a las manecillas del reloj, y  $n_x$  y  $n_y$  son los componentes de un vector unitario hacia el exterior normal a  $\Gamma$ . El segundo término en el lado derecho de la ecuación 7.7 es proporcional al flujo normal a través de la frontera, pesado por  $N_L$  en la fronte

ra. Observe que si el flujo es cero en la frontera, el término de la integral de frontera es cero. Los integrales en el lado derecho de la ecuación 7.7 contienen sólo primeras derivadas, lo cual simplifica considerablemente el problema. La razón de la integración por partes se verá más claramente en las siguientes secciones cuando se aplique el método de Galerkin para funciones básicas cuyas primeras derivadas tienen discontinuidades escalonadas dentro del dominio del problema.

### ELEMENTOS TRIANGULARES.

Se describe la aplicación del método de Galerkin en la técnica del elemento finito para elementos lineales triangulares. Cada triángulo se define por los nodos en sus esquinas. Lo crucial del procedimiento del elemento finito es definir las funciones básicas  $N_L(x,y)$  de la ecuación 7.1 que interpolen los valores nodales de manera fraccionada en aquellos elementos que contienen el nodo L. La ecuación 7.2 proporciona entonces NN ecuaciones para determinar cada carga nodal  $h_L$ , donde  $L = 1, 2, \dots, NN$ .

### MALLA DE ELEMENTOS FINITOS.

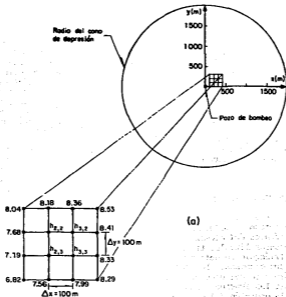
Se ilustra la construcción de la malla de elementos finitos utilizando el ejemplo de la figura 7.1(a) en la que se observa que  $100 \leq x \leq 400$  m y  $0 \leq y \leq 300$  m. Esta área se localiza cerca de un pozo de bombeo. La división pictórica del dominio del problema de la región cercana al pozo, tanto en la aproximación por diferencias finitas como en la del elemento finito, se muestra en la figura 7.1 (b) y (c). Exactamente el mismo conjunto de 16 puntos nodales se utiliza en ambos casos. Los 4 nodos inte-

riores representan las incógnitas, y los 12 nodos de la frontera representan las cargas especificadas. En el esquema de diferencias finitas, cada punto nodal es rotulado por un índice de renglón y un índice de columna. En el esquema del elemento finito, el dominio del problema se divide en 18 triángulos. A cada triángulo se le asigna un número de elemento y tres números de nodo, uno para cada esquina. Observe que los nodos están numerados consecutiva y sistemáticamente, columna por columna. La numeración sistemática de los nodos no es un requerimiento, pero reduce considerablemente la cantidad necesaria de memoria.

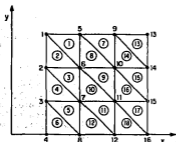
### EL ELEMENTO ARQUETIPICO.

Es necesario describir aquellas propiedades de un elemento triangular (figura 7.2) que lo caracterizan como un elemento finito. Debido a que cada elemento se trata por separado, y como no es necesario localizar los nodos en una retícula regular, no se designa un nodo por la pareja ordenada (i,j) sino por un número sencillo L y las coordenadas nodales  $(x_L, y_L)$ . El elemento triangular arquetípico tiene los números de nodo i, j y m en orden contra reloj. Por ejemplo, el elemento 3 en la figura 7.1 (c), tiene los números de nodo  $i=2, j=7$  y  $m=2, 6$   $i=6, j=2$  y  $m=7$ . Las coordenadas de los nodos i, j, y m, se designan como  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_j, y_j)$  y  $(x_m, y_m)$ , respectivamente. Las incógnitas del problema son las cargas en los nodos:  $h_i = h(x_i, y_i)$ ,  $h_j = h(x_j, y_j)$ , y  $h_m = h(x_m, y_m)$ .

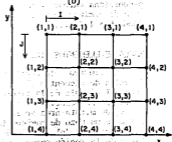
Se define la solución de prueba  $h(x,y)$  dentro del elemento triangular a partir de la interpolación lineal de los valores nodales  $h_i, h_j$  y  $h_m$ . Una interpolación lineal significa que dentro del elemento triangu-



(a)



(c)



(b)

Figura 7.1. Ejemplo de una región cercana a un pozo. (a) Malla en diferencias finitas del dominio del problema. (b) Notación de los nodos en diferencias finitas. (c) Malla y notación de los nodos en elemento finito.

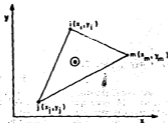


Figura 7.2. Elemento triangular arquetípico e. Los nodos han sido designados con i, j y m en sentido contra reloj.

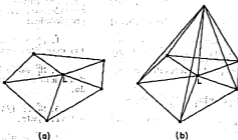


Figura 7.3. Definición de las funciones básicas nodales  $N_i(x,y)$  dentro de la composición de elementos que contiene al nodo i. (a) Vista de planta de la composición de elementos alrededor del nodo i. (b) Vista tridimensional de las funciones básicas nodales  $N_i(x,y)$ .

lar e:

$$\hat{h}^e(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y, \quad [\text{ec. 7.8}]$$

donde  $a_0$ ,  $a_1$ , y  $a_2$  son coeficientes que se deben determinar. Observe que el símbolo  $e$  se está usando para designar el número del elemento. En este contexto, no representa la base de los logaritmos naturales. Los coeficientes se pueden determinar por el establecimiento de tres ecuaciones que requieran la obtención de los valores nodales en las coordenadas nodales:

$$h_i = a_0 + a_1x_i + a_2y_i \quad [\text{ec. 7.9(a)}]$$

$$h_j = a_0 + a_1x_j + a_2y_j \quad [\text{ec. 7.9(b)}]$$

$$h_m = a_0 + a_1x_m + a_2y_m \quad [\text{ec. 7.9(c)}]$$

Si se resuelven estas ecuaciones para  $a_0$ ,  $a_1$ , y  $a_2$  y si las expresiones se substituyen en la ecuación 7.8, ésta se puede reescribir como:

$$\hat{h}^e(x,y) = N_i^e(x,y)h_i + N_j^e(x,y)h_j + N_m^e(x,y)h_m, \quad [\text{ec. 7.10}]$$

donde:

$$N_i^e(x,y) = \frac{1}{2\Delta^e}[(x_j y_m - x_m y_j) + (y_j - y_m)x + (x_m - x_j)y] \quad [\text{ec. 7.11(a)}]$$

$$N_j^e(x,y) = \frac{1}{2\Delta^e}[(x_m y_i - x_i y_m) + (y_m - y_i)x + (x_i - x_m)y] \quad [\text{ec. 7.11(b)}]$$

$$N_m^e(x,y) = \frac{1}{2\Delta^e}[(x_1 y_j - x_j y_1) + (y_1 - y_j)x + (x_j - x_1)y] \quad [\text{ec. 7.11(c)}]$$

y:

$$\Delta^e = (x_j y_j - x_j y_1) + (x_m y_i - x_i y_m) + (x_j y_m - x_m y_j) \quad [\text{ec. 7.12}]$$

$\Delta^e$  en la ecuación 7.12 es el área del triángulo  $ijm$  expresada en términos de sus coordenadas en las esquinas. Las funciones  $N_i^e(x,y)$ ,  $N_j^e(x,y)$  y  $N_m^e(x,y)$  son las funciones básicas o de interpolación del elemento. Son funciones de las coordenadas espaciales  $x,y$  y definen  $h(x,y)$  en el elemento e en términos de los valores nodales  $h_i$ ,  $h_j$  y  $h_m$ .

Aunque las expresiones algebraicas de las funciones básicas de los elementos  $N_i^e(x,y)$  pueden parecer largas, son intuitivamente simples si consideramos una breve lista de sus propiedades:

1.  $N_i^e$  es 1 en el nodo  $i$  y 0 en los otros dos nodos.
2.  $N_i^e$  varía linealmente con la distancia a lo largo de cualquier lado.
3.  $N_i^e$  es 1/3 en el centroide del triángulo.
4.  $N_i^e$  es 0 a lo largo del lado opuesto al nodo  $i$ .

#### COMPOSICIÓN DE ELEMENTOS.

La colección de los elementos que contienen al nodo específico  $i$ , forman la composición alrededor del nodo  $i$  [figura 7.3(a)]. Dentro de la composición, las funciones básicas nodales  $N_i(x,y)$  se definen fraccionalmente por las funciones básicas de los elementos  $N_i^e(x,y)$  dentro de cada elemento perteneciente a la composición. Fuera de ella,  $N_i(x,y)$  es 0. De esta manera, cada función básica  $N_i(x,y)$  tiene forma piramidal [figu-

ra 7.3(b)]. Su valor máximo de 1 se localiza directamente encima del nodo L. Sus bordes se inclinan hacia 0 en los demás nodos.

#### ENSAMBLE DE LA MATRIZ DE CONDUCTANCIA.

Un sistema de ecuaciones algebraicas representa la ecuación 7.2. Podría construirse secuencialmente el sistema de ecuaciones de un número nodal por turno. Un método más eficiente que la consideración de un renglón sencillo por vez, es proceder secuencialmente a través del problema por elementos e incorporar las contribuciones del elemento  $ijm$  a los tres renglones  $L=i$ ,  $L=j$  y  $L=m$ . Después de sumar las contribuciones del último elemento, el sistema total de ecuaciones se ha completado.

La definición elemento por elemento de  $N_L$  significa que, aunque es un continuo fraccionado, sus primeras derivadas contienen discontinuidades escalonadas en las fronteras de los elementos. Si usamos el resultado de la integración por partes, ecuación 7.7, entonces la ecuación 7.2 se puede escribir como la sumatoria de integrales de los elementos individuales siendo igual a la integral de la frontera:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right) dx dy &= \\ = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial h}{\partial x} n_x + \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) N_L ds, & \end{aligned} \quad [\text{ec. 7.13}]$$

donde  $L = 1, 2, \dots, NN$ . Observe que en el lado izquierdo de la ecuación 7.13, se ha reemplazado  $h$  por  $h^e$ .

La ecuación 7.10, que define  $h^e(x,y)$ , muestra que  $\partial h^e/\partial x$  y  $\partial h^e/\partial y$  se pueden escribir en términos de las cargas nodales  $h_i$ ,  $h_j$  y  $h_m$  y de las derivadas de las funciones básicas de los elementos:

$$\frac{\partial h^e}{\partial x} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x} h_i + \frac{\partial N_j^e}{\partial x} h_j + \frac{\partial N_m^e}{\partial x} h_m \quad [\text{ec. 7.14(a)}]$$

$$\frac{\partial h^e}{\partial y} = \frac{\partial N_i^e}{\partial y} h_i + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} h_j + \frac{\partial N_m^e}{\partial y} h_m \quad [\text{ec. 7.14(b)}]$$

Las derivadas de  $N_L^e$  se pueden escribir en términos de las coordenadas nodales por diferenciación de la ecuación 7.11. Si se substituye la ecuación 7.14 para cada elemento en el lado izquierdo de la ecuación 7.13, entonces esta ecuación puede tomar la forma:

$$\begin{aligned} G_{L,1} h_1 + \dots + G_{L,i} h_i + \dots + \\ + G_{L,j} h_j + \dots + G_{L,m} h_m + \dots + \\ + G_{L,NN} h_{NN} = f_L \end{aligned} \quad [\text{ec. 7.15}]$$

donde  $L = 1, 2, \dots, NN$ .

Las expresiones explícitas de la contribución de cada elemento e a los coeficientes  $G_{L,i}$ ,  $G_{L,j}$  y  $G_{L,m}$  se derivan en la siguiente sección. Las expresiones para  $f_L$  se dan en la sección de condiciones de frontera.

El sistema de  $NN$  ecuaciones representado por la ecuación 7.15 se puede escribir en forma matricial como:

$$[G]\{h\} = \{f\} \quad [\text{ec. 7.16}]$$



La matriz  $[G]$  es una matriz cuadrada de coeficientes denominada matriz de conductancia; la matriz  $\{h\}$  es una matriz columna de las cargas nodales  $h_i$ ; la matriz  $\{f\}$  es una matriz columna que representa las condiciones de frontera. De esta manera el método de Galerkin conduce a un conjunto de ecuaciones algebraicas que se pueden poner en notación matricial.

La razón de que  $[G]$  se denomine matriz de conductancia no es obvia en el caso de la ecuación de Laplace. Si se deja la conductividad hidráulica en la ecuación gobernante, entonces aparece como un factor multiplicativo en la ecuación 7.13 y en los registros de  $[G]$ .

#### MATRIZ DE CONDUCTANCIA DE CADA ELEMENTO.

La subdivisión del dominio del problema en elementos significa que evaluamos las integrales en el lado izquierdo de la ecuación 7.13 de un elemento cada vez. Una función básica nodal  $N_i$  no es cero sólo sobre la composición de elementos alrededor del nodo  $L$ . Por lo tanto, la integral doble del elemento  $e$  no es cero sólo si el elemento está en la composición alrededor del nodo  $L$ , en cuyo caso  $N_i$  se define dentro del elemento como la función básica del elemento  $N_i^e$ . En otras palabras, un elemento  $e$  y configurado por los nodos  $i, j$  y  $m$  contribuye sólo en aquellas tres ecuaciones en las cuales  $L=i, j$  ó  $m$ . Además, en cada una de estas tres ecuaciones, el elemento  $e$  contribuye sólo en los términos de  $h_i, h_j$  y  $h_m$ . En conjunto, el elemento  $e$  contribuye en tres renglones y tres columnas de la matriz de coeficientes  $[G]$ . La contribución del elemento  $e$  se puede pensar como una matriz de  $3 \times 3$ :

$$[G^e] = \begin{bmatrix} G_{ii}^e & G_{ij}^e & G_{im}^e \\ G_{ji}^e & G_{jj}^e & G_{jm}^e \\ G_{mi}^e & G_{mj}^e & G_{mm}^e \end{bmatrix} \quad [\text{ec. 7.17}]$$

donde  $[G^e]$  se denomina matriz de conductancia del elemento.

Los términos individuales de  $[G^e]$  se encuentran evaluando la integral doble en el elemento  $e$  de la ecuación 7.13. La función  $N_L$  se reemplaza por  $N_L^e$  de acuerdo con la discusión anterior:

$$\begin{aligned} & \iint_e \left( \frac{\partial h^e}{\partial x} \frac{\partial N_L^e}{\partial x} + \frac{\partial h^e}{\partial y} \frac{\partial N_L^e}{\partial y} \right) dx dy = \\ & = \iint_e \left[ \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} h_i + \frac{\partial N_j^e}{\partial x} h_j + \frac{\partial N_m^e}{\partial x} h_m \right) \frac{\partial N_L^e}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial y} h_i + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} h_j + \frac{\partial N_m^e}{\partial y} h_m \right) \frac{\partial N_L^e}{\partial y} \right] dx dy \end{aligned} \quad [\text{ec. 7.18}]$$

donde  $L = i, j, \text{ ó } m$ .

El integrando, el cual involucra primeras derivadas espaciales de las funciones básicas, es independiente de  $x$  y de  $y$  porque las funciones básicas son lineales en  $x, y$ . En este caso, el resultado de la integración es el integrando multiplicado por el área del elemento,  $A^e$ . Del mismo modo como se dedujeron los coeficientes de  $h_i, h_j$  y  $h_m$ :

$$\iint_e \left( \frac{\partial h^e}{\partial x} \frac{\partial N_L^e}{\partial x} + \frac{\partial h^e}{\partial y} \frac{\partial N_L^e}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$\begin{aligned}
 &= A^e \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) h_i + \\
 &+ A^e \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_l^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_l^e}{\partial y} \right) h_j + \\
 &+ A^e \left( \frac{\partial N_m^e}{\partial x} \frac{\partial N_l^e}{\partial x} + \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \frac{\partial N_l^e}{\partial y} \right) h_m,
 \end{aligned}$$

[ec. 7.19]

donde  $L = i, j \text{ ó } m$ . Los coeficientes de  $h_i$ ,  $h_j$  y  $h_m$  en la ecuación 7.19 son los registros de columna a lo largo del renglón  $L$  de la matriz de conductancia del elemento; esto es:

$$G_{L,i}^e = A^e \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right)$$

[ec. 7.20(a)]

$$G_{L,j}^e = A^e \left( \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right)$$

[ec. 7.20(b)]

$$G_{L,m}^e = A^e \left( \frac{\partial N_m^e}{\partial x} \frac{\partial N_m^e}{\partial x} + \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \right),$$

[ec. 7.20(c)]

donde  $L = i, j \text{ ó } m$ .

#### MATRIZ DE CONDUCTANCIA GLOBAL.

La matriz de conductancia del elemento representa las contribuciones del elemento  $e$  a los tres renglones y tres columnas de la matriz  $[G]$  de la ecuación 7.16. La matriz  $[G]$  se denomina matriz de conductancia global. La sumatoria de los elementos de la ecuación 7.13 significa que se deben adicionar las contribuciones elementales a la matriz de

conductancia global; esto es:

$$G_{L,i} = \sum_e G_{L,i}^e \quad [\text{ec. 7.21}]$$

para toda  $L$  e  $i$ .

Observe que la matriz  $[G]$  no se construye de un renglón cada vez. Más bien, las contribuciones elementales a la matriz global de coeficientes se ordenan por pares de subíndices:  $L, i$ ;  $L, j$ ,  $L, m$ , en la ecuación 7.20 - conforme se van considerando los elementos uno cada vez. El proceso se ilustra en la figura 7.4. Por ejemplo, el elemento número 1 se define por los nodos  $i=1$ ,  $j=2$  y  $m=3$ . Los 9 valores que constituyen la matriz elemental  $[G^{e=1}]$  están dispersos de acuerdo con sus números de subíndice en las localizaciones correctas de la matriz global. Estos renglones y columnas se indican con X. Este proceso se hace para cada uno de los 6 elementos en turno. La sumatoria de todas las contribuciones elementales conduce a la configuración final de los registros de la matriz global.

La definición de las contribuciones de la matriz elemental, ecuación 7.20, implica que la matriz es simétrica, esto es  $G_{L,i}^e = G_{L,i}^e$ . De aquí que la matriz global también sea simétrica, esto es  $G_{L,i} = G_{i,L}$ , para toda  $L$  e  $i$ .

El ensamble de la matriz de conductancia global se hace estrictamente en términos de la geometría (rotulación de los nodos y elementos) de la malla de elementos finitos. Si el acuífero no fuera homogéneo o isótropo, la matriz global debería incluir las conductividades hidráulicas del cúbfero.

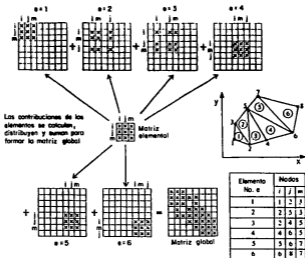


Figura 7.4. Diagrama esquemático que muestra la relación entre las matrices de conductancia elementales y globales. En el recuadro se muestra la malla de elementos finitos bajo estudio.

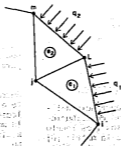


Figura 7.5. Tratamiento de los elementos finitos en el caso de condiciones de frontera con flujos específicos.

## CONDICIONES DE FRONTERA.

Lo que resta por incorporar son las condiciones de frontera, trátase de flujo especificado o de carga especificada. El lado derecho de la ecuación 7.13 es una integral de frontera que es proporcional al promedio pesado del flujo normal. No obstante, la presencia de la integral de frontera que involucra el conocimiento del flujo en la frontera puede parecer contradictoria para una frontera a lo largo de la cual las cargas sean especificadas.

Para la ecuación  $L$ -ésima, la función básica nodal  $L$ -ésima  $N_L$  es la función que pesa. Por lo tanto, los componentes del vector columna  $\{f\}$  de la ecuación 7.16 están dados por la integral de frontera de la ecuación 7.13, uno por cada función básica nodal  $N_L$ . Primero, considérese  $L$  como un nodo interior. Si ningún lado de un elemento de la composición alrededor de  $L$  forma parte de la frontera, entonces  $N_L = 0$  en toda la frontera. Aún si un lado de un elemento de la composición es parte de la frontera, será un lado opuesto a  $L$ , y  $N_L = 0$  a lo largo de este lado de la frontera de acuerdo con la cuarta propiedad de  $N_L$  descrita anteriormente. Debido a que  $N_L$  es la función de peso de la integral de la frontera de la ecuación 7.13, la integral completa debe ser cero para todos los nodos interiores  $L$ . De aquí que  $f_L = 0$  si el subíndice  $L$  representa un nodo interior, sin importar las condiciones de frontera. Enseguida trataremos por separado el manejo de las condiciones de frontera cuando  $L$  representa un nodo de la frontera.

**FLUJO ESPECIFICADO.** Sea  $L$  el nodo de una frontera a través de la cual el flujo normal es específico (figura 7.5). La integral de fronte-

ra de la ecuación 7.13 se puede escribir en términos del flujo especificado aplicando la ley de Darcy:

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial h}{\partial x} n_x + \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) N_L \, d\sigma = - \int_i^L \frac{q_1}{K} N_L(\sigma) \, d\sigma + \int_L^m \frac{q_2}{K} N_L(\sigma) \, d\sigma, \quad [\text{ec. 7.22}]$$

donde  $K$  es la conductividad hidráulica, y  $\sigma$  es una variable generalizada que representa la distancia a lo largo de la frontera. La convención de signos es que  $q_1$  y  $q_2$  son positivos cuando representan una entrada a través de la frontera. La integral de la frontera no es igual a cero sólo para los dos segmentos lineales  $iL$  y  $Lm$  debido a que  $N_L = 0$  para la frontera detrás de los nodos  $i$  y  $m$ . La función de interpolación  $N_L$  varía linealmente desde 1 hasta 0 entre los nodos  $L$  e  $i$  y entre los nodos  $L$  y  $m$ . De aquí que las integrales se pueden efectuar por inspección, resultando el registro  $L$ -ésimo del vector  $\{f\}$  igual a:

$$f_L = \frac{q_1}{K} \frac{\overline{il}}{2} + \frac{q_2}{K} \frac{\overline{lm}}{2} \quad [\text{ec. 7.23}]$$

donde  $\overline{il}$  es la distancia entre los nodos  $i$  y  $L$ , y  $\overline{lm}$  la distancia entre los nodos  $L$  y  $m$ . El flujo volumétrico a través de un lado se distribuye igualmente entre los dos nodos que constituyen el lado.

En resumen, las condiciones de frontera de flujo se incorporan en el vector columna  $\{f\}$  de la ecuación 7.16. Para todos los nodos interiores o nodos de fronteras de no flujo  $f_L = 0$ . Para nodos de la frontera con flujos especificados,  $f_L$  está dado por la ecuación 7.23.

**CARGA ESPECIFICADA.** Todavía se tiene que considerar el caso del valor de la integral de la frontera de la ecuación 7.13 cuando la carga nodal  $h_L$  es conocida. Si se conoce  $h_L$ , entonces la ecuación L-ésima resulta redundante. El valor de la integral de la frontera  $f_L$  es inmaterial si se elimina del cálculo la ecuación L-ésima. Al mismo tiempo, se usa el valor de frontera para transferir los términos que contienen  $h_L$  en los renglones restantes de  $[G](h)$  a la matriz  $(f)$ . Si el sistema completo de ecuaciones representado por la ecuación 7.16 se resuelve por iteración, se puede simplificar omitiendo aquellas ecuaciones L en las cuales  $h_L$  es un valor de frontera conocido. Debido a que el valor conocido se utiliza como aproximación inicial, y puesto que nunca cambia, este valor especificado de  $h_L$  se utiliza donde quiera que aparezca en las demás ecuaciones. Este método de manejo de las cargas especificadas en la frontera se aplica en el programa de computadora del capítulo 8.

Si se emplea una técnica de solución directa de las matrices, mediante un artificio numérico se pueden manejar las cargas especificadas  $h_L$  sin eliminar las ecuaciones. El componente diagonal  $G_{L,L}$  de la matriz global de coeficientes se multiplica por  $10^{10}$ , y  $f_L$  se establece igual a  $10^{10}G_{L,L}h_L$ , utilizando el valor especificado de  $h_L$ . La ecuación L-ésima será:

$$G_{L,1}h_1 + G_{L,2}h_2 + \dots + 10^{10}G_{L,L}h_L + \dots + G_{L,n}h_n = 10^{10}G_{L,L}h_L \quad [\text{ec. 7.24}]$$

Cuando el sistema completo de

ecuaciones se resuelve para el vector columna  $(h)$ ,  $h_L$  es forzado a tomar su valor especificado debido a que los demás términos de la ecuación L-ésima son insignificantes en relación con el término de la diagonal.

En resumen, las condiciones fijas en la frontera conducen a la reducción del número de incógnitas. El valor de  $f_L$  para un nodo de frontera L es irrelevante y se puede igualar a cero. Debido al valor de  $f_L = 0$  para todos los nodos interiores, un problema cuyas fronteras son todas especificadas tiene  $(f) = 0$ .

#### LA ECUACION DE POISSON.

Los resultados obtenidos para la ecuación de Laplace permiten extender la técnica del elemento finito a la ecuación de Poisson. La ecuación L-ésima del sistema de ecuaciones algebraicas se representa por el residuo pesado:

$$\iint_D \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{R}{T} \right) N_L(x,y) dx dy = 0, \quad [\text{ec. 7.25}]$$

donde R es la recarga, y T la transmisividad. Se suponen constantes en el dominio del problema aunque pueden tener valores diferentes para cada elemento.

Se usarán los elementos triangulares y las funciones básicas definidas anteriormente. Comparada con la ecuación 7.2, la ecuación 7.25 contiene el término adicional  $(R/T)N_L$  en el integrando. Si se aplica la ecuación 7.7 a las segundas derivadas de  $h$ , entonces:

$$\iint_D \left( \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$= \iint_D \frac{R}{T} N_L(x,y) dx dy +$$

$$+ \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} n_y \right) N_L ds .$$

[ec. 7.26]

La integración del término de recarga en el lado derecho de la ecuación 7.26 se hace dentro del dominio del problema sumando las integraciones dentro de los elementos:

$$\iint_D \frac{R}{T} N_L(x,y) dx dy =$$

$$= \int_e \left( \iint_T \frac{R}{T} N_L(x,y) dx dy \right) . \text{ [ec. 7.27]}$$

El término de recarga conduce a una matriz columna adicional, que de notaremos como {B}; esto es, la ecuación 7.16 se convierte en:

$$\{G\}(h) = \{B\} + \{f\} . \text{ [ec. 7.28]}$$

Para un elemento e definido por los nodos i, j y m,  $N_L = N_L^e$  para  $L = i, j$  y m, y  $N_L = 0$  para cualquier otra L. Por lo tanto, la integración en el elemento e del lado derecho de la ecuación 7.27 contribuye en tres renglones de {B}. Estas contribuciones se pueden representar por una matriz elemental:

$$\{R^e\} = \begin{bmatrix} B_i^e \\ B_j^e \\ B_m^e \end{bmatrix} , \text{ [ec. 7.29]}$$

donde:

$$B_i^e = \iint_T \frac{R}{T} N_i^e(x,y) dx dy = \frac{R}{T} \frac{A^e}{3} \text{ [ec. 7.30(a)]}$$

$$B_j^e = \iint_T \frac{R}{T} N_j^e(x,y) dx dy = \frac{R}{T} \frac{A^e}{3} \text{ [ec. 7.30(b)]}$$

$$B_m^e = \iint_T \frac{R}{T} N_m^e(x,y) dx dy = \frac{R}{T} \frac{A^e}{3} \text{ [ec. 7.30(c)]}$$

El área de elemento e es designada por  $A^e$ . La evaluación de las integrales de la ecuación 7.30 se justifica por la propiedad de  $N_L^e$  de que su valor en el centroide de un elemento triangular es un tercio. La contribución de la recarga dentro de un elemento es un tercio de su valor integrado para cada nodo. Este resultado intuitivo es análogo al de la ecuación 7.23 en la cual la mitad de la contribución del flujo de la frontera se distribuye a cada nodo limítrofe del lado.

El valor global  $B_L$  es la suma de las contribuciones de cada elemento,  $B_L^e$ :

$$B_L = \int_e B_L^e . \text{ [ec. 7.31]}$$

## CAPITULO 8.

### SIMULACION COMPUTARIZADA DE LA CONTAMINACION DE UN ACUIFERO.

En este capítulo se presentan tres programas de computadora que permiten simular el avance de un contaminante descargado dentro de un acuífero mediante un pozo de inyección de aguas residuales. El problema de la contaminación del acuífero se ha dividido para su estudio en tres partes (cada uno de los programas): la geometría y la hidrodinámica del acuífero, así como la distribución del contaminante dentro del mismo.

Las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan la hidrodinámica y la distribución del contaminante, se resuelven mediante el método del elemento finito, descrito en el capítulo anterior, y se aprovecha la disponibilidad de gráficos de alta resolución de la microcomputadora Apple II para obtener la red de flujo del agua subterránea, así como líneas específicas de isoconcentración del contaminante en diferentes tiempos.

Para la solución del problema, se supone un acuífero de geometría irregular situado en un plano horizontal, con límites impermeables, y con entradas y salidas de agua sólo mediante pozos, los cuales deben estar lo suficientemente lejos de las fronteras. También se supone que el movimiento del agua subterránea alcanza el estado estacionario. Además se considera que el transporte del contaminante depende del tiempo, del movimiento del agua, de sus características dispersivas así como de los mecanismos fisicoquímicos

de adsorción.

Las subrutinas de los programas GEOMETRIA, HIDRODINAMICA y CONTAMINACION, se muestran en las figuras 8.1, 8.2 y 8.3, y los listados en los Anexos 2, 3 y 4.

#### GEOMETRIA DEL ACUIFERO.

Este programa tiene como objetivo generar los elementos finitos necesarios para la solución numérica a partir de información tan simple como la localización de algunos puntos que describan adecuadamente la forma del acuífero. El usuario debe proporcionar a la computadora suficientes puntos (máximo 24) en el orden contrario al del movimiento de las manecillas de un reloj, empleando las coordenadas de un sistema de referencia real o imaginario; es decir, puede tomar en cuenta las distancias reales medidas en el campo, o hacer las mediciones en un plano sobre el escritorio. Debe terminar el suministro de esta información, proporcionando como último dato el primer punto que se anotó, a fin de cerrar el ciclo.

Para poder seleccionar los elementos finitos del problema, el programa coloca los puntos que describen la geometría del acuífero, dentro de una red cuadrículada constituida por un número igual de renglones y columnas (máximo 10). El usuario debe definir el tamaño de la malla que desea utilizar, teniendo en consideración que mientras mayor sea

el número de celdillas que contenga, se requerirá más tiempo de proceso aunque los resultados serán más exactos debido a la generación de una mayor cantidad de elementos finitos.

Después de la entrada de estos datos, se realiza un cambio de escala para situar los puntos fronterizos dentro de la red cuadrícula elegida; se obtienen las intersecciones de la frontera del acuífero con las líneas que forman la malla; se clasifican los puntos de la red dependiendo de su ubicación dentro o fuera del acuífero; se escogen los triángulos que configuran el área del acuífero; se ordenan y se numeran sus nodos, y al final se dibuja un plano del acuífero incluyendo los elementos finitos triangulares que lo componen.

#### HIDRODINAMICA DEL ACUIFERO.

La información que debe suministrarse, durante la ejecución de este programa, es la siguiente: los elementos finitos que describen la geometría del acuífero, su espesor, conductividad hidráulica, porosidad y densidad global, así como el número de pozos perforados y su tasa de bombeo. El usuario no debe preocuparse por los elementos finitos, ya que el programa recurrirá a un archivo de datos grabado en el disco de la computadora y que contiene dicha información, la cual fue almacenada al final del programa anterior.

La ecuación de Poisson (ecuación 3.16), que gobierna el movimiento del agua subterránea en esta do estacionario incluyendo fuentes y sumideros, se resuelve con la técnica del elemento finito, por lo que la mayor parte del programa se

dedica al establecimiento de un conjunto de ecuaciones algebraicas y a su solución matricial, obteniéndose así las cargas hidráulicas en los nodos del sistema.

En este programa se realizan dos gráficas, una del plano del acuífero conteniendo los elementos finitos originales así como los generados por la colocación de los pozos, y otra de la red de flujo del agua subterránea obtenida a partir de las cargas hidráulicas.

#### CONTAMINACION DEL ACUIFERO.

Después de que este programa ha obtenido la información acerca de los elementos finitos así como de las cargas hidráulicas, resultante de los cálculos de los dos programas anteriores y almacenada en el disco de la computadora, el usuario debe anotar las características de la calidad del agua presente en el acuífero y de la que se está inyectando a través de los pozos, así como las dispersividades longitudinal y transversal, y los coeficientes de la isotema de Langmuir para el contaminante dentro del acuífero. También debe indicar el intervalo de tiempo para la realización de los cálculos de la distribución del contaminante, así como el frente de avance (como porcentaje de la concentración máxima) que desea observar en la gráfica conforme varía el tiempo.

La ecuación gobernante del transporte de contaminante que se resuelve, es la ecuación 6.43 con el término de adsorción expresado por la ecuación 6.54.

En el siguiente capítulo se presentan algunos ejemplos de la aplicación de estos tres programas.



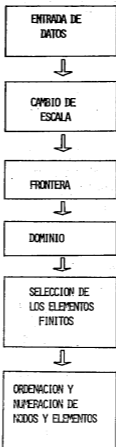


Figura 8.1. Diagrama de flujo del programa "Geometría".

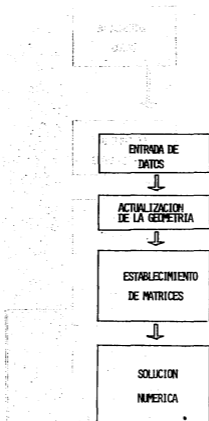


Figura 8.2. Diagrama de flujo del programa "Hidrodinámica".

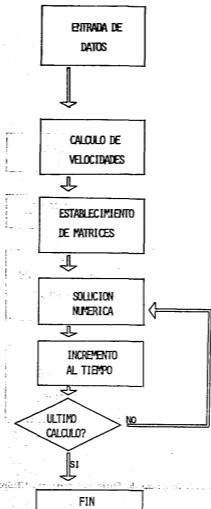


Figura 8.3. Diagrama de flujo del programa "Contaminación".

## CAPITULO 9.

### APLICACIONES Y RESULTADOS DE LA SIMULACION.

El concepto de elementos (estos, las áreas delineadas por las retas que conectan los puntos nodales) es fundamental para el desarrollo de ecuaciones en el método del elemento finito. En este estudio se utilizaron elementos triangulares, pero también son posibles cuadriláteros u otras formas.

El objetivo de la modelación es predecir el valor de la variable desconocida (por ejemplo, la carga hidráulica subterránea o la concentración de un contaminante) en los puntos nodales. Los modelos frecuentemente se utilizan para predecir los efectos del bombeo en los niveles del agua subterránea. Sin embargo, antes de hacer una simulación predictiva, el modelo debe ser calibrado y verificado.

#### VALIDEZ DE UNA SOLUCION NUMERICA.

En la mayoría de los ejemplos se revisa la validez de la solución numérica comparando los resultados obtenidos con los calculados a partir de la solución analítica. Sin embargo, las soluciones analíticas no son disponibles para muchos problemas de interés práctico. Los métodos numéricos nos permiten resolver la ecuación gobernante en más de una dimensión para condiciones de frontera complejas y para acuíferos heterogéneos y anisótropos, mientras que la mayoría de las soluciones analíticas se restringen a la consideración de acuíferos isotrópicos y homogéneos.

Un punto importante que algunas veces resulta inadvertido, es la necesidad de verificar la validez de cualquier solución numérica. Por lo tanto, se deben hacer varias comprobaciones de que la solución es correcta cuando no se dispone de una solución analítica. Específicamente, es una buena práctica verificar la sensibilidad de la solución a la elección de la tolerancia al error y al espaciamiento nodal, así como realizar un cálculo del balance de masa.

La solución numérica se obtiene mediante la repetición de los cálculos utilizando como valor supuesto el generado en la iteración anterior. El ciclo iterativo continúa hasta que el valor supuesto como solución, converge, es decir, hasta que la diferencia entre las respuestas generadas en dos niveles sucesivos de iteración, es menor a un valor establecido, el cual se conoce como tolerancia al error o criterio de convergencia.

Se puede demostrar que un criterio de convergencia menos restrictivo, puede conducir a respuestas inaceptables.

En los problemas de descargas mediante pozos, se ha observado que la solución es sensible al valor elegido para la tolerancia al error o error permisible. Si el valor es demasiado alto, la solución no se aproximará a la analítica. Como regla general, se deben hacer varias

corridas de computadora usando valores sucesivamente más pequeños del error permisible, hasta seleccionar un valor lo suficientemente pequeño tal que la solución no cambie dentro del rango deseado de exactitud. La solución puede mejorarse con el uso de espaciamientos nodales más pequeños. Se deben hacer varias corridas de computadora con espaciamientos nodales sucesivamente más pequeños hasta que la solución no cambie dentro del rango deseado de exactitud. Sin embargo, generalmente es un proceso que consume mucho tiempo por tener que modificar la malla y redefinir la entrada de datos. En vez de eso, la mayoría de los modeladores prefiere el tercer tipo de prueba de la validez: el cálculo del balance de masa.

El cálculo del balance de masa es una expresión del hecho de que, en estado estacionario, la cantidad de agua que entra al sistema es igual a la que sale de él. Si esto no sucede, existe algún error en la solución numérica. Sin embargo, un error grande en el balance de masa indica falta de precisión en el cálculo mismo del balance de masa.

Para problemas transitorios, los valores de las cargas también dependen de la elección del intervalo de tiempo. Una aproximación numérica se dice que converge si la solución se acerca a los valores correctos en la medida que el intervalo de tiempo se aproxima a cero. La aproximación es estable si, conforme la solución avanza en el tiempo, los errores no son amplificadas tal que la solución llegue a ser inválida.

El objetivo de la mayor parte de las simulaciones de computadora, es predecir el efecto de algunos esquemas de administración propuestos para sistemas hidráulicos en particu-

lar. La prueba final del modelo numérico es determinar si las observaciones de campo son simuladas exactamente. Tal modelo se dice que ha sido calibrado y verificado. El problema de calibración y verificación generalmente requiere de ajustes de los parámetros del modelo y de las condiciones de frontera.

#### CALIBRACION.

En general, la primera etapa en la calibración de un modelo, es diseñarlo en estado estacionario para que proporcione la distribución de las cargas hidráulicas que se usarán como condiciones iniciales en la posterior simulación transitoria. A partir de los datos de entrada es posible generar una solución para las cargas en cada punto nodal. Sin embargo, para verificar la exactitud de la solución, es necesario comparar las curvas calculadas con las medidas en varios puntos en el campo. Invariablemente, las curvas calculadas en la primera corrida del modelo no coincidirán con los valores de campo. No es irracional ajustar los datos de entrada porque éstos son imperfectamente conocidos, y habrá un cierto rango de valores que puede ser válido. No es poco común realizar de 20 a 50 simulaciones de ensayo y error antes de que se obtenga una calibración aceptable. La calibración es realmente una forma de resolver el problema inverso discutido en el capítulo 3, cuando se discutió la ecuación de Poisson.

Frecuentemente se siente la tentación de utilizar los valores medidos de las cargas como entrada del modelo; esto es, forzar las cargas en el interior de la malla a que igualen los valores medidos con la esperanza de que esto asegure la ca-

libración. Sin embargo, si las condiciones de frontera y los valores de T, S y R no se especifican correctamente, este procedimiento ocasionará la creación de fuentes y/o sumideros artificiales en el interior de la malla, y la configuración resultante de las cargas no será realista.

#### VERIFICACION.

La calibración significa que dada una cierta combinación de parámetros y condiciones de frontera, el modelo producirá los valores medidos en el campo, en determinados puntos de la red. Sin embargo, no hemos garantizado que la combinación de parámetros encontrada por ensayo y error sea única. Gillham y Farvolden (1974), por ejemplo, demostraron que diferentes distribuciones de la conductividad hidráulica, producirán esencialmente la misma distribución de la carga. Cuando se perfeccionen los métodos de solución del problema inverso, será posible encontrar una solución óptima para la transmisividad.

El objetivo de la verificación es demostrar que el modelo es capaz de simular algún evento histórico de la hidrología, para el cual se disponga de datos de campo. Por ejemplo uno podría intentar simular las pérdidas de carga durante un ensayo de bombeo, o los descensos del nivel del agua durante una sequía. Generalmente, será necesario un refinamiento extra de los parámetros durante la verificación. Estos refinamientos deberán hacerse de forma tal que no cambien la calibración del estado estacionario. Después de que el modelo ha sido calibrado y verificado, está listo para usarse para predicción.

Idealmente, la calibración y verificación del modelo deberían hacer se cuando la investigación de campo está en marcha para que los datos de campo requeridos por el modelo puedan ser obtenidos fácilmente. Además cuando se utilice como herramienta de planeación, el modelo deberá actualizarse y mejorarse conforme se obtengan nuevos datos de campo.

#### EJEMPLOS NUMERICOS.

**PROBLEMA 9.1.** Se desea obtener el conjunto de elementos finitos que describan la geometría del acuífero mostrado en la figura 6.1. Se utilizó el programa "Geometría" con los datos de la tabla 9.1.

Después de diez minutos de proceso, el programa de computadora informó que el modelo consta de 43 elementos finitos y 39 nodos, los cuales se presentan en la tabla 9.2.

**PROBLEMA 9.2.** Dadas las cargas hidráulicas en la frontera de un acuífero cuadrado, obtener la distribución correspondiente para los nodos interiores en el estado estacionario.

Se alimentó el programa "Geometría" con los datos siguientes (véase la figura 7.1) :

Malla = 3.

Punto	Coordenadas, m	
1	100.0	0.0
2	400.0	0.0
3	400.0	300.0
4	100.0	300.0

El modelo consta de 18 elementos finitos y 16 nodos, resultados obtenidos después de tres minutos -

**TABLA 9.1. DATOS DE ENTRADA DEL PROBLEMA 9.1.**

Milla = 4.

Punto	Coordenadas, mm		Punto	Coordenadas, mm	
	X	Y		X	Y
1	0.0	3.5	12	50.0	44.5
2	5.0	0.5	13	42.0	45.0
3	13.5	0.0	14	33.0	44.5
4	27.0	1.5	15	22.5	43.0
5	39.0	3.0	16	16.0	41.0
6	58.8	8.0	17	11.5	36.0
7	70.0	13.0	18	13.0	32.0
8	77.5	19.0	19	16.0	27.5
9	80.0	31.5	20	16.0	23.0
10	71.0	39.5	21	14.0	19.0
11	58.0	43.5	22	11.0	15.0
			23	5.0	9.0

**TABLA 9.2. RESULTADOS DEL PROBLEMA 9.1.**

Triángulo	Vértices (nodos)			Nodo	Coordenadas en la malla	
1	9	10	1	1	2.00	2.00
2	8	9	1	2	2.00	3.00
3	7	8	1	3	3.00	2.00
4	1	36	37	4	3.00	3.00
5	1	37	38	5	4.00	2.00
6	7	1	38	6	4.00	3.00
7	7	38	39	7	1.00	1.17
8	31	32	2	8	1.25	1.02
9	2	32	1	9	1.67	1.00
10	32	33	34	10	2.00	1.03
11	1	32	34	11	2.34	1.07
12	1	34	35	12	2.95	1.14
13	1	35	36	13	3.00	1.16
14	29	30	2	14	3.90	1.39
15	2	30	31	15	4.00	1.44
16	10	11	1	16	4.50	1.64
17	1	11	3	17	4.87	1.95
18	3	11	12	18	4.88	2.00
19	3	12	13	19	5.00	2.37
20	1	3	4	20	4.55	2.97
21	1	4	2	21	4.46	3.00
22	26	27	4	22	4.00	3.14
23	4	27	2	23	3.90	3.17
24	2	27	28	24	3.50	3.22
25	28	29	26	25	3.00	3.25

**TABLA 9.2. RESULTADOS DEL PROBLEMA 9.1 (CONTINUACION).**

Triángulo	Vértices (nodos)			Nodo	Coordenadas en la malla	
26	13	14	3	26	3.00	3.24
27	3	14	5	27	2.65	3.22
28	5	14	15	28	2.12	3.15
29	3	5	6	29	2.00	3.11
30	3	6	4	30	1.79	3.04
31	22	23	6	31	1.75	3.00
32	6	23	4	32	1.57	2.79
33	4	23	24	33	1.64	2.59
34	4	24	25	34	1.79	2.37
35	4	25	26	35	1.79	2.15
36	15	16	5	36	1.72	2.00
37	5	16	17	37	1.70	1.95
38	5	17	18	38	1.54	1.75
39	18	19	6	39	1.25	1.45
40	18	19	5			
41	6	19	20			
42	6	20	18			
43	6	21	6			



de proceso. Enseguida se puso en operación el programa "Hidrodinámica", considerándose un acuífero de 50 m de espesor, 2 m/día de conductividad hidráulica, una porosidad del 37% y una densidad de 1.5 g/cm<sup>3</sup>. Los datos anteriores realmente no influyen en la solución porque la ecuación gobernante es la de Laplace. Se indicaron cero pozos perforados y se procedió a proporcionar el valor de la carga hidráulica en cada uno de los nodos de la frontera (numerados del 5 al 16 en la tabla 9.3), para que después de cuatro minutos de proceso se obtuvieran los resultados para los nodos interiores (1 al 4) que se muestran en la tabla 9.3 junto con la solución proporcionada para el mismo problema por la referencia 36.

**PROBLEMA 9.3.** Se simula transitoriamente la contaminación de un acuífero horizontal unidimensional (equivalente a una columna de medio poroso como la mostrada en la figura 6.2) que es alimentado continuamente con un trazador procurándose un régimen de flujo en estado estacionario. La ecuación gobernante es la 6.1 y la solución analítica la 6.3.

Los datos para el programa "Geometría" son los siguientes:

Malla = 10.

Punto	Coordenadas, m.	
1	0.0	0.0
2	100.0	0.0
3	100.0	10.0
4	0.0	10.0

El modelo consta de 20 elementos finitos y 22 nodos. El tiempo de proceso fue de 7.5 minutos.

Los datos para el programa "Hidrodinámica" se muestran en la tabla 9.4. El tiempo de proceso fue de 0.5 minutos.

Los datos para el programa "Contaminación" se presentan en la tabla 9.5. La primera iteración en el tiempo se obtuvo después de 5:40 minutos incluyendo el establecimiento de las matrices. Los resultados, indicados en la tabla 9.6, están arreglados en grupos de 3 renglones para cada intervalo de tiempo, de tal manera que el primer renglón corresponde a la solución obtenida por el programa "Contaminación", el segundo renglón a la solución numérica empleada en la referencia 36, y el tercero a la solución analítica. Además el nodo 2 y el 21 se encuentran situados a la misma distancia de la fuente contaminante, lo mismo que los nodos 3 y 20, 4 y 19, 5 y 18 y así sucesivamente, por lo que se presentan los resultados obtenidos en cada pareja de nodos que son comparables sólo con los obtenidos en nodos sencillos en el segundo y tercer casos. Esto es debido a que se resolvió un problema unidimensional con un programa desarrollado para casos bidimensionales.

**PROBLEMA 9.4.** Se simula el transporte de cloruros, durante las operaciones de recarga del acuífero de la Bahía de Palo Alto, California, proyecto presentado al final del capítulo 5. Véanse las figuras 5.11 a 5.15.

Los datos para el programa "Geometría" son:

Malla = 3.

Punto	Coordenadas, m.	
1	-100.0	-100.0
2	100.0	-100.0
3	100.0	100.0
4	-100.0	100.0

El modelo consta de 18 elementos finitos y 16 nodos.

**TABLA 9.3. CARGAS HIDRAULICAS EN LOS NODOS DE LA MALLA  
ESTABLECIDA PARA RESOLVER EL PROBLEMA 9.2.**

**(a) Nodos interiores.**

Número	h, m	Ref. (36)
1	7.68101288	7.68
2	7.93175644	7.93
3	8.04675644	8.05
4	8.18712822	8.19

**(b) Nodos de la frontera.**

Número	h, m	Número	h, m
5	6.82	11	8.53
6	7.56	12	8.36
7	7.99	13	8.18
8	8.29	14	8.04
9	8.33	15	7.68
10	8.41	16	7.19

**TABLA 9.4. INFORMACION QUE DEBE SUMINISTRARSE AL PROGRAMA  
"HIDRODINAMICA" PARA SOLUCIONAR EL PROBLEMA 9.3.**

**(a) Características del acuífero:**

Espesor = 14.4 m.  
 Conductividad hidráulica = 2 m/día.  
 Porosidad = 37%.  
 Densidad = 1.5 g/cm<sup>3</sup> (no indispensable).  
 Número de pozos perforados = 0.

**(b) Carga hidráulica en la frontera: variable.**

Punto	h, m.	Punto	h, m.
0	16.000	100	14.150
10	15.815	90	14.335
20	15.630	80	14.520
30	15.445	70	14.705
40	15.260	60	14.890
50	15.075	50	15.075
60	14.890	40	15.260
70	14.705	30	15.445
80	14.520	20	15.630
90	14.335	10	15.815
100	14.150	0	16.000

TABLA 9.5. INFORMACION QUE DEBE SUMINISTRARSE AL PROGRAMA

"CONTAMINACION" PARA SOLUCIONAR EL PROBLEMA 9.3.

- (a) Contaminante: trazador.  
 (b) Carga contaminante promedio en el acuífero = 0 mg/l.  
 (c) Carga contaminante en la frontera: variable.

Punto	C, mg/l	Punto	C, mg/l
0 0	10.0	100 10	0.0
10 0	1. E -9 **	90 10	1. E -9
.	.	.	.
90 0	1. E -9	10 10	1. E -9
100 0	0.0	0 10	10.0

- (d) Intervalo de tiempo = 120 horas.  
 (e) Dispersividades: longitudinal = 10 m.  
 transversal = 0 m. [La ref. (36) usa 1 m]  
 (f) Coeficientes de la isoterma de Langmuir:  $L_1 = L_2 = 0.0$   
 (g) Avance del frente contaminante = 10% (no indispensable).

\*\* 1. E -9 indica a la computadora que la concentración en este nodo de la frontera varía con el tiempo.

TABLA 9.6. RESULTADOS CORRESPONDIENTES AL PROBLEMA 9.3.

Tiempo, días	Concentración en mg/l en los nodos numerados:							
	2	21	3	20	4	19	5	18
10	1.66	2.25	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	1.85		-0.11		-0.00			0.00
	0.41		0.00		0.00			0.00
20	3.01	3.74	0.32	0.15	0.00	0.00	0.00	0.00
	3.17		0.19		-0.04			0.00
	1.81		0.04		0.00			0.00
30	4.00	4.76	0.73	0.69	0.06	0.00	0.00	0.00
	4.16		0.66		-0.03			-0.01
	3.10		0.25		0.00			0.00
40	4.77	5.52	1.22	1.34	0.18	0.03	0.01	0.00
	4.93		1.20		0.07			-0.02
	4.11		0.64		0.03			0.00
50	5.38	6.09	1.73	1.98	0.34	0.18	0.04	0.00
	5.54		1.75		0.23			-0.01
	4.90		1.13		0.11			0.00
60	5.89	6.55	2.23	2.59	0.55	0.44	0.10	0.00
	6.04		2.29		0.46			0.02
	5.53		1.66		0.24			0.02
90	6.97	7.51	3.59	4.12	1.34	1.45	0.38	0.25
	7.10		3.71		1.33			0.29
	6.83		3.19		0.95			0.18

Los datos para el programa "hidrodinámica" se presentan en la tabla 9.7, y para "Contaminación" en la tabla 9.8.

La información suministrada a la computadora coincide con los datos de campo obtenidos durante las operaciones de recarga del acuífero de Palo Alto, referencia (25), a excepción de las dispersividades y coeficientes de la isoterma de Langmuir que se tuvieron que suponer, ya que de ellos no se hace mención en dicho estudio.

Los resultados correspondientes a cinco pozos de observación, se presentan en la tabla 9.9 y en la figura 9.1, obteniéndose curvas semejantes a las experimentales (figura 5.13).

**TABLA 9.7. INFORMACION REQUERIDA PARA RESOLVER LA HIDRODINAMICA DEL PROBLEMA 9.4 (ACUIFERO DE PALO ALTO, CA, EEUU.**

Espesor = 1.57 m.  
 Conductividad hidráulica = 70 m/dfa.  
 Porosidad = 25%.  
 Densidad = 2 g/cm<sup>3</sup>.  
 Número de pozos perforados = 6.

Pozo	Coordenadas	Gasto, m <sup>3</sup> /dfa
1	0.0 0.0	544.32
2	-11.0 0.0	0.00
3	-20.0 0.0	0.00
4	-40.0 0.0	0.00
5	2.5 15.8	0.00
6	30.8 -30.0	0.00

Carga hidráulica en la frontera:  
 constante e igual a 0.5 m.

**TABLA 9.8. INFORMACION REQUERIDA PARA RESOLVER EL TRANSPORTE DE CONTAMINANTES DEL PROBLEMA 9.4.**

Contaminante: cloruros.

Carga contaminante promedio en el acuífero = 4000 mg/l.

Carga contaminante en la frontera: constante e igual a 4000 mg/l.

Carga contaminante en los pozos:

Número	Concentración, mg/l.
1	290.0
2	4000.0
3	4000.0
4	4000.0
5	4000.0
6	4000.0

Intervalo de tiempo = 2.7557 horas, equivalente a 62.5 m<sup>3</sup> de agua inyectada.

Dispersividades: longitudinal = 0.0 m.

transversal = 100.0 m.

Coefficientes de la isoterma de Langmuir: L<sub>1</sub> = L<sub>2</sub> = 0.0

Avance del frente contaminante = 50%.

TABLA 9.9 RESULTADOS DE LA SIMULACION DEL TRANSPORTE DE CLORUROS EN EL ACUIFERO DE PALO ALTO, CALIFORNIA, EELAJ.

Volumen de agua inyectada, m <sup>3</sup>	Concentraciones de cloruros, expresadas en fracción de la unidad,				
	P5	P6	P7	S23	S24
62.5	0.57	0.04	0.00	0.34	0.02
125.0	0.63	0.27	0.00	0.53	0.04
187.5	0.70	0.40	0.00	0.63	0.06
250.0	0.75	0.48	0.00	0.69	0.08
500.0	0.82	0.63	0.00	0.77	0.15
1,000.0	0.83	0.65	0.01	0.77	0.26
2,500.0	0.85	0.68	0.10	0.79	0.50
5,000.0	0.88	0.76	0.29	0.84	0.69

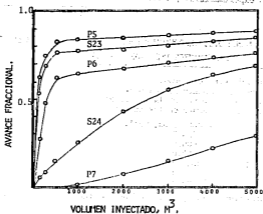


Figura 9.1. Gráfica de los resultados de la simulación del transporte de cloruros durante las operaciones de recarga del acuífero de Palo Alto, California. Compárese con la figura 5.13.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

La práctica que se está llevando a cabo en algunos países como Estados Unidos e Israel, de utilizar al suelo como un sistema de tratamiento avanzado para los efluentes de procesos biológicos y, por otra parte, el peligro latente de contaminar los acuíferos al emplear aguas residuales en el riego agrícola, principalmente en México, destacan la importancia del estudio del transporte de los contaminantes en medios porosos.

Dentro de este contexto, la modelación de tales fenómenos permitirá prever el destino de ciertos constituyentes del agua residual, sobre todo los tóxicos, y establecer estrategias para prevenir sus efectos adversos tanto en los cultivos, la calidad del suelo, los abastecimientos subterráneos de agua potable y particularmente en la salud humana.

El programa de computadora desarrollado en este trabajo permite calcular la distribución en el espacio y en el tiempo, de los contaminantes de un acuífero, con la ventaja de ser aplicable a regiones con diferentes geometrías, aprovechando así la facilidad para manejar fronteras irregulares que caracteriza al método del elemento finito.

La utilización de este programa para diferentes casos, condujo a resultados satisfactorios al compararse con soluciones analíticas y con resultados experimentales, lo cual permite suponer su aplicabilidad a problemas similares de contaminación de aguas subterráneas.

Es recomendable, mediante la modificación o adición de algunas subrutinas del programa, incorporar al modelo los efectos de otros factores del problema como los procesos fisicoquímicos que se llevan a cabo entre la solución del suelo y la matriz sólida, así como la heterogeneidad de ciertas propiedades físicas del acuífero. Esto es factible gracias a que el programa de computadora se estructuró en forma modular a fin de revisar su funcionamiento.

La investigación acerca de los principales casos de recarga de acuíferos con aguas residuales tratadas, la revisión de numerosos modelos matemáticos propuestos y su fundamento teórico, el estudio de los métodos numéricos y el uso de técnicas avanzadas de programación de microcomputadoras, hicieron posible en su conjunto, el análisis de un problema de ingeniería ambiental: la contaminación de las aguas subterráneas.

1. Función error complementaria.
2. Listado de los programas "Acuffero" (Introducción explicatoria) y "Geometría".
3. Listado del programa "Hidrodinámica".
4. Listado del programa "Contaminación".
5. Referencias bibliográficas.

... de la función error complementaria...  
 ... de los programas "Acuffero" (Introducción explicatoria) y "Geometría".  
 ... del programa "Hidrodinámica".  
 ... del programa "Contaminación".

... referencias bibliográficas...  
 ... de la función error complementaria...  
 ... de los programas "Acuffero" (Introducción explicatoria) y "Geometría".  
 ... del programa "Hidrodinámica".  
 ... del programa "Contaminación".

... referencias bibliográficas...  
 ... de la función error complementaria...  
 ... de los programas "Acuffero" (Introducción explicatoria) y "Geometría".  
 ... del programa "Hidrodinámica".  
 ... del programa "Contaminación".

... referencias bibliográficas...  
 ... de la función error complementaria...  
 ... de los programas "Acuffero" (Introducción explicatoria) y "Geometría".  
 ... del programa "Hidrodinámica".  
 ... del programa "Contaminación".

ANEXO 1. FUNCION ERROR COMPLEMENTARIA (ferc).

$$\operatorname{erfc}(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$\operatorname{erfc}(\beta) = 1 - \operatorname{erf}(\beta)$$

$$\operatorname{erfc}(\beta) = 1 - \operatorname{erf}(\beta)$$

$\beta$	$\operatorname{erf}(\beta)$	$\operatorname{erfc}(\beta)$
0	0	1.0
0.05	0.05401	0.94599
0.1	0.11246	0.88754
0.15	0.16798	0.83202
0.2	0.22270	0.77730
0.25	0.27625	0.72375
0.3	0.32862	0.67138
0.35	0.37982	0.62018
0.4	0.42882	0.57118
0.45	0.47542	0.52458
0.5	0.52050	0.47950
0.55	0.56332	0.43668
0.6	0.60385	0.39615
0.65	0.64209	0.35791
0.7	0.67798	0.32202
0.75	0.71136	0.28864
0.8	0.74210	0.25790
0.85	0.77048	0.22952
0.9	0.79699	0.20301
0.95	0.82080	0.17920
1.0	0.84234	0.15766
1.1	0.86035	0.13965
1.2	0.91034	0.08966
1.3	0.93408	0.06592
1.4	0.95228	0.04772
1.5	0.96610	0.03390
1.6	0.97632	0.02368
1.7	0.98379	0.01621
1.8	0.98941	0.01059
1.9	0.99279	0.00721
2.0	0.99532	0.00468
2.1	0.99701	0.00299
2.2	0.99817	0.00183
2.3	0.99887	0.00113
2.4	0.99931	0.00069
2.5	0.99959	0.00041
2.6	0.99974	0.00026
2.7	0.99986	0.00014
2.8	0.99992	0.00007
2.9	0.99995	0.00004
3.0	0.99997	0.00002



ANEXO 2. LISTADO DE LOS PROGRAMAS "ACUIFERO" (Introducción explicatoria)  
Y "GEOMETRIA".

SLIST

```

100 REM ACUIFERO
110 REM PROGRAMA DE COMPUTADORA
120 REM PARA LA SIMULACION DE LA
130 REM CONTAMINACION DE UN
140 REM ACUIFERO BIDIMENSIONAL
150 REM
160 REM UNIVERSIDAD NACIONAL
170 REM AUTONOMA DE MEXICO
180 REM FACULTAD DE INGENIERIA
190 REM DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
200 REM AREA DE INGENIERIA AMBIENTAL
210 REM TESIS DE MAESTRIA
220 REM LUIS ANTONIO ACEVEDO ARREGUIN
230 REM AGOSTO DE 1986
240 REM
250 REM INTRODUCCION EXPLICATORIA
300 REM
310 REM
320 REM
330 TEXT : HOME
340 INVERSE : PRINT "
350 PRINT "          A C U I F E R O          ": PRINT "
          ": NORMAL
360 VTAB 5: HTAB 1: CALL - 958
370 PRINT "EL PROBLEMA DE LA CONTAMINACION DE"
380 PRINT "CUALQUIER ACUIFERO SE DIVIDE PARA SU"
390 PRINT "ESTUDIO EN 3 PARTES: LA GEOMETRIA Y LA"
400 PRINT "HIDRODINAMICA DEL ACUIFERO, ASI COMO"
410 PRINT "LA DISTRIBUCION DEL CONTAMINANTE EN"
420 PRINT "EL MISMO.": PRINT
430 VTAB 22: HTAB 1: PRINT "<TECLEAR PARA CONTINUAR>": PRINT
440 GET 2*: IF B* = "" THEN 390
450 VTAB 5: HTAB 1: CALL - 958
460 PRINT "LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES"
470 PRINT "QUE GOBIERNAN LA HIDRODINAMICA Y LA"
480 PRINT "DISTRIBUCION DEL CONTAMINANTE, SE"
490 PRINT "RESUELVEN MEDIANTE EL METODO DEL"

```

```

450 PRINT "ELEMENTO FINITO Y SE APROVECHA LA"
160 PRINT "DISPONIBILIDAD DE GRAFICOS DE ALTA"
170 PRINT "RESOLUCION DE LA APPLE 5' PARA OBTENER"
480 PRINT "LA RED DE FLUJO DEL AGUA SUBTERRANEA, "
490 PRINT "ASI COMO LINEAS ESPECIFICAS DE "
500 PRINT "ISOCONCENTRACION DEL CONTAMINANTE"
510 PRINT "EN FUNCION DEL TIEMPO.*"
520 GET B#: IF B# = "" THEN 520
530 VTAB 5: HTAB 1: CALL - 958
540 PRINT "PARA LA SOLUCION DEL PROBLEMA SE SUPONE"
550 PRINT "UN ACUIFERO DE GEOMETRIA IRREGULAR"
560 PRINT "SITUADO EN UN PLANO HORIZONTAL, CON"
570 PRINT "LIMITES IMPERMEABLES Y CON ENTRADAS Y"
580 PRINT "SALIDAS DE AGUA SOLO MEDIANTE POZOS, "
590 PRINT "LOS CUALES DEBEN ESTAR ALEJADOS DE LAS"
600 PRINT "FRONTERAS. TAMBIEN SE SUPONE QUE EL"
610 PRINT "MOVIMIENTO DEL AGUA DENTRO DEL ACUIFERO"
620 PRINT "ALCANZA EL ESTADO ESTACIONARIO. ADEMÁS"
630 PRINT "SE CONSIDERA QUE EL TRANSPORTE"
640 PRINT "DEL CONTAMINANTE DEPENDE DEL TIEMPO, "
650 PRINT "DEL MOVIMIENTO DEL AGUA, DE SUS"
660 PRINT "CARACTERISTICAS DISPERSIVAS, ASI COMO"
670 PRINT "DE LOS MECANISMOS FISICOCHEMICOS DE"
680 PRINT "ADSORCION.": PRINT
690 GET B#: IF B# = "" THEN 690
700 VTAB 5: HTAB 1: CALL - 958
710 PRINT "EL PROGRAMA 'GEOMETRIA' TIENE COMO"
720 PRINT "OBJETIVO GENERAR LOS ELEMENTOS FINITOS"
730 PRINT "NECESARIOS PARA LA SOLUCION NUMERICA, A"
740 PRINT "PARTIR DE INFORMACION TAN SIMPLE COMO"
750 PRINT "LA LOCALIZACION DE ALGUNOS PUNTOS QUE"
760 PRINT "DESCRIBAN ADECUADAMENTE LA FORMA DEL"
770 PRINT "ACUIFERO. EL USUARIO DEBE PROPORCIONAR"
780 PRINT "A LA COMPUTADORA SUFICIENTES PUNTOS"
790 PRINT "(MÁXIMO 24) EN ORDEN CONTRARIO A LAS"
800 PRINT "MANECILLAS DEL RELOJ, EMPLEANDO LAS"
810 PRINT "COORDENADAS DE UN SISTEMA DE REFERENCIA"
820 PRINT "REAL (DATOS DE CAMPO) O IMAGINARIO"
830 PRINT "(DATOS DE UN PLANO), DEBIENDO TERMINAR"
840 PRINT "EL SUMINISTRO DE ESTA INFORMACION"
850 PRINT "ANOTANDO COMO ÚLTIMO DATO LA PRIMERA"
860 PRINT "PAREJA DE COORDENADAS (FIN DEL CICLO).": PRINT
870 GET B#: IF B# = "" THEN 870
880 VTAB 5: HTAB 1: CALL - 958
890 PRINT "A FIN DE SELECCIONAR LOS ELEMENTOS"
900 PRINT "FINITOS DEL PROBLEMA, EL PROGRAMA"
910 PRINT "COLOCARA LOS PUNTOS SUMINISTRADOS, "
920 PRINT "DENTRO DE UNA RED CUADRICULADA CUADRADA"

```

```

930 PRINT "(DE 10 CELDILLAS POR LADO COMO MAXIMO). "
940 PRINT "EL USUARIO DEBE DEFINIR LAS DIMENSIONES"
950 PRINT "DE ESTA MALLA, TENIENDO EN MENTE"
960 PRINT "QUE MIENTRAS MAS CELDILLAS CONTENGA, EL"
970 PRINT "TIEMPO DE PROCESO SERA MAYOR AUNQUE LOS"
980 PRINT "RESULTADOS SERAN MAS EXACTOS DEBIDO A"
990 PRINT "LA GENERACION DE MAS ELEMENTOS FINITOS."
1000 PRINT
1010 GET B$: IF B$ = "" THEN 1010
1020 VTAB 5: HTAB 1: CALL - 958
1030 PRINT "DESPUES DE LA ENTRADA DE ESTOS DATOS, "
1040 PRINT "SE REALIZA UN CAMBIO DE ESCALA PARA"
1050 PRINT "SITUAR LOS PUNTOS FRONTERIZOS DENTRO DE"
1060 PRINT "LA RED CUADRICULADA SELECCIONADA; SE"
1070 PRINT "OBTIENEN LAS INTERSECCIONES DE LA"
1080 PRINT "FRONTERA DEL ACUIFERO CON LAS LINEAS"
1090 PRINT "DE LA MALLA; SE CLASIFICAN LOS PUNTOS"
1100 PRINT "DE LA RED DEPENDIENDO DE SU UBICACION"
1110 PRINT "DENTRO O FUERA DEL ACUIFERO; SE ESCOGEN"
1120 PRINT "LOS TRIANGULOS QUE CONFIGURAN EL AREA"
1130 PRINT "DEL ACUIFERO; SE ORDENAN Y NUMERAN SUS"
1140 PRINT "NODOS Y FINALMENTE SE GRAFICA UN PLANO"
1150 PRINT "DEL ACUIFERO INCLUYENDO SUS ELEMENTOS"
1160 PRINT "FINITOS.": PRINT
1170 GET B$: IF B$ = "" THEN 1170
1180 VTAB 5: HTAB 1: CALL - 958
1190 PRINT "LA INFORMACION QUE DEBE PROPORCIONARSE"
1200 PRINT "DURANTE LA EJECUCION DEL PROGRAMA"
1210 PRINT "'HIDRODINAMICA', ES LA SIGUIENTE: LOS"
1220 PRINT "ELEMENTOS FINITOS QUE DESCRIBEN LA"
1230 PRINT "GEOMETRIA DEL ACUIFERO, SU ESPESOR, "
1240 PRINT "CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA Y POROSIDAD, "
1250 PRINT "ASI COMO EL NUMERO DE POZOS PERFORADOS"
1260 PRINT "Y SU TASA DE BOMBEO. EL USUARIO NO DEBE"
1270 PRINT "PREOCUPARSE POR LOS ELEMENTOS FINITOS, "
1280 PRINT "YA QUE EL PROGRAMA RECURRIRA A UN"
1290 PRINT "ARCHIVO DE DATOS (DENTRO DEL DISCO) QUE"
1300 PRINT "CONTIENE DICHA INFORMACION, LA CUAL FUE"
1310 PRINT "ALMACENADA AL FINALIZAR EL PROGRAMA"
1320 PRINT "'GEOMETRIA'.": PRINT
1322 GET B$: IF B$ = "" THEN 1322
1324 VTAB 5: HTAB 1: CALL - 958
1326 PRINT "LA ECUACION DE POISSON, "
1330 PRINT "QUE GOBIERNA EL MOVIMIENTO DEL AGUA"
1340 PRINT "SUBTERRANEA EN ESTADO ESTACIONARIO CON"
1350 PRINT "FUENTES Y SUMIDIDOS, SE RESUELVE CON LA"
1360 PRINT "TECNICA DEL ELEMENTO FINITO, POR LO QUE"
1370 PRINT "LA MAYOR PARTE DEL PROGRAMA SE DEDICA"
1380 PRINT "AL ESTABLECIMIENTO DE ECUACIONES"

```

```

390 PRINT "ALGEBRAICAS CON VARIAS INCOGNITAS, Y A"
00 PRINT "SU SOLUCION MATRICIAL, OBTENIENDOSE ASI"
1410 PRINT "LAS CARGAS HIDRAULICAS EN LOS NODOS DEL"
1420 PRINT "SISTEMA, LAS CUALES SE ARCHIVAN EN EL"
1430 PRINT "DISCO PARA SU USO POSTERIOR."
1440 PRINT
1450 GET B$: IF B$ = "" THEN 1450
1460 VTAB 5: HTAB 1: CALL - 958
1470 PRINT "EN ESTE PROGRAMA SE REALIZAN DOS"
1480 PRINT "GRAFICAS, UNA DEL PLANO DEL ACUIFERO"
1490 PRINT "CONTENIENDO LOS ELEMENTOS FINITOS"
1500 PRINT "ORIGINALES ASI COMO LOS GENERADOS POR"
1510 PRINT "LA COLOCACION DE LOS POZOS, Y OTRA DE"
1520 PRINT "LA RED DE FLUJO DEL AGUA SUBTERRANEA,"
1530 PRINT "OBTENIDA A PARTIR DE LAS CARGAS"
1540 PRINT "HIDRAULICAS.": PRINT
1550 GET B$: IF B$ = "" THEN 1550
1560 VTAB 5: HTAB 1: CALL - 958
1570 PRINT "DESPUES DE QUE EL PROGRAMA"
1580 PRINT "'CONTAMINACION' HA OBTENIDO LA"
1590 PRINT "INFORMACION ACERCA DE LOS ELEMENTOS"
1600 PRINT "FINITOS ASI COMO DE LAS CARGAS"
1610 PRINT "HIDRAULICAS DEL ACUIFERO, RESULTANTES"
1620 PRINT "DE LOS CALCULOS DE LOS DOS PROGRAMAS"
1630 PRINT "ANTERIORES, EL USUARIO ANOTARA LAS"
1640 PRINT "CARACTERISTICAS DE LA CALIDAD DEL AGUA"
1650 PRINT "PRESENTE EN EL ACUIFERO Y DE LA QUE SE"
1660 PRINT "ESTA INYECTANDO A TRAVES DE LOS POZOS,"
1670 PRINT "ASI COMO LAS DISPERSIVIDADES Y LOS"
1680 PRINT "COEFICIENTES DE LA ISOTERMA DE LANGMUIR"
1690 PRINT "PARA EL CONTAMINANTE DENTRO DEL"
1700 PRINT "ACUIFERO.": PRINT
1702 GET B$: IF B$ = "" THEN 1702
1704 VTAB 5: HTAB 1: CALL - 958
1706 PRINT "EL USUARIO TAMBIEN DEBE INDICAR EL"
1710 PRINT "INTERVALO DE TIEMPO PARA LOS CALCULOS Y"
1720 PRINT "EL FRENTE DE AVANCE DEL CONTAMINANTE"
1730 PRINT "(COMO PORCENTAJE DE SU VALOR MAXIMO)"
1740 PRINT "QUE DESEA OBSERVAR EN LA GRAFICA DE"
1750 PRINT "SU MOVIMIENTO A TRAVES DEL TIEMPO.": PRINT
1760 GET B$: IF B$ = "" THEN 1760
1770 VTAB 5: HTAB 1: CALL - 958
1780 PRINT "A PARTIR DE ESTE MOMENTO PUEDE UTILIZAR"
1790 PRINT "CUALQUIERA DE LOS TRES PROGRAMAS,"
1800 PRINT "TENIENDO EN CUENTA QUE SE HA ALMACENADO"
1810 PRINT "INFORMACION ACERCA DE UN ACUIFERO"
1820 PRINT "HIPOTETICO SI DESEA EMPEZAR CON EL"

```

```
1830 PRINT "PROGRAMA 'HIDRODINAMICA', TAMBIEN SE HA"  
1840 PRINT "REGISTRADO EN EL DISCO UNA RED DE FLUJO"  
1850 PRINT "DE AGUA HIPOTETICA EN EL CASO DE"  
1860 PRINT "INICIAR CON EL PROGRAMA 'CONTAMINACION'.": PRINT  
1870 GET B$: IF B$ = "" THEN 1870  
1880 VTAB 5: HTAB 1: CALL - 958  
1890 PRINT "PROGRAMAS.": PRINT : PRINT  
1900 PRINT "<1> GEOMETRIA.": PRINT  
1910 PRINT "<2> HIDRODINAMICA.": PRINT  
1920 PRINT "<3> CONTAMINACION.": PRINT  
1925 PRINT "<4> SALIDA DEL PROGRAMA.": PRINT : PRINT : PRINT  
1930 PRINT "CUAL ES SU OPCION...?"  
1940 VTAB 20: HTAB 8: CALL - 958  
1950 INPUT X: IF X < 1 OR X > 4 THEN 1940  
1960 IF X = 1 THEN PRINT CHR$(4); "RUN GEOMETRIA"  
1970 IF X = 2 THEN PRINT CHR$(4); "RUN HIDRODINAMICA"  
1980 IF X = 3 THEN PRINT CHR$(4); "RUN CONTAMINACION"  
1990 END
```

## SLIST

```

10 REM GEOMETRIA DEL ACUIFERO
60 REM TESIS DE MAESTRIA EN INGENIERIA
70 REM U. N. A. H. 1985
80 REM OM LUIS ANTONIO ACEVEDO ARREGUIN
90 IF PEEK (103) < > 1 OR PEEK (104) < > 64 THEN POKE 103,1: POKE 104,64
POKE 16384,0: POKE 16385,0: POKE 16386,0: PRINT CHR$ (4);"RUN GEOMETRIA"
7 REM
78 REM
99 REM
100 REM <PROGRAMA PRINCIPAL>
110 GOSUB 9000: REM MEMORIA
120 GOSUB 1000: REM INICIO
130 GOSUB 1300: REM ESCALA
140 GOSUB 1500: REM FRONTERA
150 GOSUB 2000: REM DOMINIO
160 GOSUB 3000: REM ELEMENTOS FINITOS
170 GOSUB 4000: REM ORDENACION
180 GOSUB 4500: REM GRAFICA #1
190 GOTO 15000: REM FINAL
77 REM
78 REM
499 REM
500 REM <IDENTIFICACION>
10 HOME : INVERSE
520 PRINT *
530 PRINT * PRIMERA PARTE:
40 PRINT * GEOMETRIA DEL ACUIFERO
50 PRINT *
560 NORMAL : RETURN
77 REM
78 REM
999 REM
1000 REM <INICIO DEL PROGRAMA>
510 GOSUB 500:A$ = "GEOMETRIA DEL ACUIFERO"
T060 NORMAL : VTAB 10: HTAB 1: CALL - 958
1070 PRINT "DEFINA LA GEOMETRIA DEL ACUIFERO"
580 PRINT "MEDIANTE UNA SUCESION DE PUNTOS"
590 PRINT "EN SENTIDO CONTRA-RELOJ:"

```

```

1100 PRINT "P1, P2, P3,... PN, ..... P1"
1110 PRINT "<<USE COORDENADAS EN METROS>>: PRINT
1115 VTAB 20: HTAB 1: INPUT "HALLA CUADRADA? (1-10) *;MA: IF MA < 1 OR MA > 10
-THEN 1115
1117 VTAB 20: HTAB 1: CALL - 95B
1120 PRINT "COORDENADAS DEL PUNTO 1...";
1130 INPUT XD(1),YD(1)
1140 X9 = XD(1):Y9 = YD(1):X0 = X9:Y0 = Y9
1150 FOR I = 2 TO NM
1155 VTAB 20: HTAB 1: CALL - 95B
1160 PRINT "COORDENADAS DEL PUNTO "I;"....";
1170 INPUT XD(I),YD(I)
1180 IF X9 < XD(I) THEN X9 = XD(I)
1190 IF Y9 < YD(I) THEN Y9 = YD(I)
1200 IF X0 > XD(I) THEN X0 = XD(I)
1210 IF Y0 > YD(I) THEN Y0 = YD(I)
1220 IF (XD(I) = X0) AND (YD(I) = Y0) THEN 1240
1230 NEXT I
1240 NP = I
1250 IF NP < 4 THEN 1500
1260 RETURN
1297 REM
1298 REM
1299 REM
1300 REM (CAMBIO DE ESCALA)
1310 VTAB 10: HTAB 1: CALL - 95B
1320 PRINT "CAMBIO DE ESCALA";
1340 XR = X9 - X0:YR = Y9 - Y0
1350 RA = XR: IF YR > XR THEN RA = YR
1360 FOR I = 1 TO NP
1370 XP(I) = (RA + MA * (XD(I) - X0)) / RA
1380 YP(I) = (RA + MA * (YD(I) - Y0)) / RA
1390 PRINT ". ";
1400 NEXT I
1410 RETURN
1497 REM
1498 REM
1499 REM
1500 REM (FRONTERA)
1510 VTAB 10: HTAB 1: CALL - 95B
1520 PRINT "DELIMITACION DE LA FRONTERA";
1540 I = 0:K = 0
1550 I = 1 + 1:K = K + 1
1560 X1 = XP(I):X2 = XP(I + 1):XF(K) = INT (100 * X1) / 100
1570 Y1 = YP(I):Y2 = YP(I + 1):YF(K) = INT (100 * Y1) / 100
1580 N = 0:H = 0:D1 = 0:D2 = 0
1590 D2 = ABS (X2 - X1) + ABS (Y2 - Y1)
1600 J = ABS (INT (X2) - INT (X1)) + ABS (INT (Y2) - INT (Y1))

```

```

610 IF J < = 0 THEN 1720
620 K = K + 1
630 IF X1 = X2 THEN D1 = D3
635 IF X1 < > X2 THEN VE = (INT (X1) + (N + (X2 > X1)) * ((X2 > X1) - (X2 < X
))
1640 IF Y1 = Y2 THEN D2 = D3
1645 IF Y1 < > Y2 THEN HO = INT (Y1) + (M + (Y2 > Y1)) * ((Y2 > Y1) - (Y2 < Y
))
1650 IF Y1 < > Y2 THEN XI = (X1 * (Y2 - HO) + X2 * (HO - Y1)) / (Y2 - Y1)
1660 IF X1 < > X2 THEN YI = (Y1 * (X2 - VE) + Y2 * (VE - X1)) / (X2 - X1)
670 IF X1 < > X2 THEN D1 = ABS (VE - X1) + ABS (YI - Y1)
680 IF Y1 < > Y2 THEN D2 = ABS (XI - X1) + ABS (HO - Y1)
1685 IF (D2 < = D1) AND (X2 < > X1) THEN 1697
1690 IF (D2 < = D1) AND (Y2 < > Y1) THEN GOSUB 1860
695 GOTO 1700
1697 GOSUB 1800
1700 IF K < = 1 THEN 1710
705 IF (XF(K) = XF(K - 1)) AND (YF(K) = YF(K - 1)) THEN K = K - 1
1710 IF J > N + M THEN 1620
1720 IF I < NP - 1 THEN 1550
1730 XF(K + 1) = INT (100 * X2) / (100 * YF(K + 1)) = INT (100 * Y2) / 100
1740 FP = K
1750 FOR K = 1 TO FP + 1
1760 PRINT ". ";
1770 NEXT K
1780 RETURN
1800 REM <FRONTERA CASO 1>
1810 XF(K) = INT (100 * VE) / 100; YF(K) = INT (100 * YI) / 100
1820 IF (INT (100 * VE) = INT (100 * X1)) AND (INT (100 * YI) = INT (100 *
Y1)) THEN K = K - 1
1830 IF (INT (100 * VE) = INT (100 * X2)) AND (INT (100 * YI) = INT (100
Y2)) THEN K = K - 1
1840 N = N + 1
1850 RETURN
1860 REM <FRONTERA CASO 2>
1870 XF(K) = INT (100 * XI) / 100; YF(K) = INT (100 * HO) / 100
1880 IF (INT (100 * XI) = INT (100 * X1)) AND (INT (100 * HO) = INT (100 *
Y1)) THEN K = K - 1
1890 IF (INT (100 * XI) = INT (100 * X2)) AND (INT (100 * HO) = INT (100 *
Y2)) THEN K = K - 1
1900 M = M + 1
1910 RETURN
1977 REM
1958 REM
1959 REM
2000 REM <DOMINIO>
2010 VTAB 10: HTAB 1: CALL - 958
2020 PRINT "CLASIFICACION DE LOS NODOS DE LA MALLA"

```



```

2040 FOR N = 1 TO (MA + 1) * (MA + 1)
2050 ND(N) = 0:K = 0
2060 X1 = 1 + INT ((N - 1) / (MA + 1)):Y1 = N - (X1 - 1) * (MA + 1)
2070 IF (1 < X1) AND (X1 < MA + 1) AND (1 < Y1) AND (Y1 < MA + 1) THEN 2080
2075 GOTO 2240
2080 K = K + 1:M = 0
2090 X2 = XP(K):Y2 = YP(K)
2100 X3 = XP(K + 1):Y3 = YP(K + 1)
2110 M = M + 1:OP = 1
2120 X4 = XP(M):Y4 = YP(M)
2130 X5 = XP(M + 1):Y5 = YP(M + 1)
2140 GOSUB 2300
2150 IF (M < MP - 1) AND (OP < > 1) THEN 2110
2160 IF OP < > 0 THEN 2230
2170 AP = (X2 - X1) * (Y3 - Y1) - (X3 - X1) * (Y2 - Y1)
2180 IF AP = 0 THEN 2230
2190 M = 0
2200 M = M + 1:ND(N) = 1
2210 IF (X1 = XP(M)) AND (Y1 = YP(M)) THEN ND(N) = 0
2220 IF (M < MP) AND (ND(N) < > 0) THEN 2200
2230 IF (M < MP - 1) AND (OP < > 0) THEN 2080
2240 PRINT " ";
2250 NEXT N
2260 RETURN
2270 REM
2275 REM
2280 REM
2300 REM (LINEAS CRUZADAS)
2310 D1 = (X5 - X4) * (Y1 - Y4) - (X1 - X4) * (Y5 - Y4)
2320 D1 = D1 * ((X1 - X4) * (Y2 - Y4) - (X2 - X4) * (Y1 - Y4))
2330 D2 = (X5 - X4) * (Y2 - Y4) - (X2 - X4) * (Y5 - Y4)
2340 D2 = D2 * ((X2 - X4) * (Y1 - Y4) - (X1 - X4) * (Y2 - Y4))
2350 D3 = (X4 - X5) * (Y1 - Y5) - (X1 - X5) * (Y4 - Y5)
2360 D3 = D3 * ((X1 - X5) * (Y2 - Y5) - (X2 - X5) * (Y1 - Y5))
2370 IF (D1 = 0) OR (D2 = 0) OR (D3 = 0) THEN 2380
2375 GOTO 2510
2380 D1 = (X5 - X4) * (Y1 - Y4) - (X1 - X4) * (Y5 - Y4)
2390 D1 = D1 * ((X1 - X4) * (Y3 - Y4) - (X3 - X4) * (Y1 - Y4))
2400 D2 = (X5 - X4) * (Y3 - Y4) - (X3 - X4) * (Y5 - Y4)
2410 D2 = D2 * ((X3 - X4) * (Y1 - Y4) - (X1 - X4) * (Y3 - Y4))
2420 D3 = (X4 - X5) * (Y1 - Y5) - (X1 - X5) * (Y4 - Y5)
2430 D3 = D3 * ((X1 - X5) * (Y3 - Y5) - (X3 - X5) * (Y1 - Y5))
2440 IF (D1 < 0) OR (D2 < 0) OR (D3 < 0) THEN 2450
2445 GOTO 2510
2450 OP = 0
2460 D1 = (X1 - X4) * (Y2 - Y4) - (X2 - X4) * (Y1 - Y4)
2470 D2 = (X2 - X4) * (Y3 - Y4) - (X3 - X4) * (Y2 - Y4)
2480 D3 = (X3 - X4) * (Y1 - Y4) - (X1 - X4) * (Y3 - Y4)
2490 IF (D1 < 0) AND (D2 < 0) AND (D3 < 0) THEN OP = 1

```

```

2500 IF (D1 > 0) AND (D2 > 0) AND (D3 > 0) THEN OP = 1
2510 RETURN
2997 REM
2998 REM
2999 REM
3000 REM (ELEMENTOS FINITOS)
3010 VTAB 10: HTAB 1: CALL - 958
3020 PRINT "ELECCION DE ELEMENTOS FINITOS": PRINT "TRIANGULARES":
3040 T = 1
3050 FOR I = 1 TO MA
3060 FOR J = 1 TO MA
3070 PRINT ".":
3080 GOSUB 3250: REM DOS SERIES
3090 IF (MT > 0) AND (NT > 1) THEN GOSUB 3700: REM CONVERSION A UNA
3100 IF NT > 2 THEN GOSUB 4000: REM TRIANGULOS
3110 PRINT ".":
3120 NEXT J
3130 NEXT I
3140 TR = T - 1
3150 RETURN
3247 REM
3248 REM
3249 REM
3250 REM (SERIES DE PUNTOS POR SECTOR)
3260 N = 1
3270 FOR K = 1 TO FP
3280 X1 = XF(K):Y1 = YF(K)
3290 IF X1 < I THEN 3320
3292 IF X1 < (I + 1) THEN 3320
3294 IF Y1 < J THEN 3320
3295 IF Y1 < (J + 1) THEN 3320
3300 XS(N) = X1:YS(N) = Y1
3310 S1(N) = (MA + 1) * (MA + 1) + K:N = N + 1
3320 NEXT K
3330 NT = N - 1:M = 1
3340 IF ND((MA + 1) * (I - 1) + J) < > 1 THEN 3370
3350 XZ(M) = I:YZ(M) = J
3360 S2(M) = (MA + 1) * (I - 1) + J:M = M + 1
3370 IF ND((MA + 1) * I + J) < > 1 THEN 3400
3380 XZ(M) = I + 1:YZ(M) = J
3390 S2(M) = (MA + 1) * I + J:M = M + 1
3400 IF ND((MA + 1) * (I + J + 1)) < > 1 THEN 3430
3410 XZ(M) = I + 1:YZ(M) = J + 1
3420 S2(M) = (MA + 1) * (I + J + 1):M = M + 1
3430 IF ND((MA + 1) * (I - 1) + J + 1) < > 1 THEN 3460
3440 XZ(M) = I:YZ(M) = J + 1
3450 S2(M) = (MA + 1) * (I - 1) + J + 1:M = M + 1
3460 NT = N - 1
3470 IF MT < = NT THEN 3560

```

```

3480 FOR K = 1 TO MT
490 IF NT < K THEN 3510
2500 X1 = XS(K):Y1 = YS(K):P1 = S1(K)
2510 XS(K) = XZ(K):YS(K) = YZ(K):S1(K) = S2(K)
2520 IF NT < K THEN 3540
3530 XZ(K) = X1:YZ(K) = Y1:S2(K) = P1
3540 NEXT K
3550 OP = NT:NT = MT:MT = OP
3560 RETURN
3597 REM
3598 REM
3599 REM
3600 REM (SELECTOR DE TRIANGULOS)
3610 M = 0
3620 M = M + 1:OP = 1
3630 X4 = XS(M):Y4 = YS(M)
3640 X5 = XS(M + 1):Y5 = YS(M + 1)
3650 GOSUB 2300: REM LINEAS CRUZADAS
3652 IF (D1 = 0) AND (D2 ≠ D3 > 0) THEN OP = 1
3654 IF (D2 = 0) AND (D1 ≠ D3 > 0) THEN OP = 1
3656 IF (D3 = 0) AND (D1 ≠ D2 > 0) THEN OP = 1
3658 IF X4 < X5 AND Y4 < Y5 THEN X4 = X5:Y4 = Y5: GOSUB 2460: GOTO 3652
3660 IF (M < NT - 1) AND (OP < 1) THEN 3620
3670 RETURN
3697 REM
3698 REM
3699 REM
3700 REM (CONVERSION DE DOS SERIES PUNUALES EN UNA SOLA)
3710 K = 0
3720 K = K + 1
3730 X1 = XZ(MT):Y1 = YZ(MT)
3740 X2 = XS(K):Y2 = YS(K)
3750 X3 = XS(K + 1):Y3 = YS(K + 1)
3760 GOSUB 3600: REM SELECTOR
3770 D1 = X1:D2 = Y1:X1 = X2:Y1 = Y2:X2 = X3:Y2 = Y3:X3 = D1:Y3 = D2
3780 AR = ((X2 - X1) * (Y3 - Y1) - (X3 - X1) * (Y2 - Y1)) / 2
3790 IF (OP = 0) AND (AR < 0) THEN 3800
3795 GOTO 3730
3800 U1(T) = X1:V1(T) = Y1:Z1(T) = S1(K)
3810 U2(T) = X2:V2(T) = Y2:Z2(T) = S1(K + 1)
3820 U3(T) = X3:V3(T) = Y3:Z3(T) = S2(MT)
3830 P1 = Z3(T):XS(K + 1) = U3(T):YS(K + 1) = V3(T):S1(K + 1) = Z3(T)
3840 IF AR > 0 THEN T = T + 1
3850 IF K = NT - 1 THEN 3910
3860 FOR M = K + 2 TO NT
3870 X1 = XS(M):Y1 = YS(M):P2 = S1(M)
3880 X2(M) = X2:Y2(M) = Y2:S1(M) = P1

```

```

3890 X2 = X1:Y2 = Y1:P1 = P2
7900 NEXT H
710 NT = NT + 1
-3920 XS(NT) = X2:YS(NT) = Y2:S1(NT) = P1
3930 IF ((OP = 0) AND (AR < > 0)) OR (K = NT - 1) THEN 3940
3935 GOTO 3720
-3940 MT = MT - 1
3950 IF MT < > 0 THEN 3710
3960 RETURN
3997 REM
3998 REM
3999 REM
4000 REM <TRIANGULOS POR SERIE>
-4010 AR = 0:K = 0
4015 EN = NT - 1:XS(NT + 1) = XS(1):YS(NT + 1) = YS(1):S1(NT + 1) = S1(1)
4020 K = K + 1
-4030 X1 = XS(K):Y1 = YS(K)
4040 X2 = XS(K + 1):Y2 = YS(K + 1)
4050 X3 = XS(K + 2):Y3 = YS(K + 2)
4060 SU = ((X2 - X1) * (Y3 - Y1) - (X3 - X1) * (Y2 - Y1)) / 2
4070 IF (SU > 0) AND (SU > AR) THEN 4080
-4075 EN = EN - 1: GOTO 4140
4080 GOSUB 3600: REM <SELECTOR DE LINEAS>
-4090 IF OP < > 0 THEN 4075
4100 U1(T) = X1:V1(T) = Y1:Z1(T) = S1(K)
4110 U2(T) = X2:V2(T) = Y2:Z2(T) = S1(K + 1)
4120 U3(T) = X3:V3(T) = Y3:Z3(T) = S1(K + 2)
130 AR = SU: N = K
4140 IF K < NT - 1 THEN 4020
4150 IF AR < = 0 THEN 4220
4160 K = N
4170 K = K + 1
4180 XS(K) = XS(K + 1):YS(K) = YS(K + 1)
4190 S1(K) = S1(K + 1)
4200 IF K < NT - 1 THEN 4170
4210 NT = NT - 1:T = T + 1
4220 IF (NT > 2) AND (EN < > 0) THEN 4010
4230 RETURN
4497 REM
4498 REM
4499 REM
-4500 REM <GRAFICA # 1>
4510 HOME : HGR : HCOLOR = 3
4520 FOR K = 1 TO TR
4530 X1 = 65 + 150 * (U1(K) - 1) / MA:Y1 = 150 - 150 * (V1(K) - 1) / MA
4540 X2 = 65 + 150 * (U2(K) - 1) / MA:Y2 = 150 - 150 * (V2(K) - 1) / MA
4550 X3 = 65 + 150 * (U3(K) - 1) / MA:Y3 = 150 - 150 * (V3(K) - 1) / MA
4560 HPLLOT X1,Y1 TO X2,Y2

```



```

7500 REM (ARCHIVO EN DISCO)
7510 DS = CHR$(4):RS = CHR$(13)
7520 PRINT DS;"OPEN GEODATOS"
7525 PRINT DS;"CLOSE"
7530 PRINT DS;"DELETE GEODATOS"
7540 PRINT DS;"OPEN GEODATOS"
7550 PRINT DS;"WRITE GEODATOS"
7560 PRINT HA;R;XO;R;YO;R;RA
7570 PRINT FP;R;H;R;HN;R;TR
8572 FOR K = 1 TO FP
8574 PRINT XF(K);R;YF(K)
8576 NEXT K
8580 FOR K = 1 TO TR
8582 PRINT Z1(K);R;U1(K);R;V1(K)
8584 PRINT Z2(K);R;U2(K);R;V2(K)
8586 PRINT Z3(K);R;U3(K);R;V3(K)
8620 NEXT K
8630 PRINT "FIN"
8640 PRINT DS;"CLOSE"
8650 RETURN
8677 REM:
8678 REM:
8679 REM:
8680 REM (MEMORIA RESERVADA)
9021 NX = 25: REM MAXIMO DATOS
9022 FX = 50: REM MAXIMO FRONTERA
9040 TT = 50: REM MAXIMO NUMERO DE TRIANGULOS
9050 NS = 161: REM MAXIMO NODOS
10000 DIM XD(NM), YD(NM)
10010 DIM XP(NM), YP(NM)
10020 DIM XF(FM), YF(FM)
10030 DIM HD(NS)
10040 DIM U1(TT), V1(TT), Z1(TT)
10050 DIM U2(TT), V2(TT), Z2(TT)
10060 DIM U3(TT), V3(TT), Z3(TT)
10070 DIM XS(NM), YS(NM), S1(NM)
10080 DIM XZ(4), YZ(4), SZ(4)
10499 RETURN
14997 REM
14998 REM
14999 REM
15000 REM (FIN DE PROGRAMA)
15010 VTAB 10: HTAB 1: CALL - 958: PRINT "CALCULOS DE HIDRODINAMICA? (SI/NO) "
15020 INPUT DS: IF BS = "SI" THEN GOSUB 8500: PRINT CHR$(4);"RUN HIDRODIN"
15030 IF BS < > "NO" THEN 15010
15040 VTAB 10: HTAB 1: CALL - 958: PRINT "CAMBIOS EN LA GEOMETRIA? (SI/NO) "

```



A N E X O 3. LISTADO DEL PROGRAMA "HIDRODINAMICA".

```

LIST
50 REM HIDRODINAMICA ACUIFERO
70 REM U. N. A. M. 1985
80 REM OM LUIS ANTONIO ACEVEDO ARREGUIN
90 IF PEEK (103) < > 1 OR PEEK (104) < > 64 THEN POKE 103,1: POKE 104,64:
POKE 16384,0: POKE 16385,0: POKE 16386,0: PRINT CHR$(4)"RUN HIDRODINAMICA"
97 REM
98 REM
99 REM
100 REM <PROGRAMA PRINCIPAL>
110 GOSUB 8500: REM DATOS
120 GOSUB 5000: REM POZOS
130 GOSUB 4500: REM GRAFICA 2
140 GOSUB 6500: REM MATRIZ
150 GOSUB 7000: REM CARGAS
160 GOSUB 7250: REM GRAFICA 3
170 GOTO 15000: REM FINAL
2997 REM
2998 REM
2999 REM
4000 REM <IDENTIFICACION>
4010 HOME : IIINVERSE
4015 PRINT "
4020 PRINT " SEGUNDA PARTE: "
4030 PRINT " HIDRODINAMICA DEL ACUIFERO "
4040 PRINT " ": NORMAL : RETURN
4497 REM
4498 REM
4499 REM
4500 REM <GRAFICA # 2>
4510 HOME : HGR : HCOLOR= 3
4520 FOR K = 1 TO TR
4530 X1 = 65 + 150 * (U1(K) - 1) / MA:Y1 = 150 - 150 * (V1(K) - 1) / MA
4540 X2 = 65 + 150 * (U2(K) - 1) / MA:Y2 = 150 - 150 * (V2(K) - 1) / MA
4550 X3 = 65 + 150 * (U3(K) - 1) / MA:Y3 = 150 - 150 * (V3(K) - 1) / MA
4560 HPLOT X1,Y1 TO X2,Y2
4565 HPLOT X2,Y2 TO X3,Y3
4570 HPLOT X3,Y3 TO X1,Y1
4580 NEXT K

```



```

4550 VTAB 22
4560 PRINT A#: PRINT
  10 PRINT *(TECLEAR PARA CONTINUAR)*:
4620 GET B#: IF B# = "" THEN 4620
4630 TEXT : GOSUB 4000: RETURN
4997 REM
4998 REM
4999 REM
5000 REM (INFORMACION DE POZOS)
5010 A# = "GEOMETRIA ACTUALIZADA CON POZOS"
5020 L = 1: GOSUB 4000: REM LETRERO
5060 VTAB 10: HTAB 1
5070 PRINT "CARACTERISTICAS DEL ACUIFERO: "; PRINT
5080 PRINT "ESPESOR (METROS)...";
5092 INPUT EP
5094 VTAB 12: HTAB 1: CALL - 958
5096 PRINT "CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA (M/DIA)...";
5098 INPUT KH: TV = EP * KH
5090 VTAB 12: HTAB 1: CALL - 958
5092 PRINT "POROSIDAD (%)...";
5094 INPUT PR: PR = PR / 100
5096 VTAB 12: HTAB 1: CALL - 958
5098 PRINT "DENSIDAD (G/CM3)...";
5097 INPUT RD: IF RD < 0 THEN 5095
5092 VTAB 12: HTAB 1: CALL - 958
5100 PRINT "NUMERO DE POZOS PERFORADOS...";
5110 INPUT PP: IF PP = 0 THEN 5640: IF PP < 0 OR PP > 9 THEN 5095
  10 VTAB 6: HTAB 1: CALL - 958
  10 PRINT : PRINT "NOTA: AL INDICAR LA TASA DE BOMBEO DE"
5130 PRINT " CADA POZO, CONSIDERAR LOS CASOS: "; PRINT " Q) RECARGA Y
C.) DESCARGA": PRINT
5135 PRINT " <<USE COORDENADAS EN METROS>>: PRINT
5140 I2 = IN
5150 FOR I = 1 TO PP
5155 VTAB 15: HTAB 1: CALL - 958
5160 PRINT "COORDENADAS DEL POZO "; I: PRINT "...";
5170 INPUT X1, Y1
5180 X1 = (RA + MA * (X1 - X0)) / RA: Y1 = (RA + MA * (Y1 - Y0)) / RA
5185 X1 = INT (100 * X1) / 100: Y1 = INT (100 * Y1) / 100
5197 XS(I) = 65 + 150 * (X1 - 1) / MA: YS(I) = 150 - 150 * (Y1 - 1) / MA
5199 PRINT "FLUJO (M3/DIA)...";
5200 INPUT D1: PRINT
5220 H = 0: H = 1: OP = 0: SU = 0
5230 M = 1 + 1: D3 = 0
5235 FOR H = 1 TO L - 1: IF H = S1(H) THEN 5320
5237 NEXT H
5240 AR = ((U2(H) - U1(H)) * (V3(H) - V1(H)) - (U3(H) - U1(H)) * (V2(H) - V1(H))) / 2
5250 D2 = AR * ((U1(H) - X1) * (V2(H) - Y1) - (U2(H) - X1) * (V1(H) - Y1))

```

```

5260 IF D2 = 0 THEN D3 = 1
5270 IF D2 > 0 THEN D2 = AR * ((U2(M) - X1) * (V3(M) - Y1) - (U3(M) - X1) *
2(M) - Y1))
5280 IF D2 = 0 THEN D3 = 2 * D3 + 2
5290 IF D2 > 0 THEN D2 = AR * ((U3(M) - X1) * (V1(M) - Y1) - (U1(M) - X1) *
(V3(M) - Y1))
5300 IF D2 = 0 THEN D3 = 2 * D3 + 3
5310 IF D2 > 0 THEN OP = 1:ND(K) = M:ND(K+1) = D3:SU = SU + AR:K = K + 2
5320 IF M < TR THEN 5230
5330 IF OP = 0 THEN 5155
5340 H = K - 2
5350 T = TR + 1
5360 FOR K = 1 TO H STEP 2
5370 M = ND(K):D3 = ND(K+1)
5380 S1(L) = M:L = L + 1
5400 IF D3 = 1 OR D3 = 4 OR D3 = 5 THEN 5450
5410 U1(T) = U1(M):V1(T) = V1(M):Z1(T) = Z1(M)
5420 U2(T) = U2(M):V2(T) = V2(M):Z2(T) = Z2(M)
5430 U3(T) = U3(M):V3(T) = V3(M):Z3(T) = Z3(M)
5435 R(T) = R(M) + Q1 * MA * MA / (RA * RA * SU)
5440 T = T + 1
5450 IF D3 = 2 OR D3 = 4 OR D3 = 7 THEN 5500
5460 U1(T) = X1:V1(T) = Y1:Z1(T) = P2 + I
5470 U2(T) = U2(M):V2(T) = V2(M):Z2(T) = Z2(M)
5480 U3(T) = U3(M):V3(T) = V3(M):Z3(T) = Z3(M)
5485 R(T) = R(M) + Q1 * MA * MA / (RA * RA * SU)
5490 T = T + 1
5500 IF D3 = 3 OR D3 = 5 OR D3 = 7 THEN 5550
5510 U1(T) = U1(M):V1(T) = V1(M):Z1(T) = Z1(M)
5520 U2(T) = X1:V2(T) = Y1:Z2(T) = P2 + I
5530 U3(T) = U3(M):V3(T) = V3(M):Z3(T) = Z3(M)
5535 R(T) = R(M) + Q1 * MA * MA / (RA * RA * SU)
5540 T = T + 1
5550 NEXT K
5560 TR = TR - 1
5570 IF Q1 < 0 THEN S2(FP + I) = 1
5630 NEXT I
5635 TF = L - 1: REM TRIANGULOS FUERA
5640 RETURN
6497 REM
6498 REM
6499 REM
6500 REM <MATRIZ CONDUCTANCIA>
6510 NN = NN + PP: GOSUB 10500
6511 VTAB 13: HTAB 1: CALL - 958
6512 PRINT : PRINT "CARGA HIDRAULICA EN LA FRONTERA": PRINT "DEL ACUIFERO:"
6513 PRINT "(1) CONSTANTE, (2) VARIABLE..."
6514 INPUT N:K = 1: IF N = 2 THEN 6520
5516 IF N < 1 THEN 6511

```

```

6517 PRINT "MAGNITUD (METROS)...";
6518 INPUT HI;
120 FOR I = 1 TO NN * NN
6530 G(I) = 0: IF I > NN THEN 6550
6535 B(I) = 0
6540 HT(I) = 0: IF (I < = NI) OR (I > NI + FP) THEN 6550
6542 HT(I) = H1: IF N = 1 THEN 6550
6543 VTAB 13: HTAB 1: CALL - 958: PRINT "PUNTO *;XO + (XF(K) - 1) * RA / MA,YO + (YF(K) - 1) * RA / MA"
6544 PRINT "PUNTO *;XO + (XF(K) - 1) * RA / MA,YO + (YF(K) - 1) * RA / MA"
6545 PRINT "CARGA HIDRAULICA (METROS)...";
6546 INPUT HT(1): PRINT
6548 K = K + 1
6550 NEXT I
6555 VTAB 13: HTAB 1: CALL - 958: PRINT "ESTABLECIMIENTO DE LA ECUACION MATRICIAL"
6560 K = 0
6570 K = K + 1
6572 PRINT ".";
6575 FOR T = 1 TO TF: IF K = S(T) THEN 6700
6577 NEXT T
6578 X1 = U1(K):X2 = U2(K):X3 = U3(K)
6579 Y1 = V1(K):Y2 = V2(K):Y3 = V3(K)
6580 U1(K) = XO + RA * (X1 - 1) / MA:V1(K) = YO + RA * (Y1 - 1) / MA
6581 U2(K) = XO + RA * (X2 - 1) / MA:V2(K) = YO + RA * (Y2 - 1) / MA
6582 U3(K) = XO + RA * (X3 - 1) / MA:V3(K) = YO + RA * (Y3 - 1) / MA
6583 AR = ((U2(K) - U1(K)) * (V3(K) - V1(K)) - (U3(K) - U1(K)) * (V2(K) - V1(K))) / 2
6590 NX(1) = (V2(K) - V3(K)) / (2 * AR):NY(1) = (U3(K) - U2(K)) / (2 * AR)
6600 NX(2) = (V3(K) - V1(K)) / (2 * AR):NY(2) = (U1(K) - U3(K)) / (2 * AR)
6610 NX(3) = (V1(K) - V2(K)) / (2 * AR):NY(3) = (U2(K) - U1(K)) / (2 * AR)
6620 ND(1) = Z1(K):ND(2) = Z2(K):ND(3) = Z3(K)
6630 FOR H = 1 TO 3
6640 L = ND(H):I = NN * (L - 1)
6650 G(I + Z1(K)) = G(I + Z1(K)) + AR * (NX(1) * NX(H) + NY(1) * NY(H))
6660 G(I + Z2(K)) = G(I + Z2(K)) + AR * (NX(2) * NX(H) + NY(2) * NY(H))
6670 G(I + Z3(K)) = G(I + Z3(K)) + AR * (NX(3) * NX(H) + NY(3) * NY(H))
6680 B(L) = B(L) + (R(K) / TV) * (AR / 3)
6690 NEXT H
6691 X1 = U1(K):X2 = U2(K):X3 = U3(K)
6692 Y1 = V1(K):Y2 = V2(K):Y3 = V3(K)
6693 U1(K) = 1 + MA * (X1 - XO) / RA:V1(K) = 1 + MA * (Y1 - YO) / RA
6694 U2(K) = 1 + MA * (X2 - XO) / RA:V2(K) = 1 + MA * (Y2 - YO) / RA
6695 U3(K) = 1 + MA * (X3 - XO) / RA:V3(K) = 1 + MA * (Y3 - YO) / RA
6700 IF K < TR THEN 6570
6710 RETURN
6997 REM
6998 REM
6999 REM
7000 REM (CARGAS HIDRAULICAS)

```

```

7005 N = 0: VTAB 10: HTAB 1: CALL " - 958: PRINT "CALCULO DE LA CARGA HIDRAULICA"
PRINT "EN LOS NODOS DEL ACUIFERO";
7010 EM = 0:L = 0:NN = N + 1: PRINT " ";
7020 L = L + 1;
7025 IF G(NN * (L - 1) + L) = 0 THEN 7110
7030 IF (NI < L) AND (L < = NN - PP) THEN 7110
7040 D1 = HT(L):SU = 0
7050 FOR M = 1 TO NN
7060 I = NI * (L - 1)
7070 IF M < L THEN SU = SU + G(I + M) * HT(M)
7080 NEXT M
7090 HT(L) = -(SU - B(L)) / G(I + L):ER = ABS(D1 - HT(L))
7100 IF ER > EM THEN EM = ER
7110 IF L < NN THEN 7020
7120 IF (L < 1000) AND (EM > 0.01) THEN 7010
7122 PRINT
7125 VTAB 6: HTAB 1: CALL " - 958:K = 1:
7130 IF EM > 0.01 THEN PRINT "NO CONVERGE LA SOLUCION...!": PRINT "W = 3
7133 PRINT "RESULTADOS (EN "NI" ITERACIONES)": PRINT
7135 PRINT "NODO" TAB( 15); "CARGA HIDRAULICA, METROS"
7137 H8 = HT(NI + 1):H7 = H8
7140 FOR L = 1 TO NN: IF G(NN * (L - 1) + L) = 0 THEN 7160
7142 K = K + 1: IF K < 10 THEN 7150
7144 K = 1: VTAB 23: HTAB 1: PRINT "<TECLEAR PARA CONTINUAR>";
7146 GET B$: IF B$ = "" THEN 7146
7147 PRINT
7148 VTAB 9 + W: HTAB 1: CALL " - 958
150 PRINT TAB( 3);L; TAB( 25);HT(L)
7155 IF HT(L) < H8 THEN H8 = HT(L)
7157 IF HT(L) > H9 THEN H9 = HT(L)
7160 NEXT L
7170 VTAB 23: PRINT "<TECLEAR PARA CONTINUAR>"; GET B$: IF B$ = "" THEN 7170
7175 PRINT
7180 RETURN
7247 REM
7248 REM
7249 REM
7250 REM (GRAFICA H8)
7260 AF = "HIDRODINAMICA DEL ACUIFERO": HOME : HGR : HCOLOR = 3
7270 FOR N = 1 TO TR
7275 FOR L = 1 TO TF: IF N = S1(L) THEN 7580
7277 NEXT L
7280 FOR I = 1 TO 20:ND(I) = 0:YD(I) = 0: NEXT I
7290 H1 = 1 + INT (9 * (HT(Z1(N)) - H8) / (H9 - H8))
7300 H2 = 1 + INT (9 * (HT(Z2(N)) - H8) / (H9 - H8))
7310 H3 = 1 + INT (9 * (HT(Z3(N)) - H8) / (H9 - H8))
7320 IF H1 = H2 THEN 7360
7330 H = 10 * (H2 < H1):T = (H2 > H1) - (H2 < H1)

```

```

7340 FOR I = H1 + (H2 > H1) TO H2 + (H2 < H1) STEP T
7350 H4 = H8 + (I - 1) * (H9 - H8) / 9:RZ = (H4 - HT(Z1(M))) / (HT(Z2(M)) - HT(Z1(M)))
7360 XD(I + N) = U1(M) + RZ * (U2(M) - U1(M)):YD(I + N) = V1(M) + RZ * (V2(M) - V1(M))
7370 NEXT I
7380 IF H2 = H3 THEN 7440
7390 N = 10 * (H3 < H2):T = (H3 > H2) - (H3 < H2)
7400 FOR I = H2 + (H3 > H2) TO H3 + (H3 < H2) STEP T
7410 H4 = H8 + (I - 1) * (H9 - H8) / 9:RZ = (H4 - HT(Z2(M))) / (HT(Z3(M)) - HT(Z2(M)))
7420 XD(I + N) = U2(M) + RZ * (U3(M) - U2(M)):YD(I + N) = V2(M) + RZ * (V3(M) - V2(M))
7430 NEXT I
7440 IF H3 = H1 THEN 7500
7450 N = 10 * (H1 < H3):T = (H1 > H3) - (H1 < H3)
7460 FOR I = H3 + (H1 > H3) TO H1 + (H1 < H3) STEP T
7470 H4 = H8 + (I - 1) * (H9 - H8) / 9:RZ = (H4 - HT(Z3(M))) / (HT(Z1(M)) - HT(Z3(M)))
7480 XD(I + N) = U3(M) + RZ * (U1(M) - U3(M)):YD(I + N) = V3(M) + RZ * (V1(M) - V3(M))
7490 NEXT I
7500 FOR K = 1 TO 10
7510 IF XD(K) = 0 OR XD(K) + 10 = 0 THEN 7570
7520 I1 = 65 + 150 * (XD(K) - 1) / MA:J1 = 150 - 150 * (YD(K) - 1) / MA
7530 I2 = 65 + 150 * (XD(K) + 10) - 1 / MA:J2 = 150 - 150 * (YD(K) + 10) - 1 / MA
A
7560 HPLLOT I1,J1 TO I2,J2
7570 NEXT K
7580 NEXT M
7590 FOR K = 2 TO PP
7600 I1 = 65 + 150 * (XF(K) - 1) / MA:J1 = 150 - 150 * (YF(K) - 1) / MA
7610 I2 = 65 + 150 * (XF(K) - 1) / MA:J2 = 150 - 150 * (YF(K) - 1) / MA
7620 HPLLOT I1,J1 TO I2,J2
7630 NEXT K
7635 I1 = 65 + 150 * (XF(1) - 1) / MA:J1 = 150 - 150 * (YF(1) - 1) / MA: HPLLOT I1,J1 TO I1,J1
7640 FOR K = 1 TO PP: HPLLOT XS(K),YS(K): NEXT K
7700 VTAB 22: PRINT A$: PRINT : PRINT "<TECLEAR PARA CONTINUAR>*"
7710 GET B$: IF B$ = "" THEN 7710
7720 TEXT : GOSUB 4000: RETURN
8497 REM
8498 REM
8499 REM
8500 REM (DATOS ACUIFERO)
8502 GOSUB 4000: REM LETRERO
8505 VTAB 10: HTAB 1: CALL = 958: PRINT "LECTURA DE DATOS..."
8510 D$ = CHR$(4):R$ = CHR$(13)
8520 PRINT D$;"OPEN GEODATOS"

```

```

8530 PRINT D$;" READ GEODATOS"
8540 INPUT HA,XO ,YO ,RA
8550 INPUT PP,NI ,NN, TR
8560 GOSUB 9000: REM MEMORIA
8570 FOR K = 1 TO FP
8580 INPUT XF(K) ,YF(K)
8590 NEXT K
8600 FOR K = 1 TO TR
8610 INPUT Z1(K) ,U1(K) ,V1(K)
8620 INPUT Z2(K) ,U2(K) ,V2(K)
8630 INPUT Z3(K) ,U3(K) ,V3(K)
8640 NEXT K
8650 PRINT D$;"CLOSE"
8660 RETURN
8747 REM
8748 REM
8749 REM
8750 REM (ARCHIVO DISCO)
8760 D$ = CHR$(4):R$ = CHR$(13)
8770 PRINT D$;"OPEN HIDRODATOS"
8780 PRINT D$;"CLOSE"
8790 PRINT D$;"DELETE HIDRODATOS"
8800 PRINT D$;"OPEN HIDRODATOS"
8810 PRINT D$;"WRITE HIDRODATOS"
8820 PRINT HA;R$;XO; R$;YO;R$;RA
8830 PRINT PP;R$;NI; R$;NN;R$;TR
8840 PRINT FP;R$;NF; R$;TV;R$;PR;R$;RD
8850 PRINT PP;R$;TF
8860 FOR K = 1 TO FP
8870 PRINT XF(K); R$;YF(K)
8880 NEXT K
8890 FOR K = 1 TO TR
8900 PRINT Z1(K);R$;U1(K);R$;V1(K)
8910 PRINT Z2(K); R$;U2(K);R$;V2(K)
8920 PRINT Z3(K);R$;U3(K);R$;V3(K)
8930 NEXT K
8935 IF PP = 0 THEN 8965
8940 FOR K = 1 TO PP
8950 PRINT XS(K);R$;YS(K)
8960 NEXT K
8965 IF TF = 0 THEN 8992
8970 FOR K = 1 TO TF
8980 PRINT S1(K)
8990 NEXT K
8992 FOR L = 1 TO NN
8993 J = 1
8994 IF G(NN*(L-1) + L) = 0 THEN J = 0

```

```

0995 PRINT J;R;HT(L); NEXT L
0996 FOR K = 1 TO FP + PP: PRINT S2(K); NEXT K: PRINT D#;"CLOSE": RETURN
0997 REM
0998 REM
0999 REM
9000 REM (MEMORIA RESERVADA)
9035 PS = 10: REM MAXIMO POZOS
9050 TT = TR + 6 * PS: REM MAXIMO TRIANGULOS
10000 DIM XD(20),YD(20),ND(20)
10010 DIM X(F(FP),Y(FP))
10040 DIM U1(TT),V1(TT),Z1(TT)
10050 DIM U2(TT),V2(TT),Z2(TT)
10060 DIM U3(TT),V3(TT),Z3(TT)
10070 DIM XS(PS),YS(PS),S1(6 * PS)
10080 DIM S2(FP + PS)
10090 DIM R(TT)
10100 RETURN
10497 REM
10498 REM
10499 REM
10500 REM (DIMENSIONAMIENTO VARIABLE)
10510 DIM B(INN),HT(INN)
10520 DIM G(INN * INN)
10530 DIM NX(3),NY(3)
10540 RETURN
14997 REM
14998 REM
1999 REM
15000 REM (FIN DE PROGRAMA)
15010 VTAB 10: HTAB 11: CALL - 958

```

```

15020 PRINT "CALCULOS DE CONTAMINACION? (SI/NO) "; INPUT B#
15030 IF B# = "SI" THEN GOSUB 8750: PRINT CHR$(4); "RUN CONTAMINACION"
15040 IF B# < > "NO" THEN 15010
15050 VTAB 10: HTAB 1: CALL - 95B
15060 PRINT "CAMBIOS DE HIDRODINAMICA? (SI/NO) "; INPUT B#
15070 IF B# = "SI" THEN RUN
15080 IF B# < > "NO" THEN 15050
090 VTAB 10: HTAB 1: CALL - 95B
15100 PRINT "CAMBIOS DE GEOMETRIA? (SI/NO) "; INPUT B#
15110 IF B# = "SI" THEN GOSUB 8750: PRINT CHR$(4); "RUN GEOMETRIA"
15120 IF B# < > "NO" THEN 15090
15123 VTAB 10: HTAB 1: CALL - 95B
15125 PRINT "FIN DE PROGRAMA: ACTUALIZACION DE": PRINT "ARCHIVOS DE HIDRODINA
CA? (SI/NO) "; INPUT B#
15127 IF B# = "NO" THEN 15140
15129 IF B# < > "SI" THEN 15123
15130 GOSUB 8750: REM (ARCHIVO DISCO)
15140 HOME : END

```



ANEXO 4. LISTADO DEL PROGRAMA "CONTAMINACION".

ELIST

```

50 REM CONTAMINACION ACUIFERO
70 REM U. N. A. M. 1986
80 REM OM LUIS ANTONIO ACEVEDO ARREGUIN
90 IF PEEK (103) < > 1 OR PEEK (104) < > 64 THEN POKE 103,1: POKE 104,1
POKE 16384,0: POKE 16385,0: POKE 16386,0: PRINT CHR$ (4);"RUN CONTAMINACION"
97 REM
98 REM
99 REM
100 REM (PROGRAMA PRINCIPAL)
110 GOSUB 1000: REM DATOS
120 GOSUB 2000: REM GRAFICA 1
130 GOSUB 3000: REM CONDICION INICIAL
140 GOSUB 5000: REM MATRICES
150 GOSUB 6000: REM SOLUCION
160 GOSUB 7000: REM TIEMPO
170 GOSUB 18000: REM FINAL
17 REM
178 REM
179 REM
1000 REM (DATOS ACUIFERO)
1100 GOSUB 4000: REM LETRERO
1110 VTAB 10: HTAB 1: CALL - 958: PRINT "LECTURA DE DATOS..."
1120 DS = CHR$ (4)
1130 PRINT DS;"OPEN HIDRODATOS"
1140 PRINT DS;"READ HIDRODATOS"
1150 INPUT HA,XO,YO,RA
1160 INPUT FP,NI,NN,TR
1170 INPUT EF,KH,TV,PR,RO
1180 INPUT PF,TF
1190 GOSUB 9000: REM MEMORIA
1200 FOR K = 1 TO FP
1210 INPUT XF(K),YF(K)
1220 NEXT K
1230 FOR K = 1 TO TR
1240 INPUT Z1(K),U1(K),V1(K)
1250 INPUT Z2(K),U2(K),V2(K)
1260 INPUT Z3(K),U3(K),V3(K)
1270 NEXT K

```

```

1275 IF PP = 0 THEN 1305
1280 FOR K = 1 TO PP
1290 INPUT XS(K),YS(K)
1300 NEXT K
1305 IF TF = 0 THEN 1340
1310 FOR K = 1 TO TF
1320 INPUT S1(K),S2(K)
1330 NEXT K
1340 FOR L = 1 TO NN
1350 INPUT ND(L),HT(L)
1360 NEXT L
1365 FOR K = 1 TO FP: PP = PP + 1
1366 INPUT S2(K)
1367 NEXT K
1370 PRINT D$;"CLOSE"
1380 RETURN
1997 REM
1998 REM
1999 REM
2000 REM (GRAFICA # 1)
2010 HOME : HGR : HCOLOR= 3
2020 FOR K = 2 TO FP
2030 I1 = 65 + 150 * (XF(K) - 1) - 1) / MA: J1 = 150 - 150 * (YF(K) - 1) - 1) / MA
2040 I2 = 65 + 150 * (XF(K) - 1) / MA: J2 = 150 - 150 * (YF(K) - b) / MA
2050 HPLLOT I1,J1 TO I2,J2
2060 NEXT K
2070 I1 = 65 + 150 * (XF(1) - 1) / MA: J1 = 150 - 150 * (YF(1) - 1) / MA: HPLLOT I
J2 TO I1,J1
2075 IF PP = 0 THEN 2120
2080 FOR K = 1 TO PP
2090 HPLLOT XS(K) - 2,YS(K) - 2 TO XS(K) + 2,YS(K) + 2
2100 HPLLOT XS(K) - 2,YS(K) + 2 TO XS(K) + 2,YS(K) - 2
2110 NEXT K
2120 VTAB 22
2130 PRINT "PLAND-DEL ACUIFERO Y LOS POZOS": PRINT
2140 PRINT "<TECLEAR PARA CONTINUAR>";
2150 GET B$: IF B$ = "" THEN 2150
2160 PRINT : TEXT : GOSUB 4000
2170 RETURN
2997 REM
2998 REM
2999 REM
3000 REM (CONDICION INICIAL)
3005 VTAB 10: HTAB 1: PRINT "CONTAMINANTE POR ESTUDIAR...": INPUT C$
010 VTAB 10: HTAB 1: CALL - 958
3020 PRINT "CALIDAD DEL AGUA:"
3030 VTAB 13: HTAB 3: CALL - 958
040 PRINT "CARGA CONTAMINANTE PROMEDIO": PRINT " EN EL ACUIFERO? (MG/L) ";

```

```

3050 INPUT CM: IF CM < 0 THEN 3030
3060 FOR I = 1 TO NN - PP
3070 C1(I) = CM
3080 NEXT I
3081 VTAB 13: HTAB 3: CALL - 958
3082 PRINT "CARGA CONTAMINANTE EN LA FRONTERA": PRINT "DEL ACUIFERO...?": PRINT
(1) CONSTANTE, (2) VARIABLE ...":
3083 INPUT N: K = 1: IF N = 2 THEN 3086
3084 IF N < 1 THEN 3081
3085 PRINT "MAGNITUD (MG/L) ...": INPUT CF: C9 = CF
3086 FOR J = NI + 1 TO NI + FP: C1(I) = CF: C2(I) = C1(I): IF N = 1 THEN 3089
3087 VTAB 17: HTAB 3: CALL - 958: PRINT "PUNTO "; X0 + (X(K) - 1) * (RA / MA)
+ (YF(K) - 1) * RA / MA: PRINT "CONCENTRACION (MG/L) ...":
3088 INPUT C1(I): PRINT : C2(I) = C1(I): K = K + 1: S2(I) = NI: = 0: IF C1(I) = 0
- 9 THEN S2(I) = NI) = 1
3089 IF C9 < C1(I) THEN C9 = C1(I)
3090 NEXT I: IF PP = 0 THEN 3140
3091 FOR I = 1 TO PP
3095 PRINT
3100 VTAB 13: HTAB 3: CALL - 958
3110 PRINT "CARGA CONTAMINANTE EN EL": PRINT "POZO "; I: " 2 (MG/L) ...":
3120 INPUT C1(NN - PP + I): IF C1(NN - PP + I) < 0 THEN 3100
3125 C2(NN - PP + I) = C1(NN - PP + I)
3127 IF C9 < C1(NN - PP + I) THEN C9 = C1(NN - PP + I)
3130 NEXT I
3140 VTAB 13: HTAB 3: CALL - 958
3150 PRINT "INTERVALO DE TIEMPO": PRINT "PARA EL CALCULO (HORAS) ":
3160 INPUT DT: IF DT < 0 THEN 3140
3162 DT = DT / 24
3164 VTAB 13: HTAB 3: CALL - 958: PRINT "DISPERSIVIDADES (METROS)...?":
3166 PRINT "LONGITUDINAL "; INPUT W1: IF W1 < 0 THEN 3164
3168 PRINT "TRANSVERSAL "; INPUT W2: IF W2 < 0 THEN 3164
3172 VTAB 13: HTAB 3: CALL - 958
3174 PRINT "COEFICIENTES L1 Y L2 DE LA ISOTERMA": PRINT "DEL LANGMUIR...?":
(C/(1+L2C)5.2"
3175 PRINT "L1 (MG/G)...": INPUT L1: IF L1 < 0 THEN 3172
3178 PRINT "L2 (L/MG)...": INPUT L2: IF L2 < 0 THEN 3172
3179 VTAB 13: HTAB 3: CALL - 958: PRINT "AVANCE DEL FRENTE CONTAMINANTE EN EL
: PRINT "PLANO DEL ACUIFERO (%)...": INPUT AV: IF AV < 0 THEN 3179
3180 RETURN
3997 REM
3998 REM
3999 REM
4000 REM (IDENTIFICACION)
4010 HOME: INVERSE
4020 PRINT *
4030 PRINT " TERCERA PARTE:
4040 PRINT " CONTAMINACION DEL ACUIFERO

```

```

4050 PRINT "
4060 NORMAL : RETURN
97 REM
4958 REM
4957 REM
5000 REM (CALCULO DE MATRICES)
5010 VTAB 10: HTAB 1: CALL - 958: PRINT "CALCULO DE LAS MATRICES": PRINT "DE
DEFICIENTES":
5020 K = 0
5030 K = K + 1: PRINT ".":
5035 IF TF = 0 THEN GO TO 5051
5040 FOR T = 1 TO TF
5045 IF K = S1(T) THEN 5690
5050 NEXT T
5051 X1 = U1(K):X2 = U2(K):X3 = U3(K)
5052 Y1 = V1(K):Y2 = V2(K):Y3 = V3(K)
5053 U1(K) = X0 + RA * (X1 - 1) / MA:V1(K) = Y0 + RA * (Y1 - 1) / MA
5055 U2(K) = X0 + RA * (X2 - 1) / MA:V2(K) = Y0 + RA * (Y2 - 1) / MA
5057 U3(K) = X0 + RA * (X3 - 1) / MA:V3(K) = Y0 + RA * (Y3 - 1) / MA
5060 AR = (U2(K) - U1(K)) * (V3(K) - V1(K)) - (U3(K) - U1(K)) * (V2(K) - V1(K))
/ 2
5070 NX(1) = (V2(K) - V3(K)) / (2 * AR):NY(1) = (U3(K) - U2(K)) / (2 * AR)
5080 NX(2) = (V3(K) - V1(K)) / (2 * AR):NY(2) = (U1(K) - U3(K)) / (2 * AR)
5090 NX(3) = (V1(K) - V2(K)) / (2 * AR):NY(3) = (U2(K) - U1(K)) / (2 * AR)
5100 NO(1) = Z1(K):NO(2) = Z2(K):NO(3) = Z3(K)
5110 VX = - KH * (NX(1) * HT(NO(1)) + NX(2) * HT(NO(2)) + NX(3) * HT(NO(3))) /
PR
20 VY = - KH * (NY(1) * HT(NO(1)) + NY(2) * HT(NO(2)) + NY(3) * HT(NO(3))) /
PR
5130 VT = SQR (VX * VX + VY * VY)
5135 IF VT = 0 THEN D1 = 0:D2 = 0:D3 = 0: GOTO 5170
5140 D1 = (W1 * VX * VX + W2 * VY * VY) / VT
5150 D2 = (W1 * VY * VY + W2 * VX * VX) / VT
5160 D3 = (W1 - W2) * VX * VY / VT
5170 FOR H = 1 TO 3
5180 L = NO(H):I = NN * (L - 1)
5190 G1 = D1 * NX(H) + D3 * NY(H) + VX / 3
5200 G2 = D3 * NX(H) + D2 * NY(H) + VY / 3
5210 G(I + NO(1)) = G1 + NO(1) + AR * (NX(1) * G1 + NY(1) * G2)
5220 G(I + NO(2)) = G1 + NO(2) + AR * (NX(2) * G1 + NY(2) * G2)
5230 G(I + NO(3)) = G1 + NO(3) + AR * (NX(3) * G1 + NY(3) * G2)
5240 HZ(1) = (U2(K) * V3(K) - U3(K) * V2(K)) / (2 * AR)
5250 HZ(2) = (U3(K) * V1(K) - U1(K) * V3(K)) / (2 * AR)
5260 HZ(3) = (U1(K) * V2(K) - U2(K) * V1(K)) / (2 * AR)
5270 FOR J = 1 TO 3
5280 P1(J) = 0:P2(J) = 0:PL = - 1
5290 X1 = U1(H):Y1 = V1(K)
5300 X2 = U2(K):Y2 = V2(K)

```

```

5305 X3 = U3(K):Y3 = V3(K)
5310 IF X1 = X2 THEN 5620
5315 IF X1 = X3 THEN X4 = X1:X1 = X2:X2 = X3:X3 = X4:Y4 = Y1:Y1 = Y2:Y2 = Y3:
      = Y4: GOTO 5310
5320 H1 = (Y2 - Y1) / (X2 - X1)
5330 H2 = (Y3 - Y1) / (X3 - X1)
5340 N1 = Y1 - H1 * X1
5350 N2 = Y3 - H2 * X3
5360 E1 = H2(J) * H1(H)
5370 E2 = H1(J) * H2(H)
5380 E3 = H2(J) * H2(H)
5390 E4 = H1(J) * H1(H) + H1(H) * H2(J)
5400 E5 = H2(J) * H2(H) + H1(H) * H2(J)
5410 E6 = H1(J) * H2(H) + H1(H) * H2(J)
5420 E7 = H3 - H1
5430 E8 = H3 * H3 - H1 * H1
5440 E9 = H3 * H3 * H3 - H1 * H1 * H1
5450 D4 = H3 - H1
5460 D5 = H3 * H3 - H1 * H1
5470 D6 = H3 * H3 * H3 - H1 * H1 * H1
5480 D7 = H3 * H3 - H1 * H1
5490 D8 = H3 * H3 * H3 - H1 * H1 * H1
5500 D9 = H3 * H3 * H3 - H1 * H1 * H1
5510 F1 = X2 - X1
5520 F2 = X2 * X2 - X1 * X1
5530 F3 = X2 * X2 * X2 - X1 * X1 * X1
5540 F4 = X2 * X2 * X2 * X2 - X1 * X1 * X1 * X1
5550 F5 = E1 * E7 + E4 * E8 / 2 + E2 * E9 / 3
5560 F6 = E1 * D4 + E4 * D7 + E2 * D8 + E5 * E7 + E6 * E8 / 2
5570 F7 = E4 * D5 / 2 + E2 * D9 + E5 * D4 + E6 * D7 + E8 * E7
5580 F8 = E2 * D6 / 3 + E6 * D5 / 2 + E3 * D4
5590 F9 = F5 * F4 / 4 + F6 * F3 / 3 + F7 * F2 / 2 + F8 * F1
5600 IF FL = -1 THEN P1(J) = F9
5610 IF FL = 1 THEN P2(J) = -F9
5620 FL = -FL
5630 IF FL = 1 THEN X4 = X1:X1 = X3:X3 = X-4:Y4 = Y1:Y1 = Y3:Y3 = Y4: GOTO 5310
5640 NEXT J
5650 P1 + ND(1) = P1 + ND(1) + P1(1) * P2(1)
5660 P1 + ND(2) = P1 + ND(2) + P1(2) * P2(2)
5670 P1 + ND(3) = P1 + ND(3) + P1(3) * P2(3)
5680 NEXT K
5690 H1 = U1(K):H2 = U2(K):H3 = U3(K)
5695 Y1 = V1(K):Y2 = V2(K):Y3 = V3(K)
5700 U1(K) = 1 + HA * (X1 - X0) / RA:V1(K) = 1 + HA * (Y1 - Y0) / RA
5705 U2(K) = 1 + HA * (X2 - X0) / RA:V2(K) = 1 + HA * (Y2 - Y0) / RA
5710 U3(K) = 1 + HA * (X3 - X0) / RA:V3(K) = 1 + HA * (Y3 - Y0) / RA
5720 IF K < TR THEN 5050
5730 PRINT: RETURN

```

```

5997 REM
5998 REM
5999 REM
6000 REM <SOLUCION NUMERICA>
6005 VTAB 10; HTAB 1; CALL - 958; PRINT "CALCULO DE LA CARGA CONTAMINANTE": P
INT "EN LOS NODOS DEL ACUIFERO";
6007 N = 0; TT = TT + DT
6010 EM = 0; L = 0; N = N + 1; PRINT ". ";
6020 L = L + 1
6025 IF G(NN * (L - 1) + L) = 0 THEN 6110
6030 IF NI < L THEN IF S2(L - NI) = 0 THEN 6110
6040 CO = C2(L); SU = 0
6050 FOR M = 1 TO NN
6060 I = NN * (L - 1)
6065 FR = 1 + L2 * C2(M); FR = 1 + RO * L1 * L2 / (PR * FR * FR)
6070 IF M < > L THEN SU = SU + FR * (C2(M) - C1(M)) * P(I + M) / DT + (C2(M)
C1(M)) * G(I + M) / 2
6080 NEXT M
6085 FR = 1 + L2 * C2(L); FR = 1 + RO * L1 * L2 / (PR * FR * FR)
6090 C2(L) = - (SU + B(L) - C1(L)) * (FR * P(I + L) / DT - G(I + L) / 2) / (FR
* P(I + L) / DT + G(I + L) / 2)
6095 IF C2(L) < 0 THEN C2(L) = 0
6097 ER = ABS (CO - C2(L))
6100 IF ER > EM THEN EM = ER
6110 IF L <= NN THEN 6020
6120 IF (N < 1000) AND (EM > 0.01) THEN 6010
6125 PRINT : VTAB 6; HTAB 1; CALL - 958; K = 1
6130 IF EM > 0.01 THEN PRINT "NO CONVERGE LA SOLUCION.": PRINT "W = 3
6133 PRINT "RESULTADOS (EN "N"; ITERACIONES) :"; PRINT "
6135 PRINT "NODO"; TAB(10); "CONTAMINANTE, MG/L"; TAB(30); "INVERSE"; PRINT
INT (2400 * TT) / 100; " HR"; NORMAL
6140 FOR L = 1 TO NN; IF G(NN * (L - 1) + L) = 0 THEN 6160
6142 K = K + 1; IF K < 10 THEN 6150
6144 K = 1; VTAB 23; HTAB 1; PRINT "<TECLEAR PARA CONTINUAR>";
6146 GET B%; IF B% = "" THEN 6146
6148 PRINT : VTAB 9 + W; HTAB 1; CALL - 958
6150 PRINT TAB(3); L; TAB(15); C2(L)
6160 NEXT L
6170 VTAB 23; PRINT "<TECLEAR PARA CONTINUAR>"; GET B%; IF B% = "" THEN 6170
6180 GOSUB 8000; REM GRAFICA 2
6190 RETURN
6997 REM
6998 REM
6999 REM
7000 REM <INCREMENTO AL TIEMPO>
7010 GOSUB 4000; VTAB 10; HTAB 1; CALL - 958
7020 PRINT "TIEMPO TRANSCURRIDO:"; INT (2400 * TT) / 100; " HR"
7030 PRINT
7040 PRINT "INTERVALO PROPUESTO: "; INT (2400 * DT) / 100; " HR"

```

```

7050 PRINT
50 VTAB 15: HTAB 3: CALL - 958: PRINT "MENU": PRINT : PRINT "(1) MODIFICACI
UN DEL INTERVALO.": PRINT "(2) CAMBIO DEL FRENTE CONTAMINANTE.":
7065 PRINT: PRINT "(3) SIGUIENTE CALCULO EN EL TIEMPO.": PRINT "(4) FIN DEL PROGRAM
: PRINT : PRINT : PRINT "CUAL ES SU OPCION ...":
7070 INPUT X: IF X < 1 OR X > 4 THEN 7060
7075 ON X GOTO 7090,7100,7130,7180
7080 GOTO 7060
7090 PRINT "INTERVALO (HORAS) ": INPUT DT: DT = DT / 24
7095 PRINT : GOTO 7130
7100 PRINT
7102 PRINT "AVANCE DEL FRENTE CONTAMINANTE (%)...": INPUT AV: IF AV < 0 THEN 7
100
7104 PRINT
7110 GOTO 7130
7130 FOR I = 1 TO NN
7140 C1(I) = C2(I)
7150 NEXT I
7160 GOSUB 6000
7170 GOTO 7000
7180 RETURN
7997 REN
7998 REN
7999 REN
8000 REN (GRAFICA # 2)
8010 A# = "FRENTE CONTAMINANTE DEL "
8015 VTAB 21: HTAB 1: CALL - 958
8020 POKE - 16304,0: POKE - 16297,0
8030 FOR M = 1 TO TR
8035 IF TF = 0 THEN 8060
8040 FOR L = 1 TO TF: IF M = S1(L) THEN 8350: NEXT L
8050 NEXT L
8060 C3 = 4 * C2(21(M)) / C9
8070 C4 = 4 * C2(22(M)) / C9
8080 C5 = 4 * C2(23(M)) / C9
8090 I = 4 * AV / 100
8100 FL = 0: X1 = 0: Y1 = 0: X2 = 0: Y2 = 0
8110 IF C3 > I AND C4 > I THEN 8160
8120 IF C3 < I AND C4 < I THEN 8160
8130 RZ = (I - C3) / (C4 - C3)
8140 X1 = U1(M) + RZ * (U2(M) - U1(M)): Y1 = V1(M) + RZ * (V2(M) - V1(M))
8150 FL = 1
8160 IF C4 > I AND C5 > I THEN 8220
8170 IF C4 < I AND C5 < I THEN 8220
8180 RZ = (I - C4) / (C5 - C4)
8190 X2 = U2(M) + RZ * (U3(M) - U2(M)): Y2 = V2(M) + RZ * (V3(M) - V2(M))
8200 IF FL = 0 THEN X1 = X2: Y1 = Y2: FL = 1: GOTO 8220
8210 FL = 2: GOTO 8280

```

```

8220 IF C3 > I AND C5 > I THEN 8280
8230 IF C3 < I AND C5 < I THEN 8280
140 RZ = (I - C3) / (C5 - C3)
8250 X2 = U1(M) + RZ * (U3(M) - U1(M)); Y2 = V1(M) + RZ * (V3(M) - V1(M))
8260 IF FL = 0 THEN X1 = X2; Y1 = Y2; FL = 1: GOTO 8280
8270 IF FL = 1 THEN FL = 2
8280 IF FL = 0 THEN 8350

8290 I1 = 65 + 150 * (X1 - 1) / MA; J1 = 150 - 150 * (Y1 - 1) / MA
8300 I2 = 65 + 150 * (X2 - 1) / MA; J2 = 150 - 150 * (Y2 - 1) / MA
8310 HCOLOR= 3
8320 IF FL = 1 THEN H PLOT I1, J1: GOTO 8340
8330 H PLOT I1, J1 TO I2, J2
8350 NEXT M
8360 V TAB 21: H TAB 1: CALL - 958: PRINT A$; INT (100 * AV) / 100; "% DE CMAX
PRINT "CASO: "I$
8365 V TAB 22: H TAB 22: CALL - 958: PRINT "TIEMPO: "I$; INT (2400 * TT) / 100; "
R": PRINT : PRINT "<TECLEAR PARA CONTINUAR>";
8370 GET B$: IF B$ = "*" THEN 8370
8375 PRINT
8380 V TAB 21: H TAB 1: CALL - 958: TEXT : GOSUB 4000
8390 RETURN
8997 REM
8998 REM
8999 REM
9000 REM <MEMORIA RESERVADA>
.010 DIM XF (FP), YF (FP), S2 (FP + PP)
.020 DIM U1 (TR), V1 (TR), Z1 (TR)
9030 DIM U2 (TR), V2 (TR), Z2 (TR)
9040 DIM U3 (TR), V3 (TR), Z3 (TR)
9050 DIM XS (PP), YS (PP), S1 (TP)
9060 DIM ND (NN), HT (NN), C1 (NN), C2 (NN)
9070 DIM G (NN * NN), P (NN * NN), B (NN)
9080 DIM NX (3), NY (3)
9090 RETURN
14997 REM
14998 REM
14999 REM
15000 REM <FIN DE PROGRAMA>
15100 END

```



**ANEXO 5. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.**

- (1) Argo, David. Reliability of Water Factory 21. California, 1980. \*\* p.p. 12-26.
- (2) Asano, Takashi and Wassermann, Kurt. Groundwater recharge operations in California. California, 1980. \*\* p.p. 12-26.
- (3) Ayanequi Jaritz, Salvador. Evaluación del reuso agrícola con aguas residuales del Cárro de los Remedios, Mex. SARH, 1984. p.p. 1.1-1.8.
- (4) Bower, Herman; Rice, Lance and Gilbert. Renovation of sewage effluent with rapid-infiltration land-treatment systems. California, 1980. \*\* p.p. 265-282.
- (5) Bowen. Groundwater. Applied Science Publishers LTD, 1980. p.p. 9-10; 45-46.
- (6) Bresler and Hanks. Numerical method for estimating simultaneous flow of water and salt in unsaturated soils. Soil Science Society of America Proceedings, Vol. 33, 1969. p.p. 827-832.
- (7) Bresler, Eshel. Simultaneous transport of solutes and water under transient unsaturated flow conditions. Water resources research, Vol. 9, No. 4, August 1973. p.p. 975-985.
- (8) Chang and Page. Fate of inorganic micro-contaminants during groundwater recharge. California, 1980. \*\* p.p. 118-136.

- ( 9 ) Culp, Russell.  
Selecting treatment processes to meet water reuse requirements.  
California, 1980. \*\* p.p. 41-54.
- ( 10 ) Dudley, Wagenet and Jurinak.  
Description of soil chemistry during transiente solute transport.  
Water resources research, Vol. 17, No. 5, October 1981.  
p.p. 1498-1504.
- ( 11 ) Freeze, Allan and Cherry, John.  
Groundwater.  
Prentice Hall, 1979.  
p.p. 83-86; 103-104; 106-107; 112-114; 116-118; 127-134; 388-406; 539.
- ( 12 ) Fried.  
Groundwater pollution.  
Elsevier Scientific Publishing Company, 1975.  
p.p. 1-3; 275-285.
- ( 13 ) Garrison, Walter; Nellor, Margaret and Baird, Rodger.  
A study on the health aspects of groundwater recharge in  
Southern California.  
California, 1980. \*\*
- ( 14 ) Gerba, Charles and Lance, Clarence.  
Pathogen removal from wastewater during groundwater recharge.  
California, 1980. \*\*  
p.p. 137-144.
- ( 15 ) Idelovitch, Emanuel; Terkeltoob, Richard and Michail, Medy.  
The role of groundwater recharge in wastewater reuse:  
The Dan Region Project - Israel.  
California, 1980. \*\*  
p.p. 146-178.
- ( 16 ) Iturbe, Rosario y Barrera, Enrique.  
Comportamiento de las sales en suelos irrigados con aguas residuales.  
Instituto de Ingenieria de la UNAM, proyecto 2330,  
agosto 1983.  
p.p. 1 y 2.
- ( 17 ) Kirda, Nielsen and Biggar.  
Simultaneous transport of chloride and water during infiltration.  
Soil Science Society of America Proceedings, 1973.  
p.p. 339-245.

- ( 18 ) Kinokow, Leonard and Bredehoeft, John.  
Modeling flow and chemical quality changes in an irrigated stream-aquifer system.  
Water resources research, Vol. 10, No. 3, 1974.  
p.p. 546-562.
- ( 19 ) Mc Carty, Perry; Rittmann, Bruce and Reinhard, Martin.  
Processes affecting the movement and fate of trace organics.  
California, 1980. \*\*  
p.p. 93-117.
- ( 20 ) Novotny, Vladimir; Tran, Hue; Sinsiman and Chesters.  
Mathematical modeling of land runoff contaminated by phosphorus.  
Journal of WPCF, January 1978.  
p.p. 101-112.
- ( 21 ) Ogata, Akio and Banks.  
A solution of the differential equation of longitudinal dispersion in porous media.  
Geological survey professional paper 411-A.  
United States Government Printing Office, Washington 1969.  
p.p. A.1-A.7.
- ( 22 ) Overman, Allen; Mc Mahon; Chu and Wang.  
Cation transport in packed bed reactor of soil.  
Journal of the environmental engineering division.  
ASCE, April 1980.  
p.p. 267-277.
- ( 23 ) Piet and Zoeteman.  
Organic water quality changes during sand bank and dune filtration of surface waters in The Netherlands.  
California, 1980. \*\*  
p.p. 195-214.
- ( 24 ) Roberts, Paul; Mc Carty, Perry and Roman, William.  
Direct injection of reclaimed water into an aquifer.  
Journal of the environmental engineering division.  
ASCE, October 1978.  
p.p. 933-949.
- ( 25 ) Roberts, Paul; Schreiner, Joan and Hopkins, Gary.  
Field study of organic water quality changes during groundwater recharge in The Palo Alto Baylands.  
California, 1980. \*\*  
p.p. 283-316.

- ( 26 ) Robbins, Jurinak and Wagenet.  
A combined salt transport-chemical equilibrium model for  
calcareous and gypsiferous soils.  
Soil Science Society of America Journal, Vol. 44, 1980.  
p.p. 1191-1194.
- ( 27 ) Robbins, Jurinak and Wagenet.  
Calculating cation exchange in a salt transport model.  
Soil, Science Society of America Journal, Vol. 44, 1980.  
p.p. 1195-1200.
- ( 28 ) Secretaría de Desarrollo Urbano y Ecología.  
Informe sobre el estado del medio ambiente en México.  
Fundación Arturo Rosenblueth, 1986.  
p.p. IX, 29-30.
- ( 29 ) Selim.  
Transport of reactive solutes during transient  
unsaturated water flow in multilayered soils.  
Soil Science, Vol. 126, No. 3, September 1978.  
p.p. 127-135.
- ( 30 ) Selim and Mansell.  
Analytical solution of the equation for transport of reactive  
solute through soils.  
Water resources research, Vol. 12, No. 3, June 1976,  
p.p. 528-532.
- ( 31 ) Selim; Davidson and Rao.  
Transport of reactive solutes through multilayered soils.  
Soil, Science Society of America Journal, Vol. 41, 1977.  
p.p. 3-10.
- ( 32 ) Selim; Mansell and Elseftawy.  
Distributions of 2,4-D and water in soil during infiltration  
and redistribution.  
Soil Science, Vol. 121, No. 3, 1976.  
p.p. 176-183.
- ( 33 ) Sontheimer, Heinrich.  
Experience with river bank filtration along the Elbe river.  
California, 1980. \*\* p.p. 179-194.

( 34 ) Valocchi, Street and Roberts.  
Transport of ion-exchanging solutes in groundwater:  
Chromatographic theory and field simulation.  
Water resources research, Vol. 17, No. 5, October 1981.  
p.p. 1517-1527.

( 35 ) Walton.  
Groundwater resource evaluation.  
Mc Graw-Hill; 1970.  
p.p. 3-10; 29-37.

( 36 ) Wang, Herbert and Anderson, Mary.  
Introduction to groundwater modeling.  
W.H. Freeman and Company, 1982.

( 37 ) Water Pollution Control Federation and American Society of  
Civil Engineers.  
Wastewater treatment plant design.  
WPCF, 1982.  
p.p. 425-430.

( 38 ) Wood, Warren.  
Development of technical site selection criteria for  
artificial recharge.  
California, 1980. \*\*  
p.p. 73-79.

\*\* Proceedings of the Symposium "Wastewater reuse for groundwater --  
recharge", held on September 6-7, 1979 at the Kellogg West Center for  
Continuing Education, California State Polytechnic University at Pomona,  
edited by Takashi Asano and Paul V. Roberts.