



00365  
lej.3

# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

“DETERMINACION DE LA COHOMOLOGIA DEL GRUPO  
SIMETRICO  $\Sigma$  CON COEFICIENTES ENTEROS MEDIANTE  
SUCESIONES ESPECTRALES”

**T E S I S**  
Que para obtener el Grado de  
MAESTRO EN CIENCIAS  
(MATEMATICAS)  
P r e s e n t a

**RODRIGO GONZALEZ ROJAS**

México, D. F.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1985



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

INTRODUCCION	iii
CAPITULO I	
EL ALGEBRA DE COHOMOLOGIA DE $\Sigma_4$ CON COEFICIENTES ENTEROS	1
I.1 INTRODUCCION	1
I.2 NOTA PRELIMINAR	2
I.3 EL ALGEBRA $H^*(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z})$	4
I.4 EL ALGEBRA $H^*(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$	8
I.5 PASO DEL GRUPO DE SYLOW AL SIMETRICO	20
CAPITULO II	
SUCESIONES ESPECTRALES	
II.1 PAREJA EXACTA	26
II.2 PAREJAS DERIVADAS Y SUCCIONES ESPECTRALES	28
II.3 SUCCIONES ESPECTRALES DE COMPLEJOS FILTRADOS	33
II.4 COMPLEJOS DOBLES	37
CAPITULO III	
CALCULO DE $H^*(\Sigma_4; \mathbb{Z})$ MEDIANTE SUCCIONES ESPECTRALES	
III.1 RESULTADOS PRELIMINARES	41
III.2 CALCULO DE $H^*(\Sigma_4; \mathbb{Z})_2$	43
III.3 CALCULO DE $H^*(\Sigma_4; \mathbb{Z})_3$	47
REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA	50
INDICE DE SIMBOLOS	52
INDICE ALFABETICO	54

## INTRODUCCION

Los grupos de cohomología aparecen de manera natural en el estudio de la Teoría de Grupos, en problemas de extensiones y de representaciones, sin embargo es hacia 1940 que la Cohomología de Grupos tomó forma con los trabajos de Cartan, Eilenberg y MacLane en Topología Algebraica, los de Hochschild y Serre en Extensiones de Grupo, así como los de Artin y Tate en Clases de Campo. Véase [Mc] para un enfoque histórico de la Cohomología de Grupos.

En la actualidad muchos temas están íntimamente ligados con ella: K-Teoría, Geometría Algebraica, Geometría Diferencial, Espacios Clasificantes, H-espacios, etc.. Reviste particular interés el cálculo de la Cohomología del grupo simétrico con coeficientes enteros.

En esta tesis se presenta el cálculo de  $H^*(\Sigma_n; \mathbb{Z})$  para  $n=4$  como álgebra utilizando la técnica de sucesiones espectrales. Para los casos  $n=2$ ,  $n=3$ , véase [T]. Para el cálculo que nos ocupa se han seguido esencialmente dos procedimientos:

- 1) El de Thomas, C.B. [T] que utiliza clases de Chern.
- 2) El de Cárdenas-Lluis [C-L], el cual escribimos con detalle en el capítulo I.

El presente trabajo se encuentra dividido en tres capítulos. En el primero se exponen los resultados de Cárdenas-Lluis [C-L]; en el segundo se da una introducción a las sucesiones espectrales y en el tercero proporcionamos el cálculo de  $H^*(\Sigma_4; \mathbb{Z})$  utilizando la técnica de sucesiones espectrales.

Además del interés intrínseco de determinar mediante otra técnica la cohomología del grupo  $\Sigma_4$ , es también nuestro interés el presentar una introducción a las Sucesiones Espectrales y mostrar como se puede aplicar. Casi todo lector ha experimentado un rechazo al estudio de sucesiones espectrales debido a su falta de naturalidad y gran elaboración. Esperamos que la presente exposición resulte más accesible.

Mi agradecimiento al Dr. Emilio Lluis Puebla por la paciencia y cuidado con que vigilo la elaboración de este trabajo.

## Capítulo I

### I.1 INTRODUCCION

En este capítulo presentamos los resultados de Gárdenas-Lluis [G-L1]. Señalamos primero lo que se puede saber "a priori" acerca de  $H^*(\Sigma_4; Z)$ .

- 1) De Evens [E] sabemos que es finitamente generado.
- 2) De la teoría del morfismo de transferencia se sabe, que para tener la descripción completa de  $H^*(\Sigma_4; Z)$  basta conocer la 2 y la 3 componente primaria de  $H^*(\Sigma_4; Z)$ . (Véase por ejemplo [E] p. 84)
- 3) La 3-componente primaria, que denotaremos por  $H^*(\Sigma_4; Z)_3$  es igual a  $H^*(Z_3; Z)$ . De Cartan [C] sabemos que  $H^*(Z_3; Z) = Z_3[R]$  que es el anillo de polinomios en la indeterminada  $R$  de grado 2. Además es periódica y su generador es de dimensión 4. Véase Cartan-Eilenberg [C-E].
- 4) Por lo tanto el problema es identificar la 2-componente primaria de  $H^*(\Sigma_4; Z)$  que denotaremos por  $H^*(\Sigma_4; Z)_2$ .

Nuestro propósito entonces, es determinar la 2-componente primaria. La forma en que se hace en [G-L1] es la siguiente: se calcula la cohomología del subgrupo de Sylow  $\Sigma_{4,2}$  de  $\Sigma_4$  y luego se identifica a  $H^*(\Sigma_4; Z)$  con una subálgebra de  $H^*(\Sigma_{4,2}; Z)$ .

1.1 Teorema.  $H^*(\Sigma_4; Z)_2$  es la subálgebra de  $H^*(\Sigma_{4,2}; Z)$  generada por  $\{\alpha, \nu, \beta^2 + \delta\}$ .

Para probarlo necesitamos conocer la estructura de álgebra de  $H^*(\Sigma_{4,2}; Z)$ . Para esto se determinan sus grupos de cohomología (esto se hará en la sección 3); después obtenemos la estructura de álgebra de  $H^*(\Sigma_{4,2}; Z)$  en la sección 4 y finalmente hacemos el paso del grupo de Sylow al simétrico.

## I.2 NOTA PRELIMINAR

Sea  $\Sigma_4$  el grupo simétrico en cuatro letras y sean  $a=(13)(24)$ ,  $b_1=(12)$ ,  $b_2=(34)$ .

Sean  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  los grupos generados por  $a$ ,  $b_1$  y  $b_2$  respectivamente y  $B=B_1 * B_2$ .

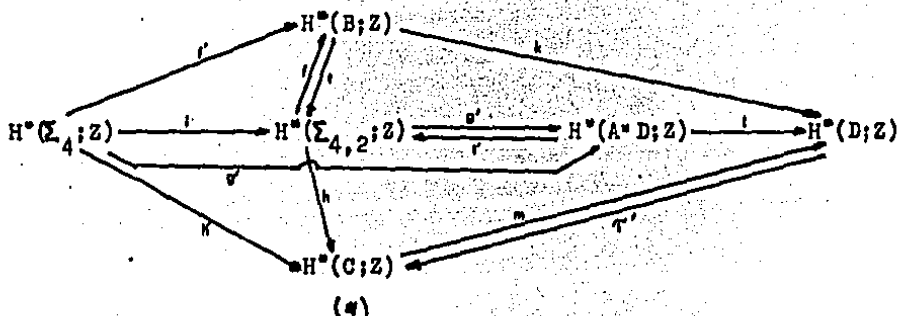
Consideramos  $A * B$ . Sabemos que  $A * B$  es un 2 subgrupo de Sylow ([R] teorema 10.27) al cual lo denotaremos por  $\Sigma_{4,2}$ . Sea además  $D$  el grupo generado por  $b_1 \cdot b_2$ .

Es fácil ver que  $B$  y  $A * D$  son 2-subgrupos abelianos de  $\Sigma_{4,2}$  pues son producto directo de subgrupos de orden 2. El subgrupo  $C$  generado por  $ab_1$  es ciclo de orden 4, en efecto,  $(ab_1)=(13)(24)(12)=(3421)$  es un elemento de orden 4 pues  $(ab_1)^2=(2143)$ ,  $(ab_1)^3=(4312)$ ,  $(ab_1)^4$ = permutación identidad. Por lo tanto  $C$  es un 2 subgrupo abeliano máximo (no elemental) de  $\Sigma_{4,2}$ .

2.1 Definición. Una familia  $\{H_i\}$ ,  $i \in I$  de subgrupos de un grupo  $G$  "detecta" la cohomología de  $G$ , si el morfismo  $H^*(BG) \rightarrow \prod H^*(BH_i)$  dado por el homomorfismo de restricción es inyectivo. Entonces decimos que  $\{H_i\}$  es una familia detectante de la cohomología de  $G$ .

Para poder determinar la estructura de álgebra de  $H^*(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$  es necesario conocer  $H^*(B; \mathbb{Z})$ ,  $H^*(A * D; \mathbb{Z})$  y  $H^*(C; \mathbb{Z})$ . En cuanto a este último sabemos que  $H^*(C; \mathbb{Z}) = \{0, s, 2s, 3s\}$ , véase Cartan [C]. Luego, calcularemos  $H^*(B; \mathbb{Z})$  y  $H^*(A * D; \mathbb{Z})$ .

Trabajaremos con el siguiente diagrama en el que  $t$ ,  $t'$  y  $t''$  son transferencias y el resto son los homomorfismos inducidos en cohomología por las inclusiones correspondientes:



2.2 Definición. Sea  $G$  un grupo,  $N$  su normalizador y  $C$  su centralizador, definimos el grupo de Weyl de  $G$ ,  $W(G)$  por  $W=N/C$ .

Para nuestro estudio nos serán de interés los siguientes grupos de Weyl :

1)  $W(B; \Sigma_{4,2}) \cong Z_2$ ; que está generado por el automorfismo  $\sigma$  de  $H^*(B; Z_2) = Z_2[X, Y]$  el cual está inducido por el automorfismo  $b \rightarrow aba^{-1}$ . Sean  $X, Y$  tales que

$$\sigma X = Y \quad \text{y} \quad \sigma Y = X$$

2)  $W(A^*D; \Sigma_{4,2}) \cong Z_2$ ; que está generado por el automorfismo  $\sigma'$  de  $H^*(A^*D; Z_2) = Z_2[U, V]$  el cual está inducido por el automorfismo interior de  $A^*D$ , determinado por  $b_1$ . Sean  $U, V$  tales que

$$\sigma' U = V \quad \text{y} \quad \sigma' V = U$$



### I.3 EL ALGEBRA $H^*(Z_p^s; Z)$

En esta sección probaremos que  $H^*(B; Z) = Z_2[x, y, z] \subset Z_2[X, Y]$  y

que  $H^*(A = D; Z) = Z_2[u, v, w] \subset Z_2[U, V]$

Sea  $G = Z_p \times Z_p \times \dots \times Z_p = Z_p^s$ . Describiremos a continuación

$H^*(G; Z)$  como una subálgebra del álgebra  $H^*(G; Z_p) = E(x_1, x_2, \dots,$

$x_s) \otimes P(y_1, y_2, \dots, y_s)$   $p > 2$ . (E es el álgebra exterior y P el álgebra de polinomios con coeficientes en  $Z_p$  y  $gr(x_i) = 1, gr(y_i) = 2$ ).

Para  $p=2$  veremos que  $H^*(G; Z)$  es una subálgebra del álgebra de  $H^*(G; Z_2) = P(x_1, \dots, x_s)$ . (P es el álgebra de polinomios con coeficientes en  $Z_2$  con  $gr(x_i) = 1, y_i = x_i^2$ ).

Consideremos la siguiente sucesión de coeficientes

Consideremos la siguiente sucesión de coeficientes

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{p} Z \longrightarrow Z_p \longrightarrow 0$$

que induce la siguiente sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow H^n(G; Z) \longrightarrow H^n(G; Z) \xrightarrow{c} H^n(G; Z_p) \xrightarrow{s} H^{n+1}(G; Z) \longrightarrow \dots$$

Sea  $\theta = \eta \delta$  en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 H^{n+1}(G; Z_p) & \xrightarrow{\theta} & H^{n+1}(G; Z_p) \\
 \delta \searrow & & \nearrow \pi \\
 & H^n(G; Z) &
 \end{array}$$

Como  $pG=0$ , entonces  $pH^n(G;Z)=0$  (véase [R], teorema 10.27) por lo que  $\theta$  es inyectivo,  $\theta$  suprayectivo y  $\text{Im } \theta = \text{Im } \theta$ . Esto nos permite conocer  $H^n(G;Z)$  en términos de  $H^n(G;Z_p)$ .

3.3 Proposición.  $\theta x_i = y_i \quad (1 \leq i \leq s)$

Demostración. El grupo de automorfismos de  $Z_p$  es  $GL_s(Z_p)$ .

Luego  $H^n(Z_p; Z_p)$  es un  $GL_s(Z_p)$ -grupo. Si  $\sigma \in GL_s(Z_p)$  entonces  $\theta \sigma \theta$

Sea  $p > 2$  y  $\theta x_1 = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_s y_s + \sum b_{ij} x_i y_j \quad (1 \leq i \leq j \leq s)$

Sea  $r$  tal que  $2 \leq r \leq s$ . Podemos tomar  $t$ , con  $t \neq r$ . Sea  $\sigma \in GL_s(Z_p)$

tal que en  $H^n(Z_p; Z_p) : \quad \sigma x_i = x_i \quad \sigma y_i = y_i \quad (i \neq t)$

$$\sigma x_t = x_t + x_r; \quad \sigma y_t = y_t + y_r$$

Luego  $a_t = a_t + a_r$ . Entonces  $a_r = 0$ .

Por otra parte si  $1 \leq i < j$  entonces  $b_{ij} = 0$ . En efecto, tenemos

$\sigma \in GL_s(Z_p)$  tal que

$$\sigma x_i = x_j \quad (k \neq i, j)$$

$$\sigma x_j = x_i$$

$$\sigma x_k = x_k$$

Luego los coeficientes de  $x_i \cdot x_j$  en  $\theta \sigma x_i = \theta x_i$  y en  $\theta \sigma x_j$  son  $b_{ij}$

y  $-b_{ij}$  respectivamente. Por lo tanto  $b_{ij} = 0$ .

Entonces  $\theta x_1 = a_1 y_1 + x_1 (b_2 x_2 + \dots + b_s x_s)$ . Si tomamos una transformación  $\sigma$  tal que  $\sigma x_1 = x_1, \sigma x_2 = x_3, \sigma x_3 = x_4, \dots, \sigma x_s = x_2$ , obtenemos que  $b_2 = b_3 = \dots = b_s$ . Luego  $\theta x_1 = a_1 y_1 + b x_1 (x_2 + \dots + x_s)$ .

Tomemos ahora  $\sigma$  tal que:

$$\begin{aligned} \sigma x_2 &= x_2 + \dots + x_s \\ \sigma x_k &= x_k \end{aligned}$$

Utilizando  $\sigma^{-1}$  se tiene que  $b=0$ . Luego  $\theta x_1 = a_1 y_1$ .

Procediendo en forma análoga con  $x_2, \dots, x_s$  obtenemos

$$\theta x_i = a_i y_i$$

Finalmente utilizando la permutación que permuta cíclicamente los índices tenemos que  $a_1 = a_2 = \dots = a_s = a$ .

Como  $H^1(G; Z) = 0$ , (ver [R], teorema 10.26)  $\theta_1 y_1$  son inyectivos y  $\theta_1$  resulta ser monomorfismo. De donde  $a \neq 0$ . Cambiando ahora  $a y_1$  por  $y_1$  obtenemos el resultado. El caso  $p=2$  es análogo. ///

3.4 Teorema. Si  $p > 2, \theta : H^s(Z_p; Z) \longrightarrow E(x_1, \dots, x_s) \otimes P(y_1, \dots, y_s)$

es un monomorfismo y la imagen de  $\theta$  está generada por los elementos

$$y_1, \dots, y_s$$

$$y_1 x_2 - x_1 y_2, y_1 x_3 - x_1 y_3, \dots, y_{s-1} x_s - x_{s-1} y_s$$

$$y_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 x_3 + x_1 x_2 y_3, \dots$$

...

$$y_1 x_2 \dots x_s - x_1 y_2 \dots x_s + \dots + (-1)^s x_1 \dots x_{s-1} y_s.$$

Demostración. Recordemos primero que  $\theta$  es un diferencial, luego

$\theta^2 = 0$ . Por lo tanto, si  $\theta x_1 = y_1$  entonces  $\theta^2 x_1 = \theta y_1 = 0$ . Por lo tanto  $\theta y_1 = 0$ . De este hecho y de la proposición anterior tenemos que

$$\theta(x_1^{\epsilon_1} \dots x_s^{\epsilon_s} y_1^{\alpha_1} \dots y_s^{\alpha_s}) = \theta(x_1^{\epsilon_1} \dots x_s^{\epsilon_s}) y_1^{\alpha_1} \dots y_s^{\alpha_s} + (-1)^{\sum \epsilon_i} x_1^{\epsilon_1} \dots x_s^{\epsilon_s} \theta(y_1^{\alpha_1} \dots y_s^{\alpha_s})$$

Por lo tanto,  $\text{Im } \theta (= \text{Im } \bar{u})$  está generada por

- $\theta(x_1), \dots, \theta(x_s)$
- $\theta(x_1 x_2), \dots, \theta(x_{s-1} x_s)$
- $\theta(x_1 x_2 x_3), \dots$
- $\dots$
- $\theta(x_1 x_2 \dots x_s)$

Como  $\theta x_i = y_i$ , el teorema está probado. ///

**3.5 Teorema.**  $\bar{u}: H^n(\mathbb{Z}_p^s; \mathbb{Z}) \longrightarrow P(x_1, \dots, x_s)$  es un monomorfismo y la imagen de  $\bar{u}$  está generada por los polinomios

- $y_1, \dots, y_s$  ( $y_i = x_i^2$ )
- $y_1 x_2 + x_1 y_2, \dots, y_{s-1} y_s$
- $y_1 x_2 x_3 + x_1 y_2 x_3 + x_1 x_2 x_3, \dots$
- $\dots$
- $y_1 x_2 \dots x_s + x_1 y_2 \dots y_s + \dots + x_1 \dots x_{s-1} y_s$

**Demostración.** Consideremos la siguiente sucesión de coeficientes

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad} \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad} \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad} \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad} 0$$

la cual induce la siguiente sucesión

$$\dots \longrightarrow H^n(G; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(G; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(G; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{n+1}(G; \mathbb{Z}) \longrightarrow \dots$$

Si  $y_i = x_i^2$  entonces un elemento de  $P(x_1, x_2, \dots, x_s)$  es de la

forma  $x_1^{2\epsilon_1 + \epsilon_1} \dots x_s^{2\epsilon_s + \epsilon_s} = x_1^{\epsilon_1} \dots x_s^{\epsilon_s} y_1^{\alpha_1} \dots y_s^{\alpha_s}$

con  $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ .

Procediendo como en 3.2 se obtiene el resultado. ///

$\theta^1 = 0$ . Por lo tanto, si  $\theta x_1 = y_1$  entonces  $\theta^2 x_1 = \theta y_1 = 0$ . Por lo tanto  $\theta y_1 = 0$ . De este hecho y de la proposición anterior tenemos que  $\theta(x_1^{\xi_1} \dots x_{s-1}^{\xi_{s-1}} y_1^{\alpha_1} \dots y_s^{\alpha_s}) = \theta(x_1^{\xi_1} \dots x_{s-1}^{\xi_{s-1}} y_1^{\alpha_1} \dots y_s^{\alpha_s}) + (-1)^{\xi_1} x_1^{\xi_1} \dots \dots \dots x_s^{\xi_s} \theta(y_1^{\alpha_1} \dots y_s^{\alpha_s}) = \theta(x_1^{\xi_1} \dots x_{s-1}^{\xi_{s-1}}) (\theta x_1)^{\xi_1} \dots \dots \dots \theta(x_s^{\xi_s})^{\xi_s} (\xi_i = 1, 0)$

Por lo tanto,  $\text{Im } \theta (= \text{Im } \theta^2)$  está generada por

- $\theta(x_1), \dots, \theta(x_s)$
- $\theta(x_1 x_2), \dots, \theta(x_{s-1} x_s)$
- $\theta(x_1 x_2 x_3), \dots$
- $\dots$
- $\theta(x_1 x_2 \dots x_s)$

Como  $\theta x_1 = y_1$ , el teorema está probado. ///

**3.5 Teorema.**  $\theta : H^*(Z_2^s; Z) \longrightarrow P(x_1, \dots, x_s)$  es un monomorfismo y la imagen de  $\theta$  está generada por los polinomios  $y_1, \dots, y_s$  ( $y_i = x_i^2$ )

- $y_1 x_2 + x_1 y_2, \dots, y_{s-1} y_s$
- $y_1 x_2 x_3 + x_1 y_2 x_3 + x_1 x_2 x_3, \dots$
- $\dots$
- $y_1 x_2 \dots x_s + x_1 y_2 \dots y_s + \dots + x_1 \dots x_{s-1} y_s$

**Demostración.** Consideremos la siguiente sucesión de coeficientes

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\quad} Z \xrightarrow{\quad} Z \xrightarrow{\quad} Z \xrightarrow{\quad} 0$$

la cual induce la siguiente sucesión

$$\dots \longrightarrow H^n(G; Z) \longrightarrow H^n(G; Z) \longrightarrow H^n(G; Z_p) \longrightarrow H^{n+1}(G; Z) \longrightarrow \dots$$

Si  $y_i = x_i^2$  entonces un elemento de  $P(x_1, x_2, \dots, x_s)$  es de la

$$\text{forma } x_1^{2\alpha_1 + \xi_1} \dots x_s^{2\alpha_s + \xi_s} = x_1^{\xi_1} \dots x_s^{\xi_s} y_1^{\alpha_1} \dots y_s^{\alpha_s}$$

con  $\xi_i \in \{0, 1\}$ .

Procediendo como en 3.2 se obtiene el resultado. ///

Nuestro propósito es calcular  $H^*(E; Z)$  y  $H^*(A \times D; Z)$ . Si recordamos que  $B = B_1 \times B_2$  donde  $B_1$  es el grupo generado por (12) y  $B_2$  el grupo generado por (34), luego  $B = Z_2 \times Z_2$ . Y como  $A \times D$  está generado por (13)(24), el teorema anterior nos da la información que necesitamos cuando  $n = 2$ . Por tal motivo lo destacamos.

3.6 Corolario. Sea  $P(X, Y) = Z_2[X, Y]$  el anillo de polinomios en  $X, Y$  con  $gr(X) = gr(Y) = 1$ . Entonces,  $H(Z_2^2; Z) = Z_2[x, y, z] \subset Z_2[X, Y]$  con  $x = X^2$ ,  $y = Y^2$ ,  $z = X^2Y + XY^2$ .

Ahora, es claro que,  $H^*(B; Z) = Z_2[x, y, z] \subset Z_2[X, Y]$  con  $x = X^2$ ,  $y = Y^2$ ,  $z = X^2Y + XY^2$ . Y de la proposición 3.3 la acción de  $\sigma$  en  $H^*(B; Z)$  está dada por

$$\sigma x = y \qquad \sigma y = x \qquad \sigma z = z$$

Por otra parte,  $H^*(A \times D; Z) = Z_2[u, v, w] \subset Z_2[U, V]$  con  $u = U^2$ ,  $v = V^2$ ,  $w = U^2V + UV^2$ . Además la acción de  $\delta$  en  $H^*(A \times D; Z)$  es

$$\delta' u = v \qquad \delta' v = u \qquad \delta' w = w$$

#### I.4 EL ALGEBRA $H^*(\Sigma_{4,2}; Z)$

Determinaremos aquí  $H^*(\Sigma_{4,2}; Z)$  como grupo utilizando nuestro conocimiento de  $H^*(B; Z)$ ,  $H^*(A \times D; Z)$  y  $H^*(C; Z)$ , luego obtendremos la estructura de módulo y finalmente la de álgebra.

Sea  $F$  un subgrupo de un grupo finito  $G$ ,  $W$  su grupo de Weyl.

Denotaremos con  $H^q(F; \Lambda)^W$  al subgrupo del grupo de cohomología de  $F$  con coeficientes en un anillo  $\Lambda$ , cuyos elementos son invariantes bajo la acción de  $W$ .

4.7 Lema. Sea  $s = [G:F]$ . Si  $rH^q(F; \Lambda) = 0$  entonces  $rsH^q(G; \Lambda) = 0$

Demostración. En  $H^q(G; \Lambda) \xrightarrow{f} H^q(F; \Lambda)$ , ( $f$  es el homomorfismo inducido por la inclusión de  $F$  en  $G$  y  $t$  la transferencia) tenemos que  $\text{Im } f \subset H^q(F; \Lambda)$ . Como  $tf(u) = su$ , se tiene  $0 = tf(ru) = sru$ . ///

4.8 Lema. Para  $q$  impar  $2H^q(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z}) = 0$ .

Demostración. Es inmediata del lema 4.7 con  $G = \Sigma_{4,2}$  y  $F = C$ .

Como  $H^q(F; \mathbb{Z}) = 0$ , tomando  $r = 1$  se obtiene el resultado pues tenemos que  $[\Sigma_{4,2}; \mathbb{C}] = 2$ . ///

4.9 Corolario.  $p^s H^q(\Sigma_{p,p}; \mathbb{Z}) = 0$ .

Demostración. La demostración es por inducción.

Para  $s = 1$ , tenemos que  $\Sigma_{p,p} = \mathbb{Z}_p$  luego  $pH^q(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}) = 0$ .

Supongamos que es cierto para  $s$ . Usando las fórmulas de Künneth obtenemos  $p^s H^q((\Sigma_{p,p})^n; \mathbb{Z}) = 0$  para toda  $n$ . En particular para  $n=p$ .

Verificamos ahora que se cumple para  $s = s + 1$ .

Como  $\Sigma_{p, s+1, p} = \mathbb{Z}_p \times (\Sigma_{p,p})^p$  basta que en el lema 4.7 tomemos  $G = \Sigma_{p, s+1, p}$ ,  $F = (\Sigma_{p,p})^p$  y  $r = p^s$  para que el corolario se cumpla. ///

4.10 Corolario.  $4H^q(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z}) = 0$ .

Demostración. Es inmediata del corolario anterior con  $p=2$  y  $s=2$ . ///

De esta manera en  $H^q(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$  los elementos son de orden 0, 2 y 4. Para los grados impares no existen elementos de orden 4, más adelante se prueba que en los grados pares de la forma  $4n+2$  tampoco los hay.

**4.11 Proposición.** En  $H^q(\Sigma_{4,2}; Z) \xrightarrow{f} H^q(B; Z) \xrightarrow{k} H^q(D; Z)$  se tiene que  $u \in H^q(\Sigma_{4,2}; Z)$  es de orden 4 si y sólo si,  $kf(u) \neq 0$ .

**Demostración.** Primero recordemos que  $H^*(D; Z) = Z_2 \oplus T$  con  $gr(T) = 2$ . (ver 3.5). Ahora como  $f(u)$  es invariante bajo  $\sigma$ ,  $f(u)$  es de la forma  $f(u) = (x+y)Q + a(xy)^n$  (ver [D]). Con  $Q$  un polinomio en  $x, y, xy$ . Además si  $a = 0$  se tiene que

$$\begin{aligned} f(u) &= (x+y)Q = xQ + yQ = xQ + \sigma(x)Q \\ &= xQ + \sigma(x)\sigma(Q) = (1 + \sigma)(xQ) \end{aligned}$$

Probaremos ahora que  $1 + \sigma = ft$ .

Para ello necesitamos un par de lemas técnicos.

**Lema 1.** Si  $F$  es un subgrupo propio de un grupo abeliano  $p$ -elemental  $G$ , entonces  $t: H^*(F; A) \rightarrow H^*(G; A)$  es cero.

**Demostración.** Sea  $j: F \rightarrow G$  la inclusión. Entonces existe un homomorfismo  $\pi: G \rightarrow F$  tal que  $\pi j$  es la identidad. En cohomología  $j^*$  es la identidad, luego  $j^*$  es suprayectivo. Como  $tj^* = p^S$  y  $pu = 0$  se tiene que  $t = 0$ .

**Lema 2.** Con las notaciones del diagrama (\*) sección 2 se tiene:

$$\begin{aligned} ft &= 1 + \sigma & gt &= 0 \\ gt' &= 1 + \sigma' & ft' &= 0 \end{aligned}$$

**Demostración.** Si  $L$  y  $M$  son subgrupos de un grupo finito  $G$  y  $G = \cup LxM$  con  $x \in X$  es una descomposición en clases dobles se tiene:

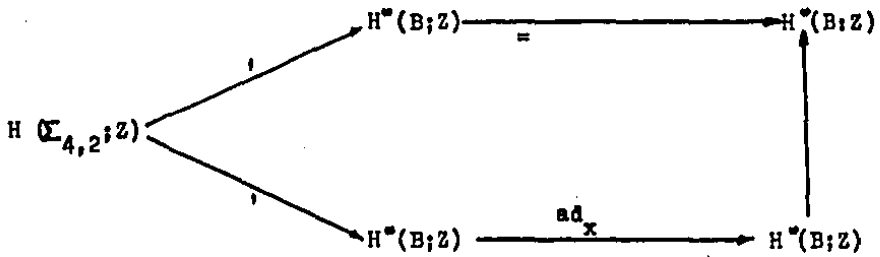
$$it(u) = \sum_x t_x i_{ad_x}(u)$$

$$\begin{array}{ccc} H^*(L; A) & \xrightarrow{t_x} & H^*(xMx^{-1} \cap L; A) \\ \uparrow i & & \uparrow i_x \\ H^*(G; A) & & \\ \downarrow t & & \\ H^*(M; A) & \xrightarrow{ad_x} & H^*(xMx^{-1} \cap L; A) \end{array}$$



en donde  $i, i_x$  son los homomorfismos inducidos por las inclusiones respectivas,  $t$  y  $t_x$  son los homomorfismos de transferencia y  $ad_x$  son los homomorfismos inducidos por los automorfismos interiores determinados por  $x$ .

Para demostrar que  $ft = 1 + \mathcal{G}$  basta ver que  $\Sigma_{4,2} = BUaB$  es la descomposición de  $\Sigma_{4,2}$  en  $(B,B)$ -clases por lo que  $X = \{1, a\}$ .

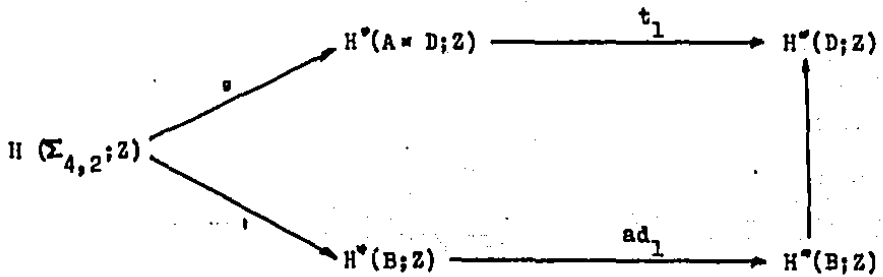


y como  $ad_a = \mathcal{G}$  resulta que  $ft = 1 + \mathcal{G}$ .

Para demostrar que  $gt = 0$ , consideramos la descomposición

$$\Sigma_{4,2} = B \cdot 1 \cdot A * D \quad x = \{1\}$$

y el diagrama:



luego  $gt = t_1 i_1$  y como  $t_1 = 0$  según el lema anterior  $gt = 0$ ,  $gt' = 1 + \mathcal{G}'$  y  $ft' = 0$  se demuestran de manera análoga.

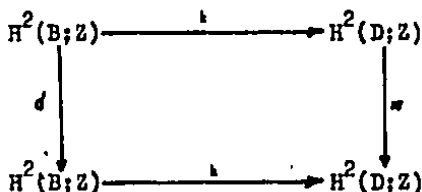
Regresando a la demostración de la proposición tenemos que  $f(u) = (1 + \sigma)(xQ)$

y  $2u = tf(u) = tft(xQ) = 2t(xQ) = t(2xQ) = 0.$

Por lo tanto si  $u$  es de orden 4 y  $u \neq 0$  entonces

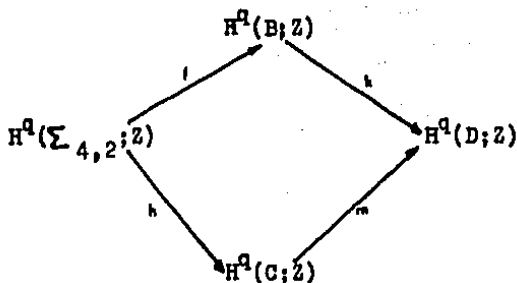
$$kf(u) = k((xy)^n) = T^{2n} \neq 0.$$

En efecto, consideremos el diagrama



Si  $k(x) = 0$  entonces  $k(y) = k(\sigma x) = \sigma k(x) = 0$ . Luego  $k(ax+by) = 0$  y  $k$  no sería suprayectivo. Luego  $k(x) = T$  y  $k(y) = T$ .

Por otra parte si  $kf(u) \neq 0$ , en el siguiente diagrama  $mh(u) \neq 0$



Entonces  $q$  es par, digamos  $q = 2n$  y como  $\text{Ker } m = \{0, 2s^n\}$  resulta que  $h(u) = s^n$  ó  $h(u) = -s^n$  que son de orden 4, por lo que también  $u$  es de orden 4. ///

4.12 Proposición.  $2H^{4n+2}(\Sigma_{4,2}; Z) = 0.$

Demostración. Por la proposición 4.8 basta que para toda  $u \in H^{4n+2}(\Sigma_{4,2}; Z)$  se tiene que  $kf(u) = 0$ . Pero esto se sigue de que en este grado  $f(u) = (x + y)Q$ . ///

4.13 Proposición. Sea  $h: H^q(\Sigma_{4,2}; Z) \longrightarrow H^q(G; Z)$ . Si  $h(2u) = 0$  entonces  $2u = 0$ .

Demostración. Si  $q \neq 4n$  entonces  $2u = 0$ .

Si  $q = 4n$ ,  $H^q(G; Z) = \{0, s^{2n}, 2s^{2n}, 3s^{2n}\}$ ,  $H^q(D; Z) = \{0, T^{2n}\}$  además  $m(s^{2n}) = T^{2n}$ .

Entonces si  $2h(u) = 0$ ,  $h(u) = 0$  o  $2s^r = 0$ . Luego  $mh(u) = 0$  y  $kf(u) = 0$ . Por la proposición 4.11  $2u = 0$ . //

4.14 Proposición. En  $h: H^q(\Sigma_{4,2}; Z) \longrightarrow H^q(G; Z)$  si un elemento  $u \in H^q(\Sigma_{4,2}; Z)$  es de orden 4, entonces  $h(u)$  genera a  $H^q(G; Z)$ .

Demostración. De la proposición 4.11,  $kf(u) \neq 0$ , por tanto  $mh(u) \neq 0$  y  $h(u) \notin \text{Ker } m$ . Luego  $h(u)$  es un generador. //

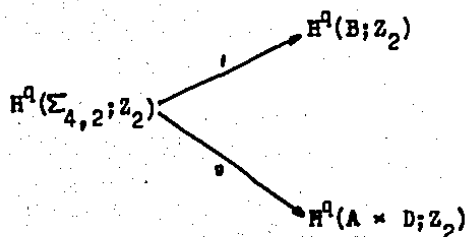
4.15 Proposición. Si  $u, v$  son elementos de orden 4 de  $H^q(\Sigma_{4,2}; Z)$  entonces  $2u = 2v$ .

Demostración. Según la proposición 4.11 bastaría ver que  $h(2(u-v))$  es igual a cero.

Por 4.12 tanto  $h(u)$  como  $h(v)$  generan a  $H^q(G; Z)$ . Que para  $q = 4n$  es un grupo cíclico de orden 4. Por lo tanto  $2h(u) = 2h(v)$ . //

Para la cohomología de grupos finitos con coeficientes módulo  $p$  existe un resultado de Quillen y Venkov [Q-V] :

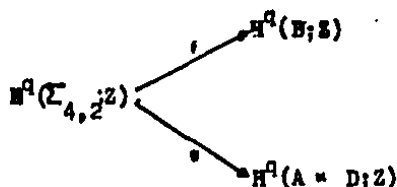
Si un elemento  $u \in H^q(G; \mathbb{Z}_p)$  se restringe a cero en todo  $p$ -subgrupo abeliano máximo  $p$ -elemental de  $G$ , entonces  $u$  es nilpotente. Si aplicamos esto a  $\Sigma_{4,2}$  se tiene:



y  $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = 0$

Si pasamos a coeficientes enteros tenemos:

4.16 Proposición. En



todo elemento  $u$  de  $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g$  es de forma  $u=2v$ .

En la sección 2 señalamos que  $B$ ,  $A * D$ , y  $C$  constituyen una familia detectante de la cohomología de  $\Sigma_{4,2}$ , damos ahora la demostración

4.17 Teorema. Si  $f$ ,  $g$ , y  $h$  son los homomorfismos inducidos en cohomología con coeficientes enteros por las inclusiones en  $\Sigma_{4,2}$  de sus grupos abelianos máximos  $B$ ,  $A * D$ , y  $C$  entonces  $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g \cap \text{Ker } h = 0$ .

Demostración. Se sigue inmediatamente de las proposiciones 4.11 y 4.16 ///

4.18 Proposición. El grupo  $\mathbb{H}^{4n}(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$  tiene elementos de orden 4

Demostración. Sea  $u = t((xy)^n)$ ,  $f(u) = ft((xy)^n) = (1+t)((xy)^n) = 0$

$$g(u) = gt((xy)^n) \text{ pero } gt = 0 \quad g(u) = 0$$

$$h(u) = ht((xy)^n) = \tau k((xy)^n) = \tau(T^{2n}) = 2s^{2n} \neq 0$$

en efecto,  $\tau(T^r) = s^r$  pues

$$\mathbb{H}^{2r}(C; \mathbb{Z}) = \{0, s^r, 2s^r, 3s^r\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}^{2r}(D; \mathbb{Z}) = \{0, T^{2r}\}$$

y  $\tau m(s^r) = 2s^r \neq 0$ , entonces  $m(s^r) \neq 0$  por lo tanto  $\tau(T^r) = 2s^r$ .

Ahora de la proposición 4.16,  $u$  es de la forma  $u=2v \neq 0$ . Luego  $u$  es de orden 4. ///

Tenemos ya todo lo necesario para dar los grupos de cohomología de  $H^q(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$

4.19 Teorema.

$$H^q(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2^r & q \neq 4n \\ \mathbb{Z}_2^{2n} \times \mathbb{Z}_4 & q = 4n > 0 \end{cases}$$

Demostración. Para  $q$  impar la demostración nos la da el lema 4.8, pues  $2H^q(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z}) = 0$  entonces  $|H^q(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})| = 2^r$ . Por lo tanto  $H^q(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2^r$ .

Para  $q = 4n + 2$  la proposición 4.9 y  $q = 4n$  es consecuencia de las proposiciones 4.15 y 4.18. //

Daremos ahora la estructura de módulo de  $H^*(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$

4.20 Teorema.

$$H^q(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{2n} \times \mathbb{Z}_4 & q=4n \quad 0 \\ \mathbb{Z}_2^{2n} & q=4n + 1 \\ \mathbb{Z}_2^{2n+2} & q=4n + 2 \\ \mathbb{Z}_2^{2n+1} & q=4n + 3 \end{cases}$$

Demostración.

Recordemos que  $H^*(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2^{q+1}$ . Véase Cartan - Eilenberg [C - E]

$$\dots \rightarrow H^n(\Sigma_{4,2}; Z) \rightarrow H^n(\Sigma_{4,2}; Z) \rightarrow H^n(\Sigma_{4,2}; Z) \rightarrow H^{n+1}(\Sigma_{4,2}; Z) \rightarrow \dots$$

La demostración es por inducción:

Para  $q=0$  y  $q=1$ ,  $H^0(\Sigma_{4,2}; Z) = Z$  y  $H^1(\Sigma_{4,2}; Z) = 0$  (ver [R]). Hagamos ahora, caso por caso.

a) caso  $q=4n$ ; Consideremos la sucesión exacta siguiente

$$\dots \rightarrow H^{4n-1}(\Sigma_{4,2}; Z) \xrightarrow{\alpha} H^{4n-1}(\Sigma_{4,2}; Z) \xrightarrow{\pi} H^{4n-1}(\Sigma_{4,2}; Z_2) \xrightarrow{\delta} H^{4n}(\Sigma_{4,2}; Z) \rightarrow \dots$$

Por hipótesis de inducción  $H^{4n-1}(\Sigma_{4,2}; Z) = Z_2^{2n-1}$ . Luego

$\text{Im } \alpha_{4n-1} = 0 = \text{Ker } \pi_{4n-1}$ , entonces  $\text{Im } \alpha_{4n-1} = Z_2^{2n-1} = \text{ker } \delta_{4n-1}$

Así  $\text{Im } \delta = Z_2^{4n} / Z_2^{2n-1} = Z_2^{2n+1}$ , pues  $H^{4n-1}(\Sigma_{4,2}; Z_2) = Z_2^{4n}$ .

Del teorema 4.14  $H^{4n}(\Sigma_{4,2}; Z) = Z_2^r \times Z_4$  y  $\text{ker } \alpha_{4n} = Z_2^{r+1} = \text{Im } \delta$

entonces  $Z_2^{2n+1} = Z_2^{r+1}$ . Por lo tanto  $r=2n$ , de donde

$$H^{4n}(\Sigma_{4,2}; Z) = Z_2^{2n} \times Z_4$$

b) caso  $q=4n+1$ . En la sucesión exacta

$$\dots \rightarrow H^{4n}(\Sigma_{4,2}; Z) \xrightarrow{\alpha} H^{4n}(\Sigma_{4,2}; Z) \xrightarrow{\pi} H^{4n}(\Sigma_{4,2}; Z_2) \xrightarrow{\delta} H^{4n+1}(\Sigma_{4,2}; Z) \rightarrow \dots$$

$H^{4n}(\Sigma_{4,2}; Z) = Z_2^{2n} \times Z_4$ .  $\text{Im } \alpha_{4n} = Z_2 = \text{ker } \pi_{4n}$ . Luego

$\text{Im } \pi_{4n} = Z_2^{2n} \times Z_4 / Z_2 = Z_2^{2n+1} = \text{ker } \delta$ .

De donde  $\text{Im } \delta = Z_2^{4n+1} / Z_2^{2n+1} = Z_2^{2n}$ .

Recordemos que  $H^{4n}(\Sigma_{4,2}; Z_2) = Z_2^{4n+1}$ .

Como  $H^{4n+1}(\Sigma_{4,2}; Z) = Z_2^8$  entonces  $\text{ker } \alpha_{4n+1} = H^{4n+1}$ .

Por lo tanto  $\text{Im } \delta = H^{4n+1}(\Sigma_{4,2}; Z)$ , luego  $H^{4n+1}(\Sigma_{4,2}; Z) = Z_2^{2n+1}$ .

c) caso  $q = 4n + 2$ . En la sucesión exacta

$$\dots \rightarrow H^{4n+1}(\Sigma_{4,2}; Z) \xrightarrow{\alpha} H^{4n+1}(\Sigma_{4,2}; Z) \xrightarrow{\beta} H^{4n+1}(\Sigma_{4,2}; Z) \xrightarrow{\delta} H^{4n+2}(\Sigma_{4,2}; Z) \rightarrow \dots$$

$\text{Im } \alpha_{4n+1} = 0 = \ker \beta_{4n+1}$ , entonces  $\text{Im } \beta_{4n+1} = Z_2^{2n} = \ker \delta_{4n+1}$ .

Así  $\text{Im } \delta = Z_2^{4n+2} / Z_2^{2n} = Z_2^{2n+2}$  pues  $H^{4n+1}(\Sigma_{4,2}; Z) = Z_2^{4n+2}$ .

Del teorema 4.5 tenemos,  $H^{4n+2}(\Sigma_{4,2}; Z) = Z_2^r$ , de donde  $\ker \alpha_{4n+2} =$

$$Z_2^r = \text{Im } \delta$$

Por lo tanto,  $r = 2n+2$ .  $H^{4n+2}(\Sigma_{4,2}; Z) = Z_2^{2n+2}$ .

d) caso  $q = 4n+3$ . En la sucesión exacta

$$\rightarrow H^{4n+2}(\Sigma_{4,2}; Z) \xrightarrow{\alpha} H^{4n+2}(\Sigma_{4,2}; Z) \xrightarrow{\beta} H^{4n+2}(\Sigma_{4,2}; Z) \xrightarrow{\delta} H^{4n+3}(\Sigma_{4,2}; Z) \rightarrow \dots$$

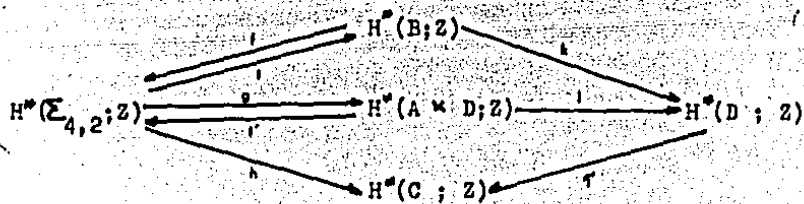
$\text{Im } \alpha_{4n+2} = 0 = \ker \beta_{4n+2}$ . Entonces  $\text{Im } \beta_{4n+2} = Z_2^{2n+2} = \ker \delta_{4n+2}$ .

Tenemos así que  $\text{Im } \delta = Z_2^{4n+3} / Z_2^{2n+2} = Z_2^{2n+1}$  pues  $H^{4n+2}(\Sigma_{4,2}; Z) = Z_2^{4n+3}$ .

Ahora como  $H^{4n+3}(\Sigma_{4,2}; Z) = Z_2^r$ , resulta que  $\ker \alpha_{4n+3} = \text{Im } \delta$ .

Entonces  $r = 2n+1$  y  $H^{4n+3}(\Sigma_{4,2}; Z) = Z_2^{2n+1}$ . //

Ahora que conocemos  $H^*(\Sigma_{4,2}; Z)$  como módulo graduado, daremos sus generadores y relaciones como álgebra graduada. Trabajaremos con el sig. diagrama



4.21 Teorema.  $H^*(\Sigma_{4,2}; Z)$  es la  $Z$ -álgebra graduada con cuatro generadores  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , con  $gr(\alpha) = gr(\beta) = 2$ ,  $gr(\gamma) = 3$ ,  $gr(\delta) = 4$  sujeta a las relaciones  $2\alpha = 2\beta = 2\gamma = 0$ ,  $\alpha\beta = 0$ ,  $4\delta = 0$  y  $(\alpha + \beta)\delta = \delta^2$ .

Demostración. La prueba es por inducción, haremos los grados 0, 1, 2, 3, 4, y  $4n$ .

$$H^0(\Sigma_{4,2}; Z) = Z$$

$$H^1(\Sigma_{4,2}; Z) = 0$$

Para el grado 2. En el diagrama (\*) se sea  $\alpha = tx$  y  $\beta = t'u$ .

$\{\alpha, \beta\}$  es una base de  $H^2(\Sigma_{4,2}; Z)$  y  $2\alpha = 2\beta = \alpha\beta = 0$ . Además

$$(f * g * h)(\alpha) = (x+y, 0, 2s)$$

$$(f * g * h)(\beta) = (0, u+v, 2s)$$

En efecto de la estructura de módulo de  $H^2(\Sigma_{4,2}; Z)$  sabemos que  $2\alpha = 2\beta = 0$ . Como  $\alpha = tx$  y  $ft = 1 + \sigma$ ,  $f(\alpha) = ftx = x + \sigma x$  y como  $\sigma x = y$   $f(\alpha) = x + y$ .

Por otra parte  $g(\alpha) = g(tx)$  y  $gt = 0$   $g(\alpha) = 0$ . Dá  $gt' = 1 + \sigma'$  y  $ft' = 0$  resulta que  $f(\beta) = 0$  y  $g(\beta) = u + v$ . Además tenemos que  $h(\alpha) = ht(x) = \sigma k(x) = \tau(T) = 2s$ . Por lo tanto

$$h(\beta) = 2s.$$

Ahora,  $(f * g * h)(\alpha\beta) = (0, 0, 0)$  luego  $\alpha\beta = 0$ . Por otra parte si

$$a\alpha + b\beta = 0 \quad a, b \in \{0, 1\}$$

y  $(f * g)(a\alpha + b\beta) = (a(x+y), b(u+v)) = (0, 0)$  y  $a = b = 0$ .

Por lo tanto  $\{\alpha, \beta\}$  es una base.

Para el grado 3, sabemos que  $H^3(\Sigma_{4,2}; Z) = H^3(B; Z) = Z_2$ , además

$H^3(A * D; Z) = Z_2$  y  $H^3(C; Z) = 0$  (véase sección 3). Si  $\gamma \in H^3(\Sigma_{4,2}; Z)$

es el generador, entonces  $f(\gamma) \in \{z, 0\}$ ,  $g(\gamma) \in \{w, 0\}$  y  $h(\gamma) = 0$ .

Ahora como  $\gamma \neq 0$ ,  $(f * g)(\gamma) = (0, 0)$ . Supongamos que  $f(\gamma) = z$ .

Y consideremos el automorfismo de  $\Sigma_{4,2}$  que transforma B en  $A * D$ .



Dado que  $H^3(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ , en cohomología ese automorfismo induce la identidad. Luego si  $f(\xi) \neq 0$  entonces  $g(\xi) \neq 0$ . De donde  $g(\xi) = w$ . Por lo tanto  $H^3(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$  tiene un solo generador  $\delta$  y  $2\delta = 0$ . Además,  $(f \circ g \circ h)(\delta) = (z, w, 0)$ .

Para el grado 4. Sea  $\xi \in H^4(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$  de orden 4.

Tal que  $(f \circ g)(\xi) = (a(x^2+y^2) + bxy, c(u^2+v^2) + d(uv))$

El elemento  $\xi = \delta + a\alpha^2 + c\beta^2$ , que también es de orden 4 es tal que  $(f \circ g)(\xi) = (a(x^2+y^2) + bxy, c(u^2+v^2) + d(uv)) + (a(x^2+y^2), 0) + (0, c(u^2+v^2))$   
 $= (2a(x^2+y^2) + bxy, 2c(u^2+v^2) + d(uv)) = (bxy, d(uv))$

y por ser de orden 4, de la proposición 4.8 sabemos que  $h(\xi) \neq 0$ .

Por lo tanto  $b = d = 1$  y  $h(\xi) = \pm \delta^4$

Sea  $\delta$  tal que  $h(\delta) = \delta^2$  entonces, existe  $\xi$  de orden 4 tal que  $\{\alpha^2, \beta^2, \delta\}$  es una base de  $H^4(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$ . Y  $(f \circ g \circ h)(\delta) = (xy, uv, s^2)$  además  $\delta^2 = (\alpha + \beta)\delta$ . En efecto, supongamos que

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\delta = 0,$$

entonces  $(f \circ g \circ h)(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\delta) = (a(x^2+y^2) + cxy, b(u^2+v^2) + cs^2) = (0, 0, 0)$ .

Luego  $a=b=c=0$ . Y por lo tanto  $\{\alpha^2, \beta^2, \delta\}$  es linealmente independiente ya que  $H^4(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ . Además

$$(f \circ g \circ h)((\alpha + \beta)\delta - \delta^2) = ((x+y)xy - z^2, (u+v)uv - w^2, 0) = (0, 0, 0)$$

Hagamos ahora el caso  $4n$ .

Supongamos que

$$f = a_0 \alpha^{2n} + a_1 \alpha^{2n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha^2 \delta^{n-1} + b_0 \beta^{2n} + \dots + b_{n-1} \beta^2 \delta^{n-1} + c \delta^n = 0.$$

Tenemos que

$$0 = f(\xi) = a_0 (x+y)^{2n} + a_1 (x+y)^{2n-2} (xy) + \dots + a_{n-1} (x+y)^2 (xy)^{n-1} + c (xy)^n$$

$$0 = g(\xi) = b_0 (u+v)^{2n} + b_1 (u+v)^{2n-2} (uv) + \dots + b_{n-1} (u+v)^2 (uv)^{n-1} + c (uv)^n$$

$$0 = h(\xi)$$

Luego  $a_0 = b_0 = 0$ . Cancelemos  $xy$  en la primera igualdad y  $uv$  en la segunda.

$$0 = a_1 \alpha^{2n-2} + a_2 \alpha^{2n-4} \delta + \dots + a_{n-1} \alpha^2 \delta^{n-2} + b_1 \beta^{2n-2} + b_2 \beta^{2n-4} + \dots + b_{n-1} \beta^2 \delta^{n-2} + c \delta^{n-1}.$$

Por inducción todos los coeficientes restantes son cero. ///

Esta misma álgebra la calculó Evens, L. [EL] obteniendo

$$H^*(\Sigma_4, \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[\alpha, \beta, \gamma, \xi_1]}{(2\alpha = 2\beta = 2\gamma = 4\xi_1, \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \beta\xi_1)}$$

El último paso para poder demostrar el teorema 1.1 es dar la identificación del álgebra  $H^*(\Sigma_4; \mathbb{Z})_2$  con alguna subálgebra del álgebra entera del subgrupo de Sylow  $\Sigma_4$ .

### 1.5 PASO DEL GRUPO DE SYLOW AL SIMETRICO

Considera el grupo de Weyl  $W = W(A \times D; \Sigma_4) = GL_2(\mathbb{Z}_2)$  que esta generado por

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La acción de  $W$  en  $H^*(A \times D; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2[u, v, w]$  es

$$\begin{aligned} \delta u &= v & \gamma u &= u \\ \delta v &= u & \gamma v &= u + v \\ \delta w &= w & \gamma w &= w \end{aligned}$$

5.22 Proposición.  $Z_2[u, v] \stackrel{W}{=} Z_2[u^2+v^2 + uv, (u+v)uv]$ .

Demostración.

Sea  $R$  un polinomio invariante bajo  $W$ . Por serlo con respecto a  $\sigma$ ,  $R$  es un polinomio en  $u+v, uv$  (ver Dickson [D1]). La demostración es por inducción. Supongamos que el grado de  $R$  es de la forma  $4n$  y recordemos que  $gr(u)=gr(v)=2$ .

$$R = a(u+v)^{2n} + (u+v)uvQ + bu^n v^n \quad \text{con } gr(Q) = 4n-6.$$

Como  $(\sigma(u+v))^{2n} = (\sigma u + \sigma v)^{2n} = (u-u+v)^{2n} = (2u+v)^{2n} = v^{2n}$  tenemos

$$\sigma R = av^{2n} + (u+v)uv\sigma Q + bu^n(u+v)^n. \text{ Si } \sigma R = R, a=b \text{ por lo tanto}$$

$a((u+v)^2 + u^n v^n) + (u+v)uvQ = R$ , y ya que el polinomio:

$$a((u+v)^2 + uv)^n = a((u+v)^{2n} + u^n v^n) + (u+v)uvP, \quad gr(P) = 4n-6$$

es invariante, por hipótesis de inducción también lo es:

$$\begin{aligned} (u+v)uv(P+Q) &= \sigma((u+v)uv(P+Q)) \\ &= (u+v)uv\sigma(P+Q), \text{ y } P+Q \text{ resulta invariante.} \end{aligned}$$

Podemos suponer ahora que  $P+Q$  es un polinomio en  $u^2+v^2=uv, (u+v)uv$  y entonces  $R \in Z_2[u^2+v^2+uv, (u+v)uv]$ .

Si  $R$  es grado  $4n+2$ ,  $R$  es de la forma

$$R = a(u+v)^{2n+1} + (u+v)uvQ \quad \text{con } gr(Q) = 4n-2$$

y entonces,  $\sigma R = av^{2n+1} + (u+v)uvQ$ ; de  $R = \sigma R$ ,  $a=0$  y entonces

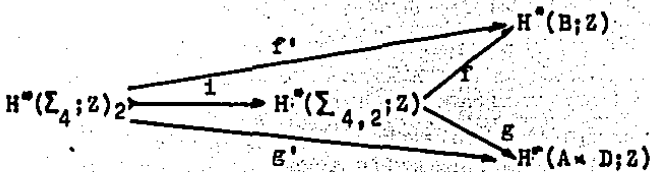
$R = (u+v)uvQ$  y  $Q$  resulta invariante. Por inducción como antes obtenemos el resultado. ///

5.23 Colorario.  $H^*(A=D; Z) \stackrel{W}{=} Z_2[w, u^2+v^2+uv]$ .

Denotaremos  $H^*(A=D; Z) \stackrel{W}{=} \Lambda$ , y con  $\Gamma$  a la subálgebra de  $H^*(Z_4, Z)$  generada por  $\alpha, \delta, \beta^2 + \delta$

Como  $\alpha(\beta^2 + \delta)^s = \alpha\delta^s, \alpha^r \delta^s \in \Gamma$  si  $r \neq 0$ , pues cancelando  $\alpha, (\beta^2 + \delta)^s = \delta^s$  y  $\delta^s \in \Gamma$ .

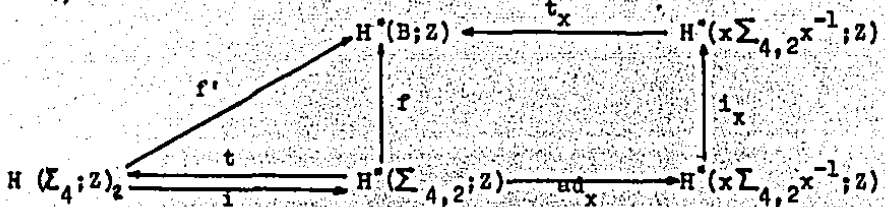
Trabajaremos con el siguiente diagrama



$f, g, f', g'$  son los homomorfismos inducidos en cohomología por las inclusiones correspondientes.

5.24 Proposición.  $\text{Im } f' = \text{Im } f$ .

Demostración. Sea  $\Sigma_4 = \sum_{4,2} x \cdot B$  ( $x \in X$ ), la descomposición en  $(\Sigma_{4,2}; B)$ -clases y considere el diagrama



$\text{Im } t = H^*(\Sigma_4; Z)_2$ . Por otra parte  $\text{Ker } f' \supset H^*(\Sigma_4; Z)$  luego

$$\text{Im } f' = \text{Im } f't$$

Ahora, si  $x \sum_{4,2} x^{-1} \cap B \neq B$  entonces  $t_x = 0$ . Por lo tanto tenemos

$$f't = \sum_x t_x i_x ad_x \quad (x \in X)$$

solo es diferente de cero si  $x^{-1} Bx \subset \sum_{4,2}$ . Para que esto pase  $x \in \sum_{4,2}$ .

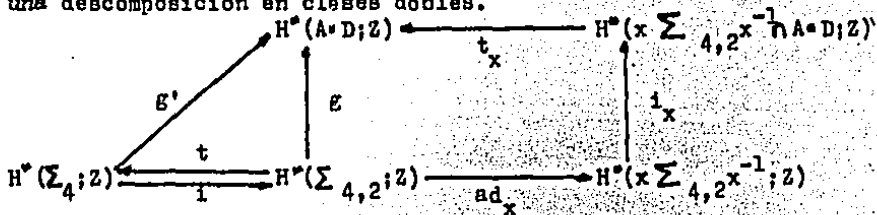
Ahora como  $\sum_{4,2} = \sum_{4,2} \cdot 1 \cdot B$  es una de las clases dobles tenemos

$$f't = t_1 i_1 ad_1 \quad \text{donde } t_1 = 1, i_1 = f, ad_1 = 1$$

por lo tanto  $f't = f$ .

5.25 Proposición.  $\text{Im } g' = \text{Im } g \cap H^*(A \times D; \mathbb{Z})^W$ .

Demostración. Sea  $s = (123)$ .  $\Sigma_4 = (A \times D) \times \Sigma_{4,2}$ ,  $x \in X = \{1, s, s^2\}$   
una descomposición en clases dobles.



De este diagrama y de la relación:

$$g't = g + \text{gad}_g + \text{gad}_g^2 = (1 + \sigma + \sigma^2)g.$$

Resulta claro que  $\text{Im } g' \subset \text{Im } g \cap H^*(A \times D; \mathbb{Z})^W$ . Por otra parte sea  $v \in \text{Im } g \cap H^*(A \times D; \mathbb{Z})^W$ .  $W(A \times D; \mathbb{Z}) = \{1, \sigma, \sigma^2\}$  pues  $\sigma^2 = \tau$  y  $v = g(u)$ .

Como  $g'tu = (1 + \sigma + \sigma^2)g(u) = 3g(u) = g(u) = v$ . ( $g't = 3$ )

Por lo tanto  $v \in \text{Im } g'$  y se tiene la doble contención. //

5.26 Corolario.  $\text{Im } g' = \Lambda$ .

Demostración. Es inmediata de la proposición 5.23 y de que

$$\text{Im } g = \text{gen} \{u+v, uv, w\} \supset \Lambda. //$$

5.27 Proposición.  $\Gamma \subset \text{Im } i$ .

Demostración. Debemos probar que los generadores de  $\Gamma$  son elementos de  $\text{Im } i$ . De la proposición 5.24  $\text{Im } f' = \text{Im } f$  luego existe

$\alpha' \in H^*(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$  tal que

$$f'(\alpha') = f(\alpha)$$

es decir,

$$fi(\alpha') = f(\alpha). \text{ Como } gr(\alpha') = gr(\alpha) = 2$$

y en ese grado  $H^*(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$  está generado por  $\{\alpha, \beta\}$  (ver teorema 4.

16) tenemos que  $i(\alpha') = a\alpha + b\beta$   $a, b \in \{0, 1\}$

entonces  $f(\alpha) = fi(\alpha) = af(\alpha)$  y  $f(\alpha) = x+y \neq 0$

por lo tanto  $a=1$  y  $i(\alpha') = \alpha + b\beta$ .

Por otra parte,  $g'(\alpha') = gi(\alpha') = b(u^2 + v^2)$  además de la proposición 5.25  $\text{Im } g' = \Lambda$ , que en grado 2 está generado por  $u^2 + v^2 + uv$

Entonces  $b = 0$ . Y  $\alpha = i(\alpha')$  es decir  $\alpha \in \text{Im } i$ .

Probemos ahora que  $\beta \in \text{Im } i$ . Como antes  $\text{Im } f' = \text{Im } f$ . Luego existe

$\xi \in H^4(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$  tal que  $f'(\xi') = f(\xi)$

$$fi(\xi') = f(\xi) \text{ y } g(\xi) = 3 \text{ recordemos}$$

que  $H^3(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$  está generado por  $\beta$ , por lo tanto

$$i(\xi') = a\beta, \text{ a} \in \{0,1\}.$$

$$f(\xi) = fi(\xi') = af(\xi')$$

Y como  $f(\xi) = z \neq 0$  tenemos que  $a = 1$   $i(\xi') = \xi$ .

Por lo tanto  $\xi \in \text{Im } i$ .

Finalmente  $(\beta^2 + \delta) \in \text{Im } i$ , en efecto, como  $g(\beta^2 + \delta) = u^2 + v^2 + uv \in \Lambda$

(recordamos que  $g(\beta^2) = u+v$  y  $g(\delta) = uv$ )  $\in \text{Im } g' = \Lambda$ . Sea  $w$

$\in H^4(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$  tal que  $g_i(w) = g'(w) = g(\beta^2 + \delta)$ .

Ahora en grado 4,  $H^4(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$  está generado por  $\alpha^2, \beta^2$  y  $\delta$ .

$$i(w) = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\delta \quad a, b \in \{0,1\} \text{ y } c \in \{0,1,2,3\}.$$

de donde  $u^2 + v^2 + uv = g(\beta^2 + \delta) = g_i(w) = b(u^2 + v^2) + cuv$  esto en  $\mathbb{Z}_2[U, V]$  de donde  $u = U^2, v = V^2, b=1, c=1$ . Además

$$i(w) = a\alpha^2 + (\beta^2 + \delta)$$

por lo tanto  $a\alpha^2 \in \text{Im } i$  y  $\beta^2 + \delta \in \text{Im } i$ . ///

5.28 Lema. Sea  $\xi \in H^4(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$  ( $i \neq 0, 2i + 4j = q$ ) un elemento de la forma  $\xi = \sum b_{ij} \beta^i \cdot \delta^j$ , si  $g(\xi) \in \Lambda$ , entonces  $\xi \in \Gamma$ .

Demostración. Recordemos que  $\Lambda = \mathbb{Z}_2[w, u^2 + v^2 + uv]$  así, si  $g(\xi) \in \Lambda$

tendremos que  $g(\xi) = \sum b_{ij} (u+v)^i (uv)^j = \sum c_{rs} (u^2 + v^2 + uv)^r ((u+v)uv)^s$   
 $(4r + 6s) = q$ .

Como  $i \neq 0, s \neq 0$  y no hay término en  $(uv)^k$  solo, entonces

$$g(\xi) = \sum c_{rs} (\beta^2 + \delta)^r (\beta\delta)^s, \text{ y } g(\xi) - c_{rs} (\beta^2 + \delta)^r (\beta\delta)^s = 0, s \neq 0, 4r + 6s = q.$$

Además,  $f(\xi) = 0$ , y  $f(c_{rs} (\beta^2 + \delta)^r (\beta\delta)^s) = 0$ , por tanto

$$\xi = \sum_{rs} (\beta^2 + \delta)^r (\beta\delta)^s \in \text{Ker } f \cap \text{Ker } g$$

y por la proposición 4.16, este elemento es de la forma  $2\xi'$ .

Pero  $2H^p(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$  está generado por  $\delta$ , y en la expresión no hay

$$\delta^k, \xi' = 0 \text{ pues } \xi = \sum_{rs} (\beta^2 + \delta)^r (\beta\delta)^s = 2\xi'.$$

$$\text{Es decir } \xi = \sum_{rs} (\beta^2 + \delta)^r (\beta\delta)^s \quad //$$

5.29 Lema. Si  $w \in H^q(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$   $q$  par, y  $g(w) \in \Lambda$ , entonces  $w \in \Gamma$ .

Demostración. Sea  $w = \sum_{ij} a^{ij} \delta^{ij} + \sum_{ij} b^{ij} \beta^{ij} + c\delta^n$   $i \neq 0, 2i+4j=q$

si  $q \neq 4n$   $c=0$  pues  $\delta$  genera solo  $4n$ . Definimos  $\xi = w - \sum_{ij} a^{ij} \delta^{ij} - c(\beta^2 + \delta)^n$

$= \sum_{ij} b^{ij} \beta^{ij}$  que es de la forma del lema anterior, luego

$$\sum_{ij} a^{ij} \delta^{ij} \in \Gamma \text{ y } c(\beta^2 + \delta) \in \Gamma, \text{ y } \xi \in \Gamma, \text{ si y solo si, } w \in \Gamma$$

Mas aún,  $g(\xi) = g(w) - c(u^2 + v^2 + uv)^n$ , y  $u^2 + v^2 + uv \in \Gamma$ , entonces

$$g(\xi) \in \Lambda, \text{ si y solo si, } g(w) \in \Gamma \quad //$$

5.30 Lema. Si  $w' \in H^p(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$ ,  $p$  impar y  $g(w') \in \Lambda$ , entonces  $w' \in \Gamma$

Demostración.  $w' = w\delta^k$  con  $w$  de grado par.

$$g(w') = g(w)g(\delta^k) = g(w) \cdot w, \text{ pues } g(\delta^k) = w \text{ (ver dem. teorema 4.21)}$$

luego del lema anterior  $w \in \Gamma$ , y  $w\delta = w' \in \Gamma$ . //

Reuniendo esta información (lemas 5.28, 5.29, 5.30) tenemos que -

para todo  $\xi \in \text{Im } i, g(\xi) \in \Lambda$ , y  $\xi \in \Gamma$ . Es decir

5.31 Proposición.  $\text{Im } i \subset \Gamma$

Estamos ahora en situación de demostrar el teorema 1, pues  $i$  es un monomorfismo, y de las proposiciones 5.27 y 5.31  $\text{Im } i = \Gamma$ , entonces hemos demostrado

1.1 Teorema.  $H^*(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$  es la subálgebra  $\Gamma$  de  $H^*(\Sigma_{4,2}; \mathbb{Z})$  generada -

por  $\{\alpha, \delta, \beta^2 + \delta\}$ .

## Capítulo II

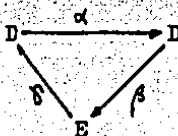
Las sucesiones espectrales son ciertos tipos de sucesiones de módulos de  $(co)$  homología. Como sucesión, envuelven un cierto concepto de convergencia a un módulo límite en el sentido de que, conforme tomemos los elementos de la sucesión, los términos a partir de una cierta  $r$ , se van pareciendo cada vez más a un cierto valor. En nuestro caso llega un momento en el cual los términos de la sucesión espectral son los mismos. Si esto sucede, se dirá que la sucesión espectral converge al módulo límite. Así pues, lo que estamos obteniendo, es una sucesión de módulos de  $(co)$  homología que convergen a un módulo de  $(co)$  homología. De aquí se obtiene una importante técnica para el cálculo de la  $(co)$  homología.

El capítulo se encuentra dividido en cuatro secciones, en las primeras dos se dan las definiciones básicas, incluyendo la de sucesión espectral sin entrar en más detalles acerca de conceptos como el de convergencia, el cual se formaliza en la sección 3. Nuestro propósito es primero presentar el concepto y luego formalizarlo.

### II.1 PAREJA EXACTA.

El primer concepto importante en nuestro estudio es el de pareja exacta.

1.1 Definición. Una pareja exacta consiste de un par de módulos  $D, E$  y morfismos  $\alpha, \beta, \gamma$  tales que el siguiente triángulo es exacto en cada vértice





Consideremos una pareja exacta de módulos bigraduados  $\{D, E, \alpha, \beta\}$  donde  $D = \{D^{p,q}\}$ ,  $E = \{E^{p,q}\}$   $p, q \in \mathbb{Z}$ . Si los morfismos tienen bigrados  $(a, a')$ ,  $(b, b')$ ,  $(c, c')$ , respectivamente, entonces, a partir de de la pareja exacta anterior se obtiene una sucesión exacta larga

$$\dots \xrightarrow{\beta} E^{p-a, q-a'} \xrightarrow{\gamma} D^{p, q} \xrightarrow{\alpha} D^{p+a, q+a'} \xrightarrow{\beta} E^{p+a+b, q+a'+b'} \xrightarrow{\gamma} \dots$$

A continuación presentamos la pareja exacta de Bockstein para ejemplificar el concepto.

Ejemplo. La Pareja Exacta de Bockstein.

Un importante ejemplo de pareja exacta, es la pareja exacta de Bockstein.

Sea  $p$  un primo. Consideremos la siguiente sucesión de coeficientes

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

Esta induce en cohomología la pareja exacta de Bockstein siguiente

$$\begin{array}{ccc} D = H^*(\quad, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\alpha} & H^*(\quad; \mathbb{Z}) \\ & \searrow \beta & \swarrow \beta \\ & E = H^*(\quad, \mathbb{Z}_p) & \end{array}$$

donde  $\alpha$  es el morfismo inducido en cohomología por la multiplicación por  $p$ .

$\beta$  es el morfismo inducido por el homomorfismo de reducción.

$\beta: H^*(\quad, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(\quad, \mathbb{Z})$  esta definido de la siguiente manera. Sea  $x \in H^*(\quad, \mathbb{Z}_p)$ . Representamos por  $c$  (un cociclo) a la clase de cohomología de  $x$ ; seleccionemos una cocadena entera  $c'$ , que es la imagen de  $c$  bajo reducción mod  $p$ , entonces

ces  $\delta c'$  es divisible por  $p$  y  $\frac{1}{p}(\delta c')$  representa a  $x$ .

$\gamma$  recibe el nombre de 1er homomorfismo de Bockstein.

La composición de  $\beta$  y el homomorfismo de reducción nos dá un homomorfismo

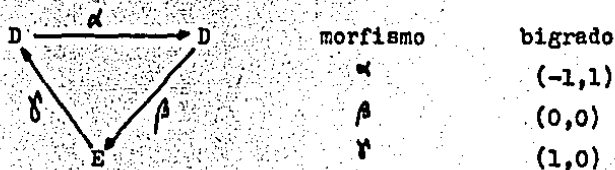
$$d_1: H^q(, Z_p) \longrightarrow H^{q+1}(, Z_p)$$

que es llamado el segundo homomorfismo de Bockstein,  $d_1$  es además un diferencial sobre  $E$ .

Si consideramos la sucesión exacta larga de cohomología que se obtiene a partir de la pareja exacta de Bockstein,  $d_1$  resulta ser el homomorfismo de conexión.

## II. 2.- PAREJAS DERIVADAS Y SUCCESIONES ESPECTRALES

Consideremos la siguiente pareja exacta de módulos bigraduados, con los morfismos y bigrados indicados



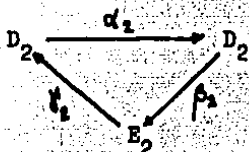
Refinamos  $d_1: E \longrightarrow E$  por  $d_1 = \beta\gamma$ ; desdoblamos  $d_1$  para  $(p, q)$  fijo

$$d_1^{p,q}: E^{p,q} \xrightarrow{\gamma} D^{p+1,q} \xrightarrow{\beta} E^{p+1,q}$$

$d_1$  es un diferencial, en efecto  $d_1 d_1 = \beta\beta\gamma = \beta(\beta\gamma)\gamma = 0$  ya que  $\beta\beta = 0$  por ser la pareja exacta.

Es común denotar  $H(E, d_1)$  por  $E_2 = \ker d_1 / \text{im } d_1$  y considerarlo como un módulo bigraduado, tal que  $d_1$  tiene bigrado  $(1,0)$ . Para  $(p,q)$  fijo tenemos  $E_2^{p,q} = \ker d_1^{p,q} / \text{im } d_1^{p,q}$ .

Definamos  $D_2 = \text{im } \alpha$ . Es claro que  $D_2 \subset D$ , consideremos además el siguiente diagrama



Sea  $\alpha_2 = \alpha|_{D_2}$ . Como el morfismo de inclusión  $i: D_2 \hookrightarrow D$  tiene bigrado  $(0,0)$   $\alpha_2 = \alpha \circ i$  tiene el mismo bigrado. La descripción de  $\beta_2$  y  $\gamma_2$  es algo más complicada.

Definamos  $\beta_2: D_2 \rightarrow E_2$  por  $\beta_2 y = [\beta x^{-1} y]$  ( $[ \ ]$  denota clase de cohomología). Para justificar tal descripción de  $\beta_2$ , debemos probar que  $x$  es un cociclo pero  $\delta(\beta x) = 0$ ; por lo tanto debemos demostrar que  $[\beta x]$  depende solo de  $x$ , ó equivalentemente que  $\alpha x$  es una cofrontera. En efecto, si  $\alpha x = 0$  entonces  $x = \delta y$  con  $y \in E_2$  tal que  $\beta x = \beta \delta y = dy$ , de donde  $y$  es una cofrontera.

Definamos  $\gamma_2: E_2 \rightarrow D_2$  por  $\gamma_2^{p,q} [z^{p,q}] = \delta^{p,q} [z^{p,q}] \in D^{p+1,q}$ .

La demostración de que  $\gamma_2$  está bien definida es análoga a la de  $\beta_2$ .

2.2 Teorema. La pareja  $\{D_2, E, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$  es exacta.

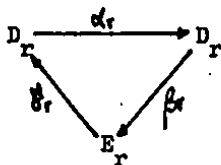
*Demostración.* Para probar el teorema necesitamos demostrar que el triángulo que determinan es exacto en cada vértice.

- 1) exactitud en  $D_2$  izquierdo:  $\alpha_2 \gamma_2 [z] = \alpha \delta [z] = 0$ . Recíprocamente, si  $x \in D_2$  y  $\alpha x = 0$  entonces  $x \in \ker \beta$  y  $x = \delta y$  con  $y \in E_2$ . Luego  $dy = \beta \delta y = 0$  y  $x = \delta_2 [y]$ .

- ii) exactitud en  $D_2$  derecho:  $\beta_2 d_2(x) = \beta_2(\alpha x) = \beta[x]$ ;  $x \in D_2 = \ker \beta$  así  $\beta x = 0$ . Recíprocamente, si  $\beta(\alpha x) = 0$  entonces  $\beta x = \delta_1 y$  y  $y \in E_2$ ,  $x = \delta_1 y + x_0$  con  $x_0 \in \ker \beta_2$ .
- iii) exactitud en  $E_2$ :  $\delta_1 \beta_1(\alpha x) = \delta_1[\beta x] = \delta_1 \beta(x) = 0$ . Recíprocamente si  $\delta_2[z] = 0$ , entonces  $z = \beta x$   $[z] = \beta_2(\alpha x)$ . ///.

2.3 Definición. La pareja exacta  $\{D_2, E_2, \alpha_2, \beta_2, \delta_2\}$  es llamada la pareja derivada de  $\{D, E, \alpha, \beta, \delta\}$ .

El proceso descrito anteriormente puede iterarse hasta obtener la  $r$ -ésima pareja derivada.



2.4 Teorema. Sea  $\{D, E, \alpha, \beta, \delta\}$  una pareja exacta, donde  $\alpha, \beta, \delta$  tiene bigrados  $(-1, 1)$ ,  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$  respectivamente. Si la  $r$ -ésima pareja derivada es  $\{D_r, E_r, \alpha_r, \beta_r, \delta_r\}$  entonces,

- $\alpha_r, \beta_r, \delta_r$  tienen bigrados  $(-1, 1)$ ,  $(r-1, 1-r)$  y  $(1, 0)$  respectivamente.
- $d_r = \beta_r \delta_r$  tiene bigrado  $(r, 1-r)$  y es inducido por  $\beta \alpha^{r+1} \delta$ .
- $E_r^{n, \eta} = \ker d_r^{n, \eta} / \text{im } d_r^{n-r, \eta+r-1}$ .

Demostración. es inmediata, aplicando inducción sobre  $r$ . ///

2.5 Definición. Una sucesión espectral es una sucesión  $\{E_r, d_r | r \geq 1\}$  de módulos bigraduados y morfismos  $d_r (d_r^2 = 0)$  tal que

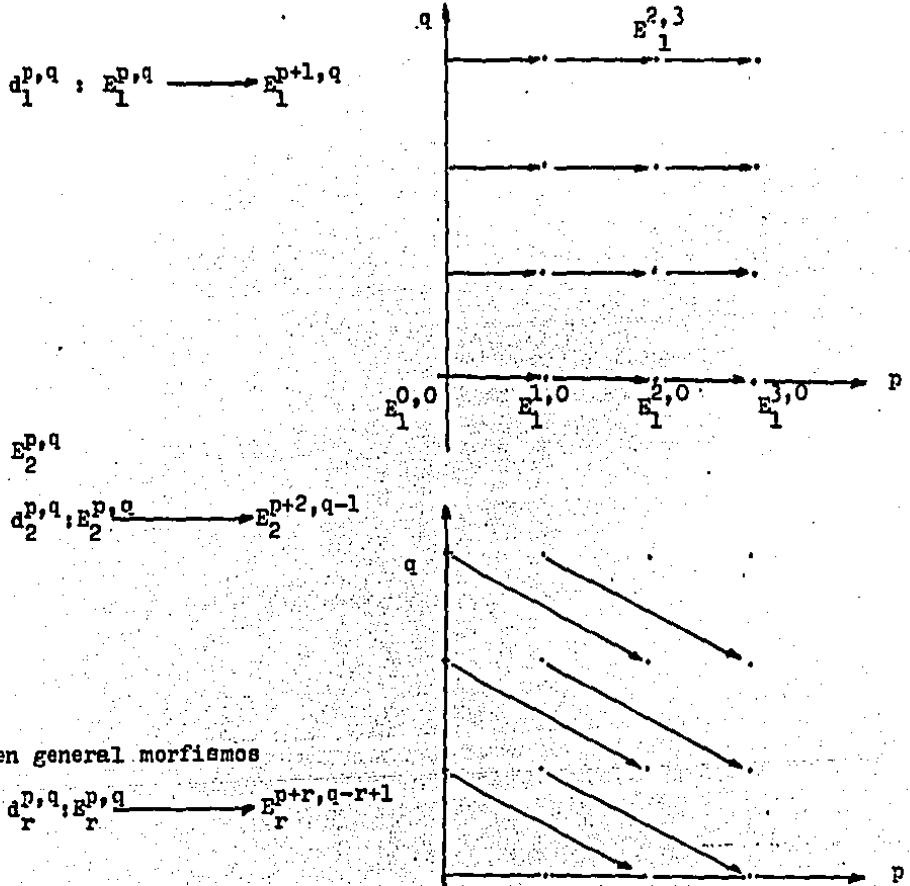
$$E_{r+1} = H^*(E_r, d_r)$$

Notación. De aquí en adelante escribiremos  $E = E_1$ .

Una sucesión espectral consiste de lo siguiente:

a) Una familia  $(E_r^{p,q})$   $p, q, r \in \mathbb{Z}$ ,  $r \geq 1$  de módulos bigraduales.

b) Morfismos



c) Los objetos  $E_{r+1}^{p,q}$  son obtenidos del  $E_r^{p,q}$  por:

$$E_{r+1}^{p,q} = \ker (d_r^{p,q}) / \text{im} (d_r^{p-r,q+r-1})$$

2.6 Definición. Un subcociente de un módulo  $M$  es un módulo de la forma  $M'/M''$  donde  $M'' \subset M'$  son submódulos de  $M$ .

La sucesión espectral muestra a cada  $E_r$  como subcociente de  $E$  ó bien de  $E_2$  de la siguiente manera: sean  $Z_2$  y  $B_2$  módulos de cociclos y co-fronteras respectivamente, entonces  $E_2 = Z_2/B_2$ . Como  $E_3 = Z_3/B_3$  es un subcociente de  $E_2$ ; del tercer teorema de isomorfismo se sigue que:

$$E_2 \supset Z_2 \supset Z_3 \supset B_3 \supset B_2 \supset 0$$

e iterando

$$E_2 \supset Z_2 \supset \dots \supset Z_r \supset Z_{r+1} \dots \supset B_{r+1} \supset B_r \dots \supset B_2 \supset 0$$

2.7 Definición. Definimos  $Z_\infty^{p,q} = \bigcap_r Z_r^{p,q}$ ;  $B_\infty^{p,q} = \bigcup_r B_r^{p,q}$  y  $E_\infty^{p,q} = Z_\infty^{p,q} / B_\infty^{p,q}$ .

El módulo bigraduado  $E_\infty^{p,q}$  se llama el término límite de la sucesión. Es claro que para  $r$  "suficientemente" grande  $E_r$  se aproxima a  $E_\infty$ . Si cada  $E_r$  es un módulo subcociente de  $E_2$  y  $E_r$  se aproxima a  $E_\infty$  a partir de una cierta  $r$ , se podría pensar en la sucesión espectral como una familia de objetos filtrados, en efecto:

d) Una familia de objetos  $(E^n)$   $n \geq 0$ , donde  $n = p+q$  y para cada  $E^n$  una filtración:

$$E^n = E_0^n \supset E_1^n \supset E_2^n \supset \dots \supset E_n^n \supset \dots \supset 0$$

tal que  $E_p^n / E_{p+1}^n = E_\infty^{p, n-p}$

La sucesión espectral suele escribirse  $E_2^{p,q} \Rightarrow E_\infty^{p,q}$

Terminemos esta sección con un ejemplo.

**Ejemplo. La Sucesión Espectral de Bockstein.**

Como un ejemplo de sucesión espectral obtendremos la sucesión espectral de Bockstein, la cual usaremos ampliamente en el capítulo III. En la sección 1 de este capítulo, obtuvimos la pareja exacta de Bockstein, apliquemos esas ideas ahora a un espacio topológico  $X$ , así:

$$\begin{array}{ccc}
 D = H^m(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\quad} & H^m(X; \mathbb{Z}) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & E_1 = H^m(X; \mathbb{Z}_p) &
 \end{array}$$

de donde se obtiene la sucesión espectral de Bockstein con:

$$E_2^m = \ker( E_1^m \xrightarrow{\beta_1} E_1^{m+1} ) / \text{im}( \beta_p : H^{m-1}(X; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow E_1^m )$$

Esta sucesión espectral será fundamental en el cálculo de  $H^*(\mathbb{Z}_4; \mathbb{Z})$  que haremos en el próximo capítulo.

### III.3 SUCESIONES ESPECTRALES DE COMPLEJOS FILTRADOS.

Sea  $R$  un anillo arbitrario. Por una filtración decreciente de un  $R$ -módulo entenderemos una familia de submódulos  $F^p M$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ) tal que  $F^p M \supset F^{p+1} M$ . La filtración se llama finita si  $F^p M = M$  para  $p$  suficientemente pequeña y  $F^p M = 0$  para  $p$  suficientemente grande.

Dada una filtración de  $M$ , podemos definir el módulo graduado  $Gr M$ , por  $Gr = F^p M / F^{p+1} M$  y pensar en  $M$  como el módulo construido a partir de las "piezas" de  $Gr M$ . El siguiente lema muestra que no se pierde mucha información al pasar de  $M$  a  $Gr M$ .

3.8 Lema. Sea  $f: X \rightarrow M'$  un morfismo que preserva filtraciones con  $M$  y  $M'$  módulos con filtraciones finitas. Si  $\text{Gr}f: \text{Gr } M \rightarrow \text{Gr } M'$  es un isomorfismo, entonces  $f$  es un isomorfismo.

Demostración. Es inmediata de los teoremas de isomorfismo. ///

Deseamos encontrar una relación entre filtración y sucesión espectral para ello partiremos de la siguiente sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow F^{p+1} \longrightarrow F^p \longrightarrow F^p/F^{p+1} \longrightarrow 0$$

la cual induce la siguiente sucesión exacta larga de cohomología

$$\dots \rightarrow H^{p+q}(F^{p+1}) \longrightarrow H^{p+q}(F^p) \longrightarrow H^{p+q}(F^p/F^{p+1}) \longrightarrow H^{p+q+1}(F^{p+1}) \longrightarrow \dots$$

de la cual se obtiene una pareja exacta dada por

$$D^{p,q} = H^{p+q}(F^{p+1}) \quad E^{p,q} = H^{p+q}(F^p/F^{p+1})$$

y morfismos  $\alpha, \beta, \delta$ , con los bigrados indicados a continuación

bigrado	morfismo
$(-1, 0)$	$D^{p,q}, D^{p,q} \longrightarrow D^{p-1,q+1}; H^{p+q}(F^{p+1}) \longrightarrow H^{p+q}(F^p)$
$(0, 0)$	$D^{p,q}, D^{p,q} \longrightarrow E^{p,q}; H^{p+q}(F^p) \longrightarrow H^{p+q}(F^p/F^{p+1})$
$(1, 0)$	$D^{p,q}, E^{p,q} \longrightarrow D^{p+1,q}; H^{p+q}(F^p/F^{p+1}) \longrightarrow H^{p+q+1}(F^p)$

Dibujemos una parte de la sucesión exacta en términos de  $D$  y  $E$ :

$$\dots \rightarrow D^{p,q} \xrightarrow{\alpha} D^{p-1,q+1} \xrightarrow{\beta} E^{p-1,q+1} \xrightarrow{\delta} D^{p,q+1} \rightarrow \dots$$

Finalmente el diferencial asociado a la pareja exacta es:

$$d = \beta \delta; E^{p,q} \longrightarrow E^{p+1,q}; H^{p+q}(F^p/F^{p+1}) \longrightarrow H^{p+1,q}(F^p/F^{p+1})$$

Así tenemos la siguiente proposición.

3.9 Proposición. Toda filtración  $\{F^p\}$  determina una pareja exacta.

Tenemos especial interés en los complejos de cocadenas.

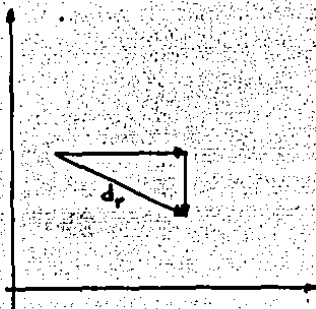
Sea  $C$  el complejo de cocadenas  $(C^n)$  en  $Z$  con diferencial de grado  $+1$

Denotemos la filtración por  $F^p C$  y asumamos que es decreciente de tal manera que  $D = F^p H^{p+q}(C)$  y  $E = F^{p+1} H^{p+q}(C)/F^p H^{p+q}(C)$ . El diferen-



cial  $d_r$  es de bigrado  $(r, -r+1)$  tal que  $d_r: E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$

Dibujemos  $d_r$  en el plano  $(p, q)$ , para esto consideremos a  $E_r^{p,q}$  situado en dicho plano:



La  $n$ -ésima pareja derivada que se obtiene de la pareja exacta dada por la filtración  $F^{p,q}$  está dada en sus morfismos por:

morfismo	bigrado
$d_n$	$(-1, 1)$
$\beta_n$	$(n-1, -n+1)$
$\gamma_n$	$(1, 0)$
$\alpha_n$	$(n, -n+1)$

De aquí se sigue de manera inmediata la siguiente proposición.

3.10 Proposición. Toda filtración  $\{F^{p,q}\}$  de un complejo determina una sucesión espectral.

Nuestra intención es usar las sucesiones espectrales para obtener información acerca de  $H^*(FC)$  a partir del conocimiento de  $F^{p,q}$ . Para esto necesitamos ciertas condiciones de convergencia, las cuales damos a continuación.

A fin de simplificar la notación, sea  $n = p + q$ .

3.11 Definición. Una filtración  $\{F^p H\}$  de un módulo graduado  $H$  está acotada si para cada  $n$  existen  $s=s(n)$  y  $t=t(n)$  tales que

$$F^s H^n = 0 \quad \text{y} \quad F^t H^n = H^n.$$

3.12 Definición. Sea  $H$  un módulo graduado. Una sucesión espectral  $\{E_r, d_r\}$  converge a  $H$ , ( $E_2^{p,q} \Rightarrow H$ ) si existe una filtración  $\{F^p H\}$  de  $H$  tal que  $E_\infty^{p,q} = F^p H^n / F^{p+1} H^n$  para toda  $p, q$ .

3.13 Teorema. Sea  $\{F^p C\}$  una filtración acotada de un complejo  $C$ , y sea  $\{E_r\}$  la sucesión espectral que ésta determina. Entonces

- i) para cada  $p, q$   $E_\infty^{p,q} = E_r^{p,q}$ , para  $r$  "suficientemente" grande.
- ii)  $E_2^{p,q} \Rightarrow H^n(C)$ .

Demostración

i) Tomemos  $p > t(n)$ . Luego para cualquier  $p$ ,  $F^p = F^{p+1}$  y  $F^p / F^{p+1} = 0$

De donde  $E_\infty^{p,q} = H^{p+q}(F^p / F^{p+1}) = 0$  y  $E_r^{p,q} = 0$  para toda  $r$ .

Similarmente para  $p < s(n)$ ,  $E_r^{p,q} = 0$  para toda  $r$ .

Ahora bien, como  $d_r$  tiene bigrado  $(r, -r+1)$  para cualquier  $p, q$

tenemos que  $d_r(E_r^{p,q}) \subset E_r^{p-r, q-r+1}$ . De donde  $E_{r+1}^{p,q} = \ker d_r^{p,q} = E_r^{p,q}$

por lo tanto  $E_\infty^{p,q} = E_r^{p,q}$ .

ii)  $\phi^p H^n(C) = \text{Im}(H^n(F^p C) \rightarrow H^n(C))$ . Como  $F$  está acotada esta acotada. luego

$$0 = \phi^s H^n(C) \subset \phi^{s-1} H^n(C) \subset \dots \subset \phi^{t+1} H^n(C) \subset \phi^t H^n(C) = H^n(C)$$

Considere la sucesión exacta que se obtiene de la  $r$ -ésima pareja derivada

$$\dots \rightarrow D_r^{p-r+2, q+r-2} \rightarrow D_r^{p-r+1, q+r-1} \rightarrow D_r^{p, q} \rightarrow D_r^{p+1, q} \rightarrow \dots$$

Como sabemos,  $D_r = \alpha \circ \alpha \circ \dots \circ \alpha$  ( $r-1$  factores iguales a  $\alpha$ ), luego

$$D^{p-r+n, q+r-1} = \text{im}(H^{p+q}(F^{p+r-1})) \longrightarrow H^{p+q}(F^{p+r-1})$$

Para  $p, q$  fijos  $F^{p+r+1}C = 0$  con  $r$  grande, luego  $F^{p+1}H^{p+q}(C) = 0$ .

De igual manera  $\phi^p H^{p+q}(C) = H^p(C)$ , luego

$$\phi^p H^{p+q}(C) / \phi^{p+1} H^{p+q}(C) = E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q} \quad ///$$

En la práctica las sucesiones espectrales se obtienen tanto de filtraciones acotadas como de parejas exactas.

Finalmente estableceremos la noción de isomorfismo para sucesiones espectrales.

**3.14 Teorema.** Sea  $\gamma: C \longrightarrow C'$  un morfismo de cocadenas que preserve filtraciones donde  $C$  y  $C'$  tienen filtraciones finitas. Si el morfismo inducido  $E_r(\gamma): E_r(C) \longrightarrow E_r(C')$  de sucesiones espectrales es un isomorfismo para algún  $r$ , entonces

$$H(\gamma): H(C) \xrightarrow{\cong} H(C')$$

**Demostración.**

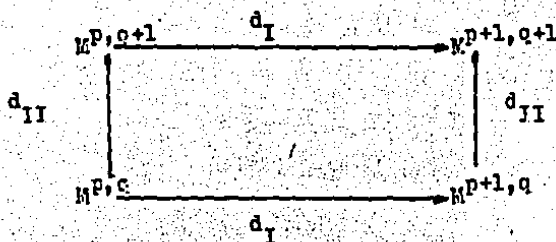
Si  $E_r(\gamma)$  es un isomorfismo, entonces  $E_s(\gamma)$  para  $s > r$  también lo es. Como  $E_s = H(E_{s-1})$  entonces  $E_\infty(\gamma) = Gr_\infty(\gamma)$  es un isomorfismo, ahora del lema 3.1 el teorema está demostrado. ///

## II. 4 COMPLEJOS DOBLES

Una importante fuente de complejos filtrados son los llamados complejos dobles.

**4.15 Definición.** Un complejo doble es un módulo bigraduado  $M = (M^{p,q})$   $p, q \in \mathbb{Z}$  con un diferencial  $d_I$  "horizontal" de bigrado  $(1,0)$  y un

diferencial  $d_{II}$  "vertical" de bi-grado  $(0,1)$  tal que  $d_I d_{II} = d_{II} d_I$



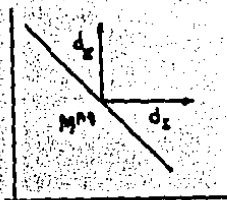
4.16 Definición. Si  $M$  es un complejo doble, su complejo total  $Tot(M)$  es el complejo definido por

$$Tot(M) = \bigoplus_{p+q=n} M^{p,q}$$

y  $d^n: Tot(M)^n \longrightarrow Tot(M)^{n+1}$  está dado por

$$d^n = \bigoplus_n (d_I^{p,q} + d_{II}^{p,q})$$

4.17 Lema. Si  $M$  es un complejo doble, entonces  $Tot(M)$  es un complejo. Demostración. Notemos que



$Tot(M)^n$  es la suma de todos los  $M^{p,q}$  sobre la línea  $p+q=n$ .

Si  $p+q=n$  entonces  $im d_I^{p,q} \subset M^{p+1,q}$  e  $im d_{II}^{p,q} \subset M^{p,q+1}$ .

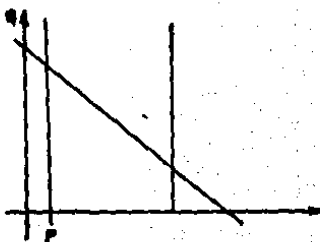
Luego  $im d^n \subset Tot(M)^{n+1}$ . Ahora,  $dd=0$  ya que

$$dd = \sum (d_I + d_{II})(d_I + d_{II}) = \sum d_I d_I + (\sum d_I d_{II} + d_{II} d_I) + \sum d_{II} d_{II} = 0 \quad ///$$

Para cada  $Tot(M)$  con  $M$  un complejo doble podemos obtener un par de filtraciones: una "vertical" y una "horizontal"

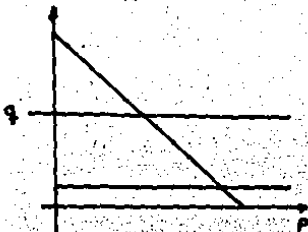
4.18 Definición. La primera filtración  $F$  definida por

$$(\mathbb{I}^p \text{Tot}(K)^n) = \bigoplus_{p \leq i} M^{p, n+i}$$



4.19 Definición. La segunda filtración  $\mathbb{II}^p$  está definida por

$$(\mathbb{II}^p \text{Tot}(K)^n) = \bigoplus_{p \leq j} M^{p+j, j}$$



El siguiente lema es fundamental para la convergencia de las sucesiones espectrales que cada filtración produce.

4.20 Lema. Sea  $M$  un complejo doble. Las dos filtraciones de  $\text{Tot}(K)$  están acotadas si existe un número finito de puntos  $(p, q)$  tales que  $M^{p, q} \neq 0$ .

Demostración. Fijemos la línea  $p+q=n$ . La primera filtración está definida por desplazar una línea vertical a la izquierda y recolectar todos los términos debajo de ella. De igual manera la segunda filtración se define moviendo una línea horizontal hacia arriba. ///

4.21 Teorema. Sea  $M$  un complejo doble y  $\{I E_r\}$ ,  $\{II E_r\}$  las sucesiones espectrales determinadas por la primera y la segunda filtración de  $\text{Tot}(M)$  respectivamente. Entonces,

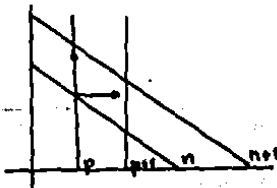
i) Para cada  $p, q$  tenemos  $I E_\infty^{p,q} = I E_r^{p,q}$ ;  $II E_\infty^{p,q} = II E_r^{p,q}$  para  $r$  grande.

ii)  $I E_2^{p,q} \Rightarrow H^n(\text{Tot}(M))$ ,  $II E_2^{p,q} \Rightarrow H^n(\text{Tot}(M))$ .

Demostración. Basta aplicar el lema anterior, así como el teorema 3.13 de este capítulo a las sucesiones espectrales, dadas por cada filtración.

Si  $K = (C^{p,q})$  es un complejo de cocadenas entonces existe un complejo total de cocadenas con dos filtraciones que convergen a  $H^*(\text{Tot}(K))$ . Al tener dos sucesiones espectrales que convergen a la cohomología de  $\text{Tot}(K)$  podríamos calcularla por medio de  $I E_2$  o bien de  $II E_2$ .

A continuación describiremos cómo podemos calcular  $II E_2$ . Consideremos la sucesión espectral que se obtiene de la segunda filtración su diferencial es, de hecho, la restricción de  $d = d_I + d_{II}$ . De la definición de la filtración tenemos que  $M^{p,q} = (F^p/F^{p+1})$  que para  $F_n^{p+1}$  consiste de todos los términos  $M^{p,q}$  ( $p+q=n$ ) que se encuentren a la derecha de la línea vertical  $p+1$ . Por otra parte  $F_n^p$  consiste de todos los puntos a la derecha de la línea  $p$ .

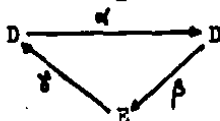


Además  $d^{p,q}(M^{p,q}) \subset M^{p+1,q} \oplus M^{p,q+1}$ . Concluimos entonces que  $F^p/F^{p+1}$  es la  $p$ -ésima columna con diferencial  $d_{II}$ . De donde

$$E^{p,q} = H^q(M^p, d_{II}) = \ker(d_{II}^{p,q} : M^{p,q} \rightarrow M^{p,q+1}) / \text{im}(d_{II}^{p,q-1} : M^{p,q-1} \rightarrow M^{p,q})$$



Haciendo  $D = H^m(X; Z)$  y  $E = H^m(X; Z_2)$  se obtiene la pareja exacta

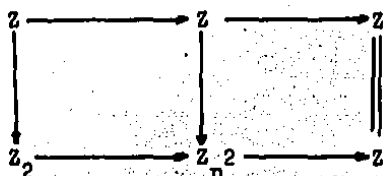


de donde se obtiene la sucesión espectral de Bockstein con

$$E_2^m = \frac{\ker(E^m \xrightarrow{d} E^{m+1})}{\text{im}(\beta_2: H^{m-1}(X; Z_2) \xrightarrow{d} E^m)} \quad m=p+q.$$

1.1 Lema.  $\beta_2 = \beta \delta$ .

*Demostración.* Consideremos las siguientes sucesiones de coeficientes



las cuales nos inducen, en cohomología, el siguiente diagrama



Es claro que este diagrama conmuta, luego  $\beta_2 = \beta \delta$ . //

El término  $E^m = H^m(\Sigma_4; Z) = Z_2[\alpha, \beta, \delta] / (\alpha \delta)$

$\dim \alpha = 1, \dim \beta = 2, \dim \delta = 3$ , además  $d(\alpha) = \alpha^2, d(\beta) = \delta + \alpha \beta$ .

Véase Nakano, M. [N].



1.2 Lema.  $d(\gamma) = d(\alpha\beta) = 0$ .

Demostración. Como  $d$  es un diferencial,  $d^2 = 0$ . Luego,

$$d^2(\beta) = d(\gamma + \alpha\beta) = d(\gamma) + d(\alpha\beta) = 0 \text{ y } d(\alpha\beta) = d(\alpha)\beta + \alpha d(\beta) = \\ d^2\beta + \alpha(\gamma + \alpha\beta) = d^2\beta + \alpha\gamma + \alpha^2\beta = 2\alpha^2\beta + \alpha\gamma = 0. \quad ///$$

Describiremos a continuación la sucesión espectral de Hochschild-Serre.

Consideremos la siguiente extensión de grupo

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

Sea  $F$  una resolución proyectiva de  $Z$  sobre  $ZG$  y  $M$  un  $G$ -módulo, entonces existe una sucesión espectral llamada de Hochschild-Serre de la forma

$$E_2^{p,q} = H^p(Q; H^q(H, M)) \Rightarrow H^{p+q}(G; M).$$

esta sucesión será utilizada en la sección 3 (para un tratamiento completo de esta sucesión espectral véase Brown, K.).

### III.2 CALCULO DE $H^f(\Sigma_4; Z)_2$

Procedemos a calcular  $E_2 = \ker d / \text{im } d$  para la sucesión espectral de Bockstein. Pensaremos en  $E_2$  como espacio vectorial sobre  $Z$ .

2.3 Proposición.  $\{\alpha\beta^{2j-1}, \beta^{2j}\}$  es una base para  $E_2$ .

Demostración.  $\beta$  es un elemento de  $E_2$  y no el homomorfismo de la pareja exacta.

Primero recordemos que  $d(z^m) = mz^{m-1}d(z)$ , pues  $d$  es una derivación.

Sea  $\sum a_{ij} \alpha^i \beta^j = b_{st} \beta^s \delta^t \in (M^2)$ .

$d(\sum a_{ij} \alpha^i \beta^j + b_{st} \beta^s \delta^t) = 0$ . En efecto,

$$\sum a_{ij} (d(\alpha^i) \beta^j + \alpha^i d(\beta^j)) + \sum b_{st} (d(\beta^s) \delta^t + \beta^s d(\delta^t)) = 0$$

$$\sum a_{ij} (i\alpha^{i-1} \beta^j + \alpha^i j\beta^{j-1} (\delta + \alpha\beta)) + \sum b_{st} (\beta^{s-1} (\delta + \alpha\beta) \delta^t) = 0.$$

pues

$$\begin{cases} d(\alpha^i) = i\alpha^{i-1} d(\alpha) = i\alpha^{i-1} (\alpha^2) = i\alpha^{i+1} \\ d(\beta^j) = j\beta^{j-1} d(\beta) = j\beta^{j-1} (\delta + \alpha\beta) \\ d(\delta^t) = (d(\delta))^t = 0 \end{cases}$$

$b_{st} = 0$  si  $s$  es impar.  $\geq 0$ . Si no consideremos el más grande  $t$  tal que  $b_{st} \neq 0$  para  $s$  impar, esto contribuye a que  $b_{st} \beta^{s-1} \delta^{t+1}$  no se cancele, pero  $\beta^{2j} \delta^t$  es un cociclo, pues  $d(z^2) = 2zd(z) = 0$ , si ahora substraemos  $\{\beta^{2j} \delta^t\}$  obtenamos un cociclo y  $b_{st} = 0$ ,  $t \geq 0$

Si ahora consideramos el máximo  $i$  tal que  $a_{ij} \neq 0$ , tendremos que  $i+j = 0 \pmod{2}$  por lo tanto  $a_{ij} (i\alpha^{i-1} \beta^j + j\alpha^i \beta^{j-1})$  no se puede cancelar. Los cociclos son de la forma  $\sum a_{ij} (\alpha^i \beta^j)$ , pero  $\alpha^i \beta^j$  con  $i + j = 0 \pmod{2}$  son cociclos con  $i > j$  y  $(\alpha\beta)^j \alpha^{i-j/2}$ .

Así una base para  $\ker d$  será

$$\beta^{2j} \delta^t, \alpha^{2i}, \beta^{2j}, \alpha^{2i} \beta^{2j} (\alpha\beta)^k \quad k = 0, 1$$

Pasemos ahora a las cofronteras.

$$i \geq 1; d(\alpha^{2i-1}) = \alpha^{2i+1}$$

$$\begin{aligned} t \geq 1; d(\beta^{2j+1} \delta^t) &= \beta^{2j+1} d(\delta^t) + \delta^t ((2j+1) \beta^{2j} d(\beta)) \\ &= 0 + \delta^t (2j \beta^{2j} d(\beta) + \beta^{2j} d(\beta)) \end{aligned}$$

pues es un elemento de  $Z_2(\alpha, \beta, \delta)$ .

luego  $d(\beta^{2j+1} \gamma^t) = \gamma^t \beta^{2j} d(\beta) = \beta^{2j} (\gamma + \alpha \beta) \gamma^t = \beta^{2j} \gamma^{t+1} + \beta^{2j+1} (\alpha \gamma^t) = \beta^{2j} \gamma^{t+1}$

$t \geq 1, d(\beta^{2j+1} \gamma^t) = \alpha^{2j} \beta^{2j}$

$d(\alpha^{2s} \beta^{2j+2}) = \alpha^{2s} \beta^{2j} (\gamma + \alpha \beta) = \alpha^{2s} \beta^{2j} \gamma + \alpha^{2s} \beta^{2j} (\alpha \beta)$

$d(\beta^{2j+1}) = \beta^{2j+1} (\gamma + \alpha \beta)$

y pasando a  $\ker d / \text{im } d$   $\begin{matrix} \alpha^{2j} \gamma^{t+1} & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \beta^{2j} \gamma^{t+1} & \xrightarrow{\quad} & 0 \end{matrix} \quad t \geq 1$   
 $[\beta^{2j} \gamma] = [\beta^{2j} \alpha \beta]$

así  $\{\alpha \beta^{2j-1}, \beta^{2j}\}$  es una base para  $E_2$

///

Determinemos la dimensión de los elementos de la base de  $E_2$ . Recordemos que  $\dim \alpha = 1, \dim \beta = 2$  (Véase [N]), de esta manera tenemos elemento:  $\alpha \beta, \alpha \beta^3, \alpha \beta^5, \dots, \alpha \beta^{2j}, \dots, \beta^2, \beta^4, \beta^6$ .  
 dimensión: 3, 7, 11,  $\dots, 4j-1, \dots, 4, 8, 12$ .  
 de donde obtenemos el siguiente resultado.

2.4 Corolario.  $E_2^{4j} = \mathbb{Z}_2 \langle \beta^{2j} \rangle, E_2^{4j-1} = \mathbb{Z}_2 \langle \alpha \beta^{2j-1} \rangle, E_2^m = 0$  en otro caso. Y de aquí  $\beta^{2j} \in H^{4j}(\Sigma_4; \mathbb{Z}_2)$  es la imagen de algún  $\bar{\beta}^j \in H^{4j}(\Sigma_4; \mathbb{Z})$  de orden 4.

2.5 Proposición.  $4H^4(\Sigma_4; \mathbb{Z}) = 0$

Demostración.

En [E1] Evens prueba que  $H^*(\Sigma_2 \int \Sigma_2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \langle \alpha, \beta, \gamma, \rho \rangle / (2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 4\rho, \alpha^2 = \alpha\beta, \gamma^2 = \beta)$  de esto y de que  $H^4(\Sigma_4; \mathbb{Z}) \xrightarrow[\gamma]{\tau} H^4(\Sigma_2 \int \Sigma_2; \mathbb{Z})$ , se sigue el resultado.

///

Por lo tanto todo elemento de  $H^4(\Sigma_4; \mathbb{Z})_2$  es de orden 0, 2 ó 4. Luego  $\beta^2 \in H^4(\Sigma_4; \mathbb{Z})$  es una d-cofrontera y  $E_2^m = 0$  ( $m > 0$ ).

Estando ahora en situación de calcular la 2-torsión de  $H(\Sigma_4; \mathbb{Z})$ .

2.6 Proposición.  $\frac{Z(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta})}{(2\bar{\alpha}, 2\bar{\delta}, 4\bar{\beta})} \longrightarrow \{2\text{-torsión de } H^*(\Sigma_4; \mathbb{Z})\}$

Demostración. Consideremos la sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H^2(\Sigma_4; \mathbb{Z}) &\longrightarrow H^2(\Sigma_4; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\Sigma_4; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^3(\Sigma_4; \mathbb{Z}) \\ &\longrightarrow H^3(\Sigma_4; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^3(\Sigma_4; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^4(\Sigma_4; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^4(\Sigma_4; \mathbb{Z}) \\ &\longrightarrow H^4(\Sigma_4; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Seleccionemos  $\bar{\alpha} \in H^2(\Sigma_4; \mathbb{Z})$ . Si aplicamos el homomorfismo de reducción entonces existe  $\alpha^2 = d(\bar{\alpha}) \in H^2(\Sigma_4; \mathbb{Z})$ . Por otra parte  $\bar{\delta}(\beta) = \bar{\delta} \in H^3(\Sigma_4; \mathbb{Z}_2)$  de donde  $2\bar{\delta} = 0$ . Además  $\bar{\beta} \in H^4(\Sigma_4; \mathbb{Z})$ ,  $\bar{\beta} \mapsto \beta \in H^4(\Sigma_4; \mathbb{Z}_2) = 0$  y  $4\bar{\beta} = 0$ .

De esta manera se sigue la proposición. ///

Nos interesa extender el homomorfismo anterior a un isomorfismo.

Para esto notemos que:

$$(\bar{\alpha} \bar{\delta}^{2j} - \bar{\alpha}^{j+1} \bar{\beta}^j) \xrightarrow{\text{reducción}} \alpha^2 (\delta + \alpha\beta)^{2j} - \alpha^{2j+2} \beta^{2j} = 0.$$

En efecto, como  $\bar{\alpha} \mapsto \alpha^2, \bar{\delta} \mapsto \delta, \bar{\beta} \mapsto \beta^2$ , tenemos que

$$\alpha^2 \delta^{2j} + \alpha^{2j+2} \beta^{2j} - \alpha^{2j+2} \beta^{2j} = \alpha^{2j+2} \beta^{2j} - \alpha^{2j+2} \beta^{2j} = 0.$$

De donde obtenemos el siguiente resultado.

2.7 Teorema.  $\frac{Z(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta})}{(2\bar{\alpha} = 2\bar{\beta} = 4\bar{\delta}, \bar{\alpha} \bar{\delta}^{2j} - \bar{\alpha}^{j+1} \bar{\beta}^j)} \xrightarrow{\cong} H^*(\Sigma_4; \mathbb{Z})_2$

### III. 3 CALCULO DE $H^*(\Sigma_4; Z)_3$

Solo nos resta calcular la 3-torsión, para esto usaremos las sucesiones espectrales de Hochschild-Serre y de Eockstein.

Para hacerlo tenemos las siguientes extensiones de grupos

$$1 \longrightarrow A_4 \triangleleft \Sigma_4 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow V_4 \longrightarrow A_4 \longrightarrow 1$$

que nos dan las siguientes sucesiones espectrales de Hochschild-Serre

$$E_2^{p,q} = H^p(Z_2; H^q(A_4; Z_3)) \Rightarrow H^{p+q}(\Sigma_4; Z_3)$$

$$d_r: E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p, q-r+1}$$

y

$$E_2^{p,q} = H^p(Z_3; H^q(Z_2 \times Z_2; Z_3)) \Rightarrow H^{p+q}(A_4; Z_3)$$

$E_2^{p,q} = 0$ , si  $p > 0$ , por el Teorema de Maschke (véase por ejemplo [R]).

así  $E_2^{0,q} = H^q(A_4; Z_2) \otimes Z_2$ .

Por otra parte  $E_2^{p,q} = 0$  si  $q > 0$  (aplicando el Teorema de Maschke).

Luego  $E_2^{p,0} = H^p(Z_3; Z_3)$ .

Consideremos ahora el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Z_3 & \longrightarrow & Z_3 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 A_4 & \longrightarrow & Z_3 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 V_4 & \longrightarrow & \{1\}
 \end{array}$$

$$\text{Luego } E_2^{p,q} = H^p(Z_3; H^q(\mathbb{Z}_2; Z_3)) \Rightarrow H^{p+q}(Z_3; Z_3)$$

$$\cong$$

$$E_2^{p,q} = H^p(Z_3; H^q(V_4; Z_3)) \Rightarrow H^{p+q}(A_4; Z_3)$$

Del Teorema 3.14 Capítulo II sabemos que si los términos  $E_2$  de dos sucesiones espectrales son isomorfos, entonces los  $E$  son isomorfos tenemos que

$$H^q(\Sigma_4; Z_3) = E_{\infty}^{0,q} = H^q(A_4; Z_3)^{Z_2} = H^q(Z_3; Z_3)^{Z_2} .$$

De Cartan [C] sabemos que  $H^*(Z_3; Z_3) = Z_3[u_2] \otimes E(u_1)$ , luego necesitamos tan solo conocer la  $Z_2$ -acción.

$Z_2$ -acción:

$Z_2$  actúa sobre  $Z_3$  por:  $g \longrightarrow g^{-1}$ . En efecto, si  $z = (123) \in Z_3 \subset A_4 \subset \Sigma_4$  entonces  $z^2 = (12)(123)(12)$ .

$H^1(Z_3; Z_2) \cong \text{Hom}(H_1(Z_3); Z_2) = \text{Hom}(Z_3; Z_2) = Z_2^\#$  (donde  $Z_2^\#$  es el espacio vectorial dual de  $Z_2$ ).

Así, la acción es, si  $f \in Z_2^\#$  entonces  $g \longrightarrow f(g^{-1}) = -f(g)$

luego

$$\begin{array}{ccc} u_1 & \xrightarrow{\quad} & -u_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ u_2 & \xrightarrow{\quad} & -\beta(u_1) = -u_2 \end{array}$$

y  $u_2^j u_1^\epsilon \longrightarrow (-1)^{j+\epsilon} u_2^j u_1^\epsilon$ , de donde  $H^*(Z_3; Z_3)^{Z_2}$  está generado por

$$u_2^{2j}, u_2^{2j-1} u_1.$$

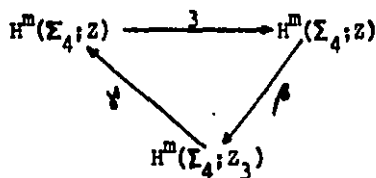
Ahora, es fácil calcular la sucesión espectral de Bockstein.

Sabemos que  $H^{4j}(\Sigma_4; \mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3(u_2^j)$

$H^{4j-1}(\Sigma_4; \mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3(u_2^{2j-1}u_1)$

$H^m(\Sigma_4; \mathbb{Z}_3) = 0$  en otro caso

y la sucesión espectral se obtiene de



con  $d = \beta^m$ .  $E_1^m = 0$  si  $m > 0$  y las  $d$ -cofronteras son  $u_2^{2j} \in H^{4j}(\Sigma_4; \mathbb{Z}_3)$

por lo tanto existe  $\eta^j \in H^4(\Sigma_4; \mathbb{Z})$  tal que  $\eta^j \xrightarrow{d} u_2^{2j}$  y  $\beta \eta = 0$ .

Así obtenemos nuestro resultado fundamental

3.8 Teorema.

$$H^m(\Sigma_4; \mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}]}{(2\bar{\alpha} = 2\bar{\delta} = 4\bar{\beta} = 3\bar{\eta}, \bar{\alpha}\bar{\delta}^4 = \bar{\alpha}^{j+1}\bar{\beta}^j)}$$

## Referencias

- [B] Brown, K. "Cohomology of Groups", Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, Vol. 87, 1984.
- [C-L] Cárdenas, H. Luis, E. "El álgebra de Cohomología del Grupo  $S_4$  con Coeficientes Enteros", An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma de México, 22 (1982), 137-188.
- [C] Cartan, H. "Algebres D'Eilenberg-MacLane et Homotopie", 1954/55 2e edition multigraphiée, Paris. Exposé #8, Exposé #9, Exposé #10.
- [C-E] Cartan, H. Eilenberg, S. "Homological Algebra", Princeton Math. Serie, 19(1956).
- [D] Dickson, L. "A fundamental system of invariant of the general linear group". Trans. Am. Math. Soc., 12 (1911), 75-98.
- [E] Evens, L. "The Cohomology Ring of a Finite Group" Trans. Amer. Math. Soc., 101(1961), 224-239.
- [E1] \_\_\_\_\_ "On the Chern Classes of Representations of Finite Groups". Trans. Math. Soc. 103(1963), 180-193.
- [Mc] MacLane, S. "Origins of the Cohomology of Groups", L'Enseignement Mathem., tXXIV, fasc. 1-2 1-32.
- [M-T] Mosher, R. Tangora, K. "Cohomology Operations and Applications in Homotopy Theory", Harper & Row, New York, 1968



- [N] Nakaoaka, M. "Note on Cohomology Algebras of Symetric Groups", Osaka City Univ. Journal of - - Mathematics, 13(1962), 45-55.
- [R] Rotman, J. "Introduction to Homological Algebra", - Academic Press, New York, 1979.
- [T] Thomas, C.B. "The Integral Cohomology Ring of  $\mathbb{Z}_4$ " Mathematika, 21(1974), 228-232.
- [TL] \_\_\_\_\_ "Chern Classes and Groups with periodic Cohomology", Math. Annalen, 190(1971), 323-328.
- [Q] Quillen, D. "The Adams Conjecture", Topology, 10, - 1971, 67-80.
- [Q-V] Quillen, D. "Cohomology of Finite Groups and Elem-- Venkov, B.B. entary Abelian Subgroups" Topology -- 11(1972), 317-318 .

# INDICE DE SIMBOLOS

$\cong$	(isomorfismo) 3
$\otimes$	(producto tensorial) 6
$\rtimes$	(producto semi-directo) 2
$( \ )$	(permutación) 2
$[ 1$	(clase de cohomología) 29
$  1$	(orden) 15
$[G:F]$	(índice de F en G) 9
$\Rightarrow$	(convergencia de sucesión espectral) 32
$\times$	(producto) 2
$\triangleleft$	(subgrupo normal) 47
$A_4$	(grupo alternante) 47
B	(módulo de cofronteras) 32
BG	(espacio clasificante de G) 2
$C^{p,q}$	(complejo de cocadenas) 37
$E( \dots )$	(álgebra exterior) 4
$E_r^{p,q}$	(sucesión espectral) 30
$F^p$	(filtración) 33
GL	(grupo lineal) 20
Gr M	(módulo asociado) 33
$gr(x)$	(grado de x) 4
$H^*(G;M)$	(cohomología de G con coeficientes en M) 1
$H^*(\Sigma_4;Z)$	(cohomología del grupo simétrico en cuatro letras con coeficientes enteros) 1
$H^*(\Sigma_4;Z)_p$	(p-componente primaria) 1
$H^*(\Sigma_{4,2};Z)$	(cohomología del 2-subgrupo de Sylow del grupo simétrico en cuatro letras) 1
$H^q(F;\Lambda)^W$	(grupo de cohomología de invariantes bajo W) 8

$\text{Hom}_G(F, M)$	(grupo de homomorfismos de $F$ en $M$ ) 44
$(\text{Hom}_H(F, M))^Q$	(subgrupo de invariantes bajo $Q$ ) 44
$P(x_1, \dots, x_n)$	(álgebra de polinomios) 4
$\Sigma_n$	(grupo simétrico en $n$ letras) iii
$\Sigma_{p^s, p}$	( $p$ -subgrupo de Sylow de $\Sigma_{p^s}$ ) 9
$W$	(grupo de Weyl) 3
$Z$	(módulo de cociclos) 32
$Z_n$	(enteros módulo $n$ )
$Z_n$	(anillo de polinomios con coeficientes en $Z_n$ ) 3
$Z_3^\#$	(dual de $Z_3$ ) 48
$Z_2[u, v]^W$	(anillo de polinomios en $u, v$ con coeficientes en $Z_2$ , invariantes bajo $W$ ) 21

## INDICE ALFABETICO

- A**  
álgebra exterior, 4  
álgebra de polinomios, 4  
asociado módulo graduado, 33
- B**  
Bockstein homomorfismos, 28  
  pareja exacta, 27  
  sucesión espectral, 33
- C**  
clasificante espacio, 2  
clases dobles, 10  
cociclos, 32  
cofronteras, 32  
cohomología de grupo, 1  
complejo de cocadenas, 37  
  doble, 37  
  total, 38
- D**  
decreciente filtración, 33  
detectante familia, 2  
diferencial,  
  dual, 48
- E**  
elemental p-grupo abeliano, 2  
extensión de grupo, 44
- F**  
filtración finita, 33  
  escotada, 36
- G**  
grupo lineal, 6
- H**  
Hochschild-Serre sucesión espectral, 44
- P**  
Pareja exacta, 26  
  derivada, 30  
permutación, 2
- S**  
subcociente de un módulo, 32  
Sucesión espectral, 30  
Sylow subgrupos, cálculo de cohomología via, 1
- W**  
Weyl grupo de, 3