

22
2Ej



**Universidad Nacional Autónoma
de México**

Facultad de Ingeniería

**“ DISEÑO SIMPLIFICADO DE CASCARONES
CILINDRICOS DE CONCRETO REFORZADO ”**

Tesis Profesional

Que para obtener el Título de
INGENIERO CIVIL

presentan

**MIGUEL BARRETO MARTINEZ
GERARDO MATA RIVERA**

Director de Tesis:
ROBERTO GOMEZ MARTINEZ



México, D. F.

1987



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

DISEÑO SIMPLIFICADO DE CASCARONES CILINDRICOS DE CONCRETO REFORZADO.

- I. INTRODUCCION.
- II. METODOS SIMPLIFICADOS DE ANALISIS.
 - II.1 Método de la Viga.
 - II.2 Teoría de la Membrana.
 - II.3 Método del Elemento Finito.
- III. APLICACIONES.
 - III.1 Aplicación del Método de la Viga.
 - III.2 Aplicación de la Teoría de la Membrana.
 - III.3 Aplicación del Método del Elemento Finito.
- IV. COMPARACION CON EL METODO DEL ELEMENTO FINITO.
 - IV.1 Comparación de los resultados obtenidos del análisis de un cascarón largo por los Métodos de la Viga y del Elemento Finito.
 - IV.2 Comparación de los resultados obtenidos del análisis de un cascarón corto por los Métodos de la teoría de la Membrana y del Elemento Finito.
- V. DISEÑO DE LOS CASCARONES CILINDRICOS.
 - V.1 Diseño del cascarón cilíndrico largo.
 - V.2 Diseño del cascarón cilíndrico corto.
- VI. CONCLUSIONES.
- VII. REFERENCIAS.

CAPITULO I

INTRODUCCION:

Los cascarones delgados son estructuras especiales formados por losas curvas cuyo espesor es pequeño con respecto a las demás dimensiones de la misma. Se pueden clasificar de diferentes maneras, siendo la más común, la clasificación por el tipo de curvatura, existiendo los cascarones de curvatura simple y doble.

En la Fig. I.1 se ha representado un cascarón aislado de curvatura simple, apoyado sobre tímpanos y éstos a su vez sobre cuatro columnas; por este motivo se le designa autoportante.

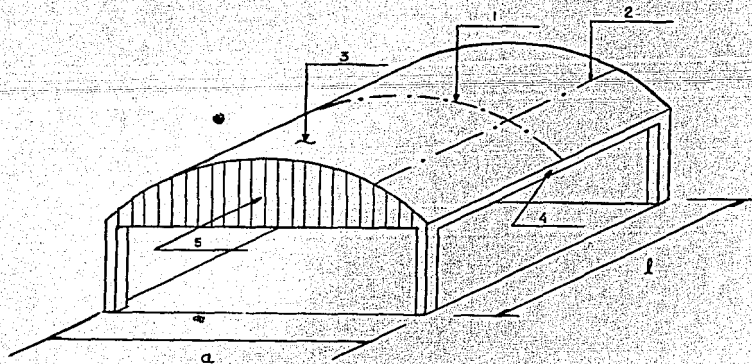


Fig. I.1 Cascarón cilíndrico auto-portante.

La geometría del cascarón se define por medio de:

a) La directriz que se indica con el número (1); es la curva, puede ser un elemento de circunferencia, elipse, cicloide, etc.

b) La generatriz se ha indicado con el número (2); es la recta, se apoya sobre la directriz, generando en su movimiento la superficie cilíndrica de la bóveda.

c) El ancho de la bóveda o cuerda de la directriz se ha indicado con la letra (a).

d) La longitud se indica con la letra (l).

Los elementos constructivos son:

a) El cascarón propiamente dicho o lámina que se ha indicado con el número (3); se acostumbra designarlo en función de la directriz, así se dice: cascarón circular, cascarón elíptico, etc.

b) El espesor del cascarón cuya magnitud varía entre los 5 y 10 centímetros, dependiendo éste de la forma de colocación del concreto.

c) El elemento de borde se ha indicado con el número (4); denominándolos con el nombre de viga de borde.

d) Con el número (5); se ha indicado el refuerzo de extremo del cascarón; se le conoce como tímpano.

Si a los cascarones delgados cilíndricos se les colocan elementos resistentes adecuadamente en los extremos, se pueden alcanzar con bastante margen de seguridad, claros de hasta 40 metros. Hay que tener presente el peligro de pandeo, sobre todo en una estructura esbelta como son los cascarones. El pandeo es proporcional al espesor del cascarón y al módulo de elasticidad del material e inversamente proporcional al radio de curvatura.

Se considera un radio peligroso para el pandeo en los cascarones "cortos" de concreto armado, de 7 cm de espesor, alrededor de los 50 mts. y para los cascarones "largos" alrededor de los 20 mts.

Para claros mayores de 50 metros es aconsejable el cascarón con nervaduras (los nervios orientados según la directriz y la generatriz, espaciados entre 3 y 4 mts.).

Cuando se le colocan a los cascarones vigas de borde pretensadas y nervaduras, es posible alcanzar los 70 mts. de claro, sin peligro de pandeo.

Existen también cascarones de doble curvatura que

pueden tener la misma dirección como son los domos o cúpulas, ó con direcciones opuestas, que generalmente tienen la apariencia de un silla de montar o placa alabeada.

En esta tesis sólo se estudiarán los cascarones de curvatura simple, específicamente los cascarones cilíndricos.

Los cascarones cilíndricos se clasifican en: cascarones cerrados y abiertos. Los cascarones cerrados son aquellos cuya generatriz se apoya en una directriz circular generando una superficie cilíndrica cerrada con ella misma, de tal manera que forma un tubo. Si su generatriz no es cerrada sobre sí misma, entonces es un cascarón cilíndrico circular abierto.

Los cascarones cilíndricos abiertos a su vez se clasifican en: largos, intermedios y cortos, dependiendo de la relación Radio - Longitud (r/l).

Cascarón largo: $(r/l) < 0.6$

Cascarón intermedio: $2 > (r/l) > 0.6$

Cascarón corto: $(r/l) > 2.0$

En el capítulo II se presentan dos métodos simplificados de análisis y la justificación en su aplicación al análisis y diseño de cascarones cilíndricos:

- a) Método de la viga. Aplicable a cascarones largos.
- b) Teoría de la Membrana. Empleada en cascarones cortos.

También se presenta de manera muy general, al método del elemento finito, el cual se empleará para comparar los resultados obtenidos con los dos métodos antes señalados.

En el capítulo III se muestra el procedimiento de análisis de los 3 métodos descritos, aplicados a algunos ejemplos típicos de cascarones.

Los resultados obtenidos de los ejemplos del capítulo anterior se compararán en el capítulo IV.

En el siguiente capítulo se discute el diseño de los cascarones analizados en este trabajo.

Las conclusiones a las que se llegó al efectuar este estudio, se encuentran en el capítulo VI.

CAPITULO II

METODOS SIMPLIFICADOS DE ANALISIS:

Para el análisis de cascarones cilíndricos existen varios métodos, de los cuales únicamente se estudiarán dos en este trabajo: Método de la Viga y Teoría de la Membrana. Ambos son de fácil aplicación y se considera que su empleo en el análisis de cascarones hasta de 30 a 40 m de claro es bastante práctico. Sin embargo, para la correcta aplicación de estos dos métodos es conveniente hacer las siguientes aclaraciones:

Los cascarones cilíndricos, según la relación radio-longitud (r/l) que guardan entre sí, se han clasificado en dos grupos: 1) cascarones largos y 2) cascarones cortos.

Se han clasificado entre el grupo de cascarones largos aquellos en los cuales su relación (r/l) < 0.6 .

Se ha demostrado que la aplicación del método de la viga en el análisis de este tipo de cascarones conduce a resultados razonables.

Se consideran cascarones cortos aquellos en los que (r/l) > 2.0 .

El análisis de estos cascarones se hace mediante la aplicación de la teoría de la membrana, dando resultados bastante aproximados. Las fórmulas aplicadas en cada caso particular dependerán de la forma de la cáscara, del tipo de carga aplicada, de la condición de apoyo transversal y de la condición de borde longitudinal.

Naturalmente entre estos dos límites la clasificación es indeterminada y a los cascarones en tal condición se les conoce como cascarones intermedios. Se recomienda el método del elemento finito para su análisis.

II.1 METODO DE LA VIGA.

Este método de análisis simplificado de cascarones desarrollado por H. Lundgren, es aplicable con suficiente precisión en cascarones con ciertas condiciones de borde. El método se puede aplicar a los cascarones con vigas de borde no demasiado peraltadas, a los cascarones internos pertenecientes a un arreglo múltiple o continuo de ellos y a los cascarones sencillos, sin vigas de borde; siempre y cuando cumplan que la relación r/l sea menor que 0.6.

El método consiste en analizar al cascarón considerando primero como una viga y tratándolo después como un arco, empleando un análisis convencional de estructuras indeterminadas.

Las suposiciones o hipótesis consideradas en el método de la viga, aparte de las suposiciones usuales en la teoría de flexión, son:

- 1.- Todos los puntos de una sección transversal se flexionan la misma magnitud verticalmente y no se flexionan o deforman horizontalmente.
- 2.- El esfuerzo cortante radial, los esfuerzos flexionantes radiales o los esfuerzos torsionantes no actúan sobre las secciones de corte transversal.
- 3.- La deformación producida por las fuerzas cortantes es despreciable.

Las suposiciones o hipótesis anteriores constituyen además las limitaciones del método, y cuando dichas suposiciones no concuerdan rigurosamente con el comportamiento real del cascarón, el método no puede aplicarse.

La primera hipótesis está basada en la teoría de la flexión ordinaria.

La segunda hipótesis se basa en que las fuerzas que producen los esfuerzos mencionados son usualmente pequeñas y por lo tanto se pueden despreciar.

La tercera hipótesis en algunos casos es razonable,

ya que se emplea en la teoría de flexión para vigas, marcos y arcos; sin embargo, los errores en los desplazamientos causados por esta suposición, pueden llegar a ser importantes, aunque los errores en las fuerzas y momentos (debidos a la hipótesis) no sean tan significativos.

II.1.1 ANALISIS DEL CASCARON CILINDRICO CONSIDERANDOLO COMO VIGA.

Cuando un cascarón cilíndrico cumple con la relación r/l menor que 0.6, se le clasifica como un cascarón largo, y su comportamiento es semejante al de una viga, cuya sección transversal es la del cascarón. Tratándolo de esta manera, los esfuerzos longitudinales para cualquier sección transversal del cascarón cilíndrico largo se obtienen con base en la teoría de flexión simple. (Fig. II.1.1 (a)).

$$f = \frac{Mc}{I} \quad (II.1);$$

los esfuerzos cortantes de membrana se calculan con la fórmula de cortante simple para la viga:

$$v = \frac{VQ}{Ib} \quad (II.2)$$

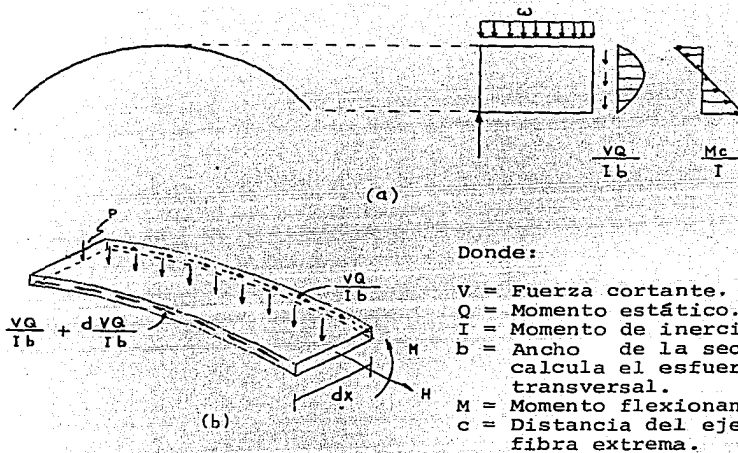


Fig. II.1.1

II.1.2. ANALISIS DEL CASCARON CILINDRICO CONSIDERANDOLO COMO ARCO.

El análisis del cascarón considerándolo como arco es un poco más complicado. Los esfuerzos de anillo transversal y los momentos flexionantes se calculan basados en la consideración de un elemento transversal de longitud dx del cascarón. La Fig. II.1.1 (b), muestra a dicho elemento en un diagrama de cuerpo libre y a las fuerzas actuando sobre él en direcciones transversales; estas consisten en la carga externa, los esfuerzos cortantes de membrana, y en el caso de cascarones múltiples, el momento de borde M y la fuerza de borde H . Las cargas superficiales verticales están mantenidas en equilibrio por la

componente vertical de las diferenciales de esfuerzo cortante $d \frac{VQ}{Ib}$, que integran el soporte vertical para el "arco", en lugar de las reacciones verticales correspondiente al arranque en un arco normal, (para el caso de cascarones cilíndricos las componentes horizontales de los esfuerzos cortantes diferenciales se equilibran). Puesto que la fuerza cortante en una viga simplemente apoyada bajo carga uniformemente repartida varía linealmente de extremo a extremo, habrá una diferencia en los esfuerzos cortantes de un lado al otro del elemento diferencial del cascarón (para un elemento prismático), por tanto:

Donde:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{VQ}{Ib} = \frac{w Q}{Ib} \quad (\text{II.3})$$

ϕ = ángulo entre las verticales que pasa por la corona y la sección considerada.

ϕ_k = ángulo desde la vertical al borde del cascarón.

Cuya componente vertical será:

$$\frac{w Q \text{ sen } (\phi_k - \phi)}{Ib}$$

Los esfuerzos cortantes que actúan tangente al arco, así como las cargas extremas, producen momentos transversales y empuje en el "arco", a los cuales se requiere determinar su magnitud. Existen varias formas de analizar los cascarones como arcos y obtener los momentos transversales, a continuación se ilustra una de ellas.

II.1.2.1

Una forma de calcular los momentos transversales es con el método del centro elástico, con el cual las reacciones son determinadas en el centro elástico en vez de en el borde, simplificando bastante la solución de las ecuaciones diferenciales simultáneas implicadas. Las ecuaciones propuestas son exactas siempre que se cumplan las suposiciones involucradas en el método de la viga.

A continuación se presentan dichas ecuaciones:

N O T A C I O N

| | | | |
|-----|--|----|--|
| b | = ancho de la sección donde se calcula el esfuerzo cortante transversal. | Q | = primer momento (momento estático alrededor del eje neutro del área de la sección transversal arriba (o abajo) de la sección donde se calcula el esfuerzo cortante transversal. |
| c | = distancia del eje neutro a la fibra extrema. | r | = radio al centro del cascarón. |
| E | = módulo de elasticidad. | v | = esfuerzo cortante tangencial. $\left(\frac{VQ}{Ib}\right)$ (II.2) |
| Fh | = componente horizontal de la fuerza. | t | = espesor del cascarón. |
| Fv | = componente vertical de la fuerza. | Tx | = esfuerzo longitudinal. $\left(\frac{Mc}{I}\right)$ (II.1) |
| Hce | = reacción horizontal en el centro elástico. | | |

| | | | |
|----------|--|-------------------|---|
| I | = momento de inercia del arco circular alrededor del eje neutro. | $T\phi$ | = esfuerzo directo actuando sobre el arco. |
| l | = claro longitudinal. | V | = fuerza cortante de la viga. |
| M | = momento. | $(\Delta h)_{ce}$ | = deflexión horizontal en el centro elástico. |
| M_{ce} | = momento en el centro elástico. | $(\theta)_{ce}$ | = rotación en el centro elástico. |
| $M\phi$ | = momento actuando sobre el arco. | ϕ | = ángulo medido de la vertical. |
| | | ϕ_k | = ángulo desde la vertical al borde del cascarón. |

ECUACIONES PARA LAS FUERZAS Y DEFORMACIONES.

Las siguientes ecuaciones fueron obtenidas basándose en los diagramas de cuerpo libre (ver la figura correspondiente para cada caso). F_v se obtuvo sumando las fuerzas verticales; F_h , sumando las fuerzas horizontales; y M tomando momentos alrededor de la intersección entre la fuerza F_v y el arco del cascarón. La integración de las ecuaciones sólo se empleó cuando fué necesario.

$$\frac{Et^3}{12} \theta_{ce} \text{ se obtuvo como la integral: } \int_0^{\phi_k} Mr d\phi, \text{ y (II.5)}$$

$$\frac{Et^3}{12} (\Delta h)_{ce} \text{ se obtuvo como la integral:}$$

$$\int_0^{\phi_k} Myr d\phi = \int_0^{\phi_k} Mr d\phi \left[r \cos\phi - \frac{r \sin\phi}{\phi_k} \right] \quad (\text{II.6})$$

PROPIEDADES DE LA SECCION TRANSVERSAL.

Según J. Chinn:

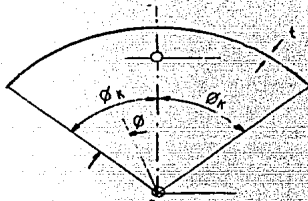


Fig. II.1.3

$$y = \frac{r \operatorname{sen} \phi_k}{\phi_k} \quad (\text{II.7})$$

$$I = r^3 \left[\phi_k + (\operatorname{sen} \phi_k) \left(\cos \phi_k - \frac{2 \operatorname{sen} \phi_k}{\phi_k} \right) \right] \quad (\text{II.8})$$

$$Q = 2r^2 \left(\operatorname{sen} \phi - \frac{\phi}{\phi_k} \operatorname{sen} \phi_k \right) \quad (\text{II.9})$$

CARGA MUERTA:

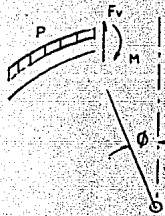


Fig. II.1.4

$$F_v = pr(\phi_k - \phi) \quad (\text{II.10})$$

$$M = pr^2 \left[\cos \phi - \cos \phi_k + (\operatorname{sen} \phi)(\phi - \phi_k) \right] \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{Et^3}{12} \theta_{ce} = pr^3 \left[2 \operatorname{sen} \phi_k - \phi_k (\cos \phi_k + 1) \right] \quad (\text{II.12})$$

$$\frac{Et^3}{12} (\Delta h)_{ce} = pr^4 \left[\frac{\phi_k}{4} + \frac{3}{8} \operatorname{sen} 2\phi_k + \operatorname{sen} \phi_k - \frac{2 \operatorname{sen}^2 \phi_k}{\phi_k} \right] \quad (\text{II.13})$$

CARGA UNIFORME:

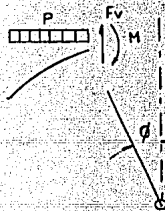


Fig. II.1.5

$$F_v = pr(\operatorname{sen} \phi_k - \operatorname{sen} \phi) \quad (\text{II.14})$$

$$M = \frac{1}{2} pr^2 (\operatorname{sen} \phi_k - \operatorname{sen} \phi)^2 \quad (\text{II.15.a})$$

$$= \frac{1}{2} pr^2 (\operatorname{sen}^2 \phi_k - 2 \operatorname{sen} \phi_k \operatorname{sen} \phi + \operatorname{sen}^2 \phi) \quad (\text{II.15.b})$$

$$\frac{Et^3}{12} \theta_{ce} = \frac{1}{2} pr^3 \left[\theta k \text{sen}^2 \theta k + \frac{3}{4} \text{sen} 2\theta k - 2 \text{sen} \theta k + \frac{\theta k}{2} \right] \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{Et^3}{12} (\Delta h)_{ce} = \frac{pr^4}{2} \left[\frac{\text{sen}^2 \theta k}{\theta k} \left(2 - \frac{3 \cos \theta k}{2} \right) - \frac{2}{3} \text{sen}^3 \theta k - \frac{\text{sen} \theta k}{2} \right] \quad (\text{II.17})$$

DIFERENCIAL DE CORTANTE.

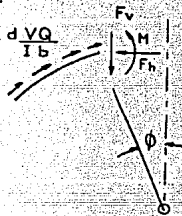


Fig. II.1.6

$$F_v = \frac{wr^3}{I} \left[\frac{\theta k - \theta}{2} + \frac{1}{4} (\text{sen} 2\theta k + \text{sen} 2\theta) - \left(\frac{\text{sen} \theta k}{\theta k} \right) (\text{sen} \theta k - \text{sen} \theta + \theta \cos \theta) \right] \quad (\text{II.18})$$

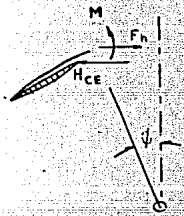
$$F_h = \frac{wr^3}{I} \left[\frac{\text{sen}^2 \theta k + \text{sen}^2 \theta}{2} + \frac{\text{sen} \theta k}{\theta k} (\cos \theta k - \cos \theta - \theta \text{sen} \theta) \right] \quad (\text{II.19})$$

$$M = \frac{wr^4}{I} \left[\cos \theta - \cos \theta k + \frac{\text{sen} \theta k}{2\theta k} \theta^2 - \frac{\theta k}{2} (\text{sen} \theta k + \text{sen} \theta) + \frac{\theta \text{sen} \theta}{2} + \frac{\text{sen}^2 \theta k}{2} \cos \theta - \frac{\text{sen} 2\theta k}{4} \text{sen} \theta + \frac{\text{sen}^2 \theta k}{\theta k} \text{sen} \theta + \frac{\text{sen} 2\theta k}{2\theta k} \cos \theta - \frac{\text{sen} \theta k}{\theta k} \right] \quad (\text{II.20})$$

$$\frac{Et^3}{12} \theta_{ce} = \frac{\omega r^5}{I} \left[\frac{\text{sen} \phi k}{2} - \phi k \left(\cos \phi k + \frac{1}{2} \right) - \frac{\phi k^2 \text{sen} \phi k}{3} + \frac{\text{sen}^3 \phi k}{2} + \frac{\text{sen}^2 \phi k}{\phi k} + \frac{\text{sen} 2\phi k}{4} (\cos \phi k - 1) \right] \quad (\text{II.21})$$

$$\frac{Et^3}{12} (\Delta h)_{ce} = \frac{\omega r^6}{I} \left[\frac{3}{8} \phi k + \frac{17}{16} \text{sen} 2\phi k + \frac{7}{12} \phi k \text{sen}^2 \phi k + \frac{\text{sen} \phi k}{2} - \frac{\text{sen}^2 \phi k}{\phi k} \left(2.5 - \frac{\cos \phi k}{2} + \frac{\text{sen} \phi k}{\phi k} \right) \right] \quad (\text{II.22})$$

H EN EL CENTRO ELASTICO.



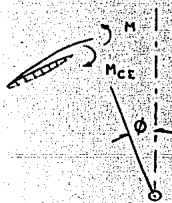
$$M = H_{ce} r \left(\cos \phi - \frac{\text{sen} \phi k}{\phi k} \right) \quad (\text{II.23})$$

$$\frac{Et^3}{12} \theta_{ce} = 0 \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{Et^3}{12} (\Delta h)_{ce} = \frac{1}{2} H_{ce} \quad (\text{II.25})$$

Fig. II.1.7

M EN EL CENTRO ELASTICO.



$$\frac{Et^3}{12} \theta_{ce} = r \phi k M_{ce} \quad (\text{II.26})$$

$$\frac{Et^3}{12} (\Delta h)_{ce} = 0 \quad (\text{II.27})$$

Fig. II.1.8

Para el análisis de un cascarón cilíndrico considerándolo como una viga simplemente apoyada, se calculan las propiedades geométricas de la sección transversal, se determinan las cargas externas (carga viva, carga muerta, etc.) que actúan sobre el cascarón como una carga uniformemente distribuida; y se obtienen el diagrama de momento flexionante y el de fuerza cortante. Los valores así obtenidos se substituyen en las ecuaciones de flexión y de cortante para vigas, tales como: $\frac{Mc}{I}$ y $\frac{VQ}{Ib}$ respectivamente, y para distintos valores de ϕ . (Ver Fig. II.1.1 (a)).

En el análisis del cascarón considerándolo como un arco; se efectúan las substituciones numéricas en las ecuaciones para $\left(\frac{Et^3}{12}\right) \theta_{ce}$; o sea, en las ecuaciones: II.12, II.16, II.21, II.26; resolviendo para M_{ce} . De igual forma se substituyen los valores numéricos en las ecuaciones para $\left(\frac{Et^3}{12}\right) (\Delta h)_{ce}$, que son las ecuaciones: II.13, II.17, II.22, II.25; resolviendo para H_{ce} ; de este modo se conocen los valores de M_{ce} y H_{ce} necesarios para evaluar el momento M_{ϕ} para determinados intervalos de ϕ empleando las ecuaciones: II.11, II.15, II.20, II.23 y además calcular el esfuerzo N_{ϕ} para los mismos intervalos de ϕ , aplicando las ecuaciones: II.10, II.14, II.18, II.19 y H_{ce}^* .

(*) Los resultados obtenidos del análisis del cascarón considerándolo como un arco son constantes a lo largo de todo el cascarón, puesto que no dependen de la longitud del mismo.

Los valores de los esfuerzos resultantes se tabulan de tal manera, que sea fácil su consulta para proponer la cantidad de acero de refuerzo necesaria, que requiera el diseño del cascarón.

El método de la viga para analizar cascarones cilíndricos, puede usarse con suficiente precisión en muchos casos prácticos; se puede emplear para cualquier valor de r/t y l/r , siempre y cuando las hipótesis consideradas en el método sean suficientemente válidas.

Una ventaja particular es que se puede usar para cualquier condición de apoyo y no se requieren ecuaciones especiales.

II.2 TEORIA DE LA MEMBRANA.

A continuación se desarrollará el Método de la Teoría de la Membrana en su aplicación a los cascarones cilíndricos cortos, con relación $r/l > 2.0$, de sección transversal circular.

El cascarón cilíndrico en su forma más general está constituido por tres partes principalmente: la cáscara, el diafragma o tímpano y la viga o tensor de borde.

En la Figura II.2.1 se muestra esquemáticamente un cascarón cilíndrico.

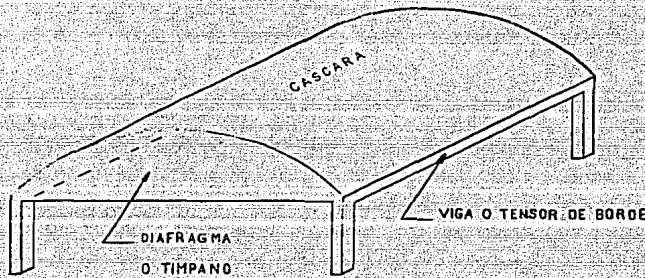


Fig. II.2.1

En la teoría de la membrana se considera que el cascarón es incapaz de soportar cualquier momento flexionante y que las cargas externas son transmitidas solamente por fuerzas internas normales y cortantes inducidas en la superficie del cascarón.

II.2.1 OBTENCION DE LAS ECUACIONES GENERALES.

Una superficie cilíndrica es generada por una línea recta que se mueve a lo largo de una curva, manteniéndose paralela a su dirección original. Las líneas rectas son llamadas "GENERATRICES" y las curvas de la superficie normales a ellas "DIRECTRICES".

Un cascarón cilíndrico se muestra en la figura II.2.2, en donde un punto cualquiera del cascarón está dado

por las coordenadas (X, ϕ) ; donde X es en la dirección de la generatriz, y el ángulo ϕ es la inclinación de la tangente a una directriz con respecto a la horizontal.

De manera que podemos dar la posición de un punto P cualquiera del cascarón por:

$$P = P(X, \phi)$$

Se supone que el material es homogéneo, elástico e isótropo.

Se supone también que en el cascarón actúan cargas externas distribuidas en la superficie, cuyas componentes se designaron con las letras $(X, Y$ y $Z)$ las cuales actúan en la dirección longitudinal X , en la dirección tangente a la curva y en la dirección radial Z .

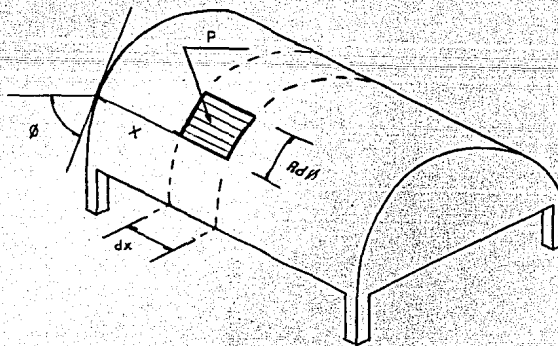


Fig. II.2.2 Coordenadas de un elemento diferencial de cáscara.

Se supondrá que debido a dichas fuerzas exteriores, se originan en las secciones del elemento diferencial un estado de tensiones normales y tangenciales, las cuales se designarán con las letras N y Q , respectivamente, y que estas tensiones varían de una cara a la otra. (Ver Fig. II.2.3).

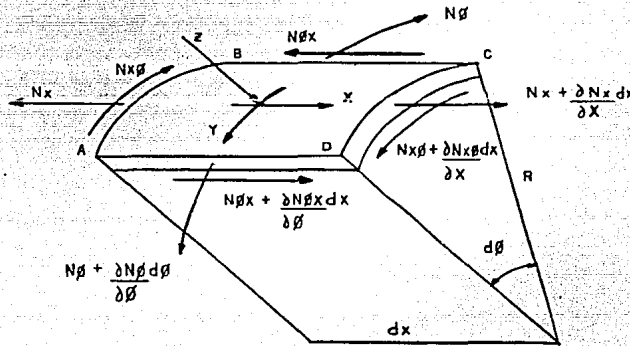


Fig. II.2.3 Fuerzas que actúan en un elemento diferencial de cáscara.

Si el sistema de fuerzas exteriores e interiores que actúa en el elemento diferencial se halla en equilibrio, deberán satisfacerse las ecuaciones fundamentales de la estática a lo largo de los ejes X , Y y Z :

Proyección de las fuerzas en el sentido de las X :

Al establecer el equilibrio en la dirección positiva,

se tiene que la fuerza total en el lado CD es igual al valor del esfuerzo normal multiplicado por la longitud del lado, es decir:

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) R d\phi \quad (II.28)$$

De manera similar, la fuerza total en el lado AB en dirección positiva de X es:

$$- N_x R d\phi \quad (II.29)$$

El esfuerzo cortante $Q\phi x$, en los lados BC y AD tienen componentes de fuerza en la dirección X, dadas por $-Q\phi x dx$ en el lado BC y en el lado AD, $\left(Q\phi x + \frac{\partial Q\phi x}{\partial \phi} d\phi \right) dx$

La componente de fuerza por carga externa en dirección X, es simplemente:

$$X R dx d\phi \quad (II.30)$$

Donde X = carga externa por unidad de área en dirección X.

Si se suman estas fuerzas y se iguala esa suma con cero, se obtiene la ecuación de equilibrio en dirección X:

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) R d\phi - N_x R d\phi + \left(Q\phi x + \frac{\partial Q\phi x}{\partial \phi} d\phi \right) dx - N\phi x dx + X R dx d\phi = 0 \quad (II.31)$$

Al reducir términos y dividir entre $R dx d\phi$ se obtiene:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_x}{R \partial \phi} = - X \quad (\text{II.32})$$

Proyección de las fuerzas en el sentido de la Y:

De manera similar, la ecuación de equilibrio en la dirección Y se escribe como:

$$\left(N_\phi + \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} d\phi - N_\phi \right) \cos \frac{d\phi}{2} dx + \left(N_x \phi + \frac{\partial N_x \phi}{\partial x} dx - N_x \phi \right) R d\phi + Y R dx d\phi = 0 \quad (\text{II.33})$$

donde: $\cos \frac{d\phi}{2} \approx 1$

Y = carga externa por unidad de área en dirección "y".

Al reducir términos y dividir entre $R dx d\phi$ se tiene:

$$\frac{\partial Q_x \phi}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} = - Y \quad (\text{II.34})$$

Proyección de las fuerzas en el sentido de la "Z":

Para obtener la ecuación de equilibrio en la dirección Z, se observa que el esfuerzo cortante $Q_x \phi$ no tiene re-

sultante de fuerzas en esta dirección, y solamente actúan las fuerzas $N\phi$ y Z . (Ver Fig. II.2.4).

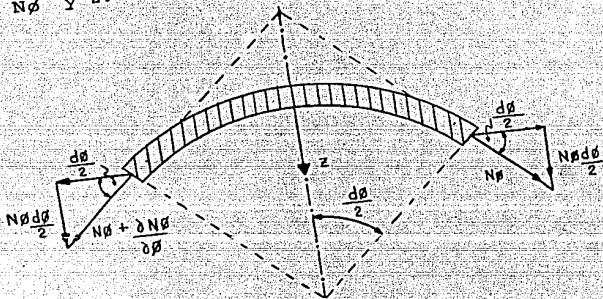


Fig. II.2.4 Componentes de las fuerzas según la dirección Z .

La componente de $N\phi$ en la dirección Z es:
 $N\phi dx \sin \frac{d\phi}{2}$, por tanto:

$$\left(N\phi + \frac{\partial N\phi}{\partial \phi} d\phi + N\phi \right) dx \sin \frac{d\phi}{2} + Z dx R d\phi = 0 \quad (\text{II.35})$$

Despreciando diferenciales de segundo orden y suponiendo que: $\sin \frac{d\phi}{2} \approx \frac{d\phi}{2}$, tenemos:

$$2N\phi dx \frac{d\phi}{2} + Z R d\phi dx = 0 \quad (\text{II.36})$$

Quedando finalmente:

$$N\phi = -ZR \quad (\text{II.37})$$

Donde Z = Carga externa por unidad de área en la dirección de "z".

Si suponemos que los cortantes en planos perpendiculares entre sí son iguales y de acuerdo con la teoría general de esfuerzos, el sistema de ecuaciones (II.32), (II.34) y (II.37) quedará como se indica a continuación:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\phi x}}{\partial \phi} = - X \quad (\text{II.38})$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial N_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial Q_{\phi x}}{\partial x} = - Y \quad (\text{II.39})$$

$$N_{\phi} = - ZR \quad (\text{II.40})$$

Como se puede apreciar en la ecuación (II.40), la fuerza normal N_{ϕ} no depende de ninguna ecuación diferencial; por tal motivo no podrá ser influenciada por ninguna condición de borde.

Las ecuaciones diferenciales (II.38) y (II.39), pueden integrarse en la dirección X y las constantes de integración dependerán solamente de ϕ . Se obtiene:

$$N_x \phi = - \int \left(Y + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\phi}}{\partial \phi} \right) dx + C_1(\phi) \quad (\text{II.41})$$

$$N_x = - \int \left(x + 1/R \frac{\partial N_x \phi}{\partial \phi} \right) dx + C_2(\phi) \quad (\text{II.42})$$

El radio R es constante en la dirección X (generatriz), siendo $r = f(\phi)$.

Para determinar los valores de las constantes de integración, debemos introducir las condiciones de bordes extremos y bordes marginales.

La primera condición la obtenemos de los tímpanos o bordes extremos; deberán hallarse exentos de fuerzas normales en la dirección de la generatriz: ($N_x = 0$).

Para ello conviene correr el origen de las coordenadas al centro de la bóveda, por lo tanto:

$$\left[N_x \right]_{x = -1/2}^{x = 1/2} = 0$$

Con respecto a los bordes marginales de las bóvedas auto-portantes, es necesario que los bordes estén libres y que las fuerzas normales, en la dirección de la directriz sean nulas:

$$\left[N_\phi \right]_{\phi} = \frac{\pi}{2} = 0$$

Para otras condiciones de borde la teoría de la membrana es insuficiente y exige que el cálculo se efectúe por otros métodos más exactos.

Integrando las ecuaciones (II.41) y (II.42), y habiendo determinado las constantes $C_1(\varnothing)$ y $C_2(\varnothing)$, de las ecuaciones diferenciales del equilibrio se obtiene:

$$N\varnothing = -ZR \quad (\text{II.43})$$

$$N_x\varnothing = - \left(Y + \frac{1}{R} \frac{\partial N\varnothing}{\partial \varnothing} \right) X \quad (\text{II.44})$$

$$N_x = - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varnothing} \left(Y + \frac{1}{R} \frac{\partial N\varnothing}{\partial \varnothing} \right) \left[\frac{1^2 - 4x^2}{8} \right] \quad (\text{II.45})$$

Las ecuaciones (II.43), (II.44) y (II.45), son generales y valen para cualquier directriz de un cascarón apoyado en 2 tímpanos.

II.2.2 DIRECTRIZ CIRCULAR.

La directriz circular es en particular el caso que nos interesa, por tal motivo se desea encontrar las ecuaciones para el cálculo de los esfuerzos que se presentan en un cascarón cilíndrico, el cual se encuentra sujeto a la acción de una carga uniformemente distribuida en la superficie del mismo y a la cual denominaremos como P, por unidad de superficie.

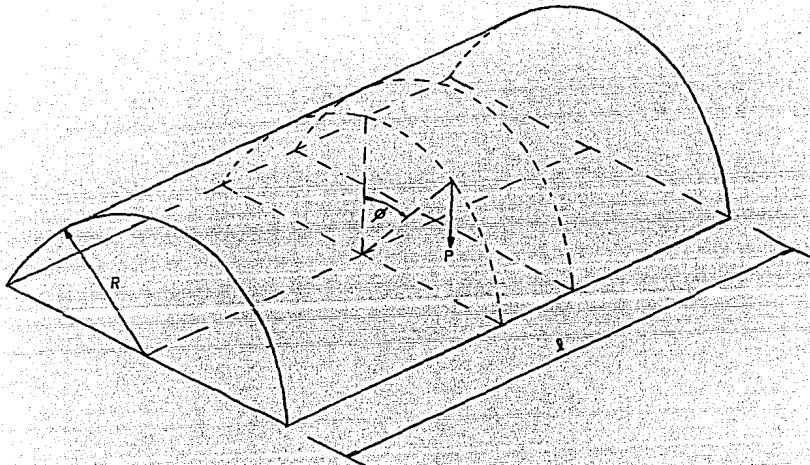


Fig. II.2.5

Si proyectamos P en la dirección de los tres ejes de coordenadas, se tendrá:

$$Z = P \cos\theta \quad (\text{II.46})$$

$$Y = P \sin\theta \quad (\text{II.47})$$

$$X = 0 \quad (\text{II.48})$$

Sustituyendo a Z en la ecuación (II.40), tendremos:

$$N\theta = -PR\cos\theta \quad (\text{II.49})$$

Sustituyendo ahora $N\theta$ y Y en la ecuación (II.39), se obtiene:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(-PR\cos\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial Q\theta x}{\partial x} = -P\sin\theta \quad (\text{II.50})$$

Por lo tanto nos queda:

$$\frac{\partial Q\theta x}{\partial x} = -2P\sin\theta \quad (\text{II.50.a})$$

$$\delta Q\phi x = - 2 P \operatorname{sen}\phi \, dx \quad (\text{II.50.b})$$

Ahora integrando se obtiene:

$$Q\phi x = - 2 P X \operatorname{sen}\phi + C_1 \quad (\text{II.51})$$

Si consideramos el origen del eje de las "X" en el centro del claro, de la Figura II.2.5 y debido a la simetría de la carga, el cortante será nulo en el centro del claro, si los extremos del cascarón están igualmente apoyados.

Por lo tanto, cuando $X = 0$:

$$Q\phi x = 0 \text{ y } C_1 = 0$$

Quedándonos:

$$Q\phi x = - 2 P X \operatorname{sen}\phi \quad (\text{II.52})$$

Si sustituimos ahora en la expresión (II.38), el valor de $Q\phi x$, se tendrá:

$$\frac{\delta N_x}{\delta X} + \frac{1}{R} \frac{\delta (-2 P X \operatorname{sen}\phi)}{\delta \phi} = 0 \quad (\text{II.53})$$

Por lo que:

$$\delta N_x = \frac{2 P X \operatorname{cos}\phi}{R} \, dx \quad (\text{II.53.a})$$

e integrando nos queda:

$$N_x = \frac{P X^2}{R} \operatorname{cos}\phi + C_2 \quad (\text{II.54})$$

Si los extremos del cascarón, están apoyados en tal forma que las reacciones actúen en los planos de las secciones transversales extremas, siendo $x = \frac{l}{2}$, entonces $N_x = 0$, por lo tanto, C_2 valdrá:

$$C_2 = -\frac{Pl^2}{4R} \cos\phi; \quad (\text{II.55})$$

y finalmente:

$$N_x = -\frac{P\cos\phi}{4R} (l^2 - 4x^2) \quad (\text{II.56})$$

Las ecuaciones de los esfuerzos normales (II.49) y (II.56), siguen una función lineal, ya que varían en función de la distancia vertical del punto considerando el eje horizontal.

Para el caso particular de cascarón cilíndrico, tanto los esfuerzos N_x como N_ϕ son de compresión.

En resumen, las ecuaciones para el cálculo de los esfuerzos por el método de la teoría elemental de la membrana para cascarones cilíndricos de sección transversal circular son:

$$N_\phi = -PR\cos\phi \quad (\text{II.49})$$

$$Q_\phi x = -2Px\sin\phi \quad (\text{II.52})$$

$$N_x = -\frac{P\cos\phi}{4R} (l^2 - 4x^2) \quad (\text{II.56})$$

Donde:

$N\phi$ = La componente de la fuerza directa en la dirección transversal, considerada positiva cuando sea de tensión.

Nx = La componente de la fuerza directa en la dirección longitudinal, considerada positiva cuando sea de tensión.

$Q\phi x$ = La fuerza cortante tangencial, considerada positiva cuando crea o produce tensión en la dirección de los valores incrementados de X y ϕ .

l = Longitud del cascarón entre apoyos.

R = Radio de la línea central del cascarón.

X = Distancia longitudinal medida desde el apoyo izquierdo.

ϕ = Angulo medido a partir de la vertical que pasa por la cima hacia los bordes.

P = Intensidad de la carga uniforme por unidad de área.

E = Módulo de elasticidad del concreto.

II.3 METODO DEL ELEMENTO FINITO.

El desarrollo del método del elemento finito está fuera del alcance de este trabajo, por lo que sólo se mencionará brevemente, ya que el programa SAP V que se empleó en el análisis de los cascarones cilíndricos utiliza dicho método en la obtención de los esfuerzos de membrana, que se tomarán como base de comparación con los esfuerzos resultantes obtenidos al aplicar el método de la viga y la teoría de la membrana.

El método del elemento finito es un método aproximado para resolver ecuaciones diferenciales de problemas de valores en la frontera o de valores en la frontera e iniciales, que se presentan en ingeniería y en la física-matemática. Esquemáticamente, la secuencia del método del elemento finito se puede resumir en los siguientes pasos:

- 1).- El medio continuo (dominio de las variables de las ecuaciones diferenciales) se divide en varias regiones, denominados elementos finitos, de las formas más convenientes de usar (líneas, triángulos, cuadriláteros, tetraedros, hexaedros, etc.), ver Fig. II.3.1.
- 2).- Mediante una selección apropiada de ciertos puntos de los elementos finitos, denominados puntos nodales, ver Fig. II.3.1, las variables

de la ecuación diferencial se aproximan mediante una combinación lineal de funciones de interpolación (conocidas), seleccionadas adecuadamente, y de los valores (desconocidos) de las variables, y en algunos casos de sus derivadas, especificados en los puntos nodales.

- 3).- Mediante el uso de los métodos variacionales o de los residuos pesados las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema, se transforman en ecuaciones del elemento finito que gobiernan, en forma aislada, a todos los elementos finitos.
- 4).- Los elementos finitos aislados se agrupan para formar un sistema global de ecuaciones diferenciales (en el problema de valores en la frontera e iniciales), o de ecuaciones algebraicas (en el problema de valores en la frontera), con sus propias condiciones de frontera o condiciones iniciales.
- 5).- Los valores de las variables de las ecuaciones diferenciales quedan definidas al resolver los sistemas de ecuaciones correspondientes.

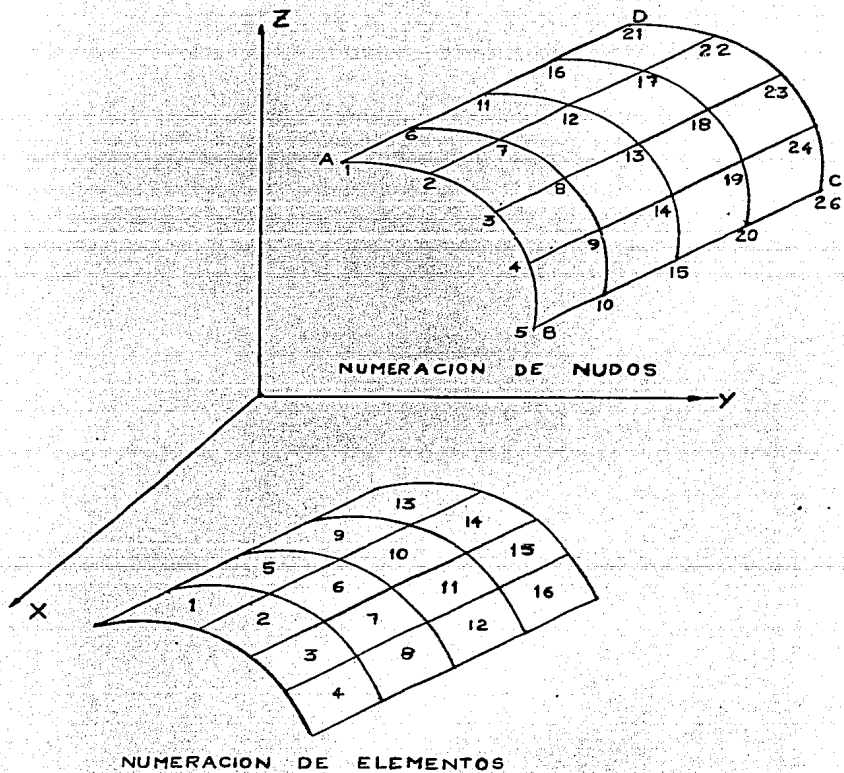


Fig. II.3.1 Representación del elemento finito.

CAPITULO III

APLICACIONES:

Con objeto de aclarar cualquier duda dejada en la exposición de la teoría, se presentan a continuación dos ejemplos de análisis simplificados para cascarones cilíndricos; el primero será un cascarón largo aplicando el método de la viga, y el segundo un cascarón corto empleando la teoría de la membrana. Estos a su vez resueltos por el método del elemento finito.

III.1 APLICACION DEL METODO DE LA VIGA.

Se aplicará el método de la viga propuesto por J. Chinn para un cascarón cilíndrico sencillo (aislado), simplemente apoyado, cuyas características se muestran en la figura III.1.1; el cual tiene un claro longitudinal de 19.0 m, un radio de 9.5 m. y por consiguiente, le corresponde una relación $r/l = 0.5$; el espesor de la cáscara es de 9 cm. (0.09m). La carga viva que soporta es de 60.0 Kg/m^2 que corresponde a la carga máxima W_m para cubiertas y azoteas con pendiente mayor de 5 % y menor de 20 %, según la tabla de cargas vivas unitarias de diseño que establece el artículo 227 del Regla-

mento de Construcciones del Departamento del D.F.; además se considerará una carga muerta adicional de 40 Kg/m^2 por tratarse de una losa de concreto de peso normal colada en el lugar y con una capa de mortero; según lo especifica el artículo 224 del mismo reglamento.

La carga viva se considera como uniformemente repartida sobre la proyección horizontal de la superficie del cascarón y la carga muerta uniformemente repartida en toda la superficie del cascarón.

III.1.1 OBTENCION DE LA CARGA TOTAL QUE SOPORTA EL CASCARON.

Como el espesor del cascarón es de 9 cm y considerando un peso volumétrico del concreto reforzado de 2.4 Ton/m^3 (2400 Kg/m^3), el peso propio del cascarón será:

$$\text{Peso propio (Po.Po.) del cascarón} = 2400 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 0.09\text{m} = 216.0 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2}$$

$$\text{Carga muerta adicional (Según el Reglamento de Construcción del D.D.F.)} = 40.0 \text{ "}$$

$$\text{Se consideró un peso de impermeabilizante} = \underline{5.0 \text{ "}}$$

$$\text{Por tanto, la carga muerta total será: } P_m = 261.0 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2}$$

$$\text{Carga viva: } P_v = 60.0 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2}$$

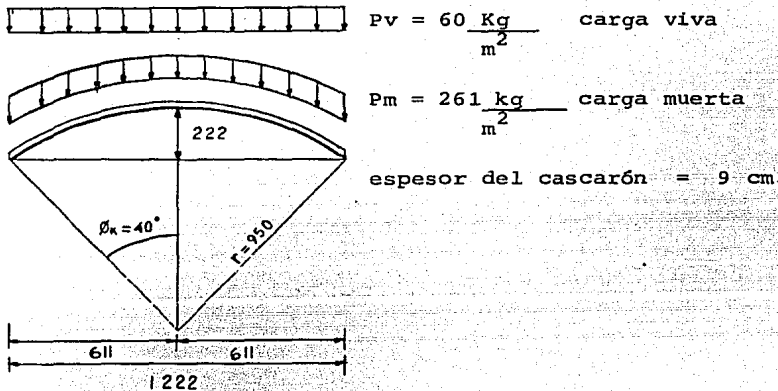


Fig. III.1.1 Cargas y dimensiones del cascarón cilíndrico, simplemente apoyado, con un claro longitudinal de 19.0 m y una relación $r/l = 0.5$.

Como los esfuerzos resultantes que se obtendrán al analizar al cascarón por el método de la viga, se compararán con los que resulten de aplicar el método del elemento finito a este mismo ejemplo, por medio del programa de computadora SAP V; es necesario estudiar varios puntos a lo largo del cascarón y en el sentido transversal del mismo. Considerando que el cascarón es de sección constante y que la carga actuante es uniforme, sólo se requiere estudiar una cuarta parte, debido a la simetría que presentan tanto el cascarón como las cargas en ambas direcciones. por tal motivo se analizarán los puntos localizados a los siguientes valores de θ a partir del

eje de simetría: 0° , 5° , 15° , 25° , 35° , 40° ; para cada sección transversal situada a las siguientes distancias, medidas a partir de uno de los extremos longitudinales: 0, 0.5, 3.5, 6.5 y 9.5 (m).

En la figura III.1.2 se muestra un croquis de la vista en planta y la sección transversal de la cuarta parte del cascarón, donde se localizan los puntos considerados en el análisis. Las secciones más importantes se encuentran en los extremos longitudinales, donde está apoyado el cascarón sobre los tímpanos y en los cuales el momento flexionante es nulo y la fuerza cortante es máxima; y en la mitad del claro longitudinal donde se presenta el momento flexionante máximo y la fuerza cortante nula; a continuación se presenta el cálculo de los esfuerzos correspondientes a estas secciones, los restantes se muestran en la tabla III.1.2 al final de esta sección.

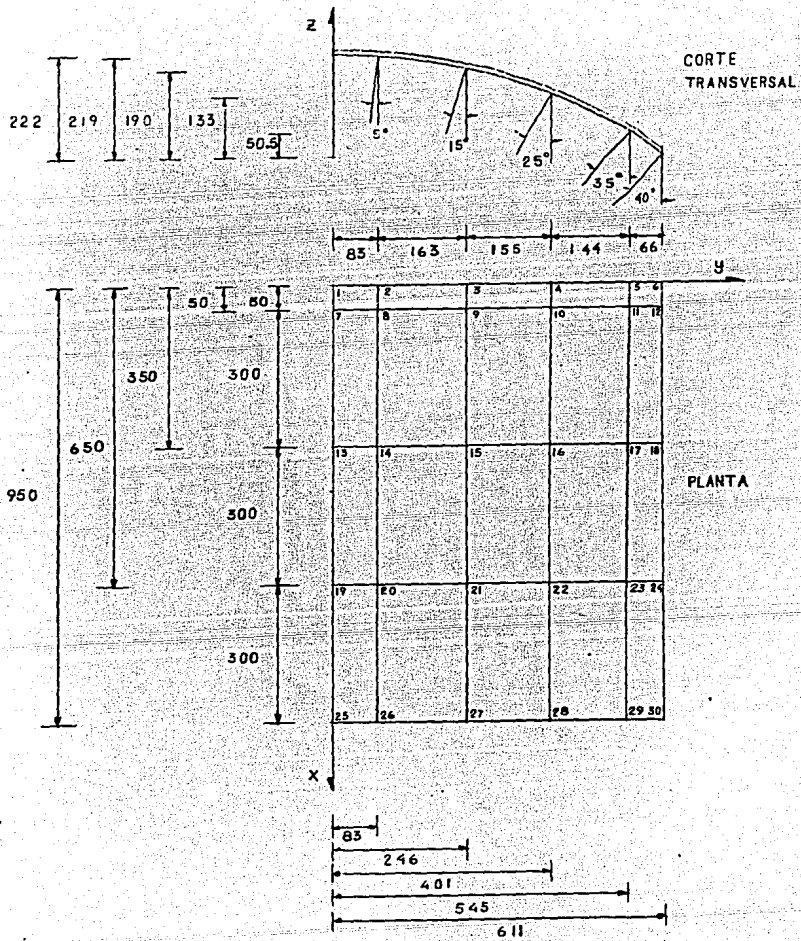


Fig. III.1.2

III.1.2 ANALISIS DEL CASCARON CONSIDERANDOLO COMO UNA VIGA.

Cálculo de la localización del eje neutro por medio de la ecuación II.22:

$$y = \frac{r \operatorname{sen} \phi_k}{\phi_k} = \frac{9.5 \times \operatorname{sen} 40^\circ}{40^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}} = 8.7469 \text{ m medido del centro del círculo.}$$

$$\phi_k \text{ en radianes} \Rightarrow \phi_k = 40^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = 0.6981317$$

Cálculo de c , que es la distancia del eje neutro a la fibra superior extrema:

$$c = r - y = 9.5 - 8.7469 = 0.7531 \text{ m}$$

La distancia del eje neutro a la fibra inferior extrema del cascarón, será:

$$c' = y - r \cos 40^\circ = 8.7469 - 9.5 \cos 40^\circ = 1.4695 \text{ m}$$

El momento de inercia de la sección transversal, será:

$$I = 9.5^3 \left[0.69813 + (\operatorname{sen} 40^\circ) \left(\cos 40^\circ - \frac{2 \operatorname{sen} 40^\circ}{0.69813} \right) \right]$$

$$\therefore I = 5.8934 \text{ m}^3$$

Cálculo del esfuerzo flexionante longitudinal, aplicando la fórmula de la flexión simple:

$$f = \frac{Mc}{I} \quad (\text{II.1})$$

Como el cascarón se considera como una viga simplemente apoyada soportando una carga uniformemente repartida, el momento flexionante máximo actuante, localizado a la mitad del claro longitudinal, será:

w = carga uniformemente repartida, la cual se obtiene sumando la carga viva repartida sobre la proyección horizontal de la superficie del cascarón y la carga muerta del mismo.

$$\text{Longitud transversal del cascarón} = 2r\phi k \quad (\text{III.1})$$

$$2r\phi k = 2 \times 9.5 \times 0.6981317 = 13.2645 \text{ m}$$

$$\therefore w = 60 \times 12.22 + 261 \times 13.2645 = 4195.235 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$$

Por tanto, el momento máximo será:

$$(\text{III.2}) \quad M_{\text{máx}} = \frac{wl^2}{8} = \frac{4195.235 (19.0)^2}{8} = 189309.98 \text{ Kg m}$$

Los esfuerzos máximos de compresión y de tensión, serán:

$$f_c = \frac{189309.98 (0.7531)}{5.8934} = 24191.357 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Esfuerzo de compresión en la corona de la sección transversal del cascarón.

$$f_t = \frac{189309.98 (1.4695)}{5.8934} = 47203.824 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$$

Esfuerzo máximo de tensión en la fibra inferior del cascarón.

Y el esfuerzo cortante es nulo para esta sección.

En el cálculo de los esfuerzos cortantes se utilizará la fórmula general $\frac{VQ}{Ib}$, aplicada en un ancho unitario, por tanto $b = 1\text{m}$. Los valores del momento estático Q y del esfuerzo cortante S , se obtendrán para los valores de ϕ : 0° , 5° , 15° , 25° , 35° , 40° ; y se muestran en la tabla III.1.1.

$$(II.9) \quad Q = 2r^2 \left(\text{sen}\phi - \frac{\phi}{\phi k} \text{sen}\phi k \right)$$

Momento estático alrededor del eje neutro del área de la sección transversal arriba (o abajo) de la sección donde se calcula el esfuerzo cortante.

$$\text{Para una viga simplemente apoyada: } V = w \left(\frac{L}{2} - x \right) = 0 \quad (III.3)$$

$$\therefore \text{ para } \left. \begin{array}{l} x = 0, V = \frac{wL}{2} \\ \text{ó } x = L, V = \frac{wL}{2} \end{array} \right\} (III.4) \text{ Fuerza cortante máxima.}$$

$$V = \frac{4195.235 \times 19.0}{2} = 39854.733 \text{ Kg}$$

$$\therefore S = \frac{VQ}{Ib} = \frac{39854.733 \times Q}{2 \times 5.8934}$$

(III.5) $S = 3381.3022 Q$ Esfuerzo cortante correspondiente a la mitad de la sección transversal.

El esfuerzo cortante máximo, será:

Como $Q = f(\phi)$, derivando Q e igualando a cero, se puede obtener el valor de ϕ para el cual el momento estático toma su valor máximo y en consecuencia el esfuerzo cortante S , también:

$$Q = 2r^2 \left(\text{sen}\phi - \frac{\phi}{\phi k} \text{sen}\phi k \right) \quad (\text{II.9})$$

$$\therefore \frac{dQ}{d\phi} = 2r^2 \left(\text{cos}\phi - \frac{1}{\phi k} \text{sen}\phi k \right) = 0 \quad (\text{III.6})$$

Como $r \neq 0$, la ecuación se satisface sólo si:

$$\left(\text{cos}\phi - \frac{1}{\phi k} \text{sen}\phi k \right) = 0 \quad (\text{III.7})$$

Despejando a ϕ , tenemos:

$$\text{cos}\phi = \frac{\text{sen}\phi k}{\phi k} \Rightarrow \phi = \text{ang cos} \left(\frac{\text{sen}\phi k}{\phi k} \times \frac{180^\circ}{\pi} \right) \quad (\text{III.8})$$

$$\text{para } \phi k = 40^\circ, \quad \phi = 22.967634^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Por tanto } Q_{\text{max}} = 3.813661 \text{m}^2 \\ \text{y } S_{\text{max}} = 3381.3022 \times Q_{\text{max}} = 12895.14 \frac{\text{Kg}}{\text{m}} \end{array} \right\} \text{ para } \phi = 22.967634^\circ$$

La tabla que se presenta en seguida, contiene los valores obtenidos del momento estático Q y el esfuerzo cortante correspondiente, sólo para esta sección a manera de ejemplo; para las demás secciones ver la tabla III.1.2 .

TABLA III.1.1 ESFUERZOS CORTANTES EN EL APOYO.

| θ° | Q m^2 | $S = \frac{VQ}{2I} , \frac{Kg}{m}$ |
|----------------|--------------|------------------------------------|
| 0 | 0.0 | 0.0 |
| 5 | 1.2287 | 4154.6605 |
| 15 | 3.2082 | 10847.729 |
| 25 | 3.7681 | 12741.149 |
| 35 | 2.0103 | 6797.3596 |
| 40 | 0.0 | 0.0 |

III.1.3 ANALISIS DEL CASCARON CONSIDERANDOLO COMO UN ARCO.

Sustituyendo valores en las ecuaciones para

 $\frac{(Et^3)}{12} \theta_{ce}$, tenemos:

$$\frac{Et^3}{12} \theta_{ce} = 261(9.5)^3 (0.0526436) = 11780.317 \quad (\text{II.12})$$

$$\frac{Et^3}{12} \theta_{ce} = \frac{60(9.5)^3}{2} (0.0905476) = 2328.9987 \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{Et^3}{12} \theta_{ce} = \frac{4195.235(9.5)^5}{5.8934} (0.00012184916) = 6711.675 \quad (\text{II.21})$$

$$\frac{Et^3}{12} \theta_{ce} = 9.5 \left(\frac{40\pi}{180} \right) M_{ce} = 6.6322512 M_{ce}.$$

Resolviendo para M_{ce} :

$$11780.317 + 2328.9987 - 6711.6753 - 6.6322512 M_{ce} = 0$$

$$\therefore M_{ce} = 1115.4041 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{m}}$$

Sustituyendo valores en las ecuaciones para

 $\frac{(Et^3)}{12} (\Delta h)_{ce}$, tenemos:

$$\frac{Et^3}{12} (\Delta h)_{ce} = 261(9.5)^4 (2.9616453 \times 10^{-3}) = 6296.047 \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{Et^3}{12} (\Delta h)_{ce} = \frac{60(9.5)^4}{2} (5.1585979 \times 10^{-3}) = 1260.5131 \quad (\text{II.17})$$

$$\frac{Et^3}{12} (\Delta h)_{ce} = \frac{4195.235(9.5)^6}{5.8934} (8.0117995 \times 10^{-6}) = 4192.3892 \quad (\text{II.22})$$

$$\frac{Et^3}{12} (\Delta h)_{ce} = \frac{5.8934}{2} H_{ce} = 2.9467 H_{ce} \quad (\text{II.25})$$

Resolviendo para Hce:

$$6296.0473 + 1260.5131 - 4192.3892 - 2.9467035 Hce = 0$$

$$\therefore Hce = 1141.6728 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$$

Una vez conocidos los valores de Mce y Hce, se requiere obtener M ϕ y T ϕ para los puntos localizados sobre la mitad de la sección transversal del cascarón (por simetría), a diferentes valores de ϕ .

Los momentos flexionantes M ϕ se calculan sustituyendo valores en las ecuaciones: II.11, II.15, II.20 y II.23; cuyos resultados aparecen en la tabla III.1.2.a. Los momentos finales se obtienen sumando los momentos parciales con el momento en el centro elástico Mce, para cada valor de ϕ , de acuerdo con los diagramas de cuerpo libre correspondientes a cada caso.

Las fuerzas T ϕ se calculan sustituyendo valores en las ecuaciones: II.10, II.14, II.18 y II.19; los resultados se muestran en la misma tabla III.1.2.a. Las fuerzas finales se obtienen sumando las fuerzas parciales con la fuerza en el centro elástico Hce, para cada valor de ϕ , de acuerdo también, con los diagramas de cuerpo libre correspondientes.

Los esfuerzos unitarios totales $N\phi$ en dirección de la directriz, para cada valor de ϕ , se calculan a partir de $T\phi$ y $M\phi$, aplicando la siguiente ecuación:

$$N\phi = \frac{T\phi}{t} + \frac{M\phi Z}{t^3/12} \quad (\text{III.9})$$

Donde:

Z = distancia desde la superficie media del cascarón ($Z = t/2$).

t = espesor del cascarón.

$$\therefore N\phi = \frac{T\phi}{t} + \frac{6 M\phi}{t^2} \quad (\text{III.10})$$

Si la fuerza normal $T\phi$ produce esfuerzos de compresión (signo negativo), en el punto considerado de la sección transversal del cascarón, y el momento flexionante $M\phi$ provoca esfuerzos de compresión en las fibras superiores al eje neutro y esfuerzos de tensión en las fibras inferiores al mismo; los esfuerzos de compresión se suman en la parte superior y se contraponen en la parte inferior; procediendo al contrario, si la fuerza $T\phi$ causa esfuerzos de tensión (signo positivo). En este caso el momento flexionante se considera negativo; siendo positivo si produce esfuerzos de tensión arriba del eje neutro y de compresión abajo del mismo. Los esfuerzos resultantes serán de acuerdo a la convención

de signos adoptada; los resultados aparecen en la tabla antes mencionada.

Los valores obtenidos del análisis del cascarón considerado como arco, son válidos para cualquier sección transversal del mismo, puesto que las cargas y el espesor son constantes.

TABLA III.1.2. a Solución del cascarón considerándolo como un arco.

| Ø | Tv ₁ | Tv ₂ | Tv ₃ | T _h | TØ | M ₁ | M ₂ | M ₃ | M ₄ | MØ |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------|
| | kg/m | kg/m | kg/m | kg/m | kg/m | kgm/m | kgm/m | kgm/m | kgm/m | kgm/m |
| 0 | 1731.02 | 235.51 | 2097.62 | -5383.6 | -4373.0 | 5510.88 | 1118.67 | 4403.56 | 859.8 | -250.79 |
| 5 | 1514.64 | 175.97 | 2087.02 | -5201.2 | -4455.9 | 4167.16 | 835.88 | 2860.34 | 818.5 | -208.77 |
| 15 | 1081.89 | 84.04 | 1834.98 | -3870.3 | -3397.7 | 2048.14 | 399.17 | 901.64 | 490.2 | 59.97 |
| 25 | 649.13 | 27.63 | 1095.60 | -1853.3 | -1130.5 | 697.76 | 131.24 | 139.33 | -156.4 | 269.36 |
| 35 | 216.38 | 2.73 | 189.61 | -254.2 | 917.0 | 71.93 | 12.97 | 2.38 | -1101.7 | -68.77 |
| 40 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.0 | 1141.7 | 0.00 | 0.00 | 0.41 | -1677.7 | -561.84 |

| Ø | NØ | | NØ | |
|----|-------------------|-------------|-------------------|-------------|
| | CAPA SUPERIOR | | CAPA INFERIOR | |
| | kg/m ² | kg/m | kg/m ² | kg/m |
| 0 | - 234 356.30 | - 21 092.07 | 137 178.36 | 12 346.05 |
| 5 | - 204 151.71 | - 18 373.65 | 105 131.11 | 9 461.80 |
| 15 | 6 673.18 | 600.59 | - 82 177.34 | - 7 395.96 |
| 25 | 186 968.22 | 16 827.14 | - 212 089.71 | - 19 088.07 |
| 35 | - 40 748.67 | - 3 667.38 | 61 126.74 | 5 501.41 |
| 40 | - 403 489.59 | - 36 314.06 | 428 859.89 | 38 597.39 |

TABLA III.1.2. b Solución del cascarón considerándolo como una viga.

| Ø | SECCION A: 0.00 | | SECCION A: 0.50 | | SECCION A: 3.50 | | SECCION A: 6.50 | | SECCION A: 9.50 | |
|----|-----------------|-------------|-----------------|-------------|-----------------|-------------|-----------------|-------------|-----------------|--------|
| | M 0 | V 39 855 | M 19 403 | V 37 757 | M 113 796 | V 25 171 | M 170 431 | V 12 586 | M 189 310 | V 0 |
| 0 | 0.00 | 0.00 | -2 479 | 0.00 | -14 542 | 0.00 | -21 779 | 0.00 | -24 192 | 0.00 |
| 5 | 0.00 | 4 155 | -2 360 | 3 936 | -13 844 | 2 624 | -20 734 | 1 312 | -23 030 | 0.00 |
| 15 | 0.00 | 10 848 | -1 414 | 10 277 | - 8 291 | 6 851 | -12 418 | 3 426 | -13 793 | 0.00 |
| 25 | 0.00 | 12 741 | 451 | 12 071 | 2 645 | 8 047 | 3 961 | 4 024 | 4 400 | 0.00 |
| 35 | 0.00 | 6 797 | 3 177 | 6 440 | 18 632 | 4 293 | 27 905 | 2 147 | 30 996 | 0.00 |
| 40 | 0.00 | 0.00 | 4 838 | 0.00 | 28 374 | 0.00 | 42 496 | 0.00 | 47 203 | 0.00 |

III.2 APLICACION DE LA TEORIA DE LA MEMBRANA.

Se aplicará el método de la teoría de la membrana para un cascarón cilíndrico circular, corto, sencillo (aislado), de concreto reforzado, simplemente apoyado entre tímpanos, cuyas características se muestran en la figura III.2.1.; el cual tiene un claro longitudinal de 5.0 m, un radio de 11.0 m, correspondiéndole una relación $r/l = 2.2$; el espesor de la cáscara es de 7.0 cm.

La carga viva uniformemente repartida será :

$C_v = 60.0 \text{ Kg/m}^2$, según el Reglamento de Construcciones del D.F., correspondiente a cubiertas con pendiente mayor del 5 % y menor del 20 %.

Determinación de la carga total que soporta el cascarón.

Peso propio (Po.Po.) del cascarón, espesor $d = 0.07 \text{ m}$.

$$0.07 \text{ m} \times 2400 \text{ Kg/m}^3 = 168.0 \text{ Kg/m}^2$$

$$\begin{array}{l} \text{Carga muerta adicional} \\ \text{(según el R.C.D.F.)} \end{array} = 40.0 \text{ Kg/m}^2$$

$$\begin{array}{l} \text{Se consideró un peso de} \\ \text{impermeabilización e ins-} \\ \text{talación} \end{array} = 12.0 \text{ Kg/m}^2$$

$$C_m = 220.0 \text{ Kg/m}^2$$

$$C_v = \frac{60.0 \text{ Kg/m}^2}{}$$

$$W_t = 280.0 \text{ Kg/m}^2$$

En esta teoría para analizar cascarones se despre-
 cia la influencia de los momentos, por ser muy pequeña, y
 sólo se consideran tres sollicitaciones: N_x fuerza normal se-
 gún la generatriz, N_ϕ fuerza normal según la tangente a la
 directriz (normal o perpendicular a la anterior), y $Q_x \phi$ fuer-
 za tangencial.

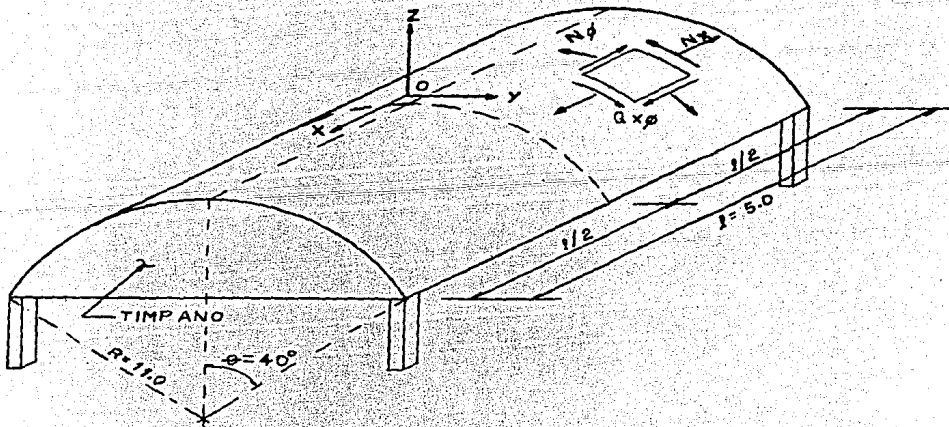


Fig. III.2.1

Según lo dicho anteriormente, para el cálculo de las fuerzas debemos aplicar las siguientes ecuaciones:

$$N_{\phi} = -PR \cos \phi \quad (\text{II.49})$$

$$Q_{x\phi} = -PX \sin \phi \quad (\text{II.52})$$

$$N_x = \frac{-P \cos \phi}{4R} (1^2 - 4x^2) \quad (\text{II.56})$$

En la Fig. III.2.2 se ha desarrollado el cascarón cilíndrico. Por razones de simetría se ha tomado la cuarta parte del cascarón y se seleccionaron 42 puntos, cada punto está en función de la distancia al centro y del ángulo de inclinación ϕ .

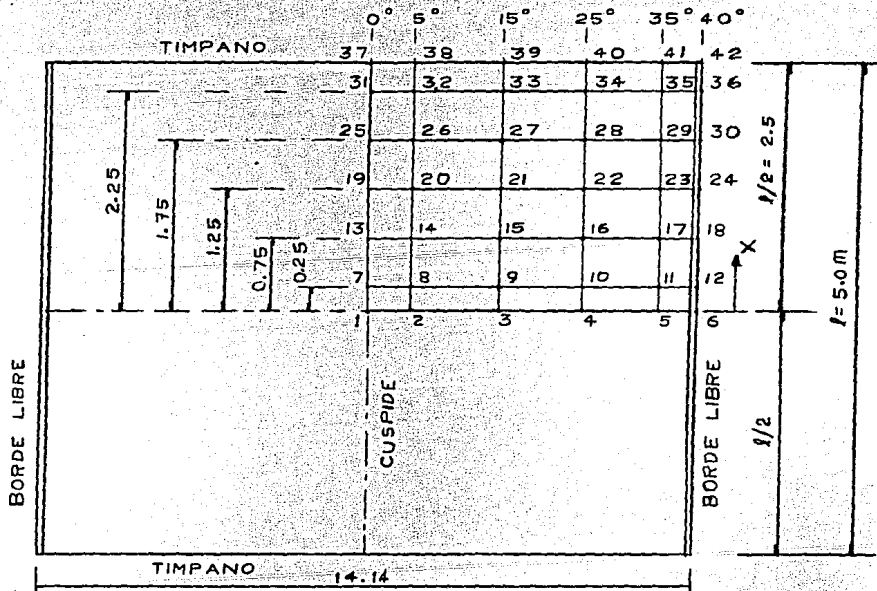


Fig. III.2.2 Por razones de simetría es suficiente calcular las solicitaciones para los puntos comprendidos dentro de la cuarta parte del cascarón.

TABLA III.2.1 FUERZAS DE MEMBRANA

| PUNTO | ANGULO GRADO | CONSTANTES $Wt = 280.0 \frac{kg}{m^2}$ $R = 11.0 m$ | COORDENADAS $x = 0.0 m$ $l = 5.0 m$ | FUERZAS POR UNIDAD DE LONG. | | |
|-------|-----------------|---|---|-----------------------------|------------------|--------------|
| | | | | $N\phi$ Kg/m | $Qx\phi$ Kg/m | Nx Kg/m |
| 1 | 0 | | | - 3080 | 0 | - 159 |
| 2 | 5 | | | - 3068 | 0 | - 158 |
| 3 | 15 | | | - 2975 | 0 | - 154 |
| 4 | 25 | | | - 2791 | 0 | - 144 |
| 5 | 35 | | | - 2523 | 0 | - 130 |
| 6 | 40 | | | - 2359 | 0 | - 122 |

| PUNTO | ANGULO GRADO | CONSTANTES $Wt = 280.0 \frac{Kg}{m^2}$ $R = 11.0 m$ | COORDENADAS $x = 0.25 m$ $l = 5.0 m$ | FUERZAS POR UNIDAD DE LONG. | | |
|-------|-----------------|---|--|-----------------------------|------------------|--------------|
| | | | | $N\phi$ Kg/m | $Qx\phi$ Kg/m | Nx Kg/m |
| 7 | 0 | | | - 3080 | 0 | - 158 |
| 8 | 5 | | | - 3068 | - 12 | - 157 |
| 9 | 15 | | | - 2975 | - 36 | - 152 |
| 10 | 25 | | | - 2791 | - 59 | - 143 |
| 11 | 35 | | | - 2523 | - 80 | - 129 |
| 12 | 40 | | | - 2359 | - 90 | - 120 |

| PUNTO | ANGULO GRADO | CONSTANTES $Wt = 280.0 \frac{Kg}{m^2}$ $R = 11.0 m$ | COORDENADAS $x = 0.75 m$ $l = 5.0 m$ | FUERZAS POR UNIDAD DE LONG. | | |
|-------|-----------------|---|--|-----------------------------|------------------|--------------|
| | | | | $N\phi$ Kg/m | $Qx\phi$ Kg/m | Nx kg/m |
| 13 | 0 | | | - 3080 | 0 | - 145 |
| 14 | 5 | | | - 3068 | - 37 | - 144 |
| 15 | 15 | | | - 2975 | - 109 | - 140 |
| 16 | 25 | | | - 2791 | - 178 | - 131 |
| 17 | 35 | | | - 2523 | - 241 | - 119 |
| 18 | 40 | | | - 2359 | - 270 | - 111 |

TABLA III.2.1 FUERZAS DE MEMBRANA

| PUNTO | ANGULO | CONSTANTES | COORDENADAS | FUERZAS POR UNIDAD DE LONG. | | |
|-------|--------|---|-----------------------------|-----------------------------|-------------|-------|
| | | | | $N\phi$ | $Q_{x\phi}$ | N_x |
| | GRADO | $Wt = 280.0 \frac{Kg}{m^2}$ $R = 11.0 m$ | $x = 1.25 m$ $l = 5.0 m$ | Kg/m | Kg/m | Kg/m |
| 19 | 0 | | | - 3080 | 0 | - 119 |
| 20 | 5 | | | - 3068 | - 61 | - 119 |
| 21 | 15 | | | - 2975 | - 181 | - 115 |
| 22 | 25 | | | - 2791 | - 296 | - 108 |
| 23 | 35 | | | - 2523 | - 402 | - 98 |
| 24 | 40 | | | - 2359 | - 450 | - 91 |

| PUNTO | ANGULO | CONSTANTES | COORDENADAS | FUERZAS POR UNIDAD DE LONG. | | |
|-------|--------|---|-----------------------------|-----------------------------|-------------|-------|
| | | | | $N\phi$ | $Q_{x\phi}$ | N_x |
| | GRADO | $Wt = 280.0 \frac{Kg}{m^2}$ $R = 11.0 m$ | $x = 1.75 m$ $l = 5.0 m$ | Kg/m | Kg/m | Kg/m |
| 25 | 0 | | | - 3080 | 0 | - 81 |
| 26 | 5 | | | - 3068 | - 85 | - 81 |
| 27 | 15 | | | - 2975 | - 254 | - 78 |
| 28 | 25 | | | - 2791 | - 414 | - 74 |
| 29 | 35 | | | - 2523 | - 572 | - 67 |
| 30 | 40 | | | - 2359 | - 630 | - 62 |

| PUNTO | ANGULO | CONSTANTES | COORDENADAS | FUERZAS POR UNIDAD DE LONG. | | |
|-------|--------|---|-----------------------------|-----------------------------|-------------|-------|
| | | | | $N\phi$ | $Q_{x\phi}$ | N_x |
| | GRADO | $Wt = 280.0 \frac{Kg}{m^2}$ $R = 11.0 m$ | $x = 2.25 m$ $l = 5.0 m$ | Kg/m | Kg/m | Kg/m |
| 31 | 0 | | | - 3080 | 0 | - 30 |
| 32 | 5 | | | - 3068 | - 110 | - 30 |
| 33 | 15 | | | - 2975 | - 326 | - 29 |
| 34 | 25 | | | - 2791 | - 533 | - 27 |
| 35 | 35 | | | - 2523 | - 723 | - 25 |
| 36 | 40 | | | - 2359 | - 810 | - 23 |

TABLA III.2.1 FUERZAS DE MEMBRANA

| PUNTO | ANGULO GRADO | CONSTANTES $Wt = 280.0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ $R = 11.0 \text{ m}$ | COORDENADAS $x = 2.50 \text{ m}$ $l = 5.0 \text{ m}$ | FUERZAS POR UNIDAD DE LONG. | | |
|-------|-----------------|---|--|-----------------------------|------------------|--------------|
| | | | | $N\phi$ Kg/m | $Qx\phi$ Kg/m | Nx Kg/m |
| 37 | 0 | | | - 3080 | 0 | 0 |
| 38 | 5 | | | - 3068 | - 122 | 0 |
| 39 | 15 | | | - 2975 | - 362 | 0 |
| 40 | 25 | | | - 2791 | - 592 | 0 |
| 41 | 35 | | | - 2523 | - 803 | 0 |
| 42 | 40 | | | - 2359 | - 900 | 0 |

III.3 APLICACION DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO.

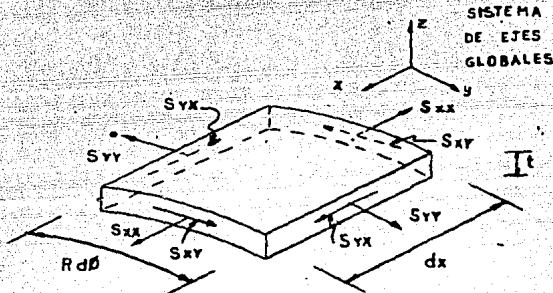
A continuación se analizarán los cascarones cilíndricos de concreto reforzado de las secciones III.1 y III.2, utilizando el programa SAP V, que emplea el elemento placa/cascarón, el cual se basa en el elemento finito para su análisis.

Dado que los cascarones son simétricos, tanto en cargas como en espesor, se tomará para el análisis la cuarta parte de cada cascarón.

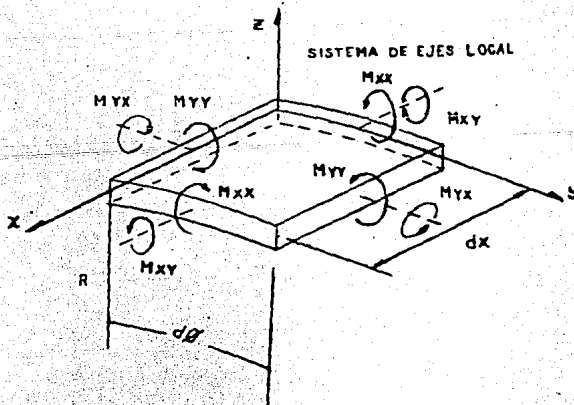
El primer paso del método, consiste en dividir la superficie en elementos de área. A continuación se seleccionan puntos en las fronteras de cada elemento, llamados nodos, que corresponden a los puntos de esquina de dicho elemento. La carga total actuante se tomará como una carga de presión normal a la superficie del cascarón, y no como cargas concentradas en los nudos.

Los resultados que nos da el programa SAP V, son: Esfuerzos de membrana (S_{xx} , S_{yy} , S_{xy} en Kg/cm^2) y Momentos flexionantes por unidad de longitud (M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} en $\frac{\text{Kg/cm}}{\text{cm}}$); de acuerdo con la figura III.3.1 ; dichos esfuerzos y momentos son el promedio de los correspondientes a los cuatro nodos y están dados al centro de cada elemento.

No se anexará una copia de los listados de computadora con los datos y resultados del análisis, porque se considera innecesario, tomando únicamente los datos requeridos.



a) Esfuerzos de membrana.



b) Momentos flexionantes y momentos torsionantes.

Fig. III.3.1 Esfuerzos de membrana y momentos flexionantes actuando en un elemento diferencial de cascarón.

III.3.1 ANALISIS DEL CASCARON LARGO DE LA SECCION III.1 CON EL PROGRAMA SAP V.

En la figura III.3.1.1 se muestra el cascarón analizado y la idealización de los elementos finitos que se utilizó. Se muestra una malla de 4×10 elementos para el análisis. En la tabla III.3.1.1 se presentan los esfuerzos de membrana y los momentos flexionantes por unidad de longitud, que proporciona el programa. Los esfuerzos unitarios se calculan a partir de estos esfuerzos y momentos, suponiendo que las fuerzas normales y fuerzas cortantes están distribuidas con uniformidad sobre el espesor del cascarón y que los esfuerzos de flexión son de distribución lineal.

Por tanto, los esfuerzos normales se pueden calcular aplicando las siguientes expresiones; derivadas de las suposiciones antes mencionadas, y similares a la ecuación III. 10:

$$N_{xx} = S_{xx} + \frac{6 M_{xx}}{t^2} \quad N_{yy} = S_{yy} + \frac{6 M_{yy}}{t^2} \quad (\text{III.11})$$

De manera semejante, los esfuerzos cortantes producidos por las fuerzas cortantes centrales y por los momentos de torsión se pueden calcular con la siguiente ecuación:

$$Q_{xy} = S_{xy} + \frac{M_{xy}}{t^3/12} z$$

Donde:

Z = distancia desde la superficie media del cascarón ($Z = t/2$).

t = espesor del cascarón.

$$\therefore Q_{xy} = S_{xy} \pm \frac{6 M_{xy}}{t^2} \quad (\text{III.12})$$

Los esfuerzos resultantes se calcularán siguiendo la convención de signos que se muestra en la figura III.3.1, y la que se indica en la parte inferior de la tabla III.3.1.1; dichos esfuerzos se obtendrán para la capa superior e inferior del cascarón y se muestran en la misma tabla; pero sólo se considerarán los esfuerzos en la capa superior en la comparación con los esfuerzos resultantes del método de la viga y para el diseño del cascarón.

Las dimensiones del cascarón son las siguientes:

Longitud: $l = 1900.0$ cm

Radio: $r = 950.0$ cm

Espesor: $t = 9.0$ cm

Angulo Medio: $\phi_k = 40^\circ$

Las cargas actuantes son las siguientes:

Carga muerta: $P_m = 261.0 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2}$

$$\text{Carga viva: } P_v = 60.0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

$$\text{Carga Total: } W_t = 321.0 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2} = 0.0321 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

En este caso se consideró la carga viva, uniformemente distribuida sobre la superficie del cascarón, de la misma forma que la carga muerta, actuando ambas como presión, normal a la superficie del cascarón.

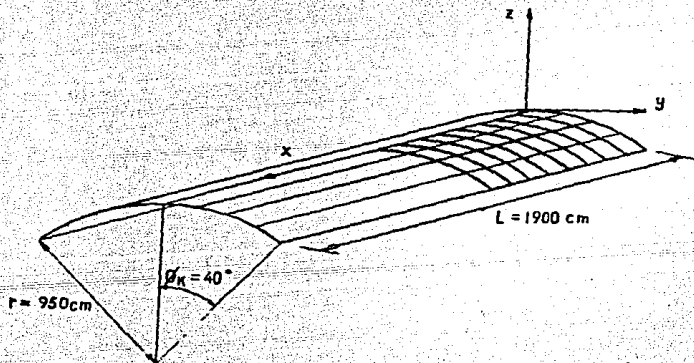


Fig. III.3.1.1 Cascarón largo cilíndrico.

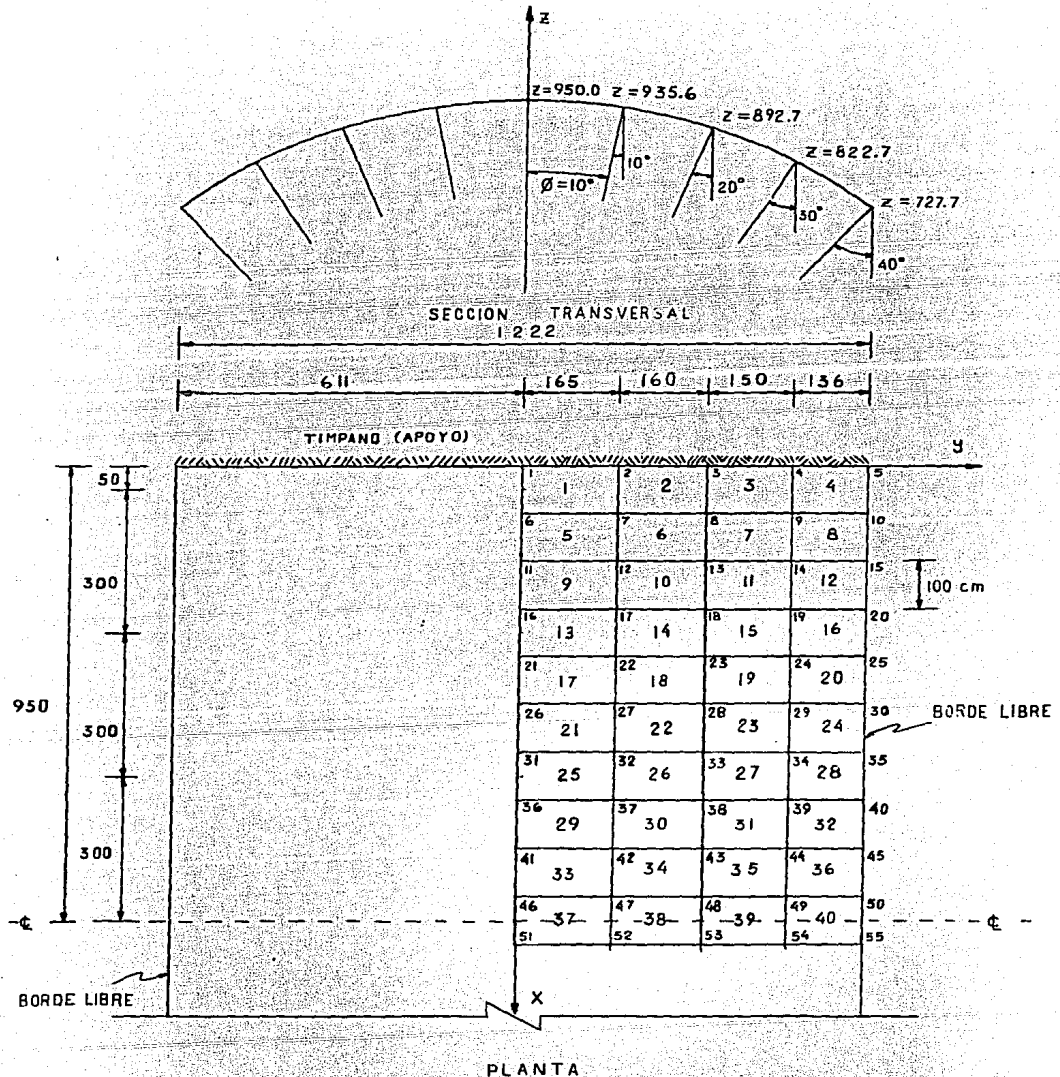


Fig. III.3.1.1 Distribución de los elementos en el cascarón largo.

TABLA III.3.1.1

| N° DE ELEMENTO | Ø | N° DE NODO | COMPONENTE ESFUERZOS DE MEMBRANA | | | COMPONENTE ESFUERZOS DE FLEXION | | |
|----------------|----|------------|----------------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------------|--------------------|--------------------|
| | | | Sxx kg/cm ² | Syy kg/cm ² | Sxy kg/cm ² | Mxx kg-cm cm | Myy kg-cm cm | Mxy kg-cm cm |
| 1 | 5 | 8 | - 11.98 | - 2.14 | - 2.46 | - 26.21 | 4.72 | 16.93 |
| 2 | 15 | 9 | 6.74 | - 0.52 | - 5.96 | - 3.43 | 9.18 | 33.36 |
| 3 | 25 | 10 | 31.01 | - 0.50 | - 1.53 | 72.08 | 137.80 | 133.40 |
| 4 | 35 | 11 | - 28.62 | - 5.22 | 24.57 | 33.85 | - 14.55 | 387.80 |
| 13 | 5 | 14 | - 2.07 | - 2.75 | - 2.76 | 15.13 | 126.80 | 50.89 |
| 14 | 15 | 15 | 2.14 | - 3.79 | - 4.03 | 48.43 | 243.60 | 133.10 |
| 15 | 25 | 16 | 1.24 | - 4.58 | 5.60 | 42.79 | 315.50 | 164.70 |
| 16 | 35 | 17 | - 3.43 | - 2.16 | 11.02 | - 24.53 | 158.40 | 165.00 |
| 25 | 5 | 20 | 4.64 | - 3.10 | - 1.39 | 72.02 | 304.00 | 47.39 |
| 26 | 15 | 21 | 4.87 | - 4.10 | 1.47 | 49.94 | 404.70 | 95.77 |
| 27 | 25 | 22 | 12.39 | - 3.78 | 3.31 | - 24.40 | 364.00 | 84.34 |
| 28 | 35 | 23 | 11.18 | - 1.41 | 4.80 | - 110.60 | 180.40 | 82.36 |
| 37 | 5 | 26 | 6.71 | - 3.33 | 0.00 | 93.38 | 383.40 | 0.00 |
| 38 | 15 | 27 | 7.37 | - 4.07 | 0.00 | 49.84 | 453.80 | 0.00 |
| 39 | 25 | 28 | 16.38 | - 3.50 | 0.00 | - 44.32 | 372.20 | 0.00 |
| 40 | 35 | 29 | 15.87 | - 1.24 | 0.00 | - 133.90 | 185.50 | 0.00 |

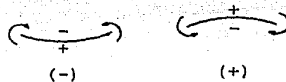
TABLA III.3.1.1 (continuación)

| N- DE ELEMENTO | Ø | N- DE NODO | CARA SUPERIOR + t/2 | | | CARA INFERIOR - t/2 | | | ESFUERZOS TOTALES CARA SUPERIOR | | |
|----------------|----|------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|------------|--------------|
| | | | σ_{xx} kg/cm ² | σ_{yy} kg/cm ² | σ_{xy} kg/cm ² | σ_{xx} kg/cm ² | σ_{yy} kg/cm ² | σ_{xy} kg/cm ² | Nx kg/m | Ny kg/m | Qxpy kg/m |
| 1 | 5 | 8 | - 13.92 | 1.79 | - 3.71 | - 10.04 | - 2.49 | - 1.21 | -12 529 | - 1 612 | 3 343 |
| 2 | 15 | 9 | 6.48 | 0.16 | - 8.43 | 6.99 | - 1.20 | 3.49 | 5 833 | 143 | 7 588 |
| 3 | 25 | 10 | 36.35 | 9.71 | - 11.41 | 25.67 | - 10.70 | 8.35 | 32 714 | 8 740 | -10 272 |
| 4 | 35 | 11 | - 26.11 | 6.30 | 4.16 | - 31.13 | - 4.14 | 53.30 | -23 502 | - 5 668 | 3 740 |
| 13 | 5 | 14 | - 0.95 | 6.64 | - 6.53 | - 3.19 | - 12.14 | 1.01 | - 851 | 5 979 | - 5 878 |
| 14 | 15 | 15 | 5.72 | 14.25 | - 13.89 | - 1.45 | - 21.84 | 5.83 | 5 152 | 12 828 | -12 497 |
| 15 | 25 | 16 | 4.41 | 18.80 | - 6.60 | - 1.93 | - 27.95 | 17.80 | 3 967 | 16 916 | 5 942 |
| 16 | 35 | 17 | - 5.24 | 9.57 | 1.20 | - 1.61 | - 13.89 | 23.24 | - 4 719 | 8 615 | 1 082 |
| 25 | 5 | 20 | 9.97 | 19.42 | - 4.90 | - 0.70 | - 25.62 | 2.12 | 8 975 | 17 474 | 4 411 |
| 26 | 15 | 21 | - 1.17 | 25.88 | 8.57 | - 8.57 | 34.07 | 5.62 | - 1 054 | 23 294 | 7 710 |
| 27 | 25 | 22 | - 14.20 | 23.18 | 2.94 | - 10.58 | - 30.74 | 9.55 | -12 777 | 20 866 | 2 648 |
| 28 | 35 | 23 | 2.99 | 11.96 | - 1.30 | 19.37 | - 14.77 | 10.90 | 2 688 | 10 761 | 1 173 |
| 37 | 5 | 26 | 13.63 | 25.07 | 0.00 | - 0.20 | - 31.73 | 0.00 | 12 268 | 22 566 | 0.00 |
| 38 | 15 | 27 | - 3.67 | 29.55 | 0.00 | - 11.06 | - 37.68 | 0.00 | - 3 307 | 26 591 | 0.00 |
| 39 | 25 | 28 | - 19.66 | 24.07 | 0.00 | - 13.10 | - 31.07 | 0.00 | -17 697 | 21 666 | 0.00 |
| 40 | 35 | 29 | 5.95 | 12.50 | 0.00 | 25.79 | - 14.98 | 0.00 | 5 356 | 11 249 | 0.00 |

ESFUERZOS DE MEMBRANA:
COMPRESION: -

TENSION: +

MOMENTOS FLEXIONANTES



CORTANTE CARA XY:
SOBRE EJES LOCALES
POSITIVOS.
MOMENTOS POSITIVOS
A LA NORMAL.

III.3.2 ANALISIS DEL CASCARON CORTO DE LA SECCION III.2 CON EL PROGRAMA SAP V.

En la figura III.3.2.1 se ilustra la estructura analizada y la idealización de los elementos finitos que se empleó. Se muestra una malla de 4 x 5 elementos para el análisis. En la tabla III.3.2.1 se presentan los esfuerzos de membrana que da el programa y las fuerzas de membrana que se obtienen a partir de ellas.

Las dimensiones del cascarón son las siguientes:

| | |
|---------------|-------------------------|
| Longitud: | $l = 500.0 \text{ cm}$ |
| Radio: | $R = 1000.0 \text{ cm}$ |
| Espesor: | $t = 7.0 \text{ cm}$ |
| Angulo Medio: | $\phi_t = 40^\circ$ |

Las condiciones de carga son las siguientes:

| | |
|---------------|------------------------------|
| Carga muerta: | $C_m = 220.0 \text{ kg/m}^2$ |
| Carga viva: | $C_v = 60.0 \text{ Kg/m}^2$ |
| Carga total: | $W_t = 280.0 \text{ Kg/m}^2$ |

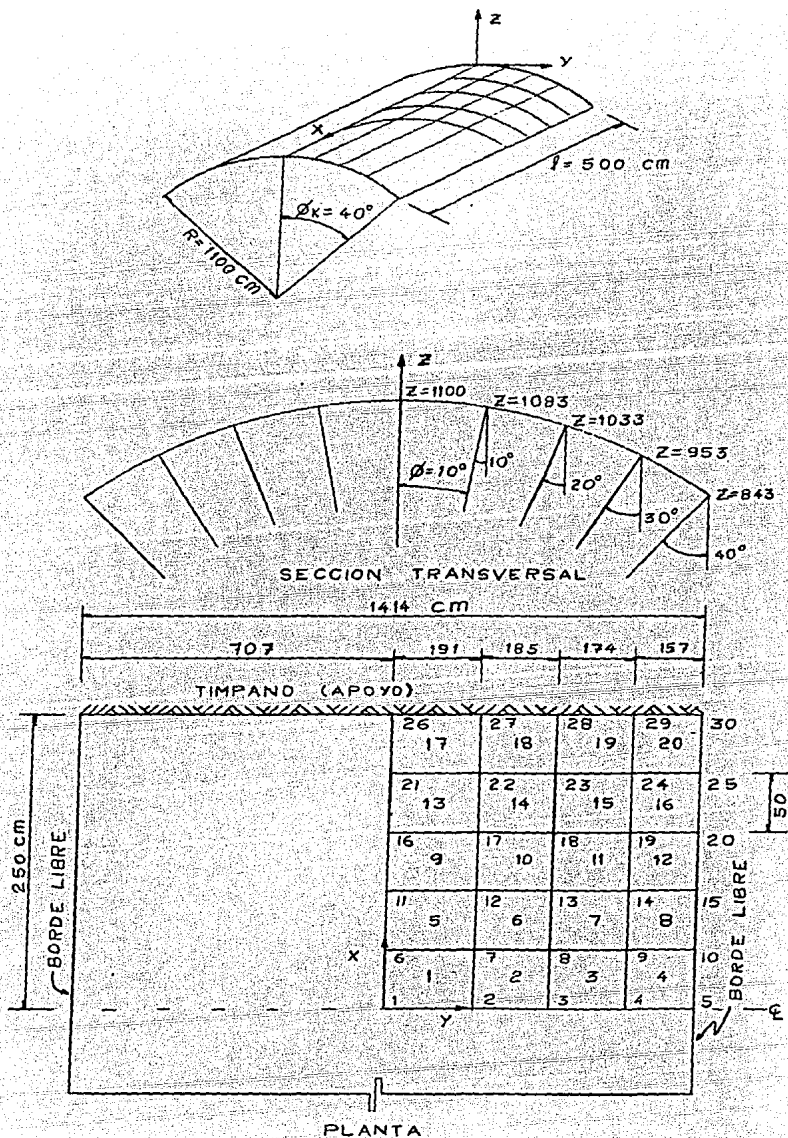


Fig. III.3.2.1 Cascarón corto cilíndrico.

Para este ejemplo se tomarán únicamente los esfuerzos de membrana, ya que en el capítulo IV se comparará con el problema de la sección III.2, el cual se analizó con el método de la teoría de la membrana, que da fuerzas de membrana únicamente.

En la tabla III.3.2.1 se presentan las fuerzas de membrana del método del elemento finito.

TABLA III.3.2.1

| NUMERO DE ELEMENTO | COMPONENTE DE ESFUERZO DE MEMBRANA | | | FUERZAS DE MEMBRANA | | |
|--------------------------|---------------------------------------|--------------------|--------------------|---------------------|----------------|-----------------|
| | S _{xx} | S _{yy} | S _{xy} | N _x | N _φ | Q _{xφ} |
| | Kg/cm ² | Kg/cm ² | Kg/cm ² | Kg/m | Kg/m | Kg/m |
| 1 | -0.5862 | -4.286 | -0.045 | - 410.3 | - 3000.2 | - 31.5 |
| 2 | 0.2032 | -4.319 | 0.064 | 142.2 | - 3023.3 | 44.8 |
| 3 | -2.182 | -5.635 | 0.276 | - 1527.4 | - 3944.5 | 193.2 |
| 4 | 0.5524 | -3.263 | -0.876 | 386.7 | - 2284.1 | - 613.2 |
| 5 | -0.5671 | -4.228 | -0.129 | - 397.0 | - 2959.6 | - 90.3 |
| 6 | 0.0226 | -4.24 | 0.18 | 15.8 | - 2968.0 | 126.0 |
| 7 | -1.785 | -5.468 | 0.816 | - 1249.5 | - 3827.6 | 571.2 |
| 8 | 0.3152 | -3.172 | -2.62 | 221.0 | - 2220.4 | - 1834.0 |
| 9 | -0.5277 | -3.932 | -0.196 | - 369.4 | - 2752.4 | - 137.2 |
| 10 | -0.3318 | -3.903 | 0.262 | - 232.3 | - 2732.1 | 183.4 |
| 11 | -0.9966 | -4.954 | 1.324 | - 697.6 | - 3467.8 | 926.8 |
| 12 | -0.1603 | -2.918 | -4.325 | - 112.2 | - 2042.6 | - 3027.5 |
| 13 | -0.4645 | -3.035 | -0.239 | - 325.2 | - 2124.5 | - 167.3 |
| 14 | -0.851 | -2.965 | 0.282 | - 595.7 | - 2075.5 | 197.4 |
| 15 | 0.165 | -3.70 | 1.812 | 115.5 | - 2590.0 | 1268.4 |
| 16 | -0.868 | -2.342 | -5.91 | - 607.6 | - 1639.4 | - 4137.0 |
| 17 | -0.388 | -1.212 | -0.216 | - 271.6 | - 848.4 | - 151.2 |
| 18 | -1.551 | -1.294 | 0.107 | - 1085.7 | - 905.8 | 74.9 |
| 19 | 1.651 | -1.228 | 2.478 | 1155.7 | - 859.6 | 1734.6 |
| 20 | -1.764 | -1.142 | -7.206 | 1234.8 | - 799.4 | - 5044.2 |

CAPITULO IV

COMPARACION CON EL METODO DEL ELEMENTO FINITO.

En el presente capítulo se compararán los dos métodos simplificados de análisis de cascarones cilíndricos que son: el método de la viga y el método de la teoría de la membrana; con el método del elemento finito.

En el capítulo anterior se presentaron dos ejemplos, un cascarón corto y otro largo, cuyos resultados de análisis se encuentran en las tablas III.1.2 a y b, III.3.1.1, para el cascarón largo y III.2.1, III.3.2.1, para el cascarón corto; correspondientes a la aplicación de los métodos de análisis simplificados y del elemento finito. Dichos resultados se representarán gráficamente, y se verá cuál es la correlación que se tiene entre dichos métodos.

Las gráficas muestran la variación de cada una de las fuerzas N_x , N_θ y Q_x , tanto en sentido longitudinal (generatriz), como transversal (directriz).

Se eligieron las secciones transversales cerca del apoyo y a la mitad del claro; así como las secciones longitudinales para los valores de θ : 5° y 35° ; por considerarse como la más representativas, ya que muestran en forma clara

la variación de las fuerzas en estudio.

Como una forma de visualizar mejor el comportamiento del cascarón, bajo las sollicitaciones externas e internas; se grafica también, la configuración deformada de la línea media del cascarón, o sea, su elástica; empleando los desplazamientos en dirección Z que proporciona el listado de computadora, obtenido de la aplicación del método de análisis del elemento finito, en los dos cascarones. Las secciones que se seleccionaron para este fin, son: en la corona (cúspide) y en el borde, ambas en el sentido longitudinal; para el sentido transversal se tomó la sección a la mitad del claro longitudinal.

Los resultados del análisis correspondientes a los métodos simplificados, se trazarán con línea discontinua y los obtenidos del análisis por medio del elemento finito, con línea continua.

En seguida se comentará el grado de aproximación que presentan los métodos simplificados, con el método del elemento finito; de acuerdo con las gráficas que correspondan al cascarón largo y al corto.

IV.1 COMPARACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS DEL ANALISIS DE UN CASCARON LARGO POR LOS METODOS DE LA VIGA Y DEL ELEMENTO FINITO.

La correspondencia que presentan las curvas de la fuerza longitudinal N_x , cerca del apoyo (Fig. IV.1), es muy pequeña, ya que, sólo en la corona las fuerzas son del mismo signo, pero en magnitud, la diferencia es muy notoria; en los puntos de referencia restantes, los valores son muy diferentes, tanto en magnitud como en signo, puesto que son opuestos totalmente.

Las fuerzas N_x trazadas para la sección a la mitad del claro (Fig. IV.4), sólo coinciden en signo en el borde, siendo muy diferentes en magnitud; los restantes valores son totalmente opuestos, tanto en magnitud como en signo.

La variación de las fuerzas longitudinales N_x por el método de la viga, es lineal y aumentan en magnitud del apoyo al centro del cascarón, de acuerdo a la variación del momento flexionante y a la ecuación lineal de flexión simple. La variación de esta fuerza por el método del elemento finito difiere totalmente del apoyo al centro, y las fuerzas son mayores en el apoyo que en el centro.

Las curvas de la fuerza transversal N_θ (Fig. IV.2 y IV.5), son un poco más parecidas, puesto que la configura-

ción es similar, aunque difieren en magnitud, en cada uno de los puntos de referencia.

Las fuerzas N_{θ} por el método de la viga son iguales para todas las secciones transversales, por tanto, es la misma gráfica que se compara con los resultados del elemento finito; éstos varían del apoyo al centro; en la primera gráfica presentan fuerzas de compresión y de tensión, en la segunda, actúan sólo fuerzas de tensión.

La gráfica de la fuerza cortante $Q_{x\theta}$ (Fig. IV.3), presenta la configuración de las dos curvas bastante parecida entre sí, aunque, en el borde cambia de signo para el elemento finito. Aproximadamente el valor máximo de ambas curvas coincide en magnitud y signo; en la corona, ambas curvas parten de cero, aunque, como ya se comentó antes, en el borde son bastante diferentes.

Para esta fuerza, sólo se consideró la gráfica para el apoyo, ya que, es aquí donde dicha fuerza es máxima y es válido para los dos métodos empleados; puesto que en el centro del cascarón dicha fuerza es nula.

La gráfica de la Fig. IV.6, muestra el comportamiento de la fuerza N_x , a lo largo del cascarón, según la generatriz, para las secciones correspondientes a $\theta = 5^\circ$ y $\theta = 35^\circ$, o sea, cerca de la corona y al borde, respectivamente.

De acuerdo con la teoría de flexión simple, las fuerzas arriba del eje neutro, serán de compresión, y de tensión abajo de éste, por tanto los valores de la fuerza N_x serán completamente de compresión en la corona y de tensión en el borde, presentando además una configuración parabólica a lo largo del cascarón.

Las curvas por el elemento finito para las mismas secciones difieren totalmente de las anteriores; ya que, presentan valores de compresión cerca de los apoyos y de tensión a la mitad del claro, pero son semejantes entre sí. Las curvas de esta fuerza proporcionadas por ambos métodos no concuerdan en magnitud, aunque de signo en algunos aspectos.

Las curvas de la Fig. IV.7, muestran la variación de la fuerza N_θ en el sentido longitudinal. Como se comentó antes, los resultados obtenidos en el análisis de arco para dicha fuerza son iguales para cualquier sección transversal y por tanto son constantes para las dos secciones a lo largo del cascarón.

Las curvas que corresponden al elemento finito, son similares entre sí, ya que, las dos parten de las fuerzas de compresión y pasan a ser de tensión, del apoyo al centro, respectivamente. No existe una concordancia aceptable entre las curvas de ambos métodos a lo largo del cascarón.

En la figura IV.8, se tienen las curvas de la fuerza $Qx\phi$ a lo largo del cascarón para ambos métodos, como se puede observar los resultados por el método de la viga tienen una variación lineal, puesto que la fuerza cortante V también varía linealmente; siendo máxima en los apoyos y nula en el centro del claro longitudinal; y es menor en la corona y aumenta hacia el borde.

Las curvas por el elemento finito son semejantes, aunque difieren en magnitud; en el borde la fuerza $Qx\phi$ cambia de signo, y en la corona toda la curva es del mismo signo; salvo por este detalle, los resultados por ambos métodos chequean en signo, aunque difieren notablemente en magnitud.

En la Fig. IV.9, se muestra cómo varían los desplazamientos verticales a lo largo del cascarón, en la corona y en el borde libre; se puede apreciar que son mayores en el borde libre, cuyo máximo desplazamiento es de 7.73 cm, contra 1.27 cm en la corona, correspondiendo ambos a la mitad del claro.

En la Fig. IV.10, se presentan los desplazamientos verticales para la sección transversal al centro del claro; en la gráfica se observan pequeñas deformaciones en la corona y desplazamientos negativos hacia los bordes del cascarón; cuyos máximos son de 1.27 cm. y de 7.73 cm., respectivamente.

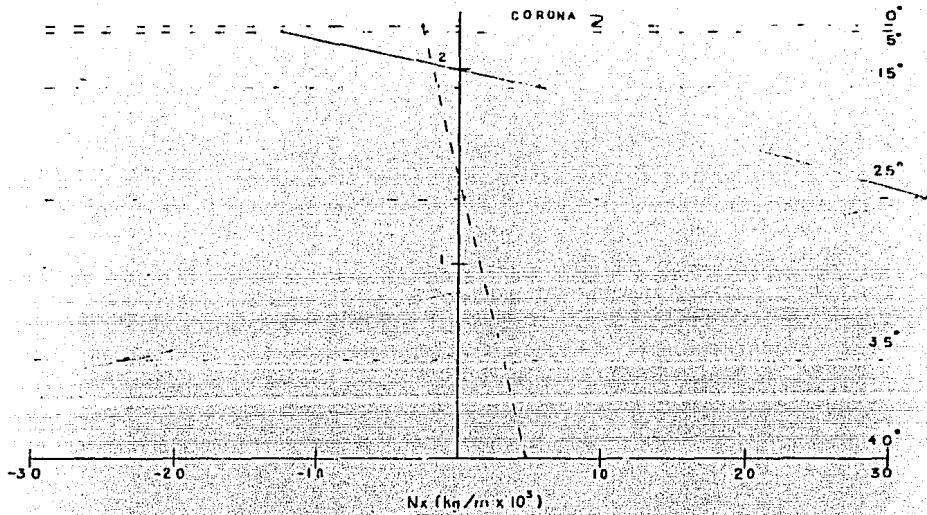


Fig. IV.1 Representación de la fuerza N_x según la directriz para $x = 0.50$ m.

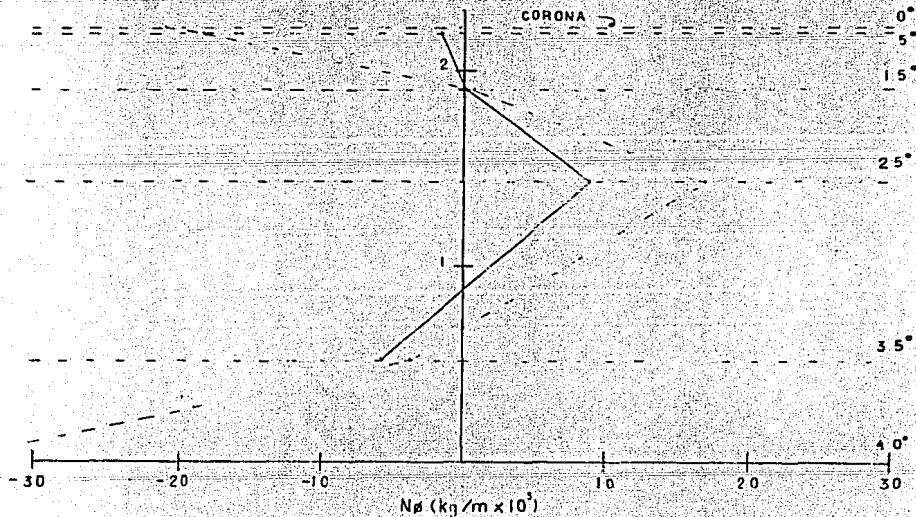
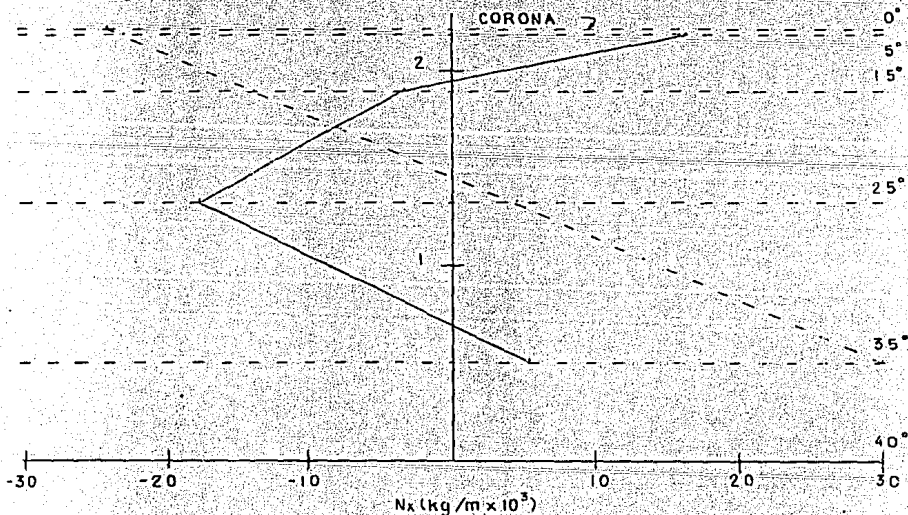
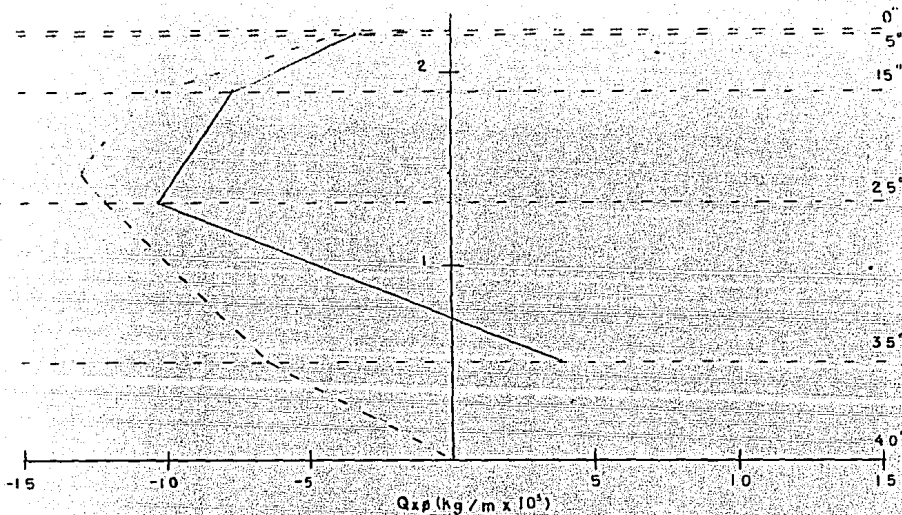


Fig. IV.2 Representación de la fuerza N_ϕ según la directriz para $x = 0.50$ m.



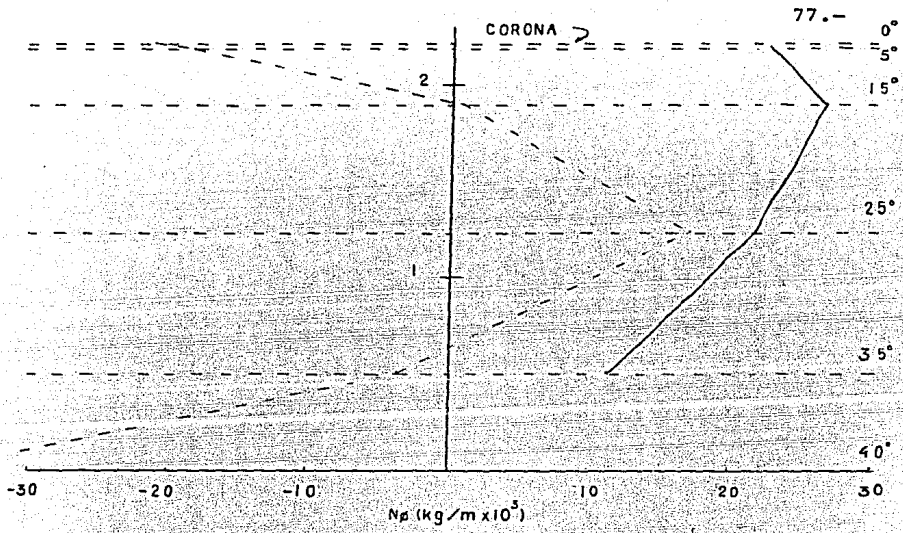


Fig. IV.5 Representación de la fuerza N_ϕ según la directriz para $x = 9.50$ m.

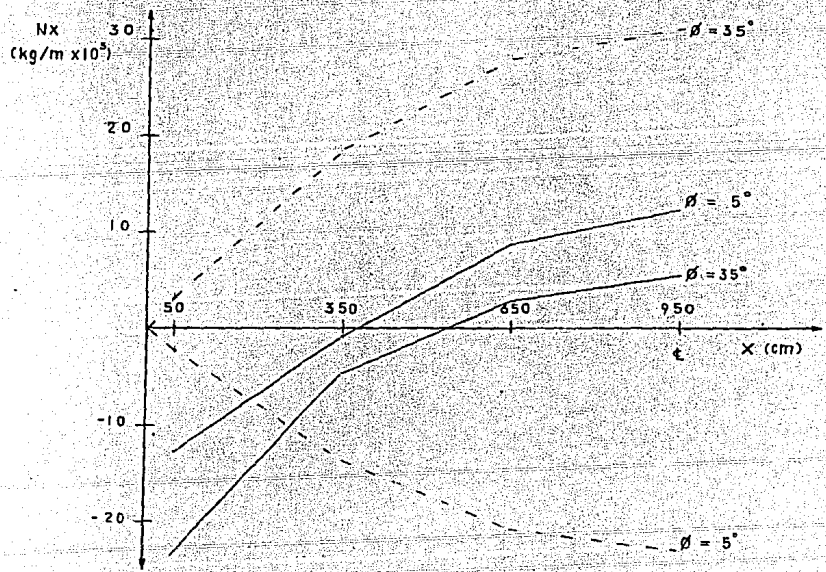


Fig. IV.6 Representación de la fuerza N_x según la generatriz.

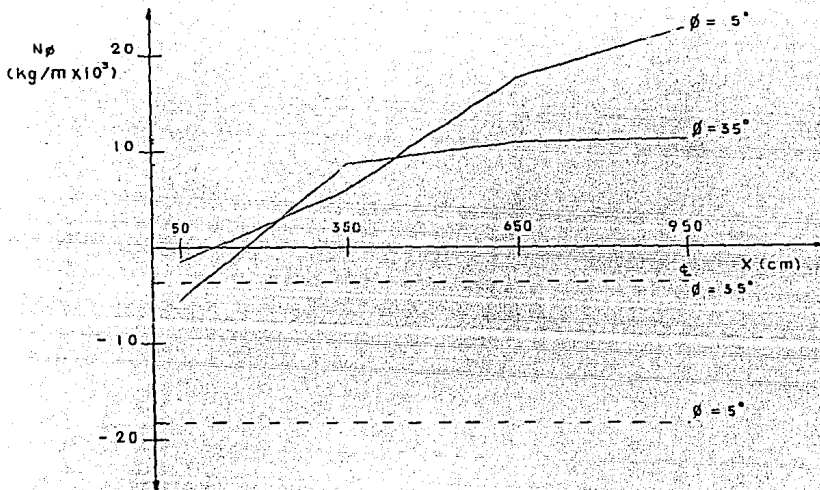


Fig. IV.7 Representación de la fuerza $N\phi$ según la generatriz.

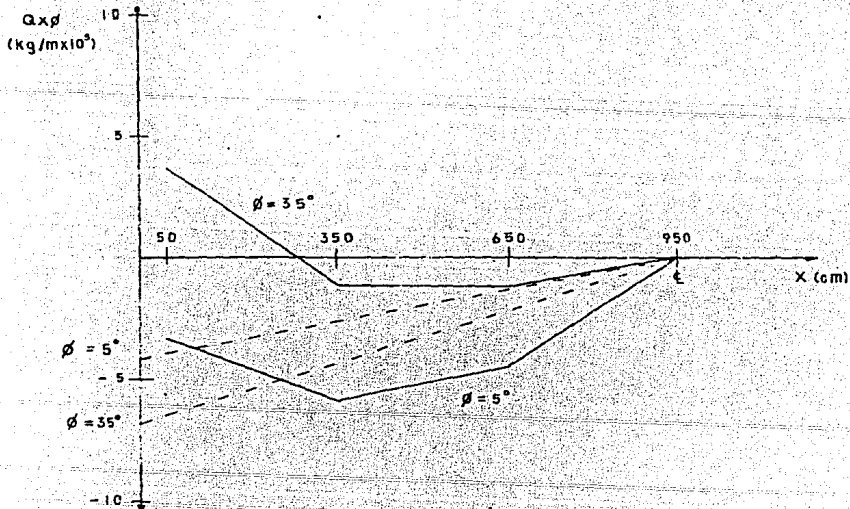


Fig. IV.8 Representación de la fuerza $Qx\phi$ según la generatriz.

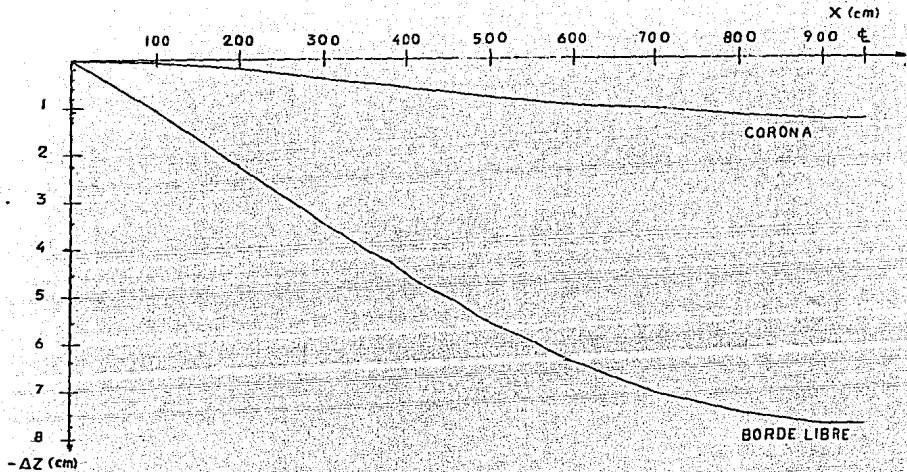


Fig. IV.9 Desplazamientos longitudinales de un cascarón largo. (de un apoyo a la mitad del claro).

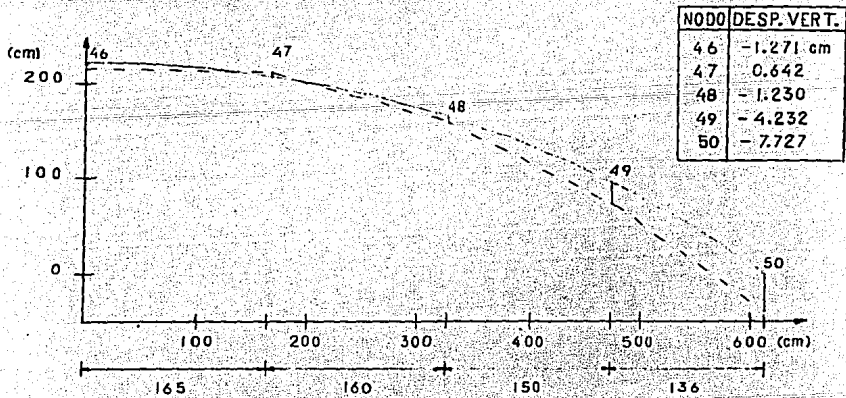


Fig. IV.10 Desplazamientos verticales transversales de un cascarón abierto largo. (a la mitad del claro; desplazamientos fuera de escala).

IV.2 COMPARACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS DEL ANALISIS DE UN CASCARON CORTO POR LOS METODOS DE LA TEORIA DE LA MEMBRANA Y DEL ELEMENTO FINITO.

La correspondencia que se observa entre las curvas de la fuerza N_x , (Fig. IV.11), es muy pequeña; ya que el método de la membrana sólo proporciona fuerzas de compresión, que se mantienen aproximadamente constantes en toda la sección; y su magnitud es bastante menor que las fuerzas obtenidas por el elemento finito; además éstas últimas varían alternadamente de signo y de magnitud, presentándose el valor máximo para $\phi = 25^\circ$, de compresión.

En la Fig. IV.12 se representan las curvas de la fuerza N_ϕ correspondientes a la sección central del cascarón; se observa que existe una buena correlación entre dichas curvas, sobre todo en los valores para la corona y en el borde libre; los resultados obtenidos por la teoría de la membrana varían linealmente; en cambio los del elemento finito forman una parábola entre los valores de $\phi: 15^\circ$ a 35° ; pero todos los valores son del mismo signo.

Las Fig. IV.13 y IV.14 muestran las curvas de la fuerza cortante $Q_{x\phi}$, para la sección central del cascarón y para uno de sus extremos respectivamente. En ambas gráficas, los valores proporcionados por la teoría de la membrana varían

aproximadamente en forma lineal, siendo del mismo signo y poco cambio en su magnitud, pero los del otro método, varían alternadamente de signo y su magnitud aumenta desde la corona hacia los bordes. Las fuerzas son similares sólo en la corona; por tanto la correlación que existe entre ambos métodos para esta fuerza son mínimos.

La variación longitudinal de la fuerza N_x para la generatriz correspondiente a $\phi = 5^\circ$, se encuentra representada en la Fig. IV.15. La correlación que existe entre las curvas es aceptable, ya que, presentan la misma tendencia de variación, aunque los valores proporcionados por el método del elemento finito son muy superiores a los de la teoría de la membrana.

En la Fig. IV.16 se representa la variación de la fuerza transversal N_ϕ , a lo largo del cascarón, para las generatrices $\phi = 5^\circ$ y $\phi = 35^\circ$; que corresponden a la corona y al borde libre, respectivamente. Los valores obtenidos por la teoría de la membrana permanecen constantes para ambas generatrices a lo largo del cascarón, no así los valores proporcionados por el elemento finito, los cuales son aproximadamente iguales a los de la membrana en la sección central, y van disminuyendo en forma parabólica, convergiendo hacia un valor determinado que corresponde al extremo del cascarón; por lo que se observa, se puede afirmar, que existe poca correlación en la variación de esta fuerza, entre los dos métodos.

La variación de la fuerza cortante $Qx\phi$ a lo largo del cascarón, para la generatriz $\phi = 35^\circ$, cercana al borde libre, se puede apreciar en la Fig. IV.17, en la cual se observa una gran diferencia entre los resultados obtenidos por ambos métodos de análisis, ya que, los valores proporcionados por la teoría de la membrana son pequeños en comparación a los del otro método, los valores aumentan de la sección central hacia los extremos en las dos curvas.

En las Figuras IV.18 y IV.19, se presentan los desplazamientos longitudinales y transversales respectivamente; como se puede apreciar, los desplazamientos longitudinales tanto en la corona como en el borde, tienen la misma tendencia; aunque son mayores en el borde. Los desplazamientos transversales corresponden a la sección central del cascarón, y se puede observar como se deforma dicha sección, ante las solicitaciones.

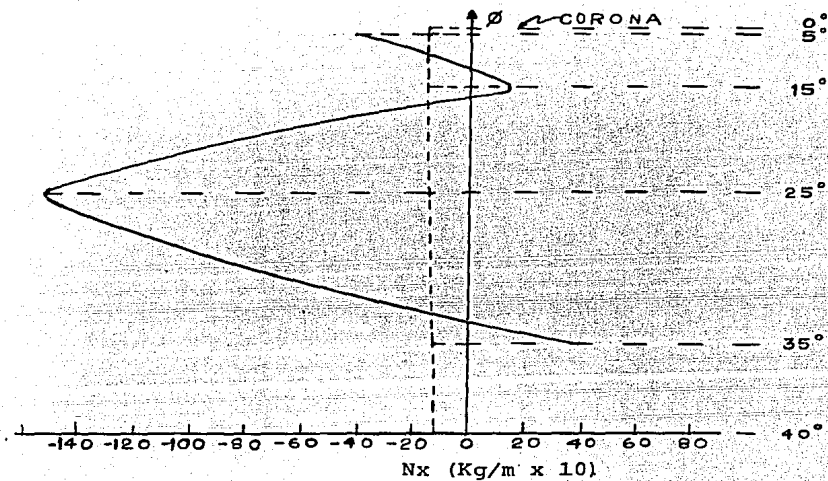


Fig. IV.11 Representación de la fuerza N_x según la directriz para $x = 25.0$ cm.

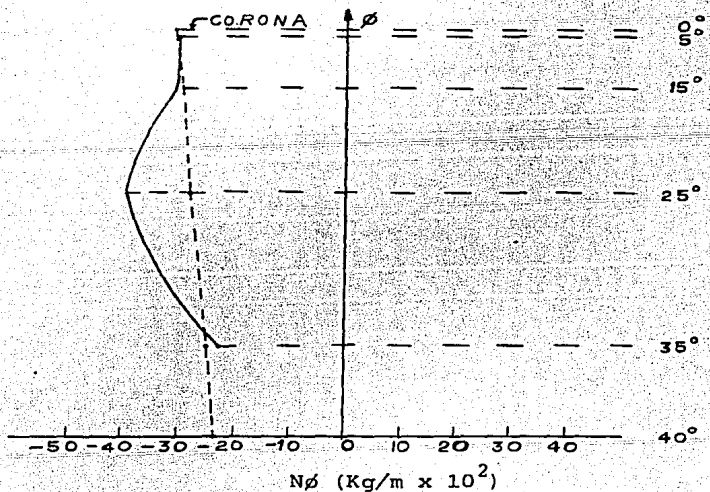


Fig. IV.12 Representación de la fuerza N_ϕ según la directriz para $x = 25.0$ cm.

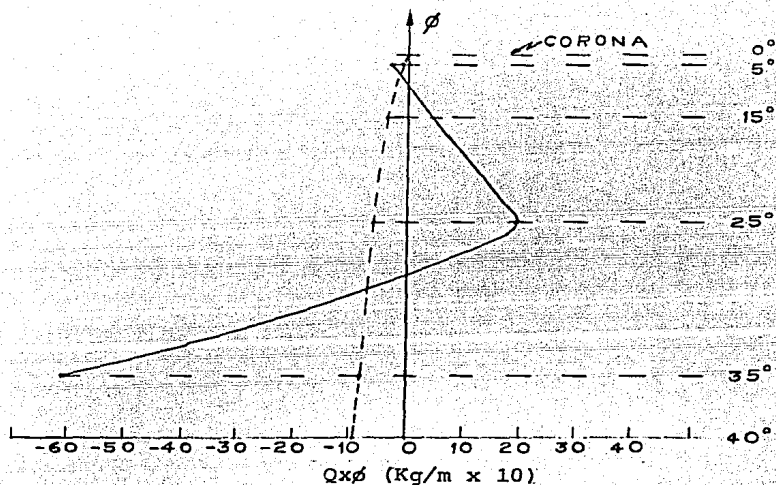


Fig. IV.13 Representación de la fuerza tangencial $Qx\phi$ según la directriz para $x = 25.0$ cm.

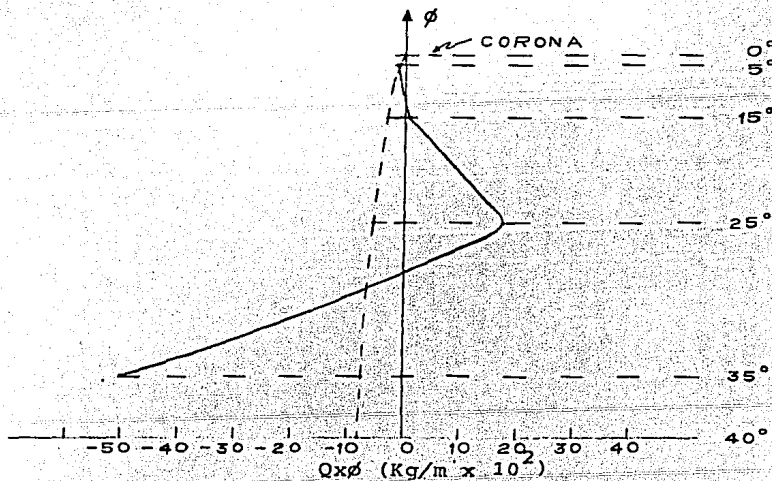


Fig. IV.14 Representación de la fuerza $Qx\phi$ según la directriz para $x = 225.0$ cm.

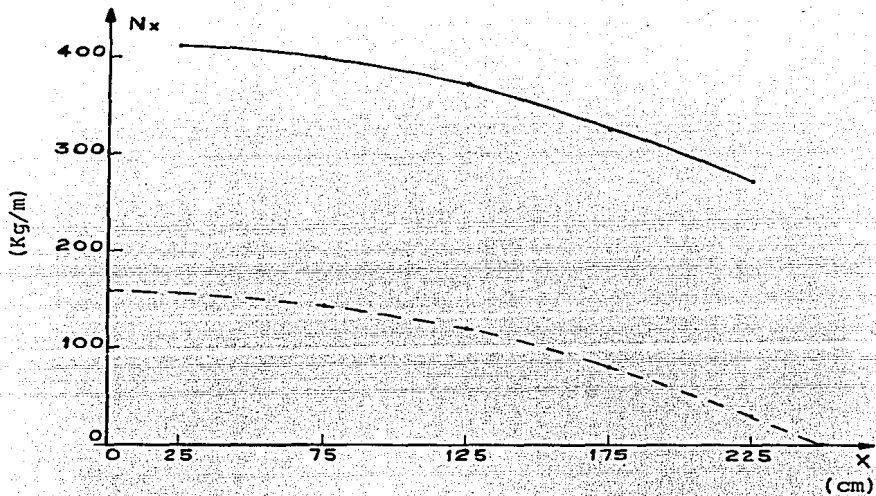


Fig. IV.15 Representación de la fuerza N_x según la generatriz para $\phi = 5^\circ$.



Fig. IV.16 Representación de la fuerza N_ϕ según la generatriz.

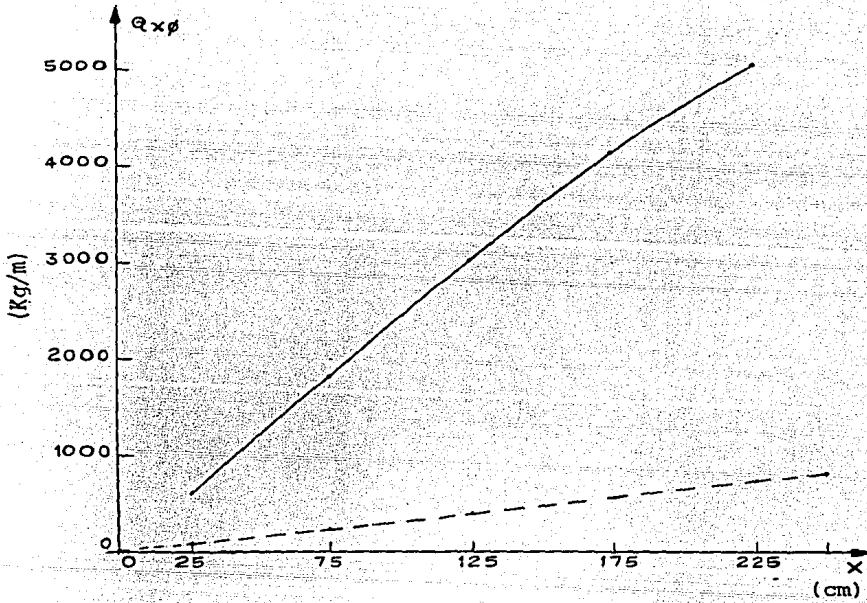


Fig. IV.17 Representación de la fuerza $Q_{x\phi}$ según la generatriz para $\phi = 35^\circ$.

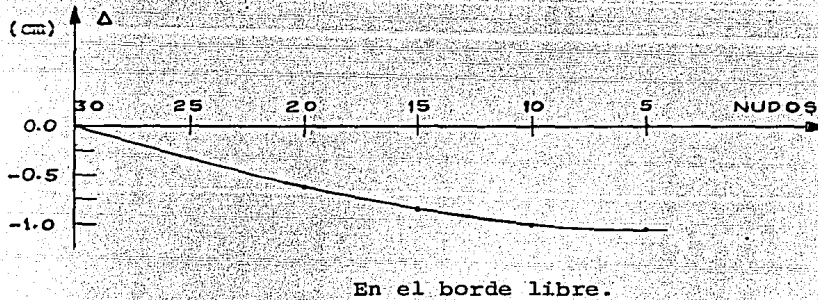
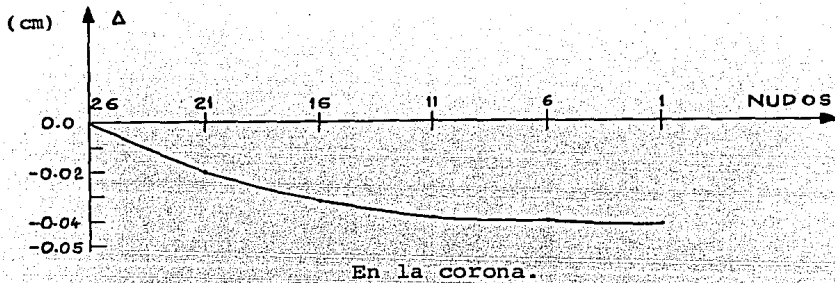


Fig. IV.18 Desplazamiento longitudinal de un cascarón abierto corto. (de un apoyo al centro).

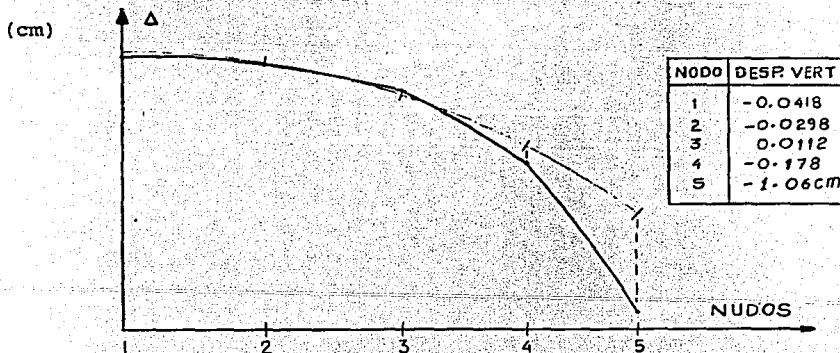


Fig. IV.19 Desplazamiento transversal de un cascarón abierto corto. (al centro del claro).

CAPITULO V

DISENO DE CASCARONES CILINDRICOS:

El propósito de esta sección es presentar un procedimiento para reforzar cascarones cilíndricos; como los ejemplos de cascarones presentados en el capítulo III.

El punto de partida consistirá en elaborar una tabla con las fuerzas normales N_x , N_ϕ y las fuerzas tangenciales $Q_x\phi$. El procedimiento consiste, entonces, de los siguientes pasos:

1.- Se determinan los valores de las fuerzas resultantes correspondientes a los elementos seleccionados del cascarón y se calculan las fuerzas principales y sus respectivas direcciones; aplicando el círculo de Mohr o analíticamente por medio de las expresiones:

$$N_1 = \frac{N_x + N_\phi}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_x - N_\phi}{2}\right)^2 + Q_x\phi^2} \quad (V.1)$$

$$N_2 = \frac{N_x + N_\phi}{2} - \sqrt{\left(\frac{N_x - N_\phi}{2}\right)^2 + Q_x\phi^2} \quad (V.2)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 Q_x\phi}{N_x - N_\phi} \quad (V.3)$$

Los resultados se anotan en las tablas, y además se

trazan sus trayectorias en la parte del cascarón analizado.

2.- Aunque, el concreto es capaz de resistir esfuerzos de tensión; alrededor de 0.1 de su resistencia a la compresión, el acero de refuerzo se proporcionará para tomar todas las fuerzas de tensión principales. El refuerzo se determina en base al esfuerzo permisible del acero, que será:

$f_s = 0.5 f_y$ según lo indica la sección de diseño por valores admisibles del Reglamento de Construcciones del D.D.F., (sección 9).

Existen dos formas de colocar el armado en el cascarón:

a).- En la dirección de las trayectorias de los esfuerzos de tensión.

El área de refuerzo necesaria para esta condición, se calcula de la siguiente manera:

$$A_s = \frac{N_1}{f_s} \quad (V.4a)$$

Donde:

A_s = Área de acero.

N_1 = Fuerza principal.

f_s = Esfuerzo permisible del acero.

No es muy común emplear este tipo de refuerzo, ya que, este arreglo preciso del refuerzo, requiere del doblez de

las varillas a lo largo de las líneas isostáticas. Sin embargo, lo más práctico es formar una retícula rectangular. Este criterio obedece a que el estado de tensiones reales de un cascarón en un momento determinado no es el de cálculo, y por lo tanto, la inclinación de las direcciones principales no serán las calculadas.

b).- En dos direcciones normalmente ortogonales.

Este refuerzo puede colocarse en ángulo con respecto a la dirección de los esfuerzos principales para facilitar el detalle y por razones constructivas; por tanto, conviene colocarlo según las directrices y generatrices, formando un reticulado.

El refuerzo longitudinal requerido en los bordes inferiores formará el tensor de borde marginal, que debe prolongarse hasta llegar a los tímpanos en cantidad suficiente para asegurar su anclaje; el resto del armado puede levantarse con una inclinación de 45° , ya que, es en las esquinas donde el cortante es máximo, y las líneas de los esfuerzos principales de tensión siguen una inclinación aproximada de 45° con respecto a la generatriz. El esfuerzo permisible de tensión de este armado, no deberá ser mayor de $f_s = 2100 \text{ Kg/cm}^2$ para evitar deformaciones específicas en los bordes, ya que, podrían favorecer la aparición de momentos flexionantes según la directriz, empleando un acero de refuerzo con un $f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$.

b.1.- El acero de refuerzo según la generatriz, se

determina de acuerdo con la siguiente figura:

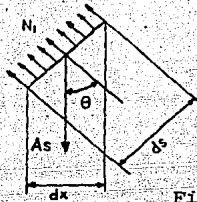


Fig. V.1

Igualando las fuerzas en dirección de los esfuerzos principales N_1 :

$$N_1 ds = A_s f_s dx \cos \theta \quad (V.5)$$

Dividido por ds :

$$N_1 = A_s f_s \cos \theta \frac{dx}{ds} = A_s f_s \cos^2 \theta \quad (V.6)$$

Finalmente:

$$A_s = \frac{N_1}{f_s \cos^2 \theta} \quad (V.7)$$

Donde:

A_s = Es el área de acero por unidad de longitud en la dirección x .

N_1 = La fuerza de tensión principal en la sección del cálculo.

f_s = Esfuerzo de tensión permisible del acero de refuerzo.

θ_1 = Angulo de inclinación de la fuerza principal N_1 .

El análisis del cascarón se basó en la hipótesis de que, el material es elástico, homogéneo e isótropo, es decir, que la propiedad de elasticidad del cascarón es considerada constante, entonces el área del acero de refuerzo requerida, se determinará sobre la hipótesis de que está esforzado a un valor permisible de diseño.

b.2.- El refuerzo según la directriz. Existen varios criterios para obtener el refuerzo en esta dirección; en este trabajo se darán 2 criterios:

1o. criterio. Este se aplicará cuando el método de análisis empleado en un cascarón largo, proporcione el momento flexionante transversal $M\phi$ y la fuerza transversal $T\phi$; los cuales logran su máximo valor en la corona para la sección localizada al centro del claro, y disminuyendo su magnitud, al disminuir el ángulo ϕ hacia los bordes.

Por tanto:

$$A_s = \frac{F_t}{f_s} \quad (\text{V.4b}) \quad \text{Donde: } A_s = \text{Area de acero requerida por unidad de longitud.}$$

$$F_t = \frac{T\phi}{d} + \frac{6M\phi}{d^2} \quad (\text{V.8}) \quad F_t = \text{Fuerza Total por unidad de longitud.}$$

$f_s =$ Esfuerzo permisible del acero.

$d =$ Peralte efectivo.

2o. criterio. Este criterio se aplicará cuando el método de análisis utilizado proporcione sólo fuerzas de mem-

brana; tomando para este caso, la fuerza transversal $N\phi$ máxima:

Por tanto:

$$A_s = \frac{N\phi}{f_s} \quad (\text{V.4c})$$

La separación de las varillas de refuerzo se obtiene con la siguiente expresión:

$$S = \frac{b a_s}{A_s} \quad (\text{V.9})$$

Donde:

S = Separación de las varillas de refuerzo.

b = Ancho donde se requiere el refuerzo.

a_s = Area de una varilla de acero.

A_s = Area total de acero de refuerzo requerida en el ancho b.

3.- Refuerzo mínimo ó refuerzo por cambios volumétricos.

De acuerdo al Reglamento de Construcciones del D.D.F., sección 3.10, se colocará un refuerzo mínimo a través del cascarón de 0.4 %, en cada dirección, para el control del agrietamiento; y la separación de dicho refuerzo no excederá de 50 cm, ni de $3.5 x_1$.

Donde:

x_1 = dimensión mínima del miembro medida perpendicularmente al refuerzo (cm).

El criterio del refuerzo mínimo es aplicable sólo donde el porcentaje o el área de acero de refuerzo calculado es menor.

Por tanto el área de acero de refuerzo requerida en un ancho unitario, se obtiene aplicando la siguiente ecuación:

$$A_{s\min} = (\rho b d) \quad (V.10)$$

Donde:

ρ = Porcentaje mínimo de acero de refuerzo que se requiere, en este caso $\rho = 0.4 \%$.

b = Ancho unitario.

d = Peralte efectivo, el cual se obtiene de la siguiente manera:

$$d = h - r$$

h = Peralte total, que corresponde al espesor del cascarón t.

r = Recubrimiento de concreto.

V.1 DISEÑO DEL CASCARÓN CILINDRICO LARGO.

En seguida se presenta el diseño del cascarón cilíndrico largo, de concreto reforzado, de la sección III.3.1, el cual se analizó con el método del elemento finito; se seleccionaron los resultados de este método, por considerar que son más precisos que los proporcionados por los métodos simplificados de análisis.

En la figura V.1.1 está representada la proyección en planta de la cuarta parte del cascarón, sobre el cual, se han localizado 40 puntos abajo del eje "Y".

Los valores de las fuerzas resultantes, así como las fuerzas y direcciones principales, los esfuerzos máximos y mínimos, y el esfuerzo cortante máximo se muestran en la tabla V.1.1.

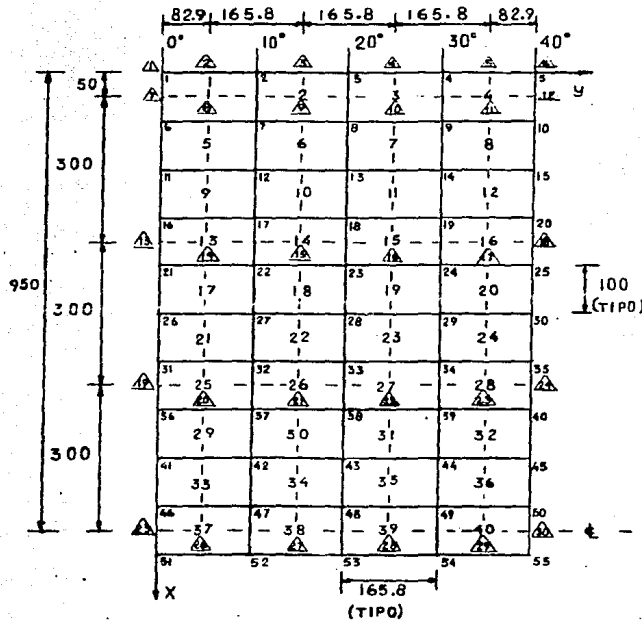


Fig. V.1.1 Malla seleccionada para el análisis del cascarón empleando el elemento finito y donde se localizan los puntos sobre la superficie del cascarón, para los cuales se han calculado las fuerzas de diseño. (Δ)

TABLA V.1.1.

| NODO | COORDENADAS | | FUERZAS TOTALES | | | FUERZAS PRINCIPALES | | ANGULOS PRINCIPALES | | ESFUERZOS PRINCIPALES | | CORTANTE |
|------|-------------|----|-----------------|--------|---------|----------------------|-----------------------|---------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|----------|
| | X | Ø | Nx | NØ | QxØ | N _I (MIN) | N _{II} (MAX) | Ø _I | Ø _{II} | σ _I (MIN) | σ _{II} (MAX) | |
| | cm | | kg/m | kg/m | kg/m | kg/m | kg/m | | | kg/cm ² | kg/cm ² | |
| 8 | 50 | 5 | -12 529 | 1 612 | - 3 343 | - 670 | -13 471 | 105.74 | 15.74 | - 0.74 | -14.97 | 7.11 |
| 9 | 50 | 15 | 5 833 | 143 | - 7 588 | 11 092 | - 5 116 | 55.28 | 145.28 | 12.32 | - 5.68 | 9.00 |
| 10 | 50 | 25 | 32 714 | 8 740 | -10 272 | 36 513 | 4 941 | 69.70 | 159.70 | 40.57 | 5.49 | 17.54 |
| 11 | 50 | 35 | -23 502 | 5 668 | 3 740 | - 4 915 | -24 255 | 78.62 | 168.62 | - 5.46 | -26.95 | 10.74 |
| 14 | 350 | 5 | - 851 | 5 979 | - 5 878 | 9 362 | - 4 234 | 119.92 | 29.92 | 10.40 | - 4.70 | 7.55 |
| 15 | 350 | 15 | 5 152 | 12 828 | -12 497 | 22 063 | - 4 083 | 126.46 | 36.46 | 24.51 | - 4.54 | 14.53 |
| 16 | 350 | 25 | 3 967 | 16 916 | - 5 942 | 19 229 | 1 654 | 111.27 | 21.27 | 21.37 | 1.84 | 9.76 |
| 17 | 350 | 35 | - 4 719 | 8 615 | - 1 082 | 8 702 | - 4 806 | 94.61 | 4.61 | 9.67 | - 5.34 | 7.50 |
| 20 | 650 | 5 | 8 975 | 17 474 | - 4 411 | 19 349 | 7 100 | 113.03 | 23.03 | 21.50 | 7.89 | 6.81 |
| 21 | 650 | 15 | - 1 054 | 23 294 | - 7 710 | 25 530 | - 3 290 | 106.17 | 16.17 | 28.37 | - 3.66 | 16.01 |
| 22 | 650 | 25 | -12 777 | 20 866 | - 2 648 | 21 073 | -12 984 | 94.47 | 4.47 | 23.41 | -14.43 | 18.92 |
| 23 | 650 | 35 | 2 688 | 10 761 | - 1 173 | 10 928 | 2 521 | 98.10 | 8.10 | 12.14 | 2.80 | 4.67 |
| 26 | 950 | 5 | 12 268 | 22 567 | 0.00 | 22 567 | 12 268 | 90.00 | 0.00 | 25.07 | 13.63 | 5.72 |
| 27 | 950 | 15 | - 3 307 | 26 591 | 0.00 | 26 591 | - 3 307 | 90.00 | 0.00 | 29.55 | - 3.67 | 16.61 |
| 28 | 950 | 25 | -17 697 | 21 666 | 0.00 | 21 666 | -17 697 | 90.00 | 0.00 | 24.07 | -19.66 | 21.87 |
| 29 | 950 | 35 | 5 356 | 11 249 | 0.00 | 11 249 | 5 356 | 90.00 | 0.00 | 12.50 | 5.95 | 3.27 |

Las fuerzas principales se localizan al centro de cada elemento.

El acero de refuerzo se colocará formando una retícula, según las generatrices y las directrices, como se verá en seguida.

Para calcular el refuerzo según las generatrices, se dividió el semi-cascarón mostrado en planta, Fig. V.1.1, en cuatro fajas. La primera faja parte del eje del cascarón y tiene un ancho de 165.8 cm.; que es el mismo para las tres restantes.

Para la primera faja se conocen las fuerzas N_I y N_{II} , correspondientes a los elementos: 8, 14, 20 y 26; donde actúan fuerzas de tensión y de compresión, por tanto, se calculará el refuerzo necesario para la fuerza de tensión máxima; la cual pertenece al elemento 26, en el centro del cascarón, y cuya magnitud y dirección son: $12268 \frac{Kg}{m}$ y $\theta = 0^\circ$, respectivamente. Aplicando la ecuación V.7, se obtiene el área de acero:

$$A_s = \frac{N_{II}}{f_s \cos^2 \theta} = \frac{12268}{2100 \times \cos^2 0} = 5.84 \frac{cm^2}{m}$$

$$\therefore A_s = 5.84 \frac{cm^2}{m}$$

Revisión por refuerzo mínimo:

$$A_s = \rho b d \Rightarrow \rho = \frac{A_s}{b d} \quad h = 9.0 \text{ cm}, \quad r = 2.0 \text{ cm},$$

$$b = 100 \text{ cm} \quad d = h - r = 9 - 2 = 7 \text{ cm}$$

$$\therefore \rho = \frac{5.84}{100 \times 7} = 0.00835$$

$$\rho = 0.835 \frac{\%}{m} > \rho_{\text{mín.}} = 0.4 \frac{\%}{m}$$

Con barras del #3, la separación será: $a_s = 0.71 \text{ cm}^2$

$$S = \frac{100 \times 0.71}{5.84} = 12.16 \text{ cm} \approx 12.0 \text{ cm}$$

Por tanto se colocarán varillas del #3 @ 12.0 cm.

En la segunda faja se localizan los elementos: 9, 15, 21 y 27; donde también se tienen fuerzas de tensión y de compresión; por lo tanto, la fuerza de tensión máxima pertenece al elemento 9, cercano al apoyo, cuya magnitud y dirección son: $N I = 11092 \text{ Kg/m}$ y $\theta = 55.28^\circ$; respectivamente; por tanto el área de acero por metro en dirección de la generatriz será:

$$A_s = \frac{N I}{f_s \cos^2 \theta} = \frac{11092}{2100 \times \cos^2 55.28^\circ} = 16.28 \frac{\text{cm}^2}{m}$$

$$\therefore A_s = 16.28 \frac{\text{cm}^2}{m}$$

Revisión por refuerzo mínimo:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{16.28}{100 \times 7} = 0.0233$$

$$\therefore \rho = 2.33 \frac{\%}{m} > 0.4 \frac{\%}{m} = \rho_{\min.}$$

Colocando varillas del #5, la separación será:

$$S = \frac{100 \times 1.98}{16.28} = 12.16 \text{ cm} \approx 12 \text{ cm} \quad a_s = 1.98 \text{ cm}^2$$

Por tanto se colocarán varillas del #5 @ 12 cm.

En la tercera fracción se encuentran los elementos: 10, 16, 22 y 28; y se presentan fuerzas de tensión y de compresión; la fuerza máxima de tensión corresponde al elemento 10, cercano al apoyo, cuya magnitud y dirección son: $N_{II} = 4941 \text{ Kg/m}$ y $\theta = 159.70^\circ$; respectivamente; por tanto el área de acero por metro, en dirección de la generatriz, será:

$$A_s = \frac{N_{II}}{f_s \cos^2 \theta} = \frac{4941}{2100 \times \cos^2 159.70^\circ} = 2.67 \frac{\text{cm}^2}{m}$$

$$\therefore A_s = 2.67 \frac{\text{cm}^2}{m}$$

Revisión por refuerzo mínimo:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{2.67}{100 \times 7} = 0.0038$$

$$\therefore \rho = 0.38 \frac{\%}{m} < 0.4 \frac{\%}{m} = \rho_{\min.}$$

Utilizando varillas del #3, la separación será:

$$S = \frac{100 \times 0.71}{2.8} = 25.36 \text{ cm} \approx 25.0 \text{ cm}$$

$$a_s = 0.71 \text{ cm}^2 \quad A_{s\min.} = \rho_{\min.} bd = 0.004 \times 100 \times 7 = 2.8 \frac{\text{cm}^2}{m}$$

La separación por normas, será:

$$S \begin{cases} 3.5X_1 = 3.5 \times 9 = 31.5 \text{ cm.} \\ 50 \text{ cm} \end{cases}$$

Por tanto la separación de las varillas del #3 será de 25.0 cm.

La última faja consta de los elementos: 11, 17, 23 y 29; y también se presentan fuerzas de tensión y de compresión; la fuerza de tensión máxima actúa sobre el elemento 29, a la mitad del claro, cuya magnitud y dirección son: $N_{II} = 5356 \text{ Kg/m}$ y $\theta = 0.0^\circ$; respectivamente; por tanto el área de acero por metro en dirección de la generatriz, será:

$$A_s = \frac{N_{II}}{f_s \cos^2 \theta} = \frac{5356}{2100 \times \cos^2 0^\circ} = 2.55 \frac{\text{cm}^2}{m}$$

$$\therefore A_s = 2.55 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

$$A_{s\text{mín.}} = 2.8 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

Revisión por refuerzo mínimo:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{2.55}{100 \times 7} = 0.0036$$

$$\therefore \rho = 0.36 \frac{\%}{\text{m}} < 0.4 \frac{\%}{\text{m}} = \rho_{\text{mín.}}$$

Empleando varillas del #3, la separación del refuerzo, será:

$$S = \frac{100 \times 0.71}{2.8} = 25.36 \text{ cm} \approx 25.0$$

$$a_s = 0.71 \text{ cm}^2$$

Por tanto se reforzará con varillas del #3 @ 25 cm.

Cálculo del refuerzo diagonal en el apoyo.

Comparando las fuerzas de tensión que actúan en los siguientes elementos: 9, 10, 11, 16 y 17, obtenemos la fuerza máxima de diseño y su dirección, que debe ser alrededor de 45°, cercano al apoyo; y empleando la expresión V.4a, se determina la cantidad de acero de refuerzo necesaria para re

sistir dicha fuerza.

Por tanto la máxima fuerza de tensión se localiza en el elemento 9, cercano al apoyo, cuya magnitud y dirección son: $N_I = 11092 \text{ Kg/m}$ y $\theta = 55.28^\circ$, respectivamente. El área de acero por metro en dirección diagonal, será:

$$A_s = \frac{N_I}{f_s} = \frac{11092}{2100} = 5.28 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

$$\therefore A_s = 5.28 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

Considerando varillas del #3, la separación del refuerzo, será:

$$S = \frac{100 \times 0.71}{5.28} = 13.44 \text{ cm}$$

Se colocará el refuerzo @ 10.0 cm y @ 15 cm de acuerdo con la figura V.2.

La cantidad de acero de refuerzo transversal se determinará de acuerdo a la localización de la máxima fuerza de tensión $T\phi$ y al momento transversal correspondiente $M\phi$; y aplicando las expresiones V.4b y V.8.

En la mitad del claro longitudinal se localizan las máximas fuerzas y momentos transversales, los cuales disminuyen, al disminuir el valor de ϕ , o sea, de la corona al borde longitudinal; así la magnitud de la máxima fuerza de tensión y el momento transversal máximo son:

$$T\phi = -4.069 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \quad M\phi = 453.80 \frac{\text{Kg-cm}}{\text{cm}} \quad \text{Correspondientes al nodo 27 (ver tabla III.3.1.1).}$$

$$F_t = \frac{T\phi}{d} + \frac{6 M\phi}{d^2} \quad d = 7\text{cm} \quad \text{peralte efectivo.}$$

$$\therefore F_t = -4.069 + \frac{6 \times 453.80}{7^2} \quad \text{En este caso el programa SAP V, proporciona los esfuerzos normales de membrana directamente.}$$

$$F_t = 59.64 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

La fuerza máxima de tensión transversal, será:

$$F_t = 59.64 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \times 7\text{cm} \times \frac{100\text{cm}}{1\text{m}} = 41748 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$$

Por tanto el área de acero de refuerzo transversal, será:

$$A_s = \frac{F_t}{f_s} = \frac{41748}{2100} = 19.88 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

$$\therefore A_s = 19.88 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

Porcentaje de acero:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{19.88}{100 \times 7} = 0.0284$$

$$\rho = 2.84 \frac{\%}{m} > 0.4 \frac{\%}{m} = \rho_{\text{mín.}}$$

Colocando varillas del #5, la separación, será:

$$S = \frac{100 \times 1.98}{19.88} = 9.96 \text{ cm} \approx 10.0 \text{ cm}$$

$$a_s = 1.98 \text{ cm}^2$$

Por tanto se colocarán varillas del #5 @ 10 cm, des de el centro del claro hasta 150 cm. hacia el apoyo; luego @ 15cm en los siguientes 300 cm.; en seguida se colocarán varillas del #4 @ 15, para los 300 cm que siguen; para los 200 cm que faltan para el apoyo, se proponen las mismas varillas, pero @ 30 cm. Puesto que las fuerzas resultantes $T\phi$ disminuyen al disminuir el valor de ϕ ; la mitad del refuerzo se interrumpe alrededor de $\phi = 30^\circ$. En las zonas donde las fuerzas principales no están cubiertas por el refuerzo diagonal, el refuerzo transversal se continúa hasta el borde libre. Ver el croquis del armado del cascarón en la figura V.1.2.

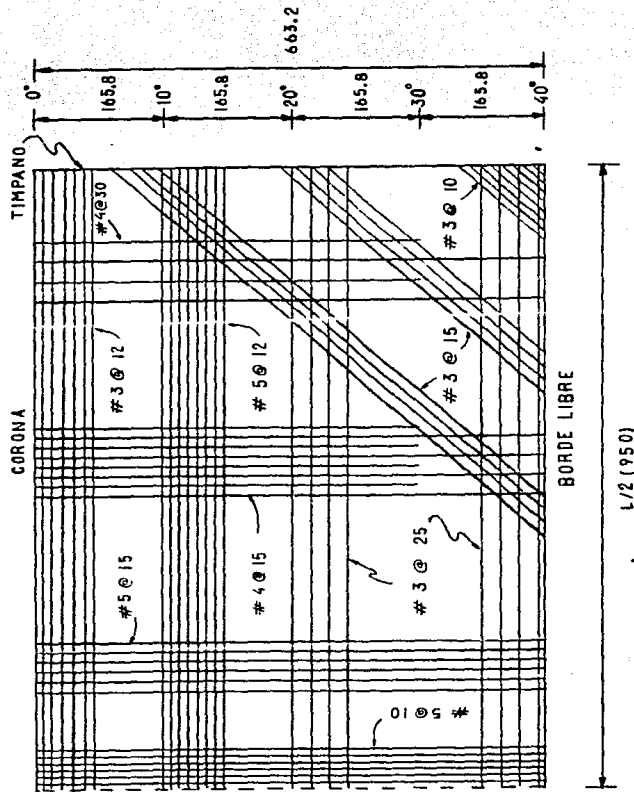


Fig. V.1.2 Detalle del armado del cascarón cilíndrico largo de concreto reforzado.

V.2.- DISEÑO DEL CASCARON CILINDRICO CORTO.

Se presentará a continuación el diseño del cascarón cilíndrico corto, de concreto reforzado, de la sección III.3.2, en el que se empleó para el análisis, el método del elemento finito; se seleccionó este ejemplo para el diseño, por considerar que los resultados que da, son más exactos que aquellos proporcionados por los métodos simplificados.

En la figura V.2.1 está representado medio cascarón en planta, y sobre el cual, se han proyectado 30 puntos arriba del eje de las "Y" y 30 puntos abajo del mismo.

Los valores de las fuerzas de membrana, así como las fuerzas y direcciones principales, los esfuerzos máximos y mínimos y el esfuerzo cortante máximo se encuentran en la tabla V.2.1.

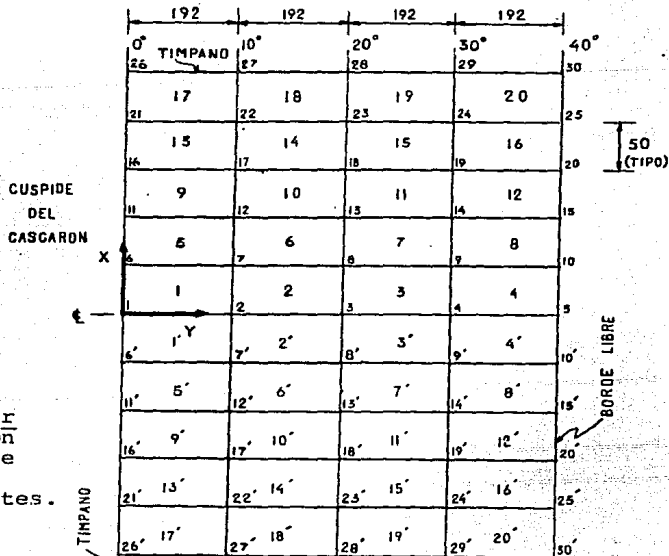


Fig. V.2.1 Representación de los puntos de la superficie del cascarón para los cuales se han calculado las fuerzas solicitantes.

T A B L A V. 2. 1

| ELEMENTO | COORDENADAS DEL PUNTO | | FUERZAS DE MEMBRANA | | | FUERZAS PRINCIPALES | | ANGULOS PRINCIPALES | | ESFUERZOS PRINCIPALES | | CORTANTE |
|----------|-----------------------|-------|---------------------|--------|--------|----------------------|-----------------------|---------------------|-----------------|-----------------------|----------------------|----------|
| | x | ϕ | Nx | Nϕ | Qxϕ | N _I (MIN) | N _{II} (MAX) | θ _I | θ _{II} | σ ₁ (MIN) | σ ₂ (MAX) | |
| | (cm) | GRAD. | Kg/m | Kg/m | Kg/m | Kg/m | Kg/m | GRAD. | GRAD. | Kg/cm ² | Kg/cm ² | |
| 1 | 25 | 5 | - 410 | - 3000 | - 32 | - 410 | - 3000 | 89.29° | 179.29 | -0.59 | - 4.29 | 1.85 |
| 2 | 25 | 15 | - 142 | - 3023 | 45 | - 143 | - 3024 | 90.81° | 0.81 | 0.20 | - 4.32 | 2.26 |
| 3 | 25 | 25 | - 1527 | - 3245 | 193 | -1512 | - 3960 | 94.54 | 4.54 | -2.16 | - 5.66 | 1.75 |
| 4 | 25 | 35 | 387 | - 2284 | - 613 | 521 | - 2418 | 77.67 | 167.67 | 0.74 | - 3.45 | 2.1 |
| 5 | 75 | 5 | - 397 | - 2960 | - 90 | - 394 | - 2963 | 88.0 | 178.0 | -0.56 | - 4.23 | 1.84 |
| 6 | 75 | 15 | 16 | - 2968 | 126 | 21 | - 2973 | 92.41 | 2.41 | 0.63 | - 4.25 | 2.14 |
| 7 | 75 | 25 | - 1250 | - 3828 | 571 | -1129 | - 3949 | 101.95 | 11.95 | -1.61 | - 5.64 | 2.0 |
| 8 | 75 | 35 | 221 | - 2220 | - 1834 | 1203 | - 3203 | 61.8 | 151.8 | 1.72 | - 4.58 | 3.15 |
| 9 | 125 | 5 | - 369 | - 2752 | - 137 | - 361 | - 2760 | 86.72 | 176.72 | -0.52 | - 3.94 | 1.71 |
| 10 | 125 | 15 | - 232 | - 2732 | 183 | - 219 | - 2745 | 94.16 | 4.16 | -0.31 | - 3.92 | 1.80 |
| 11 | 125 | 25 | - 698 | - 3468 | 927 | - 416 | - 3750 | 106.90 | 16.90 | -0.59 | - 5.36 | 2.38 |
| 12 | 125 | 35 | - 112 | - 2043 | - 3028 | -2101 | - 4256 | 53.84 | 143.84 | 3.0 | - 6.10 | 4.54 |
| 13 | 175 | 5 | - 325 | - 2125 | - 167 | - 310 | - 2140 | 84.74 | 174.74 | -0.44 | - 3.07 | 1.31 |
| 14 | 175 | 15 | - 596 | - 2076 | 197 | - 570 | - 2102 | 97.45 | 7.45 | -0.81 | - 3.0 | 1.09 |
| 15 | 175 | 25 | 116 | - 2590 | 1268 | 617 | - 3091 | 111.60 | 21.6 | 0.88 | 4.42 | 2.65 |
| 16 | 175 | 35 | - 608 | - 1639 | - 4137 | 3045 | - 529 | 48.55 | 138.55 | 4.35 | - 7.56 | 5.96 |
| 17 | 225 | 5 | - 272 | - 848 | - 151 | - 235 | - 885 | 76.17 | 166.17 | -0.335 | - 1.26 | 0.46 |
| 18 | 225 | 15 | - 1086 | - 906 | 75 | - 879 | - 1113 | 70.1 | 160.1 | -1.26 | - 1.59 | 0.17 |
| 19 | 225 | 25 | 1156 | - 860 | 1735 | 2155 | - 1859 | 119.92 | 29.92 | 3.08 | - 2.66 | 2.87 |
| 20 | 225 | 35 | 1235 | - 799 | - 5044 | 5364 | - 4928 | 50.7 | 140.7 | 7.66 | - 7.04 | 7.35 |

Las fuerzas principales están dadas al centro de cada elemento.

El acero de refuerzo se colocará según las generatrices y las directrices, como se verá a continuación.

Para calcular el refuerzo según las generatrices, se dividió el semi-cascarón dado en planta, Fig. V.2.1 en cuatro fajas. La primera faja parte del eje de la bóveda hasta 192 cm; las tres fajas restantes son del mismo ancho.

En la primera faja se conocen las fuerzas N_I y N_{II} para los elementos 1, 5, 9, 13 y 17; 1', 5', 9', 13', y 17'; donde actúan solamente fuerzas de compresión, por tal motivo se colocará el refuerzo mínimo que es: $\rho = 0.04 \%$

$$A_s = \rho b d \quad r = 2 \text{ cm} \quad h = 7 \text{ cm}$$

$$A_s = 0.004 \times 192 \times 5 = 3.84 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 3.84 \text{ cm}^2 \text{ en el ancho de } 192 \text{ cm.}$$

Con barras del #3, a esta área le corresponde una separación de:

$$S = \frac{192 a_s}{A_s} = \frac{192 \times 0.71}{3.82} = 35.69 \text{ cm}$$

$$\text{pero } S_{\max} = \begin{cases} 3.5 X_1 = 3.5 \times 7 = 24.5 \text{ cm (rige ésta).} \\ 50 \text{ cm} \end{cases}$$

Se usará una separación máxima de 25 cm.

En la segunda faja se encuentran los elementos: 2, 6, 10, 14, 18, (2', 6', 10', 14', y 18'), la máxima fuerza de tensión se halla en el elemento 2; donde $N_I = 143 \text{ kg/m}$ con una inclinación de 0.81° , luego el acero necesario por metro en dirección de la generatriz, será:

$$A_s = \frac{N_I}{f_s \cos^2 \theta} = \frac{143}{2100 \times \cos^2 0.81^\circ} = 0.068 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_s = 0.068 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Revisión por refuerzo mínimo:

$$A_{s\text{mín.}} = \rho_{bd} = 0.004 \times 100 \times 5 = 2.0 \text{ cm}^2/\text{m}$$

como:

$$A_s = 0.068 \text{ cm}^2/\text{m} < A_{s\text{mín.}} = 2.0 \text{ cm}^2/\text{m}$$

rige el refuerzo mínimo.

Colocando varillas del #3, la separación será:

$$S = \frac{100 \times 0.71}{2.0} = 35.5 \text{ cm}$$

2.0

$$\text{Pero: } S_{\text{máx.}} = \begin{cases} 3.5 \times 1 = 3.5 \times 7 = 24.5 \text{ cm} & (\text{rige ésta}). \\ 50 \text{ cm} \end{cases}$$

Por lo tanto se colocarán varillas del #3 @ 25cm.

Cálculo del acero de refuerzo para la tercera faja de los elementos: 3, 7, 11, 15, 19, (3', 7', 11', 15', y 19'); la máxima fuerza de tensión se halla en el elemento 19; donde $N_I = 2155 \text{ Kg/m}$ con una inclinación de 29.92° , luego, el acero necesario por metro en dirección de la generatriz, será:

$$A_s = \frac{N_1}{f_s \cos^2 \theta} = \frac{2155}{2100 \times \cos^2 29.92^\circ} = 1.366 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_s = 1.366 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Revisión por refuerzo mínimo.

$$A_{s\text{mín.}} = \rho_{bd} = 0.004 \times 100 \times 5 = 2.0 \text{ cm}^2/\text{m}$$

como:

$$A_s = 1.37 \text{ cm}^2/\text{m} < A_{s\text{mín.}} = 2.0 \text{ cm}^2/\text{m}$$

rige el refuerzo mínimo.

Colocando varillas del #3 @ 25 cm.

Cálculo del acero para la cuarta faja a la cual le corresponden los elementos: 4, 8, 12, 16, 20, (4', 8', 12', 16', y 20'); la máxima fuerza de tensión se halla en el elemento 20; donde $N_T = 5364 \text{ Kg/m}$, con una inclinación de 50.7° , luego, el acero necesario por metro en dirección de la generatriz, será:

$$A_s = \frac{N_T}{f_s \cos^2 \theta} = \frac{5364}{2100 \times \cos^2 50.7^\circ} = 6.36 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_s = 6.36 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Revisión por refuerzo mínimo:

$$A_{s\text{mín.}} = 2.0 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_s = 6.36 \text{ cm}^2/\text{m} > A_{s\text{mín.}} = 2.0 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Colocando varillas del #4, la separación será la siguiente:

$$S = \frac{100 \times 1.27}{6.36} = 19.97 \text{ cm} \quad (\text{rige ésta})$$

$$\text{pero: } S_{\text{max.}} = \begin{cases} 3.5 \times 1 = 3.5 \times 7 = 24.5 \text{ cm} \\ 50 \text{ cm} \end{cases}$$

Por lo tanto se colocarán varillas del #4 @ 20cm en el ancho de 192 cm.

Cálculo del acero de refuerzo según la directriz.
La cantidad de acero transversal se determinará de acuerdo a la localización de la máxima fuerza de tensión $N\phi$ y aplicando la expresión V.4 c.

En la mitad del claro longitudinal se localizan las máximas fuerzas transversales; así la magnitud de la máxima fuerza de tensión es:

$$N\phi = 3945 \text{ Kg/m}$$

Por lo tanto el área de acero de refuerzo requerida, será:

$$A_s = \frac{N\phi}{f_s} = \frac{3945}{2100} = 1.88 \text{ cm}^2/\text{m}$$

como:

$$A_s = 1.88 \text{ cm}^2/\text{m} < A_{s\text{mín.}} = 2.00 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Se colocará el refuerzo mínimo en la dirección transversal del cascarón, de un extremo al otro, y corrido de un borde libre hasta el otro.

Colocando varillas del #3, la separación será:

$$S = \frac{100 \times 0.71}{2.0} = 35.5 \text{ cm}$$

$$S_{\text{máx.}} = 25 \text{ cm}$$

Por lo tanto se colocarán varillas del #3 @ 25cm.

Cálculo del refuerzo diagonal cercano al apoyo.

En las esquinas donde el cortante es máximo, el refuerzo será colocado generalmente en la dirección del esfuerzo de tensión principal a 45° . La máxima fuerza de tensión se presenta en el elemento 20, $N_I = 5364 \text{ Kg/m}$, y su dirección debe ser alrededor de 45° ; empleando la expresión V.4 a, se determina la cantidad de acero de refuerzo por metro, ne cesaria para resistir dicha fuerza, por tanto:

$$A_s = \frac{N_I}{f_s} = \frac{5364}{2100} = 2.55 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Considerando varillas del #3 la separación del refuerzo será:

$$s = \frac{100 \times 0.71}{2.55} = 27.84 \text{ cm}$$

$$S_{\text{max}} = 25.0 \text{ cm.}$$

Se colocarán varillas del #3 @ 25 cm, de centro a centro.

Este acero de refuerzo será colocado a 45° con res-

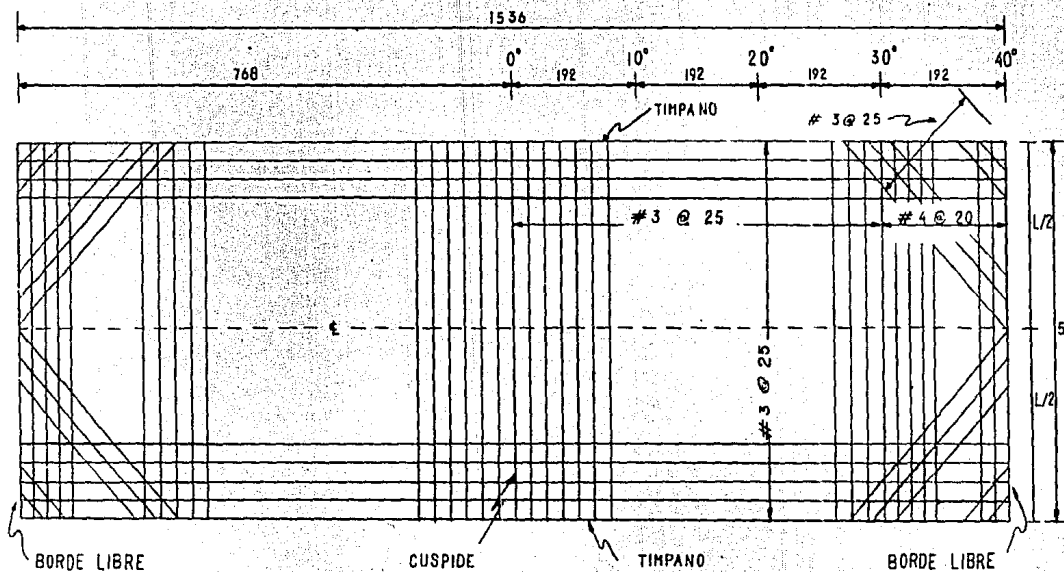


Fig. V.2.2 Detalle del armado del cascarón cilíndrico corto de concreto reforzado.

pecto a la generatriz en las cuatro esquinas, desde $\phi = 0^\circ$ hasta $\phi = 40^\circ$. Ver Figura V.2.2.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES:

Una vez realizado el análisis de los cascarones cilíndricos de concreto reforzado, en los ejemplos de aplicación en los cuales se emplearon los métodos simplificados como son: El método de la viga y el de la teoría de la membrana; siendo éstos comparados posteriormente con el método del elemento finito, se concluye lo siguiente:

Los dos métodos simplificados de análisis de cascarones cilíndricos son útiles, porque recalcan el comportamiento esencial de un cascarón, ya sea corto o largo, considerado como membrana o como viga-arco, según sea el caso; sin embargo, los resultados que proporcionan son muy limitados para el diseño del cascarón; aunque en muchos casos prácticos pueden aplicarse en forma preliminar, ya que pueden emplearse para cualquier relación de r/t y l/r , de acuerdo a cada método; siempre que las hipótesis involucradas sean suficientemente satisfechas.

Una ventaja particular del método de la viga es que puede aplicarse para todas las condiciones de apoyo, y no se requieren ecuaciones especiales para los casos de continuidad y de voladizos.

El método de la teoría de la membrana es de fácil aplicación, ya que las ecuaciones para el cálculo de las fuerzas de membrana son muy sencillas, puesto que no toman en cuenta las condiciones de borde entre los nudos.

Cuando se requiera de un análisis de cascarones cilindricos más riguroso, es recomendable emplear las tablas del Manual No. 31 del ASCE, o bien un programa de computadora, como el SAP V, utilizado en este trabajo; ya que, ambos proporcionan resultados más precisos y completos, por tanto los dos métodos simplificados de análisis presentados, se emplearán únicamente para un diseño preliminar.

Los factores que de alguna manera influyeron en la discrepancia entre los métodos simplificados de análisis y el método del elemento finito, son:

La forma diferente de aplicar la carga; ya que en el método del elemento finito se aplicó la carga, como una presión uniforme y normal a la superficie del cascarón, y en el método de la viga se tomó la carga viva uniformemente repartida sobre la proyección horizontal de la superficie del cascarón y la carga muerta repartida de manera uniforme en todo el cascarón; en el método de la teoría de la membrana, se consideró las cargas viva y muerta uniformemente repartida sobre todo el cascarón.

El cálculo de los esfuerzos resultantes es muy diferente para cada método; puesto que el programa de computadora proporciona el promedio de los elementos mecánicos correspondientes a los 4 nodos de cada elemento, aplicado en el centro de del mismo; y con los métodos simplificados se obtienen directamente sobre el nodo elegido.

Con el programa de computadora se obtienen desplazamientos y giros en las tres direcciones, para cada nodo de la malla elegida. Considerando al cascarón largo como viga se pueden calcular sólo los desplazamientos y giros en una sola dirección; los cuales resultan menores a los primeros.

En los cascarones cilíndricos circulares abiertos cortos, existe una discrepancia, que a veces se acentúa, entre la teoría de la membrana y el método del elemento finito.

Esta discrepancia tan marcada se debe a los esfuerzos creados por las condiciones de frontera a lo largo de los bordes del cascarón.

CAPITULO VII

REFERENCIAS:

- 1.- ASCE : Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs, "Manuals of Engineering. Practice", No. 31, New York, 1952.
- 2.- BILLINGTON, D.P.: Thin Shell Concrete Structures, McGraw-Hill Book Co., New York, 1965.
- 3.- CLOUGH, R.W.: The Finite Element Method in Structural Mechanics Stress Analysis, O.C. Zienkiewics, and G.G. Hollister, ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, Chapter 7, 1964.
- 4.- CHINN, J.: Cylindrical Shell Analysis Simplified by Beam Method, J. ACI, Vol. 30, pp. 1183, May, 1959.
- 5.- GIBSON, J.E.: Linear Elastic Theory of Thin Shells, 1a. Ed., Pergamon Press, New York, 1966.
- 6.- GIBSON, J.E.: The Design of Cylindrical Shell Roofs, 2a. Ed., D.Von Nostrand Company, Inc., New York, 1961.
- 7.- LUNDGREN, H.: Cylindrical Shells, Vol. 1, Danish Technical Press, Copenhagen, pp. 63-74, 1949.
- 8.- OLVERA LOPEZ, ALFONSO : Análisis, Cálculo y Diseño de las Bóvedas de Cáscara, 1a. Ed., CECSA, México, 1982.
- 9.- PUBLICACION No. 401 : Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto. Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal. Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1977.
- 10.- SPAMPINATO, AGRIPINO R.: Teoría y Cálculo de las Bóvedas Cáscaras Cilíndricas, 2a. Ed., Librería y Editorial Alsina, Argentina, 1960.

- 11.- TIMOSHENKO, S., and GOODIER, J.E.: Theory of Elasticity,
2a. Ed., McGraw-Hill Book Co.
New York, 1951.
- 12.- TIMOSHENKO, S., and S. WOINOWSKY-KRIEGER.: Theory of
Plates and Shells, 2a. Ed., McGraw-Hill Book
Co., New York, N.Y., 1959.