2E/12

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NOTAS DE APOYO PARA EL CURSO DE ESTADISTICA II, EN EL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

ISABEL CASTILLO URIBE

MEXICO, D. F., 1987

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

Habiendo ingresado a la plantilla de profesores del Colegio de Ciencias y Humanidades en el año de 1972, a partir de 1973 se impartieron las materias de acuerdo a cada especialidad, y desde entonces me dediqué a impartir las materias de Estadística; Estadística I y Estadística II.

A pesar de que los programas de estudio son iguales en todos los Planteles del C.C.H., el contenido de las materias no ha podido unificarse por lo que refiero mi experiencia únicamente en lo que concierne al Plantel Vallejo, en el cual se dedica el primer semestre al desarrollo de la Estadística Descriptiva y una introducción a la teoría de la Probabilidad.

En el Segundo Semestre (Estadística II), el contenido es fundamentalmente el siguiente:

I. Distribuciones de Probabilidad:
   1.1 Cálculo de media de una distribución de probabilidad
   1.2 Cálculo de la varianza de una distribución de probabilidad.

II. Distribuciones Especial.
   Distribución Binomial (Caso discreto)
   Distribución normal (Caso continuo)

III. Aproximación de la Distribución Binomial por medio de la Normal.

A través de la experiencia que me han dado estos años, he detectado una serie de necesidades, motivadas por la falta de un programa homogenizado, que debieran seguir todos los profesores, así como; falta de textos adecuados a los objetivos que el C.C.H, se ha señalado, ya que publicaciones emitidas por ciertos editoriales no satisfacen en contenidos los objetivos planteados, el nivel es muy alto para los alumnos de nuestro C.C.H. el costo de los mismos es muy alto.

Por lo que es para satisfacer las necesidades antes planteadas, desarrolle un programa por objetivos y contenidos correspondiente a la materia de Estadística II.

Las presentes notas apoyan al desarrollo del programa de Estadística II, mismo que se propuso a la Academia de Matemáticas - del Plantel Vallejo.

Agradezco, el empeño, esfuerzo y el tiempo que la Mat. Margarita Chávez Cano, ha dedicado en la dirección, revisión y corrección de las presentes notas, sin el cual no hubiera sido posible llevarse a cabo.

Así mismo agradesco la gentileza de los Profesores:

Act. Francisco Sánchez Villarreal

Act. Ramón Vera Mendoza

Act. María Cristina Ventura Uribe y

Act. Luz María Arrillaga Arjona

Por haber aceptado costituirse en jurado.

PROFRA. ISABEL CASTILLO URIBE.

PROGRAMA DE ESTADISTICA II.

Objetivos Generales del Curso:

EL ALUMNO COORDINARA RACIONALMENTE SUS PENSAMIENTOS EN LOS PROCEDIMIENTOS Y TECNICAS DE LA ESTADISTICA

U N I D A D I.

TITULO: Distribuciones de Probabilidad.

OBJETIVOS INTERMEDIOS: El alumno describirá el comportamiento de una variable aleatoria calculando su distribución de probabilidad.

CONTENIDO:

1.- Distribuciones de Probabilidad

1.1 Variable aleatoria

OBJETIVO:

1.1. El alumno, definirá una variable aleatoria

1.1.1. Identificará una variable aleatoria.

Cuando se estudia un fenómeno que está relacionado con el azar, generalmente observamos en éste una cualidad que nos interesa, por ejemplo si trabajamos con los alumnos del C.C.H., es probable que de ellos nos interese; el número de materias que han aprobado, su edad, la cantidad de dinero que ocupan para sus gastos por día etc., o al lanzar dos dados al aire puede importarnos la suma de los dígitos presentados en sus ca--

ras etc, a esta cualidad que de los fenómenos nos interesa le podemos -- asignar un valor numérico y la simbolizaremos por "X" llamándola "variable aleatoria".

Ejemplo: Se lanza una moneda al aire dos veces; sea "X: número de soles obtenidos" recordemos que el espacio muestral para este fenómeno aleatorio es $\Omega = \{(a,a), (a,s), (s,a), (s,s)\}$ asociamos a cada punto muestral un valor numérico que represente el número de soles.

(a,a) ——— 0

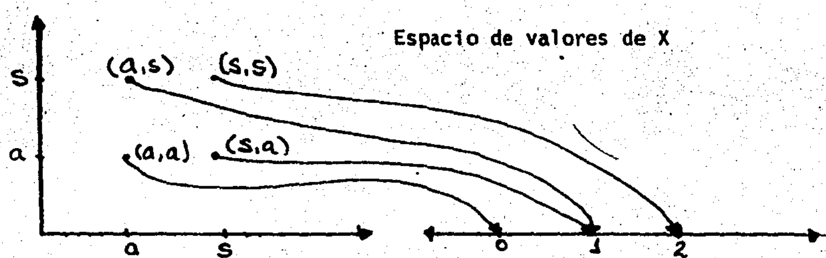
(a,s) ——— 1

(s,a) ——— 1

(s,s) ——— 2

De donde decimos que los valores numéricos que puede tomar nuestra variable aleatoria son: X = 0, 1, 2

Ahora bien gráficamente se establece la siguiente relación entre los puntos muestrales del lanzamiento de nuestra moneda dos veces y el valor numérico que toma X.



Notemos que:

X = 0 es el resultado del punto muestral (a,a); X = 1, resulta del punto muestral (a,s), pero también del punto muestral (s,a); finalmente X = 2, es el resultado del punto muestral (s,s).

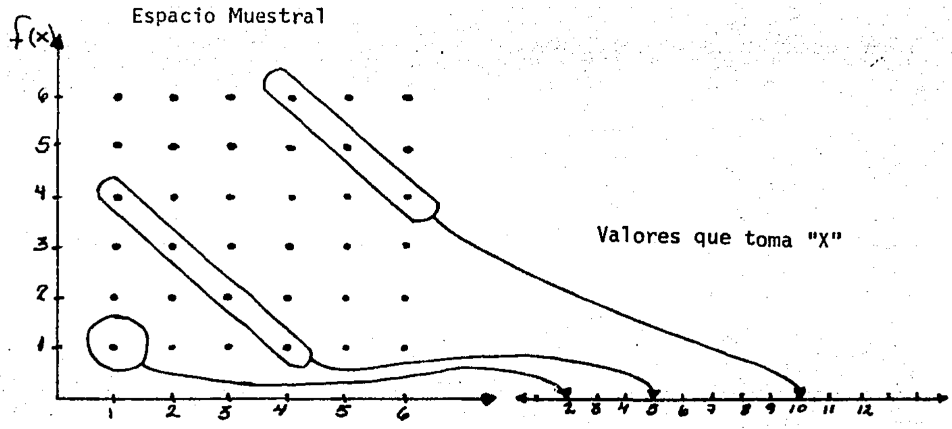
Ejemplo 2.- Se lanzan dos dados al aire, sea X: "La suma de las caras de los dados". El espacio muestral para este fenómeno aleatorio sería:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

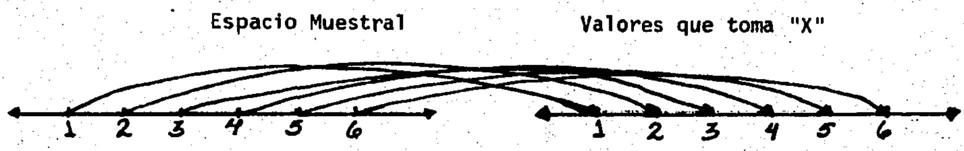
en donde el primer elemento de las parejas, nos representan el primer dado y el segundo elemento de las parejas nos representan el segundo dado, La suma de todas estas parejas nos dan valores que van de 2 al 12, este es: X = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Ahora bien: X = 2 es el resultado de (1,1); para X = 3 es el resultado de (1, 2) y (2,3); X = 4 es el resultado de: (1,3), (2,2) y (3,1) - etc.

La relación que existe entre los puntos muestrales y los valores, de X, podemos contemplarla gráficamente así:



Ejemplo 3.- Se lanza un dado al aire. Sea "X: el # de puntos en la cara del dado que queda hacia arriba", para este ejemplo Ω = {1, 2, 3, 4,5,6} y los valores de X= 1, 2, 3, 4, 5, 6, notamos que el espacio muestral es igual al conjunto de los valores que toma X" gráficamente la relación quedaría así:



Ahora recordemos la definición de función "Una función es un conjunto de pares ordenados (x, y) tal que por cada valor de x hay a lo sumo - un valor de y; es decir ningún primer elemento se asocia con más de un - segundo elemento. Se considera al primer elemento como la variable independiente y al segundo elemento como la variable dependiente. El conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados de números recibe el nombre de dominio de la función, el conjunto de todos los segundos elementos se llama recorrido de la función "(pág. 256. Introducción a las Matemáticas, Bruce. E. Meserve y Max A. Sobel Editorial Reverté - Mexicana, S. A. 1967.

Según esta definición podemos considerar a la variable aleatoria como una función, siendo la variable independiente el espacio muestral y - la variable dependiente los valores que toma "X".

De acuerdo al anterior desarrollo definamos Variable Aleatoria así:

Def: Una Variable Aleatoria es una función con valores reales definida en un espacio muestral de un fenómeno aleatorio.

1.2. CONTENIDO: **Definición de Distribución de Probabilidad.**

1.2. OBJETIVO: **El alumno definirá el Concepto de Distribución de Probabilidad.**

Volviendo a nuestro ejemplo 1. "Se lanza una moneda al aire dos veces. Sea "X: el número de soles que aparecen".

$$\Omega = \{\overset{0}{(a,a)}, \overset{1}{(s,a)}, \overset{1}{(a,s)}, \overset{2}{(s,s)}\}$$

con $\Omega = \{(a,a), (s,a), (a,s), (s,s)\}$

y $X = 0, 1, 2$

Vemos que: $P(X = 0) = \frac{1}{4}$, $P(X = 1) = \frac{2}{4}$ y $P(X = 2) = \frac{1}{4}$ Resumiendo los valores de la variable aleatoria y sus probabilidades correspondientes en una tabla tendremos;pero antes cambiemos la notación, - - - - - - $P(X = x_i)$ por $f(x_i)$, donde x_i representa los valores de x.

Notese que: $\sum f(x_i) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$

	x_1	x_2	x_3
x_i	0	1	2
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

y además que $0 \leq f(x_i) \leq 1$

A esta relación entre los valores numéricos de la variable aleatoria y su probabilidad correspondiente le llamamos "Distribución de Probabilidad".

Hagamos la tabla de la Distribución de probabilidad para nuestro - ejemplo 2);

	x_1	x_2	x_3					.	. .	.	x_{10}	x_{11}
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$P\ (X = 2) = \frac{1}{36}$, puesto que la única pareja del Espacio Muestral cuya suma es 2 es (1,1):

$P\ (X = 7) = \frac{6}{36}$, dado que las parejas del Espacio Muestral cuya suma es 7 son: {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}

Además se cumple que $0 \leq f(X_i) \leq 1$ y la $\sum f(X_i) = 1$ puesto que:

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = 1$$

Para el ejemplo 3 la tabla de la Distribución de probabilidad será:

$x_1 \quad x_2 , \ldots \quad , x_6$

X_i	1	2	3	4	5	6
$f(X_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

donde:

$$0 \leq f(X_i) \leq 1 \quad y \quad \sum f(X_i) = 1$$

Podemos ahora intentar definir lo que es una Distribución de Probabilidad o, Función de Probabilidad.

Def: Distribución de Probabilidad de una variable aleatoria es el conjunto de valores de probabilidad asociados a los valores de la variable aleatoria.

Para que realmente tengamos una distribución de Probabilidad o una función de Probabilidad se debe de cumplir que

a) $0 \leq f(X_i) \leq 1$

y

b) $\sum f(X_i) = 1$

Def. Función de Distribución Acumulativa. Dada una Distribución de -- probabilidad o función de Probabilidad $f(x_i)$ con i = 1, 2, 3, ..., la - Distribución Acumulativa F (x) se define como

$$F(x) = \sum f(x_i)$$

para todos los valores $x \leq x_i$

1.2.1 CONTENIDO : Clasificación de Distribuciones por su variable.

1.2.1 OBJETIVO : El alumno diferenciará una Distribución de Probabilidad con variable Discreta, de una variable continua.

Las distribuciones de Probabilidad por su variable Aleatoria se pueden clasificar en :

las de variable aleatoria Discreta y las de variable aleatoria Continua.

Def. Una variable aleatoria discreta es aquella variable aleatoria que- se define en un espacio muestral finito o al menos numerable. Dicho de- otra manera, la variable aleatoria discreta involucra el proceso de Contar. Ejemplos:

a) El número de errores en una impresión
b) La cantidad de ejemplares vendidos por un Periódico.
c) El número de automóviles que salen por la carretera de

Cuota México - Cuernavaca.

En una distribución de Probabilidad de una variable-aleatoria Discreta se cumplen las siguientes dos condiciones:

1.- $0 \leq f(x_i) \leq 1$

2.- $\sum f(x_i) = 1$

Def. Una variable Aleatoria Continua. Es aquella variable aleatoria -- que se define en un espacio muestral infinito no numerable. En la variable aleatoria Continua se involucra el proceso de medir (tiempo, peso, - temperatura etc.) Ejemplos;

1) El tiempo que los Aviones de Aeroméxico tardan en el vuelo - -- México - Acapulco.
2) El peso de los jugadores de fut-ball Americano.
3) La cantidad de leche que consumen los bebés de un hospital Pe-- diátrico.

EJEMPLOS DE REFUERZO PARA EL OBJETIVO. 1.2.1

Variable Aleatoria Discreta.

1) La pensión asignada en un juicio de Divercio para la Demandante.
2) El número de personas afectas por el SIDA en cada País.
3) El número de personas que abordan en la terminal Tacuba del metro de la Ciudad de México por día.
4) El importe de las ventas efectudas por mes en un centro comercial.
5) El número de accidentes trimestrales ocurridos a los aviones DC - 10 de 1970 a 1980.

Variable Aleatoria Continua,

1) La cantidad de lluvia que cae en Tuxpan, Veracruz en los meses de Mayo a Agosto.

2) El tiempo que tarda en hervir un litro de agua en diferentes recipientes.

3) El tiempo que vivirán una golondrina en cautiverio.

EJERCICIOS DE REFUERZO: (OBJETIVO 1.2.1)

Identifica las siguientes variables aleatorias como discretas o Continuas. (V. D ó V.C).

-- El número de soles que aparecen cuando se lanza tres veces una moneda al aire.
-- El número de cigarros fumados por un nervioso en un día.
-- La cantidad de agua potable usada por una familia al mes.
-- El número de mascotas que se tienen por familia en la Ciudad de Puebla.
-- La temperatura ambiental registrada en el interior de un cine.
-- La vida en horas de un cierto tipo de televisor.
-- El número de preguntas contestadas de un total de 10 preguntas en un examen aplicado a 50 estudiantes.
-- El peso de 100 bolsas con azúcar.

1.2.2. CONTENIDO

DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD CON VARIABLE DISCRETA.

1.2.2. OBJETIVO

El alumno calculará la Distribución de Probabilidad de una variable Discreta.

Este objetivo de hecho se desarrolló en el objetivo 1.2. por lo que a continuación se plantean ejercicios de refuerzo.

Ejemplo 4. Se lanzan tres monedas al aire Sea X: "número de águilas obtenidas".

$$\Omega = \{(a,\overset{3}{a},a),\ (a,\overset{2}{a},s),\ (a,\overset{2}{s},a),\ (a,\overset{1}{s},s),\ (s,\overset{0}{s},s),\ (s,\overset{1}{s},a),\ (s,\overset{1}{a},s),\ (s,\overset{2}{a},a)\}$$

y los valores que puede tomar la variable aleatoria "X" son:

$X = 0, 1, 2, 3.$

ahora: $P(X = 0) = \frac{1}{8}$ ya que solo en la Terna (s,s,s) aparecen cero águilas.

$P(X = 1) = \frac{3}{8}$ puesto que las ternas donde hay exactamente un águila forman el evento compuesto (a,s,s), (s,s,a), (s,a,s)

$P(X = 2) = \frac{3}{8}$ ya que las ternas que satisfacen; $X = 2$ son el subconjunto {(a,a,s), (a,s,a), (s,a,a)} y finalmente $P(X = 3) = \frac{1}{8}$ puesto que sólo la terna (a,a,a) satisface a $X = 3$.

Concentrando estos valores en una tabla tendremos la Distribución de Probabilidad.

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Realmente se trata de una Distribución de Probabilidad ya que

a) $0 \leq f(x_i) \leq 1$

b) $\sum f(x_i) = 1$

puesto que $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$.

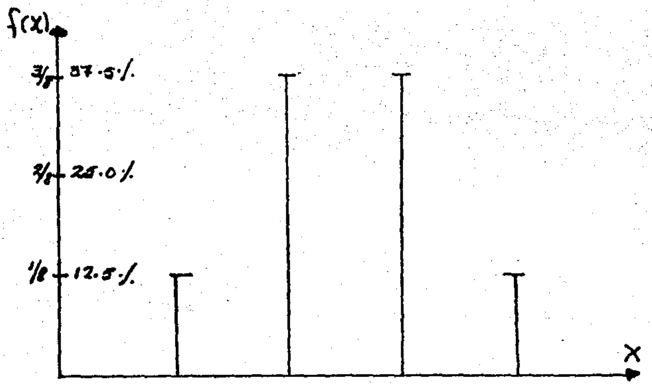
1.2.5 CONTENIDO.

Gráficas de una Distribución de Probabilidad.

1.2.5 OBJETIVO.

El alumno ilustrará gráfica y simbólicamente la Distribución de Probabilidad Discreta.

Para graficar una Distribución de Probabilidad utilizaremos un histograma lineal, que consiste en utilizar segmentos verticales de longitud igual a f(x) según una escala determinada la gráfica del ejemplo 4 quedaría así:



Según esta gráfica e interpretada f(x) como, la frecuencia relativa con que aparece X = 0, si lanzamos las 3 monedas muchas veces al aire - esperamos que no aparezcan águilas en un 12.5% de tiradas aproximadamente, así mismo podemos esperar en un 37.5% de tiradas que aparezca sola-- mente un águila, etc.

Ejemplo 5: Un grupo de alumnos presentaron un examen en el que pueden - obtener calificaciones de 6 a 10. Si se eligen dos al azar y se obtiene el promedio de sus calificaciones le llamaremos a "X: La media de las - calificaciones de las muestras".

$$X = 7.5$$

$$\Omega = \{(6,6), (6,7), (6,8), (6,9), (6,10)$$
$$(7,6), (7,7), (7,8), (7,9), (7,10)$$
$$(8,6), (8,7), (8,8), (8,9), (8,10)$$
$$(9,6), (9,7), (9,8), (9,9), (9,10)$$
$$(10,6), (10,7), (10,8), (10,9), (10,10)\}$$

y los valores de X serían

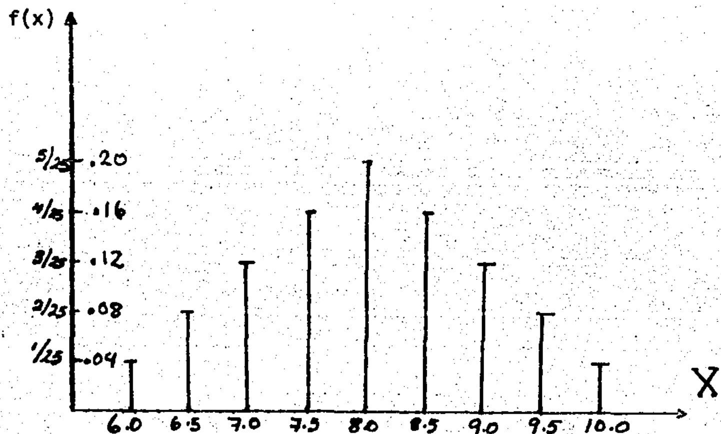
$X = 6.5,\ 7.0,\ 7.5,\ 8.0,\ 8.5,\ 9.0,\ 9.5,\ 10$

la Distribución de Probabilidad estaría dada en la tabla

x_i	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
$f(x_i)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

Se ve claramente que $0 \leq f(x_i) \leq 1$ y además que: $\sum f(x_i) = 1$

El Histograma lineal sería



EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LOS OBJETIVOS 1.2.2. y 1.2.3

1.- Realiza el Histograma lineal para los ejercicios 1.2.3 de los presentes apuntes.

2.- Se lanza una moneda al aire 4 veces al aire sea "X = número de soles que aparecen" Encuentra el Espacio Muestral. Los valores de X. La Distribución de Probabilidad y su Histograma lineal.

3.- Se arrojan al aire 2 dados. Si "X el cociente de las caras de los dados". Encuentra la Distribución de probabilidad y su histograma lineal.

4.- Encontrar y graficar la Distribución de probabilidad de la variable aleatoria "X = la suma de los tres números que se obtienen al arrojar 3 dados al aire".

5.- Encuentra y grafica la Distribución de Probabilidad de la variable aleatoria "X = Producto de los dos números que se obtienen al arrojar al aire dos dados".

6.- Construya un histograma lineal para cada uno de los siguientes conjuntos de datos.

Número de goles anotados por una estrella en una temporada.

Número de goles	Encuentros de fut-ball
0	5
1	7
2	11
3	13
4	4

7.- Un jugador lanza un dado corriente. Sea "X: el número sobre la cara superior del dado. Si se obtiene un número primo gana dicho número en dólares, si no sale dicho número primo entonces pierde esa cantidad en dólares. Encuentra los valores de la variable aleatoria y la Distribución de Probabilidad.

8.- En un juego de dados, si la suma es menor o igual a 7 se pierden $ 30.00, calcula la distribución de probabilidad para la variable aleatoria X: número de pesos ganados.

9.- Dada la siguiente Distribución de probabilidad.

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	y	0.1	0.3	0.4

Encuentra el valor de y

10.- Dada la siguiente Distribución de probabilidad

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	y	.1	2y	3y	.3

Encuentra el valor de $f(x_i)$ para x = 0, x = 2 y x = 3

1.2.2.1 OBJETIVO.

El alumno. Calculará la Distribución de Probabilidad de una variable Discreta aplicando los conocimientos en Análisis Combinatorio y el concepto de Independencia. Resolvamos el siguiente problema.

Ejemplo 6: Se guardan en una caja 10 lámparas de mano, de las cuales 6 no tienen pilas. Se extraen aleatoriamente sin reemplazo, 2 de ellas. Sea "X: número de lámparas sin pilas que se extraen." El Espacio Muestral en este caso no lo vamos a detallar, sin embargo calcularemos el total de arreglos que se pueden hacer usando combinaciones: este es:

$$\binom{10}{2} = \frac{10\,!}{2\,!\,(10-2)\,!} = \frac{10.\ 9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}{2.\ 1\ (8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1)} =$$

$\frac{10.\ 9}{2.1}$ = 45 arreglos diferentes del espacio muestral.

De este total de 45 arreglos, habrá algunos en donde no habrá una sola lámpara sin pilas, algunos en los que habrá 1 lámpara sin pilas y otros en donde las dos lámparas serán sin pilas por lo que nuestra variable aleatoria X tomará los valores 0, 1, y 2; X = 0, 1, 2 para saber la probabilidad de que X = 0 sólo nos falta saber cuáles son los casos favorables, mismos que buscaremos en las 4 lámparas con pilas

$\binom{4}{2} = \frac{4.3}{2}$ = 6 arreglos sin lámparas que no tienen pilas.

$\binom{6}{1}\binom{4}{1} = 6 \times 4 = 24$ arreglos en los que hay exactamente una - lámpara sin pilas.

$\binom{6}{2} = \frac{6.5}{2}$ = 15 arreglos en las que hay 2 lámparas sin pilas la - tabla de Distribución de probabilidad quedará así:

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	$\frac{6}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{15}{45}$

se cumplen las dos condiciones que se requieren para ser una Distribución de Probabilidad.

1) $0 \leq f(x_i) \leq 1$

puesto que $f(x_1) = \frac{6}{45}$ que es mayor que cero y menor a 1

$f(x_2) = \frac{24}{45}$ que es mayor que cero y menor a 1

$f(x_3) = \frac{15}{45}$ que es mayor que cero y menor a 1

2) $\sum f(x_i) = 1$

puesto que $\frac{6}{45} + \frac{24}{45} + \frac{15}{45} = \frac{45}{45} = 1$

El alumno realizará la gráfica de esta distribución como tarea.

Ejemplo 7: Se seleccionan al azar tres focos de una caja que contiene - 12 focos, 3 de los cuales están fundidos. Sea "X: Número de focos fundidos extraídos" encuentra la Distribución de probabilidad. El Espacio -- Muestral consta de $\binom{12}{3} = \frac{12\,!}{3\,!\,(12-3)\,!} = \frac{12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1.}{3.2.1\,(9.8.7.6.5.4.3.2)} =$

$$\frac{12.\ 11.\ 10}{3.\ 2.\ 1} = 220$$

ahora:

$$\binom{9}{3} = \frac{9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1.}{3.\ 2.\ 1.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1.} = 3.4.7 = 84$$

84 arreglos en los que no hay focos fundidos

$\binom{3}{1}\ \binom{9}{2} = 3.\ \frac{9.8}{2} = 3 \times 36 = 108$ arreglos con 1 foco fundido.

$\binom{3}{2}\ \binom{9}{1} = \frac{3.2}{2.1}\ .9 = 27$ arreglos con 2 focos fundidos y

$\binom{3}{3} = 1$ arreglos en los tres focos fundidos.

De donde la Distribución de Probabilidad queda resumida en la tabla:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{84}{220}$	$\frac{108}{220}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

Cumpliéndose las condiciones que se requieren para ser una Distribución de Probabilidad.

1) $0 \leq f(x_i) \leq 1$

Dado que: $f(x_1) = \frac{84}{220}$ y $0 \leq \frac{84}{220} \leq 1$

$f(x_2) = \frac{108}{220}$ y $0 \leq \frac{108}{220} \leq 1$

$f(x_3) = \frac{27}{220}$ y $0 \leq \frac{27}{220} \leq 1$

$f(x_4) = \frac{1}{220}$ y $0 \leq \frac{1}{220} \leq 1$

2) $\sum f(x_i) =$

cumpliéndose esta condición ya que:

$$\frac{84}{220} + \frac{108}{220} + \frac{27}{220} + \frac{1}{220} + \frac{220}{220} = 1$$

El teorema para eventos independientes nos dice si A y B son eventos independientes entonces $P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$. Recordemos este teorema para realizar nuestro siguientes ejemplo.

Ejemplo 8; Se tiene una moneda cargada de tal manera que la P (sol) = $\frac{2}{3}$ y P (águila) = $\frac{1}{3}$. Se lanza 3 veces al aire siendo "X: número de soles obtenidos", el Espacio mUestral es

$$\Omega = \{(a,a,a),\ (a,a,s),\ (a,s,s),\ (a,s,a),\ (s,s,s),\ (s,s,a),\ (s,a,a),\ (s,a,s)\}$$

En este caso como la moneda está cargada, los puntos muestrales no tienen la misma probabilidad de ocurrir, calcularemos estas probabilidades usando el teorema de Independencia:

$P\ (a,a,a) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

$P\ (a,a,s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$

$P\ (a,s,s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$

$P\ (a,s,a) = \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

$P\ (s,s,s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

$P\ (s,s,a) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

$P\ (s,a,s) \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

$P\ (s,a,s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$

Los valres de X = 0, 1, 2, 3

Siendo X la variable que representa en Ω el número de soles obtenidos:

$X\ (a,a,a) = 0$

$X\ (a,a,s) = 1;\quad X\ (a,s,a) = 1;\quad X\ (s,a,a) = 1$

$X\ (a,s,s) = 2;\quad X\ (s,s,a) = 2;\quad X\ (s,a,s) = 2$

$X\ (s,s,s) = 3$

Ahora para buscar la Distribución de Probabilidad calcularemos:

$P\ (X = 0) = P\ (a,a,a) = \frac{1}{27}$

$P\ (X = 1) = P\ \{(a,a,s),\ (a,s,a),\ (s,a,a)\} = \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{6}{27}$

3. Se extraen 3 cartas de una baraja americana de 52 cartas sea -- "X: número de ases obtenidos". Encuentra la Distribución de Probabilidad (plantee el desarrollo)

4. Se extraen 3 cartas de una baraja americana de 52 cartas. Sea "X: número de tréboles obtenidos". Encuentra la Distribución de Probabilidad (plantee el desarrollo).

5. Se extraen 4 cartas de una baraja Española de 40 cartas. Sea - "X: número de oros obtenidos". Encuentra la Distribución de Probabilidad (plantee el desarrollo).

6, Se extraen 4 cartas de una baraja Americana, Sea "X: número de quinas obtenidas plantee el desarrollo de la Distribución de probabilidad.

7. Se extraen 4 cartas de una baraja Americana. Sea "X: número - de diamantes obtenidos". Plantear el desarrollo de la Distribución de - probabilidad.

8, Se extraen 2 clavos en forma aleatoria de un conjunto de 50 en donde 10 de ellos tiene 4 mm de diámetro y los demás 3 mm de diámetro -- Sea "X: número de clavos de 4 mm de diámetro extraído. Calcular la distribución de probabilidad y el Histograma línea.

9. Dos reglas de plástico se extraen aleatoriamente, sin reemplazo de un conjunto de 10 reglas de plástico, cuatro de ellas no tienen grabada una escala. Encontrar y dibujar la función de probabilidad $f(x_i)$ de la variable aleatoria "X = Número de reglas sin escala grabada".

aleatoria por su probabilidad correspondiente y la simbolizaremos por -- μ ó E (también μ (X) ó E(X)). La media representa un valor constante- alrededor del cual están los valores que toma la variable aleatoria.

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E\,(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$E\,(X) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}$$

$$E\,(X) = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

Ahora, sabiendo cual es la media de una Distribución de Probabilidad podemos calcular el promedio de las Dispersiones que hay hacia la Media.

Se calculará la varianza de nuestro ejemplo de la siguiente manera: - -- A cada valor de la variable aleatoria le restamos el valor de la media - y lo elevamos al cuadrado, todos estos resultados se suman y se simboliza así σ^2, siendo σ la Desviación Standar de nuestra Distribución. La varianza representa un valor constante positivo que indica qué tan -- alejados están los valores de la variable con respecto a la media, es decir, mide la dispersión de los valores de la variable aleatoria.

Cálculo de la Varianza.

$$\sigma^2 = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{21}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(2 - \frac{21}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(3 - \frac{21}{6}\right)^2 +$$

$$\frac{1}{6}\left(4 - \frac{21}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(5 - \frac{21}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(6 - \frac{21}{6}\right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{6}{6} - \frac{21}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{12}{6} - \frac{21}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{18}{6} - \frac{21}{6}\right)^2 +$$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{24}{6} - \frac{21}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{30}{6} - \frac{21}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{36}{6} - \frac{21}{6}\right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{6}\left(- \frac{15}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(- \frac{9}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(- \frac{3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{9}{6}\right)^2 +$$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{15}{6}\right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{225}{36}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{81}{36}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{9}{36}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{9}{36}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{81}{36}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{225}{36}\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{225}{216} + \frac{81}{216} + \frac{9}{216} + \frac{9}{216} + \frac{81}{216} + \frac{225}{216}$$

$$\sigma^2 = \frac{630}{216} = 2.9167 \quad \text{Varianza}$$

$$\sigma = 2.9167 = 1.7078 \quad \text{Desviación Standar.}$$

Retomemos ahora el siguiente ejemplo: Se lanza al aire una moneda 2 veces. Sea "X: Número de soles que aparecen". La Tabla de Distribución es:

xi	0	1	2
f(xi)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

La Media de la Distribución será:

$$\mu\ (X) = E(X) = 0.\ \frac{1}{4} + 1.\ \frac{2}{4} + 2.\ \frac{1}{4}$$

$$\mu\ (X) = E(X) = 0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

La Varianza de esta Distribución será:

$$\sigma^2 = \frac{1}{4}(0 - 1)^2 + \frac{2}{4}(1 - 1)^2 + \frac{1}{4}(2 - 1)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{4}(-1)^2 + \frac{2}{4}(\ 0\ )^2 + \frac{1}{4}(\ 1\ )^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{4}.\ 1 + 0 + \frac{1}{4}(1)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = .5$$

De donde la Desviación Standar para esta Distribución es :

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{.5} = .7071$$

Veamos un ejemplo más.

Se lanzan al aire 2 dados siendo "X = la suma de las caras de los dados".

La Tabla de Distribución de Probabilidad será:

xi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(xi)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

La μ será,

$$\mu = 2.\ (\tfrac{1}{36}) + 3\ (\tfrac{2}{36}) + 4\ (\tfrac{3}{36}) + 5\ (\tfrac{4}{36}) + 6\ (\tfrac{5}{36}) + 7\ (\tfrac{6}{36}) +$$

$$+ 8\ (\tfrac{5}{36}) + 9\ (\tfrac{4}{36}) + 10\ (\tfrac{3}{36}) + 11\ (\tfrac{2}{36}) + 12\ (\tfrac{1}{36})$$

$$\mu = \frac{2}{36} + \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \frac{20}{36} + \frac{30}{36} + \frac{42}{36} + \frac{40}{36} + \frac{36}{36} + \frac{30}{36} +$$

$$\frac{22}{36} + \frac{12}{36}$$

$$\mu = \frac{252}{36} = 7$$

y la Varianza σ^2, será :

$$\sigma^2 = \frac{1}{36}(2-7)^2 + \frac{2}{36}(3-7)^2 + \frac{3}{36}(4-7)^2 + \frac{4}{36}(5-7)^2 +$$

$$\frac{5}{36}(6-7)^2 + \frac{6}{36}(7-7)^2 + \frac{5}{36}(8-7)^2 + \frac{4}{36}(9-7)^2 +$$

$$\frac{3}{36}(10-7)^2 + \frac{2}{36}(11-7)^2 + \frac{1}{36}(12-7)^2 =$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{36}(-5)^2 + \frac{2}{36}(-4)^2 + \frac{3}{36}(-3)^2 + \frac{4}{36}(-2)^2 + \frac{5}{36}(-1)^2 +$$

$$\frac{6}{36}(0)^2 + \frac{5}{36}(1)^2 + \frac{4}{36}(2)^2 + \frac{3}{36}(3)^2 + \frac{2}{36}(4)^2 + \frac{1}{36}(5)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{36}(25) + \frac{2}{36}(16) + \frac{3}{36}(9) + \frac{4}{36}(4) + \frac{5}{36}(1) + \frac{6}{36}(0) +$$

$$\frac{5}{36}(1) + \frac{4}{36}(4) + \frac{3}{36}(9) + \frac{2}{36}(16) + \frac{1}{36}(25)$$

$$\sigma^2 = \frac{25}{36} + \frac{32}{36} + \frac{27}{36} + \frac{16}{36} + \frac{5}{36} + 0 + \frac{5}{36} + \frac{16}{36} +$$

$$\frac{27}{36} + \frac{32}{36} + \frac{25}{36}$$

$\sigma^2 = \frac{210}{36} = 5.83$ La Varianza vale 5.83

$\sigma = 2{,}4152$ La Desviación Standar.

Con estos ejemplos podemos entender el desarrollo siguiente:

Siendo xi los valores que toma la variable aleatoria y f(xi) las probabilidades correspondientes.

$$\mu(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + \ldots\ldots\ldots + xn\, f(xn).$$

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^{n} xi\, f(xi)$$

Siendo esta la fórmula de la -- media ó valor esperado de una - Distribución de una Variable -- Aleatoria Discreta.

Para llegar a la fórmula de la varianza de una Distribución de una Variable Aleatoria Discreta el desarrollo es el siguiente:

$$\sigma^2 = f(x_1)\ (x_1 - \mu)^2 + f(x_2)\ (x_2 - \mu)^2 + f(x_3)\ (x_3 - \mu)^2 + \ldots, f(xn - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} f(xi)\ (xi - \mu)^2$$

De donde podemos contemplar la siguiente definición.

Definición.- Sea X una Variable Aleatoria con densidad $f(x)$, el Valor Esperado de X, $E(X)$, es

$E(X) = \Sigma\ xi\ f(xi)$ para X discreta.

Teorema. Sea X una Variable Aleatoria con densidad $f(x)$. El valor esperado de una Función $\mathcal{U}$, de la variable aleatoria X es

$E[\mathcal{U}(X)] = \Sigma\ \mathcal{U}(X)\ f(X)$

Para X discreta.

Ejemplos:

Ejemplo 9. Una Loteria tiene un premio de \$1.000, dos premios de \$500, cinco de \$ 100 y 50 de \$5.00. Si se venden 1.000 boletos. ¿Cuál debe ser el valor medio del boleto? [Elementos de Probabilidad y Estadística, Elmer B. Mode, Editorial Reverté Mexicana, S.A. Pág. 106. Ej. 25].

En este ejemplo la probabilidad de que salga un boleto determinado es --

$\frac{1}{1000}$

$$E(\mathcal{U}(X)) = 1{,}000\left(\frac{1}{1000}\right) + 500\left(\frac{1}{1000}\right) + 500\left(\frac{1}{1000}\right) +$$

$$5\left[100\left(\frac{1}{1000}\right)\right] + 50\left[5\left(\frac{1}{1000}\right)\right] =$$

$$E(\mathcal{U}(X)) = \frac{1000}{1000} + \frac{500}{1000} + \frac{500}{1000} + \frac{500}{1000} + \frac{250}{1000} =$$

$$E(\mathcal{U}(X)) = 1 + .5 + .5 + .5 + .25 = 2.75$$

Ejemplo 10.- Paco y Jorge hacen una apuesta. Se lanza un dado al aire. Jorge tiene que pagar a Paco \$100.00 Si aparece un uno ó un dos.

\$ 200.00 Si aparece un tres o un cuatro.

\$ 400.00 " " " cinco

\$ 800.00 " " " seis.

Cuánto debe pagar Paco a Jorge antes de cada juego para que sea parejo. Sabemos que E(X) ó $\mu(X)$ es el valor promedio ó la cantidad promedio - que Jorge espera ganar en el juego por lo que calculando $\mu(X)$ sabre-- mos cuánto debe pagar Paco.

Ahora sabemos que la probabilidad de que aparezca un 1 es $\frac{1}{6}$, un 2, es $\frac{1}{6}$, la probabilidad de que aparezca un 3 es $\frac{1}{6}$ etc. un 6 es $\frac{1}{6}$ Para nosotros $\mathcal{U}(X)$ es

$\mathcal{U}(1) = \$100.00$

$\mathcal{U}(2) = \$100.00$

$\mathcal{U}(3) = \mathcal{U}(4) = \$200.00$

$\mathcal{U}(5) = \$\ 400.00$

$\mathcal{U}(6) = \$\ 800.00$

Ahora lo que Paco espera ganar en este juego es:

$$E(\mathcal{U}(X)) = 100\left(\frac{1}{6}\right) + 100\left(\frac{1}{6}\right) + 200\left(\frac{1}{6}\right) + 200\left(\frac{1}{6}\right) + 400\left(\frac{1}{6}\right) + 800\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$E(\mathcal{U}(X)) = \frac{100}{6} + \frac{100}{6} + \frac{200}{6} + \frac{200}{6} + \frac{400}{6} + \frac{800}{6}$$

$$E(\mathcal{U}(X)) = \frac{1800}{6} = 300$$

No olvidemos que "X = Número de puntos en la cara del dado que quedó hacia arriba"

A cada valor de la variable aleatoria se ha asociado un número, a saber la ganancia de Paco, esta ganancia es una función de X y se representa por $\mathcal{U}(X)$. Sus valores son:

X	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{U}(X)$	100	100	200	200	400	800

Nota.- En este ejemplo se puede observar que es impredecible qué cara, del dado que se lanza al aire, va a quedar hacia arriba, por lo que es impredecible la ganancia que se tendrá en el juego; por lo que se puede considerar a la ganancia como una variable aleatoria.

Ejemplo 11.- Un vendedor de oro puede esperar $8,000.00 de utilidad en una venta si encuentra a todos los empleados de una empresa $3,000.00

si encuentra a la mitad y \$ 1.000 si solo encuentra a 2 de ellos. Las probabilidades respectivas de encontrar a los empleados son: .6, .4, .2. ¿Cuál es la ganancia esperada?

$E(X) = 8{,}000\ (.6) + 3000\ (.4) + 1000\ (.2)$

$E(X) = 4800 + 1200 + 200 = \$\ 6{,}200.00$

Ejemplo 12.- Un trabajador decide invertir a un año su aguinaldo que es de 120,000.00 a) Si lo invierte en acciones de Petróleos Mexicanos tiene la siguiente espectativa: Un ,35 de probabilidad de que suban en un 25% las acciones, un .45 de probabilidad de que bajen en un 15% y un .20 de probabilidad de que no se altere su valor, ó b) puede invertir en bonos a plazo fijo que le dan el 8% de interés anual. ¿Cuál de las 2 opciones le conviene más?.

a) Primero veamos cual sería el valor del capital al final del año con respecto a las 3 posibles situaciones.

$(120{,}000) + 25\% = 120{,}000 + 30\ 000 = 150\ 000$

$(120{,}000) - 15\% = 120{,}000 - 18\ 000 = 102\ 000$

$(120{,}000) + 0 = 120{,}000 = 120\ 000$

El valor esperado de esta inversión es :

$E(X) = 150\ 000\ (.35) + 102\ 000\ (.45) + 120\ 000\ (.20) =$

$E(X) = 52500 + 45\ 900 + 24\ 000 = 122\ 400$

b) Si invierte en bonos a plazo fijo al 8%. Al final del año tendría:

$$120\ 000 + (120\ 000)\ (.08) = 120\ 000 + 9600$$

$$= 129{,}600$$

por lo que claramente se ve que le conviene más invertir en bonos al 8%.

EJERCICIOS PROPUESTOS PARA REFORZAR EL CONCEPTO DE MEDIA (μ), (o Valor-Esperado de la Variable Aleatoria X), VARIANZA $(\sigma)^2$ DE UNA DISTRIBUCION Y DESVIACION STANDAR DE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD.

1. En un experimento en el Laboratorio se sabe que la probabilidad de - que a una rata le de rabia es de .25. Se observan 3 ratas. Si "X"- número total de ratas afectadas por la rabia". Encuentra la Distribución de Probabilidad, la media y la varianza.

2. Una caja contiene 4 cartas que son: 2,3,4 y 5 de diamantes. Se to-- man 2 de la caja, devolviendo la primera, antes de extraer la segunda. Sea "X la suma de los números que se obtengan en las dos cartas. Desarrolla el Espacio Muestral de los Eventos para encontrar la Distribución de Probabilidad" de la variable aleatoria X. Calcula los- valores de μ y σ.

3. Resuelve el problema 2. Suponiendo que no se devuelve la carta - -- extraída.

4. Calcula los valores de μ y σ para la Distribución de los digitos - aleatorios, es decir, para $P\ \{X = x\} = \frac{1}{10}$, $X = 0,1,2,..,9$ (Estadística Elemental, Paul G. Hoel, Pág. 117. Ed. CECSA).

5. Construye la Distribución de Probabilidad de X. para cuando $P\left\{X = -1\right\} = \frac{5}{8}$, $P\left\{X = 0\right\} = \frac{1}{8}$; $P\left\{X = 1\right\} = \frac{2}{8}$ y calcula μ, σ^2 y σ de la misma.

6. Si se arroja un dado honesto al aire. Sea "X: número de tiradas hasta que aparezca un sol.

   Decimos que $f(x) = \frac{1}{2^x}$ ¿puedes demostrar por qué?

7. Se lanza una moneda al aire 4 veces. Sea "X: Número de soles obtenidos". Encuentra en Distribución de Probabilidad su μ y σ .

8. Se lanza una moneda 3 veces al aire. Sea "X: Número de águilas obtenidas". Encuentra la Distribución de Probabilidad, su μ y σ .

9. ¿Cuál será la Función de Probabilidad de la variable Aleatoria "X = Número de veces que se arroja un dado honesto.?

10. Sea "X: Número de varones que nacen en tres nacimientos sencillos".- Si consideramos que existe, la misma posibilidad de que nazca niño - o niña, encuentra la Distribución de Probabilidad su μ y σ .

11. En una urna se tienen 5 bolas rojas y 5 bolas negras. Se extraen 2 de ellas aleatoriamente y sin reemplazo. Son "X = Número de bolas - rojas extraídas". Encuentra la Distribución de Probabilidad, plantea el desarrollo para el cálculo de μ y σ.

12. Calcular lo mismo en el ejercicio 11 suponiendo que hay 3 bolas rojas y 7 negras.

13. Se tienen en una urna 10 baleros para carro, cuatro de los cuales -- son defectuosos. Se extraen 2 sin reemplazo. Sea "X: Número de baleros defectuosos. "Encuentra la Distribución de Probabilidad, plantea el cálculo de la μ y la σ .

14. En una caja se tienen 8 pilas para radio, de las cuales 3 están descargadas. Sea X_1 = Número de pilas descargadas que se obtienen al - extraer 2 de ellas sin reemplazo. Sea X_2 = Número de pilas descargadas que se obtienen al extraer 2 pilas con reemplazo.

    Compara las medias de estas distribuciones.

15. Un empleado Bancario desea asegurar su automóvil por $2.000,000.00.- Si él sufre algún daño, se le dará el importe de los daños. Daños -

menores a \$40 000 no se le pagará. Cuánto deberá pagar de Póliza. Si la experiencia de la Cía. se contempla en la siguiente tabla?

Pérdida	40 000	120 000	500 000	100000	1500000	2000000
Probabilidad	.10	.05	.04	.02	.01	.001

16. Dos jugadores apuestan a que si uno de ellos lanza una moneda 3 veces y obtiene al menos 2 soles. Se le permite tirar un dado y recibir mil veces el número mostrado. Cuánto es lo que el ganador puede esperar en este juego?

17. Si se arroja al aire un dado 3 veces, qué suma total se puede esperar?

18. Deseo vender mi casa en \$8.000,000.00. Si doy a un corredor de - - Bienes y Raíces me cobrará el 25% de la transacción, ahora la pro-- babilidad de venderla con el corredor es de .9 y la probabilidad de que yo la venda en ese precio anunciándola en el periódico es de .5 Debo acudir al corredor ó al periódico, además un amigo mío me - -- ofrece \$ 7.200,000 por ella?

19. Se lanza una moneda al aire 3 veces, se ganará \$100,00 por cada sol obtenido, si se obtienen los 3 soles se puede lanzar una vez más. - Independientemente de lo que resulte se pagarán \$80.00 pesos más, - pero si vuelve a salir sol, se obtienen \$500.00 adicionales. ¿Cuál es la ganancia esperada?

20. Dos personas A y B hacen el siguiente juego: A arroja 2 dados al aire; B le paga M pesos, donde M es el producto de los dos números que muestran los dados. ¿Cuánto debe pagar A: a B por cada juego, para que éste sea parejo?.

21. Una moneda está cargada tal que P (sol) = $\frac{2}{3}$ y P (águila) = $\frac{1}{3}$ se lanza al aire tres veces sea "X: número de soles obtenidos". Encuentra la Distribución de Probabilidad (la media (μ ó E (x)).

22. Un jugador lanza un dado corriente. Si sale un número par se gana dicho número multiplicado por mil, si sale, un número impar pierde dicho número multiplicado por mil los resultados posibles de X_i con sus respectivas probabilidades son las siguientes.

X_i	-1	2	-3	4	-5	6
$f(X_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Encuentra E (x)

23. Hallar la media (ó valor esperado) μ (X), la varianza σ^2 y en desviación standar de las siguientes distribuciones de probabilidad

1)

X_i	2	4	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

2)

X_i	10	11	12	13
$f(X_i)$	.3	.2	.4	.1

3)

X_i	-5	-4	1	3
$f(X_i)$	.2	.3	.3	.2

UNIDAD II TITULO: DISTRIBUCIONES ESPECIALES

OBJETIVOS INTERMEDIOS:

El alumno resolverá problemas de Distribución Binomial y de Distribución normal.

CONTENIDO:

1.- Caso Discreto

1.1.- Características de un Experimento de tipo Binomial.

OBJETIVO:

1.1.- El alumno Identificará las características de un experimento de tipo Binomial.

CONTENIDO:

1.2.- Definición de Distribución Binomial

OBJETIVO:

1.2.- El alumno definirá la Distribución Binomial

1.2.1.- El alumno resolverá problemas de tipo Binomial utilizando la la definición de Distribución Binomial.

Dentro de las Distribuciones de Probabilidad Discretas, asociadas - con pruebas repetidas, está la Distribución Binomial.

Consideramos que un experimento es Binomial, reune las siguientes - características.

1) Sabemos de antemano cuantas ejecuciones son, esto es conocemos n.
2) En una ejecución cualquiera hay un éxito (con probabilidad de ------- ocurrencia p) o un fracaso (con probabilidad de ocurrencia q) $q = 1 - p$.
3) Las ejecuciones son independientes entre sí.
4) La Probabilidad de éxito, es la misma en todas las ejecuciones.
5) Estamos interesados en el número total de éxitos pero no en el orden en que ocurren.

El siguiente teorema nos explica de una manera formal lo que es una Distribución Binomial e inclusive nos enseña el calculo de una Distribución Binomial.

Teorema: Considérese un experimento de n ensayos Bernoulli[1], cada uno - con probabilidad p de obtener un éxito y una probabilidad q para el fracaso $(q = 1 - p)$, entonces, la probabilidad de x éxitos en n ejecuciones

[1] Los ensayos Bernoulli están caracterizados por la repetición independiente de un experimento con dos únicos resultados que pueden ser identificados como éxito o fracaso.

es:

$b\ (x;\ n,\ p) = \binom{n}{x}\ p^x\ q^{n-x}$ donde $x = 0,\ 1.\ 2...\ n$ $b\ (x;\ n,\ p)$ es una simbología para referirnos a una distribución binomial en donde deseamos saber ¿cuál es la probabilidad de que ocurran x éxitos en *n* ejecuciones con una probabilidad p en cada uno de los intentos. Ejemplo: Se lanza- una moneda 3 veces al aire. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exacta- mente 2 soles?

Primero analizamos si nuestro ejemplo, se refiere a una Distribución de tipo Binomial.

1) No de ejecuciones 3, esto es $n = 3$.
2) La probabilidad de éxito en cada tirada es: p ½, por lo que la proba bilidad de fracaso $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
3) Los lanzamientos son independientes, ya que el hecho de que en la 2a. o 3a. tirada salga un sol no depende de lo que se haya obtenido en - la primera tirada.
4) En cada uno de los lanzamiento la probabilidad de obtener sol es ½.
5) El orden en que aparecen los soles no es relevante.

Ahora apliquemos éste teorema:

$$b\ (X;\ n,\ p) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$x = 2,\ n = 3 \quad p = \tfrac{1}{2}$$

$$b\ (2;\ 3,\ \tfrac{1}{2}) = \binom{3}{2} \cdot (\tfrac{1}{2})^2\ (\tfrac{1}{2})^{3-2}$$

$$b\ (2;\ 3,\ \tfrac{1}{2}) = \frac{3\,!}{2\,!.\ (3-2)\ !.}\ \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$b\,(2;\,3,\,\tfrac{1}{2}) = 3 \times \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{8}$$

esto lo podemos corroborar al observar la tabla de Distribución que hicimos para hablar del ejemplo*. Se lanza una moneda al aire. Sea "X: número de soles obtenidos".

X_i	0	1	2	3
$f(X_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Hagámoslo ahora para 0 éxitos, esto es:

$X = 0$

$n = 3$ $\quad b\,(0;\,3,\,\tfrac{1}{2}) = \binom{3}{0}\,(\tfrac{1}{2})^0\ (\tfrac{1}{2})^3$

$p = \frac{1}{2}$ $\quad = 1 \times 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$ que es lo que tenemos en la tabla.

Ejemplo 2.- Se lanza una moneda caragada al aire 5 veces.

Si p (águila) = $\frac{2}{3}$ ¿cuál es la probabilidad de obtener:

i) exactemente 4 águilas

ii) de 2 a 3 águilas

iii) cuando menos 3 águilas

iv) a lo mas 2 águilas

* del ejercicio 4. CONTENIDO Y OBJETIVO 1.2.2

Solución :

i) Exactamente 4 águilas.

Datos

Desarrollo

$x = 4$ $\qquad b(4; 5; \frac{2}{3}) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^{5-4}$

$n = 5$ $\qquad = 5x \ \frac{16}{81} \ x \ \frac{1}{3}$

$p = \frac{2}{3}$ $\qquad = \frac{80}{243} = .3292$

ii) De 2 a 3 águilas.

De 2 a 3 águilas significa que consideraremos favorable 2 ó 3 éxitos. Por lo que calcularemos la probabilidad para 2 y para 3 y las sumaremos.

Datos

Desarrollo

$x = 2$ y 3 $\qquad b\ (2; 5, \frac{2}{3}) + b\ (3; 5, \frac{2}{3}) =$

$n = 5$ $\qquad \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{5-2} + \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^{5-3} =$

$p = \frac{3}{3}$ $\qquad 10 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{27} + 10. \ \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{9} =$

$$\frac{40}{243} + \frac{80}{243} = \frac{120}{243} = .4938$$

iii) Cuando menos 3 águilas.

Cuando menos 3 águilas significa que consideramos favorable 3 éxitos ó 4 éxitos. Por lo que calcularemos la probabilidad para 3 y 4 éxi-- tos y luego la sumaremos.

Datos Desarrollo

$x = 3$ y 4 $\qquad b(3;\ 5,\ \frac{2}{3}) + b(4;5,\frac{2}{3}) =$

$n = \frac{2}{3}$ $\qquad \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{5-3} + \binom{5}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{5-4} =$

$q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ $\qquad 10 \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{9} + 5 .\ \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{3} = \frac{80}{243} + \frac{80}{243}$

$$= \frac{160}{243} = .7584$$

iv) A lo más 2 águilas.

A lo más dos águilas significa que consideraremos favorables 0, 1 y 2 águilas. Calcularemos la probabilidad para 0, 2 y 2 éxitos y - - luego la sumaremos.

Datos Desarrollo

$x = 0, 1$ y 2 $\qquad b(0;\ 5,\ \frac{2}{3}) + b(1;\ 5,\ \frac{2}{3}) + b(2;\ 5,\ \frac{2}{3}) =$

$n = 5$ $\qquad \binom{5}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{5-0} + \binom{5}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^{1} \left(\frac{1}{3}\right)^{5-1} +$

$p = \frac{2}{3}$ $\qquad \binom{5}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{5-2} =$

$q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ $\qquad 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{243} + 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{81} + 10 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{27}$

$$= \frac{1}{243} + \frac{10}{243} + \frac{40}{243} = \frac{51}{243} = .2098$$

Ejemplo 3.- Se sabe que un producto alimenticio es consumido en un 90% por población Infantil. ¿Cuál es la probabilidad que de 6 productos vendidos, 2 de ellos hayan sido consumido por niños?

Datos	Desarrollo
$X = 2$	$b\ (2;\ 6,\ .9) = \binom{6}{2}\ (.9)^2\ (.1)^{6-2}$
$n = 6$	$b\ (2;\ 6,\ .9) = 15 \times .81 \times .0001$
$p = .9$	$b\ (2;\ 6,\ .9) = .0012$
$q = .1$	

EJERCICIOS PROPUESTOS PARA REFORZAR LOS OBJETIVOS:

1.1 y 1.2 y 1.2.1

1) Supóngase que el 40% de los capitalinos no tienen viviendas, si se toma una muestra de tamaño 5 ¿cuál es la probabilidad de que 3 de ellos no tengan vivienda?

2) Evalua cada una de las siguientes expresiones.

i) $b\ (6;\ 8,\ 0.2)$

ii) $b\ (1;\ 4,\ \frac{1}{4})$

iii) $b\ (0;\ 5,\ \frac{1}{3})$

iv) $b\ (3;\ 6,\ \frac{3}{4})$

3) Se lanza una moneda 7 veces al aire, ¿cuál es la probabilidad de que caiga sol?

i) 7 veces iii) Por lo menos 6 veces v) De 3 a 5 veces

ii) 5 veces iv) a lo más 3 veces.

4) Un pateador de fut - ball Americano, ha demostrado que 8 de cada - pateadas, son buenas. En los próximos 4 intentos, que probabilidad hay de que 3 de ellas sean buenas?

5) Una moneda cargada tiene P (sol) $= \frac{7}{10}$. Si se lanza 5 veces al aire. ¿Cuál es la probabilidad de obtener sol por lo menos 4 veces?

6) Al tirar 2 dados al aire, se considera éxito si aparece un 4 en cualquiera de los dados.

i) ¿Qué probabilidad hay de obtener un éxito en una tirada?

ii) ¿Qué probabilidad hay de obtener 2 éxitos en 3 tiradas?

iii) ¿Qué probabilidad hay de obtener por lo menos 2 éxitos en 4 -- intentos?

iv) ¿Qué probabilidad hay de obtener a lo más 1 éxito en 4 inten-- tos?

7) Al tirar 2 dados al aire se considerará como éxito, si obtenemos como suma de las caras un 6 o un 8, en un intento ¿Cuál es la probabilidad de:

i) Obtener un éxito en un intento

ii) Ganar 4 de 8 tiradas

iii) Obtener cuando menos 2 éxitos de 3 tiradas.

iv) Obtener a lo más 2 éxitos de 4 tiradas.

8) Un examen escolar consta de 10 preguntas, en las que se debe decidir si es "falsa" o "verdadera". ¿Cuál es la probabilidad de acertar en 5?

9) Un examen de Filosofía tiene 10 preguntas con 5 opciones cada una -- ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno determinado tenga 6 o más correctas?

10) Supóngase que el 20% de la población Universitaria dominan el idioma Inglés, si se dá una beca para el extranjero a una muestra de 6 - - alumnos escogidos en forma aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de - que ninguno domine el idioma? ¿De qué sólo la mitad lo domine? ¿Y - la probabilidad de que todos los escogidos hablen inglés?

11) En un juego de tiro al blanco tres personas A, B, C, tiene $\frac{1}{3}$ de probabilidad cada una de acertar en el blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que A, acierte en el blanco exactamente en 2 ejecuciones?

12) Cuando se lanza una moneda legal al aire 7 veces ¿Cuál es la probabilidad de obtener 4 soles?

13) En el Hospital Mocel de la Ciudad de México, se sabe que el 30% de los pacientes que llenga infartados mueren, ¿Cuál es la probabilidad de que los de los próximos 5 que lleguen mueran 2?

14) Aproximadamente $\frac{2}{5}$ de la Población son escolares de los niveles primarios si se escoge una muestra aleatoria tamaño 6, ¿cuál es la probabilidad de que 2 de ellos sean personas en edad escolar primaria?

15) Si se lanzan 2 dados al aire ¿cuál será la probabilidad de obtener como suma de ellos 7 en 4 lanzamientos?

16) Se lanzan 2 dados al aire, uno de ellos tiene 4 caras rojas y dos - blancas, el otro tiene 3 caras rojas y 3 blancas. Si se lanzan 5 - veces al aire ¿cuál es la probabilidad de que aparezca 3 veces la - cara roja en el 1er. dado y 4 veces la cara roja en el segundo dado?

OBJETIVOS: EL ALUMNO.

1.2.3. Resolverá problemas de tipo Binomial utilizando las tablas.

Para el desarrollo de este objetivo, el alumno deberá tener en sus manos una copia fotóstatica: La tabla de la Distribución Binomial págs. 433, a la 444 del libro. Practical Nonparamtric Statistics, Second - - Edtion, W. J. Conover, John Wiley & Sons, 1971. ANEXO I

En las tablas acumulativas de la Distribución Binomial n = número - de intentos; y = el número de éxitos que se desean obtener; p es la probabilidad que se tienen en cada uno de los ensayos. Estas tablas, son - acumulando probabilidades individuales, esto es; cuando busquemos para - n = 10, y = 2 con p = .5 observamos una probabilidad de .9885 que en realidad es la probabilidad de 0, 1 y 2 ó sea

$$\sum_{y=0}^{2} b\ (y;\ 10,\ .5)$$

NOTA: Ver tablas Acumulativas de la Distribución Binomial al final de - las notas ANEXO I.

Transcribimos a continuación algunos valores de la tabla Pág. 434.

n	y	P = .50	.55	.60	.75	.70	.75	.80...
1	0	.5000	.4500	.4000	.3500	.3000	.2500	.2000
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	.2500	.2025	.1600	.1225	.0900	.0625	.0400
	1	.7500	.6975	.6400	.5775	.5100	.4375	.3600
	2	1.0000	1.0000	1.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	.1250	.0911	.0640	.0429	.0270	.0156	.0080
	1	.5000	.4252	.3520	.2818	.2170	.1562	.1040
	2	.8750	.8336	.7840	.7254	.6570	.5781	.4880
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	.0625	.0410	.0256	.0150	.0081	.0039	.0016
	1	.3125	.2415	.1792	.1265	.0837	.0508	.0272
	2	.6825	.6090	.5248	.4370	.3483	.2617	.1808
	3	.9375	.9085	.8704	.8215	.7599	.8636	.5904
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Ahora, si deseamos calcular b(0, 4; .5) buscamos en el renglón con n = 4 y y = 0 y localizamos la columna con p = .5, .0625 es la probabilidad de que ocurran cero éxitos en 4 intentos con p = .5.

En este mimso ejemplo b (1; 4; .5) = .3125 - .0625 a .3125 se le resta .0625 ya que en estas tablas la probabilidad se ha acumulado es decir,

$$b\ (y,\ n,\ p) = \sum_{i=0}^{y} b(y_i\ ;\ n,\ p).$$

Ejemplo 4.- Se puede predecir con una probabilidad de acierto de .40 - cuántos soles caerán al lanzar una moneda 4 veces al aire a) ¿Cuál es - la probabilidad de obtener exactamente 2 soles? b) ¿De 2 a 3 soles? c) ¿A lo mas 3 soles? d) ¿Cuándo menos 2 soles?.
(Ver pág. 433)

a) $b(2, 4, .40) = .8208 - .4752 = .3456$

b) $\sum_{X=2}^{3} b\ (x, 4; .40) = .9743 - .4752 = .4991$

c) $\sum_{X=0}^{3} b(X; 4, .40) = .9743$ Es el valor que aparece en las tablas ya que .9743 es la probabilidad acumulada de que ocurra 0 ó 1 ó 2 ó 3 éxitos).

d) $\sum_{X=2}^{4} b\ (x; 4, .40) = 1 - .4752 = .5248$

Ejemplo 5.- Calcule lo siguiente:

a) $b(2, 4, .30) = .9163 - .6517 = .2646$

b) $\sum_{X=2}^{3} b(X; 4, .30) = .9919 - .6517 = .3402$

c) $\sum_{X=0}^{3} b(X; 4, .30) = .9919$

d) $\sum_{X=2}^{4} b(X; 4. .30) = .348 = 1.000 - .6517 = .3483$

EJERCICIOS PROPUESTOS PARA REFORZAR EL OBJETIVO.

1.2.3 De la Unidad II.

1.- Si una persona puede predecir en un 80% de las veces,

Si se obtendrá águila o solo en el lanzamiento de una moneda. Al - lanzarla 12 veces; ¿Cuál es la probabilidad de acertar por lo menos 6 veces?

2.- Supóngase ahora que esa persona, tiene una probabilidad de .5 de -- acertar en el resultado. ¿Cuál es la probabilidad de acertar por - lo menos 6 veces en los 12 intentos?

3.- Si la probabilidad de acierto con respecto al resultado en el lanza miento de una moneda es de 0.8. ¿Cuál es la probabilidad de que -- acierto en 17ó más resultados de 25 intentos.

4.- Si una persona puede predecir el resultado de lanzar al aire una mo neda con probabilidad de 0.5. ¿Cuál es la probabilidad de que ob-- tenga 17 o más aciertos en 25 intentos? ¿Al efectuar 25 ejecucio-- nes se obtendrá mejor información y se podría apreciar más justamen te la capacidad del individuo que en 10 intentos?

5.- ¿Qué es b(6; 20, .03)?

6.- Con 25 ejecuciones y una probabilidad de éxito de 0.75. ¿Cuál es - la probabilidad de obtener lo menos.

a) 17 éxitos.

b) 16 éxitos.

7.- Con 25 ejecuciones ¿Cuánto debe valer p para tener una probabilidad de 0.4 de obtener por lo menos 8 éxitos?. Es decir, si $n = 25$ y la probabilidad de $x \geq 8$ es 0.4 ¿Cuánto vale p?

8.- Si $n = 20$ y la probabilidad de $X = 12$ es 0.7 ¿Cuánto vale p?

9.- La probabilidad de que una máquina determinada produzca una pieza defectuosa es 0.01. Si se consideran 25 piezas producidas por esa máquina, ¿Cuál es la probabilidad de que una, o más de ellas, sean defectuosas?

10.- En el ejercicio 9 ¿Cuál es la probabilidad de que 3 o más piezas sean defectuosas? Si 10 de las 25 fueron defectuosas, ¿pensaría que la probabilidad de una pieza defectuosa ha dejado de ser 0.01?

11.- Para $n = 12$ y $p = 0.8$ determina la probabilidad de exactamente 7 éxitos.

12.- Para $n = 16$ y $p = \frac{2}{5}$, determina la probabilidad de exactamente 8 éxitos?

13.- Si $n = 20$ y $p = .3$ determina la probabilidad de 2 ó menos éxitos.

14.- Si $n = 15$ y $p = 0.7$. ¿Cuál es la probabilidad de 12 ó menos éxitos?

15.- Se lanzan al aire 20 monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de soles esté entre 6 y 15 inclusive?

16.- Se lanzan al aire 25 monedas, ¿cuál es la probabilidad de que el número de soles:

a) esté entre 6 y 20 inclusive?
b) sea exactamente 13?

c) esté entre 11 y 15 inclusive?

d) sea exactamente 12

17.- Sea $p = .01$ la probabilidad de que cierto tipo de lámpara falle en una prueba de 24 horas. Encontrar la probabilidad de que cada lámpara de una Muestra de 10 permanecerá 24 horas encendida sin falla alguna (supóngase independencia).

18.- Supóngase que se sabe que para cierta clase de flores cerca del 5% de las semillas no germinan. Las semillas se empaquetan y se venden en cajas de 10 con la garantía de que al menos nueve de ellas germinarán. Encontrar la probabilidad de que una caja fija arbitraria no tenga la propiedad garantizada.

i) ¿Cuánto cambia la situación del problema si la garantía se reduce de nueve a ocho semillas por caja?

19.- Supóngase que el 5% de ciertos artículos producidos son defectuosos y que la calidad de cada artículo es independiente de la de los demás. Encontrar y graficar la probabilidad de que en un espacio-muestral de diez artículos, 0,1,2,... serán defectuosos.

20.- Supóngase que el 24 porciento de cierta población tiene el grupo sanguíneo B. Para una muestra tamaño 20 extraída de esta población, encontrar la probabilidad de que:

a) Se encuentren exactamente tres personas con grupo sanguíneo-B.
b) Se encuentren 3 o más personas con la característica de interés.
c) Se encuentren menos de 3.
d) Se encuentren exactamente 5.

21.- En una población grande, el 16% de los miembros son zurdos. En una muestra aleatoria de tamaño 10, (si x denota el número de zurdos) encontrar :

a) La probabilidad de que exactamente dos sean zurdos.
b) P $(X \geq 2)$
c) P $(X < 2)$
d) P $(1 \leq X \leq 4)$

22.- Supóngase que se sabe que la probabilidad de recuperación de cierta enfermedad es de .4. Si 5 personas contraén la enfermedad (considérese esto como una muestra aleatoria)

¿Cuál es la probabilidad de que:

a) tres ó más se recuperen.
b) cuatro o más.
c) cinco o más.
d) menos de tres.

23.- Supóngase que la tasa de mortalidad para cierta enfermedad es del 10% y supóngase que la contraén 10 personas de la comunidad. ¿Cuál es la probabilidad de que?

a) Ninguna sobreviva
b) El 50% muera
c) Al menos 3 mueran.
d) Exactamente 3 mueran

24.- Si el 20% de fusibles son defectuosos y se compra una caja de 8 fusibles. ¿Qué probabilidad hay de que por lo menos 6 sean buenos?

25.- Doce pares de animales experimentales son sometidos a 2 dietas diferentes. La asignación de las dietas a los miembros de cada par se hace aleatoriamente. Cuando termine el experimento se encontrará la diferencia entre el peso ganado por los animales sometidos a la dieta A y los animales sometidos a la Dieta B. Si la diferencia es positiva se dirá que se tiene éxito. ¿Qué probabilidad hay de que ocurran cuando menos 9 éxitos si no existe realmente una diferencia entre la capacidad de las dietas para aumentar el peso de los animales?

27.- En general, se encuentra que el 10% de los troncos de árbol usados en cierto producto son nudosos. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 20 troncos. Cinco o más sean nudosos?

28.- Aproximadamente el 45% de la población de Nueva Inglaterra pertenece al grupo sanguíneo O. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 12 de ellos se encuentren por lo menos 8 que pertenezcan a este grupo?

29.- En general, el 25% de los candidatos fallan en una prueba de selección. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 15, a) fallen por lo menos ocho? b) ¿De qué no fallen más de 4?

30.- Si el 20% de cerrojos producidos por una máquina son defectuosos, determina la probabilidad de que 4 cerrojos elegidos al azar - - - a) 1, b) 0, c) a lo más 2 cerrojos sean defectuosos.

31.- La probabilidad de que un estudiante nuevo se gradué es 0.4. Determinar la probabilidad de que de 5 estudiantes nuevos. a) ninguno, b) uno, c) al menos uno se gradúe.

32.- ?Cuál es la probabilidad de obtener un total de 9 a) dos veces, - b) al menos dos veces, en 6 lanzamientos de un par de dados?

CONTENIDO.

1.3 Algunas propiedades de la Distribución Binomial.

OBJETIVOS.

1.3 El alumno expresará algunas propiedades de la Distribución Binomial.

1.3.1 Calculará la media y la varianza de una Distribución Binomial.

A partir de la fórmula de la media (μ) de una Distribución de probabilidad que es :

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} f(xi) \; xi \ldots (1)$$

se desarrolla y se llega a la siguiente igualdad.

$$\mu = np \text{ para una Distribución Binomial.}$$

La media de una distribución binomial es igual al número de intentos por la probabilidad.

veamos por qué

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} f(Xi) \; Xi$$ como estamos hablando de la

Distribución Binomial sustituimos f(xi) por la fórmula que corresponde a la Distribución Binomial esto es: $f(Xi) = \binom{N}{X} \; p^X \; q^{n-X}$

y nuestra fórmula (1) queda así:

$$\mu = \sum_{X=0}^{n} \binom{N}{X} \; .p^X \; .q^{N-X} \; .X$$

$$\mu = \sum_{X=0}^{N} \frac{N!}{N! \; (N-X)!} \; p^X \; .q^{N-X} \; .X$$

Si hacemos X = 0 se entiende que el resultado del primer sumando es cero, por lo que consideramos desde X= 1, así

$$\mu = \sum_{X=1}^{n} \frac{N!}{X! \; (N-X)!} \; p^X \; .q^{N-X} \; .X$$

9. Un pequeño tetraedo regular tiene 3 caras blancas y una cara negra
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que, en cinco lanzamientos, aparezca una cara blanca abajo, exactamente tres veces? Si se lanza este tetraedo 64 veces. ¿Cuál es?
   b) ¿La frecuencia esperada para que quede abajo una cara blanca?
   c) ¿La desviación Estandar en el inciso anterior?

10. Un examen de estadística de elección múltiple contenía 20 preguntas y cada una de ellas 5 respuestas. Si un estudiante desconocía todas las respuestas correctas y contestó su examen al azar.
    a) ¿Cuál es el número esperado de respuestas correctas y cuál es su desviación standar?
    b) Si se aprueba el examen cuando se contestaron por lo menos 12 preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen, contestando al azar?
    c) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste todo incorrectamente?

11. Consideremos el experimento de arrojar cuatro veces una moneda para contar el número de caras que aparecen como variable aleatoria X.
    a) Es este un experimento binomial? Descríbanse todas las propiedades y asígnese a la variable.
    b) Escríbase la ecuación de la función de probabilidad.
    c) Encuéntrese las diversas posibilidades a partir de la Distribución probabilística.
    d) Calcúlese la media y la Desviación Estandar.

12. La semillera Tovar consolidada dice que el 90% de determinada especie de semillas de flores germina. Como tarea en su clase de Botánica, Agustín debe hacer un experimento en el que tiene que plantar 10 de las semillas.
    a) ¿Qué probabilidad hay de que, por lo menos germinen 9 de las 10 semillas?
    b) ¿Qué probabilidad hay de que no germine ninguna?
    c) ¿Qué probabilidad hay de que germine alguna?

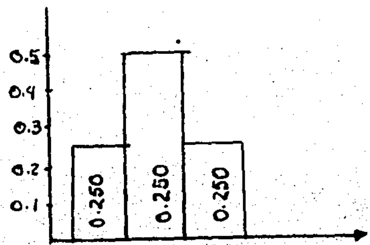
OBJETIVO

1.4 El alumno ilustrará en forma gráfica y simbólica la Distribución Binomial.

Las gráficas de la Distribución Binomial serán Histogramas de Barras, realizadas de la siguiente manera.

En el eje horizontal se colocarán el número de intentos y en el eje vertical las probabilidades de que ocurran 0, 1, 2... etc. éxitos, según sea el caso.

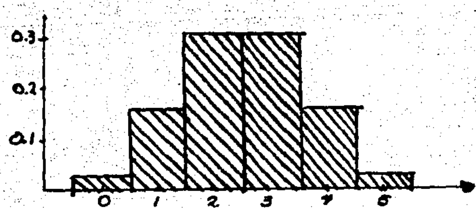
ejemplo 1) La gráfica para n = 2, con p = 0.5



n = 2 y p = 0.5

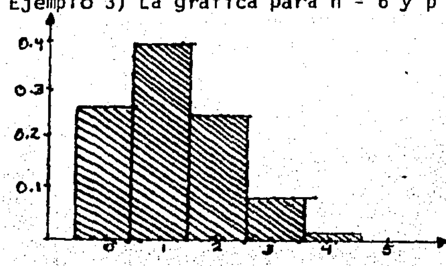
P(X = 0) = .250
P(X = 1) = .500
P(X = 2) = .250

Ejemplo 2) La gráfica para n = 5 y p = 0.5



P(X = 0) = .031
P(X = 1) = .157
P(X = 2) = .312
P(X = 3) = .312
P(X = 4) = .157
P(X = 5) = .031

Ejemplo 3) La gráfica para n = 6 y p = 0.20



P (X = 0) = .262
P (X = 1) = .393
P (X = 2) = .246
P (X = 3) = .082
P (X = 4) = .015
P (X = 5) = .002
P (X = 6) = 0+

Cada alumno de la clase de Botánica ha tenido que hacer el experimento. Encuéntrese la media y la Desviación Estandar Teóricas para la variable aleatoria (No. de semillas que germinan) en el experimento del grupo.

13. Trácese un Histograma de la Distribución Probabilística de los números aleatorios de un solo dígito (0,1,2,....9)
Calcúlese la media y la Desviación Estandar asociadas con la población de números aleatorios de un solo dígito.

14. Se va a realizar el experimento probabilístico de lanzar dos dados. Cada uno de ellos se ha modificado, de modo que tres de sus caras tienen un punto, dos tienen dos puntos y uno tres puntos. Un dado es blanco y el otro negro.
a) Determínese la Distribución Teórica de probabilidad de la "suma de puntos" de los dados. (Constrúyase el espacio Muestra para el experimento y determínese las probabilidades asociadas con cada punto - del espacio Muestral)
b) Trácese el histograma de la distribución de probabilidad
c) Calcúlese la media y la Desviación Estandar de esta distribución de probabilidad.

15. De un total de 2,000 familias con 4 hijos cada una, ¿en cuántas de ellas cabe esperar que haya
a) al menos un niño,
b) 2 niños,
c) 1 o 2 niñas,
d) ninguna niña. Si se considera que existe la misma probabilidad de tener niño o niña.

16. Si la probabilidad de un cerrojo defectuoso es 0.1. Hallar
a) la media,
b) la desviación estandar para la distribución de cerrojos defectuoscs.

CONTENIDO

1.4 Gráfica de la Distribución Binomial.

EJERCICIOS PROPUESTOS PARA OBJETIVO 1.4

1. Realiza la gráfica para n = 2 y p = 0.30
2. " " " n = 2 y p = 0.70
3. " " " n = 3 con p = .60
4. " " " n = 6 con p = .40
5. " " " n = 8 con p = .40
6. " " " n = 8 con p = .80
7. " " " n = 9 con p = .50
8. " " " n = 4 con p = .90
9. " " " n = 5 con p = .70
10. " " " n = 14 con p = .60

CONTENIDO

2. CASO CONTINUO

DISTRIBUCION NORMAL

2.1 Características de la Distribución Normal Estándar.

OBJETIVO

2.1 El alumno expresará las características más importantes de la Distribución Normal Estandar.

Dentro de las Distribuciones de variable aleatoria Continua existe una que - encontrada en una gran parte de los experimentos que se realizan adquiere -- una gran importancia; es la Distribución Normal ó de Gauss.
Esta distribución tiene la característica de que tiene una forma de Campana y el dominio de ella es el conjunto de los Números Reales. Además consideramos que la Curva Normal nos sirve para interpretar la desviación standar, ó para describir distribuciones de puntajes, así como para calcular probabilidades. Varios matemáticos contribuyeron a su formulación, entre ellos Abraham de Moivre (1667-1754), Pierre S. Laplace); siendo de Moivre en 1733 - - quien encontró una fórmula para la Distribución Normal, sin embargo su trabajo quedó en el anonimato, siendo el trabajo de Gauss el que más se cono--

ció entre los Matemáticos, motivo por el que a la Distribución Normal suele llamársele Distribución Gausiana.

La fórmula de Moivre es $Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

En esta formula π y e son números irracionales siendo e la base de los Logaritmos Naturales.

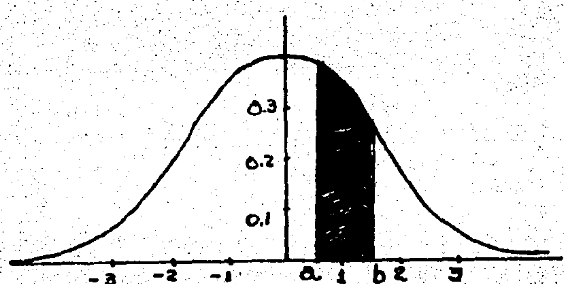
Si graficamos la función dada por la gráfica anterior tendremos una curva llamada Cruva Normal Estándar.

CURVA NORMAL ESTANDAR

La Curva Normal Estandar tiene las siguientes propiedades:

1).- Su media (μ) vale cero
2).- Su desviación standar (σ) vale 1
3).- Es simétrica con respecto al eje de la Y.
4).- Es cóncava hacia abajo en el intervalo de X= -1 y X = 1
5).- Es cóncava hacia arriba en el resto de la misma.
6).- Es asintótica con respecto al eje de las Xs a la izquierda ó hacia la derecha.
7).- Cuando X = 0, Y tiene su máximo valor que es casi .4
8).- El área comprendida entre el eje de las Xs y bajo la curva Normal es igual a 1.

La distribución de probabilidad Normal Estandar es una función que relaciona - mediciones con probabilidades, esto es, consideremos la siguiente figura:



Se considera que el área comprendida bajo la Curva Normal y el eje de las Xs es igual a 1. Consideremos a la mitad de la curva con área de .5, tanto para el lado izquierdo, como para el lado derecho, por lo tanto la probabilidad que asignamos a un intervalo (a , b) equivale al área comprendida entre a,b, la curva Normal estandar y el eje de las Xs. ANEXO II

Existen tablas que nos dan el área bajo la curva Normal standar de 0 a Z.

Nota: Ver Tablas de Areas Bajo la Curva Normal ANEXO II

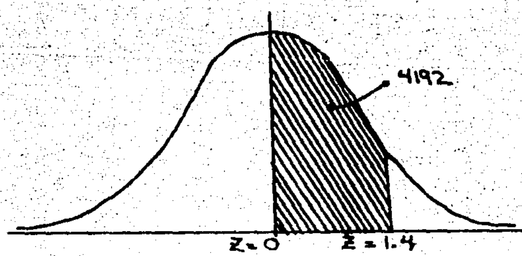
OBJETIVO

2.1.1 Calcular Areas Bajo la Curva Normal Estandar.

2.1.2 El alumno dado un ejemplo calculará por equipos los diferentes casos de áreas bajo la curva Normal Estandar, auxiliándose de la tabla de áreas bajo la curva Normal Estandar.

Ejemplo 1.- Hallar el área bajo la curva Normal en cada uno de los siguientes casos. Utilizar tablas Anexo II.

a) Encuentra el área entre 0 y 1.4

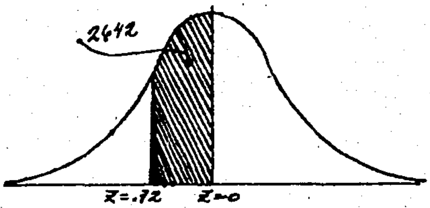


En las tablas del área bajo la Curva Normal Estandar se analiza en la columna de Z se busca el valor 1.4 en dicho renglon buscamos el cruce con la columna 0, encontramos que el área entre 0 y 1.4 es 0.4192.

b) Encuentra el área entre Z= −0.72 y Z = 0.

Sabemos que como existe simetría en la curva Normal Estandar con respecto al eje de las Ys, el área entre -0.72 y 0 es la misma que hay entre 0 y 7.2.

Se procede como antes, buscamos en Z de arriba hacia abajo 0.7, para localizar el 2, recorremos con la vista el renglón hasta localizar la columna correspondiente a 2 y vemos que el área buscada es 0.2642.



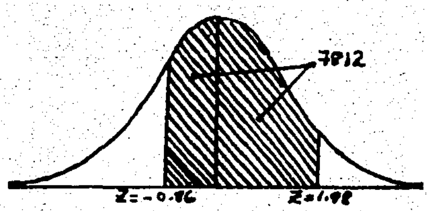
c) Encuentra el área entre Z = -0.86 y Z - 1.98

Area = (área entre Z = -0.86 y Z = 0) + (área entre Z = 0 y Z = 1.98)

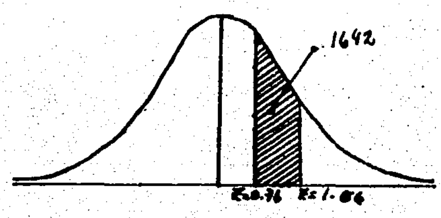
que es lo mismo a buscar.

Area = (área entre Z = 0 y Z = 0.86) + (área entre Z = 0 y Z = 1.98), esto es

Area = 0.3051 + 0.4761 = 0.7812



d) Encuentra el área entre Z = 0.76 y Z = 1.56

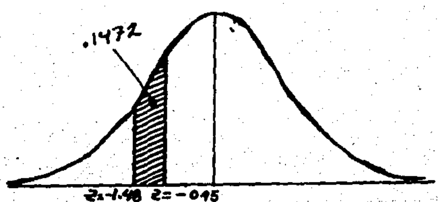


Esta área se calcula así, sabemos al localizar en las tablas .76 tendremos el área correspondiente a Z = 0 y Z = .76 (área que no buscamos) y que al buscar 1.56 tendremos el área correspondiente a Z = 0 y Z = 1.56, por lo que para localizar el área sombreada basta con efectuar una resta entre las áreas localizadas.

Area pedida = (área entre Z = o y Z = 1.56) - (área entre Z = 0 y Z = 0.76)

Area pedida = .4406 - .2764 = .1642

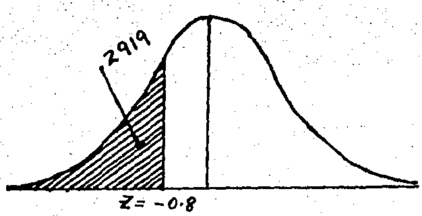
e) Encuentre el área comprendida entre Z = -.95 y Z = -1.48



Se efectua un proceso análogo el inciso d), esto es, Area pedida = (Area - entre Z = 0 y Z = 1.98) - (Area entre Z = 0 y Z = .95)

Area pedida = .4761 - .3289 = 0.1472

f) Encuentre el área que está a la izquierda de Z = -0.8

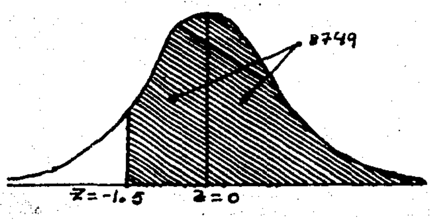


En este ejemplo se procede útilizando el siguiente criterio: Sabemos que la mitad de la curva, al eje de las Ys tiene una área de - .5000. y Z = .8 nos dá el área entre Z = 0 y Z = 0.8 que no buscamos, entonces a .5000 restémosle el area entre Z = 0 y Z = .8 dándonos como resultado el área sombreada, esto es; Area pedida = (área a la izquierda de Z = 0) - (Area entre Z = -0.8 y Z = 0).

Area pedida = (Area a la izquierda de Z = 0) - (Area entre Z = 0 y Z = 0.8

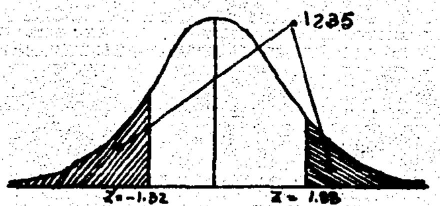
= .5000 - .2881 = .2129

g) Encuentra el área a la derecha Z = -1.15



Para resolver este ejercicio, usamos el siguiente razonamiento a la mitad de la curva normal Standar que es .5000 se suma el área comprendida entre Z = 0 y Z = -1.15, esto es Area pedida = (área entre Z = -1.15 y Z = 0) + (área a la derecha de Z = 0)
Area pedida = .3749 + .5000 = .8749

h) Encuentra el área a la derecha de Z = 1.88 y a la izquierda de Z = -1.32



Area pedida = [(área a la izquierda de Z = 0) - (área entre Z = -1.32 y Z = 0)] + [(área a la dercha de Z = 0) - (área entre Z = 0 y Z = 1.88)]

Area pedida = (.5000 - 4066) + (.5000 - .4699)

Area pedida = .0934 + .0301 = .1235

Otra forma, de calcular estas 2 áreas sombreadas, es que a la unidad le restemos la suma de las 2 áreas en blanco.

Esto es:

Area Pedida = Area total - [(área entre Z = -1.32 y Z = 0) + (área entre Z = 0 y Z = 1.88)]

Area pedida = 1.000 - (.4066 + .4699)

= 1.000 - (.8765)

= .1235

EJERCICIOS PROPUESTOS PARA REFUERZOS DEL OBJETIVO. 2.1.1.

1.- ¿Cuál es el área limitada por la curva normal y los siguientes intervalos X?

a) (0, 0.65)

b) (0, 2.6)

c) (0, 2)

d) (0, - 0.45)

e) (0, - 1.2)

f) (-1.2, 1.2)

g) (2.6, - 3.0)

h) (-0.55, 0.95)

2. Determinar el área bajo la curva limitada por los siguientes intervalos.

    a) .(0,2,5)

    b) (-1.05 ,0)

    c) (-1.05 , 2.5)

    d) (-1.25 , 2.75)

3. Para la curva normal, comparar el área entre 1.2 y 1.4 con la comprendida entre 1.4 y 1.6.

4. Determinar las probabilidades.

    a) $P(X, \leq 2.44)$

    b) $P(X \geq -1.16)$

    c) $P(X \leq +1.923)$

    d) $P(X \geq 1)$

    e) $P(X \geq -2.9)$

    f) $P(2 \leq X \leq 10)$

    donde X, se supone normal con media 0 y Varianza 1.

5. ¿Cuál es la probabilidad de que una Z eligida al azar de entre la población Z tenga un valor entre -2.55 y + 2.55?

6. Que proporción de los valores Z están entre -2.74 y 1.53?.

7. Dada la Distribución Normal Estandar, encontrar $P(Z \geq 2.71)$.

8. Dada la Distribución Normal Estandar, encontrar $P(.81 \leq Z \leq 2.45)$

9. Dada la Distribución Normal Estandar, encontrar:

    i) El área bajo la curva entre Z = 0 y Z = 1.43

    ii) La probabilidad de que una Z elegida al azar tenga un valor entre Z = -2.87 y Z= 2.64.

    iii) $P(Z \geq .55)$

    iv) $P(Z \geq -.55)$

v) $P\ (Z < 2.33)$

vi) $P\ (Z < -2.33)$

vii) $P\ (-1.96 \leq Z \leq 1.96)$

viii) $P\ (-2.58 \leq Z \leq 2.58)$

ix) $P\ (-1.65 \leq Z \leq 1.65)$

x) $P\ (Z = .74)$

10. Hallar el área bajo la curva Normal Estandar en cada uno de los siguientes casos.

   a) entre Z = 0 y Z = 1.2
   b) Entre Z = -068 y Z = 0
   c) Entre Z = -0.46 y Z = 2.21
   d) Entre Z = .0.81 y Z=1.94
   e) A la izquierda de Z = -0.6
   f) A la derecha de Z = -1.28
   g) A la derecha de Z = 2.05 y a la izquierda de Z = -1.44.

11. Determinar el valor ó valores de Z en cada uno de los siguientes casos, donde el área dada se refiere a una curva normal.

   a) El área entre 0 y Z es 0.3770
   b) El área a la izquierda de Z es o.8621
   c) El área entre -1.5 y Z es 0.0217

Solución del inciso c)

Si Z fuese positiva el área sería mayor que el área entre -1.5 y 0, que es 0.4332; de aquí que Z debe ser negativa.

Caso 1: Z es negativa, pero está a la derecha de -1.5

Area entre - 1.5 y Z
= (área entre -1.5 y 0) - (área entre 0 y Z)

$0.0217 = 0.4332 - $ (área entre o y Z)

Entonces el área entre 0 y $Z = 0.4332 - 0.0217$

$= 0.4115$

de donde $Z = -1.35$

Caso 2: Z es negativa y esta a la izquierda de -1.5

= (área entre Z y 0)

= (área entre -1.5 y 0)

$0.0217 =$ (área entre 0 y Z) $- 0.4332$

Entonces el área entre 0 y $Z = 0.0217 + 0.4332$

$= 0.4540$

y $Z = -1.694$ mediante interpolación lineal; ó, con alguna menor precisión, $Z = -1.69$.

12. Hallar el área bajo la curva normal entre

a) $Z = -1.20$ y $Z = 2.40$

b) $Z = 1.23$ y $Z = 1.87$

c) $Z = -2.35$ y $Z = -0.50$

13. Hallar el área bajo la curva normal estándar

a) a la izquierda de $Z = -1.78$

b) A la izquierda de $Z = 0.56$

c) a la derecha de $Z = -1.45$

d) correspondiente a $Z \geq 2.16$

e) correspondiente a $-0.80 \leq Z \leq 1.53$

f) a la izquierda de $Z = -2.52$ y a la derecha de $Z = 1.83$

14. Si Z se distribuye normalmente con media 0 y varianza 1. Hallar:

a) $P\{z \geq -1.64\}$

b) $P\{-1.96 \leq z \leq 1.96\}$

c) $P\{|z| \geq 1\}$

15. Hallar el valor de Z tal que.

a) el área a la derecha de Z sea 0.2266

b) el área a la izquierda de Z sea 0.0314

c) el área entre -0.23 y Z sea 0.5722

d) el área entre 1.15 y Z sea 0.0730

e) el área entre -Z y Z sea 0.9000

16. Hallar Z , si P$\{Z \geq Z_1\}$= 0.84, donde Z se distribuye normalmente con media o y varianza 1.

C O N T E N I D O.

2.2 Aplicaciones de la Distribución Normal Estándar.

O B J E T I V O.

2.2 Utilizará la curva Normal Estandar para Normalizar una curva normal cualquiera.

Hemos visto como se calculan área para la Distribución Normal Standar pero en la práctica los experimentos de tipo aleatorio que difícilmente - se presentan con $\mu=0$ y $\sigma^2 = 1$, por tal razón para el cálculo de sus - probabilidades, se buscan equivalencias de la Distribución Normal que se tiene a la Distribución Normal Estándar, a partir de la siguiente transformación:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

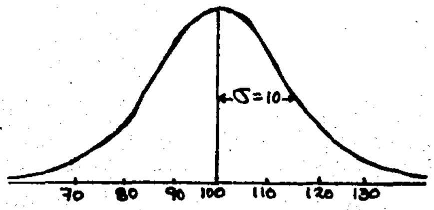
en donde X presenta las mediciones de una distribución determinada.

μ = la media de la misma distribución

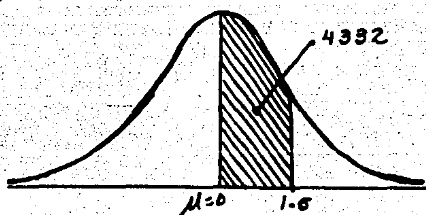
σ = la desviación estandar de dicha distribución por lo que Z se conoce como la variable "estandarizada", y que sus unidades son desviaciones estandar.

Esta puntuación Estandar Z, relacionada con la Distribución de probabilidades Normal es la Distribución Normal Estandar.

Ejemplo 1. Se hace un estudio con el coeficiente intelectual de las personas, observandose que se encuentra normalmente distribuído, con media 100 y Desviación estándar de 10. Si escogemos una persona al azar ¿Que probabilidad hay de que su Coeficiente Intelectual esté entre 100 y 115 esto es si X denota el coeficiente intelectual, esté entre 100 y 115, (si X denota el coeficiente intelectual, $P(100 < X < 115)$?



Se busca la región sombreada
de la distancia normal estándar:



muestra variable estadarizada se busca así:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{115 - 100}{10} = \frac{15}{10} = 1.5$$

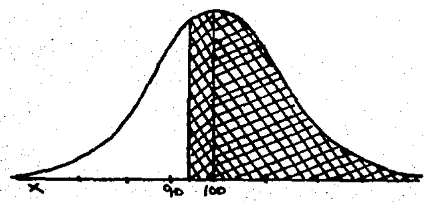
Buscamos en las tablas el área correspondiente a:

$Z = 0$ y $Z = 1.5$ que es .4332

por lo que se concluye

$P(100 < X < 115) = P(0 < X < 1.5) = 0.43332$ ó 43.32%

Ejemplo 2. Encuentrese la probabilidad de que una persona escogida al azar tenga coeficiente intelectual mayor a 95



$$Z = \frac{95 - 100}{10} = \frac{-5}{10} = -\ .5$$

Buscamos en la tabla Z = .5 para localizar el área entre Z = 0 y Z = .5 que es .1915

a esto le sumanos .50000 que es el área que está a la derecha de Z = 0 entonces

$$P\ (X > 95) = P\ (X > -\ .5)$$

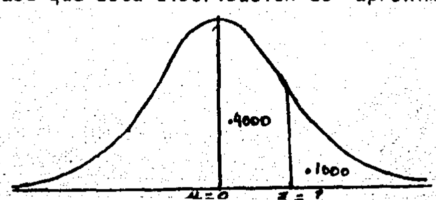
$$= .1915 + .5000$$

$$= .6915$$

En algunos problemas lo que se trata de localizar es el valor de X

Ejemplo 3.- En la evaluación de ungrupo, el profesor decide que para - obtener MB de calificación se debe sacar una calificación dentro del 10% superior del grupo. Siendo la media de 72 y la desviación estandar de - 13 ¿Qué calificación es la mínima que se puede sacar para estar en MB?

(Supongase que esta distribución es aproximadamente normal).



En este ejercicio lo que buscamos es el valor de X, o su equivalente Z en las tablas.

Bien, el 10% es .1000 = .5000 - .4000.

Buscamos en las tablas el valor de Z más cercano a .4000 y este es 1.28.
Ahora $P(X > 1.28) = 0.10$

$P(X > ?) = 0.10$

recordando que $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ ó $1.28 = \frac{X - 72}{13}$

Despejamos a X; $(1.28 \times 13) = X - 72$

$16.64 = X - 72$

$16.64 + 72 = X$

$88.64 = X$ ó 89.

Por lo que si el alumno obtiene 89, más de calificación quedara en MB.

EJERCICIOS PROPUESTOS PARA REFUERZO DEL OBJETIVO. 2.2

1.- En un examen final de Matemáticas la media fué de 69 y la Desviación standar de 14. Busca las equivalencias de las siguientes puntuaciones a la curva normal estandar (es decir busca Z).

a) 60 b) 92 c) 70 d) 85

2. De acuerdo al problema 1. Busca las puntuaciones correspondientes a las referencias estandarizadas (es decir busca X)

a) Z = -1 b) Z = 1.6 c) Z = - .5

3. Un profesor informa a 2 de sus alumnos que habian obtenido referencias estandarizadas de 0.6 y - 0.3 respectivamente, en un examen de inglés. Si sus calificaciones fueron 86 y 62, respectivamente, hallar la media y la Desviación estándar del grupo que hizo el examen.

4. La media de los pesos de 500 estudiantes de un cierto Colegio es 151 Lb y la desviación stándar 15 Lb. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, hallar cuántos estudiantes pesan

a) Entre 120 y 155 Lb.

b) Más de 185 Lb.

Solución:

a) Los pesos registrados entre 120 y 155 libras pueden realmente tener cualquier valor entre 119.5 y 155.5 libras, suponiendo que se toman con aproximación de 1 Lb.

119.5 en unidades estandarizadas = (119.5 - 151)/ 15 = -210
155.5 en unidades estandarizadas = (155.5 - 151)/ 15 = 0.30

Proporción de estudiantes pedida.

= (área entre Z = -2.10 y Z = 0.30)

= (área entre Z = -2.10 y Z = 0) + (área entre Z = 0 y Z = 0.30)

= 0.4821 + 0.1179 = 0.6000

Entonces el número de estudiantes que pesa entre 120 y 155 Lb.= 500 X (0.6000) = 300

b) Los estudiantes que pesan más de 185 Lb deben pesar al menos 185.5 Lb.

185.5 Lb., en unidades estandarizadas = (185.5 - 151)/ 15 = 2.30

Proporción de estudiantes pedida.

= (área a la derecha de Z = 2.30)

= (área a la derecha de Z = 0)
= (área entre Z = 0 y Z = 2.30)
= 0.5 - 0.4893 = 0.0107

el número de estudiantes que pesan más de 185 Lb. será 500 (0.0107) = 5

Si W denota el peso de un estudiante elegido al azar, se puede resumir los resultados anteriores en términos de probabilidad, escribiendo

$$P\{119.5 \leq W \leq 155.5\} = 0.6000 \quad y \quad P\{W \geq 185.5\} = 0.0107.$$

5. Determinar cuantos estudiantes del problema anterior pesan:
   a) menos de 128 Lb
   b) 128 Lb
   c) 128 Lb. ó menos

6. Las puntuaciones de un ejercicio de biología fueron 0,1,2,......, 10, dependiendo del número de respuestas correctas a 10 preguntas formuladas. La puntuación media fue 6.7 y la Desviación Estándar 1.2. Suponiendo que las puntuaciones se distribuyen normalmente, determinar

   a) el porcentaje de estudiantes que consiguió 6 puntos.
   b) La puntuación máxima del 10% más bajo de la clase.
   c) La puntuación mínima del 10% superior de la clase.

Solución:

a) Para aplicar la Distribución Normal a datos discretos es necesario tratar los datos como si fuesen contínuos. Así, un logro de 6 puntos se considera como de 5.5 a 6.5 puntos.

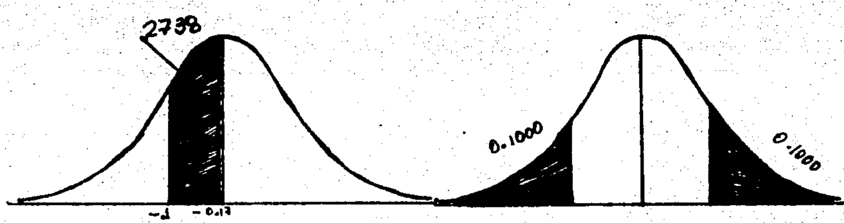
5.5 en unidades tipificadas = (5.5 - 6.7)/ 1.2 = -1.0

6.5 en unidades tipificadas = (6.5 - 6.7)/ 1.2 = -0.17

Proporción pedida = (área entre Z = -1 y Z = -0.17)

= (área entre Z = -1 y Z= 0) - (área entre Z = -0.17 y Z = 0)

= 0.3413 - 0.0675 = 0.2738 = 27%



b) Sea X_1 la puntuación máxima pedida y Z_1 la puntuación en unidades tipificadas.

De la figura b, el área a la izquierda de Z_1 es 10% = 0.10, de -- aquí (área entre Z y 0 = 0.40 y Z_1 = -1.28 (muy aproximadamente).

Entonces $Z_1 = (X_1 - 6.7)/1.2 = -1.28$ y X_1 = 5.2 ó 5 con aproxima-- ción de unidad.

c) Sea X_2 la puntuación mínima pedida y Z_2 la puntuación en unidades tipificadas.

De (b), por simetría, Z_2 = 1.28 Entonces $(X_2 - 6.7)/1.2 = 1.28$, y X_2 = 8.2 û 8 con aproximación de enteros.

7. La media de los diámetros interiores de una muestra de 200 arandelas - producidas por una máquina es 0.502 pulgadas y la Desviación Estándar - 0.005 pulgadas. El propósito para el que se destinan estas arandelas - permite una tolerancia máxima en el diámetro de 0.496 a 0.568 pulgadas de otro modo, las arandelas se consideran defectuosas. Determinar el - porcentaje de arandelas defectuosas producido por la máquina, suponiendo que los diámetros se distribuyen normalmente.

8. En un examen de estadística la media fué 78 y la Desviación Estándar 10.
a) Determinar las referencias estandarizadas de dos estudiantes cuyas puntuaciones fueron 93 y 62 respectivamente.
b) Determinar las puntuaciones de dos estudiantes cuyas referencias estandarizadas fueron -0.6 y 1.2 respectivamente.

9. Hallar:
a) La media y b) la Desviación Estándar de un examen en el que las puntuaciones de 70 y 88 tienen unas referencias estandarizadas de -0.6 y 1.4 respectivamente.

10. Si las alturas de 300 estudiantes se distribuyen normalmente con media 68.0 pulgadas y Desviación Estándar 3.0 pulgadas, cuantos estudiantes - tienen alturas

a) Mayor de 72 pulgadas,
b) Menor o igual a 64 pulgadas,

c) Entre 65 y 71 pulgadas inclusive,
d) Igual a 68 pulgadas.
Supónganse las medidas, registradas con aproximación de pulgada.

11. Si los diámetros de cojinetes de balas se distribuyen normalmente con media 0.6140 pulgadas y Desviación Estándar 0.0025 pulgadas, determinar el porcentaje de cojinetes de balas con diámetros

a) Entre 0.610 y 0.618 pulgadas inclusive
b) Mayor de 0.617 pulgadas
c) Menor de 0.608 pulgadas
d) Igual a 0.615 pulgadas.

12. La puntuación media en un examen final fué 72 y la Desviación Stándar 9. El 10% superior de los alumnos reciben la calificación A ¿Cuál es la puntuación mínima que un estudiante debe tener para recibir un A?

Respuesta: 84

13. Si una serie de medidas se distribuyen normalmente, ¿qué porcentaje de ellas diferirán de la media en

a) Más de la mitad de la desviación típica,
b) Menos de tres cuartos de la desviación típica

14. Si $\bar{X}$ es la media y σ la Desviación Estándar de una serie de medidas que se distribuyen normalmente. ¿Qué porcentaje de las medidas están
a) en el intervalo $(\bar{X} \pm 2\sigma)$,
b) fuera del intervalo $(\bar{X} \pm 1.2\sigma)$,
c) mayor que $(\bar{X} - 1.5\sigma)$?

15. Sea X Normal con media 160 y varianza 36. Encontrar
$P(X > 110)$, $P(X < 105)$, y $P(90 < X < 110)$.

16. Sea X con media 10 y varianza 4. Determinar c tal que
$P(X < c) = 5\%$, $P(X > c) = 1\%$ y $P(10 - c < X < 10 + c) = 50\%$

17. Un fabricante de resistencias, sabe por experiencia que el valor de las resistencias que produce es normal con media $\mu = 100$ ohms y desviación estándar $\sigma = 2$ ohms, ¿Qué porcentaje de resistencias tendrán valor entre 98 y 102 ohms? ¿Qué porcentaje entre 95 y 105 ohms?

18. En el problema 17 encontrar c tal que el 95% de las resistencias producidas se encuentren entre 100 - c y 100 + c. Encontrar C* tal que el 90% de las resistencias producidas se encuentren entre 100 - c* y 100 + c*.

19. Si la estatura de una población es una variable aleatoria normal con media 172.72 cms. y desviación estándar 6.35 cms. y deseamos seleccionar al azar 200 personas de esta población; ¿cuántas de estas personas debemos esperar que midan:

a) 172.72 cms.

b) Más de 177.80 cms., suponiendo que las medidas se toman con dos dígitos de aproximación?

20. ¿Qué porcentaje de observaciones de una variable aleatoria se espera que se localice:

a) Entre $\mu - \sigma/4$ y $\mu + \sigma/4$

b) Entre $\mu - \sigma/2$ y $\mu + \sigma/2$?

21. Supóngase que es necesario que las placas de acero producidas por cierta máquina tengan un cierto grueso. Dichos productos industriales son un poco diferentes unos de otros, debido a que las propiedades del material y el comportamiento de las máquinas y de las herramientas usadas tienen ligeras variaciones aleatorias provocadas por pequeñas perturbaciones que no se pueden predecir. Por lo tanto, el grueso X (en milímetros) de las placas se puede considerar como variable aleatoria. Suponemos que para un cierto ajuste de la máquina la variable X es normal con media $\mu = 10$ mm. y desviación estándar $\sigma = 0.02$ mm. Deseamos determinar el porcentaje de placas defectuosas que se esperan, suponiendo que las placas defectuosas son:

a) Placas más delgadas que 9.97 mm.

b) Placas más gruesas que 10.05 mm.,

c) Placas cuyo grueso se desvie en más de 0.03 mm. de 10 mm.

d) ¿Cómo deberán escogerse los números 10-c y 10+c de manera que el porcentaje esperado de placas defectuosas no sea mayor de 5% (donde defectuosas significa placas más delgadas que 10 - c ó más gruesas que 10 + c).

e) ¿Cómo cambiará el porcentaje de placas defectuosas en el inciso.

d) Si μ se cambia de 10 mm. a 10.01 mm?

22. Dar una ilustración gráfica del resultado de la pregunta e) del ejemplo 21, trazando las curvas de las densidades de las preguntas d) y e) en el mismo eje.

23. ¿Cuál a el porcentaje de placas de acero defectuosas en la pregunta c) del ejemplo 21 sí se usa la máquina con el mejor ajuste, de manera que $\sigma = 0.01$ mm?

24. Calcular σ tal que el porcentaje de placas defectuosas en la pregunta c) del ejemplo 21 sea igual al 10%.

25. Sea X normal, con media 10 y σ tal que la probabilidad, de que X tome cualquier valor $X \geq 15$ no es mayor de 5%. Encontrar la σ más grande para la cual esta condición aún se cumple.

26. En el problema anterior, reemplazar 15 por 11 y encontrar la σ correspondiente.

27. Un productor de sobres de correo aéreo sabe por experiencia que el peso de los sobres está distribuido normalmente con media $\mu = 1.95$ gramos, y desviación estándar $\sigma = 0.05$ gramos. ¿Alrededor de cuántos sobres que pesan 2 gramos ó más se pueden encontrar en un paquete de 100 sobres?

28. En el problema anterior, ¿alrededor de cuántos paquetes que pesan 2.05 gramos ó más se pueden encontrar en un paquete de 100 sobres?

29. Serán X_0 y X_1 normales con medias $\mu_0 = 10$ y $\mu_1 = 20$, -- y varianzas iguales $\sigma^2 = 36$. Determinar c de manera que la probabilidad α de que X_0 tomará cualquier valor mayor que c es sólo -- 5%. Luego, encontrar la probabilidad β de que X_1 tomará cualquier -- valor menor que c. Graficar ambas densidades en el mismo sistema de - coordenadas, e interpretar α y β como áreas bajo estas curvas. ¿Qué sucederá a c y β si hacemos que α disminuya?

30. Si la distribución de X es la normal, con media unidad y $\sigma = 0.06$ hállense $P(X > 0)$ y $P(0.2 < X < 1.8)$

31. Hállese un número k tal que para una variable con distribución normal se verifique $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = 0.95$. ¿Cuál sería el valor de k para P = 0.90? ¿Y para P = 0.99? ¿Para qué valor de k se verifica $P(X > \mu - k\sigma) = 0.95$?

32. Suponiendo que la media y la Desviación Estándar de una distribución - normal son $\mu = 63.7$ y $\sigma = 5.4$, encontrar los valores de la -- distribución normal Estándar para cada uno de los siguientes datos.
a) 39.4 b) 79.3 c) 51.2 d) 72.8

33. Determinar el área bajo la curva entre 29.1 y 33.6 para una distribución normal con media 30.6 y desviación Estándar 1.5.

34. Determinar el área bajo la curva entre 110.3 y 129.7, para una distribución normal con media 127.5 y desviación Estándar 4.8.

35. Determinar el área bajo la curva entre 550 y 610, para una distribución normal con media 500 y desviación estándar 100.

36. Dada una curva normal con media 18.5 y desviación estándar 3.8, determinar el área bajo la curva.
a) a la derecha de 21.0
b) a la izquierda de 19.8
c) entre 11.5 y 18.9

37. Las pruebas de admisión en una escuela tienen media de 500 y desviación estándar de 100.

a) Una puntuación de 600 ¿a qué percentil corresponde?
b) La puntuación 650 ¿a qué percentil corresponde?
c) ¿Cuál es el percentil que corresponde a 450?
d) ¿Cuál es el percentil que corresponde a 700?

38. En una prueba de coeficiente de inteligencia (C.I) la media es 100 y - la desviación estándar 15.
a) Qué indica un C.I. de 95?
b) Qué indica un C.I de 115?
c) Qué indica un C.I de 120?

39. ¿Cuál es el área bajo la curva normal y los siguientes intervalos en - el eje X?
a) (0, 1.5)   b) (-1.2, 0)   c) (-0.8, 0.8)

40. Determinar el área bajo la curva normal y los intervalos en el eje X
a) (0, 1.75)   b) (-1.25, 0)   c) (-2.3, 2.1)

41. Encontrar el área bajo la curva entre 140 y 200 para una distribución con media 100 y desviación estándar 20.

42. Suponiendo que la media y la desviación estándar de una Distribución - normal son $\mu = 29.1$ y $\sigma = 3.4$, calcular los valores de la -- curva normal estándar para
a) 25.3   b) 33.4   c) 20.6

43. Encontrar el área bajo la curva entre 25 y 75 para una distribución normal con media 50 y desviación estándar 15.

44. Supóngase que se sabe que los pesos de cierto grupo de individuos están distribuidos aproximadamente en forma normal con una media de -- 70 kg. y una desviación estándar de 12.5 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar de este grupo pese entre 50 y 85 - kg.?

45. Supóngase que las edades en las que se adquiere cierta enfermedad están distribuidas en forma aproximadamente normal con una media de 11.5 años y una Desviación estándar de 3 años. Un niño acaba de contraer esta enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad de que el niño tenga:

a) entre 8 $\frac{1}{2}$ y 14 $\frac{1}{2}$ años de edad?
b) más de 10 años de edad?
c) menos de 12?

46. En el estudio de las huellas digitales, una importante característica cuantitativa es el número total del surco para los 10 dedos de un individuo. Supóngase que los números totales de surcos de los individuos en cierta población están distribuídos aproximadamente en forma normal, con una media de 140 y una desviación estándar de 50. Hallar la probabilidad de que un individuo elegido al azar de esta población tenga un número de surcos:

a) De 200 o más
b) Menor que 100
c) Entre 100 y 200
d) Entre 200 y 250

47. Si las capacidades de la cavidad craneana de cierta población están distribuídas aproximadamente en forma normal, con una media de 1400 cc y una desviación estándar de 125, encontrar la probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población tenga una capacidad de la cavidad craneana.

a) mayor que 1450 cc.
b) menor que 1350 cc.
c) entre 1300 cc y 1500 cc.

48. Si los valores de colesterol total para cierta población están distribuídos aproximadamente en forma normal, con una media de 200 mg./100 ml y una desviación estándar de 20 mg/100 ml, hallar la probabilidad de que un individuo elegido al azar de esta población tenga un valor de colesterol:

a) entre 180 y 200 mg/100 ml.
b) mayor que 225 mg/100 ml.
c) menor que 150 mg/100 ml.
d) entre 190 y 210 mg/100 ml.

CONTENIDO.

3.- Aproximación de la Distribución Binomial, mediante la Distribución Normal.

CONTENIDO.

3.1 Comportamiento de la gráfica de la Distribución Binomial, cuando N crece y p y q tienden a ser iguales.

OBJETIVO.

3.1 El alumno revisará el comportamiento en la Distribución Binomial variando n, p y q en una gráfica cuando se nos presentan problemas de tipo Binomial los podemos resolver de una manera relativamente fácil, pero cuando n es muy grande los cálculos que corresponden a la fórmula de la distribución - Binomial se hacen engorrosos, por lo que se puede hacer una aproximación - sencilla a la distribución Binomial utilizando la Distribución Normal.

Recordando las propiedades de la Distribución Binomial para la μ y σ tenemos

$\mu = Np$ y $\sigma = \sqrt{Npq}$ a partir de estas propiedades, y considerando que N sea lo suficientemente grande y ni "p" ni "q" estén muy próximos a cero. La Distribución Binomial se puede aproximar estrechamente a la - Distribución Normal por medio de la variable estandarizada Z.

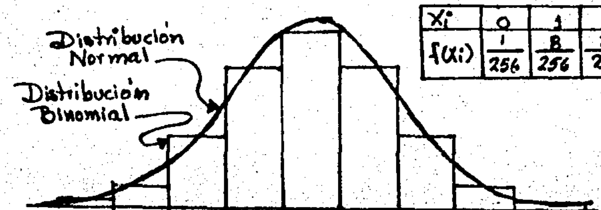
$$Z = \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}}$$

Antes de realizar ejercicios con $Z = \dfrac{X - Np}{\sqrt{Npq}}$

Revisemos algunas gráficas para observar porqué decimos que podemos dar - una aproximación a la Binomial por medio de la Distribución Normal.

1) Sea la distribución Binomial para $n = 8$ y $p = q = \frac{1}{2}$ la tabla de la Distribución Binomial será:

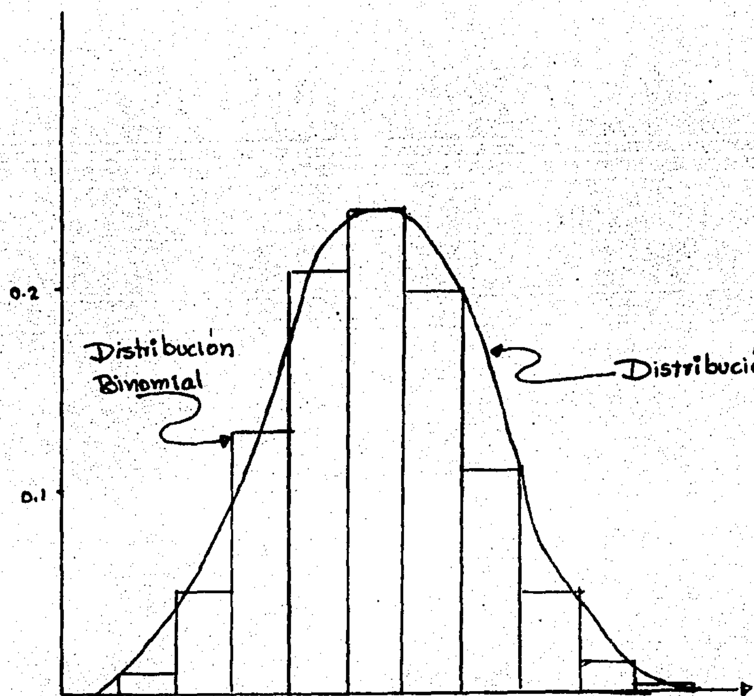
X_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(X_i)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$



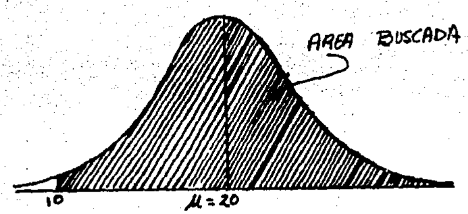
2) Sea N = 12 y p = $\frac{1}{3}$ Los valores de P(X_i) son los siguientes:

P (X = 0) = .008	P (X = 7) = .048
P (X = 1) = .046	P (X = 8) = .015
P (X = 2) = .127	P (X = 9) = .003
P (X = 3) = .212	P (X = 10) = .000
P (X = 4) = .238	P (X = 11) = .000
P (X = 5) = .191	P (X = 12) = .000
P (X = 6) = .111	

La gráfica quedaría así:



SOLUCION GRAFICA



$$Z_1 = \frac{10.0 - 20}{3.162} = \frac{-10.0}{3.162} = -3.16$$

$P(X \geq 10)$ = (área de $Z = 0$ a $Z = -3.16$) + (área de la derecha de $Z=0$).

$P(X \geq 10) = .4992 + .5000$

$P(X \geq 10) = .9992$

3. C O N T E N I D O : Aproximación de la Distribución Binomial, mediante la Distribución Normal.

3.2 C O N T E N I D O : Cálculo de la Distribución Binomial, mediante la Distribución Normal.

Ejercicios:

1. Un fabricante vende lámparas en cajas de 1000. ¿Cuál es la probabilidad de que alguna caja contenga no más del 1% de lámparas defectuosas, si se considera el proceso de producción como un experimento de Bernoulli con p =.01 (= a la probabilidad de que alguna caja sea defectuosa?

2. En casamientos entre personas que no tienen parentesco, la probabilidad de nacimientos de una niña es alrededor de 0.48. En 299 casamientos, de los cuales 287 fueron entre primos y los 12 restantes, entre tíos y sobrinos, de 709 bebés 386 fueron niñas. Encontrar la probabilidad de que deban nacer 386 niñas ó más en 709 nacimientos, suponiendo que también p = 0.48 en casamientos entre estos parientes.

3. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 2048 caras al arrojar 4040 veces una moneda legal?

4. De los primeros 3000 nacimientos en 1962 en Graz, Austria 1578 fueron niños, ¿cuál es la probabilidad de obtener 1578 niños ó más en 3000 nacimientos, suponiendo que los eventos nacimiento de un niño y nacimiento de una niña son igualmente posibles, y que el resultado de cualquier nacimiento es independiente de los resultados de los otros nacimientos.

5. Hallar la probabilidad de obtener entre 3 y 6 caras inclusive en 10 lanzamientos de una moneda utilizando en aproximación normal de la Distribución binomial.

6. Una moneda se lanza 500 veces. Hallar la probabilidad de que el número de caras no difiera de 250 en (a) más de 10, (b) más de 30.

7. Un dado se lanza 120 veces. Hallar la probabilidad de que la cara 4 salga: a) 18 veces ó menos , b) 14 veces ó menos, suponiendo el dado bien hecho

8. Supóngase que un político pretende que un sondeo en su distrito ha demostrado que el 60% de los electores están de acuerdo con su voto en un punto importante de legislación. Si se supone temporalmente que este porcentaje es correcto y que una muestra imparcial de 400 votantes se toma en su distrito, ¿cuál es la probabilidad de que la muestra arroje menos del 50% de gente de acuerdo?

9. La experiencia ha demostrado que solamente el 50% de los estudiantes que cursaron el primer año de inglés, aprobaron el examen final. Si examinamos a un grupo de 300 alumnos de primer año. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos el 55% de ellos resulte reprobado?

10. Supóngase que el 5% de los individuos vacunados contra la gripe presentan reacciones indeseables más ó menos serias. Empleando la aproximación normal calcule la probabilidad de que más del 8% de 200 individuos vacunados presenten dichas reacciones.

A MODO DE CONCLUSIONES

Considero que las presentes notas pueden ser las bases para la elaboración de un texto a nivel medio superior, enriqueciendolo con más ejercicios y profundizando en algunos temas.

Hasta el momento no se ha llevado a cabo un estudio comparativo de la aplicación del presente material; lo que si se ha aplicado es una encuesta a los profesores del C.C.H. Vallejo, en la que se refleja la inclinación en la mayoría, por profundizar en los temas que se citan en la introducción y no abordar prueba de Hipótesis, razón por la que, no se incluye en este trabajo.

Binomial Distribution[a]

n	y	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025
	1	.9975	.9900	.9775	.9600	.9375	.9100	.8775	.8400	.7975
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664
	1	.9928	.9720	.9392	.8960	.8438	.7840	.7182	.6480	.5748
	2	.9999	.9990	.9966	.9920	.9844	.9730	.9571	.9360	.9089
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915
	1	.9860	.9477	.8905	.8192	.7383	.6517	.5630	.4752	.3910
	2	.9995	.9963	.9880	.9728	.9492	.9163	.8735	.8208	.7585
	3	1.0000	.9999	.9995	.9984	.9961	.9919	.9850	.9743	.9590
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503
	1	.9774	.9185	.8352	.7373	.6328	.5282	.4284	.3370	.2562
	2	.9988	.9914	.9734	.9421	.8965	.8369	.7648	.6826	.5931
	3	1.0000	.9995	.9978	.9933	.9844	.9692	.9460	.9130	.8688
	4	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9990	.9976	.9947	.9898	.9815
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277
	1	.9672	.8857	.7765	.6554	.5339	.4202	.3191	.2333	.1636
	2	.9978	.9842	.9527	.9011	.8306	.7443	.6471	.5443	.4415
	3	.9999	.9987	.9941	.9830	.9624	.9295	.8826	.8208	.7447
	4	1.0000	.9999	.9996	.9984	.9954	.9891	.9777	.9590	.9308
	5	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9993	.9982	.9959	.9917
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152
	1	.9556	.8503	.7166	.5767	.4449	.3294	.2338	.1586	.1024
	2	.9962	.9743	.9262	.8520	.7564	.6471	.5323	.4199	.3164
	3	.9998	.9973	.9879	.9667	.9294	.8740	.8002	.7102	.6083
	4	1.0000	.9998	.9988	.9953	.9871	.9712	.9444	.9037	.8471
	5	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9987	.9962	.9910	.9812	.9643
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9994	.9984	.9963
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(Continued)

n	y	p = .50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
1	0	.5000	.4500	.4000	.3500	.3000	.2500	.2000	.1500	.1000	.0500
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	.2500	.2025	.1600	.1225	.0900	.0625	.0400	.0225	.0100	.0025
	1	.7500	.6975	.6400	.5775	.5100	.4375	.3600	.2775	.1900	.0975
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	.1250	.0911	.0640	.0429	.0270	.0156	.0080	.0034	.0010	.0001
	1	.5000	.4252	.3520	.2818	.2160	.1562	.1040	.0608	.0280	.0072
	2	.8750	.8336	.7840	.7254	.6570	.5781	.4880	.3859	.2710	.1426
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	.0625	.0410	.0256	.0150	.0081	.0039	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.3125	.2415	.1792	.1265	.0837	.0508	.0272	.0120	.0037	.0005
	2	.6875	.6090	.5248	.4370	.3483	.2617	.1808	.1095	.0523	.0140
	3	.9375	.9085	.8704	.8215	.7599	.6836	.5904	.4780	.3439	.1855
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	.0312	.0185	.0102	.0053	.0024	.0010	.0003	.0001	.0000	.0000
	1	.1875	.1312	.0870	.0540	.0308	.0156	.0067	.0022	.0005	.0000
	2	.5000	.4069	.3174	.2352	.1631	.1035	.0579	.0266	.0086	.0012
	3	.8125	.7438	.6630	.5716	.4718	.3672	.2627	.1648	.0815	.0226
	4	.9688	.9497	.9222	.8840	.8319	.7627	.6723	.5563	.4095	.2262
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	.0156	.0083	.0041	.0018	.0007	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000
	1	.1094	.0692	.0410	.0223	.0109	.0046	.0016	.0004	.0001	.0000
	2	.3438	.2553	.1792	.1174	.0705	.0376	.0170	.0059	.0013	.0001
	3	.6562	.5585	.4557	.3529	.2557	.1694	.0989	.0473	.0158	.0022
	4	.8906	.8364	.7667	.6809	.5798	.4661	.3446	.2235	.1143	.0328
	5	.9844	.9723	.9533	.9246	.8824	.8220	.7379	.6229	.4686	.2649
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	.0078	.0037	.0016	.0006	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0625	.0357	.0188	.0090	.0038	.0013	.0004	.0001	.0000	.0000
	2	.2266	.1529	.0963	.0556	.0288	.0129	.0047	.0012	.0002	.0000
	3	.5000	.3917	.2898	.1998	.1260	.0706	.0333	.0121	.0027	.0002
	4	.7734	.6836	.5801	.4677	.3529	.2436	.1480	.0738	.0257	.0038
	5	.9375	.8976	.8414	.7662	.6706	.5551	.4233	.2834	.1497	.0444
	6	.9922	.9848	.9720	.9510	.9176	.8665	.7903	.6794	.5217	.3017
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(CONTINUED)

n	y	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084
	1	.9428	.8131	.6572	.5033	.3671	.2553	.1691	.1064	.0632
	2	.9942	.9619	.8948	.7969	.6785	.5518	.4278	.3154	.2201
	3	.9996	.9950	.9786	.9437	.8862	.8059	.7064	.5941	.4770
	4	1.0000	.9996	.9971	.9896	.9727	.9420	.8939	.8263	.7396
	5	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9958	.9887	.9747	.9502	.9115
	6	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9987	.9964	.9915	.9819
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9988	.9993	.9983
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046
	1	.9288	.7748	.5995	.4362	.3003	.1960	.1211	.0705	.0385
	2	.9916	.9470	.8591	.7382	.6007	.4628	.3373	.2318	.1495
	3	.9994	.9917	.9661	.9144	.8343	.7297	.6089	.4826	.3614
	4	1.0000	.9991	.9944	.9804	.9511	.9012	.8283	.7334	.6214
	5	1.0000	.9999	.9994	.9969	.9900	.9747	.9464	.9006	.8342
	6	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9987	.9957	.9888	.9750	.9502
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9986	.9962	.9909
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9992
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025
	1	.9139	.7361	.5443	.3758	.2440	.1493	.0860	.0464	.0233
	2	.9885	.9298	.8202	.6778	.5256	.3828	.2616	.1673	.0996
	3	.9990	.9872	.9500	.8791	.7759	.6496	.5138	.3823	.2660
	4	.9999	.9984	.9901	.9672	.9219	.8497	.7515	.6331	.5044
	5	1.0000	.9999	.9986	.9936	.9803	.9527	.9051	.8338	.7384
	6	1.0000	1.0000	.9999	.9991	.9965	.9894	.9740	.9452	.8980
	7	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9984	.9952	.9877	.9726
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9983	.9955
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014
	1	.8981	.6974	.4922	.3221	.1971	.1130	.0606	.0302	.0139
	2	.9848	.9104	.7788	.6174	.4552	.3127	.2001	.1189	.0652
	3	.9984	.9815	.9306	.8389	.7133	.5696	.4256	.2963	.1911
	4	.9999	.9972	.9841	.9496	.8854	.7897	.6683	.5328	.3971
	5	1.0000	.9997	.9973	.9883	.9657	.9218	.8513	.7535	.6331
	6	1.0000	1.0000	.9997	.9980	.9924	.9784	.9499	.9006	.8262
	7	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9957	.9878	.9707	.9390
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9980	.9941	.9852
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9978
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(CONTINUED)

n	y	p = .50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
8	0	.0039	.0017	.0007	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0352	.0181	.0085	.0036	.0013	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000
	2	.1445	.0885	.0498	.0253	.0113	.0042	.0012	.0002	.0000	.0000
	3	.3633	.2604	.1737	.1061	.0580	.0273	.0104	.0029	.0004	.0000
	4	.6367	.5230	.4059	.2936	.1941	.1138	.0563	.0214	.0050	.0004
	5	.8555	.7799	.6846	.5722	.4482	.3215	.2031	.1052	.0381	.0058
	6	.9648	.9368	.8936	.8309	.7447	.6329	.4967	.3428	.1869	.0572
	7	.9961	.9916	.9832	.9681	.9424	.8999	.8322	.7275	.5695	.3366
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	.0020	.0008	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0195	.0091	.0038	.0014	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0898	.0498	.0250	.0112	.0043	.0013	.0003	.0000	.0000	.0000
	3	.2539	.1658	.0994	.0536	.0253	.0100	.0031	.0006	.0001	.0000
	4	.5000	.3786	.2666	.1717	.0988	.0489	.0196	.0056	.0009	.0000
	5	.7461	.6386	.5174	.3911	.2703	.1657	.0856	.0339	.0083	.0006
	6	.9102	.8505	.7682	.6627	.5372	.3993	.2618	.1409	.0530	.0084
	7	.9805	.9615	.9295	.8789	.8040	.6997	.5638	.4005	.2252	.0712
	8	.9980	.9954	.9899	.9793	.9596	.9249	.8658	.7684	.6126	.3698
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	.0010	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0107	.0045	.0017	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0547	.0274	.0123	.0048	.0016	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000
	3	.1719	.1020	.0548	.0260	.0106	.0035	.0009	.0001	.0000	.0000
	4	.3770	.2616	.1662	.0949	.0473	.0197	.0064	.0014	.0001	.0000
	5	.6230	.4956	.3669	.2485	.1503	.0781	.0328	.0099	.0016	.0001
	6	.8281	.7340	.6177	.4862	.3504	.2241	.1209	.0500	.0128	.0010
	7	.9453	.9004	.8327	.7384	.6172	.4744	.3222	.1798	.0702	.0115
	8	.9893	.9767	.9536	.9140	.8507	.7560	.6242	.4557	.2639	.0861
	9	.9990	.9975	.9940	.9865	.9718	.9437	.8926	.8031	.6513	.4013
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	0	.0005	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0059	.0022	.0007	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0327	.0148	.0059	.0020	.0006	.0001	.0003	.0000	.0000	.0000
	3	.1133	.0610	.0293	.0122	.0043	.0012	.0002	.0000	.0000	.0000
	4	.2744	.1738	.0994	.0501	.0216	.0076	.0020	.0003	.0000	.0000
	5	.5000	.3669	.2465	.1487	.0782	.0343	.0117	.0027	.0003	.0000
	6	.7256	.6029	.4672	.3317	.2103	.1146	.0504	.0159	.0028	.0001
	7	.8867	.8089	.7037	.5744	.4304	.2867	.1611	.0694	.0185	.0016
	8	.9673	.9348	.8811	.7999	.6873	.5448	.3826	.2212	.0896	.0152
	9	.9941	.9861	.9698	.9394	.8870	.8029	.6779	.5078	.3026	.1019
	10	.9995	.9986	.9964	.9912	.9802	.9578	.9141	.8327	.6862	.4312
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(CONTINUED)

n	y	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008
	1	.8816	.6590	.4435	.2749	.1584	.0850	.0424	.0196	.0083
	2	.9804	.8891	.7358	.5583	.3907	.2528	.1513	.0834	.0421
	3	.9978	.9744	.9078	.7946	.6488	.4925	.3467	.2253	.1345
	4	.9998	.9957	.9761	.9274	.8424	.7237	.5833	.4382	.3044
	5	1.0000	.9995	.9954	.9806	.9456	.8822	.7873	.6652	.5269
	6	1.0000	.9999	.9993	.9961	.9857	.9614	.9154	.8418	.7393
	7	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9972	.9905	.9745	.9427	.8883
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9983	.9944	.9847	.9644
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9972	.9921
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004
	1	.8646	.6213	.3983	.2336	.1267	.0637	.0296	.0126	.0049
	2	.9755	.8661	.7296	.5017	.3326	.2025	.1132	.0579	.0269
	3	.9969	.9658	.9033	.7473	.5843	.4206	.2783	.1686	.0929
	4	.9997	.9935	.9740	.9009	.7940	.6543	.5005	.3530	.2279
	5	1.0000	.9991	.9947	.9700	.9198	.8346	.7159	.5744	.4268
	6	1.0000	.9999	.9987	.9930	.9757	.9376	.8705	.7712	.6437
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9944	.9818	.9538	.9023	.8212
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9990	.9960	.9874	.9679	.9302
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9975	.9922	.9797
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9987	.9959
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002
	1	.8470	.5846	.3567	.1979	.1010	.0475	.0205	.0081	.0029
	2	.9699	.8416	.6479	.4481	.2811	.1608	.0839	.0398	.0170
	3	.9958	.9559	.8535	.6982	.5213	.3552	.2205	.1243	.0632
	4	.9996	.9908	.9533	.8702	.7415	.5842	.4227	.2793	.1672
	5	1.0000	.9985	.9885	.9561	.8883	.7805	.6405	.4859	.3373
	6	1.0000	.9998	.9978	.9884	.9617	.9067	.8164	.6925	.5461
	7	1.0000	1.0000	.9997	.9976	.9897	.9685	.9247	.8499	.7414
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9978	.9917	.9757	.9417	.8811
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9983	.9940	.9825	.9574
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9989	.9961	.9886
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9978
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(CONTINUED)

n	y	p = .50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
12	0	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0032	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0193	.0079	.0028	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0730	.0356	.0153	.0056	.0017	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000
	4	.1938	.1117	.0573	.0255	.0095	.0028	.0006	.0001	.0000	.0000
	5	.3872	.2607	.1582	.0846	.0386	.0143	.0039	.0007	.0001	.0000
	6	.6128	.4731	.3348	.2127	.1178	.0544	.0194	.0046	.0005	.0000
	7	.8062	.6956	.5618	.4167	.2763	.1576	.0726	.0239	.0043	.0002
	8	.9270	.8655	.7747	.6533	.5075	.3512	.2054	.0922	.0256	.0022
	9	.9807	.9579	.9166	.8487	.7472	.6093	.4417	.2642	.1109	.0196
	10	.9968	.9917	.9804	.9576	.9150	.8416	.7251	.5565	.3410	.1184
	11	.9998	.9992	.9978	.9943	.9862	.9683	.9313	.8578	.7176	.4596
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0017	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0112	.0041	.0013	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0461	.0203	.0078	.0025	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.1334	.0698	.0321	.0126	.0040	.0010	.0002	.0000	.0000	.0000
	5	.2905	.1788	.0977	.0462	.0182	.0056	.0012	.0002	.0000	.0000
	6	.5000	.3563	.2288	.1295	.0624	.0243	.0070	.0013	.0001	.0000
	7	.7095	.5732	.4256	.2841	.1654	.0802	.0300	.0053	.0009	.0000
	8	.8666	.7721	.6470	.4995	.3457	.2060	.0991	.0260	.0065	.0003
	9	.9539	.9071	.8314	.7217	.5794	.4157	.2527	.0967	.0342	.0031
	10	.9888	.9731	.9421	.8868	.7975	.6674	.4983	.2704	.1339	.0245
	11	.9983	.9951	.9874	.9704	.9363	.8733	.7664	.6017	.3787	.1354
	12	.9999	.9996	.9987	.9963	.9903	.9762	.9450	.8791	.7458	.4867
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0009	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0065	.0022	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0287	.0114	.0039	.0011	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0898	.0462	.0175	.0060	.0017	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.2120	.1189	.0583	.0243	.0083	.0022	.0004	.0000	.0000	.0000
	6	.3953	.2586	.1501	.0753	.0315	.0103	.0024	.0003	.0000	.0000
	7	.6047	.4539	.3075	.1836	.0933	.0383	.0116	.0022	.0002	.0000
	8	.7880	.6627	.5141	.3595	.2195	.1117	.0439	.0115	.0015	.0000
	9	.9102	.8328	.7207	.5773	.4158	.2585	.1298	.0467	.0092	.0004
	10	.9713	.9368	.8757	.7795	.6448	.4787	.3018	.1465	.0441	.0042
	11	.9935	.9830	.9602	.9161	.8392	.7189	.5519	.3521	.1584	.0301
	12	.9991	.9971	.9919	.9795	.9525	.8990	.8021	.6433	.4154	.1530
	13	.9999	.9998	.9992	.9976	.9932	.9822	.9560	.8972	.7712	.5123
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(CONTINUED)

n	y	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001
	1	.8290	.5490	.3186	.1671	.0802	.0353	.0142	.0052	.0017
	2	.9638	.8159	.6042	.3980	.2361	.1268	.0617	.0271	.0107
	3	.9945	.9444	.8227	.6482	.4613	.2969	.1727	.0905	.0424
	4	.9994	.9873	.9383	.8358	.6865	.5155	.3519	.2173	.1204
	5	.9999	.9978	.9832	.9389	.8516	.7216	.5643	.4032	.2608
	6	1.0000	.9997	.9964	.9819	.9434	.8689	.7548	.6098	.4522
	7	1.0000	1.0000	.9994	.9958	.9827	.9500	.8868	.7869	.6535
	8	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9958	.9848	.9578	.9050	.8182
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9963	.9876	.9662	.9231
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9972	.9907	.9745
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9981	.9937
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	0	.4401	.1853	.0743	.0281	.0100	.0033	.0010	.0003	.0001
	1	.8108	.5147	.2839	.1407	.0635	.0261	.0098	.0033	.0010
	2	.9571	.7892	.5614	.3518	.1971	.0994	.0451	.0183	.0066
	3	.9930	.9316	.7899	.5981	.4050	.2459	.1339	.0651	.0281
	4	.9991	.9830	.9209	.7982	.6302	.4499	.2892	.1666	.0853
	5	.9999	.9967	.9765	.9183	.8103	.6598	.4900	.3288	.1976
	6	1.0000	.9995	.9944	.9733	.9204	.8247	.6881	.5272	.3660
	7	1.0000	.9999	.9989	.9930	.9729	.9256	.8406	.7161	.5629
	8	1.0000	1.0000	.9998	.9985	.9925	.9743	.9329	.8577	.7441
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9984	.9929	.9771	.9417	.8759
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9984	.9938	.9809	.9514
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9987	.9951	.9851
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9991	.9965
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(CONTINUED)

n	y	p = .50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
15	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0037	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0176	.0063	.0019	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0592	.0255	.0093	.0028	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.1509	.0769	.0338	.0124	.0037	.0008	.0001	.0000	.0000	.0000
	6	.3036	.1818	.0950	.0422	.0152	.0042	.0008	.0001	.0000	.0000
	7	.5000	.3465	.2131	.1132	.0500	.0173	.0042	.0006	.0000	.0000
	8	.6964	.5478	.3902	.2452	.1311	.0566	.0181	.0036	.0003	.0000
	9	.8491	.7392	.5968	.4357	.2784	.1484	.0611	.0168	.0022	.0001
	10	.9408	.8796	.7827	.6481	.4845	.3135	.1642	.0617	.0127	.0006
	11	.9824	.9576	.9095	.8273	.7031	.5387	.3518	.1773	.0556	.0055
	12	.9963	.9893	.9729	.9383	.8732	.7639	.6020	.3958	.1841	.0362
	13	.9995	.9983	.9948	.9858	.9647	.9198	.8329	.6814	.4510	.1710
	14	1.0000	.9999	.9995	.9984	.9953	.9866	.9648	.9126	.7941	.5367
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0021	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0106	.0035	.0009	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0384	.0149	.0049	.0013	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.1051	.0486	.0191	.0062	.0016	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.2272	.1241	.0583	.0229	.0071	.0016	.0002	.0000	.0000	.0000
	7	.4018	.2559	.1423	.0671	.0257	.0075	.0015	.0002	.0000	.0000
	8	.5982	.4371	.2839	.1594	.0744	.0271	.0070	.0011	.0001	.0000
	9	.7728	.6340	.4728	.3119	.1753	.0796	.0267	.0056	.0005	.0000
	10	.8949	.8024	.6712	.5100	.3402	.1897	.0817	.0235	.0033	.0001
	11	.9616	.9147	.8334	.7108	.5501	.3698	.2018	.0791	.0170	.0009
	12	.9894	.9719	.9349	.8661	.7541	.5950	.4019	.2101	.0684	.0070
	13	.9979	.9934	.9817	.9549	.9006	.8729	.6482	.4386	.2108	.0429
	14	.9997	.9990	.9967	.9902	.9739	.9365	.8593	.7161	.4853	.1892
	15	1.0000	.9999	.9997	.9990	.9967	.9900	.9719	.9257	.8147	.5599
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(CONTINUED)

n	y	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
17	0	.4181	.1668	.0631	.0225	.0075	.0023	.0007	.0002	.0000
	1	.7922	.4818	.2525	.1182	.0501	.0193	.0067	.0021	.0006
	2	.9497	.7618	.5198	.3096	.1637	.0774	.0327	.0123	.0041
	3	.9912	.9174	.7556	.5489	.3530	.2019	.1028	.0464	.0184
	4	.9988	.9779	.9013	.7582	.5739	.3887	.2348	.1260	.0596
	5	.9999	.9953	.9681	.8943	.7653	.5968	.4197	.2639	.1471
	6	1.0000	.9992	.9917	.9623	.8929	.7752	.6188	.4478	.2902
	7	1.0000	.9999	.9983	.9891	.9598	.8954	.7872	.6405	.4743
	8	1.0000	1.0000	.9997	.9974	.9876	.9597	.9006	.8011	.6626
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9969	.9873	.9617	.9081	.8166
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9968	.9880	.9652	.9174
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9970	.9894	.9699
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9975	.9914
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9981
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0	.3972	.1501	.0536	.0180	.0056	.0016	.0004	.0001	.0000
	1	.7735	.4503	.2241	.0991	.0395	.0142	.0046	.0013	.0003
	2	.9419	.7338	.4797	.2713	.1353	.0600	.0236	.0082	.0025
	3	.9891	.9018	.7202	.5010	.3057	.1646	.0783	.0328	.0120
	4	.9985	.9718	.8794	.7164	.5187	.3327	.1886	.0942	.0411
	5	.9998	.9936	.9581	.8671	.7175	.5344	.3550	.2088	.1077
	6	1.0000	.9988	.9882	.9487	.8610	.7217	.5491	.3743	.2258
	7	1.0000	.9998	.9973	.9837	.9431	.8593	.7283	.5634	.3915
	8	1.0000	1.0000	.9995	.9957	.9807	.9404	.8609	.7368	.5778
	9	1.0000	1.0000	.9999	.9991	.9946	.9790	.9403	.8653	.7473
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9939	.9788	.9424	.8720
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9986	.9938	.9797	.9463
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9986	.9942	.9817
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9987	.9951
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9990
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(CONTINUED)

n	y	p = .50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
17	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0012	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0064	.0019	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0245	.0086	.0025	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0717	.0301	.0106	.0030	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.1662	.0826	.0348	.0120	.0032	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000
	7	.3145	.1834	.0919	.0383	.0127	.0031	.0005	.0000	.0000	.0000
	8	.5000	.3374	.1989	.0994	.0403	.0124	.0026	.0003	.0000	.0000
	9	.6855	.5257	.3595	.2128	.1046	.0402	.0109	.0017	.0001	.0000
	10	.8338	.7098	.5522	.3812	.2248	.1071	.0377	.0083	.0008	.0000
	11	.9283	.8529	.7361	.5803	.4032	.2347	.1057	.0319	.0047	.0001
	12	.9755	.9404	.8740	.7652	.6113	.4261	.2418	.0987	.0221	.0012
	13	.9936	.9816	.9536	.8972	.7981	.6470	.4511	.2444	.0826	.0088
	14	.9988	.9959	.9877	.9673	.9226	.8363	.6904	.4802	.2382	.0503
	15	.9999	.9994	.9979	.9933	.9807	.9499	.8818	.7475	.5182	.2078
	16	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9977	.9925	.9775	.9369	.8332	.5819
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0038	.0010	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0154	.0049	.0013	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0481	.0183	.0058	.0014	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.1189	.0537	.0203	.0062	.0014	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	.2403	.1280	.0576	.0212	.0061	.0012	.0002	.0000	.0000	.0000
	8	.4073	.2527	.1347	.0597	.0210	.0054	.0009	.0001	.0000	.0000
	9	.5927	.4222	.2632	.1391	.0596	.0193	.0043	.0005	.0000	.0000
	10	.7597	.6085	.4366	.2717	.1407	.0569	.0163	.0027	.0002	.0000
	11	.8811	.7742	.6257	.4509	.2783	.1390	.0513	.0118	.0012	.0000
	12	.9519	.8923	.7912	.6450	.4656	.2825	.1329	.0419	.0064	.0002
	13	.9846	.9589	.9058	.8114	.6673	.4813	.2836	.1206	.0282	.0015
	14	.9962	.9880	.9672	.9217	.8354	.6943	.4990	.2798	.0982	.0109
	15	.9993	.9975	.9918	.9764	.9400	.8647	.7287	.5203	.2662	.0581
	16	.9999	.9997	.9987	.9954	.9858	.9605	.9009	.7759	.5497	.2265
	17	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9984	.9944	.9820	.9464	.8499	.6028
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

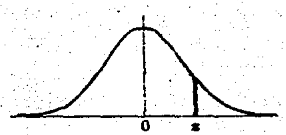
(CONTINUED)

n	y	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
19	0	.3774	.1351	.0456	.0144	.0042	.0011	.0003	.0001	.0000
	1	.7547	.4203	.1985	.0829	.0310	.0104	.0031	.0008	.0002
	2	.9335	.7054	.4413	.2369	.1113	.0462	.0170	.0055	.0015
	3	.9869	.8850	.6841	.4551	.2631	.1332	.0591	.0230	.0077
	4	.9980	.9648	.8556	.6733	.4654	.2822	.1500	.0696	.0280
	5	.9998	.9914	.9463	.8369	.6678	.4739	.2968	.1629	.0777
	6	1.0000	.9983	.9837	.9324	.8251	.6655	.4812	.3081	.1727
	7	1.0000	.9997	.9959	.9767	.9225	.8180	.6656	.4878	.3169
	8	1.0000	1.0000	.9992	.9933	.9713	.9161	.8145	.6675	.4940
	9	1.0000	1.0000	.9999	.9984	.9911	.9674	.9125	.8139	.6710
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9977	.9895	.9653	.9115	.8159
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9972	.9886	.9648	.9129
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9969	.9884	.9658
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9969	.9891
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9972
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000
	1	.7358	.3917	.1756	.0692	.0243	.0076	.0021	.0005	.0001
	2	.9245	.6769	.4049	.2061	.0913	.0355	.0121	.0036	.0009
	3	.9841	.8670	.6477	.4114	.2252	.1071	.0444	.0160	.0049
	4	.9974	.9568	.8298	.6296	.4148	.2375	.1182	.0510	.0189
	5	.9997	.9887	.9327	.8042	.6172	.4164	.2454	.1256	.0553
	6	1.0000	.9976	.9781	.9133	.7858	.6080	.4166	.2500	.1299
	7	1.0000	.9996	.9941	.9679	.8982	.7723	.6010	.4159	.2520
	8	1.0000	.9999	.9987	.9900	.9591	.8867	.7624	.5956	.4143
	9	1.0000	1.0000	.9998	.9974	.9861	.9520	.8782	.7553	.5914
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9961	.9829	.9468	.8725	.7507
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9991	.9949	.9804	.9435	.8692
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9987	.9940	.9790	.9420
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9985	.9935	.9786
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9984	.9936
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9985
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(CONTINUED)

n	y	p = .50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
19	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0022	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0096	.0028	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0318	.0109	.0031	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.0835	.0342	.0116	.0031	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	.1796	.0871	.0352	.0114	.0028	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000
	8	.3238	.1841	.0885	.0347	.0105	.0023	.0003	.0000	.0000	.0000
	9	.5000	.3290	.1861	.0875	.0326	.0089	.0016	.0001	.0000	.0000
	10	.6762	.5060	.3325	.1855	.0839	.0287	.0067	.0008	.0000	.0000
	11	.8204	.6831	.5122	.3344	.1820	.0775	.0233	.0041	.0003	.0000
	12	.9165	.8273	.6919	.5188	.3345	.1749	.0676	.0163	.0017	.0000
	13	.9682	.9223	.8371	.7032	.5261	.3322	.1631	.0537	.0086	.0002
	14	.9904	.9720	.9304	.8500	.7178	.5346	.3267	.1444	.0352	.0020
	15	.9978	.9923	.9770	.9409	.8668	.7369	.5449	.3159	.1150	.0132
	16	.9996	.9985	.9945	.9830	.9538	.8887	.7631	.5587	.2946	.0665
	17	1.0000	.9998	.9992	.9969	.9896	.9690	.9171	.8015	.5797	.2453
	18	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989	.9958	.9856	.9544	.8649	.6226
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0013	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0059	.0015	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0207	.0064	.0016	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.0577	.0214	.0065	.0015	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	.1316	.0580	.0210	.0060	.0013	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000
	8	.2517	.1308	.0565	.0196	.0051	.0009	.0001	.0000	.0000	.0000
	9	.4119	.2493	.1275	.0532	.0171	.0039	.0006	.0000	.0000	.0000
	10	.5881	.4086	.2447	.1218	.0480	.0139	.0026	.0002	.0000	.0000
	11	.7483	.5857	.4044	.2376	.1133	.0409	.0100	.0013	.0001	.0000
	12	.8684	.7480	.5841	.3990	.2277	.1018	.0321	.0059	.0004	.0000
	13	.9423	.8701	.7500	.5834	.3920	.2142	.0867	.0219	.0024	.0000
	14	.9793	.9447	.8744	.7546	.5836	.3828	.1958	.0673	.0113	.0003
	15	.9941	.9811	.9490	.8818	.7625	.5852	.3704	.1702	.0432	.0026
	16	.9987	.9951	.9840	.9556	.8929	.7748	.5886	.3523	.1330	.0159
	17	.9998	.9991	.9964	.9879	.9645	.9087	.7939	.5951	.3231	.0755
	18	1.0000	.9999	.9995	.9979	.9924	.9757	.9308	.8244	.6083	.2642
	19	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9968	.9885	.9612	.8784	.6415
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

AREAS BAJO LA CURVA NORMAL TIPIFICADA DE 0 a z



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,4999	[illegible]	[illegible]	0,4999	0,4999
3,7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3,8	0,4999	0,4999	[illegible]	[illegible]	0,4999	0,4999	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3,9	0,5000	0,5000	[illegible]	[illegible]	0,5000	0,5000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

UNIDAD I TITULO DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

OBJETIVOS INTERMEDIOS: EL ALUMNO DESCRIBIRA EL COMPORTAMIENTO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CALCULANDO SU DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD.

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA EL ALUMNO.	SUGERENCIAS METODOLOGICAS.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	EVALUACION
1. Distribuciones de Probabilidad. 1.1 Variable Aleatoria.	El alumno: 1.1 Definirá una variable Aleatoria.	1	1.1 De la exposición del profesor tomar apuntes.	1.1 El profesor definirá en clase, el concepto de variable aleatoria.	Libros de consulta para el profesor: Libro 1 Págs. 83 y 84 Libro 2 Págs. 99 y 100 Libro 8 Pág. 151	
	1.1.1 Identificará una variable aleatoria.		1.1.1 Dados varios ejemplos que el profesor dé, identificar y obtener una variable aleatoria.	1.1.1 Dados varios ejercicios el profesor guiará al alumno para identificar y obtener una variable aleatoria.		
1.2 Definición de Distribución de probabilidad.	1.2 Definirá el concepto de Distribución de Probabilidad.	1	1.2 Discutir por equipo el material obtenido previamente de textos de Consulta.	1.2 El profesor habrá dejado de tarea al alumno consultar la definición de Distribución de probabilidad. 1.2.1 El profesor guiará la discusión del alumno a fin de que maneje la definición de la Distribución de Probabilidad.	Libros de consulta para el alumno: Libro 4 Págs. 59,60. Libro 8 Págs.152,153. Libros de consulta para el profesor. Idem Alumno y Libro 1 Págs.84 a 87. Libro 3 Págs.93 y 94.	
1.2.1 Clasificación de Distribuciones por su Variable.	1.2.1 Diferenciará una Distribución de Probabilidad con variable Discreta de una, con --		1.2.1 De la exposición del profesor tomar apuntes.	1.2.1 El profesor explicará a los alumnos que características reune una Distribución Dis--	1.2.1 Libros de Consulta para el profesor:	

(ANEXO III)

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA EL ALUMNO.	SUGERENCIAS METODOLOGICAS.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	EVALUACION
	variable continua.			creta y una Continua, ayudándose para ello con algunos ejemplos sencillos.	Libro 7 Pág. 61 y Págs. 88, 89	
1.2.2 Distribuciones de Probabilidad con Variable Discreta.	1.2.2 Calculará la Distribución de Probabilidad de una Variable Discreta.	1	1.2.2 Con el desarrollo de un ejercicio calcular la distribución de Probabilidad de una Variable Discreta.	1.2.2 El profesor, dado un ejercicio va a guiar a los alumnos para calcular una Distribución de Probabilidad. 1.2.2.1 El profesor planteará ejercicios para que el alumno los resuelva de tarea.		
	1.2.2.1 Calculará la Distribución de Probabilidad de una Variable Discreta, aplicando los conocimientos en Análisis Combinatorio y el concepto de Independencia.		1.2.2.1 Dado un ejercicio desarrollar en equipo el cálculo de una Distribución de Probabilidad, usando combinaciones y aplicando el concepto de Independencia, esto es $P(A \cap B) = P(A).P(B)$	1.2.2.1 El profesor guiará el trabajo del alumno por equipo a fin de obtener una Distribución de Probabilidad, usando combinaciones y aplicando el concepto de Independencia.	1.2.2.1 Libros de consulta para el profesor: Libro 1 Págs.85,87,88, 91 y 92 Libro 4 Pág. 60	

(ANEXO III)

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA EL ALUMNO.	SUGERENCIAS METODOLOGICAS.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	EVALUACION
1.2.3 Media de una Distribución de Probabilidad.	1.2.3 Calculará la Media de una Distribucíon de Probabilidad Discreta.	1	1.2.3 De la exposición del profesor, tomar apuntes.	1.2.3 Dado un problema el profesor guiará al alumno para obtener el valor de la Media de una Distribución de Probabilidad.	1.2.3 Libros de consulta para el profesor: Libro 3 Pág. 99 y de la 104 a 107. Libro 5 Pág. 110. Libro 1 Págs. 97 y 99	
			1.2.3.1 Dado un ejercicio calcular y obtener el valor de la media de una Distribución Discreta.	1.2.3.1 El profesor dará al alumno una serie de ejercicios para resolver en casa.		
1.2.4 Varianza de una Distribución de Probabilidad.	1.2.4 Calculará la Varianza de una Distribución de Probabilidad Discreta.	1	1.2.4 De la exposición del profesor tomar apuntes.	1.2.4 A partir de un ejercicio el profesor guiará al alumno para obtener la varianza de una Distribución de Probabilidad Discreta.	1.2.4 Libros de consulta para el profesor: Libro 1 Págs.100,101. Libro 3 Págs.100,105.	
			1.2.4.1 Dado un ejercicio calcular y obtener el valor de la Varianza de una Distribución Discreta.			

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA EL ALUMNO.	SUGERENCIAS METODOLOGICAS.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	EVALUACION
1.2.5 Graficas de una Distribución de Probabilidad.	1.2.5 Ilustrará gráfica y simbólicamente la Distribución de Probabilidad de una Variable Discreta.	1	1.2.5 De la exposición del profesor tomar apuntes. 1.2.5.1 dado un problema representar gráfica y simbólicamente la Distribución de Probabilidad de una variable discreta.	1.2.5 El profesor dado un Problema guiará a los alumnos a la representación gráfica y simbólica de una Distribución de Probabilidad.		Los alumnos realizarán en casa una Serie de ejercicios planteados por el profesor. En la recepción de éstos el profesor evaluará el grado de conocimientos de los alumnos con respecto a esta Unidad. Se realizará un examen individual de Distribuciones de Probabilidad.

(ANEXO III)

UNIDAD II TITULO DISTRIBUCIONES ESPECIALES.

OBJETIVOS INTERMEDIOS: EL ALUMNO RESOLVERA PROBLEMAS DE DISTRIBUCION BINOMIAL Y DE DISTRIBUCION NORMAL.

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA EL ALUMNO.	SUGERENCIAS METODOLOGICAS.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	EVALUACION
1. Caso discreto Distribución Binominal o de Bernoulli.						
1.1 Característicascas de un experimento Binomial.	1.1 El alumno: Indentificarálas características de un espemento Binomial.	1	1.1 Discutir por equipos el material traído a clase; objeto de una investigación previa por parte de él. 1.1.1 Tomar apuntes de las conclusiones obtenidas en clase.	1.1 El profesor indicará bibliografía a los alumnos, para recopilar información del tema. 1.1.1 El profesor guiará la discución de los equipos a fin de establecer las características propias de un experimento Binomial.	Libros de consulta para el alumno. Libro 9 páginas 103, 104. Libro 2 pág. 119 y 120	
1.2 Definición -- Distribución Binomial.	1.2 El definirá la distribución binomial. 1.2.1 Resolverá problemas		1.2 Tomar apuntes de la exposición del profesor	1.2 El profesor por medio de una exposición, definirá al alumno la distribución Binomial.	Libros de consulta para el profesor: Libro 2 pág. 124. Libro 9 pág. 105 Libro 3 pág. 108, 109	

107

(ANEXO III)

UNIDAD II TITULO DISTRIBUCIONES ESPECIALES

OBJETIVOS INTERMEDIOS: EL ALUMNO RESOLVERA PROBLEMAS DE DISTRIBUCION BINOMIAL Y DE DISTRIBUCION NORMAL.

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA EL ALUMNO.	SUGERENCIAS METODOLOGICAS.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	EVALUACION
	de tipo binomial utilizando la definición de distribución binomial	1	1.2.1 Del trabajo en equipo desarrollar la formula de la distribución binomial.	1.2.1 El profesor guiará el trabajo en equipo de los alumnos, para que resuelvan problemas de tipo binomial.	Libro de consulta para el profesor. libro 3 pág. 124, 125	
				1.2.2 El profesor citará algunos ejemplos, para que el alumno los desarrolle fuera de clase		
	1.2.3 Resolverá problemas de tipo binomial utilizando las tablas.	2	1.2.3 De la exposición del profesor, obtener la solución a problemas de tipo binomial, auxiliandose de las tablas.	1.2.3 Técnicas expositivas del profesor. 1.2.3.1 Se dejara una serie de ejercicios para resolver estra clase.	Libros de consulta para el profesor. Libro 9 pág. 108, 110	De la recepción, de ejercicios que resolvieron estra clase en 1.2.2 y 1.2.3.1 el profesor puede evaluar el grado de conocimientos de el alumno.
1.3 Algunas propiedades de la distribución binomial	1.3 Expresara algunas propiedades de la distribución binomial.	1	1.3 De la exposición del profesor tomar apuntes.	1.3 Usando técnicas expositivas el profesor guiará al alumno en el cálculo de la media y la varianza de una distri	Libros de consulta para el profesor. Libro 2 págs. 128 -129 Libro 3 págs. 116,117, 118.	

UNIDAD II

TITULO DISTRIBUCIONES ESPECIALES

OBJETIVOS INTERMEDIOS: EL ALUMNO RESOLVERA PROBLEMAS DE DISTRIBUCION BINOMIAL Y DE DISTRIBUCION NORMAL.

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA EL ALUMNO.	SUGERENCIAS METODOLOGICAS.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	EVALUACION
	1.3.1 Calculara la media y la varianza de una distribución binomial.		1.3.1 Dado un ejercicio calcular por equipo, el valor de la media y la varianza de una distribución binomial.	bución binomial, aplicando las formulas. $\mu = n.p$ $\sigma = \sqrt{n\ p\ q}$	Libro 8 págs. 169,170, 171, 172.	
1.4 Gráfica de la Distribución Binomial.	1.4. Ilustrará en forma gráfica y simbólica la Distribución Binomial.	1	1.4 De la participación por Equipo Ilustrar gráfica y simbólicamente la Distribución Binomial.	1.4 Dado un ejercicio el profesor guiará la participación de los equipos al encuentro de la gráfica que represente la Distribución Binomial.	Libro de consulta para el profesor: Libro 9 Págs.112,113.	Examen Individual Escrito.
2. Caso Continuo. Distribución Normal.						
2.1 Característica de la Distribución Normal Stándar.	2.1 Expresará las características más importantes de la Distribución Normal Stándar.	1	2.1 Discutir en equipos el material traído a clase, objeto de una investigación previa por parte de él.	2.1 El profesor indicará bibliografía a los alumnos, para recopilar información del tema.	Libros de consulta para el alumno: Libro 4 Págs. 77,98. Libro 9 Págs. 114.	

(ANEXO III)

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA EL ALUMNO.	SUGERENCIAS METODOLOGICAS.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	EVALUACION
			2.1.1 Tomar apuntes de las conclusiones obtenidas en clase.	2.1.1 El profesor guiará la discusión de los equipos a fin de establecer las características propias de la Distribución Normal Stándar.		
	2.1.1 Calculará áreas bajo la curva Normal Stándar.	2	2.1.1 De la exposición del profesor tomar apuntes.	2.1.1 El profesor guiará el trabajo por equipo de los alumnos para enseñarlos a usar la tabla de áreas bajo la curva normal.	Libros de Consulta para el profesor: Libro 9 Págs.115 a 117 Libro 4 Págs. 79 a 84. Libro 8 Págs. 181 a 18[illegible].	
			2.1.2 Dado un ejemplo calcular por equipos, los diferentes casos de áreas bajo la curva Normal Stándar, auxiliándose de la tabla de áreas bajo la Curva Normal Stándar.	2.1.2 Dejará Ejercicios para resolver Extra-clase.		
2.2 Aplicaciones de la Distribución Normal Stándar.	2.2 Utilizará la Curva Normal Stándar para Normalizar una Curva Normal cualquiera.	2	2.2 De la exposición del profesor tomar apuntes.	2.2 El profesor dado el planteamiento de un ejercicio, guiará al alumno en el cálculo de	Libros de Consulta para el profesor: Libro 4 Págs.84 a 89	

(ANEXO III)

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA EL ALUMNO.	SUGERENCIAS METODOLOGICAS.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	EVALUACION
			2.2.1 Dado un ejercicio va a calcular el área bajo una curva Normal.	una distribución Normal cualquiera con $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	Libro 8 Págs.186 a 196 Libro 9 Págs.116 a 121	
				2.2.1 El profesor dejará ejercicios para resolver extra-clase.		De los ejercicios dejados extraclase, el profesor evaluará el grado de conocimientos del grupo.
3. Aproximación de la Distribución Binomial Mediante la Distribución Normal.					Libros de consulta para el profesor:	
3.1 Comportamiento de la gráfica de la Distribución Binomial, cuando n crece y p y q tienden a ser iguales.	3.1 Revisará el comportamiento en la Distribución Binomial variando n, p y q en una gráfica.	1	3.1 Construir una serie de gráficas en las que n crezca y p y q varien tendiendo a ser iguales.	3.1 El profesor guiará la discusión por equipo a fin de concluir que cuando n crece y p y q tienden a ser iguales en una Distribución Bi-	Libro 1 Págs.137,138. Libro 2 Págs.135,137	

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA EL ALUMNO.	SUGERENCIAS METODOLOGICAS.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	EVALUACION
				nomial, ésta tiende a tomar la forma de una curva Normal.		
	3.1.1 Concluirá que la Binomial toma forma de Curva Normal cuando n crece y p y q se aproximan a .5		3.1.1 Discutir por equipo y concluir que cuando n crece, y p y q tienden a ser iguales, la Distribución Binomial tiende a tomar la forma de una Curva Normal.			De los ejercicios dejados extra-clase, se hará una revisión en clase de los resultados obtenidos, y según la profundidad con que los temas hayan sido tratados, se hará una evaluación
3.2 Cálculo de la Distribución Binomial, mediante la Distribución Normal.	3.2 Recordará las propiedades de la Distribución Binomial $\mu = np$ $\sigma = \sqrt{npq}$	1	3.2 Dado un problema de Distribución Binomial, aplicar las propiedades de ésta y resolver como Distribución Normal.	3.2 El profesor guiará al alumno en el cálculo de la Distribución Binomial mediante la distribución Normal.	-	Se realizará un Examen individual y se promediará.

(ANEXO III)

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA EL ALUMNO.	SUGERENCIAS METODOLOGICAS.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	EVALUACION
	3.3 Calculará la Distribución Binomial mediante la Distribución Normal.			3.2.1 Se dejará una serie de ejercicios para reforzar.	Libros de consulta para el profesor: Libros 1 pás. 139. Libro 2 pág. 138 a 142	

(ANEXO III)

B I B L I O G R A F I A

1. Introducción a la Estadística Matemática
Principios y Métodos
Erwin Kreyszig. Ed. Limusa Wiley.

2. Estadística Elemental
Paul G. Hoel
Ed. C.E.C.S.A.

3. Elementos de Probabilidad y Estadística.
Elmer B. Mode
Editorial Reverté Mexicana, S.A.

4. Fundamentos de Estadística en la Investigación Social.
Jack Levin
Ed. Harla.

5. Estadística
Murray R. Spiegel
Ed. Mc Graw Hill. Serie Schaum

6. Métodos Estadísticos Aplicados
N.M. Downie
R.W. Heath
Ed. Harla

7. Introducción a la teoría de la estadística.
Mood Graybill
Ed. Aguilar

8. Estadística Elemental
Robert Johnson
Ed. Trillas

9. Probabilidad y Estadística
Stephen S. Willoughby
Publicaciones Cultural, S.A.

10. Estadística
Taro Yamane
Ed. Harla

11. Probabilidad
Seymour Lipschutz
Ed. Mc Graw Hill. Serie Schaum

12. Probabilidad
Lizarraga Márquez
Colección Educación Media Superior
Matemáticas No. 9
Mc.Graw-Hill

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA EL ALUMNO.	SUGERENCIAS METODOLOGICAS.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	EVALUACION
			2.1.1 Tomar apuntes de las conclusiones obtenidas en clase.	2.1.1 El profesor guiará la discusión de los equipos a fin de establecer las características propias de la Distribución Normal Stándar.		
	2.1.1 Calculará áreas bajo la curva Normal Stándar.	2	2.1.1 De la exposición del profesor tomar apuntes.	2.1.1 El profesor guiará el trabajo por equipo de los alumnos para enseñarlos a usar la tabla de áreas bajo la curva normal.	Libros de Consulta para el profesor: Libro 9 Págs.115 a 117 Libro 4 Págs. 79 a 84. Libro 8 Págs. 181 a 186.	
			2.1.2 Dado un ejemplo calcular por equipos, los diferentes casos de áreas bajo la curva Normal Stándar, auxiliándose de la tabla de áreas bajo la Curva Normal Stándar.	2.1.2 Dejará Ejercicios para resolver Extra-clase.		
2.2 Aplicaciones de la Distribución Normal Stándar.	2.2 Utilizará la Curva Normal Stándar para Normalizar una Curva Normal cualquiera.	2	2.2 De la exposición del profesor tomar apuntes.	2.2 El profesor dado el planteamiento de un ejercicio, guiará al alumno en el cálculo de	Libros de Consulta para el profesor: Libro 4 Págs.84 a 89	

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA EL ALUMNO.	SUGERENCIAS METODOLOGICAS.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	EVALUACION
			2.2.1 Dado un ejercicio va a calcular el área bajo una curva Normal.	una distribución Normal cualquiera con $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	Libro 8 Págs.186 a 196 Libro 9 Págs.116 a 121	
				2.2.1 El profesor dejará ejercicios para resolver extra-clase.		De los ejercicios dejados extraclase, el profesor evaluará el grado de conocimientos del grupo.
3. Aproximación de la Distribución Binomial Mediante la Distribución Normal.					Libros de consulta para el profesor:	
3.1 Comportamiento de la gráfica de la Distribución Binomial, cuando n crece y p y q tienden a ser iguales.	3.1 Revisará el comportamiento en la Distribución Binomial variando n, p y q en una gráfica.	1	3.1 Construir una serie de gráficas en las que n crezca y p y q varien tendiendo a ser iguales.	3.1 El profesor guiará la discusión por equipo a fin de concluir que cuando n crece y p y q tienden a ser iguales en una Distribución Bi-	Libro 1 Págs.137,138. Libro 2 Págs.135,137	

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA EL ALUMNO.	SUGERENCIAS METODOLOGICAS.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	EVALUACION
				nomial, ésta tiende a tomar la forma de una curva Normal.		
	3.1.1 Concluirá que la Binomial toma forma de Curva Normal cuando n crece y p y q se aproximan a .5		3.1.1 Discutir por equipo y concluir que cuando n crece, y p y q tienden a ser iguales, la Distribución Binomial tiende a tomar la forma de una Curva Normal.			De los ejercicios dejados extra-clase, se hará una revisión en clase de los resultados obtenidos, y según la profundidad con que los temas hayan sido tratados, se hará una evaluación
3.2 Cálculo de la Distribución Binomial, mediante la Distribución Normal.	3.2 Recordará las propiedades de la Distribución Binomial $\mu = n p$ $\sigma = \sqrt{n p q}$	1	3.2 Dado un problema de Distribución Binomial, aplicar las propiedades de ésta y resolver como Distribución Normal.	3.2 El profesor guiará al alumno en el cálculo de la Distribución Binomial mediante la distribución Normal.		Se realizará un Examen individual y se promediará.

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA EL ALUMNO.	SUGERENCIAS METODOLOGICAS.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	EVALUACION
	3.3 Calrulará la Distribución Binomial mediante la Distribución Normal.			3.2.1 Se dejará una serie de ejercicios para reforzar.	Libros de consulta para el profesor: Libros 1 pás. 139. Libro 2 pág. 138 a 142	

(ANEXO III)

B I B L I O G R A F I A

1. Introducción a la Estadística Matemática
Principios y Métodos
Erwin Kreyszig. Ed. Limusa Wiley.

2. Estadística Elemental
Paul G. Hoel
Ed. C.E.C.S.A.

3. Elementos de Probabilidad y Estadística.
Elmer B. Mode
Editorial Reverté Mexicana, S.A.

4. Fundamentos de Estadística en la Investigación Social.
Jack Levin
Ed. Harla.

5. Estadística
Murray R. Spiegel
Ed. Mc Graw Hill. Serie Schaum

6. Métodos Estadísticos Aplicados
N.M. Downie
R.W. Heath
Ed. Harla

7. Introducción a la teoría de la estadística.
Mood Graybill
Ed. Aguilar

8. Estadística Elemental
Robert Johnson
Ed. Trillas

9. Probabilidad y Estadística
Stephen S. Willoughby
Publicaciones Cultural, S.A.

10. Estadística
Taro Yamane
Ed. Harla

11. Probabilidad
Seymour Lipschutz
Ed. Mc Graw Hill. Serie Schaum

12. Probabilidad
Lízarraga Márquez
Colección Educación Media Superior
Matemáticas No. 9
Mc.Graw-Hill