UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"

"CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL PARA LOS NUMEROS EXPOREALES"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
LICENCIADO EN ACTUARIA
P R E S E N T A :
GERMAN CARRANCO RIVERA

ACATLAN, EDO. DE MEXICO 1987

INDICE

VNIVERSDAD NACIONAL AVFNºMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"

COORDINACION DEL PROGRAMA DE ACTUARIA
Y MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION.

CAMAC-230/87.

SR. GERMAN CARRANCO RIVERA
Alumno de la carrera de Actuaría.
P r e s e n t e.

De acuerdo a su solicitud presentada con fecha 10 de abril de 1987, me complace notificarle que esta Coordinación tuvo a bien asignarle el siguiente tema de tesis: "Cálculo Diferencial e Integral para los Números Exporeales", el cual se desarrollará como sigue:

Introducción.
I.- Los números exporeales.
II.- Límites y continuidad.
III.- Derivación.
IV.- Integración.
V.- Algunas funciones especiales.
Conclusiones.
Bibliografía.

Asímismo fué designado como Asesor de Tesis el Act.- Gregorio Jesús Nuñez Aguileta.

Ruego a usted tomar nota que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar examen profesional, así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis el título del trabajo realizado. Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la tesis.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Acatlán, Edo. de Méx., a 8 de septiembre de 1987.

ACT. [illegible] GERARDO [illegible]LLAN CAMPOS
Coordinador.

INTRODUCCION

Para la mayoría de las personas matemáticas es sinónimo de "rigor", sin embargo, no hay que dejar a un lado que la ciencia es obra del espíritu humano, destinado más a estudiar que a conocer, más a buscar que a encontrar la verdad, y no es posible concebir que la matemática haya sido construida de manera mecánica y rigurosa de unos cuantos principios combinados por métodos uniformes, más bien, lo que a menudo sucede, es que los principios fueron descubiertos mucho antes de hacerlos rigurosas proposiciones ligadas lógicamente entre sí.

En el caso del sistema de los números reales se buscó un método para construirlos, a partir de los racionales, ya que éstos últimos son un sistema más simple.

La idea fundamental de este método fue tomada por el profesor Daniel Buquet, quien fuera catedrático de la E.N.E.P Acatlán, para construir un campo al que llamó, campo exporeal (léase exporreal), debido a la relación que guarda con la función exponencial, ya que constituye un "isomorfismo" entre el campo real y este nuevo campo, esto significa que ambos tienen propiedades análogas.

Cuando se construyeron los números exporeales se especuló sobre la posibilidad de desarrollar el cálculo diferencial e integral para ellos, creando un problema no muy simple de resolver.

El objetivo fundamental de esta obra es el dar solución al problema planteado anteriormente, aún más, después de leerla no debe ser muy difícil concebir la manera de desarrollar cualquier tipo de matemáticas que tengan como base a los números reales para los números exporeales.

Se ha pretendido que en esta obra se desarrollen de manera rigurosa los conceptos más importantes del cálculo como son límites, derivadas, integrales, etc. aunque en algunos casos se ha preferido sacrificar un poco de rigor para tener acceso a conceptos o ideas, particularmente interesantes o importantes, que de otra manera hubieran requerido desarrollos demasiado extensos o complicados.

Otro importante valor que tiene esta obra es que puede ser utilizada como bibliografía complementaria en cursos de cálculo diferencial e integral, así como en cursos de análisis matemático, ya que el maestro puede dar a conocer los números exporeales a sus alumnos, indicándoles además que por cada teorema que se presenta en el cálculo real, existe un teorema "isomorfo" en el cálculo de los números exporeales, pidiéndoles después de dados algunos teoremas de cálculo real desarrollen los correspondientes para los números exporeales, proporcionándoles este ejercicio una estupenda comprensión de las relaciones que guardan las tesis y las conclusiones de los teoremas.

CAPITULO I

LOS NUMEROS EXPOREALES

1.1 Definición de campo ordenado completo.

El objeto de este capítulo es familiarizar al lector con los conceptos necesarios para poder definir los números exporeales.

1.1.1. Definición. Un campo ordenado completo es un conjunto C en donde están definidas dos operaciones binarias llamadas respectivamente adición y multiplicación , y una relación de orden denotada por " < " y leída " es menor que " que satisfacen los siguientes axiomas:

- **A1** Para todo a y b en C, $a+b \in C$. (Estabilidad o "cerradura").
- **A2** Para todo a y b en C, $a+b = b+a$. (Ley conmutativa).
- **A3** Para todo a,b y c en C, $(a+b)+c=a+(b+c)$. (Ley asociativa).
- **A4** Existe un elemento al que denotamos por " 0 " tal que para todo a en C $a+0=0+a=a$. (La existencia de elemento neutro aditivo).

A5 Para todo $a \in C$ existe un elemento denotado por " $-a$ " tal que $a+(-a)=-a+a=0$. (La existencia del inverso aditivo).

M1 Para todo a y b en C , $a \cdot b \in C$. (Estabilidad).

M2 Para todo a y b en C, $a \cdot b=b \cdot a$. (Ley conmutativa).

M3 Para todo a,b y c en C, $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$. (Ley asociativa).

M4 Existe un elemento al que denotamos por " 1 " , diferente de " 0 " , tal que para todo a en C $a \cdot 1=1 \cdot a=a$. (La existencia del neutro multiplicativo).

M5 Para todo $a \in C$, $a \neq 0$ existe un elemento denotado por "a^{-1}" tal que $a \cdot a^{-1}=a^{-1} \cdot a=1$. (La existencia del inverso multiplicativo).

D Para todo a,b y c en C, $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$ (Ley distributiva).

O1 Para cualquiera dos elementos a y b en C una y sólo una de las siguientes relaciones se verifica:

$a<b$ o $a=b$ o $b<a$ (Ley de tricotomía).

O2 Si $a<b$ y $b<c$ entonces $a<c$ (Ley transitiva)

O3 Si $a<b$ y $c \in C$ entonces $a+c<b+c$.

O4 Si $a<b$ y $0<c$ entonces $a \cdot c <b \cdot c$.

Antes de establecer el último axioma es necesario definir algunos conceptos:

Definición. Un conjunto $S \subset C$ está acotado superiormente si existe un número c tal que, para todo x en S $x \leq c$.

Definición. Un número c se llama supremo de un conjunto S escribimos c=Sup S si:

a) Para todo x en S, $x \leq c$, y

b) Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un x en S tal que $x > c - \varepsilon$.

Axioma L. Un conjunto $S \subset C$ no vacío acotado superiormente tiene supremo en C.

Es por este último axioma por lo que a un campo se le llama completo, y es además el que caracteriza particularmente a los números reales, ya que por ejemplo el conjunto de los números racionales cumple con todos los axiomas enumerados anteriormente excepto el axioma L.

Otro concepto importante, que es necesario definir, es el de Grupo:

1.1.2 Definición. Un conjunto no vacío G se dice que forma un grupo si en G está definida una operación binaria, llamada producto y denotada por "$\cdot$" tal que:

G1 Si a,b en G, $a \cdot b \in G$ (Estabilidad).

G2 Si a,b y c en G, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Ley asociativa).

G3 Existe un elemento $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo a en G (Existencia de elemento identidad).

G4 Para todo $a \in G$ existe un elemento denotado por "a^{-1}" que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (Existencia de inverso multiplicativo.)

Hay una clase muy especial de grupos, y de hecho sólo se tratarán este tipo de grupos en esta obra, se introducen en la siguiente definición:

1.1.3 Definición. Un grupo se dice que es abeliano o conmutativo si para cualquier a y b en G se tiene : $a \cdot b = b \cdot a$.

Obsérvese que un campo constituye un grupo abeliano con respecto a la operación de adición y que los elementos diferentes de cero de un campo constituyen un grupo abeliano con respecto a la operación producto.

1.2 Construcción del campo Exporeal.

En esta sección se presentará un campo que es isomorfo a los números reales que se llamará campo Exporeal.

Primero se dará la siguiente definición de isomorfismo entre campos ordenados completos.

1.2.1 Definición. Dos campos ordenados completos C_1 y C_2 son llamados isomorfos si existe una función biyectiva que cumple con las siguientes propiedades:

a) Si a y b están en C_1 entonces $f(a+b) = f(a) + f(b)$

b) Si a y b están en C_1 entonces $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$

c) Si a y b están en C_1 y $a < b$ entonces $f(a) < f(b)$

Los símbolos $+$ y $*$ son las operaciones definidas en Cz así como la relación de orden $<$.

Discusión heurística.

Supóngase que se tiene un campo E, isomorfo a los números **reales**, en donde la primera operación es precisamente la multiplicación de los números reales entonces la condición a) de la **definición 1.2.1** se tiene de la siguiente manera:

Si a y b están en E entonces $f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$..... (1)

Denótese ahora por $\uparrow$ (flecha) a la segunda operación de E, la condición b) de la definición 1.2.1 implica:

Si a y b están en E entonces $f(a\uparrow b)=f(a)\cdot f(b)$..... (2)

Nótese que (1) se cumple cuando se toma por f a $f(x)=\ln(x)$ y ahora "despejemos" a la operación flecha ($\uparrow$)

$$\ln(a\uparrow b)=\ln(a)\cdot\ln(b)$$

es decir $a\uparrow b=\exp(\ln(a)\cdot\ln(b))$ ..... (3)

Ahora se tienen todas las partes para construir la siguiente definición.

1.2.2 Definición. Sea $E=\{x|\ x\in\mathbb{R}\ \text{y}\ x>0\}$, la cuaterna $(E,\cdot,\uparrow,<)$ constituye los números exporeales donde "$\cdot$" denota el producto natural entre números reales, la operación ($\uparrow$) está definida como en (3) y la relación de orden $<$ es la relación de orden conocida de los números reales.

1.2.1 Teorema. Los números exporeales E, constituyen un campo ordenado completo.

Es evidente que la operación de multiplicación constituye un grupo para E.

Con lo que se tiene, la mitad del teorema; vayamos por la otra mitad.

M1 Si a y b en E entonces $a\uparrow b \in E$, esto se infiere de la definición $a\uparrow b=\exp(\ln(a)\cdot\ln(b))>0$

M2 $a\uparrow b=b\uparrow a$.

En efecto

$$a\uparrow b=\exp(\ln(a)\cdot\ln(b))=\exp(\ln(b)\cdot\ln(a))=b\uparrow a.$$

M3 $(a\uparrow b)\uparrow c=a\uparrow(b\uparrow c)$.

En efecto

$$\begin{aligned}(a\uparrow b)\uparrow c&=\exp(\ln(a)\cdot\ln(b))\uparrow c=\exp((\ln(a)\cdot\ln(b))\cdot\ln(c))\\&=\exp(\ln(a)\cdot\ln(\exp(\ln(b)\cdot\ln(c))))=a\uparrow\exp(\ln(b)\cdot\ln(c))\\&=a\uparrow(b\uparrow c).\end{aligned}$$

M4 Existe e_1 en E tal que $a\uparrow e_1=e_1\uparrow a=a$

En efecto

$a\uparrow e_1=\exp(\ln(a)\cdot\ln(e_1))=a$ implica $\ln(a)\cdot\ln(e_1)=\ln(a)$

es decir $e_1=e$ $\quad a\uparrow e=\exp(\ln(a)\cdot\ln(e))=\exp(\ln(a))=a$.

M5 Para todo $a\neq 1$ existe $a^{-\uparrow}$ (aquí $a^{-\uparrow}$ indica al inverso según la segunda operación del campo), tal que $a\uparrow a^{-\uparrow}=a^{-\uparrow}\uparrow a=e$

En efecto

$a\uparrow a^{-\uparrow}=e$ implica $\exp(\ln(a)\cdot\ln(a^{-\uparrow}))=e$ es decir

$a^{-\uparrow}=\exp(1/\ln(a))$

(Aquí se observa que el elemento neutro de la primera operación no tiene inverso según la segunda operación lo cual es análogo a que el número "0" no tiene inverso multiplicativo en el campo de los números reales).

D Si a, b y c están en E entonces $a\uparrow(b\cdot c)=(a\uparrow b)\cdot(a\uparrow c)$

En efecto

$a\uparrow(b\cdot c)=\exp(\ln(a)\cdot\ln(b\cdot c))=\exp(\ln(a)\cdot(\ln(b)+\ln(c)))$

$=\exp(\ln(a)\cdot\ln(b))\cdot\exp(\ln(a)\cdot\ln(c))$

$=a\uparrow b\cdot a\uparrow c$.

O1 y O2 son evidentes ya que por < de E entendemos < de ℝ.

O3 Equivale al axioma O4 de los números reales.

O4 Si $a<b$ y $1<c$ entonces $a\uparrow c<b\uparrow c$

Si $a<b$ entonces $\ln(a)<\ln(b)$ ya que la función ln es creciente y $\ln(c)>0$ implica $\ln(a)\cdot\ln(c)<\ln(b)\cdot\ln(c)$ es decir $\exp(\ln(a)\cdot\ln(c))<\exp(\ln(b)\cdot\ln(c))$ ya que la función exp es creciente.

L Supóngase que se tiene un conjunto $S\subset E$ acotado superiormente y no vacío.

Sea $A=\{x \text{ en } \mathbb{R} \mid \exp(x)\in S\}$

A es acotado superiormente, ya que como S es acotado superiormente si $z\in S$, existe un $c\in E$ tal que $z \le c$ implica $\ln(z) \le \ln(c)$, y $x=\ln(z) \in A$ porque $\exp(x)=\exp(\ln(z))=z \in S$.

Por lo que A tiene supremo en $\mathbb{R}$ sea este $c=\text{Sup } A$.

Afirmamos que $\exp(c)$ es el supremo de S.

En efecto

a) Si $z \in S$ entonces $x=\ln(z) \le c$ por lo que $\exp(x) \le \exp(c)$

b) Si $\varepsilon > 1$ existe $z \in S$ tal que $z > \exp(c) \cdot \varepsilon^{-1}$

En efecto

Como $c=\text{Sup } A$ existe un x en A tal que si $\varepsilon_1 > 0$ e $x > c-\varepsilon_1$ sea $z=\exp(x)$ y $\varepsilon=\exp(\varepsilon_1) > 1$

Se sigue que

$$\exp(x) > \exp(c) \cdot \exp(-\varepsilon_1) = \exp(c) \cdot (\exp(\varepsilon_1))^{-1}$$
$$= \exp(c) \cdot \varepsilon^{-1}$$

Con $z \in S$.

1.2.1 Corolario. Los números exporeales son isomorfos a los números reales.

Este isomorfismo nos lo proporciona la función $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow E$.

Algunos de los teoremas de cálculo aritmético de los números reales toman una forma peculiar cuando se consideran sus "teoremas análogos" para los números exporeales, a continuación se presentan algunos de ellos.

Teorema. Si a y b están en $\mathbb{R}$ entonces:

$-(a\cdot b)=(-a)\cdot b=a\cdot(-b)$

Para los números exporeales el "teorema análogo" sería:

1.2.2 Teorema. Si a y b están en **E** entonces:

$(a\uparrow b)^{-1}=a^{-1}\uparrow b=a\uparrow b^{-1}$

Demostración $(a\uparrow b)^{-1}=(\exp(\ln(a)\cdot\ln(b)))^{-1}$

$$=\exp(-\ln(a)\cdot\ln(b))$$

$$=\exp(\ln(a^{-1})\cdot\ln(b))=a^{-1}\uparrow b$$

$$=\exp(\ln(a)\cdot(-\ln(b))$$

$$=\exp(\ln(a)\cdot\ln(b^{-1}))=a\uparrow b^{-1} \quad ■$$

Otros casos son:

1.2.3 Teorema. Si $\exp(n)\in$ **E** y $n\in\mathbb{N}$ entonces

$(\exp(n))^{-\uparrow}=\exp(1/n)$

Demostración. $\exp(n)^{-\uparrow}=\exp(1/(\ln(\exp(n)))=\exp(1/n)$ ■

1.2.4 Teorema. Si a, b , exp(a) y exp(b) **están en E entonces**

$\exp(a)\uparrow\exp(b)=\exp(a\cdot b)$

Demostración $\exp(a)\uparrow\exp(b)=(\exp(\ln(\exp(a))\cdot\exp(\ln(\exp(b))))$

$$=\exp(a\cdot b) \quad ■$$

Se analizará ahora algunos subconjuntos de E.

Los expoenteros se construyen de manera similar a los números enteros.

Sea $\mathbb{Z}_e=\{\exp(n)\in$ **E** $\mid n\in\mathbb{Z}\}$ **este** conjunto **se llamará** expoenteros.

Sea $\mathbb{Q}_e=\{p\uparrow q^{-\uparrow} \mid p$ y q están en $\mathbb{Z}_e\}$ este conjunto se le llamará exporacionales.

Como $p \in \mathbb{Z}_e$ entonces $p=\exp(n)$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $q=\exp(m)$ con $m \in \mathbb{Z}$ por lo que $q^{-\uparrow}$ es de la forma $\exp(1/m)$, de modo que:

$$p\uparrow q^{-\uparrow}=\exp(n/m)$$

es decir $\mathbb{Q}_e=\{\exp(n/m) \mid n/m \in \mathbb{Q}\}$

CAPITULO II

LIMITES Y CONTINUIDAD

2.1 Definición de límite.

Como se ha demostrado en el capítulo anterior los números exporeales constituyen un campo isomorfo al de los números reales, por lo cual es posible desarrollar cualquier tipo de matemáticas que utilicen los números reales para los números exporeales, es posible desarrollar el cálculo de funciones de variable exporeal, o teoría de matrices, o quizás una geometría analítica euclidiana exporeal, etc.

Debido al isomorfismo entre los números reales y los números exporeales, cualquier teorema que utilice los primeros tiene un teorema correspondiente "isomorfo" para los segundos, sin embargo es interesante observar en forma concreta algunos teoremas o definiciones, análogas o "isomorfas" para los números exporeales.

Para dar una idea más concreta analicemos en forma más detallada uno de los ejemplos mencionados anteriormente.

Pensemos en el producto cartesiano $E^2=E \times E$ es decir, el conjunto formado por parejas ordenadas de números exporeales es posible desarrollar una geometría en donde se cumple el quinto postulado de Euclides, que sin embargo es bastante diferente a la geometría euclidiana que conocemos.

Cuando utilizamos los números exporeales el producto de pares ordenados de números exporeales podría definirse por analogía a la suma de pares ordenados de números reales de la siguiente manera:

Si $\underline{A}=(a_1,a_2)$ y $\underline{B}=(b_1,b_2)$ en E^2

$$\underline{A}\cdot\underline{B}=(a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2)$$

De forma similar el operar un par ordenado de números exporeales con un escalar sería:

Si $\underline{A}=(a_1,a_2)$ en E^2 y todo t en E

$t\uparrow\underline{A}=t\uparrow(a_1,a_2)=(t\uparrow a_1,t\uparrow a_2)$

El "inverso multiplicativo" de un vector $\underline{A}=(a_1,a_2)$ en E^2 sería $\underline{A}^{-1}=(a_1,a_2)^{-1}=(a_1^{-1},a_2^{-1})$.

Con estos conceptos podemos definir una "línea recta" como el conjunto de puntos del plano E^2 que son de la forma:

$\underline{X}=\underline{A}\cdot t\uparrow(\underline{B}\cdot\underline{A}^{-1})$ donde $\underline{A}$ y $\underline{B}\in E^2$ $t\in E$.

Si dibujamos esta "línea recta" sobre unos ejes coordenados para algunos vectores $\underline{A}$ y $\underline{B}$ tendríamos una curva bastante alejada de lo que entendemos por línea recta, aún más podríamos también dibujar una "línea paralela" a la primera, tan sólo necesitamos un "vector paralelo" al vector $\underline{B}\cdot\underline{A}^{-1}$ es decir de la forma $\underline{C}=t\uparrow(\underline{B}\cdot\underline{A}^{-1})$ y un nuevo punto inicial $\underline{A}'$, de manera que la nueva "línea recta" sería el conjunto de puntos del plano E^2 que son de la forma $\underline{X}=\underline{A}'\cdot t\uparrow\underline{C}$ es decir que en estas circunstancias las "rectas paralelas" serían en realidad curvas.

En los "teoremas isomorfos" de los números exporeales; en este capítulo nos adentraremos en uno de los conceptos más importantes del cálculo, el de límite.

Antes de llegar a esta definición se requerirá definir algunos conceptos así como probar algunos resultados preliminares.

2.1.1 Definición: Se llama valor absoluto de un número exporeal al número obtenido de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 1 \\ a^{-1} & \text{si} \quad a < 1 \end{cases}$$

En lo sucesivo no habrá lugar a confusión ya que no usaremos valores absolutos de números reales.

Nótese que en la definición anterior se pide que $|a|=a$ si $a>1$ se usa uno en lugar de cero, porque uno es el neutro de la primera operación del campo, así mismo, se utiliza "a^{-1}" en lugar de "$-a$" porque se requiere obtener el inverso de la primera operación del campo.

También hacemos notar que no se pidió que $a>0$ en la definición por ser $a \in E$, la misma aclaración vale para lo sucesivo.

Ahora probaremos algunos resultados preliminares.

2.1.1 Lema: Si $a \in E \Rightarrow a \leq |a|$

i) Si $a \geq 1 \Rightarrow |a|=a$

ii) Si $a<1 \Rightarrow |a|=a^{-1}>1>a$ ∎

2.1.2 Lema: Si $a \in E \Rightarrow |a|=|a^{-1}|$

i) Si $a \geq 1 \Rightarrow |a|=a$

y $a^{-1} \leq 1 \Rightarrow |a^{-1}|=(a^{-1})^{-1}=a=|a|$

ii) Si $a<1 \Rightarrow |a|=a^{-1}$

y $a^{-1}>1 \Rightarrow |a^{-1}|=a^{-1}=|a|$ ∎

2.1.3 Lema: Si $a,b \in E \Rightarrow |a \cdot b|=|a| \cdot |b|$

i) Si $a \cdot b>1 \Rightarrow |a \cdot b|=a \cdot b \leq |a| \cdot |b|$

del lema 2.1.1 y del hecho de que si $a,b,c,d \in E$ y $a<b$ y $c<d \Rightarrow a \cdot c<b \cdot d$.

ii) Si $a \cdot b<1 \Rightarrow |a \cdot b|=(a \cdot b)^{-1}=a^{-1} \cdot b^{-1}$

$\Rightarrow |a \cdot b|=a^{-1} \cdot b^{-1} \leq |a^{-1}| \cdot |b^{-1}|=|a| \cdot |b|$ de la aplicación de los lemas 2.1.1 y 2.1.2 ∎

Este último lema será llamado en lo sucesivo desigualdad triangular.

2.1.2 Definición: Una vecindad de un punto $\alpha \in E$ de radio $r>1$ es el conjunto de puntos $x \in E$ tales que $|x \cdot \alpha^{-1}|<r$ y se le denota $V_r(\alpha)$.

2.1.3 Definición: Se le llama vecindad reducida de radio $r>1$ al conjunto de puntos $x \in E$ tales que $1<|x\cdot a^{-1}|<r$.

2.1.4 Definición: Se le llama punto de acumulación de un conjunto D a un punto $x \in D$ para el cual toda vecindad de x contiene otro punto x_1, $x_1 \neq x$ tal que $x_1 \in D$.

Ahora estamos listos para definir la importante noción de límite.

2.1.5 Definición. Sea f una función exporeal de variable exporeal, y sea a un punto de acumulación del dominio de f.

Se dice que f tiene límite cuando x tiende a a, si existe un número L para el cual se cumplen las siguientes condiciones:

Para cada $\varepsilon>1$ $\exists$ $\delta>1$ tal que para todo $x \in Dom(f)$ si

$1<|x\cdot a^{-1}|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)\cdot L^{-1}|<\varepsilon$

Es necesario hacer aquí algunas aclaraciones, los conceptos de vecindad , punto de acumulación, límite y otros más, son definidos para espacios métricos que se definen de la siguiente manera:

2.1.6 Definición: Un conjunto X cuyos elementos llamaremos puntos, se dice que es un espacio métrico si a cada dos puntos p y q de X hay asociado un número real $d(p,q)$ llamado distancia de p a q tal que:

a) $d(p,q)>0$ si $p \neq q$; $d(p,q)=0 \Leftrightarrow p=q$.

b) $d(p,q)=d(q,p)$.

c) $d(p,q)\leq d(p,r)+d(r,p)$ $\forall$ $r \in X$.

Para los números exporeales la forma más natural de definir la "métrica" es: Si $p, q \in E$ $d(p,q)=|p\cdot q^{-1}|$, pero esta "métrica" no hace a los números exporeales un espacio métrico, sin embargo obsérvese las propiedades que está "métrica" tiene.

a) $d(p,q)=|p\cdot q^{-1}|>1$ si $p \neq q$;

$d(p,p)=|p\cdot p^{-1}|=|1|=1$; esto se sigue de la definición que se dió de valor absoluto.

b) $d(p,q)=|p\cdot q^{-1}|=|(p\cdot q^{-1})^{-1}|=|q\cdot p^{-1}|=d(q,p)$ esto se sigue del lema 2.1.2.

c) $d(p,q)=|p\cdot q^{-1}|=|(p\cdot r^{-1}\cdot r\cdot q^{-1}|\leq|p\cdot r^{-1}|\cdot|r\cdot q^{-1}|$ de la desigualdad triangular, y como $|p\cdot r^{-1}|=d(p,r)$ y $|r\cdot q^{-1}|=d(r,q) \Rightarrow d(p,q)\leq d(p,r)\cdot d(r,q)$.

Estas propiedades sugieren la siguiente generalización de espacio métrico:

2.1.7 Definición: Un conjunto X cuyos elementos llamaremos puntos, se dice que es un espacio métrico sobre un campo ordenado completo C, si a cada dos puntos p y q de X hay asociado un número $d(p,q) \in C$ llamado distancia de p a q, tal que:

a) $d(p,q)>e$ si $p \neq q$; $d(p,p)=e$.

b) $d(p,q)=d(q,p)$.

c) $d(p,q)\leq d(p,r)+d(r,q)$ $\forall\, r \in X$.

Donde e es el elemento neutro de la primera operación del campo y $+$ es la primera operación del campo.

2.2 Interpretación intuitiva de límite.

Discusión heurística

Ahora analizaremos la definición de límite cuando x tiende a α , si $\forall\ \varepsilon>1\ \exists\ \delta>1$ tal que si $x \in Dom(f)$ si

$$1<|x\cdot\alpha^{-1}|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)\cdot L^{-1}|<\varepsilon$$

El producto de los números x y α^{-1} se aproxima a uno cuando x es cercano a α y si $x\cdot\alpha^{-1}>1 \Rightarrow |x\cdot\alpha^{-1}|$ estará cercano a uno, además si $x\cdot\alpha^{-1}<1 \Rightarrow (x\cdot\alpha^{-1})^{-1}>1$ y $|x\cdot\alpha^{-1}|>1$, pero como $x\cdot\alpha^{-1}$ es "cercano" a uno, también lo estará $(x\cdot\alpha^{-1})^{-1}$ por lo que $|x\cdot\alpha^{-1}|$ estará cercano a uno pero mayor que uno.

De lo anterior se sigue que una función f exporeal de variable exporeal tiene límite en α si al acercarse al valor de α, los valores de las imágenes se van acercando al valor de L.

Es decir que aún cuando la definición de límite para números exporeales no coincide con la definición de límite en el campo real, la interpretación intuitiva de ambos conceptos es la misma.

Aún más como en el campo real tenemos la operación producto la definición 2.1.5 puede usarse para algunos casos especiales, y después definir los límites de todas las funciones reales de alguna manera artificiosa.

Por ejemplo consideremos la función $f(x)=x^2$ en el campo real definida para $x>0$ y con la definición de valor absoluto tomada como en el campo exporeal.

Sea $\varepsilon>1$ como

$$|x^2\cdot(\alpha^2)^{-1}|=|(x\cdot\alpha^{-1})^2|=|\exp(\ln(x\cdot\alpha^{-1})^2)|=|\exp(2\cdot\ln(x\cdot\alpha^{-1}))|$$

$$=|\exp(\ln(e^2)\cdot\ln(x\cdot\alpha^{-1}))|=|e^2\uparrow(x\cdot\alpha^{-1})|=|e^2|\uparrow|x\cdot\alpha^{-1}|=e^2\uparrow|x\cdot\alpha^{-1}|$$

Sea $\delta=\varepsilon\uparrow(e^2)^{-\uparrow}$

Si $|x\cdot\alpha^{-1}|<\delta=\varepsilon\uparrow(e^2)^{-\uparrow} \Rightarrow e^2\uparrow|x\cdot\alpha^{-1}|\le e^2\uparrow\varepsilon\uparrow(e^2)^{-\uparrow}=\varepsilon$

es decir $|x^2\cdot(\alpha^2)^{-1}|<\varepsilon$.

Con lo que hemos probado que para cada $\varepsilon>1$ $\exists$ $\delta>1$ tal que $\forall$ $x \in$ Dom(f) si

$$1<|x\cdot\alpha^{-1}|<\delta \Rightarrow |f(x)\cdot L^{-1}|<\varepsilon \qquad \blacksquare$$

En éste ejemplo particular se puede observar que es más sencilla la demostración de que el $\lim\limits_{x\to\alpha} x^2=\alpha^2$ utilizando la definición de límite de los números exporeales que la definición ordinaria de límite para el campo real.

2.3 Teoremas referentes a límites.

Para comenzar, se probará la validez de la definición 2.1.5

2.3.1 Teorema. Si f es una función, y L_1, L_2 son límites cuando x tiende a α entonces $L_1=L_2$.

Demostración: $|L_1\cdot L_2^{-1}|=|L_1\cdot f(x)^{-1}\cdot f(x)\cdot L_2^{-1}|$ por la desigualdad triangular $|L_1\cdot L_2^{-1}|\le|L_1\cdot f(x)^{-1}|\cdot|f(x)\cdot L_2^{-1}|$

Sea $\varepsilon>1$ por se L_1 límite cuando x tiende a α $\Rightarrow$ $\exists$ $\delta_1>1$ tal que $\forall$ $x \in$ Dom(f) si

$$1<|x\cdot\alpha^{-1}|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)\cdot L_1^{-1}|<\varepsilon^{1/2}$$

Por la misma razón $\exists\ \delta_2>1$ tal que $\forall\ x \in \mathrm{Dom}(f)$ si

$$1<|x\cdot\alpha^{-1}|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)\cdot L_2^{-1}|<\varepsilon^{1/2}$$

escogiendo $\delta=\min(\delta_1,\delta_2) \Rightarrow |L_1\cdot L_2^{-1}|<\varepsilon^{1/2}\cdot\varepsilon^{1/2}=\varepsilon$

$\forall\ \varepsilon>1$ por lo que $|L_1\cdot L_2^{-1}|=1$ lo que implica $L_1\cdot L_2^{-1}=1$

es decir $L_1=L_2$ ■

2.3.2 Teorema. Si f y g son funciones tales que

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=L_1 \qquad y \qquad \lim_{x\to\alpha} g(x)=L_2$$

y si α es un punto de acumulación del D_{fg} entonces

$$\lim_{x\to\alpha} (f\cdot g)(x)=L_1\cdot L_2$$

Demostración: Sea $\varepsilon>1$. Deseamos demostrar que existe un número $\delta>1$ tal que siempre que x está en el dominio de $f\cdot g$ y $1<|x\cdot\alpha^{-1}|<\delta \Rightarrow |(f\cdot g)(x)\cdot(L_1\cdot L_2^{-1})|<\varepsilon$

Usando ahora la desigualdad del triángulo, tenemos

$$|(f\cdot g)(x)\cdot(L_1\cdot L_2)^{-1}|=|(f(x)\cdot L_1^{-1})\cdot(g(x)\cdot L_2^{-1})|\le$$

$$|f(x)\cdot L_1^{-1}|\cdot|g(x)\cdot L_2^{-1}|$$

Como $\lim_{x\to\alpha} f(x)=L_1$, para cada $\varepsilon^{1/2}$ hay un número $\delta_1>1$ tal que siempre que $x \in D_f$ y $1<|x\cdot\alpha^{-1}|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)\cdot L_1^{-1}|<\varepsilon^{1/2}$.

Además, como $\lim_{x\to\alpha} g(x)=L_2$, hay un número $\delta_2>1$ tal que siempre que $x \in D_g$ y $1<|x\cdot\alpha^{-1}|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)\cdot L_2^{-1}|<\varepsilon^{1/2}$.

Sea δ el mínimo de δ_1 y δ_2. Entonces, siempre que $x \in D_{fg}$ ($D_{fg}=D_f \cap D_g$) y $1<|x\cdot\alpha^{-1}|<\delta$, tenemos

$|f(x)\cdot g(x)\cdot(L_1\cdot L_2^{-1})|\leq|f(x)\cdot L_1^{-1}|\cdot|g(x)\cdot L_2^{-1}|<\varepsilon^{1/2}\cdot\varepsilon^{1/2}=\varepsilon$ ■

Antes de continuar es necesario probar el siguiente lema.

2.3.1 Lema. Si $a,b\in E \Rightarrow |a\uparrow b|=|a|\uparrow|b|$

i) Si $a>1$ y $b>1 \Rightarrow |a|=a$ y $|b|=b$

$|a\uparrow b|=|\exp(\ln(a)\cdot\ln(b))|$ pero $\ln(a)>0$ y $\ln(b)>0$

$\Rightarrow \ln(a)\cdot\ln(b)>0 \Rightarrow \exp(\ln(a)\cdot\ln(b))>\exp(0)=1$ por lo que

$|a\uparrow b|=\exp(\ln(a)\cdot\ln(b))=\exp(\ln(|a|)\cdot\ln(|b|))=|a|\uparrow|b|$

ii) Si $a>1$ y $b<1 \Rightarrow |a|=a$ y $|b|=b^{-1}$

$|a\uparrow b|=|\exp(\ln(a)\cdot\ln(b))|=(\exp(\ln(a)\cdot\ln(b)))^{-1}=\exp(-\ln(a)\cdot\ln(b))$

$=\exp(\ln(a)\cdot\ln(b^{-1}))=\exp(\ln(|a|\cdot\ln(|b|))=|a|\uparrow|b|$

iii) Si $a<1$ y $b>1$ este caso es análogo que el anterior.

iv) Si $a<1$ y $b<1 \Rightarrow |a|=a^{-1}$ y $|b|=b^{-1}$

$|a\uparrow b|=|\exp(\ln(a)\cdot\ln(b))|$ pero $\ln(a)<0$ y $\ln(b)<0 \Rightarrow$

$\ln(a)\cdot\ln(b)>0 \Rightarrow \exp(\ln(a)\cdot\ln(b))>\exp(0)=1$ por lo que

$|a\uparrow b|=|\exp(\ln(a)\cdot\ln(b))|=\exp(-\ln(a)\cdot(-\ln(b))$

$=\exp(\ln(a^{-1})\cdot\ln(b^{-1}))=\exp(\ln(|a|)\cdot\ln(|b|))=|a|\uparrow|b|$ ■

2.3.3 Teorema. Si f y g son funciones tales que

$$\lim_{x\to a} f(x)=L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x)=L_2$$

y si a es un punto de acumulación del $D_{f\uparrow g}$, entonces

$$\lim_{x\to a}(f\uparrow g)(x)=L_1\uparrow L_2$$

Demostración. Sea $\varepsilon>1$. Expresamos $|(f\uparrow g)(x)\cdot(L_1\uparrow L_2)^{-1}|$ en términos de $|f(x)\cdot L_1^{-1}|$ y $|g(x)\cdot L_2^{-1}|$ para demostrar que hay un $\delta>1$ tal que siempre que $x \in D_{f\uparrow g}$ y $1<|x\cdot \alpha^{-1}|<\delta \Rightarrow$

$$|(f\uparrow g)(x)\cdot(L_1\uparrow L_2)^{-1}|<\varepsilon$$

Multiplicando y dividiendo el término $g(x)\cdot L_1$, tenemos

$|(f\uparrow g)(x)\cdot(L_1\uparrow L_2)^{-1}|=|f(x)\uparrow g(x)\cdot(g(x)\uparrow L_1)^{-1}\cdot(g(x)\uparrow L_1)\cdot(L_1\uparrow L_2)^{-1})|$

$\le|g(x)|\uparrow|f(x)\cdot L_1^{-1}|\cdot|L_1|\uparrow|g(x)\cdot L_2|$

Si $|g(x)|$ no se hace "grande" para x próximo a α, podemos hacer $|(f\uparrow g)(x)\cdot(L_1\uparrow L_2)^{-1}|$ tan cercano a uno como queramos haciendo $|f(x)\cdot L_1^{-1}|$ y $|g(x)\cdot L_2^{-1}|$ suficientemente cercanos a uno.

Como $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2 \Rightarrow$ para el número e existe un número $\delta_1>1$ tal que si $x\in D_g$ y $1<|x\cdot\alpha^{-1}|<\delta_1 \Rightarrow |g(x)\cdot L_2^{-1}|<e$

Por la desigualdad del triángulo tenemos:

$|g(x)|=|g(x)\cdot L_2^{-1}\cdot L_2|\le|g(x)\cdot L_2^{-1}|\cdot|L_2|$

$\Rightarrow\ |g(x)|\le|g(x)\cdot L_2^{-1}|\cdot|L_2|<e\cdot|L_2|\quad(x\in D_f$ y $1<|x\cdot\alpha^{-1}|<\delta_1)\ldots(1)$

Existen también números $\delta_2>1$ y $\delta_3>1$ tales que

$|f(x)\cdot L_1^{-1}|<\varepsilon\uparrow(e^2\uparrow(|L_2|\cdot e))^{-1}\quad(x\in D_f$ y $1<|x\cdot\alpha^{-1}|<\delta_2)\ldots(2)$

y

$|g(x)\cdot L_2^{-1}|<\varepsilon\uparrow(e^2\uparrow|L_1|)^{-\uparrow}\quad(x\in D_g$ y $1<|x\cdot\alpha^{-1}|<\delta_3)\ldots\ldots(3)$

Sea $\delta=\text{mín}(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$; entonces, siempre que $x\in D_{f\uparrow g}$ y $1<|x\cdot\alpha^{-1}|<\delta$ las desigualdades (1),(2) y (3) todas, se verifican.

Asi pues

$|(f\uparrow g)(x)\cdot(L_1\uparrow L_2)^{-1}|\le|g(x)|\uparrow|f(x)\cdot L_1^{-1}|\cdot|L_1|\uparrow|g(x)\cdot L_2^{-1}|$

$$<|L_2|\cdot e\uparrow(e^2\uparrow(|L_2|\cdot e))^{-\uparrow}\uparrow\varepsilon\cdot|L_1|\uparrow(e^2\uparrow|L_1|)^{-\uparrow}\uparrow\varepsilon$$

$$=|L_2|\cdot e\uparrow(|L_2|\cdot e)^{-\uparrow}\uparrow(e^2)^{-\uparrow}\uparrow\varepsilon\cdot|L_1|\uparrow|L_1|^{-\uparrow}\uparrow(e^2)^{-\uparrow}\uparrow\varepsilon$$

$$<((e^2)^{-\uparrow}\uparrow\varepsilon)\cdot((e^2)^{-\uparrow}\uparrow\varepsilon)$$

$$=\varepsilon^{1/2}\cdot\varepsilon^{1/2}=\varepsilon \qquad \blacksquare$$

CAPITULO III

Derivación de funciones de variable exporeal

3.1 Definición de derivada

El concepto de derivación es quizás uno de los más importantes en el cálculo, junto con el concepto de integración revolucionaron las matemáticas del siglo XVII. Si bien es verdad que el concepto de función es fundamental, que no se puede hacer nada sín límites o continuidad, y que el axioma del supremo es esencial, todo lo que hemos hecho hasta ahora ha sido una preparación.

Las ideas que están detrás de los conceptos de derivación e integración son verdaderamente luminosas, y hay conexión íntima entre estos conceptos e ideas físicas. Sin embargo por las características de los números exporeales sería realmente muy difícil, tratar de sugerir dichos conceptos por medio de una interpretación física, por lo que se decidió tratar los problemas desde un punto de vista matemático preciso, porque así al mismo tiempo que logramos definir los conceptos podemos dar los fundamentos matemáticos.

Antes de definir la derivada de una función de variable exporeal recordemos como se define la derivada de una función de variable real.

Definición.

La función f es derivable en a si

$$\lim_{h \to o} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{existe}$$

Entonces decimos que f es derivable en a y designamos por $f'(a)$ a la derivada de f en a.

Sabemos que el concepto de derivación surge, del hecho de encontrar la tangente a una curva en un punto dado, pero como no conocemos la geometría para los números exporeales trataremos de definir la derivada de manera análoga a la presentada anteriormente.

Vamos a analizar la definición anterior desde el punto de vista de la relación con las operaciones del campo.

Primero se opera al número a con el número h con la primera operación del campo y se obtiene la imagen según f del resultado, es decir $f(a+h)$.

Después a $f(a+h)$ se le opera con el inverso según la primera operación del campo con $f(a)$, es decir $f(a+h)-f(a)$.

A continuación a $f(a+h)-f(a)$ se le opera con el inverso según la segunda operación del campo con h es decir:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Y finalmente se hace tender a h al neutro según la primera operación del campo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Seguiremos los pasos anteriores pero ahora tomando las operaciones del campo exporeal:

Primero se opera al número a con el número h con la primera operación del campo y se obtiene la imagen según f del resultado, es decir $f(a\cdot h)$.

Después a $f(a\cdot h)$ se le opera con el inverso según la primera operación del campo con $f(a)$, es decir:

$$f(a\cdot h)\cdot f^{-1}(a)$$

A continuación a $f(a\cdot h)\cdot f^{-1}(a)$ se le opera con el inverso según la segunda operación del campo, con h es decir:

$$[f(a\cdot h)\cdot f^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow}$$

Y finalmente se hace tender a h al neutro según la primera operación del campo:

$$\lim_{h \to 1} [f(a\cdot h)\cdot f^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow}$$

Con lo que hemos construido la siguiente definición:

3.1.1 Definición. **La función f, de variable exporeal, es derivable en a si** $\lim_{h \to 1} [f(a\cdot h)\cdot f^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow}$ **existe.**

En este caso el límite se designa por $f'(a)$ y recibe el nombre de derivada de f en a.

Un comentario a esta definición se refiere a la notación. El símbolo $f'(a)$ recuerda ciertamente la notación funcional. En efecto, para cualquier función f designamos por f' a la función cuyo dominio es el conjunto de todos los números a donde f es derivable.

En lo sucesivo utilizaremos la notación de Leibniz $\frac{d}{dx}$ para designar la derivada en el sentido real.

Consideremos algunos ejemplos sencillos:

Sea f la función identidad $f(x)=x$

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 1} [f(a\cdot h)\cdot f^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow} \\
&= \lim_{h\to 1} (a\cdot h\cdot a^{-1})\uparrow h^{-\uparrow} \\
&= \lim_{h\to 1} h\uparrow h^{-\uparrow} \\
&= \lim_{h\to 1} e=e
\end{aligned}
$$

Este resultado es el que se esperaba ya que la derivada de la función $f(x)=x$ es $\frac{d}{dx}(x)=1$ donde 1 es el neutro según la segunda operación del campo real.

Sea ahora $f(x)=x\uparrow x$

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 1} [f(a\cdot h)\cdot f^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow} \\
&= \lim_{h\to 1} [(a\cdot h)\uparrow(a\cdot h)\cdot(a\uparrow a)^{-1}]\uparrow h^{-\uparrow}
\end{aligned}
$$

$$=\lim_{h\to 1} \left[(a\uparrow a)\cdot(a\cdot h)^{2}\cdot(h\uparrow h)\cdot(a\uparrow a)^{-1}\right]\uparrow h^{-\uparrow}$$

$$=\lim_{h\to 1} \left[(a\uparrow h)\uparrow h^{-\uparrow}\right]\cdot\left[(a\uparrow h)\uparrow h^{-\uparrow}\right]\cdot\left[(h\uparrow h)\uparrow h^{-\uparrow}\right]$$

$$=\lim_{h\to 1} (a\uparrow e)\cdot(a\uparrow e)\cdot(h\uparrow e)$$

$$=\lim_{h\to 1} a^{2}\cdot h$$

$$=a^{2}$$

Este resultado es el que se esperaba ya que la derivada de $f(x)=x^{2}$ es $\frac{d}{dx}f(x)=2x=x+x$, y la función análoga en los números exporeales es $f(x)=x\uparrow x$ y su derivada es $f(x)=x^{2}=x\cdot x$.

La expresión $\frac{d}{dx}f(x)=2x=x+x$ sugiere que en el campo exporeal la derivada de $f(x)=x\uparrow x$ sea $f'(x)=e^{2}\uparrow x$ ya que el número e^{2} es el número análogo a 2 y esta operado con x según la segunda operación del campo. Probemos esto:

$$\begin{aligned} e^{2}\uparrow x &= \exp(\ln(e^{2})\cdot\ln(x)) \\ &= \exp(2\cdot\ln(x)) \\ &= \exp(\ln(x^{2})) \\ &= x^{2} \end{aligned}$$

Lo que verifica la hipótesis que habíamos supuesto.

Consideremos ahora la función $f(x)=x\uparrow x\uparrow x$ que escribimos como $f(x)=x^{3\uparrow}$.

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 1} [f(a\cdot h)\cdot f^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow} \\
&= \lim_{h \to 1} [((a\cdot h)\uparrow(a\cdot h)\uparrow(a\cdot h))\cdot(a\uparrow a\uparrow a)^{-1}]\uparrow h^{-\uparrow} \\
&= \lim_{h \to 1} [(a\uparrow a\uparrow a)\cdot(a\uparrow a\uparrow h)^{3}\cdot(a\uparrow h\uparrow h)^{3}\cdot(h\uparrow h\uparrow h)\cdot(a\uparrow a\uparrow a)^{-1}]\uparrow h^{-\uparrow} \\
&= \lim_{h \to 1} (a\uparrow a)^{3}\cdot(a\uparrow h)^{3}\cdot(h\uparrow h) \\
&= (a\uparrow a)^{3}\cdot(a\uparrow 1)\cdot(1\uparrow 1) \\
&= (a\uparrow a)\cdot \exp(\ln(a)\cdot\ln(1))\cdot\exp(\ln(1)\cdot\ln(1)) \\
&= (a\uparrow a)^{3}
\end{aligned}
$$

Nuevamente tenemos que:

$$
\begin{aligned}
(a\uparrow a)^{3} &= e^{3}\uparrow a^{2\uparrow} \\
e^{3}\uparrow a^{2\uparrow} &= e^{3}\uparrow a\uparrow a = e^{3\cdot \ln(a)}\uparrow a \\
&= e^{\ln(a^{3})}\uparrow a = a^{3}\uparrow a \\
&= (a\uparrow a)\cdot(a\uparrow a)\cdot(a\uparrow a) \\
&= (a\uparrow a)^{3}
\end{aligned}
$$

De aquí podemos hacer la conjetura de que la derivada de la función $f(x)=x^{n\uparrow}$ es igual a $f'(x)=e^{n}\uparrow x^{(n-1)\uparrow}$ $n>1$.

Dejemos al lector la prueba por inducción, de que esto es en realidad así.

Ahora que tenemos definida la derivada para funciones exporeales podemos preguntarnos cual es la función que es análoga a $f(x)=e^{x}$ para los números exporeales es decir que función cumple con que $f'(x)=f(x)$.

Sería un poco frustrante que nos tuviéramos que esperar a desarrollar una teoría de ecuaciones diferenciales para poder resolver este problema, así que en este ejemplo utilizaremos la intuición, y no seremos formales matemáticamente.

Consideremos en el campo real $f(x)=e^x$ y sigamos el procedimiento de derivación:

$$\frac{d}{d\alpha} f(\alpha)=\lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

$$=\lim_{h \to 0} \frac{e^{\alpha+h}-e^{\alpha}}{h}$$

$$=\lim_{h \to 0} \frac{e^{\alpha}e^{h}-e^{\alpha}}{h}$$

$$=e^{\alpha}\lim_{h \to 0} \frac{e^{h}-1}{h}$$

Puesto que ya sabemos que la derivada es e^{α} obtenemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{h}-1}{h}=1$$

Aquí la propiedad importante que utilizamos de e^x es que $e^{x+y}=e^x e^y$ es decir $f(x+y)=f(x)f(y)$.

¿Qué función cumple con la propiedad análoga de $f(x\cdot y)=f(x)\uparrow f(y)$?

Con un poco de familiaridad con las operaciones de los números exporeales, se sabe que:

$$e^{x\cdot y}=e^x\uparrow e^y$$

Efectivamente $e^x\uparrow e^y=\exp(\ln(e^x)\cdot\ln(e^y))=e^{x\cdot y}$

Sigamos ahora el procedimiento de derivación:

$$f'(a)=\lim_{h\to 1}\ [f(a\cdot h)\cdot f^{-1}(a)]\uparrow h^{-1}$$

$$=\lim_{h\to 1}\ [e^{a\cdot h}\cdot e^{-a}]\uparrow h^{-1}$$

$$=\lim_{h\to 1}\ e^{a\cdot(h-1)}\uparrow e^{1/\ln(h)}$$

$$=\lim_{h\to 1}\ e^{a\cdot(h-1)/\ln(h)}$$

Aquí abusaremos un poco de la intuición y obtendremos el $\lim_{h\to 1}(h-1)/\ln(h)$ como si fuera una función de variable real, porque después de todo como se hizo mención cuando se definieron los límites, la idea intuitiva de límite no cambia.

$$\lim_{h\to 1}\ (h-1)/\ln(h)=\lim_{h\to 1}\ 1/(1/h)=1$$

Aquí aplicamos la regla de L'hôpital.

Con lo que hemos llegado al sorprendente resultado de que $f'(x)=e^{x}$.

3.2 Diferenciación

El proceso de hallar la derivada de una función recibe el nombre de derivación. Para obtener la derivada de alguna función no es siempre necesario tener que recurrir a la definición. Para hacer esto posible se necesitan establecer algunos teoremas que nos ofrecerán un proceso mecánico para derivar una clase muy amplia de funciones.

3.2.1 Teorema. Si f es una función constante, $f(x)=c$, entonces:

$$f'(a)=1 \text{ para todos los números } a.$$

Demostración:

$$f'(a)=\lim_{h\to 1}[f(a\cdot h)\cdot f^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow}=\lim_{h\to 1}[c\cdot c^{-1}]\uparrow e^{1/\ln(h)}$$

$$\lim_{h\to 1} 1\uparrow e=\lim_{h\to 1} 1=1 \qquad \blacksquare$$

3.2.2 Teorema. Si f es la función identidad, $f(x)=x$, entonces $f'(x)=e$.

Este teorema fue probado anteriormente. $\blacksquare$

3.2.3 Teorema. Si f y g son derivables en a, entonces $f\cdot g$ es también derivable en a, y

$$(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g'(a)$$

Demostración:

$$(f\cdot g)'(a)=\lim_{h\to 1}[(f\cdot g)(a\cdot h)\cdot(f\cdot g)^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow}$$

$$=\lim_{h\to 1}[f(a\cdot h)\cdot g(a\cdot h)\cdot f^{-1}(a)\cdot g^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow}$$

$$=\lim_{h\to 1}[f(a\cdot h)\cdot f^{-1}(a)\cdot g(a\cdot h)\cdot g^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow}$$

$$=\lim_{h\to 1}[f(a\cdot h)\cdot f^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow}\cdot\lim[g(a\cdot h)\cdot g^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow}$$

$$=f'(a)\cdot g'(a) \qquad \blacksquare$$

3.2.4 Teorema. Si f y g son derivables en a, entonces $f\uparrow g$ es también derivable en a, y

$$(f\uparrow g)(a)=f'(a)\uparrow g(a)\cdot f(a)\uparrow g'(a)$$

Demostración.

$$(f\uparrow g)'(a)=\lim_{h\to 1}\ [(f\uparrow g)(a\cdot h)\cdot(f\uparrow g)^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow}$$

$$=\lim_{h\to 1}\ [f(a\cdot h)\uparrow g(a\cdot h)\cdot(f(a)\uparrow g(a))^{-1}]\uparrow h^{-\uparrow}$$

$$=\lim_{h\to 1}\ [f(a\cdot h)\uparrow g(a\cdot h)\cdot(f(a\cdot h)\uparrow g(a))^{-1}$$

$$\cdot(f(a\cdot h)\uparrow g(a))\cdot(f(a)\uparrow g(a))^{-1}]\uparrow h^{-\uparrow}$$

$$=\lim_{h\to 1}\ (f(a\cdot h)\uparrow[g(a\cdot h)\cdot g^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow})\cdot$$

$$\cdot[f(a\cdot h)\cdot f^{-1}(a)]\uparrow g(a)\uparrow h^{-\uparrow}$$

$$=\lim_{h\to 1}\ f(a\cdot h)\uparrow\lim_{h\to 1}\ [g(a\cdot h)\cdot g^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow}\cdot$$

$$\cdot\lim_{h\to 1}\ [f(a\cdot h)\cdot f^{-1}(a)]\uparrow h^{-\uparrow}\uparrow\lim_{h\to 1}\ g(a)$$

$$=f(a)\uparrow g'(a)\cdot f(a)\uparrow g'(a) \qquad \blacksquare$$

Obsérvese que se aplicó el hecho de que $\lim_{h\to 1} f(a\cdot h)=f(a)$ esto se debe al hecho de que si una función es derivable entonces es continua.

Un caso especial del teorema anterior se simplifica considerablemente.

3.2.5 Teorema. Si $g(x)=c\uparrow f(x)$ y f es derivable en a, entonces g es derivable es a, y

$$g'(a)=c\uparrow f'(a).$$

Demostración Si $h(x)=c$, de modo que $g=h\uparrow f$, entonces por el teorema anterior

$$\begin{aligned} g'(a)&=(h\uparrow f)'(a)\\ &=h(a)\uparrow f'(a)\cdot h'(a)\uparrow f(a)\\ &=c\uparrow f'(a)\cdot 1\uparrow f(a)\\ &=c\uparrow f'(a)\cdot \exp(\ln(1)\cdot \ln(f(a)))\\ &=c\uparrow f'(a) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

3.2.6 Teorema. Si g es derivable en a, y $g(a)\neq 1$, entonces $g^{-\uparrow}$ es derivable en a y

$$(g^{-\uparrow})'(a)=(g'(a)\uparrow(g(a))^{2\uparrow})^{-\uparrow})^{-1}$$

Demostración.

$$\lim_{h\to 1}\ [(g^{-\uparrow})(a\cdot h)\cdot(g^{-\uparrow}(a))^{-1}]\uparrow h^{-\uparrow}$$

$$=\lim_{h\to 1}\ [(g^{-\uparrow}(a\cdot h)\uparrow g(a)\uparrow g^{-\uparrow}(a))\cdot((g^{-\uparrow}(a))^{-1}\uparrow g(a\cdot h)\uparrow g^{-\uparrow}(a\cdot h))]\uparrow h^{-\uparrow}$$

$$=\lim_{h\to 1}\ [g(a)\cdot g^{-1}(a\cdot h)]\uparrow g(a)^{-\uparrow}\uparrow g(a\cdot h)^{-\uparrow}\uparrow h^{-\uparrow}$$

$$=\lim_{h\to 1}\ (g(a\cdot h)\cdot g^{-1}(a))^{-1}\uparrow h^{-\uparrow}\uparrow\lim_{h\to 1}\ g(a)^{-\uparrow}\uparrow g(a\cdot h)^{-\uparrow}$$

$$=g'(a)^{-1}\uparrow g(a)^{-\uparrow}\uparrow g(a)^{-\uparrow}$$

$$=g'(a)^{-1}\uparrow g(a)^{-\uparrow}\uparrow g(a)^{-\uparrow}$$

$$=\exp(\ln(g'(a)^{-1})\cdot\ln(g(a)^{-2\uparrow}))$$

$=\exp(-\ln(g'(a)\cdot\ln(g(a)^{-2\uparrow}))$

$=(\exp(\ln(g'(a)\cdot\ln(g(a)^{-2\uparrow}))))^{-1}$

$=(g'(a)\uparrow g(a)^{-2\uparrow})^{-1}$ ■

3.2.7 Teorema. Si f y g son derivables en a y $g(a)\neq 1$ entonces $f\uparrow g^{-\uparrow}$ es derivable en a y

$$(f\uparrow g^{-\uparrow})'(a)=[g(a)\uparrow f'(a)\cdot(f(a)\uparrow g'(a))^{-1}]\uparrow g(a)^{-2\uparrow}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}(f\uparrow g^{-\uparrow})'(a)&=f'(a)\uparrow g^{-\uparrow}(a)\cdot f(a)\uparrow(g^{-\uparrow})'(a)\\&=f'(a)\uparrow g^{-\uparrow}(a)\cdot f(a)\uparrow(g'(a)\uparrow g(a)^{-2\uparrow})\uparrow e^{-1}\\&=f'(a)\uparrow g(a)\uparrow g^{-2\uparrow}(a)\cdot f(a)\uparrow(g'(a))^{-1}\uparrow g(a)^{-2\uparrow}\\&=[f'(a)\uparrow g(a)\cdot(f(a)\uparrow g'(a))^{-1}]\uparrow g(a)^{-2\uparrow}\end{aligned}$$ ■

3.2.8 Teorema. Regla de la cadena.

Si g es derivable en a, y f es derivable en $g(a)$, entonces $f\circ g$ es derivable en a, y

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\uparrow g'(a)$$

Demostración. Defínase la función ϕ como sigue.

$$\phi(h)=\begin{cases}[f(g(a\cdot h)\cdot(f(g(a)))^{-1}]\uparrow(g(a\cdot h)\cdot g(a)^{-1})^{-\uparrow}, & \text{si } g(a\cdot h)\cdot g(a)\neq 1\\ f'(g(a)) & \text{si } g(a\cdot h)=g(a)\end{cases}$$

Es claro intuitivamete que ϕ es continua en 1; cuando h es cercano a 1, $g(a\cdot h)\cdot g^{-1}(a)$ también lo es, de modo que si $g(a\cdot h)\cdot g^{-1}(a)$ no es 1, entonces $\phi(h)$ estará próximo a $f'(g(a))$; y si es 1, entonces $\phi(h)$ es en realidad igual a $f'(g(a))$, lo cual todavía es mejor. Puesto que la continuidad de ϕ es el punto crucial de toda la demostración, vamos a ofrecer una traducción minuciosa de este argumento intuitivo.

Sabemos que f es derivable en $g(a)$. Esto significa que

$$\lim_{k \to 1} [f(g(a)\cdot k)\cdot f(g(a))^{-1}]\uparrow k^{-\uparrow}=f'(g(a))$$

Así pues, si $\varepsilon>1$ existe algún $\delta'>1$ tal que, para todo k, si $1<|k|<\delta'$, $\Rightarrow$ $|[(f(g(a)\cdot k)\cdot f(g(a))^{-1}]\uparrow k^{-\uparrow})\cdot(f'(g(a)))^{-1}|<\varepsilon$. ..(1)

Ahora bien, g es derivable en a y por lo tanto continua en a de modo que existe un $\delta>1$ tal que ,para todo h,

Si $|h|<\delta$ entonces $|g(a\cdot h)\cdot g(a)|<\delta'$ ...(2)

Consideremos ahora un h cualquiera con $|h|<\delta$.

Si $k=g(a\cdot h)\cdot g^{-1}(a) \neq 0$ entonces se sigue de (2) que $|k|<\delta'$ y por lo tanto de (1) que

$$|\phi(h)\cdot(f'(g(a)))^{-1}|<\varepsilon$$

Por otra parte, si $g(a\cdot h)=g(a)$, entonces $\phi(h)=f'(g(a))$, de modo que ciertamente se cumple que

$$|\phi(h)\cdot(f'(g(a))^{-1}|=1<\varepsilon$$

Hemos demostrado por lo tanto que

$$\lim_{h \to 1} \phi(h)=f'(g(a))$$

de modo que ϕ es continua en 1.

El resto de la demostración es fácil. Si $h \neq 1$ entonces tenemos

$$[f(g(a\cdot h))\cdot f(g(a))^{-1}]\uparrow h^{-\uparrow}=\phi(h)\uparrow(g(a\cdot h)\cdot g^{-1}(a))\uparrow h^{-\uparrow}$$

aún cuando pueda ser $g(a\cdot h)=g(a)$ (porque en tal caso ambos miembros son 1). Por lo tanto

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(a)&=\lim_{h\to 1}\ [f(g(a\cdot h))\cdot f(g(a))^{-1}]\uparrow h^{-\uparrow}\\ &=\lim_{h\to 1}\ \phi(h)\uparrow\lim_{h\to 1}\ [g(a\cdot h)\cdot g(a)^{-1}]\uparrow h^{-\uparrow}\\ &=f'(g(a))\uparrow g'(a)\end{aligned}$$ ∎

3.3 Aplicaciones de la derivada.

Una vez que se ha construido la definición de derivada y podemos derivar una amplia gama de funciones en el campo exporeal, es nesesario tratar de ver si es posible tener teoremas análogos a los del cálculo real para la obtención de máximos y mínimos de una función de variable exporeal.

Empezaremos definiendo qué se debe entender por un máximo de una función:

3.3.1 Definición. Sea f una función de variable exporeal y A un conjunto de números contenido en el dominio de f, un punto $x \in A$ se dice que es un punto *máximo* de f sobre A si $f(x)\geq f(y)$ para todo $y \in A$.

En la definición anterior de valor máximo de f sobre A puede ser $f(x)$ para varios x distintos, es decir una función f puede tener distintos puntos máximos sobre A , aunque tener a lo sumo un valor máximo.

En el caso de que A sea el intervalo cerrado [a,b] si f es continua entonces tiene efectivamente un valor máximo sobre [a,b].

A continuación enunciaremos un teorema que relaciona un punto máximo con la derivada de una función.

3.3.1 Teorema. Sea f una función definida sobre el intervalo (a,b). Si x es un máximo (o mínimo) para f sobre (a,b), y f es derivable en x, entonces f'(x)=1.(La definición de mínimo es análoga a la de máximo en x.

Si h es un número cualquiera tal que $x \cdot h$ está en (a,b) entonces

$$f(x) \geq f(x \cdot h) \text{ por hipótesis}$$

Esto implica

$$f^{-1}(x) \cdot f(x) \geq f^{-1}(x) \cdot f(x \cdot h)$$ (Recuerde el lector que los exporeales son positivos)

$$f(x \cdot h) \cdot f^{-1}(x) \leq 1$$

Así pues, si $h>1$ tenemos $\ln(h)>0 \Rightarrow 1/\ln(h)>0$

$h^{-\uparrow} = \exp(1/\ln(h)) > 1 \quad \Rightarrow \quad [f(x \cdot h) \cdot f(x)^{-1}]\uparrow h^{-\uparrow} \leq 1$

y en consecuencia

$$\lim_{h \to 1^{+}} [f(x \cdot h) \cdot f(x)^{-1}]\uparrow h^{-\uparrow} \leq 1$$

Por otra parte, si $h<1$ tenemos

$$[f(x \cdot h) \cdot f(x)^{-1}]\uparrow h^{-\uparrow} \geq 1$$

de modo que $$\lim_{h \to 1^{-}} [f(x \cdot h) \cdot f(x) \;]\uparrow h^{-\uparrow} \geq 1$$

Por hipótesis, f es derivable en x, de modo que estos límites deben se iguales entre sí y a $f'(x)$. esto significa que

$$f'(x) \geq 1 \quad y \quad f'(x) \leq 1$$

de lo cual se sigue que $f'(x)=1$ ■

Para obtener una versión más fuerte del teorema anterior procedemos a dar la siguiente definición

3.3.2 Definición. Sea f una función de variable exporeal, y A un conjunto de números contenido en el dominio de f. Un punto de A es un punto máximo (mínimo) local de f sobre A si existe algún $\delta > 1$ tal que x es un punto máximo (mínimo) de f sobre $A \cap (x \cdot \delta^{-1}, x \cdot \delta)$.

3.3.2 Teorema. Si está definida f sobre (a,b) y tiene un máximo (o mínimo) local en x, y f es derivable en x, entonces $f'(x)=1$.

Demostración. Es una fácil aplicación del teorema 3.3.1.

Debido a la importancia que tienen los puntos en donde la derivada es igual a 1 se da la siguiente definición:

3.3.3 Definición. Se llama punto singular de una función f a todo número x tal que

$$f'(x)=1$$

El número $f(x)$ mismo recibe nombre de valor singular de f.

Detengámonos un momento para dar un ejemplo:

Sea $f(x)=x\uparrow x$ hallar los puntos críticos de f.

$$f'(x)=e^{2}\uparrow x$$

igualando $f'(x)$ a uno tenemos

$$e^2\uparrow x=1$$

$$((e^2)^{-\uparrow}\uparrow e^2)\uparrow x=(e^2)^{-\uparrow}\uparrow 1$$

$$x=1$$

Con lo que $x=1$ es el único punto crítico de $f(x)=x\uparrow x$.

Tratamos este mismo ejemplo desde el punto de vista real:

Sea $f(x)=x\uparrow x=\exp(\ln(x)^2)$ $\qquad x>0$

$\frac{d}{dx} f(x)=\exp(\ln(x)^2)2\ln(x)(1/x)$

igualando a cero esta expresión tenemos

$$2\exp(\ln(x)^2)\ln(x)(1/x)=0$$

como ni $\exp(\ln(x)^2)$ ni $1/x$ pueden ser iguales a cero entonces $\ln(x)=0 \Rightarrow x=1$.

Con lo que $x=1$ es el único punto crítico de $f(x)=\exp(\ln(x)^2)$!.

Este ejemplo muestra la posibilidad de que para algunas funciones quizás es posible minimizarlas con mayor facilidad en el campo exporeal o en algún otro campo isomorfo a los números reales.

Continuaremos ahora la teoria y establezcamos el teorema de Rolle.

3.3.3 Teorema (de Rolle). Si f es continua sobre $[a,b]$ y es derivable sobre (a,b), y $f(a)=f(b)$, entonces existe un número x en (a,b) tal que $f^{*}(x)=1$.

Demostración. De la continuidad de f sobre $[a,b]$ se deduce que f tiene un valor máximo y uno mínimo sobre $[a,b]$. Supongamos en primer lugar que el valor máximo se presenta en un punto x de (a,b). Entonces, según el teorema 3.3.1, $f^{\bullet}(x)=1$ y la demostración está hecha.

Supongamos ahora que el valor mínimo se presenta, en un punto x de (a,b). Entonces, otra vez $f^{\bullet}(x)=1$ según el teorema 3.3.1.

Supongamos finalmente que los valores máximo y mínimo se presentan ambos en los extremos. Puesto que $f(a)=f(b)$, los valores máximo y mínimo son iguales, de modo que f es una función constante, y para una función constante se puede elegir cualquiera x de (a,b). ∎

3.3.4 Teorema. **(Teorema del valor medio).**

Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existe un número x en (a,b) tal que

$$f^{\bullet}(x)=[f(b)f(a)^{-1}]\uparrow(b\cdot a^{-1})^{-\uparrow}$$

Demostración.

Sea $h(x)=f(x)\cdot([f(b)\cdot f(a)^{-1}]\uparrow(b\cdot a^{-1})^{-\uparrow}\uparrow(x\cdot a^{-1}))^{-1}$

Evidentemente, h es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y

$$\begin{aligned}h(a)&=f(a)\cdot([f(b)\cdot f(a)^{-1}]\uparrow(b\cdot a^{-1})^{-\uparrow}\uparrow 1)^{-1}\\&=f(a)\cdot 1=f(a)\\h(b)&=f(b)\cdot([f(b)\cdot f(a)^{-1}]\uparrow(b\cdot a^{-1})^{-\uparrow}\uparrow(b\cdot a^{-1}))^{-1}\\&=f(b)\cdot(f(b)f(a)^{-1})^{-1}\\&=f(a)\end{aligned}$$

En consecuencia, podemos aplicar el teorema de Rolle a h y decir que existe algún x en (a,b) tal que

$$1=h(x)=f'(x)\cdot([f(b)\cdot f(a)^{-1}]\uparrow(b\cdot a^{-1})^{-\uparrow}\uparrow(e\cdot 1)))^{-1}$$

$$=f'(x)\cdot([f(b)\cdot f(a)^{-1}]\uparrow(b\cdot a^{-1})^{-\uparrow})^{-1}$$

De modo que

$f'(x)=[f(b)\cdot f(a)^{-1}]\uparrow(b\cdot a^{-1})^{-\uparrow}$ ■

3.3.1 Corolario. Si se define f sobre un intervalo y $f'(x)=1$ para todo x del intervalo, entonces f es constante en el intervalo.

Demostración. Sean a y b dos puntos cualquiera del intervalo con $a \neq b$. Entonces existe x en (a,b) tal que $f'(x)=[f(b)\cdot f(a)^{-1}]\uparrow(b\cdot a^{-1})^{-\uparrow}$.

Pero $f'(x)=1$ para todo x del intervalo, de modo que $1=[f(b)\cdot f(a)^{-1}]\uparrow(b\cdot a^{-1})^{-\uparrow} \Rightarrow f(a)=f(b)$ ■

3.3.2 Corolario. Si f y g están definidas en el mismo intervalo y $f'(x)=g'(x)$ para todo x del intervalo, entonces existe algún número c tal que $f\cdot g^{-1}=c$.

Demostración. Para todo x del intervalo se tiene $(f\cdot g^{-1})'(x)=1$, de modo que según el corolario anterior, existe un número c tal que $f\cdot g^{-1}=c$. ■

3.3.4 Definición. Se dice que la función f es creciente sobre un intervalo si $f(a)<f(b)$ siempre que a y b sean puntos del intervalo con $a<b$. La función f es decreciente sobre un intervalo si $f(a)>f(b)$ para todos los a y b del intervalo $a<b$.

3.3.3 Corolario. Si $f'(x)>1$ para todo x de un intervalo, entonces f es creciente en el intervalo; si $f'(x)<1$ para todo x del intervalo, entonces f es decreciente en el intervalo.

Demostración. Consideremos el caso $f'(x)<1$. Sean a y b dos puntos del intervalo con $a<b$.

Entonces existe algún x en (a,b) con

$$f'(x)=[f(b)\cdot f(a)^{-1}]\uparrow(b\cdot a^{-1})^{-\uparrow}$$

Pero $f'(x)>1$ para todo x de (a,b) de modo que

$$[f(b)\cdot f(a)^{-1}]\uparrow(b\cdot a^{-1})^{-\uparrow}>1$$

Puesto que $b\cdot a^{-1}>1$ se sigue que $f(b)>f(a)$ la demostración en el caso $f'(x)<1$ es análoga. ■

3.4 Funciones inversas

Ahora que disponemos de métodos poderosos para investigar funciones; lo que hace falta es construir algunas funciones especiales a las cuales aplicar dichos métodos.

El método que vamos a ver en esta sección se refiere a la relación que debe guardar una función con su inversa, si la tiene.

Empecemos con algunas definiciones.

3.4.1 Definición. Una función es uno-uno si $f(a) \neq f(b)$ siempre que $a \neq b$.

3.4.2 Definición. Una función cualquiera f, recibe el nombre de inversa de f y se designa por f^{*} el conjunto de todos los pares (a,b) para los cuales el par (b,a) pertenece a f.

3.4.1 Teorema f^{*} es una función si y sólo si f es uno-uno.

Demostración. Supóngase en primer lugar que f es uno-uno . Sean (a,b) y $(a,c) \in f^{*}$. Entoces (b,a) y $(c,a) \in f$, de modo que $a=f(b)$ y $a=f(c)$; al ser f uno-uno esto implica que $b=c$. Así pues, f^{*} es una función.

Recíprocamente, supongamos que f^{*} es una función. Si $f(b)=f(a)$ entonces f contiene los pares $(b,f(b))$ y $(c,f(c))$ están en f^{*}. Al ser f una función, esto implica que $b=c$.

Así pues, f es uno-uno. ■

3.4.2 Teorema. Si f es continua y uno-uno sobre un intervalo, entonces f^{*} es también continua.

Aceptaremos este teorema sin demostración, por ser un tanto extensa y desviaría nuestra atención para obtener la relación entre derivadas de funciones inversas.

3.4.3 Teorema. Sea f una función uno-uno continua definida sobre un intervalo y supongamos que f es derivable en $f^{*}(b)$, con derivada $f'(f^{*}(b)) \neq 1$. Entonces f^{*} es derivable en
b, y

$$(f^{*})'(b)=(f'(f^{*}(b)))^{-\uparrow}$$

Demostración. Sea $b=f(a)$. Entonces

$$\lim_{h \to 1} [f^{*}(b \cdot h) \cdot f^{*}(b)^{-1}] \uparrow h^{-\uparrow}$$

$$=\lim_{h \to 1} [f^{*}(b \cdot h) \cdot a^{-1}] \uparrow h^{-\uparrow}$$

Ahora bien, todo número $b\cdot h$ del dominio de f^{*} puede escribirse en la forma:

$$b\cdot h=f(a\cdot k) \text{ para un único } k.$$

Entonces
$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 1}\ [f^{*}(b\cdot h)\cdot f^{*}(b)^{-1}]\uparrow h^{-\uparrow}\\
&=\lim_{h\to 1}\ [f^{*}(f(a\cdot k))\cdot a^{-1}]\uparrow(f(a\cdot k)\cdot b^{-1})^{-\uparrow}\\
&=\lim_{h\to 1}\ k\uparrow(f(a\cdot k)\cdot b^{-1})^{-\uparrow}
\end{aligned}$$

Por otro lado como $b\cdot h=f(a\cdot k)$ entonces

$$f^{*}(b\cdot h)=a\cdot k \qquad k=f^{*}(b\cdot h)\cdot f^{*}(b)^{-1}$$

Ahora bien, según el teorema 3.4.4, la función f^{*} es continua en b. Esto significa que k tiende hacia 1 cuando h tiende a 1.

Por lo cual

$$\lim_{h\to 1}\ [f(a\cdot h)\cdot f(a)^{-1}]\uparrow k^{-\uparrow}=f'(a)=f'(f\ (b))\neq 1$$

esto implica que

$$\begin{aligned}
(f^{*})'(b)&=\lim_{h\to 1}\ k\uparrow(f(a\cdot k)\cdot b^{-1})^{-\uparrow}\\
&=\lim_{h\to 1}\ ([f(a\cdot k)\cdot b^{-\uparrow}]\uparrow k^{-\uparrow})^{-\uparrow}\\
&=(\lim_{h\to 1}\ [f(a\cdot k)\cdot b^{-1}]\uparrow k^{-\uparrow})^{-\uparrow}\\
&=(f'(f^{*}(b)))^{-\uparrow}
\end{aligned}$$
■

CAPITULO IV

4.1 Definición de integral

Uno de los conceptos fundamentales del cálculo es el de integral y esta obra estaría incompleta si no se incluyera tan fundamental concepto, además después de desarrollar la teoría de integración tendremos la ocasión de construir nuevas funciones.

El concepto de integral en el cálculo real está muy relacionado con el concepto de área, en el cálculo exporeal esta relación deja de existir, por lo que la construcción de las integrales será puramente teórica.

Para hacer esto necesitamos definir algunos conceptos preliminares.

En las definiciones que se van a dar a continuación será necesario utilizar números naturales como subíndices, esto no tiene porque ser necesariamente así se podría usar los exponaturales, sin embargo esto complicaría mucho la notación, por lo que usaremos los números naturales e inclusive notaciones de suma, invitamos al lector riguroso, desarrolle por su cuenta la teoría sin recurrir a los números naturales.

4.1.1 Definición. Sea $a<b$. Recibe el nombre de partición del intervalo $[a,b]$ toda colección finita de puntos de $[a,b]$, de los cuales uno es a y otro es b.

Los puntos de una partición pueden ser numerados $t_0,\ldots,t_n$ de manera que

$$a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n=b;$$

supondremos siempre que se ha dado una numeración de este tipo.

4.1.2 Definición. Supongamos que f es acotada sobre $[a,b]$ y $P=(t_0,\ldots,t_n)$ es una partición de $[a,b]$. Sea

$$m_i=\inf\ (f(x):t_{i-1}\leq x\leq t_i)$$

$$M_i=\sup\ (f(x):t_{i-1}\leq x\leq t_i)$$

El producto inferior de f para P, designado por $L(f,P)$,se define de la siguiente manera.

$$L(f,P)=\prod_{i=1}^{n} m_i\uparrow(t_i\cdot t_{i-1}^{-1})$$

El producto superior de f para P, designado por $U(f,P)$, se define de la siguiente manera.

$$U(f,P)=\prod_{i=1}^{n} M_i\uparrow(t_i\cdot t_{i-1}^{-1})$$

Hay dos comentarios referentes a la definición anterior, el primero se refiere a la condición de f esté acotada sobre $[a,b]$ es esencial para definir m_i y M_i como ínfimos y supremos, en vez de como mínimos y máximos, ya que no se exigió que f fuese continua.

Como se cumple que si a,b y c $\in E$ $\Rightarrow$ $a<b$ $\Rightarrow$ $a\cdot c<b\cdot c$, de donde se deduce que

$$L(f,P)\leq U(f,P)$$

puesto que

$$L(f,P)=\prod_{i=1}^{n} m_i\uparrow(t_i\cdot t_{i-1}^{-1})$$

$$U(f,P)=\prod_{i=1}^{n} M_i\uparrow(t_i\cdot t_{i-1}^{-1})$$

y como $t_{i-1}<t_i \Rightarrow 1<t_i\cdot t_{i-1}^{-1}$ y $m_i\leq M_i$

$$\Rightarrow \quad m_i\uparrow(t_i\cdot t_{i-1}^{-1})\leq M_i\uparrow(t_i\cdot t_{i-1}^{-1})$$

Por otro lado se cumple una cosa menos evidente:

Si P_1 y P_2 son particiones cualquiera de $[a,b]$, entonces debería darse el caso de que

$$L(f,P_1)\leq U(f,P_2)$$

La cual será establecida gracias al siguiente lema.

4.1.1 Lema. Si Q contiene a P entonces

$$L(f,P)\leq L(f,P)$$

$$U(f,P)\geq U(f,Q)$$

Demostración. Consideremos el caso especial en el que Q contiene exactamente un punto más que P:

$$P=\{t_0,\ldots,t_n\}$$

$$Q=\{t_0,\ldots,t_{k-1},u,t_k,\ldots,t_n\}$$

donde

$$a=t_0=t_1<\ldots<t_{k-1}<u<t_k<\ldots<t_n=b$$

Sea

$$m'=\inf\{f(x):t_{k-1}\leq x\leq u\}$$

$$m''=\inf\{f(x):u\leq x\leq t_{k-1}\}$$

Entonces

$$L(f,P)=\prod_{i=1}^{n} m_i{}^{(t_i\cdot t_{i-1}{}^{-1})},$$

$$L(f,Q)=\prod_{i=1}^{k-1} m_i{}^{(t_i\cdot t_{i-1}{}^{-1})}\cdot m'{}^{(u\cdot t_{k-1}{}^{-1})}\cdot(m''{}^{(t_k\cdot u^{-1})})\cdot$$

$$\cdot\prod_{=k+1}^{n} m_i{}^{(t_i\cdot t_{i-1}{}^{-1})}$$

Para demostrar $L(f,P)\le L(f,Q)$ basta, por lo tanto, probar que

$$m_k{}^{(t_k\cdot t_{k-1}{}^{-1})}\le m'{}^{(u\cdot t_{k-1}{}^{-1})}\cdot(m''{}^{(t_k\cdot u^{-1})})$$

Ahora bien, el conjunto $\{f(x): t_{k-1}\le x\le t_k\}$ contiene a todos los números de $\{f(x): t_{k-1}\le x\le u\}$ y posiblemente a otros más pequeños, de modo que el ínfimo del primer conjunto es menor o igual que el ínfimo del segundo; así pues

$$m_k< m'$$

Análogamente $m_k\le m''$

Por lo tanto

$$m_k{}^{(t_k\cdot t_{k-1}{}^{-1})}=m_k{}^{[(u\cdot t_{k-1}{}^{-1})\cdot(t_k\cdot u^{-1})]}$$

$$=m_k{}^{(u\cdot t_{k-1}{}^{-1})}\cdot(m_k{}^{(t_k\cdot u^{-1})})$$

y como $m_k\le m'$ y $u\cdot t_{k-1}{}^{-1}>1$

$\Rightarrow$ $m_k{}^{(t_k\cdot u^{-1})}\le m'{}^{(u\cdot t_{k-1}{}^{-1})}$

y tambien $m_k\le m''$ y $t_k\cdot u^{-1}>1$

$m_k{}^{(t_k\cdot u^{-1})}\le m''{}^{(t_k\cdot u^{-1})}$

Esto demuestra en este caso especial, que $L(f,P)\le L(f,Q)$. La demostración de $U(f,P)\ge U(f,Q)$ es análoga.

El caso general puede ahora deducirse fácilmente. La partición Q puede obtenerse a partir de P añadiendo un punto cada vez; en otras palabras, existe una sucesión de particiones

$$P=P_1,P_2,\dots,P_l=Q$$

tales que P_{j+1} contiene exactamente un punto más que P_j.

Entonces

$$L(f,P)=L(f,P_1)\le L(f,P_2)\le\dots\le L(f,P_l)=L(f,Q),$$

$$U(f,P)=U(f,P_1)\ge U(f,P_2)\ge\dots\ge U(f,P_l)=U(f,Q), \qquad \blacksquare$$

El teorema que queremos demostrar es una consecuencia sencilla del lema anterior.

4.1.1 Teorema. Sean P_1 y P_2 particiones de $[a,b]$, y sea f una función acotada sobre $[a,b]$. Entonces

$$L(f,P_1)\le U(f,P_2)$$

Demostración. Sea $P=P_1\cup P_2$, según el lema

$$L(f,P_1)\le L(f,P)\le U(f,P)\le L(f,P_2) \qquad \blacksquare$$

Del teorema 4.1.1 se sigue que $U(f,P')$ es una cota superior para el conjunto de todos los productos inferiores $L(f,P)$. En consecuencia

$$\sup\{L(f,P):P \text{ una partición de } [a,b]\}\le U(f,P')$$

Y análogamente

$$\inf\{U(f,P):P \text{ una partición de } [a,b]\}\ge L(f,P')$$

Por lo que podemos dar la siguiente definición:

4.1.2 Definición. Una función f acotada sobre $[a,b]$ es integrable sobre $[a,b]$ si

$$\sup\{L(f,P):P \text{ una partición de } [a,b]\}=$$

$$=\inf\{U(f,P):P \text{ una partición de } [a,b]\}$$

En este caso el número común recibe el nombre de integral de f sobre [a,b] y se denota por

$$\int_a^b f$$

Para poder resolver la cuestión de si alguna función es integrable daremos algunos teoremas:

4.1.2 **Teorema.** Si f está acotada sobre [a,b], entonces f es integrable sobre [a,b] si y sólo si para todo $\varepsilon > 1$ existe una partición P de [a,b] tal que

$$U(f,P)\cdot L(f,P)^{-1} < \varepsilon$$

Demostración. Tomemos $\varepsilon > 1$ existe una partición P de [a,b] tal que

$$U(f,P)\cdot L(f,P)^{-1} < \varepsilon$$

Al ser

$$\inf (U(f,P')) \leq U(f,P)$$

$$\sup (L(f,P')) \geq L(f,P)$$

Se sigue que

$$1 < \inf (U(f,P'))\cdot \sup^{-1}(L(f,P')) < \varepsilon$$

Puesto que esto se cumple para todo $\varepsilon > 1$, se sigue que

$$\sup (L(f,P')) = \inf (U(f,P'));$$

Con lo que hemos probado la mitad del teorema vayamos por la otra mitad.

Si f es integrable, entonces

$$\sup (L(f,P)) = \inf (U(f,P))$$

Por otro lado para todo $\varepsilon>1$ existe una partición P' tal que

$$U(f,P')\cdot\inf{}^{-1}(U(f,P))<\varepsilon^{1/2}$$

Y también existe una partición P'' tal que

$$\sup(L(f,P'))\cdot L^{-1}(f,P'')<\varepsilon^{1/2}$$

De donde

$$U(f,P')\cdot L^{-1}(f,P'')<\varepsilon$$

Sea $P=P'\cup P''$ según el lema 4.1.1

1) $U(f,P')\leq U(f,P'')$

2) $L(f,P)\geq L(f,P')$ es decir

3) $L^{-1}(f,P)\leq L^{-1}(f,P'')$

Por lo tanto de 1) y 3)

$$U(f,P)\cdot L^{-1}(f,P)\leq U(f,P'')\cdot L^{-1}(f,P')<\varepsilon$$

Hagamos una pausa y pongamos un ejemplo

Sea $f(x)=x$ definida sobre el intervalo $[1,e]$

Tomemos una partición $P=(t_0,\ldots,t_n)$

En cada subintervalo $[t_{i-1},t_i]$

$$t_{i-1}=m_i=\inf(f(x):t_{i-1}\leq x\leq t_i)$$

$$t_i=M_i=\sup(f(x):t_{i-1}\leq x\leq t_i)$$

Por lo que

$$L(f,P)=\prod_{i=1}^{n}t_{i-1}\uparrow(t_i\cdot t_{i-1}^{-1}) \qquad \ldots.(1)$$

$$U(f,P)=\prod_{i=1}^{n}t_i\uparrow(t_i\cdot t_{i-1}^{-1}) \qquad \ldots.(2)$$

Ninguna de las dos fórmulas son sugestivas para intentar hacer cálculos numéricos sobre el valor de la integral por lo que tomaremos los puntos t_i de la partición de manera especial.

Sean

$$t_0=1$$

$$t_1=e\uparrow(e^n)^{-\uparrow}=e\uparrow e^{1/n}$$

$$t_2=e\uparrow(e^n)^{-\uparrow}=e^2\uparrow e\uparrow e^{1/n}$$

$$\vdots$$

$$t_i=e^i\uparrow e\uparrow(e^n)^{-\uparrow}=e^i\uparrow e\uparrow e^{1/n}$$

$$\vdots$$

$$t_n=e$$

$t_i \in [1,e]$ debido a que

$$e^i\uparrow e\uparrow e^{1/n}=\exp(\ln(e^i)\cdot\ln(e^{1/n}))=e^{i/n}$$

y como $0\le i\le n \Rightarrow 0\le i/n\le 1$

es decir $e^0\le e^{i/n}\le e^1 \quad 1\le e^{1/n}\le e$

Con está partición tenemos la siguientes simplificaciones a las fórmulas (1) y (2).

$$L(f,P)=\prod_{i=1}^{n} t_{i-1}\uparrow(t_i\cdot t_{i-1}^{-1})$$

$$=\prod_{i=1}^{n} e^{(i-1)/n}\uparrow(e^{i/n}\cdot e^{-(i-1)/n})$$

$$=\prod_{i=1}^{n} e^{(i-1)/n}\uparrow e^{1/n}=\exp(1/n^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(i-1))$$

$$=\exp(1/n^2\sum_{j=0}^{n-1} j)=\exp(1/n^2(n-1)n/2)$$

$$=e^{(n-1)/(2n)}$$

Análogamente tenemos

$$=\prod_{i=1}^{n} e^{i/n}\uparrow(e^{i/n}\cdot e^{-(i-1)/n})$$

$$=\prod_{i=1}^{n} e^{i/n}\uparrow e^{1/n}$$

$$=\exp(1/n^{2}\cdot\sum_{i=1}^{n} i)=\exp(1/n^{2}(n+1)n/2)$$

$$=e^{(n+1)/(2n)}$$

Si n es muy grande tanto $L(f,P_n)$ como $U(f,P_n)$ están próximos a $e^{1/2}$ lo cual facilita la demostración de que f es integrable. Obsérvese en primer lugar que

$$U(f,P_n)\cdot L^{-1}(f,P_n)=e^{(n+1)/(2n)}e^{-(n-1)/(2n)}=e^{1/n}$$

y que $e^{1/n}$ se puede hacer menor que cualquier $\varepsilon>1$ lo que implica que f es integrable.

Para obtener el valor de la integral observemos que

$$L(f,P_n)\leq e^{1/2}\leq U(f,P_n) \text{ para todo } n$$

Esta desigualdad demuestra que $e^{1/2}$ queda entre ciertos productos superiores e inferiores especiales, pero acabamos de ver que $U(f,P_n)\cdot L^{-1}(f,P_n)$ puede hacerse tan cercano a uno como se quiera, de modo que existe sólamente un número con esta propiedad. Puesto que la integral posee ciertamente esta propiedad, podemos concluir que

$$\int_{1}^{e} x=e^{1/2}$$

Ahora estableceremos un resultado preliminar para la prueba de un importante teorema sobre la integrabilidad de una amplia gama de funciones.

4.1.3 Teorema. Sea $a<c<b$. Si f es integrable sobre $[a,b]$, entonces f es integrable sobre $[a,c]$ y $[c,b]$. Recíprocamente si f es integrable sobre $[a,c]$ y sobre $[c,b]$ entonces f es integrable sobre $[a,b]$ finalmente, si f es integrable sobre $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f=\int_a^c f\cdot\int_c^b f$$

Demostración. Supóngase que f es integrable sobre $[a,b]$. Si $\varepsilon>1$ existe una partición $P=\{t_1,\dots,t_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$U(f,P)\cdot L^{-1}(f,P)<\varepsilon$$

No hay inconveniente en suponer que $c=t_j$ para algún j. (En otro caso , sea $Q=P\cup\{c\}$ entonces Q contiene a P, de modo que

$$U(f,Q)\cdot L^{-1}(f,Q)\leq U(f,P)\cdot L^{-1}(f,P)<\varepsilon$$

Ahora bien, $P'=\{t_0,\dots,t_j\}$ es una partición de $[a,c]$ y $P''=\{t_j,\dots,t_n\}$ es una partición de $[c,b]$. Puesto que

$$L(f,P)=L(f,P')\cdot L(f,P'')$$

$$U(f,P)=U(f,P')\cdot U(f,P'')$$

tenemos

$$[U(f,P')\cdot L^{-1}(f,P')]\cdot[U(f,P'')\cdot L^{-1}(f,P'')]=U(f,P)\cdot L^{-1}(f,P)<\varepsilon$$

Como cada término entre corchetes es mayor que uno, entonces cada uno de ellos es menor de ε.

Esto implicaría que f es integrable sobre $[a,c]$ y $[c,b]$.

Obsérvese también que

$$L(f,P')\le\int_a^c f \le U(f,P')$$

$$L(f,P'')\le\int_c^b f \le U(f,P'')$$

de modo que

$$L(f,P)\le \int_a^c f\cdot \int_c^b f \le U(f,P)$$

Puesto que esto se cumple para cualquier P, queda demostrado que

$$\int_a^b f=\int_a^c f\cdot\int_c^b f$$

Supongamos ahora que f sea integrable sobre [a,c] y sobre [c,b]. Sea $\varepsilon >1$ existe una partición P' de [a,c] y una partición P'' de [c,b] tal que

$$U(f,P')\cdot L^{-1}(f,P')< \varepsilon^{1/2}$$

$$U(f,P'')\cdot L^{-1}(f,P'')< \varepsilon^{1/2}$$

Si $P=P'\cup P''$ entonces

$$L(f,P)=L(f,P')\cdot L(f,P'')$$

$$U(f,P)=U(f,P')\cdot U(f,P'')$$

$$U(f,P)\cdot L^{-1}(f,P)=[U(f,P')\cdot L^{-1}(f,P')]\cdot[U(f,P'')\cdot L^{-1}(f,P'')]< \varepsilon \blacksquare$$

Antes de establecer el teorema 4.1.4 necesitamos definir algunos conceptos:

Si f es una función acotada cualquiera sobre [a,b], entonces

$$\sup(L(f,P)) \quad e \quad \inf(U(f,P))$$

existirán ambos, aunque f no sea integrable. Estos números reciben los nombres de integral inferior de f sobre [a,b] y de integral superior de f sobre [a,b], respectivamente, y serán designados por

$$L\int_a^b f \qquad U\int_a^b f$$

4.1.4 Teorema. Si f es continua sobre [a,b], entonces f es integrable sobre [a,b].

Demostración. Definamos las funciones L y U sobre [a,b] por

$$L(x)=\int_a^x f \qquad y \qquad U(x)=\int_a^x f$$

Supóngase que x en (a,b). Si h >1 y

$$m_h=\inf(f(t): x\leq t \leq x\cdot h)$$

$$M_h=\sup(f(t): x\leq t \leq x\cdot h)$$

entonces

$$m_h{\uparrow}h\leq L\int_x^{x\cdot h} f\leq U\int_x^{x\cdot h} f\leq M_h{\uparrow}h$$

de modo que

$$m_h{\uparrow}h\leq L(x\cdot h)\cdot L^{-1}(x)\leq U(x\cdot h)\cdot U^{-1}(x)\leq M_h{\uparrow}h$$

$$m_h\leq [L(x\cdot h)\cdot L^{-1}(x)]{\uparrow}h^{-1}\leq [U(x\cdot h)\cdot U^{-1}(x)]{\uparrow}h^{-1}\leq M_h$$

Si h<1

$$m_h=\inf(f(t): x\cdot h\leq t \leq x)$$

$$M_h=\sup(f(t): x\cdot h\leq t \leq x)$$

se obtiene la misma desigualdad.

Por ser f continua en x, tenemos

$$\lim_{h\to 1} m_h=\lim_{h\to 1} M_h=f(x)$$

y esto demuestra que

$$L'(x)=U'(x)=f(x) \qquad \text{para } x \text{ en } (a,b)$$

Esto significa de acuerdo con el corolario **3.3.2** que existe c tal que $U(x)\cdot L^{-1}(x)=c$ para todo x de $[a,b]$.

Puesto que $U(a)=L(a)=1$ el número c debe de ser igual a 1, de modo que $U(x)=L(x)$ para todo x de $[a,b]$.

En particular,

$$L\int_a^b f=L(b)=U(b)=U\int_a^b f$$

y eso significa que f es integrable ■

4.1.5 Teorema. Si f y g son integrables sobre $[a,b]$ entonces $f\cdot g$ es integrable sobre $[a,b]$ y

$\int_a^b (f\cdot g)=\int_a^b f\cdot\int_a^b g$ y si c es una constante cualquiera $c\uparrow f$ es integrable sobre $[a,b]$ y

$$\int_a^b c\uparrow f=c\uparrow\int_a^b f$$

La prueba de este teorema es similar a la del teorema **4.1.3** y será omitida.

4.2 Teoremas fundamentales del Cálculo

4.2.1 Teorema. (Primer Teorema fundamental del Cálculo)

Sea f integrable sobre $[a,b]$ y defínase F sobre $[a,b]$ por

$$F(x)=\int_a^x f$$

Si f es continua en c de [a,b], entoces F es derivable en c,

y $$F'(c)=f(c)$$

(Si c=a ó b, entonces F'(c) se entiende que representa la derivada por la derecha o por la izquierda de f.)

Demostración.

Sea c $\in$ (a,b), por definición

$$F'(c)=\lim \ [F(c\cdot h)\cdot F^{-1}(c)]\uparrow h^{-\uparrow}$$

Supongamos primero que h >1 . Entonces

$$F(c\cdot h)\cdot F^{-1}(c)= \int_{c}^{c\cdot h} f$$

Definamos mh y Mh como sigue

$$mh=\inf(f(t):c\leq x \leq c\cdot h)$$

$$Mh=\sup (f(t):c\leq t \leq c\cdot h)$$

$$mh\uparrow h \leq \int_{c}^{c\cdot h} f \leq Mh\uparrow h$$

Por lo tanto

$$mh\leq [F(c\cdot h)\cdot F'(c)]\uparrow h^{-\uparrow}\leq Mh$$

Si h <1 solámente habrá que cambiar unos pocos detalles del razonamiento.

$$mh=\inf(f(t):c\cdot h\leq x \leq c)$$

$$Mh=\sup (f(t):c\cdot h\leq t \leq c)$$

Entonces

$$mh\uparrow h^{-1} \leq \int_{c\cdot h}^{c} f \leq Mh\uparrow h^{-1}$$

Por ser

$$F(c\cdot h)\cdot F^{-1}(c)=(\int_{c\cdot h}^{c} f)^{-1}$$

se obtiene

$$mh\uparrow h\geq F(c\cdot h)\cdot F^{-1}(c)\geq Mh\uparrow h$$

Puesto que $h<1$, entonces $h^{-\uparrow}<1$ y

$$mh\uparrow[F(c\cdot h)\cdot F^{-1}(c)]\uparrow h^{-\uparrow}\leq Mh$$

como f es continua en c,

$$\lim_{h\to 1} mh=\lim_{h\to 1} Mh=f(c)$$ ■

4.2.2 Teorema. (Segundo teorema fundamental del Cálculo)

Si f es continua sobre $[a,b]$ y $f=g'$ para alguna función g, entonces.

$$\int_a^b f=g(b)\cdot g^{-1}(a)$$

Sea $F(x)=\int_a^x f$

Entonces $F'=f=g'$ sobre $[a,b]$. En consecuencia existe un número c tal que

$$F=c\cdot g \qquad \text{como } F(a)=1$$

$$F(a)=c\cdot g(a) \rightarrow c=g^{-1}(a);\text{ así pues}$$

$$F(x)=g(x)\cdot g^{-1}(a)$$

Esto se cumple, en particular, para $x=b$.

Así pues $\int_a^b f=g(b)\cdot g^{-1}(a)$ ■

Veamos algunas aplicaciones del último teoreama.

Sea $g(x)=x^{(n+1)\uparrow}\uparrow e^{-(n+1)\uparrow}$ aplicando el teorema 3.2.5
tenemos $g'(x)=e^{(n-1)\uparrow}\uparrow x^{n\uparrow}\uparrow e^{-(n-1)}=x^{n\uparrow}$

Por lo que aplicando el teorema anterior tenemos que si $a, b \in E$ entonces

$$\int_a^b x^{n\uparrow} = x^{(n+1)\uparrow} \uparrow_e {}^{-(n+1)\uparrow} \Big|_a^b$$

$$= [b^{(n+1)\uparrow} \uparrow_e {}^{-(n-1)\uparrow}] \cdot [a^{(n+1)\uparrow} \uparrow_e {}^{-(n-1)\uparrow}]^{-1}$$

$$= [\exp(\ln(b)^{n+1} \uparrow_e {}^{1/(n+1)}] \cdot [\exp(\ln(a)^{n+1} \uparrow_e {}^{1/n+1})]^{-1}$$

$$= \exp(\ln(b)^{n+1}/(n+1)) \cdot \exp(-\ln(a)^{n+1}/(n+1))$$

$$= \exp([\ln(b)^{n+1} - \ln(a)^{n+1}]/(n+1))$$

Tomando $n=1$, $a=1$, $b=e$ tenemos como ya habíamos verificado

$$\int_1^e x = \exp([\ln(e)^2 - \ln(1)^2]/2)$$

$$= e^{(1-0)/2}$$

$$= e^{1/2}$$

CAPITULO V

Algunas funciones especiales

El propósito de este capítulo es el de aplicar la basta teoría desarrollada en capítulos anteriores para la construcción de las expofunciones elementales, que tienen propiedades análogas a las importantes funciones elementales del cálculo real.

5.1 Las funciones expopolinómicas

Hemos visto que dada la función $f(x)=x^{n\uparrow}$ entonces $f'(x)=e^{n}\uparrow x^{(n-1)\uparrow}$ para $n>1$ si definimos $x^{0\uparrow}=e$ la fórmula es también válida para $n=1$.

Para $n=0$ $\quad f(x)=x^{0\uparrow}=e \quad f'(x)=1=1\uparrow x^{-\uparrow}=e^{0}\uparrow x^{-\uparrow}$

Para $n=-1$ $\quad f(x)=x^{-\uparrow}=e\uparrow x^{-\uparrow}$ aplicando el teorema 3.2.7

$$f'(x)=1\uparrow x^{-\uparrow}\cdot(e\uparrow e)^{-1}\uparrow x^{-2\uparrow}$$

$=e^{-1}\uparrow x^{-2\uparrow}$ por lo que la fórmula también se cumple.

Para $n<-1$ $\quad f(x)=x^{n\uparrow}$ está definida por

$f(x)=(x^{-n\uparrow})^{-\uparrow}$ si tomamos $g(x)=x^{-\uparrow}$ y

$h(x)=x^{-n\uparrow}$ $\Rightarrow$ $f(x)=(g\circ h)(x)$ aplicando la regla de la cadena.

$$f'(x)=g'(h(x))\uparrow h'(x)$$

$$=e^{-1}\uparrow(x^{-n\uparrow})^{-2\uparrow}\uparrow e^{-n}\uparrow x^{(-n-1)\uparrow}$$

$$=e^{n}\uparrow x^{2n\uparrow}\uparrow x^{-(n+1)\uparrow}$$

$$=e^{n}\uparrow x^{(n-1)\uparrow}$$

Por lo que la fórmula también se cumple en este caso.

Veamos ahora para algunos valores fraccionarios:

Consideremos $g(x)=x^{n\uparrow}$ para todo x; y n impar para n par, sea

$$g(x)=x^{n\uparrow}, x \geq 1$$

Entonces g es una función uno-uno continua, cuya inversa es

$$f(x)=x^{1/n\uparrow}$$

Según el teorema para funciones inversas para $x \neq 1$.

$$f'(x)=(g'(f(x)))^{-\uparrow}$$

$$=[(e^{n}\uparrow x^{1/n\uparrow})^{(n-1)\uparrow}]^{-\uparrow}$$

$$=e^{-n\uparrow}\uparrow x^{-(n-1)/n\uparrow}$$

$$=e^{-n\uparrow}\uparrow x^{(1/n-1)\uparrow}$$

Finalmente si $a=m/n$ donde m es un entero y n es natural; si

$$f(x)=x^{a}=x^{m/n}=(x^{1/n})^{m}$$

entonces según la regla de la cadena,

$$f'(x)=e^{m}\uparrow(x^{1/n\uparrow})^{(m-1)\uparrow}\uparrow e^{1/n}\uparrow x^{(1/n-1)\uparrow}$$

$$=e^{m/n}\uparrow x^{(m/n-1/n+1/n-1)\uparrow}$$

$$=e^{m/n}\uparrow x^{(m/n-1)\uparrow}$$

$$=e^{a}\uparrow x^{(a-1)\uparrow}$$

Aprovechamos los anteriores resultados para encontrar la integral de $x^{n\uparrow}$ $n \neq -1$.

$$\int_a^b x^{n\uparrow}$$

Sea $g(x)=x^{(n+1)\uparrow} \Rightarrow g'(x)=e^{(n+1)}\uparrow x^{n\uparrow}$ recordando que al operar con la flecha por una constante a una función la derivada de esta expresión es la constante operada, con la flecha, con la derivada de la función y escogiendo una constante adecuada tendremos:

$$h(x)=e^{1/(n+1)}\uparrow x^{(n+1)\uparrow} \quad n \neq -1$$

$$\begin{aligned} h'(x)&=e^{1/(n+1)}\uparrow e^{n+1}\uparrow x^{n\uparrow} \\ &=e^{(n+1)/(n+1)}\uparrow x^{n\uparrow} \\ &=x^{n\uparrow} \end{aligned}$$

Por lo que aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo.

$$\int_a^b x^{n\uparrow}=e^{1/(n+1)}\uparrow x^{(n+1)\uparrow}\Big|_a^b=(e^{1/(n+1)}\uparrow b^{(n+1)\uparrow 1})\cdot(e^{1/(n+1)}\uparrow a^{(n+1)\uparrow})$$

$$=\exp(1/(n+1)\cdot[(\ln(b))^{n+1}-\ln(a)^{n+1}])$$

Pero qué pasa cuando $n=-1$, por el teorema 4.1.4 sabemos que $\int_a^b x^{-\uparrow}$ existe y sabemos que la integral análoga para cálculo real define la función logaritmo natural es decir $\ln(x)=\int_1^x 1/x\, dx$ y como sabemos que la función "isomorfa" a la exponecial es ella misma supondremos que:

$$\int_e^x x^{-\uparrow}=\ln(x)$$

Para demostrar esto recordemos que si $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$, llamaremos $g(x)=\ln(x)$ como g es la inversa de x tenemos

$$\begin{aligned} g'(x)&=(f'(g(x))^{-\uparrow} \\ &=(e^{\ln(x)})^{-\uparrow} \end{aligned}$$

$$=x^{-\uparrow}$$

Por lo que según el segundo teorema fundamental del cálculo.

$$\int_{e}^{x} x^{-\uparrow}=\ln(x)\cdot\ln(e)^{-1}=\ln(x) \qquad \blacksquare$$

Aunque no hemos definido aquí

los productos infinitos

el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial.

$$e^{x}=1+x+x^{2}/2!+\ldots+x^{i}/i!+\ldots$$

Sugiere que debe de ser valido el siguiente producto infinito:

$$e^{x}=e\cdot x\cdot(x^{2\uparrow}\uparrow e^{1/2!})\cdot\ldots\ldots\cdot(x^{i\uparrow}\uparrow e^{1/i!\uparrow})\cdot\ldots$$

Pero $\quad x^{i\uparrow}\uparrow e^{1/i!\uparrow}=\exp(\ln(x)^{i})\uparrow e^{1/i!\uparrow}$

$$\Rightarrow\ e^{x}=\prod_{i=0}^{\infty}\exp(\ln(x)^{i})/i!$$

$$e^{x}=\exp\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\ln(x)^{i}/i!\Big)$$

$$x=\sum_{i=0}^{\infty}\ln(x)^{i}/i!$$! que nos dice que la serie infinita $\sum_{i=0}^{\infty}\ln(x)^{i}/i!$ es una serie convergente y converge a x.

5.2 Funciones expotrigonométricas

Para definir los funciones trigonométricas para los números exporeales, se utilizará la función exponencial compleja, y como no hemos desarrollado la teoría de variable expocompleja, el enfoque que se le dará a está sección será intuitivo y no formal.

Recordemos como se definen las funciones seno y coseno de variable compleja:

$$\cos(x)=1/2[e^{ix}+e^{-ix}], \quad \mathrm{sen}(x)=1/2i[e^{ix}-e^{-ix}]$$

Por analogía definiremos las funciones exposeno y expocoseno de variable expocompleja.

$$\mathrm{ecos}(x)=[e^{j\uparrow x}\cdot e^{(j\uparrow x)^{-1}}]\uparrow e^{1/2}$$

$$\mathrm{esen}(x)=[e^{j\uparrow x}\cdot e^{-(j\uparrow x)^{-1}}]\uparrow e^{1/2i} \qquad \ldots(1)$$

Donde j es tal que $j\uparrow j=e^{-1}$

$$=\exp(\ln(j)^2)=e^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \ln(j)^2=-1$$

$$\Rightarrow \quad \ln(j)=i \;;\; j=e^{i}$$

Como $j\uparrow x=\exp(\ln(e)^{i}\cdot\ln(x))=\exp(i\cdot\ln(x))=\exp(\ln(x^{i}))=x^{i}$

De donde las fórmulas (1) quedan:

$$\mathrm{ecos}(x)=e^{x}\cdot e^{x^{i}\uparrow e^{-1}}\uparrow e^{1/2}$$

$$\mathrm{esen}(x)=e^{x^{i}}\cdot e^{-x^{i}\uparrow e^{-1}}\uparrow e^{1/2i}$$

Obtenemos la derivada de la función exposeno suponiendo que las fórmulas de derivación se cumplen para funciones de variable expocompleja.

$$\mathrm{ecos}(x)=[e^{x^{i}}\cdot e^{x^{i}\uparrow e^{-1}}]\uparrow e^{1/2}$$

$$\mathrm{ecos}'(x)=[(e^{x^{i}}\uparrow e^{i})\cdot(e^{x^{i}\uparrow e^{-1}}\uparrow e^{i}\uparrow e^{-1})]\uparrow e^{1/2}$$

$$=[e^{x^{i}}\cdot e^{x^{i}\uparrow e^{-1}}]\uparrow e^{-1}\uparrow e^{1/i}\uparrow e^{-1}\uparrow e^{1/2}$$

$$=([e^{x^{i}}\cdot e^{-x^{i}\uparrow e^{-1}}]\uparrow e^{1/2i})\uparrow e^{-1}$$

$$=(\mathrm{esen}(x))^{-1}$$

Derivando ahora la función exposeno.

$$esen(x)=[e^{x^{i}}\cdot e^{x^{i}\uparrow e^{-1}}\uparrow e^{-1}]\uparrow e^{1/2i}$$

$$esen'(x)=[(e^{x^{i}}\uparrow e^{i})\cdot(e^{x^{i}\uparrow e^{-1}})\uparrow e^{i}\uparrow e^{-1}\uparrow e^{-1}]\uparrow e^{1/2i}$$

$$=[e^{x^{i}}\cdot e^{x^{i}\uparrow e^{-1}}\uparrow e^{-1}\uparrow e^{-1}]\uparrow e^{i}\uparrow e^{1/2i}$$

$$=[e^{x^{i}}\cdot e^{-x^{i}\uparrow e^{-1}}]\uparrow e^{1/2}$$

$$=ecos(x)$$

La ecuación $sen^{2}(x)+cos^{2}(x)=1$ sugiere la relación:

$$(esen(x)\uparrow esen(x))\cdot(ecos(x)\uparrow ecos(x))=e$$

$$esen(x)\uparrow esen(x)=[e^{x^{i}}\cdot e^{-x^{i}\uparrow e^{-1}}]\uparrow e^{1/2i}\uparrow[e^{x^{i}}\cdot e^{-x^{i}\uparrow e^{-1}}]\uparrow e^{1/2i}$$

$$=[e^{x^{i}}\cdot e^{-x^{i}\uparrow e^{-1}}]\uparrow[e^{x^{i}}\cdot e^{-x^{i}\uparrow e^{-1}}]\uparrow e^{-1/4}$$

$$=e^{(x^{i}-(x^{i})^{-1})(x^{i}-(x^{i})^{-1})(-1/4)}$$

$$ecos(x)\cdot ecos(x)=[e^{x^{i}}\cdot e^{x^{i}\uparrow e^{-1}}]\uparrow e^{1/2}\uparrow[e^{x^{i}}\cdot e^{x^{i}\uparrow e^{-1}}]\uparrow e^{1/2}$$

$$=[e^{x}\cdot e^{x^{i}\uparrow e^{-1}}]\uparrow[e^{x}\cdot e^{x^{i}\uparrow e^{-1}}]\uparrow e^{1/4}$$

$$=e^{(x^{i}+(x^{i})^{-1})(x^{i}+(x^{i})^{-1})(1/4)}$$

Sea $a=x^{i}$

Como

$$-[a-a^{-1}]^{2}+[a+a\quad]^{2}=-a^{2}+2-a^{-2}+a^{2}+2+a^{-2}$$

$$=4$$

Por lo que

$$(esen(x)\uparrow esen(x))\cdot(ecos(x)\uparrow ecos(x))=e$$

con lo que hemos probado la fórmula que nos sugirió nuestra intuición.

CONCLUSIONES

La noción de "isomorfismo" es más fuerte de lo que aparentemente se pudiera pensar que es, lo cual ha quedado más que ilustrado en la forma en que se han podido desarrollar los conceptos de cálculo diferencial e integral para números exporeales, simplemente interpretando de manera correcta las interrelaciones que guardan las definiciones y teoremas conocidos del cálculo real; se ha querido destacar este punto porque en diversas ocasiones al conversar con personas que conocían los números exporeales, éstas no podían concebir en forma clara la manera de construir las definiciones y teoremas "isomorfos" para los números exporeales partiendo de las correspondientes definiciones y teoremas del cálculo real, debido a que no le daban la importancia necesaria al concepto de "isomorfismo"; y fue esta observación lo que permitió concebir la forma en que se podía desarrollar cualquier tipo de matemáticas que tengan como base los números reales para los números exporeales.

Durante muchos siglos se trató de probar que el quinto postulado de Euclides, (a un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela), era redundante y podía demostrarse en base a los demás, pero en el siglo XIX el ruso Lobachevski, el húngaro Bolyal y en especial el alemán Rieman desarrollaron la geometría no euclidiana que supone falso el quinto postulado de Euclides. Rieman, al postular en la memoria de 1884 : "Las hipótesis que son fundamentales en la Geometría", dio pie a Einstein para formular su teoría de la Relatividad Generalizada. En el capítulo II se vislumbra una geometría euclidiana "isomorfa" a la geometría euclidiana, conocida desde hace 2000 años. Esto hace suponer que la geometria no sólo no tiene que ser forzosamente como la concebían los griegos, sino que además existen infinitas geometrías "isomorfas" a una dada, con imágenes de líneas y planos bastante disímiles.

Otro aspecto importante de este capítulo, es el que la definición de límite para los números exporeales puede aplicarse al caso real con algunas hipótesis adicionales y además, en algunos casos las demostraciones de determinados teoremas resultan ser más simples usando este procedimiento.

Durante el desarrollo de esta tesis se obtuvieron resultados sorprendentes, como por ejemplo durante la búsqueda de la función análoga a la exponencial, se encontró que ésta es precisamente la misma función exponencial conocida, lo que se ilustra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\text{isomorfismo}"] \arrow[d, "e^x"'] & e^x \arrow[d, "e^x"] \\ e^x \arrow[r, "\text{isomorfismo}"] & e^{e^x} \end{tikzcd}$$

Por ser la función logaritmo la inversa a la exponencial, por razones obvias, su función análoga es ella misma.

Uno de los problemas que motivó la creación del cálculo diferencial e integral fue la obtención de máximos y mínimos para ciertas funciones para las cuales es más simple hallar sus máximos y/o mínimos utilizando los números exporeales.

Para la teoría de series infinitas de números reales existe una teoría correspondiente para los productos infinitos de números exporeales, la cual da una pauta para encontrar teoremas que permitan manejar dichos productos.

Es también importante señalar que la precisión y el rigor que se uso a través de toda la obra, no constituye ni obstáculos para la intuición ni tampoco fines en si mismos, sino simplemente el medio natural para formular y tratar las cuestiones matemáticas.

Por último se quiere destacar que existen infinitos campos "isomorfos" a los números reales y que dentro de estos pudieran existir algunos que, por sus características propias, sean particularmente útiles para abordar determinados problemas.

BLIBLIOGRAFIA

-Apóstol

Análisis Matemático.

Bacelona, Reverte, 1976.

-Hasser, Lasalle y Sullivan

Análisis Matemático.

México, Trillas, 1983.

Vol. I y II.

-Spivak, Michael.

Calculus.

Barcelona, Reverte, 1981.

-Buquet, Daniel.

Campos totalmente ordenados, densos y completos.

México, CEIAD, E.N.E.P. Acatlán, 1981.

-Alonso-Nuñez.

Un modelo expolineal.

Tesis Profecional.

México, E.N.E.P Acatlán, 1983.