2cj
67

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

EL ANALISIS DE DECISIONES EN LA INGENIERIA CIVIL.

T E S I S

Que para obtener el título de:

INGENIERO CIVIL

P r e s e n t a :

MANUEL FLORES MONTEMAYOR

México, D. F. Diciembre, 1986

I N D I C E

INTRODUCCION

El fin último de la ingeniería es el satisfacer las necesidades humanas. El ingeniero debe aplicar sus conocimientos de las leyes de la naturaleza, su experiencia y su juicio, para alterar el medio físico y producir los bienes y servicios que demanda la sociedad.

Antes de la revolución tecnológica del presente siglo, las limitaciones para realizar una obra de ingeniería se debían predominantemente a la falta de conocimientos técnicos, y la factibilidad de un proyecto dependía de la capacidad del ingeniero para modificar el medio.

Actualmente, dado que vivimos en un mundo con recursos limitados y a que los avances de la ciencia y la tecnología van reduciendo los problemas físicos, las limitaciones para realizar una obra son cada vez mas económicas que técnicas. Por eso se ha vuelto esencial que antes de ser efecutadas, - las propuestas ingenieriles se evaluen en función de sus beneficios y costos, es decir, debe estudiarse su conveniencia económica. Hay muchos casos en los que una obra tiene un diseño físico excelente, pero su realización es antieconómica.

Debido a la importancia de evaluar económicamente un proyecto, en los dos primeros capítulos de este trabajo se tratan los fundamentos de la ingeniería económica, la cual se - relaciona con los conceptos y técnicas de análisis utiliza -

dos para evaluar los beneficios de sistemas, productos y servicios en relación con sus costos.

Hay quienes piensan que el ingeniero civil debe limitarse a aplicar sus conocimientos técnicos en la transformación del medio físico, y dejar los aspectos económicos a otros - profesionistas. Esto se debe quizá a que piensan que la función del ingeniero civil se limita solo a manipular constantes físicas exactas, y que no es su asunto tratar con las complejidades e imprecisiones del medio económico. Dado que es inobjetable que todos los proyectos reales incluyen necesariamente aspectos inexactos y complejos, el ingeniero civil debe extender su habilidad de análisis para abarcar los aspectos económicos aplicables a sus actividades.

En todo proyecto de ingeniería existe cierto grado de incertidumbre debido a ciertas condiciones externas que influyen en el resultado final del proyecto y que escapan del control del proyectista. Por ejemplo, al desarrollar la - construcción de un camino se pueden presentar condiciones - climatológicas adversas que retrasen los trabajos de una actividad crítica impidiendo terminar la obra en la fecha establecida.

Debido a esta incertidumbre, muchas veces las decisiones se vuelven difíciles y se toman sin analizar sistemáticamente las diversas alternativas de solución, apoyándose - sólo en el criterio, la experiencia y buen juicio del decisor. Esto esta bien para problemas poco importantes, sin - embargo, a veces nos enfrentamos a decisiones donde sentimos que vale la pena dedicar mayor tiempo y esfuerzo al análisis de los posibles cursos de acción a elegir. En el capítulo tres se expone una metodología general para analizar la toma de decisiones bajo situaciones de riesgo.

Por la experiencia se sabe que dos personas enfrentadas a un mismo problema y en condiciones del todo similares, pueden reaccionar en forma diferente, debido a que su educación, sus experiencias pasadas y su carácter son distintos. Se puede decir entonces que cada persona actua conforme a sus preferencias.

En el capítulo cuatro se introduce el concepto de función de utilidad. La teoría de utilidades trata de sistematizar la elección de alternativas, tomando en cuenta preferencias subjetivas del decisor. Por eso una decisión tomada en base a las funciones de utilidad, quizá no sea la mejor universalmente hablando, pero si es la mejor que pudde tomar un decisor con la información que tiene a su alcance y de acuerdo a su forma de pensar.

Hasta aquí se ha hablado sobre la forma de evaluar proyectos de ingeniería civil, tomando en cuenta sus riesgos, beneficios y costos, medidos en unidades monetarias. Pero es necesario percatarse de que por su naturaleza, los proyectos de ingeniería traen como consecuencias cambios en el medio ambiente, en las relaciones sociales y en la economía de muchas personas. Véase por ejemplo el impacto que produce en toda una región la construcción de una presa: se construyen caminos, se genera una gran demanda de mano de obra, se inundan poblaciones,se sustituyen por otras nuevas,se altera el equilibrio ecológico y se vitaliza la economia, entre otras consecuencias. ¿ Como evaluar todos estos aspectos benéficos y perjudiciales para poder compararlos ? En el capítulo cinco se estudia el análisis de proyectos que implican la consecución de objetivos múltiples.

El objetivo de este trabajo es el de subrayar la importancia de estudiar un proyecto abarcando no sólo el aspecto técnico de la obra, sino también sus implicaciones economicas y sociales. Es común ver como se han realizado impresionantes obras de ingeniería, que no cumplen con su finalidad, o lo hacen de una forma ineficiente, ya que se realizaron con criterios o unicamente técnicos, o meramente póliticos o considerando sólo factores económicos.

Es importante destacar que al tener los resultados de nuestro problema de decisión, obtenidos mediante las técnicas de análisis expuestas, debemos utilizar nuestra experiencia conocimientos y sentido común para interpretarlos, y de ser necesario revisar y repetir el proceso de análisis antes de tomar la decisión final.

I. INTRODUCCION A LA INGENIERIA ECONOMICA.

I.1 LA TOMA DE DECISIONES DE NATURALEZA ECONOMICA EN EL CONTEXTO DE UN PROYECTO DE INGENIERIA CIVIL.

La solución de problemas de ingeniería civil depende de los conocimientos técnicos obtenidos por el estudio, la experiencia y la práctica profesional. Sin embargo, el valor de los bienes y servicios producidos se mide por su utilidad en términos económicos.

Por lo tanto, el éxito en la toma de decisiones depende de aquellos ingenieros que conociendo el aspecto técnico del problema, se preocupen por las consecuencias económicas del mismo.

La generación de alternativas .-

A la persona que toma las decisiones en una empresa se le conoce como ejecutivo. Las funciones del ejecutivo son varias; la primera es ocuparse de que los trabajos se realicen de tal forma que se cumplan las normas de la empresa. Esta es la actividad del ejecutivo que mas se conoce, y muchas veces es la única que se realiza.

La segunda función del ejecutivo es la de buscar nuevas opciones de trabajo, de tal modo que se puedan mejorar las utilidades, es decir, busca mejorar las normas de la empresa.

Vivimos en una económia de competecia, por eso, una empresa donde sus ejecutivos se preocupan solamente de que la actividades se realicen según lo establecido en las normas de la empresa, pronto se verá superada por sus competidores y su forma de trabajo se volverá obsoleta. Por tanto, es deber de los ejecutivos el buscar nuevas alternativas de solución a sus problemas.

Las decisiones económicas . -

En la ingeniería civil se presentan muchos casos en los que se deben tomar decisiones entre varias alternativas, con el propósito de elegir la mas redituable económicamente hablando.

Tomemos el ejemplo de un proyectista que debe decidir entre una estructura de acero, de concreto o mixta, en una obra de edificación. Todas las alternativas son tecnicamente factibles, por lo tanto la decisión debe ser económica, y para elegir deben considerarse factores tales como:

- Distinta cimentación, dependiendo del peso de la superestructura y por tanto distintos costos.
- Diferentes costos de conservación y mantenimiento en un cierto horizonte económico.
- Valores de recuperación variables.
- Disponibilidad de personal especializado en el lugar de construcción, etc.

Para efectuar el análisis económico deben compararse las diversas alternativas, de tal forma que las diferencias entre ellas se expresen hasta donde sea posible en términos monetarios.

Las decisiones se toman entre alternativas, es decir, para tomar una decisión deben haber al menos dos cursos posibles de acción.

Una positiva manera de pensar es el suponer que siempre hay una mejor forma de realizar un trabajo, aunque no la - hayamos descubierto aún, así, siempre debemos tender a buscar mejores alternativas.

Para que una empresa funcione bien, es necesario que se generen alternativas, se evaluen y se tome la decisión de adoptarlas o no, despues de analizarlas economicamente.

I.2 EL FLUJO DE EFECTIVO DE UN PROYECTO COMO RESULTANTE DE UN PROCESO DE TOMA DE DECISIONES.

Al tomar una decisión económica, el ingeniero debe aceptar la responsabilidad de esa elección, ya que la decisión - implica compromisos económicos futuros.

Si un ingeniero sugiere la compra de un camión para el - transporte de materiales, con un costo inicial de 20 millo - nes de pesos, esta aceptando implicitamente el compromiso de pagar todos sus costos futuros. Así, la decision de adquirir un camión ahora, incluye el pago de sus costos de operación. Supongamos que estos costos se estiman en 10 millones anuales y que la vida económica del camión es de cinco años, despues de los cuales tiene un valor de recuperación de 3 millones - de pesos. Los desembolsos pueden tabularse asi:

AÑO	DESEMBOLSOS (millones $)
0	20
1	10
2	10
3	10
4	10
5	10 - 3 (valor de recup.)

Donde el año cero corresponde al momento en que se compra el camión, y los años 1,2,3,4 y 5 al final del año - correspondiente.

Otra forma de representar los desembolsos es la siguiente:

Valor de recuperación= 3

20	10	10	10	10	10
0	1	2	3	4	5

Entonces al comprar el camión el compromiso total de gastos es : 20 + 5 (10) - 3 = 67 millones de pesos.

El flujo de efectivo . -

Toda empresa tiene ingresos (entradas) y desembolsos (salidas) de dinero. El resultante de estas entradas y desembolsos se conoce como flujo de caja, y puede definirse como:

Flujo de caja = Entradas - Desembolsos

Un flujo de caja positivo indica una entrada neta de dinero en un período dado, mientras un flujo negativo implica un desembolso neto en ese intervalo de tiempo.

Ejemplo I.2.1

Se compra una carretilla en 20,000 pesos, y se utiliza durante dos años con un costo de mantenimiento de $1,000/año y despues la vende en $ 8,000, tabulese el flujo de caja.

Solución:

AÑO	ENTRADAS	DESEMBOLSOS	FLUJO DE CAJA
0	0	20,000	- 20,000
1	0	1,000	- 1,000
2	8,000	1,000	7,000

El flujo de caja nos indica claramente que el año cero, es decir, en el presente gastaremos 20,000 pesos, el año uno gastaremos 1,000 pesos, y el año dos recibiremos 7,000.

Diagramas de flujo de caja . -

Un diagrama de flujo de caja o flujo de efectivo, es la representación gráfica de los flujos de caja dibujados en una escala de tiempo.

El tiempo cero se considera el presente, los tiempos 1, 2,3,...,n representan el final de los períodos 1,2,3...,n respectivamente.

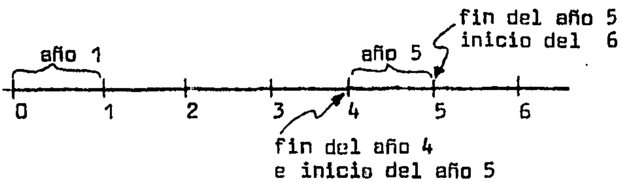


Fig. I.2.2 Ejemplo de una escala de tiempo.

En el diagrama se colocan flechas, cuya dirección indica si se trata de una entrada o un desembolso neto. Una flecha hacia arriba indica un flujo positivo, es decir, una entrada. Por el contrario una flecha hacia abajo un flujo negativo, esto es, un desembolso.

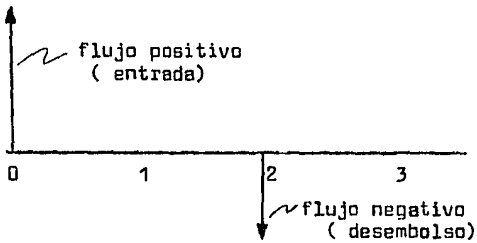
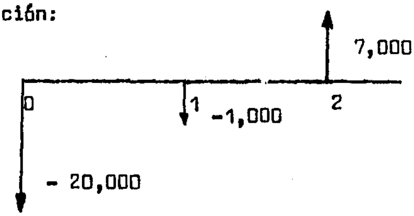


Fig. I.2.3 Ejemplo de flujos positivo y negativo.

Ejemplo I.2.2

Haga un flujo de caja para el ejemplo I.2.1 (compra de una carretilla).

Solución:



Como se puede observar los diagramas de flujo de caja - muestran de una manera clara los gastos y los ingresos que se presentan en los diferentes períodos, lo que permite el planear el tipo de financiamiento de ser necesario éste, y las entradas de efectivo a la empresa.

Una decisión puede alterar de manera importante el flujo de efectivo en un proyecto dado. Vease el siguiente ejemplo:

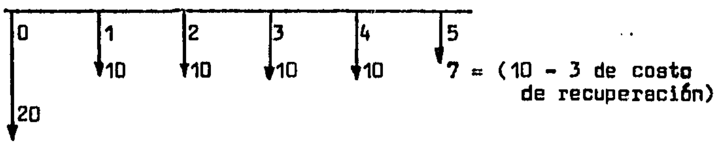
Ejemplo I.2.3

Se debe escoger entre dos camiones para acarreo de materiales. El primero tiene un costo inicial de 20 millones, un costo anual de operación de 10 millones y un valor de recuperación de 3 millones al terminar sus cinco años de vida económica. El segundo tiene un costo inicial de 30 millones, por su funcionamiento se gastan 8 millones anuales y despues de 5 años tiene un valor de recuperación de 5 millones.
¿ Cual es la mejor elección ?

Solución:

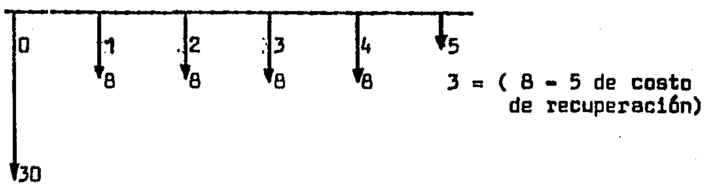
Los flujos de caja para ambas opciones son :

Primer camión



Desembolso total: 20 + 4(10) + 7 = 67 millones.

Segundo camión



Desembolso total: 30 + 4(8) + 3 = 65 millones.

Como el costo total del segundo camión es menor, se preferirá esta opción. Sin embargo, si no se tiene suficiente dinero en el tiempo cero, será recomendable optar por el primer camión y gastar sólo 20 millones en vez de los 30 requeridos en el segundo caso.

NOTA: Los costos de operación en problemas reales no son iguales, sino que se incrementan año con año. Ademas no se esta considerando el valor del dinero en el tiempo; ésto se estudia mas adelante.

En el ejemplo anterior se muestra como se puede variar - el flujo de caja al optar por diferentes alternativas. Es claro pues, que el flujo de efectivo en un proyecto dado es el resultado de la toma de decisiónes.

I.3 EL VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO.

El dinero es un medio de intercambio de bienes y servicios; vale en cuanto que permite obtener satisfactores. Es común que toda persona prefiera tener un satisfactor ahora a tenerlo dentro de un año. Entonces, si alguien tiene una suma de dinero ahora, sólo estará dispuesta a cambiarla por una suma futura mayor que la que tiene ahora.

INTERÉS:

El término interés se usa para referirse a la renta obtenida por el uso del dinero; es similar a la renta pagada por el uso de cualquier otro bien.

Así, cuando una persona invierte su dinero, ya sea en un banco, en acciones de una compañía o en otra empresa similar, espera obtener una cantidad mayor después de cierto tiempo. O por el contrario, si una persona solicita un préstamo hoy, después de cierto período deberá pagar una suma mayor que la recibida originalmente.

El interés es una medida de la variación entre el valor de la suma original y la cantidad acumulada al final de un período dado, es decir:

$$\text{Interés} = \begin{matrix}\text{Cantidad acumulada}\\ \text{al final del período}\end{matrix} - \text{Suma original}$$

Tasa de Interés:

Si el interés se expresa como un porcentaje de la cantidad original por unidad de tiempo, el resultado es una tasa de interés.

$$\text{Tasa de interés} = \frac{\text{Interés acumulado por unidad de tiempo}}{\text{Cantidad original}} \times 100\ \%$$

Ejemplo I.3.1

Si una compañía desea invertir 100 millones de pesos en una obra de edificación, con la idea de recibir 180 millones un año después:

a). ¿ cual es el interés obtenido por su inversión ?

b). ¿ cual es la tasa de interés obtenida ?

c). ¿Se deberá invertir si el banco paga 90 % anual ?

Solución:

a). Interés = Cant. acumulada - Suma original

Interés = 180 - 100 = <u>80 millones de pesos.</u>

b). $\text{Tasa de I.} = \frac{80 \text{ mill/año}}{100 \text{ mill}} \times 100\ \% = \underline{80\ \%\ \text{anual}}$

c). Como los intereses pagados por el banco son mayores que los obtenidos por la inversión, se concluye que invertir en la obra de edificación no es reditueble. Ademas, la inversión en el banco es segura, mientras que la otra tiene riesgos.

I.4 EL INTERES, SUS FORMULAS Y SIMBOLOS FUNCIONALES

En la sección anterior se analizaron situaciones donde se pagan los intereses después de transcurrido un período dado. Al tomar en cuenta mas de un período de interés, se deben considerar los términos interés simple e interés compuesto.

El interés simple . -

El interés simple se calcula utilizando sólo la suma original, ignorando los intereses acumulados en otros períodos. Su fórmula es:

$$I = P\,n\,i \qquad -(1)$$

Donde:

I= Interés total, después de pasados n períodos

P= Suma original o valor presente del dinero.

n= Numero de periodos considerados.

i= Tasa de interés.

Ejemplo I.4.1

Si se depositan $100,000 por 3 años al 80% de interés simple anual. ¿Cual será la cantidad acumulada al fin del plazo?

Solución:

$I = ?$ $\qquad\qquad I = P\,n\,i$

$P = 100{,}000$

$n = 3$ $\qquad\qquad I = 100{,}000\ (3)\ (0.80)$

$i = 0.80$

$\qquad\qquad I = 240{,}000$

Dinero acumulado = 100,000 + 240,000 = 340,000

También se puede tabular así:

Año	Inversión	Interés*	Cant. Acumulada	Cant. pagada
0	100,000	-	100,000	-
1	-	80,000	180,000	-
2	-	80,000	260,000	-
3	-	80,000	340,000	340,000

Tabla I.4.1 Interés Simple.

*El interés se carga sólo sobre la inversión original.

Comentario:

Los 80,000 de intereses acumulados el primer año no generaron intereses en los dos siguientes, asimismo, los 80,000 generados el segundo año tampoco tuvieron utilidades durante el tercero. Ni el capital ni los intereses fueron pagados hasta el final.

El interés compuesto . -

En este tipo de interés, los intereses generados en un período dado, se suman al capital para generar a su vez intereses, es decir, se ganan intereses sobre los intereses.

El interés compuesto es el mas aplicado, dado que refleja mejor el efecto del valor del dinero en el tiempo. En el resto de este trabajo sólo se tratará con interés compuesto.

Ejemplo I.4.2

Si se depositan los mismos 100,000 del ejemplo I.4.1 por 3 años, pero al 80% de interés compuesto anual ¿Cuanto dinero se recibirá después de 3 años ?

Solución:

Intereses al fin del año 1= 100,000 (0.80)= 80,000
Cant.Acumulada al fin de 1= 100,000+80,000=180,000

Intereses al fin del año 2= 180,000 (0.80)=144,000
Cant.Acumulada al fin de 2= 180,000+144000=324,000

Intereses al fin del año 3= 324,000 (0.80)=259,200
Cant.Acumulada al fin de 3=324,000+259,200=583,200.

Se puede tabular así:

AÑO	INVERSION	INTERES*	CANT.ACUMULADA	CANT.PAGADA
0	100,000	-	100,000	-
1	-	80,000	180,000	-
2	-	144,000	324,000	-
3	-	259,200	583,200	583,200

Tabla I.4.2 Interés Compuesto.

*El interés se calcula en función de la cantidad acumulada.

Comentario

El interés compuesto es mas realista, ya que considera no sólo el valor de la inversión original, sino que también toma en cuenta el interés que ganan intereses generados en períodos anteriores, es decir, se apega a la realidad.

El interés compuesto reconoce el valor del dinero en el tiempo. Así, en el ejemplo anterior se muestra que la cantidad original considerando interés compuesto acumula 583,200 en vez de los 340,000 generados considerando interés simple.

El cálculo del interés compuesto es muy importante, ya que actualmente en México se manejan tasas muy altas.

Simbología utilizada en el cálculo de intereses . -

En las relaciones matemáticas utilizadas en la ingeniería económica se usan estos símbolos:

	UNIDADES
P= Valor o suma de dinero en el presente	$
F= Suma de dinero en un tiempo futuro	$
A= Serie de cantidades iguales y periodicas	$/período
n= Número de períodos de interés analizados	-
i= Tasa de interés por período	%/período

Formulas de pago único . -

Si se invierte una cantidad P en el presente ¿ Cual será la suma acumulada después de n períodos ?

Después del período 1:

$$F = P + \underbrace{Pi}_{\text{interés}} = \underline{P(1+i)}$$

Después del período 2:

$$F = P(1+i) + \underbrace{P(1+i)i}_{\text{interés}} = P(1+i)(1+i) = \underline{P(1+i)^2}$$

Después del período 3:

$$F = P(1+i)^2 + P(1+i)^2 i = P(1+i)^2 (1+i) = \underline{P(1+i)^3}$$

Y así, después del año n:

$$\underline{F = P(1+i)^n} \qquad - (2)$$

Entonces si invertimos la cantidad P ahora, a una tasa i de interés durante n años, acumularemos la cantidad F.

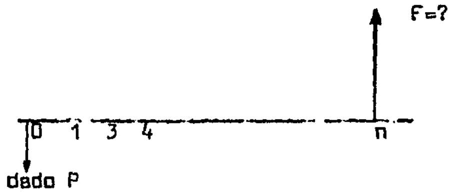


Fig. I.4.1

En la ecuación 2 el término $(1+i)^n$ se denomina factor valor-futuro pago-único (FVFPU).

Despejando P de la ecuación 2 podemos calcular el equivalente actual de una cantidad futura:

$$P = F \frac{1}{(1+i)^n} \qquad - (3)$$

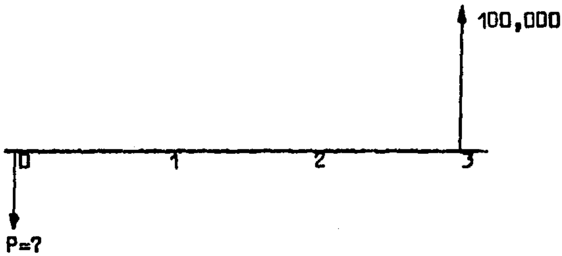
La expresión $1/(1+i)^n$ se llama factor valor-presente pago-único (FVPPU).

Ejemplo I.4.3

Si se desean acumular 100,000 pesos dentro de 3 años ¿Cuantos pesos de hoy debo invertir si la tasa de interés es de 70% anual?

Solución:

En un diagrama de flujo de caja se representa así:

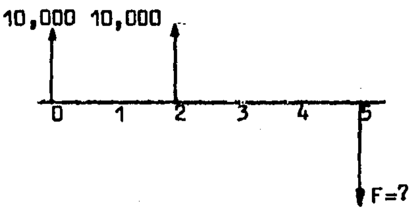


$$P = F \frac{1}{(1+i)^n} = 100{,}000 \frac{1}{(1+0.70)^3} = \underline{20{,}354.16}$$

Ejemplo I.4.4

Si pedimos prestados $10,000 a un banco hoy y dos años después pedimos otros 10,000, ¿que cantidad tendremos que pagar dentro de 5 años si la tasa de interés es del 60 % anual?

Solución: El diagrama de flujo de caja es el siguiente:



Usando la fórmula 2:

Los primeros 10,000 acumulan = $10{,}000(1+0.60)^5$

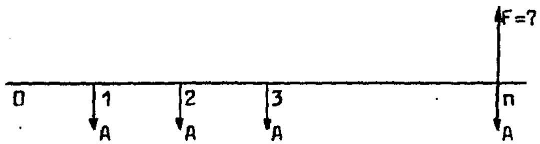
Los segundos 10,000 acumulan = $10{,}000(1+0.60)^3$

$$\text{Deuda total} = 10{,}000(1+0.60)^5 + 10{,}000(1+0.60)^3$$
$$= 104{,}857.6 + 40{,}960$$

<u>Deuda total= 145,817.6</u>

Fórmulas para series uniformes de pagos .-

FACTOR VALOR FUTURO SERIE UNIFORME: Si deposito anualmente una suma A de pesos durante n años ¿Que cantidad habre acumulado al final del plazo? Si la tasa anual es i. En un diagrama de flujo de caja se representa así:



Cada pago gana intereses durante los siguientes períodos. El primer pago durante n-1 períodos (dado que ocurre al final del año 1), el segundo pago durante n-2 períodos y así sucesivamente. Entonces:

$$F = A(1+i)^{n-1}+A(1+i)^{n-2}+A(1+i)^{n-3}+\ldots+A(1+i)^{1}+A \quad -\ (4)$$

Multiplicando (4) por (1+i) :

$$F = A(1+i)^{n}+A(1+i)^{n-1}+A(1+i)^{n-2}+\ldots+A(1+i)^{2}+A(1+i)-(5)$$

Restando (4) de (5) :

$$F(1+i)-F= A(1+i)^{n} - A$$
$$F(\ (1+i)-1)= A(1+i)^{n} - A$$
$$F\ (i) = A(1+i)^{n} - A$$

Finalmente:

$$F\ (i) = A\ ((1+i)^n - 1)$$

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \qquad -\ (\ 6\ )$$

El valor entre corchetes se llama factor valor-futuro serie-uniforme (FVFSU). Y es el número por el cual debe multiplicarse el valor A de la serie uniforme para calcular su valor futuro F.

FACTOR FONDO DE AMORTIZACION: Si deseamos acumular una cantidad F en n años ¿que serie de depositos iguales debemos efectuar a una tasa de interés i ?
El diagrama de flujo de caja es :

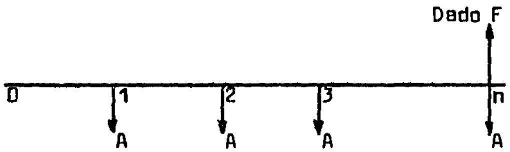


Fig. I.4.4

A partir de la ecuación (6) despejando A tenemos:

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n-1}\right] \qquad -\ (\ 7\ )$$

El valor entre corchetes se denomina factor fondo de amortización (FFA).

FACTOR VALOR PRESENTE SERIE UNIFORME: ¿Cual es el valor actual de una serie uniforme de n pagos anuales con una tasa de interés compuesto i ?, es decir, ¿ Cuanto debo-depositar para obtener una renta constante A durante n años?

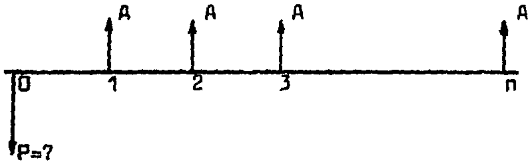


Fig. I.4.5

La ecuación (6) nos dice :

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$$

Y la ecuación (3) es :

$$P = F\,\frac{1}{(1+i)^n}$$

Sustituyendo (6) en (3):

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]\frac{1}{(1+i)^n}$$

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] \qquad - (8)$$

FACTOR DE RECUPERACION DE CAPITAL: ¿Cual es la serie de pagos A que equivale a un pago actual P ?

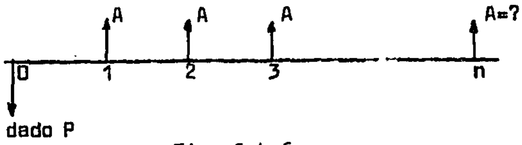


Fig. I.4.6

De la ecuación (8) despejando A :

$$A = P \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \qquad - (9)$$

El valor entre corchetes es el factor de recuperación de capital.

Ejemplo I.4.5

Se deberá efectuar un pago de un millon de pesos dentro de 8 años si i= 75% anual.

a). ¿Cuanto se deberá pagar ahora para evitar el pago futuro ?

b). Si deseo pagar una cantidad anual A, uniforme durante los proximos 8 años empezando a partir del fin del año 1. ¿Que cantidad A debo pagar ?

Solución:

a). $P = F \dfrac{1}{(1+i)^n} = 1{,}000{,}000 \dfrac{1}{(1.75)^8} = \underline{11{,}368.3}$

Es decir, 11,368.3 pesos de hoy equivalen a un millon del año 8.

b). $A=F \dfrac{i}{(1+i)^n-1}$ $\qquad A=F \dfrac{0.75}{(1+0.75)^8-1}$ $= 8{,}624.27$/ año

Pagar un millón de pesos dentro de ocho años es equivalente a efectuar 8 pagos de 8,624.27 anualmente a partir del final del año 1.

Tasas de Interés Nominal y Efectiva.-

No todas las tasas de interés se expresan como un interés anual compuesto, ya que a veces es necesario utilizar períodos más cortos como semestrales, trimestrales, bimestrales,etc. Para referirse a una tasa de este tipo se utiliza el término tasa nominal, la cual debe expresar cierto período de capitalización. El período de capitalizacion es el tiempo en el que se pagan los intereses, que a su vez generarán más intereses en los períodos subsecuentes. Así, paraun período de 6 meses,podemos hablar de una tasa nominal capitalizable semestralmente.

La tasa de interés nominal se define como la tasa de interés del período multiplicada por el número de períodos al año. Entonces, si tenemos una tasa de interés del 1% mensual, la tasa nominal será del 12% anual.

Ejemplo I.4.6

Si el banco paga el 5% mensual y depositamos 1,000 pesos:

a)¿Cuál es la tasa nominal? $\dfrac{5\ \%}{\text{mes}} \ \dfrac{12\ \text{meses}}{\text{año}} = \underline{60\%\ /\ \text{año}}.$

b)Cantidad acumulada: $F=P(1+0.05)^{12}=\underline{1795.9}$

c)Tasa efectiva: $i=\dfrac{\text{Intereses/año}}{\text{suma original}} \times 100\% = \dfrac{795.9}{1{,}000} \times 100\%$

$i=\underline{79.59\%}$

Comentario:

Como se muestra en el ejemplo, la tasa nominal es de - 60% anual, sin embargo por tratarse de un interés compuesto los intereses generados en un período, ganan a su vez mas - intereses y el inversionista obtiene $795.9 de intereses, - que corresponde a una tasa efectiva del 79.59% anual.

Entonces, cuando se considera el valor del dinero en el tiempo y se calcula el interés compuesto al calcular la tasa anual, esta se denomina tasa efectiva.

A cada período donde se carga interés se le llama período de capitalización.

Ejemplo: I.4.7

En un banco se expiden 2 tipos de pagares con rendimiento liquidable al vencimiento. El primer tipo gana el 90% de interés niminal capitalizado trimestralmente. El segundo tipo gana el 80% de interés nominal capitalizado mensualmente.

a). Calcule la tasa de interés efectiva para cada caso.

b). ¿Que tipo de pagare conviene adquirir ?

Solución:

a). Si invierto $1 :

Tipo 1:

$$\text{Tasa por período} = \frac{90\ \%}{4 \text{ trimestres al año}} = 22.5\%$$

$F = P(1+i)^n \qquad P = 1 \qquad i = 0.225 \qquad n = 4$ períodos

$F = 1(1+0.225)^4 = \$2.252$

Interés= F-P = 1.252

$$\text{Tasa de interés efectiva} = \frac{\$1.252/\text{año}}{\$1} \times 100\% = \underline{125.2\%\ \text{anual}}$$

Tipo 2 :

$$\text{Tasa por período} = \frac{80\ \%}{12\ \text{meses por año}} = 6.67\ \%$$

$F = P(1+i)^n$ $P=1$ $i= 0.0667$ $n= 12$ per.

$F = 1(1+0.0667)^{12} = 2.169$

Interés= F-P = 1.169

$$\text{Tasa de interés efectiva} = \frac{\$1.169/\text{año}}{\$1} \times 100\% = 116.9\ \%$$

b). Como la tasa de interés efectiva del pagare tipo 1 es mayor, conviene adquirir éste tipo de pagare.

Cálculo de la tasa de interés efectiva . -

Para calcular la tasa de interés efectiva usamos la - ecuación (2):

$$F = P(1+i)^n$$

Modificando la nomenclatura podemos escribir:

$$VFA = P(1 + \frac{r}{t})^t \qquad - (10)$$

Donde:

VFA= Valor del dinero a fin de año.

r= Tasa nominal.

t= Numero de períodos de capitalización por año.

$\frac{r}{t}$= Tasa de interés por período.

Sabemos que:

VFA= P + Intereses efectivos ganados en el año

VFA= P + P i Donde i= tasa de interés efectiva

Entonces

$$VFA = P(1+i) \qquad - (11)$$

Sustituyendo (11) en (10) :

$$\cancel{P}(1+i) = \cancel{P}(1 + \frac{r}{t})^t$$

$$(1+i) = (1 + \frac{r}{t})^t$$

$$i = (1 + \frac{r}{t})^t - 1 \qquad - (12)$$

La ecuación (12) sirve para calcular la tasa de interés efectiva i, a partir de la tasa nominal r y del número de períodos de capitalización por año t.

Ejemplo I.4.8

¿Cual es la tasa de interés efectiva que corresponde a una tasa nominal del 85% anual capitalizable semestralmente?

Solución:

r= 85% = 0.85

t= 2 períodos al año.

$$i = (1 + \frac{0.85}{2})^2 - 1$$

<u>i= 1.03 = 103 % anual efectivo.</u>

I.5 Equivalencia. -

Se dice que dos o mas cosas son equivalentes cuando tienen el mismo valor o estimación. El concepto de equivalencia nos sirve para comparar dos o mas situaciones.

En el caso de flujos de efectivo, dos de ellos son equivalentes a cierta tasa i, si sus valores actuales son iguales.

Ejemplo I.5.2

En dos lugares se vende gasolina, en el primero a un precio de 300 pesos por galón, mientras que en el segundo el precio es 85 pesos por litro . ¿ Donde conviene comprar ?

Solución:

Para poder analizar ambas alternativas debemos compararlas en bases equivalentes. Así, debemos convertir los galones a litros:

$$300 \frac{\$}{\cancel{gal}} \cdot \frac{\cancel{gal}}{3.8 \text{ lts}} = 78.95 \text{ \$/ lt}$$

Ahora si podemos comparar ambas alternativas, y es claro que nos conviene comprar donde se vende a 300 pesos el galón, es decir, a 78.95 pesos por litro.

En economía la equivalencia significa que sumas distintas de dinero en tiempos diferentes, pueden tener el mismo valor económico. Así, si la tasa de interés es de 90 % anual, \$1,000 de hoy equivalen a \$1,900 pesos del año próximo, es decir:

$$\underset{\text{De hoy}}{\$1,000} \Rightarrow 1,000 + \underset{\text{Interés}}{1,000\ (0.90)} = 1,000\ (1+ 0.90)$$

Entonces, podemos decir que recibir 1,000 pesos hoy es equivalente a recibir 1,900 pesos el año próximo. Los flujos de efectivo de estas dos opciones son los siguientes:

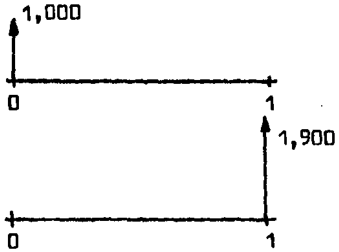


Fig. I.5.1

En la figura se puede observar que aunque los flujos son equivalentes, no son iguales,sin embargo, para poder compararse es necesario obtener sus equivalentes para un tiempo dado.

Es importante notar que la equivalencia entre las cantidades mostradas,es valida sólo para una tasa de interés del 90 % anual, si ésta cambia, las cantidades dejan de ser equivalentes.

Este mismo concepto es aplicable para flujos de caja variables y que comprendan varios periodos de tiempo.

I.6 NOTACION ESTANDAR DE LOS FACTORES DE INTERES.

Existe una notación estandar para los factores de interés. La utilización de este factor tiene grandes ventajas, ya que al resolver un problema podemos establecer claramente la ecuación de solución aún sin conocer los valores de los factores involucrados. Además, el significado de cada valor se mantiene presente durante la solución del problema. La forma general de esta notación es la siguiente:

$$(x/y \ , \ i\% \ , \ n)$$

donde (X) es la cantidad buscada, (Y) el valor dado, (i)la tasa de interés y (n) el número de períodos considerados. Los diferentes factores se muestran en la siguiente tabla:

FACTOR	NOTACION
Valor-presente pago único (FVPPU)	(P/F, i%, n)
Valor-futuro pago único (FVFPU)	(F/P, i%, n)
Valor-presente serie unif.(FVPSU)	(P/A, i%, n)
Recuperación de capital (FRC)	(A/P, i%, n)
Fondo de amortización (FFA)	(A/F, i%, n)
Valor-futuro serie unifor.(FVFSU)	(F/A, i%, n)

Tabla I.4

Los valores de los factores se pueden encontrar tabulados para diferentes valores de i y n en los apéndices de cualquier libro de ingeniería económica, o pueden calcularse con las fórmulas deducidas en la sección anterior.

Ejemplo I.6.1

Calcular los siguientes factores:

a). (p/F, 25%, 35), usando la ecuación (3): $P = F\frac{1}{(1+i)^n}$

$$(P/F,25\%,35) = \frac{1}{(1+0.25)^{35}} = 0.0004056$$

Usando las tablas se obtiene: 0.00041

b). (F/P, 110%, 2), usando la ecuación (2): $F = P\,(1+i)^n$

$$(F/P,110\%,2) = (1+1.10)^2 = 4.4100000$$

Usando las tablas se obtiene: 4.4100

c). (P/A, 17%, 10) usando la ecuación (8) : $P = A\,\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$

$$(p/A;17\%;10) = \frac{(1+0.17)^{10} - 1}{0.17(1+0.17)^{10}} = 4.6586036$$

Usando las tablas se obtiene: 4.6586

d). (A/P, 40%, 5) usando la ecuación (9): $A = p\,\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$

$$(A/P,40\%,5) = \frac{0.40(1+0.40)^5}{(1+0.40)^5 - 1} = 0.49136$$

Usando las tablas se obtiene: 0.49136

e). (A/F, 90%, 7) usando la ecuación (7): $A = F\,\frac{i}{(1+i)^n - 1}$

$$(A/F,90\%,7) = \frac{0.90}{(1+0.90)^7 - 1} = 0.01018$$

Usando las tablas se obtiene: 0.01018

f). (f/A, 100%,3) usando la ecuación (6): $F = A\,\frac{(1+i)^n-1}{i}$

$$(F/A,100\%,3) = \frac{(1+1.00)^3-1}{1.00} = 7.00000$$

Usando las tablas obtenemos: 7.0000

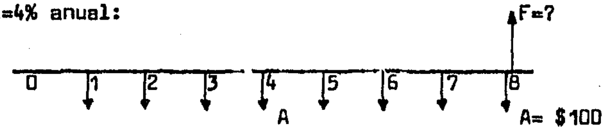
Una vez calculado el factor correspondiente, es facil obtener el valor buscado, esto se muestra en la siguiente tabla:

PARA CALCULAR	DADO	FACTOR	FORMULA
P	F	(P/F,i%,n)	P=F(P/F,i%,n)
F	P	(F/P,i%,n)	F=P(F/P,i%,n)
P	A	(P/A,i%,n)	P=A(P/A,i%,n)
A	P	(A/P,i%,n)	A=P(A/P,i%,n)
A	F	(A/F,i%,n)	A=F(A/F,i%,n)
F	A	(F/A,i%,n)	F=A(F/A,i%,n)

Tabla I.4.2 Fórmulas.

Ejemplo I.6.2

Calcule el valor futuro del siguiente flujo de caja si i=4% anual:

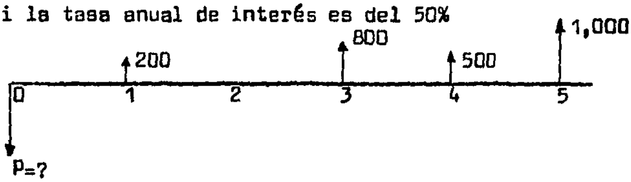


Solución:

F= A(F/A,4%,8)=(100)(f/A,4%,8)=100(9.214)= <u>$921.4</u>

Ejemplo I.6.3

¿Cual es el valor presente de la siguiente serie de ingresos si la tasa anual de interés es del 50%



Solución:

$P=200(P/F,50\%,1)+800(p/F,50\%,3)+500(P/F,50\%,4)+1000(P/F,50\%,5)$

$P=200(0.6667)+800(0.2963)+500(0.1975)+1000(0.1317)$

$\underline{P= \$600.83}$

Puede observarse que esta notación estándar es practica y clara, por lo que se recomienda su uso.

Además, es fácil de usar y en muchos problemas los valores tabulados de los factores son útiles y de fácil acceso. Las tablas se pueden encontrar en los apéndices de cualquier libro de ingeniería económica.

II. COMPARACION DE ALTERNATIVAS.

II. COMPARACION DE ALTERNATIVAS.

Toda empresa dedica sus esfuerzos hacia la optimización de sus recursos, con el fin de tener utilidades. Cada erogación realizada con la esperanza de obtener utilidades se denomina inversión. Las empresas se enfrentan a varias alternativas para invertir sus recursos, que son limitados, por lo tanto es indispensable desarrollar técnicas que nos permitan evaluar las diferentes alternativas y así poder elegir las más redituables, desde el punto de vista económico.

II.1 Alternativas mutuamente excluyentes.-

Conceptos básicos:

PROPUESTAS DE INVERSION: Una propuesta de inversión es un proyecto único considerado como posibilidad de inversión.

ALTERNATIVA DE INVERSION: Es una posible opción de decisión.

Así, toda propuesta puede ser una alternativa de inversión, sin embargo, una alternativa de inversión puede estar formada por un grupo de propuestas de inversión. Para ilustrar estos conceptos veanse los siguientes ejemplos:

Ejemplo II.1.1

La empresa INDECI S.A. tiene dos propuestas de inversión:

A. Construir un centro comercial.

B. Construir un edificio de departamentos.

Encontrar las posibles alternativas de inversión.

Solución:

Considerando estas dos propuestas, se pueden formular - las siguientes alternativas:

ALTERNATIVAS	Xa	Xb
No hacer nada (rechazar A y B)	0	0
Aceptar sólo la alternativa A.	1	0
Aceptar sólo la alternativa B.	0	1
Aceptar las alternativas A y B.	1	1

En la tabla, la variable Xa tiene el valor 0 si la propuesta A se descarta, y vale 1 si se acepta. Lo mismo sucede con la variable Xb.

PROPUESTAS INDEPENDIENTES: Cuando la aceptación de una propuesta dentro de un grupo no tiene ningún efecto sobre la aceptación de otra propuesta, se dice que son independientes.

PROPUESTAS MUTUAMENTE EXCLUYENTES: Si la aceptación de una propuesta impide la aceptación de otra, se dice que las propuestas son mutuamente excluyentes.

PROPUESTAS CONTINGENTES: Si una propuesta no puede ser seleccionada a menos que se haya elegido otra, se dice que son contingentes. Es una dependencia en un solo sentido entre un grupo de propuestas, es decir, la aceptación de una propuesta contingente depende de la aceptación de otra propuesta, pero la aceptación de esta última es independiente de la propuesta contingente.

Estas interdependencias son generalmente muy complejas y dependen del tipo de inversión, del dinero disponible en la empresa en ese instante y de las condiciones del mercado.

La definición de las alternativas de inversión es de fundamental importancia para la obtención de los mejores resultados y depende en gran parte de la identificación de las diferentes propuestas y de sus interdependencias.

Alternativas Mutuamente Excluyentes.-

En este trabajo examineremos el problema de seleccionar la alternativa o conjunto de alternativas que maximicen las ganancias del inversionista.

Dado que la aceptación de una alternativa impide la aceptación de cualquier otra, se considera que se trata de alternativas mutuamente excluyentes.

Formación de alternativas mutuamente excluyentes. -

Considerese un grupo de n propuestas de inversión, sea X_j una variable binaria que vale 0 si la propuesta j no se incluye en la alternativa de inversión y 1 si es incluida. Usando la variable X_j se pueden formar 2^n alternativas mutuamente excluyentes (permutaciones de 2 números tomados de n en n, con repetición).

Ejemplo II.1.2

Se tienen 3 propuestas de inversión para un problema de movimiento de tierras:

A. Usar una motoescrepa y un tractor empujador.

B. Usar una segunda motoescrepa.

C. Usar un cargador y dos camiones.

Encontrar el conjunto de alternativas mutuamente excluyentes, tomando en cuenta que:

- La propuesta B es contingente, ya que para operar la segunda motoescrepa se necesita el tractor empujador de la propuesta A.
- Las propuestas A y C son mutuamente excluyentes, es decir, o se mueve el material con motoescrepas o con camiones, pero no se desea una combinación de ambos sistemas.

Solución:

Tenemos 3 propuestas de inversión $n=3$, por tanto debe haber $2^3 = 8$ diferentes alternativas mutuamente excluyentes, que se muestran en la tabla siguiente:

Alternativa	PROPUESTAS X_a	X_b	X_c	Descripción de la alternativa
1	0	0	0	No hacer nada
2	1	0	0	Aceptar propuesta A
# 3	0	1	0	Aceptar propuesta B
4	0	0	1	Aceptar propuesta C
5	1	1	0	Aceptar prop. A y B
# 6	1	0	1	Aceptar prop. A y C
# 7	0	1	1	Aceptar prop. B y C
# 8	1	1	1	Aceptar prop. A,B y C.

No son factibles tomando en cuenta las condiciones de dependencia.

Dado que la propuesta B no puede ser aceptada sin aceptarse la A por ser contingente, las alternativas 3 y 7 no son factibles.

Las alternativas 6 y 8 no deben ser consideradas, ya que se estableció que las propuestas A y C son mutuamente excluyentes.

Así, considerando las restricciones dadas, tenemos sólo 4 alternativas factibles en vez de las 8 mencionadas.

II.2 HORIZONTE DE PLANEACION.

Al comparar alternativas de inversión es muy importante que éstas sean consideradas para un período común. El período considerado en la evaluación se denomina horizonte de planeación.

Cuando las alternativas de inversión tienen vidas utiles iguales, es fácil compararlas dado que el horizonte de planeación lo determinan sus vidas utiles. Pero ¿cómo comparar alternativas con diferentes vidas utiles?

Los métodos más usados son: el mínimo común múltiplo de las vidas utiles de las alternativas mutuamente excluyentes; este período se denomina $\hat{T}$. La vida máscorta del conjunto de alternativas T_c. La vida más larga del conjunto de alternativas T_l. Algún período más corto que $\hat{T}$. Algún período más largo que $\hat{T}$. Calculando el costo anual uniforme equivalente de cada alternativa.

A continuación analizaremos cada caso:

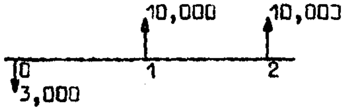
Mínimo común múltiplo de las vidas utiles:

Si se utiliza un período igual al mínimo común múltiplo de las vidas utiles, se supone que cada alternativa se repite en las mismas condiciones hasta que se acumule un número de períodos igual al horizonte de planeación.

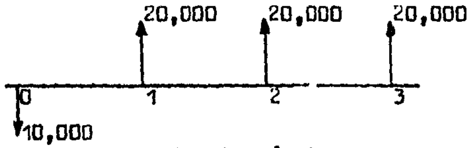
Para ilustrar este procedimiento veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo II.2.1

Debemos elegir entre dos alternativas de inversión, sus respectivos flujos de caja se muestran a continuación:



Alternativa A, vida útil 2 años.

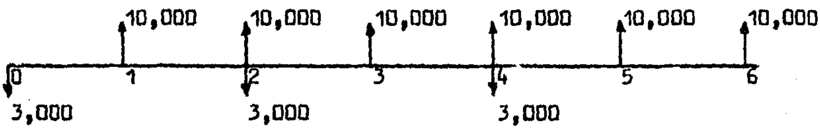


Alternativa B, vida útil 3 años.

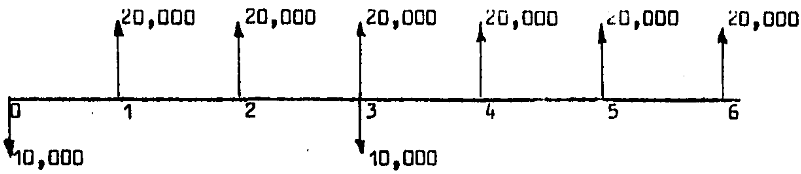
Determine el mínimo común múltiplo de las alternativas y haga el diagrama de flujo de caja de cada alternativa durante el horizonte de planeación determinado.

Solución:

El mínimo común múltiplo es 6 años, así para evaluar cada alternativa supondremos que la A se repetirá 3 veces, mientras que la alternativa B 2 veces durante el horizonte considerado. Los flujos serán:



Flujo de la alternativa A.



Flujo de la alternativa B.

Comentario:

Este procedimiento no es siempre practico, ya que si por ejemplo tuvieramos que evaluar 2 alternativas con vidas de 10 y 11 años respectivamente, el mínimo común múltiplo sería 110 años, lo que nos lleva a un horizonte demasiado amplio, muy alejado de la realidad, es claro pues que no se debe usar - siempre este método, sino utilizar el criterio del analista para determinar el horizonte de planeación.

La vida mas corta del conjunto de alternativas T_c .

Si usamos como horizonte de planeación la vida de la alternativa mas corta, tenemos que considerar de alguna forma los flujos de caja de las alternativas de mayor duración en los años no considerados. Una forma de considerar los flujos de caja de los años no comprendidos en el horizonte de planeación, es suponer un valor equivalente de estos flujos en el ultimo año del horizonte establecido.

La vida más larga del conjunto de alternativas T_1:

Si usamos como horizonte de planeación la vida útil más larga de las alternativas, hay que tomar en cuenta el hecho de que durante el período comprendido entre T_c y T_1 pueden modificarse las condiciones actuales, ya que al concluir el período T_c (vida útil más corta), pueden existir nuevas operaciones de inversión, que difícilmente pueden ser estimadas en el presente. Así, para estimar el flujo de caja de las alternativas con vidas menores que T_1, tenemos que suponer sus flujos futuros, cosa muy difícil e imprecisa, por lo que este procedimiento rara vez se emplea.

Considerar algún período más corto o más largo que $\hat{T}$:

Algunas empresas tienen un período de planeación estándar para cada tipo de proyecto, denotado T. Así, si $T < \hat{T}$, los flujos de caja de cada alternativa deben darse para un período de tiempo T, tomando las consideraciones necesarias para evaluarlos. Si $T \geq \hat{T}$, se deben analizar las alternativas en un período $\hat{T}$, porque no tiene caso extender el análisis más, ya que éste sería repetitivo; además después del tiempo $\hat{T}$ habrá más información disponible para planificar los años siguientes.

Calculando el costo anual uniforme de cada alternativa:

En este procedimiento los flujos de caja de cada alternativa se transfomrman en un costo anual uniforme equivalente, esto es, en un pago anual uniforme (CAUE).

La ventaja de este método es que no es necesario hacer las comparaciones sobre el mismo período, ya que de repetirse la inversión en una alternativa dada, el costo anual uniforme equivalente (CAUE) sería el mismo.

Ejemplo II.2.4

Para las alternativas del ejemplo II.2.1 calcule los costos anuales uniformes equivalentes.

Solución:

$$CAUE_A = -3{,}000(A/P,80\%,2) + 10{,}000$$
$$= -3{,}000(1.1571428) + 10{,}000 = \underline{6{,}528.57}$$

$$CAUE_B = -10{,}000(A/P,80\%,3) + 20{,}000$$
$$= -10{,}000(0.965563) + 20{,}000 = \underline{10{,}344.37}$$

Una vez calculado el CAUE de las alternativas es facil - determinar cual es la mejor económicamente hablando. En este caso es claro que optar por la B es mas conveniente.

Comentario:

En la elección del horizonte de planeación debe tenerse en cuenta el tipo de problema analizado, así como la experiencia adquirida al evaluar inversiones similares.

II.3 Tasa MINIMA ATRACTIVA DE RENDIMIENTO.

Dado que el dinero tiene un valor en el tiempo, las empresas usan el dinero para obtener máquinas, materiales y mano de obra, elementos que bien coordinados producen utilidades. Estas utilidades se atribuyen a la productividad del capital.

Costo del capital . -

Quien usa el capital debe pagar intereses a quien lo proporciona. Así, para el deudor el interés pagado es lo que le cuesta usar el dinero. Y para el acreedor es la utilidad deseada, es decir, el interés que recibe es el valor que atribuye a la productividad de su dinero.

El costo del capital es independiente del uso que se le dé, así, no importa si el deudor invierte el dinero o sólo lo guarda, de cualquier forma deberá pagar los mismos intereses.

Costo de oportunidad . -

Cada persona o empresa se enfrenta a múltiples alternativas de inversión, cada vez que se invierte en una de ellas se pierde la oportunidad de obtener los beneficios de invertir ese dinero en otraalternativa. Por ejemplo, supongase que una empresa adquiere un edificio para sus oficinas con fondos propios, en vez de invertirlos en un banco al 80% anual.

Así, al comprar el edificiose pierde la oportunidad de - obtener utilidades al 80% anual, entonces se puede considerar que el costo del capital para financiar el edificio es igual al costo de la pérdida de oportunidad, es decir, al 80 % anual. Esto significa que el capital aun siendo propio tiene - un costo para la empresa.

Tasa mínima atractiva de rendimiento . -

Por tener capital limitado, al analizar las diversas propuestas de inversión la empresas deben buscar las mas reditaubles, es decir, aquellas que les produzcan un rendimiento mayor.

El interés o ganancia obtenida por cada inversión determina la tasa de interés o tasa de rendimiento proporcionada. A cada inversión que se realice debe exigirsele una tasa mínima de rendimiento, para que sea atractiva a el inverionista. Esta tasa se denomina tasa mínima atractiva de rendimiento (TMAR). Pero, ¿ Como se establece esta tasa ?

Hay muchas formas de fijarla, enseguida se explican las mas comunes:

- Sumando un procentaje al costo de capital de la empresa, Por ejemplo, si a una empresa obtener el capital le cuesta 80% al año, debe esperar una utilidad mayor al 80% anual para que la inversión se justifique.
- Usar la tasa de retorno promedio, obtenida por la empresa en las inversiones de los ultimos años. Esto es, si en las pasadas inversiones se obtuvo una tasa promedio de rendimiento de 95% anual, ésta será la TMAR exigida para las nuevas inversiones.

- Usar diferentes TMAR para diferentes horizontes de planeación. Por ejemplo, para inversiones a largo plazo - se puede exigir una TMAR mayor que para otras a corto plazo, ya que generalmente a mayor plazo se tienen mayores riesgos.

- Usar diferentes TMAR para diferentes inversiones iniciales. Es de esperarse que entre mayor sea la inversión - inicial, mayor será la utilidad deseada, por lo que se exigirá una TMAR mayor para inversiones iniciales altas.

- Usar TMAR diferentes para nuevas inversiones. Si se desea invertir en proyectos nuevos o riesgosos, debemos utilizar una TMAR mayor, para protegernos de errores - al estimar el futuro.

- En función de las alternativas de inversión y de la - existencia de fondos en la empresa. Si la empresa tiene poco dinero se exigirá una TMAR muy alta, ya que sólo se podrá invertir en las alternativas mas redituables. Por el contrario si sus fondos son abundantes, se exigirá una TMAR menor, para así utilizar la mayor cantidad de dinero posible en las diferentes alternativas de inversión. El ejemplo II.3.1 ilustra este método para determinar la TMAR.

Ejemplo II.3.1

Una empresa tiene las siguientes alternativas de inversión:

Alternativa	Inversión*	Rendimiento esperado
A	29	95 %
B	18	120 %
C	22	90 %
D	31	110 %

* El valor de la inversión se expresa en millones de pesos en la tabla anterior.

a). ¿ Cual será la TMAR si se dispone de 50 millones de pesos para invertir ?

b). ¿ Cual será la TMAR si se dispone de 80 millones de pesos para invertir ?

Solución:

El objetivo del análisis es invertir la mayor cantidad de dinero en las alternativas mas redituables, de tal forma que la inversión total no sobrepase la cantidad disponible, y rechazar las alternativas con menor rendimiento.

Colocando las laternativas en orden decreciente de su rendimiento esperado:

Alternativa	Inversión	Rend. Esperado	Inversión Acumulada
B	18	120 %	18
D	31	110 %	49
A	29	95 %	78
C	22 Millones	90 %	100 Millones

a). En la tabla se puede observar que con los 50 millones de pesos disponibles podemos invertir en las alternativas B y D, que son las mas redituables. Podemos decir que se va a invertir en los proyectos con tasa de rendimiento mayor o igual al 110% anual, es decir, la TMAR es del 110% anual.

b). En la tabla se puede ver que los 80 millones son suficientes para invertir en las alternativas B,D y A, que son las mas redituables. En este caso estamos invirtiendo enproyectos con tasas de rendimiento mayores o iguales al 95%, es decir, la TMAR es del 95% anual.

La TMAR es pues, una medida del rendimiento mínimo deseado en una inversión. Al examinar una alternativa de inversión debemos aceptarla si nos proporciona un rendimiento mayor o igual a la TMAR establecida.

II.4 MEDIDAS DE EFECTIVIDAD ECONOMICA.

Hay muchas formas de comparar alternativas de inversión, las técnicas mas comunes son las siguientes:

1. Método del valor presente: Consiste en convertir todos los flujos de caja en un solo valor equivalente en el tiempo cero.
2. Método del costo anual uniforme equivalente (CAUE): Convierte todos los flujos de caja en una serie anual uniforme equivalente en el horizonte de planeación.
3. Método del valor futuro: Convierte todos los flujos de caja en un solo valor equivalente en el último año del horizonte de planeación.
4. Método del período de reembolso: Determina en cuanto tiempo se recupera la inversión inicial, considerando una tasa de interés nula.
5. Método de la tasa de retorno: Determina la tasa de interés que nos da un valor futuro igual a cero.
6. Método de la relación Beneficio-Costo: Determina la relación existente entre el valor presente de los beneficios y el valor presente de los costos.

A excepción del método número cuatro (período de reembolso), los demás son equivalentes y por lo tanto al usarse para comparar un grupo de alternativas, nos proporcionaran las mismas recomendaciones. El uso de un método dado depende de las preferencias de la empresa y de la conveniencia de presentar los resultados de una forma o de otra.

II.4.1 METODO DEL VALOR PRESENTE.

Como se explicó consiste en obtener un valor equivalente de los flujos de caja de cada alternativa en el año cero.

El valor presente equivalente de todos los flujos de caja de la alternativa j es:

$$VP_j(i) = \sum_{t=0}^{n} A_{jt}(P/F, i\%, t) \qquad (1.a)$$

o de otra forma:

$$VP_j(i) = \sum_{t=0}^{n} A_{jt}/(1+i)^t \qquad (1.b)$$

Donde:

$VP_j(i)$ = Valor presente de la alternativa j usando una TMAR de i%.

n = Períodos considerados en el horizonte de planeación.

A_{jt} = Flujo de caja para la alternativa j en el período t.

i = TMAR.

Al usar este método, la alternativa con el mayor valor presente será la recomendada.

II.4.2 METODO DEL COSTO ANUAL UNIFORME EQUIVALENTE (CAUE).

El CAUE de la alternativa j con una tasa mínima atractiva de rendimiento i, se calcula como sigue:

$$CAUE_j(i) = \left[\sum_{t=0}^{n} A_{jt}(P/F,i\%,t) \right] (A/P,i\%,n) \qquad (2.a)$$

$$CAUE_j(i) = \quad VP_j(i)\ (A/P,i\%,n) \qquad (2.b)$$

Donde:

$CAUE_j(i)$ = Es el costo anual uniforme equivalente de la alternativa j a una tasa i.

Con este método la alternativa que tiene el mayor valor anual uniforme durante el horizonte de planeación, es la recomendada.

II.4.3 METODO DEL VALOR FUTURO.

El equivalente futuro de todos los flujos de caja de la alternativa j con una TMAR de i% en un horizonte de planeación de n períodos es:

$$VF_j(i) = \sum_{t=0}^{n} Ajt\ (1+i)^{n-t} \qquad (3.a)$$

Es decir:

$$VF_j(i) = VP_j(i)\ (F/P,i\%,n) \qquad (3.b)$$

Este método es equivalente al del valor presente y al CAUE. La alternativa con el mayor valor futuro es la preferida.

Ejemplo II.4.1

Determinar cual es la alternativa mas redituable del conjunto mostrado en la tabla. Considere una TMAR= 100% anual, por los siguientes métodos:

a). Valor presente.

b). CAUE.

c). Valor futuro.

AÑO	Alternativas A_{1t}	A_{2t}	A_{3t}
0	-2	-5	-8
1	-1	4	8
2	8	10	12
3	8	10	12
4	8	10	12

Flujos de caja para cada alternativa en millones de pesos.

Solución:

a). Valor Presente:

$$VP_1(100\%) = -2 -1/(1+1)+8/(1+1)^2+ 8/(1+1)^3+ 8/(1+1)^4$$
$$= \underline{1.000}$$

$$VP_2(100\%) = -5 +4/(1+1)+10/(1+1)^2+ 10/(1+1)^3+10/(1+1)^4$$
$$= \underline{1.375}$$

$$VP_3(100\%) = -8 +8/(1+1)+12/(1+1)^2+ 12/(1+1)^3+12/(1+1)^4$$
$$= \underline{1.250}$$

Dado que la alternativa 2 tiene un valor presente mayor, este método recomienda invertir en la alternativa 2.

b). CAUE :

$CAUE_j(100\%) = VP_j(100\%)\ (A/P, i\%, n)$

$CAUE_1(100\%) = 1\ (A/P, 100\%, 4) = 1(1.0667) = \underline{1.0667}$

$CAUE_2(100\%) = 1.375(1.0667) = \underline{1.4667}$

$CAUE_3(100\%) = 1.250(1.0667) = \underline{1.3333}$

Como la alternativa 2 tiene un CAUE mayor, se recomienda invertir en ella.

c). Valor futuro :

$$VF_j(100\%) = \sum_{t=0}^{4} A_{jt}(1+i)^{4-t}$$

$VF_1(100\%) = -2(2)^4 - 1(2)^3 + 8(2)^2 + 8(2) + 8 = \underline{16.0}$

$VF_2(100\%) = -5(2)^4 + 4(2)^3 + 10(2)^2 + 10(2) + 10 = \underline{22.0}$

$VF_3(100\%) = -8(2)^4 + 8(2)^3 + 12(2)^2 + 12(2) + 12 = \underline{20.0}$

O también se puede calcular a partir del valor presente:

$VF_j(100\%) = VP_j(100\%)\ (F/P, 100\%, 4) = VP_j(100\%)(16)$

$VF_1(100\%) = 1.000\ (16) = \underline{16.0}$

$VF_2(100\%) = 1.375\ (16) = \underline{22.0}$

$VF_3(100\%) = 1.250\ (16) = \underline{20.0}$

El método del valor futuro da un mayor valor a la alternativa 2, por lo que ésta es la recomendada.

Observaciones:

Como se puede ver estos métodos son equivalentes y todos ellos dan el mismo resultado, es decir, todos recomiendan invertir en la alternativa 2.

II.4.4 METODO DEL PERIODO DE REEMBOLSO.

Este método consiste en determinar el tiempo en el que se recupera la inversión inicial a una tasa de interés del 0%.

Sea: II = Inversión inicial.

R_{jt} = Ingresos recibidos por la alternativa j en el tiempo t.

Si además de la inversión inicial no existe otro flujo de caja negativo, entonces el menor valor de m que satisface la siguiente relación:

$$\sum_{t=1}^{m} R_{jt} \geq II$$

define el período de reembolso para la alternativa j. La alternativa que tiene el menor período de reembolso es la recomendada por este método.

Ejemplo II.4.2

Para los datos del ejemplo II.4.1 obtenga los períodos de retorno de cada alternativa.

Solución:

Alternativa 1:

Como la alternativa 1 tiene flujos negativos en los años cero y uno, podemos considerar que la inversión inicial se realiza en el año cero y es igual a la suma de los flujos de ambos años. Por esto supondremos un flujo de -3 en el año cero y de 0 en el año uno, es decir, II = 3.

Así si m=2

$$\sum_{t=1}^{2} R_{1t} = 0+8 > II$$

Por lo tanto el período de reembolso es de 2 años.

Alternativa 2:

II = 5 millones .

Si m=1

$$\sum_{t=1}^{1} R_{2t} = 4 < II$$

Si m=2

$$\sum_{t=1}^{2} R_{2t} = 4+10 = 14 > II$$

Por lo tanto el período de reembolso es de 2 años.

Alternativa 3 :

II = 8 Millones .

Si m=1

$$\sum_{t=1}^{1} R_{3t} = 8 = II$$

Por lo tanto el período de reembolso es de 1 año.

Observaciones:

Como el período de reembolso de la alternativa 3 es de 1 año, es decir, es el menor, según este método, es preferible invertir en la alternativa 3.

Como se puede observar, la recomendación de este método es diferente a la del valor presente, el CAUE y el valor futuro. Esto se debe a que el método del período de reembolso tiene la gran falla de no considerar el valor del dinero en el tiempo.

II.4.5 METODO DE LA TASA INTERNA DE RETORNO.

La tasa interna de retorno (TIR), se define como la tasa de interés que hace que el valor futuro (o presente o anual) equivalente de los flujos de caja sea igual a cero.

La tasa interna de retorno de la alternativa j es tal, que satisface la siguiente ecuación:

$$0 = \sum_{t=0}^{n} A_{jt}(1 + i_j^*)^{n-t} \qquad (4)$$

donde:

A_{jt} = es el flujo de efectivo de la alternativa j en el período t.

i_j^* = es la tasa interna de retorno de la alternativa j.

t = período de tiempo.

n = número de períodos en el horizonte de planeación.

Sea $X = (1+i_j^*)$ y sustituyendo en la ecuación 4 :

$$0 = \sum_{t=0}^{n} A_{jt}\, X^{n-t}$$

Desarrollando la ecuación tenemos:

$$0 = A_{j0}X^{n} + A_{j1}X^{n-1} + A_{j2}X^{n-2} + \dots + A_{jn-1}X + A_{jn}$$

Que es una ecuación de grado n, que puede tener n raices distintas, sin embargo, el número de raices reales positivas de un polinomio de grado n con coeficientes reales, es menor o igual a el número de cambios de signos en los flujos de caja $A_{j0}, A_{j1}, \dots A_{jn}$. Puesto que la mayor parte de los flujos de caja empiezan con un flujo negativo, seguidos de flujos positivos, generalmente se presenta una sola raíz.

La TIR nos indica que utilidad nos produce una alternativa dada.

Ejemplo II.4.3

Si invertimos 2,000 pesos ahora y se nos prometen 5,000 a fin de año ¿ Cual es la TIR de la inversión ?

Solución:

$$0 = \sum_{t=0}^{n} A_{1t}(1+i_j^*)^{n-t}$$

$$0 = \sum_{t=0}^{n} A_{1t}(1+i_j^*)^{1-t}$$

Sabemos que $A_{10} = -2{,}000$ y $A_{11} = 5{,}000$, entonces:

$$0 = -2{,}000(1+i_j^*)^{1} + 5{,}000(1+i_j^*)^{0}$$

$$0 = -2{,}000(1+i_j^*) + 5{,}000$$

Despejando i_j^* :

$$2{,}000(1+i_j^*) = 5{,}000$$

$$(1+i_j^*) = 5{,}000/2{,}000 = 2.5$$

$$i_j^* = 2.5 - 1 = \underline{1.5} = \underline{150\ \%}$$

Entonces la tasa interna de retorno de la inversión es del 150 % anual. Esto significa que se debe invertir en esta alternativa si no tenemos otra con una tasa mayor. Mas adelante se estudiará el método incremental, que es el que se debe usar para comparar alternativas por medio de la TIR.

II.4.6 METODO DE LA RELACION BENEFICIOS/ COSTOS (B/C).

Este método también llamado relación ahorros/ inversiones, determina la relación existente entre el valor presente de los beneficios y el valor presente de los costos. En una inversión se espera que los beneficios superen a los costos, por lo que es deseable una relación B/C mayor que la unidad.

Si consideramos los flujos de caja negativos como costos y los flujos positivos como beneficios, entonces la relación B/C se define como :

$$B/C_j(i\%) = \frac{\sum_{t=0}^{n} B_{jt}(1+i)^{-t}}{\sum_{t=0}^{n} C_{jt}(1+i)^{-t}}$$

Donde :

B_{jt} = Es el flujo positivo de la alternativa j en el tiempo t.

C_{jt} = Es el flujo de caja negativo en el tiempo t.

Ejemplo II.4.4

Considérese el mismo caso del ejemplo II.4.3 donde se invierten 2,000 pesos ahora con la promesa de recibir 5,000 pesos a fin de año. Calcule la relación B/C para una tasa del 100% anual.

$$B/C_1(100\%) = \frac{5,000\ (1+1)^{-1}}{2,000\ (1+1)^{0}} = \frac{2,500}{2,000} = \underline{1.25}$$

Como la relación B/C es mayor que uno, se concluye que la alternativa es económicamente deseable, es decir, se tienen mayores beneficios que costos.

II.4.7 METODOS INCREMENTALES.

Al comparar alternativas de inversión mutuamente exclusivas usando los métodos antes descritos es muy útil usar una aproximación incremental. Este método se basa en analizar las diferencias de los flujos de caja de las diversas alternativas; estudia qué sucede al ir incrementando las inversiones, dado que estamos interesados en invertir la mayor cantidad de dinero en alternativas con una tasa de rendimiento mayor o igual a la TMAR .

El procedimiento paso a paso para realizar un análisis para comparaciones del valor presente, valor anual , valor futuro, relación B/C y tasa interna de retorno es similar.

A continuación se explica el procedimiento para el caso de la tasa interna de retorno:

1. Ordene las alternativas de menor a mayor inversión. Pase al punto 2.
2. Calcule la TIR para la alternativa con la menor inversión. Pase al punto 3.
3. Si la TIR obtenida en 2 es menor que la TMAR, entonces elimine la alternativa considerada y pase al punto 1. Si la TIR obtenida en 2 es mayor o igual a la TMAR entonces pase al punto 4.
4. Calcule la TIR para la diferencia de flujos de caja de las 2 alternativas con la menor inversión inicial. Pase al punto 5.
5. Si la TIR obtenida en 4 es menor que la TMAR, entonces elimine la alternativa con mayor inversión de las dos. Si la TIR obtenida en 4 es mayor o igual que la TMAR, entonces elimine la alternativa con menor inversión de las dos. Pase al punto 6.
6. Si sólo queda una alternativa, ésta será la preferida. Si queda mas de una alternativa pase al punto 4.

Ejemplo II.4.5

Aplique el método de la tasa de retorno incremental a las alternativas del ejemplo II.4.1

	ALTERNATIVAS		
AÑO	A_{1t}	A_{2t}	A_{3t}
0	-2	-5	-8
1	-1	4	8
2	8	10	12
3	8	10	12
4	8	10	12

TMAR = 100%

Solución:

1. El orden creciente es 1,2 y 3.

2. La TIR para la alternativa 1 es:

$$0 = -2(1+i_1^*)^4-1(1+i_1^*)^3+8(1+i_1^*)^2+8(1+i_1^*)+8$$

Por tanteos:

i_1	$f(i_1^*)$
1	16
2	-85
1.5	-15.75
1.3	0.584
1.30848	0.000

Por lo tanto TIR = 130.8 %

3. Como TIR TMAR = 100% entonces pasamos al punto 4.

4. Las dos alternativas con menor inversión son 1 y 2.
   Y sus diferencias se calculan a continuación:

AÑO	A_{1t}	A_{2t}	$A_{2t}-A_{1t}$
0	-2	-5	-3
1	-1	4	5
2	8	10	2
3	8	10	2
4	8	10	2

La TIR de las diferencias se calcula según lo estudiado:

$$0 = -3(1+i_{2-1}^*)^4+5(1+i_{2-1}^*)^3+2(1+i_{2-1}^*)^2+2(1+i_{2-1}^*)+2$$

Por tanteos TIR= 1.17786 es decir 117.78 %

5. Como TIR TMAR=100% entonces se elimina la alternativa con menor inversión de las dos, es decir, se elimina la 1. Pasamos al punto 6.

6. Todavía quedan 2 alternativas la 2 y la 3, por lo tanto pasamos al punto 4.

4. Calculando las diferencias:

año	$A_{3t}-A_{2t}$
0	-3
1	4
2	2
3	2
4	2

$$0 = -3(1+i^*_{3-2})^4+4(1+i^*_{3-2})^3+2(1+i^*_{3-2})^2+2(1+i^*_{3-2})+2$$

Por tanteos: $TIR = 0.9436157 = 94.36\ \%$

5. Como la TIR TMAR=100%, entonces se elimina la alternativa con mayor inversión de las dos, es decir, la 3.

6. Como sólo queda la alternativa 2, ésta es la preferida.

Observación:

Como se puede observar el resultado es el mismo que al utilizar los métodos del valor presente, el costo anual uniforme equivalente y del valor futuro.

Selección mediante la relación B/C incremental . -

Al usar la relación B/C incremental se siguen pasos similares a los usados en la tasa de retorno incremental, sólo - que aquí se debe verificar que en cada incremento de la inversión la relación B/C sea mayor que la unidad.

El método se puede describir así:

1. Ordene las alternativas de menor a mayor inversión inicial. Pase al punto 2.
2. Calcule la relación B/C de la alternativa con menor inversión inicial. Pase al punto 3.
3. Si la relación B/C es menor que 1, elimine la alternativa considerada y pase al punto 1.
   Si la relación B/C es mayor que 1, pase al punto 4.
4. Calcule la relación B/C para la diferencias de flujos de caja de las dos alternativas con menor inversión inicial. Pase al punto 5.
5. Si la relación B/C es menor que 1, entonces elimine la alternativa con mayor inversión inicial.
   Si la relación B/C es mayor que 1, entonces elimine la alternativa con menor inversión inicial. Pase al punto 6.
6. Si sólo queda una alternativa, ésta es la preferida, si queda mas de una pase al punto 4.

Ejemplo II.4.6

Aplique el método de la relación B/C incremental en las alternativas del ejemplo II.4.1:

Solución:

1. El orden creciente de inversiónes iniciales es 1,2 y 3.
2. La relación B/C para 1 es :

$$B/C = \frac{8(1+1.00)^{-2}+8(1+1.00)^{-3}+8(1+1.00)^{-4}}{2 + 1(1+1.00)^{-1}} = \frac{3.5}{2.5} = \underline{\underline{1.4}}$$

3. Como B/C es mayor que la unidad pasamos al punto 4.

4.

AÑO	$A_{2t}-A_{1t}$
0	-3
1	5
2	2
3	2
4	2

B/C :

$$B/C = \frac{5(1+1)^{-1}+2(1+1)^{-2}+2(1+1)^{-3}+2(1+1)^{-4}}{3} = \frac{3.375}{3} = \underline{1.125}$$

5. Como B/C es mayor que 1, se elimina la alternativa con menor inversión de las 2, es decir, la 1.
6. Quedan las alternativas 2 y 3, por lo tanto pasamos al punto 4.

4.

AÑO	$A_{3t}-A_{2t}$
0	-3
1	4
2	2
3	2
4	2

$$B/C = \frac{4(1+1)^{-1}+2(1+1)^{-2}+2(1+1)^{-3}+2(1+1)^{-4}}{3} = \frac{2.875}{3} = 0.958$$

5. Como B/C es menor que 1, se elimina la alternativa con mayor inversión inicial de las dos, es decir, la alternativa 3.
6. Como sólo queda la alternativa 2, ésta es la preferida.

Observaciones:

El resultado es el mismo que el obtenido al utilizar los métodos del valor presente, valor futuro, CAUE y tasa de retorno incremental, ya que como se ha mencionado son equivalentes.

II.5 LA INCERTIDUMBRE EN LAS ALTERNATIVAS ECONOMICAS.

Al comparar alternativas, debemos tomar en cuenta el grado de certidumbre y de riesgo que tiene cada una. Es necesario desarrollar formas objetivas de evaluar estos riesgos para poder tomar una buena decisión, ya que no es lo mismo una alternativa con flujos de efectivo seguros que otra con flujos inciertos.

Esta incertidumbre existe en los flujos de efectivo reales porque dependen de muchas variables que escapan del control del decisor, tales como: la inflación, las condiciones del mercado, los impuestos, las preferencias personales, etc.

Para hacer una buena elección es necesario realizar un análisi ordenado de los posibles cursos de acción a seguir. Esto se logra con ayuda de los métodos explicados en los siguientes capítulos, donde se plantean formas de analizar problemas en condiciones de riesgo e incertidumbre.

III. ANALISIS DE DECISIONES BAJO RIESGO.

III. ANALISIS DE DECISIONES BAJO RIESGO.

Introducción.-

Al enfrentarnos a un problema, debemos seleccionar de entre los diferentes cursos de acción posibles, el que consideremos mejor. Normalmente este proceso lo realizamos después de una breve meditación; apoyandonos sólo en nuestro criterio y experiencia. Sin embargo, en el caso de un problema cuyas consecuencias sean de importancia, vale la pena dedicar mayor tiempo y esfuerzo al análisis de los posibles cursos de acción a elegir. En este capítulo se estudian diferentes métodos para analizar la toma de decisiones.

III.1 Elementos de un problema de decisiones.

a) DECISOR: Es la persona responsable de la toma de decisiones; debe escoger una alternativa o curso de acción para resolver un problema determinado.

b) ESTADO DE LA NATURALEZA: Existe un contexto del problema, es decir, un universo de factores que influyen en el resultado de la decisión y que escapan al control del decisor; a este conjunto de factores se le llama conjunto de estados de la naturaleza.

c) CONJUNTO DE ALTERNATIVAS: Es el conjunto de cursos de acción factibles, entre los cuales el decisor debe elegir.

d) CONJUNTO DE CONSECUENCIAS RELACIONADAS CON CADA ALTERNATIVA: Deben de conocerse las consecuencias de tomar una decisión, en combinación con la ocurrencia de algún estado natural.

e) GRADO DE INCERTIDUMBRE: En la mayoría de los casos, el decisor no tiene la seguridad de las consecuencias que tendrá una decisión dada; esta inseguridad es el grado de incertidumbre.

III.2 La matriz general de decisiones.

Si designamos con A_i las alternativas factibles y con E_j los estados de la naturaleza. Para cada combinación de una alternativa A_i y un estado de la naturaleza E_j, habrá una consecuencia o resultado determinado que llamaremos R_{ij}.

Empleando la notación matricial, se puede construir una matriz rectangular donde cada renglón representa una alternativa y cada columna un estado de la naturaleza; se obtiene así la matriz de decisiones, también llamada matriz de consecuencias o matriz de pagos.

Edos. Nat. / Alt.	Estados de la naturaleza				
	E_1	E_2	E_3		E_n
A_1	R_{11}	R_{12}	R_{13}	...	R_{1n}
A_2	R_{21}	R_{22}	R_{23}	...	R_{2n}
A_3	R_{31}	R_{32}	R_{33}	...	R_{3n}
.	.	.	.		.
.	.	.	.		.
A_m	R_{m1}	R_{m2}	R_{m3}	...	R_{mn}

Figura III.1 Matriz de decisiones con m alternativas de decisión y n posibles estados naturales.

Ejemplo III.1

Un hombre desea invertir un millón de pesos, tiene dos alternativas: invertirlos en un banco al 100 % anual o invertir en oro. El oro puede aumentar de precio y valer el triple o puede devaluarse a la mitad de su valor.

El banco pagará a la misma tasa sin importar que estado de la naturaleza se presente.

Construya la matriz de decisiones que representa este problema.

Solución:

Tenemos dos alternativas: A_1: Invertir en el banco.
A_2: Invertir en oro.

Tenemos dos posibles estados de la naturaleza: E_1: El oro aumenta de precio.
E_2: El oro se devalúa.

Si optamos por A_1, no importa qué estado se presente, el banco pagará el 100 % de intereses, es decir, el hombre ganará (1,000,000) (1.00) = 1,000,000 de pesos en cualquier caso.

Si optamos por A_2 y se presenta E_1, el oro valdrá el triple, es decir, valdrá: (1,000,000) (3) = 3,000,000 de pesos, por lo tanto habrá ganado 2,000,000 de pesos. Si optamos por A_2 y se presenta E_2 el oro valdrá la mitad, es decir, valdrá: (1,000,000) (0.5) = 500,000 pesos, por lo tanto se habrá perdido medio millón de pesos.

En forma matricial queda:

Edos. Nat. / Alt.	E_1	E_2
A_1	1	1
A_2	2	0.5

Esta matriz representa el problema de decisiones planteado, en ella los resultados representan las ganancias en millones de pesos.

III.3 Caracterización de las decisiones bajo certeza, incertidumbre y riesgo.

Decisiones bajo certeza .-

La toma de decisiones en condiciones de certidumbre o certeza, ocurre cuando el decisor conoce el estado de la naturaleza que ocurrirá con absoluta certeza.

En situaciones de esta naturaleza, el decisor conoce el conjunto de alternativas factibles y las consecuencias de cada una.

La matriz de decisiones tiene una sola columna, dado que se conoce el estado natural que se presentará. Por lo tanto a cada alternativa factible se le asigna un único resultado posible.

Ejemplos de decisiones bajo certeza:

a) Evaluación económica de alternativas; en los problemas estudiados en el capítulo II , se conocían con certeza las consecuencias de elegir una determinada alternativa.

b) Problemas de selección de maquinaria; al elegir maquinaria, conocemos los rendimientos y costos de cada alternativa.

c) Determinación de mezclas óptimas de productos.

d) Determinación de la cantidad óptima de unidades de un determinado producto por fabricar.

e) Determinación de políticas de transporte, para orígenes y destinos diversos.

En general los problemas de transporte y de programación lineal son de éste tipo.

La matriz de decisiones en un problema bajo certeza tiene esta forma:

Alternativas	Estado Natural
A_1	R_1
A_2	R_2
A_3	R_3
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
A_n	R_n

Decisiones bajo riesgo:

Cuando es posible que se presenten dos o más estados de la naturaleza y se puedan asignar probabilidades de ocurrencia a estos estados naturales, estamos frente a un problema bajo condiciones de riesgo.

Los problemas de decisiones bajo riesgo se presentan muy frecuentemente en la Ingeniería Civil ; algunos ejemplos son los siguientes:

a) Descompostura en las maquinarias y equipos.

b) Determinación de la precipitación pluvial en un sistema de alcantarillado.

c) Frecuencia de artículos rechazados en un proceso de control de calidad.

d) Determinación de la magnitud de un sismo para diseño de estructuras.

e) Estimación de los escurrimientos máximos para una obra de excedencias.

f) Cálculo de la afluencia de tránsito en un crucero determinado.

g) Determinación de la capacidad de una presa.

Las probabilidades de ocurrencia de los estados de la naturaleza se pueden determinar en base a la frecuencia con que se halla presentado cada estado en el pasado, es decir, se usa el concepto de probabilidad basado en la frecuencia relativa de un evento. También se pueden determinar las probabilidades de ocurrencia de los estados naturales en forma personal, en base al criterio y a la experiencia (probabilidad subjetiva).

La matriz de decisiones tiene la forma general descrita anteriormente.

Decisiones bajo condiciones de incertidumbre .-

En estas decisiones se conocen los posibles estados de la naturaleza, pero no se pueden estimar las probabilidades de ocurrencia de cada estado, es decir, a cada curso de acción factible corresponde un conjunto de posibles resultados; sin embargo no podemos saber cuál de ellos obtendremos.

Este tipo de problemas corresponden a situaciones completamente nuevas para el decisor, ya que generalmente se tiene alguna información que permite estimar las probabilidades.

III.4 Criterios de análisis para decisiones bajo condiciones de incertidumbre.

Como se mencionó antes, no se conocen las probabilidades de ocurrencia de los estados naturales, por lo tanto, hay que recurrir a criterios empíricos para tomar la decisión.

Para explicar los diferentes criterios nos basaremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo III.4.1

Se desea construir un edificio, y para su diseño se presentan tres alternativas:

A_1: Construirlo para que resista un sismo de 6 grados de intensidad.

A_2: Construirlo para que resista un sismo de 8 grados.

A_3: Construirlo para que resista un sismo de 10 grados.

Los posibles estados naturales son:

Que se presente un sismo de

E_1: Menos de 6 grados.

E_2: Más de 6 grados y menos de 8.

E_3: Más de 8 grados y menos de 10.

La matriz de decisiones es:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 300 & -400 & -500 \\ 200 & 200 & -300 \\ 100 & 100 & 100 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Los resultados son beneficios en millones de pesos.

(Si son negativos se trata de perjuicios).

CRITERIO MAXIMIN O DE WALD .-

Fué sugerido por Abraham Wald. Se trata de asegurar una ganancia mínima. El criterio consiste en identificar el peor resultado de cada alternativa y de estos peores valores escoger el máximo, la alternativa correspondiente será la elegida, es decir:

Sea A_{ij} la matriz de decisiones.

m el número de alternativas.

n el número de estados naturales.

Entonces:

$$\text{Alt. seleccionada} \longrightarrow \underset{\forall i}{\text{máx.}} \left[\underset{\forall j}{\text{mín.}} \; A_{ij} \right]$$

Aplicando el criterio máximin al ejemplo III.4.1 :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & E_1 & E_2 & E_3 & \text{Mínimos valores por alt.} \\ \hline A_1 & 300 & -400 & -500 & -500 \\ A_2 & 200 & 200 & -300 & -300 \\ A_3 & 100 & 100 & 100 & 100 \leftarrow \text{Este es el máx de los mínimos.} \end{array}$$

Este criterio recomienda optar por la alternativa 3 , construir un edificio para que resista un sismo de 10 grados.

Es un criterio pesimista, ya que supone que una vez que el decisor ha elegido una alternativa, se presentará el estado natural que minimice los beneficios del decisor.

CRITERIO MAXIMAX .-

Consiste en que para cada alternativa el decisor distingue en qué casos se tendrá la mayor utilidad; hecho esto el decisor selecciona aquella alternativa cuya mayor utilidad sea la máxima, es decir:

$$\text{Alternativa elegida} \longrightarrow \max_{\forall i} \left[\max_{\forall j} A_{ij} \right]$$

Aplicando el criterio al ejemplo III.4.1 :

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ \\ A_2 \\ \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 300 & -400 & -500 \\ & & \\ 200 & 200 & -300 \\ & & \\ 100 & 100 & 100 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{Máximos valores por alt.} \\ 300 \leftarrow \text{Este es el máx} \\ \quad\quad\quad \text{de los máximos.} \\ 200 \\ \\ 100 \end{array}$$

Este criterio recomienda optar por la alternativa 1, construir un edificio que resista un sismo de 6 grados.

Este criterio es muy optimista, ya que supone que al seleccionar una alternativa, se presenta el estado natural más favorable a esa elección, maximizando las ganancias.

CRITERIO DE HURWICZ .-

Este criterio distingue los resultados máximos y mínimos posibles de cada alternativa.; hecho esto, aplica el factor de ponderación α , llamado índice de optimismo relativo, para llegar a la decisión mediante el cálculo de las utilidades esperadas.

El criterio se aplica siguiendo esta secuencia:

1. De la matriz de decisiones se seleccionan el mejor valor y el peor valor para cada alternativa, dando lugar a un vector de óptimos y a otro de pésimos.
2. El vector de óptimos se afecta por el índice α , y el vector de pésimos por ($1 - \alpha$). El índice α varía entre 0 y 1.

   $\alpha = 0$ para el caso más pesimista (criterio máximin)

   $\alpha = 1$ para el caso más optimista (criterio máximax)

$0<\alpha<1$ para los casos intermedios.

3. La suma de los dos vectores (de óptimos y pésimos) ya ponderados, es el vector de valores esperados. La alternativa seleccionada es aquella a la que corresponde el máximo valor esperado.

Aplicando el criterio de Hurwicz al ejemplo III.4.1 :

Si elegimos un valor $\alpha = 0.40$, estamos pensando que hay el 40 % de posibilidades de que se presente un estado natural favorable y ($1 - \alpha = 0.60$) un 60 % de posibilidades de que se presente un estado natural desfavorable.

	E_1	E_2	E_3	Vect. ópt.	Vect. pés.	Valor esperado.
A_1	300	-400	-500	300	-500	300(0.4)+(-500)(0.6)=-180
A_2	200	200	-300	200	-300	200(0.4)+(-300)(0.6)=-100
A_3	100	100	100	100	100	100(0.4)+ 100 (0.6)= <u>100</u>

El máximo valor esperado es 100, que corresponde a la alternativa 3, por lo que esta es la preferida según este criterio para un valor de $\alpha = 0.40$.

Si somos mas optimistas y elegimos un valor de $\alpha = 0.85$:

	E_1	E_2	E_3	Vect. ópt.	Vect. pés.	Valor esperado.	
A_1	300	-400	-500	300	-500	180	← Máximo valor esperado.
A_2	200	200	-300	200	-300	125	
A_3	100	100	100	100	100	100	

El máximo valor esperado es de 180, que corresponde a la alternativa 1, para un valor de $\alpha = 0.85$.

El criterio de Hurwicz se puede expresar así:

$$\text{Alt. elegida} \longrightarrow \underset{\forall i}{\text{máx}} \left[\alpha \underset{\forall j}{\text{máx}} A_{ij} + (1-\alpha) \underset{\forall j}{\text{mín}} A_{ij} \right]$$

El inconveniente de este criterio es la subjetividad en la elección de α .

CRITERIO DE LAPLACE .-

El criterio de Laplace es el siguiente: dado que no se conocen las probabilidades de ocurrencia de cada estado natural, se dará por supuesto que las probabilidades son las mismas para cada estado.

Como ahora ya se cuenta con información de la probabilidad de ocurrencia, se calcula la esperanza matemática asociada a cada alternativa y por último se selecciona aquella alternativa que corresponda al máximo valor monetario esperado.

Esto se puede expresar así:

$P(E_j)= 1/n$ Donde n es el número de estados naturales.

$$\text{Alternativa elegida} \longrightarrow \underset{\forall i}{\text{máx}} \sum_{j=1}^{m} P(E_i)\, A_{ij}$$

Aplicando Laplace al ejemplo III.4.1 :

$n=3 \quad P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = 1 / 3$

	E_1	E_2	E_3	Vector de valores esperado.
A_1	300	-400	-500	-200
A_2	200	200	-300	33.333
A_3	100	100	100	100 ← Máx. valor esperado.

Por lo tanto según Laplace, debemos escoger la alternativa 3.

Este método tiene el inconveniente de que la suposición de probabilidades iguales para cada estado natural es muy cuestionable, además el número de eventos considerados puede alterar la decisión.

CRITERIO DE BAYES .-

Bayes sostiene que hay pocos problemas de decisiones en los cuales la incertidumbre es completa; por eso propone asignar probabilidades subjetivas a cada estado natural, en base a la experiencia y criterio del decisor.

Una vez asignadas las probabilidades de ocurrencia de cada estado natural, se obtiene la esperanza matemática asociada a cada curso de acción y la alternativa con el máximo valor monetario esperado es la escogida, es decir:

$$\text{Alternativa elegida} \longrightarrow \max_{\forall i} \sum_{j=1}^{n} P(E_j)\, A_{ij}$$

Aplicando Bayes al ejemplo III.4.1 :

Si suponemos: $P(E_1) = 0.2$ $P(E_2) = 0.6$ $P(E_3) = 0.2$

$$
\begin{array}{c}
 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 300 & -400 & -500 \\ 200 & 200 & -300 \\ 100 & 100 & 100 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\text{Valor esperado} \\
300(0.2)-400(0.6)-500(0.2) = -280 \\
200(0.2)+200(0.6)-300(0.2) = 100 \\
100(0.2)+100(0.2)+100(0.2) = 100
\end{array}
$$

Según este criterio y para las probabilidades supuestas es indiferente elegir entre las alternativas 2 y 3.

El inconveniente del criterio de Bayes es el que la asignación de probabilidades es subjetiva, y por lo mismo esta sujeta a errores de apreciación.

CRITERIO DE SAVAGE O DE ARREPENTIMIENTO .-

Una vez tomada la decisión y producido el estado natural se obtiene un resultado; Savage argumenta que después de conocer el resultado, el decisor puede arrepentirse de haber seleccionado una alternativa dada. Savage sostiene que el decisor debe tratar de que ese arrepentimiento se reduzca al mínimo.

El criterio es el siguiente:

1. Formar la matriz de arrepentimientos o de costo de oportunidad. A cada estado natural le corresponde una columna en la matriz de decisiones.
   En cada columna se determina el mejor valor para ese estado natural y se sustituye por un cero; esto significa que

si ocurre ese estado natural y escogimos la alternativa que le corresponde a ese valor óptimo, nuestro arrepentimiento será nulo.

En sustitución de los valores del resto de la columna, se escribirá la diferencia entre el resultado óptimo y los demás resultados; esta diferencia es el costo de oportunidad o arrepentimiento por no haber escogido la alternativa que nos diera el valor óptimo.

La matriz así formada se conoce como : matriz de arrepentimientos, de costos de oportunidad o pérdida de oportunidad.

2. Una vez formada la matriz de pérdidas de oportunidad, Savage aconseja escoger la estrategia que corresponde al mínimo de los arrepentimientos máximos, es decir, se aplica la regla mínimax, que se puede expresar así:

Sea P_{ij} la matriz de pérdida de oportunidad de orden mxn

Entonces:

$$\text{La alternativa seleccionada es} \longrightarrow \min_{\forall i} \left[\max_{\forall j} P_{ij} \right]$$

Se trata pues de minimizar el arrepentimiento.

Este criterio tiene el inconveniente de que el número de eventos considerados puede alterar la decisión. Además, la regla utilizada para seleccionar el mínimo de los arrepentimientos máximos es similar al criterio de Wald, por lo tanto, tiene sus mismos inconvenientes.

Aplicando Savage al ejemplo III.4.1 :

1. Formar la matriz de pérdida de oportunidad:

$$
\begin{array}{c|ccc|ccc|c}
 & E_1 & E_2 & E_3 & & & & \text{Matriz de pérd. de op.} \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
A_1 \\ A_2 \\ A_3
\end{array}
\begin{bmatrix}
300^{*} & -400 & -500 \\
200 & 200^{*} & -300 \\
100 & 100 & 100^{*}
\end{bmatrix}
\begin{array}{ccc}
0 & 200-(-400) & 100-(-500) \\
300-200 & 0 & 100-(-300) \\
300-100 & 200-100 & 0
\end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 600 & 600 \\
100 & 0 & 400 \\
200 & 100 & 0
\end{bmatrix}
$$

* Máximo valor de la columna.

La matriz significa que si se presenta E_1 y se elige:

A_1: No hay arrepentimiento, pues se obtuvo la mejor ganancia posible para el estado natural 1.

A_2: Se perdió la oportunidad de ganar 100 unidades, ya que en vez de 300, sólo se obtuvieron 200.

A_3: Se perdió la oportunidad de ganar 200, ya que en vez de 300 sólo se obtuvieron 100.

Lo mismo se puede explicar para cuando se presentan E_2 y E_3.

2. Aplicando la regla minimax :

$$
\begin{array}{c}
 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 600 & 600 \\
100 & 0 & 400 \\
200 & 100 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\text{Máx. pérdidas} \\ 600 \\ 400 \\ 200 \longleftarrow \text{mín. de las máx pérdidas.}
\end{array}
$$

El criterio de Savage aconseja elegir la alternativa 3.

III.5 Criterios de análisis para decisiones bajo condiciones de riesgo.

En un problema de decisiones bajo riesgo, el decisor puede identificar el conjunto de alternativas factibles, así como sus resultados correspondientes. Además, para cada evento se puede estimar la probabilidad de su ocurrencia.

Dado que se conocen las probabilidades de cada evento, se pueden calcular los valores esperados para cada una de las alternativas, y así, efectuar una decisión racional en base a ellos.

El procedimiento para tomar decisiones en condiciones de riesgo se puede sintetizar en dos pasos:

1. Se representan los resultados posibles de todas las alternativas consideradas, con sus respectivas probabilidades de ocurrencia y su valor. Esto se efectúa con la ayuda de un árbol de decisiones.
2. Se calcula el valor esperado de cada alternativa y en base a esto se tomará la decisión. La alternativa preferida será aquella que tenga el mayor valor monetario esperado (VME).

Arboles de Decisiones:

Un árbol de decisiones es la representación gráfica de un problema de decisiones.

La construcción de un árbol de decisiones sigue una secuencia cronológica definida, y cada acción y evento se colocan en el orden en que ocurren.

En el árbol de decisiones intervienen los mismos elementos que en la matriz general de decisiones: el conjunto de alternativas A_i, de estados de la naturaleza E_j, de elementos de la matriz R_{ij} y la probabilidad de ocurrencia de cada evento $P(E_j)$.

Entonces para la siguiente matriz de decisiones:

$$
\begin{array}{c}
 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_m
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} E_1 & E_2 & E_3 & \cdots & E_n \end{array} \\
\begin{bmatrix}
R_{11} & R_{12} & R_{13} & \cdots & R_{1n} \\
R_{21} & R_{22} & R_{23} & \cdots & R_{2n} \\
R_{31} & R_{32} & R_{33} & \cdots & R_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
R_{m1} & R_{m2} & R_{m3} & \cdots & R_{mn}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Su correspondiente árbol de decisiones se muestra en la figura III.5.1

El árbol de decisiones permite un conocimiento rápido y de conjunto del problema.

La representación arranca deun rectángulo, llamado nodo raíz; de éste parten tantas ramas como elementos contenga el conjunto de alternativas. Cada rama desemboca en un nodo circular que representa una acción que sale del control del decisor (un evento o estado natural); de cada nodo circular a su vez, parten tantas ramas como elementos contenga el conjunto de estados de la naturaleza.

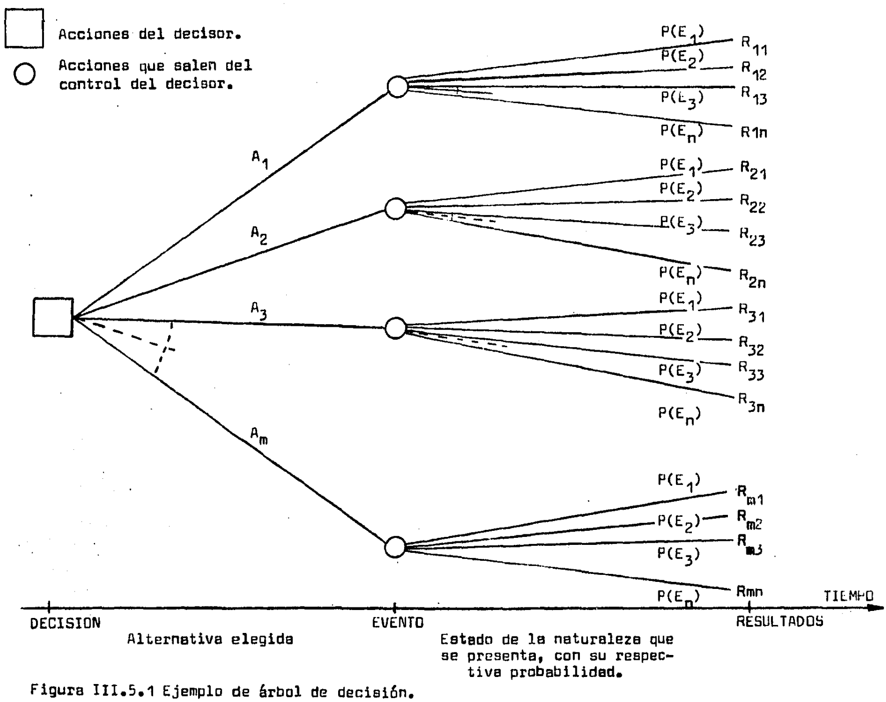


Figura III.5.1 Ejemplo de árbol de decisión.

Al final de las ramas que representan los estados naturales, se acostumbra poner el resultado correspondiente a la alternativa elegida y al estado natural que se presenta.

Este proceso se puede repetir, dependiendo de las características del problema en estudio, siempre y cuando se usen los nodos cuadrados para representar las acciones donde tiene ingerencia el decisor (nodos bajo control) y nodos circulares para representar los estados naturales (nodos aleatorios).

Para ilustrar la construcción de un árbol de decisiones véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo III.5.1

Una compañía quiere elegir cómo invertir sus fondos. Se le presentan tres alternativas:

1. Construir un edificio de departamentos.
2. Construir un edificio para oficinas.
3. Construir un centro comercial.

Sus ganancias dependen de la variación del ingreso per cápita (ΔIPC) en los próximos 6 años y se comportan según se muestra en la siguiente matriz.

Variación del Ingreso per capita.

$$\begin{array}{l} \\ \\ \text{Depto.}A_1 \\ \text{Ofic. }A_2 \\ \text{Comer.}A_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \Delta IPC < 1\% & 1\% < \Delta IPC < 3\% & \Delta IPC > 3\% \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 80 & 80 & 80 \\ 60 & 100 & 150 \\ -100 & 200 & 500 \end{bmatrix} \end{array}$$

Las probabilidades asociadas a cada estado natural son:

$P(E_1) = 0.5$ $\qquad$ $P(E_2) = 0.3$ $\qquad$ $P(E_3) = 0.2$

Dibuje un diagrama de árbol que represente el problema.

SOLUCION:

El árbol queda así:

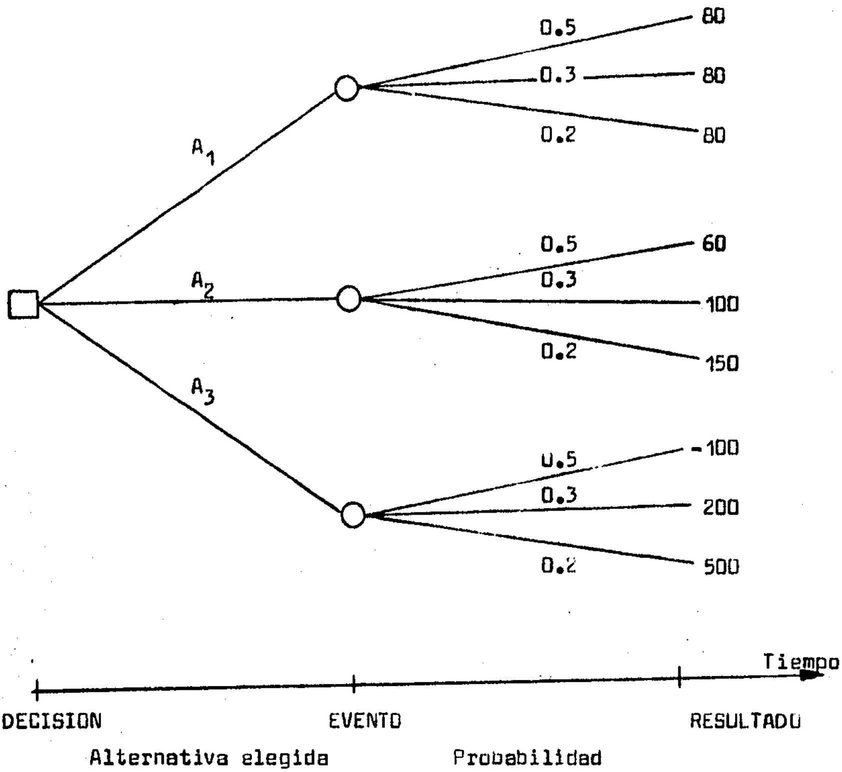


Figura III.5.2

Como se dijo anteriormente, en un problema de decisiones en condiciones de riesgo la alternativa elegida será la que tenga asociado el máximo valor monetario esperado.

Así, para el ejemplo III.5.1:

Los correspondientes valores monetarios esperados son:

$$VME_{A1} = 0.5\ (80) + 0.30\ (80) + 0.20\ (80) = 80$$

$$VME_{A2} = 0.5\ (60) + 0.30\ (100) + 0.20\ (150) = 90$$

$$VME_{A3} = 0.5\ (-100) + 0.30(200) + 0.20(500) = 110$$

Por lo tanto, la alternativa elegida es A_3: construir un centro comercial.

III.6 EL VALOR DE LA INFORMACION.

Hasta ahora se han evaluado las diferentes alternativas en base a probabilidades de ocurrencia de los estados naturales, estimadas de antemano o probabilidades a priori.

En esta sección se analizará el problema en base a nueva información, obtenida mediante estudios y experimentos. Es mejor tomar como base de la decisión la información más reciente; así, las probabilidades estimadas inicialmente deben modificarse y dar una nueva función de probabilidad de ocurrencia de los estados de la naturaleza más apegada a la realidad. A esta función se le llama Función de Probabilidad a posteriori, ya que es posterior a la aplicación del experimento.

El Valor Esperado de la Información Perfecta:

Este concepto está asociado con el dinero que estaríamos dispuestos a pagar por una información perfecta. Para determinar este valor, se debe calcular el beneficio esperado cuando se tiene información perfecta y restar a este valor el beneficio esperado en condiciones de riesgo.

Ejemplo III.6.1

Un Ingeniero diseñó una nueva cimbra metálica especial para estructuras de varios niveles. Según sus estimaciones para los próximos seis años; si las ventas son altas espera ganar 48 millones de pesos; si las ventas son regulares, 12 millones y si son bajas espera perder 3 millones.

Una empresa le ha ofrecido comprar sus derechos de patente y darle regalías según las ventas; así el ingeniero ganará 24 millones si las ventas son altas, 4 millones si son regulares y 0.6 millones si las ventas son bajas.

En base a experiencias anteriores se asignan posibilidades subjetivas de ocurrencia a cada estado natural. De esta forma, se estima un 15% de posibilidades de ventas altas, un 50% de ventas regulares y un 35% de ventas bajas.

Determine:

a) Las ganancias esperadas teniendo información perfecta.

b) El valor esperado en condiciones de riesgo.

c) El valor de la información perfecta (VIP).

Solución:

Sea A1: Comercializar la cimbra él mismo.
A2: Vender sus derechos de patente.

E1: Ventas altas.
E2: Ventas regulares.
E3: Ventas bajas.

P(E1)= 0.15 P(E2)= 0.50 P(E3)= 0.35

La matriz de decisiones es :

	E1	E2	E3
A1	48	12	-3
A2	24	4	0.6

a) Ganancias esperadas teniendo información perfecta.

Para obtener este valor, supondremos que la decisión se toma repetidas veces, conociendo de antemano el resultado, entonces:

Si se pronostica E1, seleccionaremos A1 y obtendremos 48 mill
Si se pronostica E2, seleccionaremos A1 y obtendremos 12 mill
Si se pronostica E3, seleccionaremos A2 y obtendremos 0.6mill

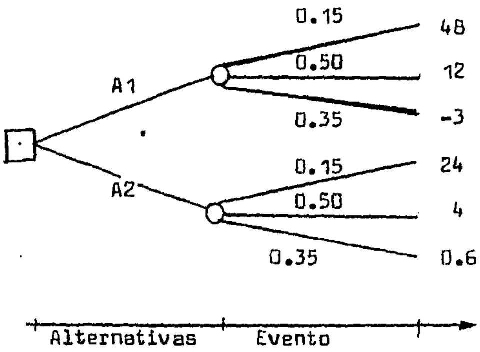
Entonces las ganancias esperadas teniendo información perfecta son:

$$0.15(48) + 0.50(12) + 0.35(0.6) = \underline{13.41}$$

Puede decirse que este valor corresponde a las ganancias promedio obtenidas si se enfrenta este problema de decisiones en condiciones idénticas muchas ocasiones, y cada vez se eligió la mejor alternativa dado que se tenía información perfecta.

b) El valor esperado en condiciones de riesgo.

El problema de decisiones es:



VME1 = 12.15

VME2 = 5.81

Por ser ganancias, se elige A1, y VME= 12.15

c) El valor de la información perfecta.

Es el valor esperado teniendo información perfecta menos el valor en condiciones de riesgo:

VEIP = 13.41 - 12.15 = 1.26 millones de pesos

El valor de la información perfecta se calcula para conocer que tan detallado debe ser el análisis del problema a posteriori; es al mismo tiempo un indicador del costo de la incertidumbre.

Para reducir la incertidumbre, se pueden realizar estudios y experimentos. En la siguiente sección se analizará como cambian los valores esperados al obtener información adicional.

Análisis a posteriori:

Para reducir el costo de la incertidumbre se hace necesario obtener mayor información, por medio de estudios y experimentos. Al obtener información adicional las probabilidades asociadas a cada estado natural cambian. Las nuevas probabilidades se obtienen en base al teorema de Bayes:

$$P(E_i/Z_j) = \frac{P(Z_j/E_i)\ P(E_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(Z_j/E_k)P(E_k)} \qquad j=1,2,3,\ldots,n$$

Donde:

E_i : Estado de la naturaleza i

Z_j : Resultado del experimento.

Ejemplo III.6.2

Para el problema del ejemplo III.6.1, suponga que el ingeniero quiere reducir el costo de la incertidumbre, para lo cual decide realizar una investigación de mercado para pronosticar la demanda de su producto.

Suponga que se tienen tres posibles resultados del estudio:

Z1: los resultados muestran una demanda alta.

Z2: los resultados muestran una demanda regular.

Z3: los resultados muestran una demanda baja.

Se sabe por estudios similares que:

$P(Z1/E1) = 0.85$	$P(Z1/E2) = 0$	$P(Z1/E3) = 0$
$P(Z2/E1) = 0.15$	$P(Z2/E2) = 0.70$	$P(Z2/E3) = 0$
$P(Z3/E1) = 0$	$P(Z3/E3) = 0.30$	$P(Z3/E3) = 1$

¿ Cuál es el curso de acción más recomendable ?

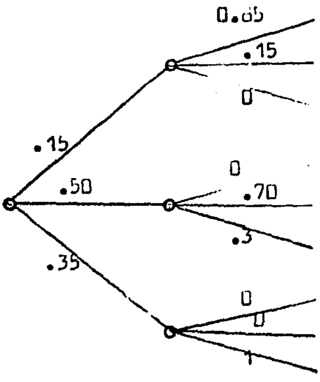
a) Dado que ocurra Z1

b) Dado que ocurra Z2

c) Dado que ocurra Z3

Solución:

Realizando un diagrama de árbol del problema y utilizando el teorema de Bayes, se obtienen las probabilidades a posteriori.



P(.)	Z1	Z2	Z3
0.1275	✓	X	X
0.0225	X	✓	X
0	X	X	✓
0	✓	X	X
0.3500	X	✓	X
0.1500	X	X	✓
0	✓	X	✓
0	X	✓	X
0.3500	X	X	✓

a) Si ocurre Z1 la probabilidad de cada estado natural es:

$$P(E1/Z1) = \frac{0.1275}{0.1275 + 0 + 0} = 1$$

$$P(E2/Z1) = \frac{0}{0.1275 + 0 + 0} = 0$$

$$P(E3/Z1) = \frac{0}{0.1275 + 0 + 0} = 0$$

VME1 = 48

VME2 = 24

Como se trata de obtener las ganancias máximas si ocurre Z1 se elige A1.

b) Si ocurre Z2, las probabilidades se modifican como sigue:

$$P(E1/Z2) = \frac{0.15(0.15)}{0.15(0.15) + 0.70(0.50) + 0(0.35)} = 0.0604$$

$$P(E2/Z2) = \frac{0.70\ (0.50)}{0.15(0.15) + 0.70(0.50) + 0(0.35)} = 0.9396$$

$$P(E3/Z2) = \frac{0}{0.15(0.15) + 0.70(0.50) + 0)0.35)} = 0$$

$$VME1 = 0.0604\ (48) + 0.9396\ (12) + 0(-3) = \underline{14.1744}$$

$$VME2 = 0.0604\ (24) + 0.9396\ (\ 4) + 0(0.6) = 5.208$$

Si ocurre Z2 se debe elegir A1.

c) Si ocurre Z3, las probabilidades se modifican como sigue:

$$P(E1/Z3) = \frac{0}{0 + 0.15 + 0.35} = 0$$

$$P(E2/Z3) = \frac{0.15}{0 + 0.15 + 0.35} = 0.3$$

$$P(E3/Z3) = \frac{0.35}{0 + 0.15 + 0.35} = 0.7$$

$$VME1 = 0\ (48) + 0.3\ (12) + 0.7\ (-3) = 1.5$$

$$VME2 = 0(24) + 0.3\ (4) + 0.7\ (0.6) = \underline{1.62}$$

Si ocurre Z3 se debe elegir A3.

El Valor de la Información Muestral :

Es un parametro que nos dice si es conveniente realizar un gasto para obtener información adicional. El valor de la información muestral (VIM) es el valor monetario esperado - considerando la obtención de información adicional, menos el valor monetario esperado sin considerar la obtención de información adicional.

Ejemplo III.6.3

Se deben comprar pilotes prefabricados para cimentar una estructura.

El problema es decidir de qué longitud se deben adquirir. Es muy conveniente comprarlos todos de la misma longitud, ya que así se abaten precios.

Las longitudes en el mercado son 20, 25 y 30 metros. Se sabe que la profundidad de la capa resistente es de 20 o de 30 metros. Si se compran pilotes de una longitud diferente a la de la capa resistente, se tiene un costo de adecuación .

La matriz de decisiones muestra los costos asociados a cada alternativa según el estado natural que se presenta. Se trata entonces de una matriz de pérdidas.

Sean:

A1: Comprar pilotes de 20m

A2: Comprar pilotes de 25m

A3: Comprar pilotes de 30m

E1: La profundidad de la capa resistente es de 20m

E2: La profundidad de la capa resistente es de 30m

P(E1) = 0.6 P(E2) = 0.4

	E1	E2
A1	8	20
A2	10	18
A3	12	15

Se puede realizar un estudio geológico que no es exacto; el estudio tiene las siguientes características:

Sean Z1, Z2, Z3 los posibles resultados del experimento.

Z1 : La capa resistente esta a 20m

Z2 : La capa resistente esta a 25m

Z3 : La capa resistente esta a 30m

	P(Zi/E1)	P(Zi/E2)
Z1	0.72	0.10
Z2	0.20	0.30
Z3	0.08	0.60

a) Si se estima a priori que P(E1)= 0.6 y P(E2)= 0.4 ¿Que alternativa se debe elegir ?

b) Si se realiza el estudio y resulta Z1 ¿Que alternativa se debe elegir?

c)¿Si se realiza el estudio y resulta Z2 ?

d)¿ Si se realiza el estudio y resulta Z3?

e)¿ Cuanto estaría dispuesto a pagar por el experimento?

Solución:

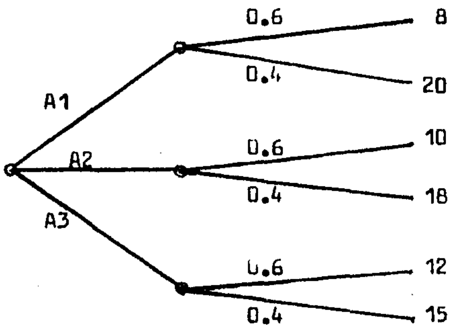
a) Con ayuda del árbol de decisiones de la siguiente página se obtiene:

$$VME1 = 0.6\ (8) + 0.4\ (20) = \underline{12.8}$$

$$VME2 = 0.6\ (10) + 0.4\ (18) = 13.2$$

$$VME3 = 0.6\ (12) + 0.4\ (15) = 13.2$$

El árbol de decisiones es:

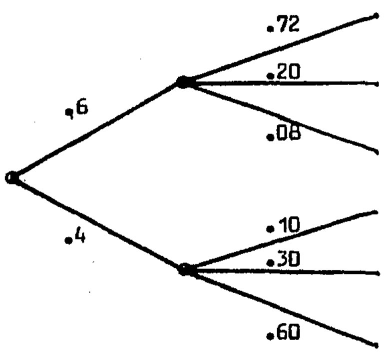


Como tratamos de minimizar costos se debe elegir la alternativa 1 con VME1 = 12.8

b) Para el cálculo de las nuevas probabilidades se usa el teorema de Bayes:

$$P(Ei/Zj) = \frac{P(Zj/Ei)\ P(Ei)}{\sum_{k=1}^{n} P(Zj/Ek)\ P(Ek)} \qquad j = 1,2,3,\ldots,n$$

Como una ayuda para el cálculo se usará el siguiente árbol:



P(.)	Z1	Z2	Z3
0.432	/	X	X
0.120	X	/	X
0.048	X	X	/
0.040	/	X	X
0.120	X	/	X
0.240	X	X	/

Si ocurre Z1:

$$P(E1/Z1) = \frac{0.432}{0.432 + 0.040} = 0.915$$

$$P(E2/Z1) = \frac{0.040}{0.432 + 0.040} = 0.085$$

Entonces

VME1 = 0.915(8) + 0.085(20) = <u>9.020</u>
VME2 = 0.915(10) + 0.085(18) =10.680
VME3 = 0.915(12) + 0.085(15) =12.255

Por lo que si ocurre Z1 se debe de elegir A1

c) Si ocurre Z2:

P(E1/Z2) =0.12/ (.12 + .12) = 0.5

P(E2/Z2) =0.12/ (.12 + .12) = 0.5

Entonces:

VME1 = 14.0
VME2 = 14.0
VME3 = 13.5

Por lo que si ocurre Z2 se debe elegir A3.

d) Si ocurre Z3:

P(E1/Z3) = 0.048/(0.048+0.240)= 0.167

P(E2/Z3) = 0.240/(0.048+0.240)= 0.833

Entonces:

$VME1 = 17.996$

$VME2 = 16.664$

$VME3 = \underline{14.499}$

Por lo tanto si ocurre Z3 debe elegirse A3.

e)¿Cuanto se debe pagar por el estudio ?

Usando el teorema de probabilidad total:

$$P(Zi) = \sum_{j=1}^{n} P(Zi/Ej)\, P(Ej)$$

Usando los datos del árbol:

$P(Z1) = 0.432 + 0.040 = 0.472$

$P(Z2) = 0.120 + 0.120 = 0.240$

$P(z3) = 0.048 + 0.240 = 0.288$

El valor monetario esperado después de considerar la información adicional es:

Si ocurrió Z1 se eligió A1 y VME = 9.020

Si ocurrió Z2 se eligió A3 y VME =13.500

Si ocurrió Z3 se eligió A3 y VME =14.499

Por lo tanto

$$VME_{(a\ posteriori)} = 0.472(9.020) + 0.240(13.500) + 0.288(14.499) = 11.673$$

$$VIM = VME_{(a\ priori)} - VME_{(a\ posteriori)} = 12.8 - 11.673 = \underline{1.127}$$

Entonces se estaría dispuesto a pagar hasta 1.127 unidades monetarias por la información.

IV. FUNCIONES DE UTILIDAD.

IV. FUNCIONES DE UTILIDAD

Las consecuencias monetarias de una decisión pueden tener diferentes efectos sobre el decisor, ya que lo que para uno puede ser una pequeña pérdida, para otro puede ser la bancarrota. Así, existirán diferentes actitudes frente al riesgo. Habrá quien sea propenso al riesgo y acepte la posibilidad de perder en busca de un beneficio mayor; hay quien prefiere regirse por el valor monetario esperado y es por tanto indiferente al riesgo y habrá personas para quienes vale más tener la seguridad de una ganancia aunque sea pequeña que la posibilidad de perder, es decir, adversas al riesgo.

En este capítulo se tratan las funciones de utilidad que sirven para considerar las preferencias subjetivas del decisor.

IV.1 Loterias.

Para explicar la utilidad que una persona asigne a una situación de riesgo, usaremos las llamadas loterias.

Una lotería es un juego de azar. Para participar se debe comprar un boleto, que tiene una probabilidad pi de ganar un premio xi, donde i=1,2,3,...,n y n es el número de premios de la lotería.

Los premios de la lotería pueden ser cualquier cosa, no solo dinero. Se supone que no hay dos premios exactamente iguales.

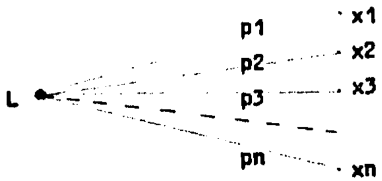
El conjunto de premios es:

$$X = \{x1, x2, x3, \ldots, xn\}$$

Indicaremos con L a la lotería y se representará así:

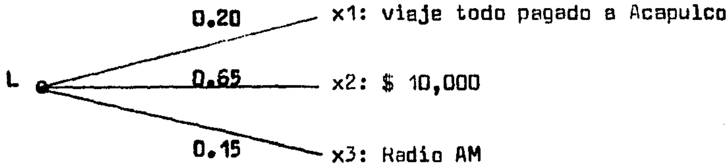
$$L = \{(p1,x1),(p2,x2),(p3,x3),\ldots,(pn,xn)\}$$

Entonces, la lotería se puede definir conociendo el conjunto de pares ordenados (pi,xi). Gráficamente es:



Ejemplo IV.1.1

A continuación se muestra una lotería con premios monetarios y no monetarios.



Que expresado de otra forma es:

$$L = \{(0.20,x1),(0.65,x2),(0.15,x3)\}$$

Como puede observarse, una lotería puede ser considerada como el conjunto de probabilidades de ocurrencia de los estados de la naturaleza y sus posibles consecuencias.

IV.2 Comportamiento Racional y Loterías.

Para formular un modelo racional en base a las loterías deben cumplirse los siguientes axiomas lógicos:

Sea

$X = \{x1, x2, x3, \ldots, xn\}$ el conjunto de los resultados de la lotería.

$L = \{(p1,x1),(p2,x2),\ldots,(pn,xn)\}$ una lotería.

Y el símbolo $\succ$ que significa "preferido a".

Así, $xi \succ xj$ significa que xi es preferido a xj

Y el símbolo $\sim$ que significa "indiferente a".

Así, $xi \sim xj$ significa que xi es indiferente a xj

i) Sean xi y $xj \in X$ entonces sólo puede ocurrir una de las siguientes cosas:

$xi \succ xj$ o $xj \succ xi$ o $xi \sim xj$

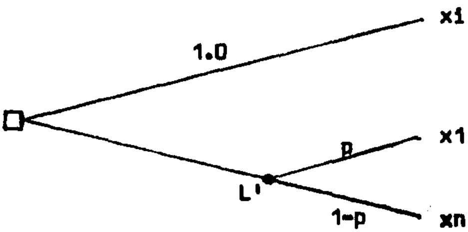
ii) Si $xi \succ xj$ y $xj \succ xk$ entonces $xi \succ xK$
(axioma de transitividad)

iii) Si $X = \{x1, x2, x2, \ldots, xn\}$ y $x1 \succ x2 \succ x3 \succ \ldots \succ xn$
entonces para cada evento $xi \in X$ diferente de x1 y xn, a un decisor racional le es indiferente tener xi con-

certeza a jugar en la lotería :

$$L' = \{(P, x1), (1-P, xn)\}$$

Donde x1 es el mejor premio y xn el peor; para algún valor de P, es decir que existe un valor P, tal que a un decisor racional le es indiferente jugar en la lotería L' que recibir el premio xi. En un diagrama queda:

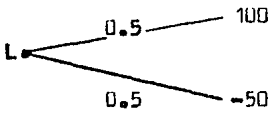


IV.3 Funciones de Utilidad.

Obsérvese la siguiente lotería:

$$L = \{(0.5, 100), (0.5, -50)\}$$

o bien:



Si se le preguntara a distintas personas que estan jugando en la lotería por cuánto cambiarían su situación, la respuesta sería diferente, según el tipo de persona.

El valor monetario esperado (VME) de la lotería es : 0.5(100) + 0.5(-50) = 50 - 25 = 25.

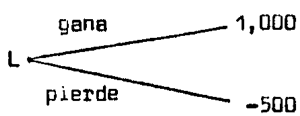
Así, si unapersona está dispuesta a cambiar su situación en L por menos de 25 pesos, se trata de alguien que no quiere arriesgarse a perder 50 pesos y prefiere asegurar un beneficio aún a costo de perder la oportunidad de una ganancia mayor; decimos pues que es una persona adversa al riesgo.

Si una persona sólo está dispuesta a cambiar su situación en L por más de 25 pesos, podemos decir que se trata de alguien con propensión a riesgo, ya que está dispuesta a correr el riesgo de perder 50 pesos antes que perder la oportunidad de ganar 100 pesos.

Una persona que esta dispuesta a cambiar su situación por 25 pesos es alguien que se guía por el VME y se dice por tanto que es indiferente al riesgo.

Equivalente bajo certeza.

Veamos la lotería $L = \{(P, 1000), (1-P, -500)\}$

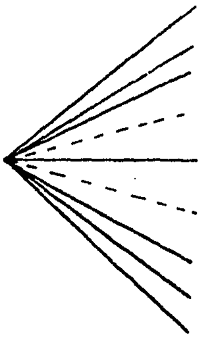


Si se nos ofrecen 1,000 bajo certeza a cambio de nuestro boleto para la loterífa, los aceptariamos sin pensarlo dos veces.

En cambio si se nos ofrecieran -500 (pagar por no jugar) por el boleto no lo aceptaríamos, ya que este pago corresponde al caso mas desfavorable.

Así, debe haber una cantidad entre 1,000 y -500 por la que cambiaríamos nuestra situación en L.

Para un decisor D, el proceso sería:



	Se le ofrece bajo certeza	D prefiere
L	1000	Aceptar la cantidad
	900	Aceptar la cantidad
	800	Aceptar la cantidad
	•	•
	•	•
	200	Le da lo mismo la cantidad que jugar en L.
	•	
	•	•
	-300	Jugar a la lotería
	-400	Jugar a la lotería
	-500	Jugar a la lotería

El punto de indiferencia entre la cantidad bajo certeza y el jugar a la loteria se llama el equivalente bajo certeza de la lotería.

El equivalente bajo certeza de una situación es la mínima cantidad por la cual el decisor dejaría de jugar en la lotería.

Como se puede observar este equivalente es una cantidad subjetiva, y varia de persona a persona.

Cabe mencionar que para un problema de decisiones el equivalente bajo certeza es la mínima cantidad por la que un decisor está dispuesto a cambiar su situación en un punto de incertidumbre.

Construcción de una función de utilidad.

Una función de utilidad o curva de preferencia, es una función que nos relaciona los diferentes resultados de un evento con la utilidad que asignamos a cada uno de ellos. Es una medida de la preferencia relativa entre todos los posibles resultados de un evento. Dichos resultados pueden ser dinero, bienes o cualquier otra cosa.

Algoritmo para obtener las funciones de utilidad:

Sea

$$X = \{x^{\circ}, x2, x3, \ldots, xn, x^{*}\}$$

el conjunto de resultados de un evento cualquiera, donde no existen dos resultados exactamente iguales y:

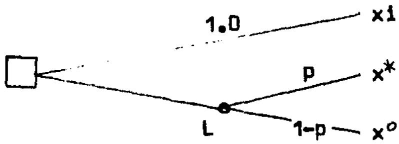
$$x^{*} \succ xn \succ \ldots \succ x3 \succ x2 \succ x^{\circ}$$

1. Se le asignan utilidades arbitrarias a x^{*} y a x° ; generalmente $u(x^{*})=1.0$ $u(x^{\circ})=0.0$

2. Para cualquier xi X donde $x^{*} \succ xi \succ x^{\circ}$ se cumple que $1 \geq u(xi) \geq 0$
   Obtener un valor p tal que al decisor le sea indiferente recibir xi a jugar en la lotería

   $$L= ((p,x^{*}),(1-p,x^{\circ}))$$

es decir, obtener un valor p tal que las dos ramas del siguien te árbol de decisiones sean indiferentes al decisor:



Entonces

$$u(xi) = p\ u(x^*) + (1-p)\ u(x^\circ)$$

3. Repetir el paso 2 para diferentes xi hasta obtener el núme ro requerido de valores de la función de utilidad para dibujar la curva con la precisión deseada. Usualmente son necesarios sólo cinco puntos para definir la curva.

4. Con los valores así obtenidos se traza la función de utili dad o curva de preferencias.

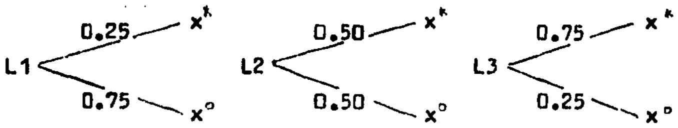
Método del Tetrahedro.

Un método alternativo para definir la función de utilidades es el llamado Método del Tetrahedro cuyo algoritmo se explica a continuación:

1. Sea x el mejor resultado posible y x el peor. Si le asignamos utilidades arbitrarias a x^* y a x°, generalmente

$$u(x^*) = 1.0 \qquad u(x^\circ) = 0.0$$

2. Pedir al decisor que nos de el equivalente bajo certeza (EBC) de los siguientes loterías



3. Entonces

$$u(EBC_{L1}) = 0.25$$

$$u(EBC_{L2}) = 0.50$$

$$u(EBC_{L3}) = 0.75$$

4. En base a los puntos de la función así obtenidos se grafica la curva.

Ejemplo IV.3.1

Se tiene el siguiente problema de decisiones: se proponen dos contratos a una constructora; el primero le puede generar una de estas utilidades: 80, 50, 10 o -6 millones de pesos con una probabilidad de 0.60, 0.20, 0.15 y 0.05 respectivamente. El contrato dos le puede dar utilidades por 100, 25 o -30 millones de pesos con probabilidades de o.40, 0.50 y 0.10 respectivamente. Otra alternativa es el no aceptar ningún contrato.

a) Resuelve el problema tomando en cuenta las preferencias del decisor.
b) Tomando en cuenta el valor monetario esperado.

Solución:

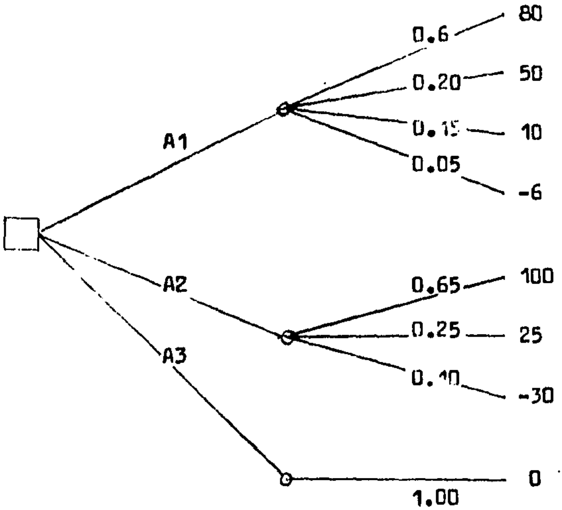
El problema puede plantearse así:

A1: Seleccionar el contrato 1.

A2: Seleccionar el contrato 2.

A3: No aceptar ninguno.

El árbol de decisiones es el siguiente:



El conjunto de resultados posibles en orden de preferencia es

$$X = \{100, 80, 50, 25, 10, 0, -6, -30\}$$

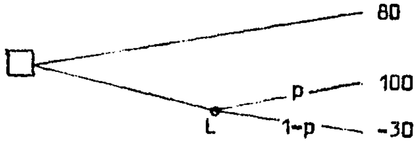
El mejor resultado es $x^* = 100$

El peor resultado es $x^\circ = -30$

Aplicando el algoritmo :

1. u(100) = 1.0
    u(-30) = 0.0

2. Para xi=80 se debe encontrar un valor de p tal que haga las dos ramas del siguiente árbol equivalentes:



Entrevistando al decisor nos dice que p=0.95 , entonces

$u(80) = 0.95(1) + 0.05(0)$

$u(80) = 0.95$

3. El procedimiento se repite para xi=50, 25,10,0,-6 y se obtienen las siguientes cantidades:

$u(50) = 0.80$

$u(25) = 0.65$

$u(10) = 0.55$

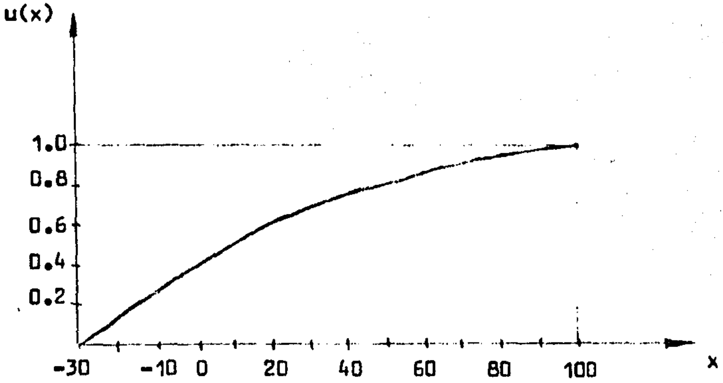
$u(\ 0) = 0.40$

$u(-6) = 0.35$

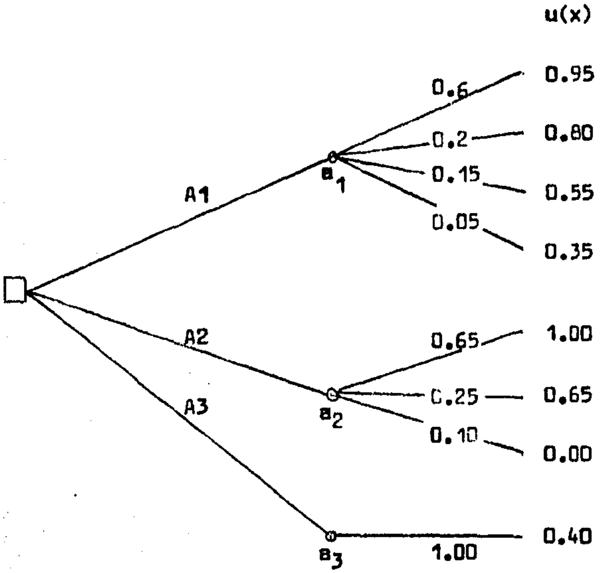
Este conjunto de valores es <u>la función de utilidad del decisor del problema</u> para esta situación.

El desarrollo con el método del tetrahedro es similar.

La gráfica de la función es la siguiente:



Sustituyendo los resultados por sus respectivas utilidades, el problema queda así:



Calculando la utilidad esperada en los puntos a1,a2 y a3:

Utilidad en a1=0.6(0.95) + 0.2(0.80) + 0.15(0.55) + 0.05(0.35)
=0.83

Utilidad en a2=0.65(1.00)+ 0.25(0.65)+0.1(0)
=0.8125

Utilidad en a3=1(0.40) = 0.40

Como la utilidad en a1 es la mayor y deseamos obtener la mayor utilidad, se aconseja aceptar el contrato 1.

b) Calculando el valor monetario esperado para cada alternativa, se tiene:

VME1=0.6(80)+0.2(50)+0.15(10)+0.05(-6)
=59.2

VME2=0.65(100)+0.25(25)+0.10(-30)
=68.25

VME3=1(0)=0

Por el criterio del valor monetario esperado, se aconseja aceptar el contrato 2.

Como se puede observar, el decisor da una utilidad mayor para el contrato 1 aún cuando su valor monetario esperado es menor que el del contrato 2. Esto se explica observando en el árbol de decisión original que el contrato 2 tiene el riesgo de perder 30 millones de pesos con una probabilidad de 0.10 , mientras que la máxima pérdida en el contrato 1 es de 6 millones de pesos con una probabilidad de 0.05. Este comportamiento es lógico dada la aversión de nuestro decisor por el riesgo.

IV.4 Análisis de las Funciones de Utilidad.

Prima de riesgo:

La prima de riesgo se define como la diferencia entre el valor monetario esperado y el equivalente bajo certeza de una situación dada;

$$PR = VME - EBC$$

Si la prima de riesgo es positiva, significa que el VME es mayor que EBC, es decir se tiene aversión al riesgo. La prima de riesgo en este caso representa la cantidad que el decisor está dejando de ganar por esa aversión a riesgo.

Si PR es igual a 0 significa que VME = EBC y significa que el decisor se rige por el VME y es por tanto indiferente al riesgo.

Si PR es negativa, VME es menor que EBC y significa que el decisor es propenso al riesgo y la prima indica qué tan grande es esa propensión.

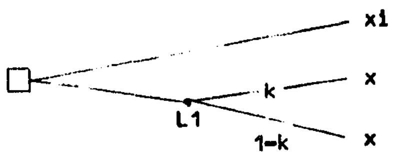
Análisis de la función:

Si un decisor es indiferente al riesgo, su función de utilidad se construiría así:

Sean x^* el mejor valor y $x°$ el peor, entonces

$u(x^*) = 1 \quad u(x°) = 0$

El EBC de la lotería L1 es igual al VME por lo que p = k



entonces:

$$u(xi) = k\ u(x\ ) + (1-k)\ u(x\ )$$
$$u(xi) = k$$

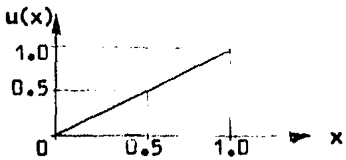
Así para diferentes valores de k :

Si $k = 1/4$ $\quad$ $u(xi) = 1/4$

Si $k = 1/2$ $\quad$ $u(xi) = 1/2$

Si $k = 3/4$ $\quad$ $u(xi) = 3/4$

Graficando la función:



Para un decisor adverso al riesgo :

El EBC de la lotería L1 es menor que el VME por lo que para jugar en la lotería exigirá un valor p k, es decir, exigirá una mayor probabilidad de ganar que el decisor neutral al riesgo. Entonces:

$$u(xi) = p\ u(x\ ) + (1-p)\ u(x\ )$$
$$u(xi) = p > k$$

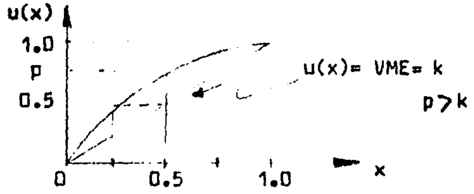
Así, para diferentes valores de k en la lotería L1:

Si $k = 1/4$ $\quad$ $u(xi) = p > 1/4$

Si $k = 1/2$ $\quad$ $u(xi) = p > 1/2$

Si $k = 3/4$ $\quad$ $u(xi) = p > 3/4$

Graficando la función:



Entonces una curva cóncava respecto al eje x representa un comportamiento de aversión al riesgo.

Para un decisor propenso al riesgo:

El EBC de la lotería es mayor que el VME, por lo que el decisor esta dispuesto a jugar en la lotería aún cuando la - probabilidad de ganar p sea menor que el valor k. Entonces:

$u(xi) = p\ u(x\ ) + (1-p)\ u(x\ )$

$u(xi) = p < k$

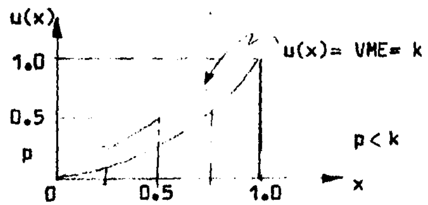
Así, para diferentes valores de k en la lotería L1:

Si $k = 1/4$ $\quad u(xi) = p < 1/4$

Si $k = 1/2$ $\quad u(xi) = p < 1/2$

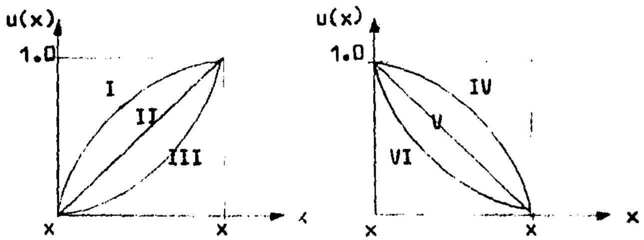
Si $k = 3/4$ $\quad u(xi) = p < 3/4$

Graficando la función:



Entonces una curva convexa respecto al eje x representa un comportamiento de propensión al riesgo.

En resumen, el comportamiento de la función de utilidad para un decisor puede ser alguna de las siguientes seis curvas:



Los puntos extremos y un número razonable de puntos intermedios pueden ser obtenidos con el algoritmo ya descrito.

De esta manera y con base al comportamiento del decisor se dan curvas de aversión al riesgo, de indiferencia al riesgo y de propensión al riesgo. Para estudiar cada curva se define la siguiente función:

$$R(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

llamada función de riesgo que nos servirá para encontrar el comportamiento del decisor.

Si la curva produce una función de riesgo positiva se trata de un comportamiento de aversión al riesgo. Si la función es negativa se trata de una actitud de propensión al riesgo. Y si la función es nula indica indiferencia al riesgo.

Calculando $R(x)$ para cada una de las curvas:

Curva I:	$u'(x) > 0$	$u''(x) < 0$	$R(x) > 0$
Curva II:	$u'(x) > 0$	$u''(x) = 0$	$R(x) = 0$
Curva III:	$u'(x) > 0$	$u''(x) > 0$	$R(x) < 0$
Curva IV:	$u'(x) < 0$	$u''(x) < 0$	$R(x) < 0$
Curva V:	$u'(x) < 0$	$u''(x) = 0$	$R(x) = 0$
Curva VI:	$u'(x) < 0$	$u''(x) > 0$	$R(x) > 0$

En base a los valores de la función de riesgo tenemos que las curvas I y VI son curvas de aversión al riesgo.

Las curvas II y V indican indiferencia al riesgo.

Las curvas III y IV muestran afinidad al riesgo.

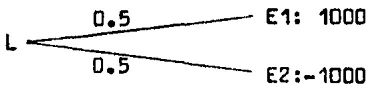
Cambios en la actitud al riesgo al variar el capital.

La mayoría de los decisores muestran una aversión al riesgo. Al aumentar el patrimonio o capital del decisor, su actitud de aversión al riesgo puede aumentar, permanecer constante o disminuir. Para conocer este comportamiento hay que observar cómo varía la prima de riesgo.

Si la prima de riesgo aumenta al crecer el capital, se dice que el decisor tiene una actitud de aversión creciente al riesgo. Si la prima permanece constante, se trata de una aversión constante. Y si la prima disminuye al amentar el capital, la aversión es decreciente. Como es lógico, esta es la actitud más común entre los decisores, ya que entre mayor es el capital, menos grave será una pérdida, por lo que al aumentar el capital el decisor está dispuesto a afrontar un riesgo mayor.

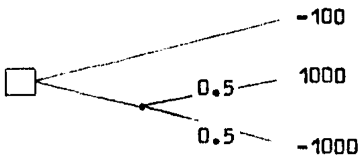
Ejemplo IV.4.1

Sea L una lotería : L = (0.5,E1),(0.5,E2)



Si el decisor D tiene aversión decreciente por el riesgo, referirá no participar en esta lotería, ya que su valor esperado es cero.

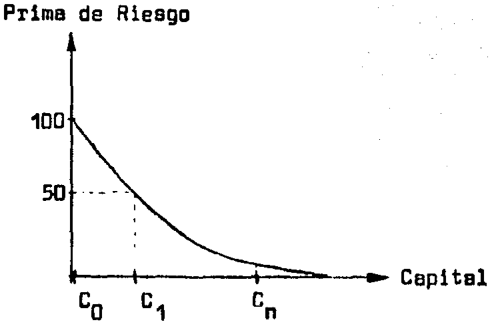
Si el decisor da un EBC de -100, quiere decir que está dispuesto a pagar 100 pesos con tal de no correr el riesgo de perder 1000, es decir, tiene una prima de riesgo de 100 pesos. En forma de árbol ambas ramas son diferentes al decisor:



Si nuestro decisor en ese momento recibe una herencia de un tío lejano, entonces quizá no este dispuesto a pagar una prima de 100 pesos para evitar el riesgo; así, su nuevo EBC será menor, digamos -50.

Si más tarde resulta que gana el premio mayor en la lotería nacional, tal vez ya no este dispuesto a pagar la prima de 50 pesos, sino que pagará una de 10 pesos.

Y así entre más dinero tenga, menor será la prima que este dispuesto a pagar; por lo tanto, su EBC se acercará cada vez más al VME. Si se grafica la prima de riesgo contra el capital del decisor, la función sería así:



Donde:

C_0: Es el capital del decisor en el primer tiempo.

C_1: Es el capital del decisor en el tiempo dos.

C_n: Es el capital del decisor en el tiempo n.

Este tipo de comportamiento es uno de los más usuales.

Para ilustrar el uso de las funciones de utilidad en un problema de decisiones donde se toman decisiones en secuencia véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo IV.4.2

Se desea aprovechar un terreno bien ubicado, y se proponen dos alternativas: construir un conjunto de edificios de apartamentos o constuir un centro comercial.

Las utilidades esperadas dependen de la variación del PIB en los próximos sies años, los comportamientos posibles son:

E1 : El PIB disminuye o se mantiene igual.

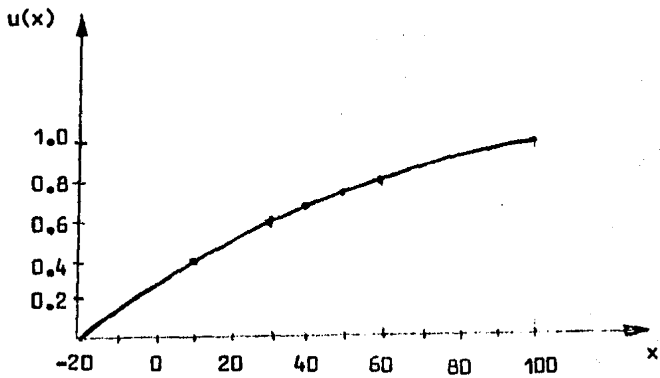
E2 : El PIB crece.

Si se presenta E1 (que ocurre con una probabilidad de- 0.4)y se construyen edificios de apartamentos se ganarán 40 millones de pesos. Si ocurre E1 y se construye un centro comercial se perderán 20 millones.

Si ocurre E2 y se construyen edificios de apartamentos se puede ampliar el proyecto o dejarlo como esta. Si se deja como esta se ganarán 40 millones. Si se amplia y tiene demanda grande se ganarán 60 millones, en cambio si la demanda es baja sólo se ganarán 30 millones.

Si ocurre E2 se puede ampliar el centro comercial o dejarlo como esta. Si se amplia y tiene éxito se ganarán 100 - millones de pesos y si no funciona se ganarén sólo 30 millones de pesos. Si se deja el centro como esta se ganarán 50 - millones.

¿Cuál es el mejor curso de acción a seguir si la función de utilidades es la siguiente?

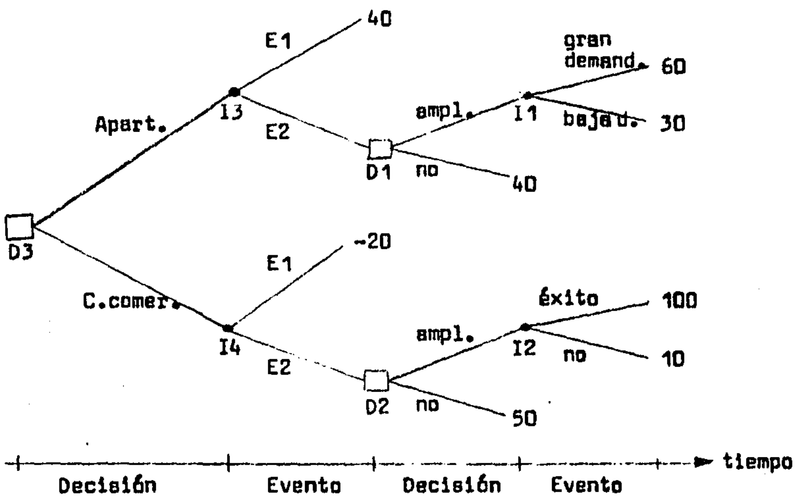


Los pasos a seguir para resolver el problema son:

1. Convertir los diferentes resultados en las correspon dientes utilidades.
2. Calcular la utilidad esperada para cada punto de incer tidumbre terminal. Continuar este proceso hasta que - los puntos de decisión sean terminales. En estos pun- tos la decisión es evidente.
3. Si el punto de decisión es el nodo raíz, el problema termina. Si no, pasar al punto 2.

Solución:

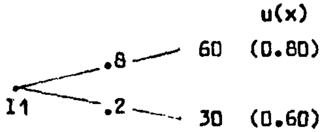
El árbol de decisión es:



1. Convirtiendo los resultados en utilidades:

u(40) = 0.66
u(60) = 0.80
u(30) = 0.60
u(-20) = 0.00
u(100) = 1.00
u(10) = 0.40
u(50) = 0.75

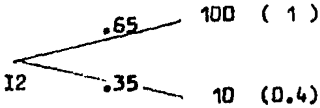
así, para el punto I1 :



la utilidad esperada UE_{I1} es:

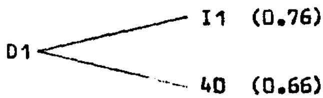
$$UE_{I1} = 0.8(0.8) + 0.2(0.6) = 0.76$$

para el punto I2:



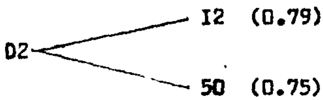
$$UE_{I2} = 0.65(1) + 0.35(0.4) = 0.79$$

Entonces el punto de decisión D1 es:



La decisión es obvia, y $UE_{D1} = 0.76$

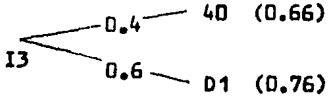
Para el punto de decisión D2:



La decisión es obvia, y $UE_{D2} = 0.79$

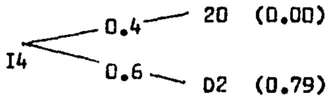
Los nodos terminales son ahora I3 e I4.

Para I3:



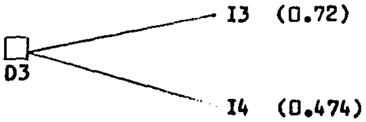
$UE_{I3} = 0.4(0.66) + 0.6(0.76) = 0.72$

Para I4:



$UE_{I4} = 0.4(0.0) + 0.6(0.79) = 0.474$

El nodo terminal es ahora el nodo de decisión D3, donde la decisión es obvia.



Por lo tanto utilizando la función de preferencias del decisor, se recomienda la alternativa 1; construir edificios de apartamentos.

V. DECISIONES CON OBJETIVOS MULTIPLES.

V. DECISIONES CON OBJETIVOS MULTIPLES.

La mayor parte de los problemas reales involucran una gran cantidad de objetivos. Así, por su naturaleza, los proyectos de Ingeniería Civil tienen como consecuencia cambios en el medio ambiente, en la economía y además inciden en las relaciones sociales y laborales de muchas personas. Por eso, al analizar proyectos de ingeniería, nos encontramos con una diversidad de consecuencias. Por ejemplo, la construcción de un aeropuerto acarrea resultados benéficos y dañinos, tales como costos en la construcción, costos de operación, brinda un servicio de transportación, se afecta la ecología de una gran superficie, se genera una fuente permanente de trabajo, etc.

Entonces, al construir un aeropuerto, se persiguen distintos objetivos, tales como: tener un sistema de transporte de pasajeros rápido y seguro, generar un buen número de empleos, afectar lo menos posible la ecología, etc. Como se puede ver los objetivos son muchas veces antagónicos, por lo que se debe encontrar un equilibrio entre todos ellos con objeto de maximizar la utilidad de acuerdo a las preferencias del decisor.

En el análisis de decisiones con objetivos múltiples se hace uso de la teoría de utilidades, por lo que para todas las funciones de utilidades que se formulan aquí, se deben cumplir los axiomas de racionalidad y consistencia enunciados en la sección IV.2 de este trabajo.

V.1 Conceptos Básicos.

Atributos:

Los atributos son las cualidades o propiedades de un objeto. Entonces, para medir que tanto se logra un objetivo, debemos ver en qué medida se cumplen sus atributos. Así, los atributos son medidas asociadas a los objetivos que deben permitir un tratamiento cuantitativo del problema.

Ejemplo :

El Gobierno Federal decide construir un camino de mano de obra. El objetivo perseguido es: mejorar las comunicaciones y generar empleos.

Este objetivo se puede dividir en dos objetivos cuyos atributos son:

	Atributos
Objetivo 1: Mejorar comunicaciones.	Kms construidos.
Objetivo 2: Generar empleos.	Número de empleos generados.

Para medir el logro de cada objetivo, debemos recurrir a sus atributos.

Es claro pues, que para poder medir la consecución de un objetivo, el atributo debe corresponder al objetivo, es decir, el comportamiento del atributo debe reflejar que tanto se logra el objetivo.

Para cada problema con objetivos múltiples, tendremos un conjunto de atributos que debe ser el mínimo y no redundante.

Función de Utilidad para Atributos Múltiples:

En un problema con objetivos múltiples, cada consecuencia X tendrá una serie de atributos, donde cada atributo xi nos indicará en que medida se logró el objetivo i.

La función de utilidad $u(X) = u(x1,x2,x3,\ldots,xn)$ es la función de utilidad para atributos múltiples (FUAM), y proporciona una medida de la utilidad asociada a la obtención de los diferentes valores xi de los atributos.

Esta función tiene las siguientes propiedades:

a) $u(X) > u(X')$ si y solo si $X \succ X'$
b) En situación de incertidumbre la alternativa con el máximo valor esperado de $u(X)$ es la recomendada.

Para establecer la FUAM, se deben hacer preguntas al decisor para obtener su estructura de preferencias; se debe establecer la FUAM y verificarse con el decisor. Además, debe revisarse su consistencia.

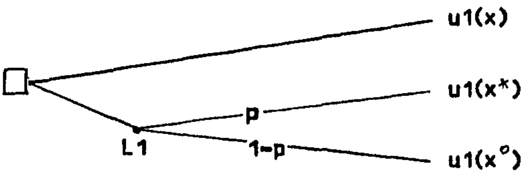
V.2 Funciones de Utilidad Estratégicamente Equivalentes.

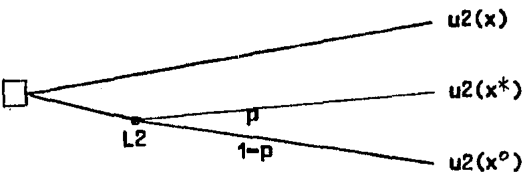
Dos funciones de utilidad son estratégicamente equivalentes si y solo si tienen la misma estructura de preferencias. Es decir que si:

$X = \{\text{Conjunto de resultados posibles de cada atributo}\}$

$x^*, x^o, x \in X$ y $x^* \succ x \succ x^o$

Y sean u1 y u2 funciones de utilidad estrategicamente - equivalentes. Entonces, si tenemos las siguientes loterias:





se cumple que p en la lotería 1 es igual a p en la lotería 2.

Entonces:

$$u1(x) = p\ u1(x^*) + (1-p)\ u1(x^\circ) \qquad (1)$$

$$u2(x) = p\ u2(x^*) + (1-p)\ u2(x^\circ) \qquad (2)$$

Despejando p de (2):

$$p = \frac{u2(x) - u2(x^\circ)}{u2(x^*) - u2(x^\circ)}$$

Sustituyendo p en (1):

$$u1(x) = \frac{u2(x) - u2(x^\circ)}{u2(x^*) - u2(x^\circ)}\,(u1(x^*) - u1(x^\circ)) + u1(x^\circ)$$

$$u1(x)(u2(x^*)-u2(x^\circ)) = u2(x)(u1(x^*)-u1(x^\circ)) - u2(x^\circ)(u1(x^*)-u1(x^\circ)) + u1(x^\circ)(u2(x^*)-u2(x^\circ))$$

Si $\quad a=u2(x^{*})-u2(x^{o})$

$b=u1(x^{*})-u1(x^{o})$

$c=-(u2(x^{o})(u1(x^{*})-u1(x^{o}))-u1(x^{o})(u2(x^{*})-u2(x^{o})))$

Nótese que a y b son siempre positivos ya que $x^{*} > x^{o}$

Entonces:

$$a\ u1(x) = b\ u2(x) + c$$

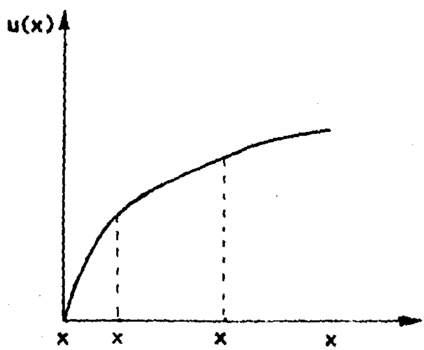
$$u1(x) = (b/a)\ u2(x) + c/a$$

Si $A=b/a$ y $B=c/a$

$$u1(x) = A\ u2(x) + B$$

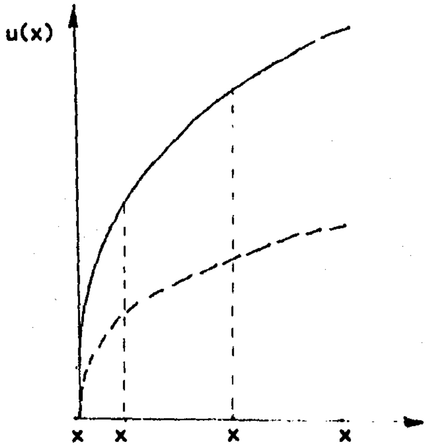
donde A y B son constantes y $A > 0$.

Esto significa que si tenemos una función de utilidad dada:



$u(x1) < u(x2)$

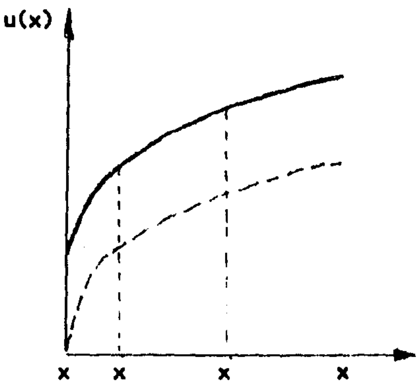
Si multiplicamos todos los términos por una constante positiva:



u(x1) < u(x2)

La estructura de preferencia no cambia.

Y si se suma o se resta una constante:



u(x1) < u(x2)

Entonces si se suma una constante la estructura de preferencias tampoco cambia.

Así, una función de utilidades se puede obtener de otra multiplicándola por una constante positiva y/o sumándole (restándole) una constante. La función de utilidad así obtenida es estratégicamente equivalente.

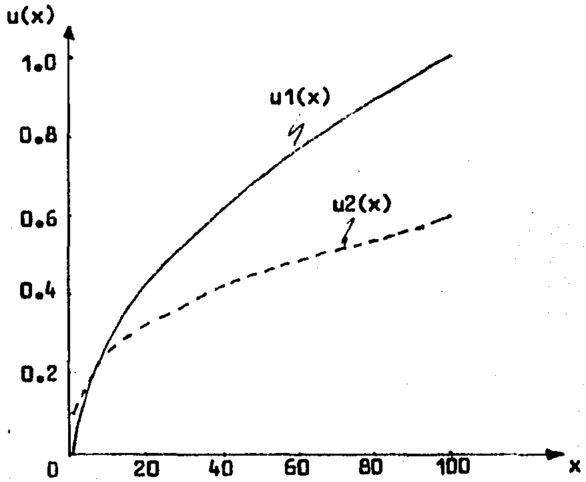
Ejemplo:

Si $$u1(x) = \sqrt{\frac{x}{100}}$$

Y tenemos la función estratégicamente equivalente:

$$u2(x) = 0.1 + (1/2)\ u1(x)$$

Graficando ambas funciones:



Para cualquier valor de x, se debe cumplir en ambas funciones que:

$$p = \frac{u1(x) - u1(x^{o})}{u1(x^{*}) - u1(x^{o})} = \frac{u2(x) - u2(x^{o})}{u2(x^{*}) - u2(x^{o})}$$

Para x= 20:

$$\frac{u1(20) - u1(0)}{u1(100) - u1(0)} = \frac{0.447 - 0}{1 - 0} = 0.447$$

$$\frac{u2(20) - u2(0)}{u2(100) - u2(0)} = \frac{0.3235 - 0.1}{0.6 - 0.1} = 0.447$$

Y si verificamos esta relación para cualquier valor de x, se debe cumplir que las relaciones entre las utilidades son las mismas en ambas funciones. Por lo que se puede afirmar que son estratégicamente equivalentes.

V.3 Independencia de Preferencias y de Utilidades.

Independencia de Preferencias:

Sea X = (x1,x2,x3,...,xn) entonces el par de atributos (x1,x2) es preferencialmente independiente de los otros atributos (x3,x4,...,xn) si las preferencias entre (x1,x2) dado que el conjunto (x3,x4,...,xn) ya ha sido fijado, no depende del nivel donde (x3,x4,...,xn) fue fijado.

Ejemplo:

Para el conjunto $X=(x,y,z)$

Si $(x1,y1,z1) \succ (x2,y2,z1)$

se cumple que

$$(x1,y1,zi) \succ (x2,y2,zi) \quad \text{para cualquier } i.$$

Si tomamos el ejemplo de la construcción de un camino, y llamamos:

x = Kms de camino

y = Empleos generados

z = Incremento del comercio en la región

Y decimos que:

$$(x1=100 \text{ kms}, \; y1=400 \text{ empleos}, \; z= 25\%) \succ (x1,y1,z)$$

Se debe cumplir que:

$$(x1,y1,z2=40\%) \succ (x1,y1,z2) \quad \text{y que} \quad (x1,y1,z3=0\ \%) \succ (x1,y1,z3)$$

y esta estructura se debe mantener para cualquier valor de z.

Independencia de Utilidades:

Sea $X=(x1,x2,x3,\ldots,xn)$, entonces la utilidad del atributo x1 es independiente de los otros atributos $(x2,x3,\ldots,xn)$ si las preferencias en las loterias x1, dado que $x2,x3,\ldots,xn$ estan fijos , no depende del nivel en que fueron fijados, es decir:

$$(x1^*,x2',x3',\ldots,xn') \sim \begin{cases} p & (x1^A,x2',x3',\ldots,xn') \\ 1-p & (x1^B,x2',x3',\ldots,xn') \end{cases}$$

Si se cumple la equivalencia anterior para un valor fijo de p se debe cumplir la siguiente equivalencia:

$$(x1^{*},x2'',x3'',\ldots,xn'') \begin{array}{l} \xrightarrow{\;p\;} (x1^{A},x2'',x3'',\ldots,xn'') \\ \xrightarrow{\;1-p\;} (x1^{B},x2'',x3'',\ldots,xn'') \end{array}$$

Ejemplo:

Si tenemos la siguiente equivalencia:

$$(x3,y1,z1) \sim \begin{array}{l} \xrightarrow{\;0.5\;} (x1,y1,z1) \\ \xrightarrow{\;0.5\;} (x2,y1,z1) \end{array}$$

Entonces se debe cumplir la siguiente equivalencia:

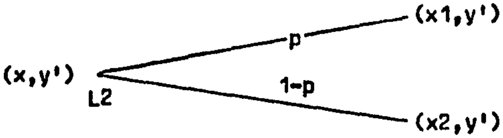
$$(x3,y2,z2) \sim \begin{array}{l} \xrightarrow{\;0.5\;} (x1,y2,z2) \\ \xrightarrow{\;0.5\;} (x2,y2,z2) \end{array}$$

Para que exista independencia de utilidades.

En el caso de dos atributos x , y tenemos que si la utilidad de x es independiente del atributo y, se cumple que si:

$$\underset{L1}{(x,y)} \begin{array}{l} \xrightarrow{\;p\;} (x1,y) \\ \xrightarrow[\;1-p\;]{} (x2,y) \end{array}$$

Entonces se debe tener la siguiente equivalencia:



Que será valida para cualquier valor del atributo y.

Entonces podemos decir que si fijamos y en un nivel y' - la estructura de preferencias en loterias sobre x se mantendrá.

Así, si mantenemos y fijo en la lotería L1 y fijamos el atributo y en el nivel y' en la lotería L2, las funciones de utilidad u(x,y) y u(x,y') serán estratégicamente equivalentes. Y como se demostró en la sección anterior, la equivalencia se puede expresar así:

$$u(x,y) = A\, u(x,y') + B \qquad - \quad (1)$$

Donde: $A = f_1(y)$ $\quad$ A 0

$B = f_2(y)$

Es decir, la función u(x,y) se puede expresar como una función de u(x,y') donde A y B dependen sólo del valor de y, y son constantes para un valor fijo de y.

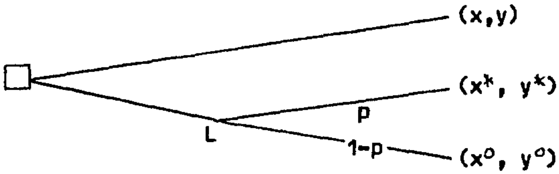
V.4 Evaluación Directa de las Funciones de Utilidad para Atributos Múltiples.

Si no existe independencia de utilidades, las utilidades para atributos múltiples deben evaluarse directamente. Para el caso de dos atributos x,y la evaluación se realiza así:

1. Se identifican las consecuencias extremas y se asignan utilidades arbitrarias. Generalmente 1 a la mejor y 0 a la peor:

Sea (x^*,y^*) la mejor consecuencia, entonces $u(x^*,y^*) = 1.0$
Sea (x°,y°) la peor consecuencia, entonces $u(x^\circ,y^\circ) = 0.0$

2. Se calculan las utilidades de las consecuencias intermedias, planteando al decisor el árbol:



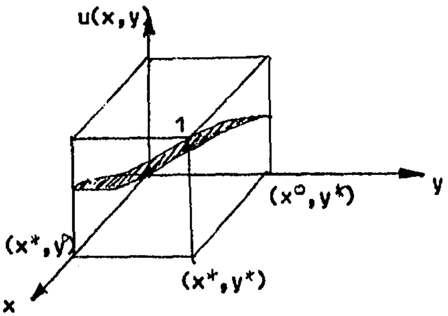
El valor de p que haga indiferentes ambas ramas del árbol se utiliza para calcular la utilidad de (x,y)

$$u(x,y) = p\, u(x^*,y^*) + (1-p)\, u(x^\circ,y^\circ)$$

$$u(x,y) = p$$

3. Se repite el paso 2 hasta obtener un número de puntos que permita tener la función a un grado de aproximación adecuada.

En el caso de dos variables, la función está dada por una superficie de esta forma:



Como se mencionó antes, para definir una función de utilidades con un atributo, son suficientes cinco puntos. En el caso de dos atributos, se necesitan 25 puntos. Entonces, para definir una función de utilidades con dos atributos, es necesario hacer 23 preguntas al decisor, ya que los puntos extremos (x ,y) y (x ,y) se evaluan arbitrariamente.

En general el número de preguntas necesarias para definir la función de utilidades es $2^n - 2$; entonces si tenemos 4 atributos, el número de preguntas necesarias es de 623 y para 6 atributos se necesitarían 15623 preguntas.

Es claro pues, que este método es muy ineficiente para problemas con muchos atributos. Por suerte, para muchos problemas reales, sí existe independencia de utilidades y de preferencias, por lo que es posible utilizar métodos mas simples.

V.5 Funciones de utilidad Multilineales.

Dados los problemas que tiene una evaluación directa de las funciones de utilidad, es conveniente desarrollar una forma directa de evaluar las utilidades mediante una expresión analítica.

Se desarrollarán las funciones para dos atributos, y después se generalizarán para n atributos.

Función Multilineal:

Sea un conjunto de consecuencias (x1,y1),(x2,y2),(x3,y3) ...,(xn,yn) donde llamaremos x al mejor valor del atributo x y x^{o} al peor. Y llamaremos y^{*} al mejor valor del atributo y y y^{o} al peor valor.

Una función multilineal es una función de la forma:

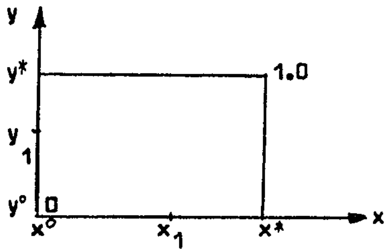
$u(x,y)=u(x,y^{o})+u(x^{o},y)+ku(x,y^{o})u(x^{o},y)$

si $u(x,y^{o})=k_x u_x(x)$ y $u(x^{o},y)=k_y\ u_y(y)$ entonces la función multilineal se puede escribir así:

$u(x,y)=k_x\ u_x\ (x)+k_y\ u_y\ (y)+k_{xy}\ u_x\ (x)\ u_y\ (y)$

donde se cumplen las siguientes condiciones:

a) $u(x,y)$ es una función tal que $u(x^{o},y^{o})=0$ y $u(x^{*},y^{*})=1$
es decir:



b) Se cumple que $u(x1,y^{o}) > u(x^{o},y^{o})$
y que $u(x^{o},y1) > u(x^{o},y^{o})$

c) $u_x(x)$ es una función de utilidad condicional en x donde

$u_x(x^{o})=0$ y $u_x(x^{*})=1$

d) $u_y(y)$ es una función de utilidad condicional en y donde

$u_y(y^{o})=0$ y $u_y(y^{*})=1$

e) $k_x = u(x\ ,\ y\ )$

$k_y = u(x\ ,\ y\ )$

f) $k_x + k_y + k_{xy} = 1$

$$k = \frac{k_{xy}}{k_x\ k_y}$$

Si se cumplen las condiciones anteriores y la función tiene la forma mencionada, se trata de una función multilineal.

Teorema:

Si x,y son atributos con utilidades mutuamente independientes, entonces la función de utilidad para los dos atributos es multilineal.

Demostración:

Usando el concepto de funciones estratégicamente independientes, si tenemos la función $u(x,y^{o})$ donde y^{o} es un valor fijo de y, entonces:

$$u(x,y) = a1(y) + a2(y)\ u(x,y^{o}) \qquad (a)$$

Y si tenemos $u(x^{o},y)$ para un valor x^{o} fijo:

$$u(x,y) = b1(x) + b2(x)\ u(x^{o},y) \qquad (b)$$

Sabemos que $u(x^{*},y^{*}) = 1$ y que $u(x^{o},y^{o}) = 0$
Evaluando (a) en $x = x^{0}$

$$\begin{aligned} u(x^{o},y) &= a1(y) + a2(y)\ u(x^{o},y^{o}) \\ &= a1(y) \qquad (c) \end{aligned}$$

Sustituyendo (c) en (a) y haciendo $x = x^*$:

$$u(x^*,y) = a1(y) + a2(y)\, u(x^*,y^o)$$

$$a2(y) = \frac{u(x^*,y) - a1(y)}{u(x^*,y^o)} \qquad (d)$$

Sustituyendo (c) y (d) en (a) :

$$u(x,y) = u(x^o,y) + \frac{u(x^*,y) - u(x^o,y)}{u(x^*,y^o)}\, u(x,y^o) \qquad (e)$$

Realizando las mismas operaciónes con (b):

$$u(x,y) = u(x,y^o) + \frac{u(x,y^*) - u(x,y^o)}{u(x^o,y^*)}\, u(x^o,y) \qquad (f)$$

Evaluando (f) en $x=x^*$:

$$u(x^*,y) = u(x^*,y^o) + \frac{u(x^*,y^*) - u(x^*,y^o)}{u(x^o,y^*)}\, u(x^o,y) \qquad (g)$$

Sustituyendo (g) en la expresión (e) y realizando operaciones:

$$u(x,y)=u(x^o,y)+u(x,y^o)+ \underbrace{\frac{u(x^*,y^*)-u(x^*,y^o)-u(x^o,y^*)}{u(x^o,y^*)\; u(x^*,y^o)}}_{k}\, u(x^o,y)u(x,y^o)$$

Y finalmente llegamos a la forma:

$$u(x,y) = u(x^o,y) + u(x,y^o) + k\, u(x^o,y)\, u(x,y^o)$$

Si definimos las funciones de utilidad para cada atributo $u_x(x)$ y $u_y(y)$ tales que:

$$k_x\ u_x(x) = u(x,y^{\circ})$$

$$k_y\ u_y(y) = u(x^{\circ},y) \quad \text{y como} \quad k_{xy} = k\ k_x\ k_y$$

$$u(x,y) = u(x^{\circ},y) + u(x,y^{\circ}) + k\ u(x\ ,y)\ u(x,y\ )$$

se puede escribir:

$$u(x,y) = k_x\ u_x(x) + k_y\ u_y(y) + k_{xy}\ u_x(x)\ u_y(y)$$

Por lo tanto si x, y son atributos con utilidades mutuamente independientes, la función de utilidad para ambos atributos es multilineal.

V.6 Función de Utilidad Aditiva.

Es una función de utilidad de la forma:

$$u(x,y) = u(x,y^{\circ}) + u(x^{\circ},y)$$

o bien

$$u(x,y) = k_x\ u_x(x) + k_y\ u_y(y)$$

Que como puede observarse tiene la forma de una función multilineal donde $k_{xy} = 0$, $k = 0$ y por tanto $k_x + k_y = 1$.

Entonces para que una función de utilidad sea del tipo aditivo debe de ser multilineal, y se debe cumplir lo expresado en (h) y en (i). Para verificar esto se proponen L1 y L2:

L1: 0.5 — (x,y); 0.5 — (x1,y1)

L2: 0.5 — (x,y1); 0.5 — (x1,y)

Si al decisor le son indiferentes las loterías, entonces se puede utilizar la función de utilidad aditiva.

Haciendo $(x1,y1) = (x^0,y^0)$, como ambas loterías son equivalentes:

$$0.5\ u(x,y) + 0.5(x^0,y^0) = 0.5\ u(x,y^0) + 0.5\ u(x^0,y)$$

$$u(x,y) = u(x,y^0) + u(x^0,y)$$

y como la función multilineal es:

$$u(x,y) = k_x u_x(x) + k_y u_y(y) + k_{xy}\ u_x(x)\ u_y(y)$$

$$k_x + k_y + k_{xy} = 1$$

Se puede observar que entonces:

$$k_{xy} = 0$$

$$k_x + k_y = 1$$

La función de utilidad aditiva generalizada para n atributos es: si $X = (x1,x2,x3,\ldots,xn)$

$$u(X) = \sum_{i=1}^{n} k_i\ u_i(x_i)$$

donde : u y ui son funciones de utilidad con rangos de 0 a 1.

ki son constantes entre 0 y 1.

V.7 Función de Utilidad Multiplicativa.

Sea $u(x,y)$ una función multilineal, entonces $u'(x,y)$:

$$u'(x,y) = k\ u(x,y) + 1$$

es una función estratégicamente independiente.

Como $u(x,y)$ es multilineal, se puede expresar así:

$$u(x,y) = u(x,y^{o})+u(x^{o},y)+k\ u(x,y^{o})\ u(x^{o},y)$$

$$\begin{aligned} u'(x,y) &= k\ u(x,y) + 1 \\ &= k\ u(x,y^{o})+k\ u(x^{o},y)+k^{2}\ u(x,y^{o})\ u(x^{o},y) + 1 \\ &= (k\ u(x,y^{o}) + 1)\ (k\ u(x^{o},y) + 1) \end{aligned}$$

entonces:

$$k\ u(x,y) +1 = (\ k\ u(x\ ,y^{o}) + 1)\ (\ k\ u(x^{o},y) + 1)$$

Es la función de utilidad multiplicativa para dos atributos.

Generalizando para n atributos:

si $X = (x1,x2,x3,\ldots,xn)$

$$k\ u(X) + 1 = \prod_{i=1}^{n} (k\ k_{i}\ u_{i}(x_{i}) + 1)$$

donde

$k > -1$ es una constante que satisface la ecuación

$$k + 1 = \prod_{i=1}^{n} (k\ k_{i} + 1)$$

V.8 Determinación de las Funciones de Utilidad Aditiva y Multiplicativa.

Determinación del Tipo de Función:

Cuando existe dependencia mutua de utilidades entre los atributos, la función de utilidad es multilineal.

Una función multilineal puede tener la forma aditiva o la multiplicativa.

Si al decisor le proponemos las loterias L1 y L2:

$$L1 \begin{cases} 0.5 \longrightarrow (xi^*, xj^*) \\ 0.5 \longrightarrow (xi^o, xj^o) \end{cases} \qquad L2 \begin{cases} 0.5 \longrightarrow (xi^*, xj^o) \\ 0.5 \longrightarrow (xi^o, xj^*) \end{cases}$$

Donde xi^*: es el mejor valor del atributo i y xi^o el peor.
xj^*: es el mejor valor del atributo j y xj^o el peor.

Si al decisor le es indiferente L1 a L2 para cualquier valor de i y j , entonces se puede usar la forma aditiva:

$$u(X) = \sum_{i=1}^{n} ki \; ui(Xi)$$

Si L1 y L2 no son equivalentes para el decisor, entonces se usará la forma multiplicativa:

$$1 + k \; u(X) = \prod_{i=1}^{n} (1+k \; ki \; ui(Xi))$$

Determinación de las Constantes :

Sean xi^* el mejor valor del atributo i y xi° el peor, entonces $u(xi^*) = 1$ y $u(xi^\circ) = 0$.

Las constantes ki se pueden calcular presentando al decisor dos consecuencias X1 y X2 :

$$X1 = (x1^\circ, x2^\circ, x3^\circ, \ldots, xi^*, \ldots, xn^\circ)$$
$$X2 = (x1^\circ, x2^\circ, x3^\circ, \ldots, xj^a, \ldots, xn^\circ)$$

Donde el nivel de xj^a se varía hasta que X1 se vuelve indiferente a X2. Y tenemos que u(X1) = u(X2) , que evaluados ya sea en la expresión de la forma aditiva o en la multiplicativa nos da:

$$ki = kj\ uj(xj^a)$$

Que es una ecuación que nos relaciona los valores entre ki y kj.

Siguiendo el mismo procedimiento podemos encontrar (n-1) ecuaciones independientes con n incógnitas, que nos relaciona los pares de constantes ki y kj.

Para determinar la otra ecuación en el caso aditivo se sabe que:

$$\sum_{i=1}^{n} ki = 1$$

En el caso general se propone al decisor una lotería donde todos los atributos estan en su peor valor excepto dos de ellos, xi y xj, y se le propone la lotería :

$$(x1^{\circ},x2^{\circ},x3^{\circ},\ldots,xj^{*},\ldots,xn^{\circ}) \begin{array}{l} \xrightarrow{p} (x1^{\circ},x2\ ,\ldots,xi^{*},\ldots,xj^{*},\ldots,xn^{\circ}) \\ \xrightarrow{1-p} (x1^{\circ},x2^{\circ},\ldots,xi^{\circ},\ldots,xj^{\circ},\ldots,xn^{\circ}) \end{array}$$

Obteniendo el valor de p tenemos la ecuación:

$$u(x1^{\circ},x2^{\circ},\ldots,xi^{\circ},\ldots,xj^{*},\ldots,xn^{\circ})=p\ u(x1^{\circ},x2^{\circ},\ldots,xi^{*},\ldots,xj^{*},\ldots,xn^{\circ})$$
$$+(1-p)u(x1^{\circ},x2^{\circ},\ldots,xi^{\circ},\ldots,xj^{\circ},\ldots,xn^{\circ})$$

que sustituida en la ecuación correspondiente nos da la ecuación n.

Determinación de las Funciones de Utilidad Condicionales:

Estas funciones se obtienen mediante el método explicado en el capítulo IV, para calcular funciones de utilidad con un solo atributo.

Una vez calculada la función de cada atributo y el valor de las constantes ki, ya se tiene definida la función de utilidad para atributos múltiples.

V.9 Procedimiento para Evaluar un Problema con Objetivos Múltiples.

El procedimiento general para evaluar este tipo de problemas es el siguiente:

1. Identificación de las características básicas del problema y la terminología a usar.
2. Establecer si existe independencia de utilidades entre los atributos.
3. Evaluar las funciones de utilidad para cada atributo.
4. Obtener los factores ki.
5. Verificar la consistencia de la función de utilidad.
6. Determinar las utilidades correspondientes a cada resultado en el árbol de decisiones.
7. Calcular las utilidades esperadas.
8. La alternativa con la mayor utilidad esperada será la recomendada.

V.10 Aplicaciones a la Ingeniería Civil.

Evaluación de Proyectos Hidroeléctricos:

La CFE tiene tres proyectos hidroeléctricos por construir, y desea establecer el orden de construcción, comenzando por aquel que le de la mayor utilidad esperada.

Los objetivos perseguidos son: generar la mayor cantidad de energía eléctrica, al menor costo y generando la mayor cantidad de empleos posibles.

Procediendo con el criterio dado en V.9 :

1. Los atributos asociados a los objetivos son:

Gi : la generación media anual del proyecto i en GWh.

Ci : el costo del proyecto i en miles de millones de pesos.

Ei : el número de empleos generados en miles.

Y se sabe que se pueden presentar diferentes estados naturales con los siguientes resultados:

Proyecto 1:

G1	P(.)	C1	P(.)	E1	P(.)
4500	0.2	105	0.1	22	0.2
3200	0.6	96	0.7	19	0.5
2120	0.2	94	0.2	18	0.3

Proyecto 2:

G2	P(.)	C2	P(.)	E2	P(.)
1350	0.5	58	0.6	20	0.4
890	0.3	52	0.3	18	0.3
600	0.2	40	0.1	17	0.3

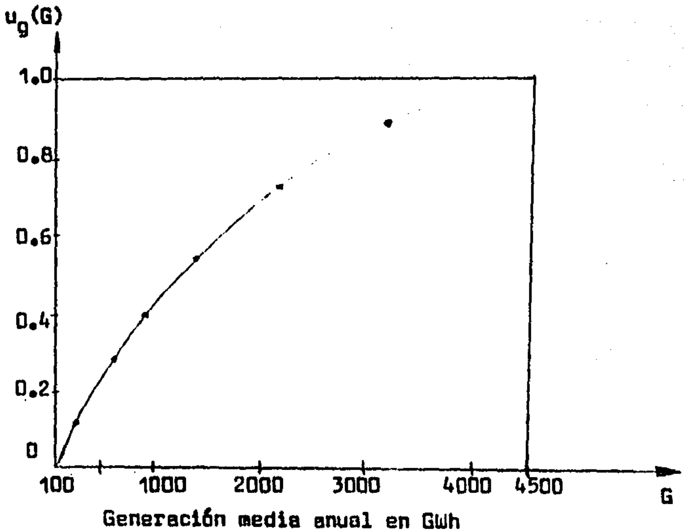
Proyecto 3:

G3	P(.)	C3	P(.)	E3	P(.)
220	0.9	15	0.8	6	0.7
100	0.1	10	0.2	4	0.3

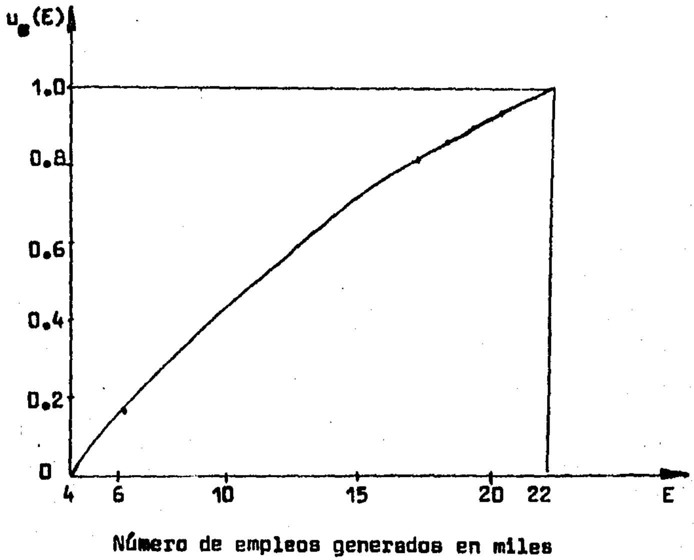
2. Se hacen diferentes preguntas al decisor y se establece que sí existe independencia de utilidades. Y además existe marginalidad por pares, es decir, el decisor muestra una estructura de preferencias que se ajusta a una función del tipo aditivo:

$$u(Xi) = k1\, u_g(Gi) + k2\, u_c(Ci) \; 1 \; k3\, u_e(Ei)$$

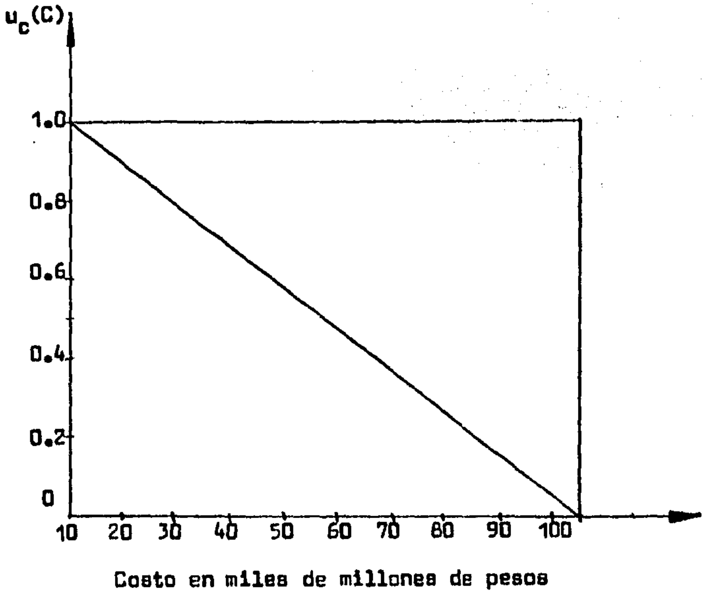
3. Se evalúan las funciones de utilidad condicionales para cada atributo con el mismo método explicado en el capítulo IV y se obtienen las siguientes funciones:



$u_g(G)$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
100
1000
2000
3000
4000
4500
G
Generación media anual en GWh



$u_e(E)$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
4
6
10
15
20
22
E
Número de empleos generados en miles



4. Obtención de los factores ki:

Los atributos son: Gi,Ci,Ei   i=1,2,3

Sea G^* el mejor valor de Gi y G° el peor,
C^* el mejor valor de Ci y C° el peor,
E^* el mejor valor de Ei y E° el peor.

Entonces:

$$u_g(G^*) = 1 \qquad u_g(G^\circ) = 0$$
$$u_c(C^*) = 1 \qquad u_c(C^\circ) = 0$$
$$u_e(E^*) = 1 \qquad u_e(E^\circ) = 0$$

Se plantean los siguientes resultados X1 y X2:

$$X1 = (G^{*},C^{o},E^{o}) = (4500,105,4)$$
$$X2 = (G^{o},C^{a},E^{o}) = (\ 100,C^{a},\ 4)$$

Si se hace variar C^{a} hasta que X1 y X2 sean equivalentes, el decisor responde que $C^{a} = 20$. De la gráfica sabemos que $u_c(20) = 0.89$ y sustituyendo en la función de utilidad aditiva:

$$u(X1) = u(X2)$$
$$k1(1) = k2(0.89) \qquad k1 = 0.89k2 \qquad (\ 1\ )$$

Planteando:

$$X3 = (G^{*},C^{o},E^{o}) = (4500,105,4)$$
$$X4 = (G^{o},C^{o},E^{a}) = (\ 100,105,E^{a})$$

que para ser equivalentes, el decisor pide un valor $E^{a}=20$ y de la gráfica sabemos que $u_e(20) = 0.92$, que sustituido en la función de utilidad aditiva:

$$k1 = k3\ u_c(20)$$
$$k1 = 0.92\ k3 \qquad (\ 2\ )$$

y además sabemos que $k1 + k2 + k3 = 1$ $\qquad (\ 3\ )$

con lo que se tienen tres ecuaciones con tres incógnitas, y resolviendo :

$$k1 = 0.311$$
$$k2 = 0.350$$
$$k3 = 0.339$$

5. Dado que $k2 > k3 > k1$ se concluye que $C \succ E \succ G$
Se pregunta al decisor si esto coincide con lo que él esperaba y se revisan diferentes valores de la función para ver si es consistente con la forma de pensar del decisor. Si la Función es consistente, su ecuación será:

$$u(Xi) = k1\ u_g(Gi) + k2\ u_c(Ci) + k3\ u_e(Ei)$$

es decir:

$$u(Xi) = 0.311\ u_g(Gi)+0.350\ u_c(Ci)+0.339\ u_e(Ei)$$

6. El árbol de decisiones con sus respectivas utilidades se presenta en la figura V.1

7. Cálculo de las Utilidades Esperadas:

Proyecto 1:

$$u_g(G1) = 0.2(1.00)+0.6(0.88)+0.2(0.73)=0.874$$

$$u_c(C1) = 0.1(0.00)+0.7(0.10)+0.2(0.12)=0.094$$

$$u_e(E1) = 0.2(1.00)+0.5(0.89)+0.3(0.85)=0.900$$

$$u(X1) = 0.311(0.874)+0.350(0.094)+0.339(0.900)=\underline{0.6098}$$

Proyecto 2:

$$u_g(G2) = 0.5(0.55)+0.3(0.4)+0.2(0.28) =0.451$$

$$u_c(C2) = 0.6(0.49)+0.3(0.56)+0.1(0.68)=0.530$$

$$u_e(E2) = 0.4(0.93)+0.3(0.85)+0.3(0.80)=0.867$$

$$u(X2) = \underline{0.6196}$$

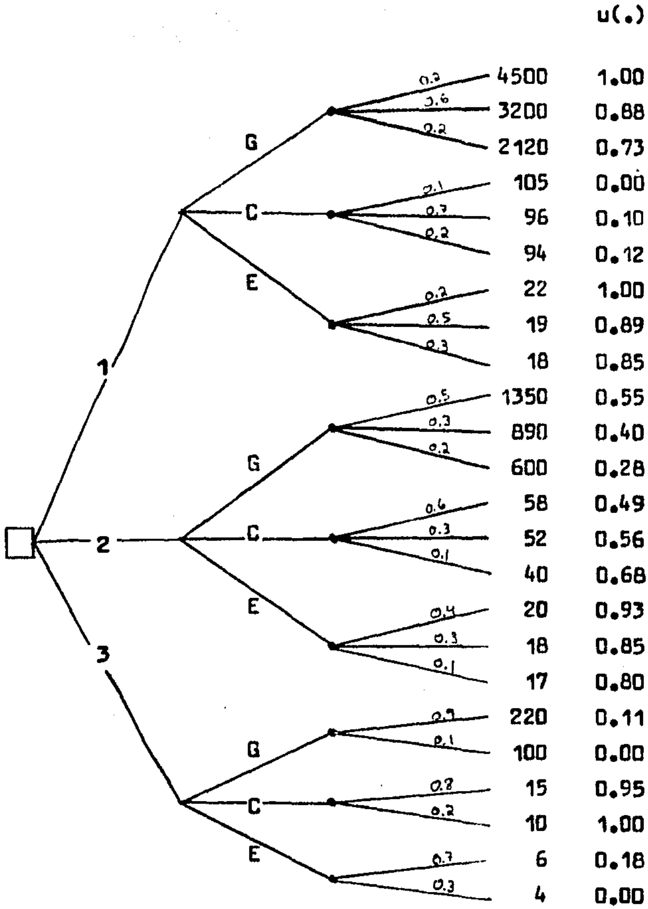


Figura V.1 Arbol de decisiones.

Proyecto 3:

$$u_g(G3) = 0.9(0.11)+0.1(0.00)=0.099$$

$$u_c(C3) = 0.8(0.95)+0.2(1.00)=0.960$$

$$u_e(E3) = 0.7(0.18)+0.3(0.00)=0.126$$

$$u(X3) = \underline{0.4095}$$

8. Dado que la mayor utilidad esperada corresponde al proyecto 2, este es el más recomendable.

Evaluación de Proyectos para un Camino de Mano de Obra.

El gobierno federal tiene varios proyectos para construir caminos en zonas rurales basándose en el uso intensivo de la mano de obra local. Dado que el presupuesto es limitado, sólo será posible realizar aquel que brinde la mayor utilidad esperada.

Los objetivos perseguidos son: mejorar la integración de poblaciones alejadas al comercio de la región , generar empleos y hacerlo al menor costo posible.

Utilizando el procedimiento descrito en V.9:

1. Los atributos asociados a los objetivos son:

Ii : incremento del comercio en la zona en %

Ei : número de empleos generados

Ci : costo en millones de pesos

Se sabe que los posibles resultados con sus respectivas probabilidades son:

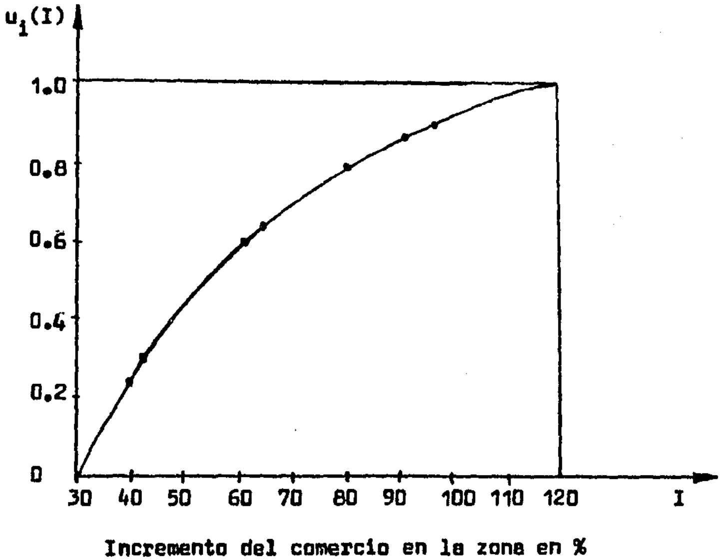
Alternativa :

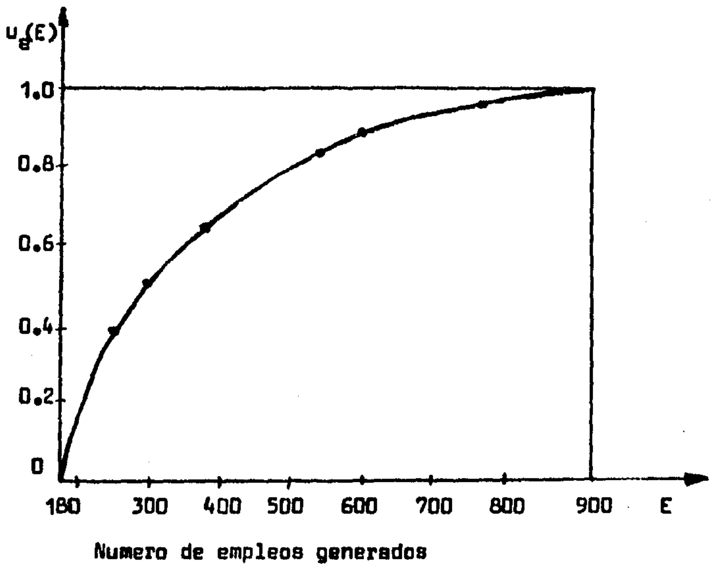
	Ii	P(.)	Ei	P(.)	Ci	P(.)
	120%	0.8	900	0.7	360	0.9
	90%	0.2	800	0.3	310	0.1
Alternativa 2:						
	95%	0.2	600	0.1	200	0.1
	80%	0.3	550	0.3	180	0.1
	64%	0.4	380	0.5	145	0.6
	40%	0.1	300	0.1	120	0.2
Alternativa 3:						
	42%	0.9	250	0.8	150	0.7
	30%	0.1	180	0.2	120	0.3

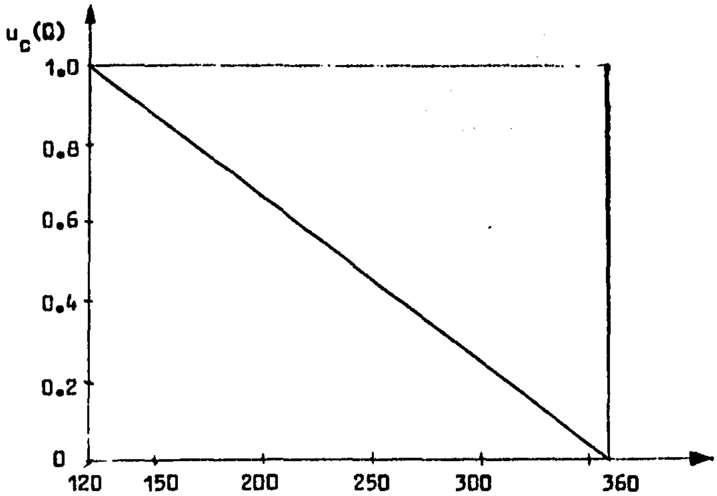
2. Al formular las diferentes loterías al decisor, se establece que existe dependencia mutua de utilidades entre - los atributos. Y al revisar si existe marginalidad por pares, es decir, si existe aditividad se concluye que no es posible usar la forma aditiva, por lo que se usará una función de utilidad multiplicativa.

$$1+k\ u(X)=(1+k\ k1\ u1(X1))(1+k\ k2\ u2(X2))(1+k\ k3\ u3(X3))$$

3. Se evalúan las funciones de utilidad condicionales para cada atributo, usando el método explicado en el cap.IV y se obtienen las siguientes funciones:


u_i(I)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
I
Incremento del comercio en la zona en %


u_e(E)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
180
300
400
500
600
700
800
900
E
Numero de empleos generados



Costo en millones de pesos.

4. Obtención de los factores ki.

Los atributos son: Ii,Ei,Ci   i = 1,2,3

Sea I^* el mejor valor de Ii y I° el peor,
E^* el mejor valor de Ei y E° el peor,
C^* el mejor valor de Ci y C° el peor.

entonces

$$ui(I^*) = 1 \qquad ui(I^\circ) = 0$$
$$ue(E^*) = 1 \qquad uE(E^\circ) = 0$$
$$uc(C^*) = 1 \qquad uc(C^\circ) = 0$$

Planteando los siguientes resultados X1 y X2 :

$$X1 = (I^*,\ E^\circ, C^\circ) = (120\%, 180, 120)$$
$$X2 = (I^\circ,\ E^a, C^\circ) = (\ 30\%,\ E^a, 120)$$

Si se hace variar E^a hasta que X1 y X2 sean equivalentes, el decisor responde que E^a=600; y de la gráfica obtenemos $u_e(600)$=0.87 que sustituido en la función de utilidad multiplicativa nos da:

$$u(X1) = u(X2)$$

$$(1 + k\ k1) = (1 + k\ k2\ u_e(600))$$

$$k1 = 0.87\ k2 \qquad (a)$$

Planteando:

$$X3 = (I^*, E^\circ, C^\circ) = (120\%, 180, 120)$$
$$X4 = (I^\circ, E^\circ, C^a) = (30\%, 180, C^a)$$

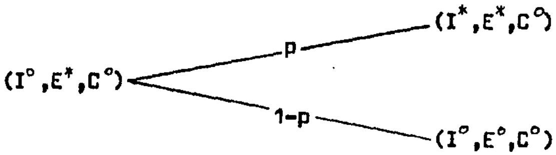
El decisor dice que X3 yX4 son equivalentes si C^a = 140 ; y de la gráfica de costos tenemos que $u_c(140)$=0.92 , que sustituido en la función de utilidad multiplicativa nos da:

$$u(X3) = u(X4)$$

$$(1 + k\ k1) = (1 + k\ k3\ u_c(140))$$

$$k1 = 0.92\ k3 \qquad (b)$$

Se plantea al decisor la siguiente lotería:



y si dice que para ser equivalentes p debe ser 0.9, entonces:

$$u(I^\circ, E^*, C^\circ) = p\ u(I^*, E^*, C^\circ) + (1-p)\ u(I^\circ, E^\circ, C^\circ)$$
$$u(I^\circ, E^*, C^\circ) = 0.9\ u(I^*, E^*, C^\circ)$$

que sustituido en la función multiplicativa:

$$1 + k\,k2 = 0.9\,(1 + k\,k1)(1 + k\,k2)$$

$$k = 0.1111 / k1 \qquad (c)$$

Además sabemos que:

$$k + 1 = \prod_{i=1}^{n} (k\,ki + 1)$$

$$k + 1 = (k\,k1 + 1)(k\,k2 + 1)(k\,k3 + 1) \qquad (d)$$

y sustituyendo los valores de (a),(b) y (c) en (d) y resolviendo el sistema:

$k1 = 0.2748$

$k2 = 0.3159$

$k3 = 0.2987$

$k = 0.4043$

5. Con los valores de ki calculados se pregunta al decisor con el fin de verificar si la función de utilidad representa su estructura de preferencias. Si la prueba es satisfactoria se continua el análisis, si no, se deben verificar las respuestas dadas por el decisor en busca de inconsistencias.

6. El árbol de decisiones se muestra en la figura V.2, donde se incluyen los valores de utilidad correspondinetes.

7. Cálculo de las utilidades esperadas:

   Alternativa 1:

   $u_1(I1) = 0.8(1)+0.2(0.86) = 0.972$

   $u_e(E1) = 0.7(1)+0.3(0.97) = 0.991$

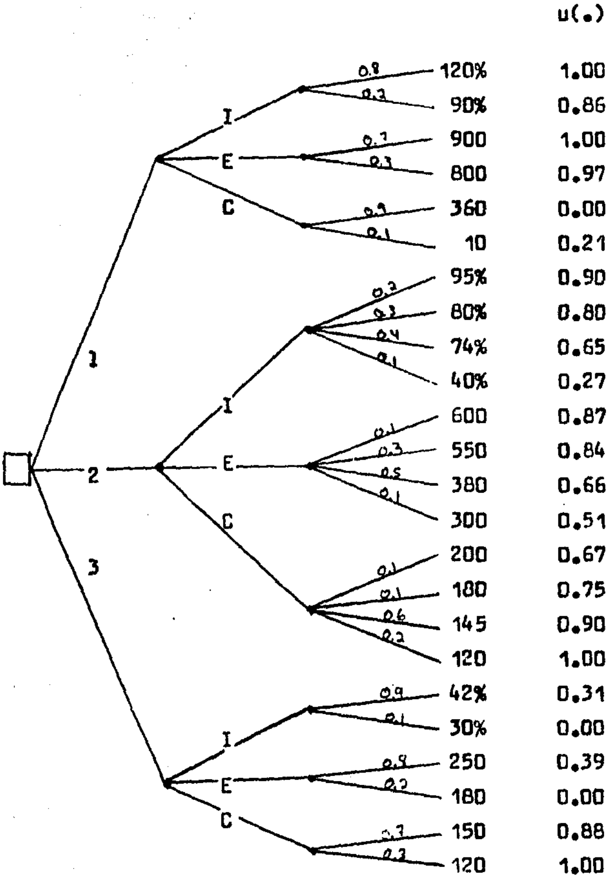


Figura V.2 Arbol de decisiones del problema

$u_c(C3) = 0.9(0)+0.1(0.21)=0.021$

$u(X1) = \underline{0.5864}$

Alternativa 2:

$u_i(I2) = 0.2(0.90)+0.3(0.80)+0.4(0.65)+0.1(0.27)=0.707$

$u_e(E2) = 0.1(0.87)+0.3(0.84)+0.5(0.66)+0.1(0.51)=0.720$

$u_c(C2) = 0.1(0.67)+0.1(0.75)+0.6(0.90)+0.2(1.00)=0.882$

$u(X2) = \underline{0.6852}$

Alternativa 3:

$u_i(I3) = 0.9(0.31)+0.1(0.00)= 0.279$

$u_e(E3) = 0.8(0.39)+0.2(0.00)= 0.312$

$u_c(C3) = 0.7(0.88)+0.3(1.00)= 0.916$

$u(X3) = \underline{0.4488}$

8. Dado que el mayor valor esperado corresponde a la alternativa número dos, ésta es la recomendada.

ANEXO I. ELEMENTOS DE PROBABILIDAD.

PROBABILIDAD

Es de fundamental importancia el conocimiento de la teoría de las probabilidades para analizar los problemas de decisiones en condiciones de riesgo. Por eso a continuación se analizan los conceptos necesarios para su entendimiento.

El concepto de Probabilidad:

La probabilidad es una medida del grado de confianza que tenemos de la ocurrencia de un evento. Hay varias interpretaciones del concepto de Probabilidad, estas son:

Interpretación Clásica.-

Si en un experimento aleatorio tenemos un número finito de resultados posibles, y cada resultado tiene la misma posibilidad de ocurrir; entonces, si Na sucesos de ese conjunto de resultados nos dan el evento A (llamado resultados favorables), la probabilidad de ocurrencia de A es :

$$P(A)=\frac{Na}{N}$$

Donde: Na: Número de resultados favorables al evento A.
N : Número total de resultados posibles.

Es útil para calcular probabilidades de experimentos con un número finito de resultados, tales como los juegos de azar.

Interpretación Frecuentista.-

Si un experimento se repite muchas veces, y nos interesa conocer la probabilidad de ocurrencia de un evento A, debemos analizar la frecuencia relativa con que se presenta:

$$f^{*} = \frac{x}{n}$$

Donde : f^{*} : frecuencia relativa del evento A.

x : número de veces que se presenta A.

n : número total de experimentos.

Cuando el número de experimentos tiende a infinito, tenemos que la probabilidad del evento A es :

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{n}$$

es decir:

$$\frac{x}{n} \longrightarrow P(A) \qquad \text{cuando} \qquad n \longrightarrow \infty$$

Es muy útil para experimentos que se repiten en el tiempo, tales como la determinación de la precipitación pluvial, cálculo de posibles avenidas máximas, demandas esperadas de un producto, etc.

Interpretación Subjetivista.-

La probabilidad de un evento es una medida del grado de incertidumbre que tiene una persona o grupo de personas respecto a la ocurrencia de ese evento.

Esta interpretación del concepto de probabilidad es útil en problemas completamente nuevos o difíciles de analizar, donde es muy importante la experiencia y el criterio del decisor.

Su principal inconveniente es que la probabilidad asignada cambie de una persona a otra.

AXIOMAS DE PROBABILIDAD.

Para un espacio de eventos S, la probabilidad de cada evento $A \subset S$ se representa P (A), y debe satisfacer los siguientes axiomas:

Sea S el evento formado por todo el espacio muestral.

A y B eventos cualquiera tales que A y B $\subset$ S.

$\emptyset$ evento imposible.

Axioma 1: $P(A) \geqslant 0$

Axioma 2: $P(S) = 1$

Axioma 3: Si $A \cap B = \emptyset$ entonces decimos que A y B son eventos mutuamente excluyentes y se cumple que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \iff A \cap B = \emptyset$

Teoremas importantes.-

Algunos de los principales teoremas derivados de los axiomas de probabilidad son:

Teorema 1 :

Sea A un evento cualqiera de S y A' el complemento de A entonces :

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Teorema 2 :

Sea $\emptyset$ el evento imposible, entonces:

$$P(\emptyset) = 0$$

Teorema 3 :

Si A y B son dos eventos de S y $A \subset B$

$$P(A) \leq P(B)$$

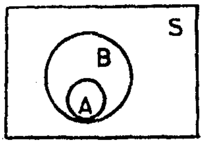


fig. 1

Teorema 4 :

Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ es un conjunto de eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos (fig. 2), entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 \text{ con } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para } i \neq j$$

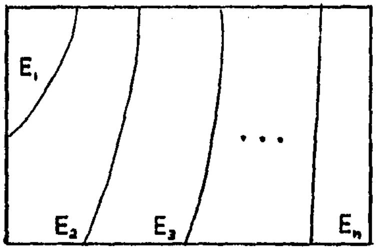


fig. 2

Teorema 5.-

Para dos eventos cualesquiera A y B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Este teorema se puede entender observando la fig. 3

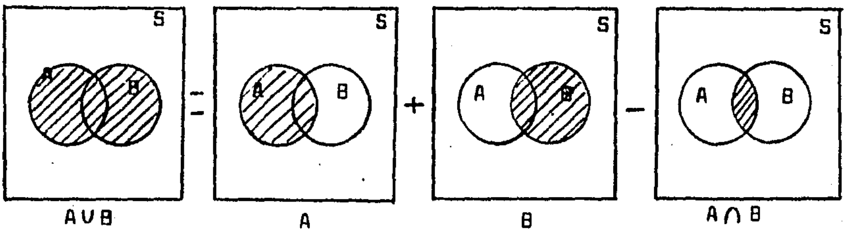


fig. 3

PROBABILIDAD CONDICIONAL.

La probabilidad de que ocurra un evento A dado que se sabe que ocurrió otro evento B, se expresa P(A/B). Se define así:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observese la fig. 4. Como ya ocurrió B, el espacio de eventos S se reduce a B, con lo que la probabilidad se calcula con la fórmula antes mencionada.

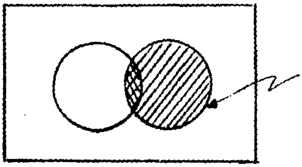


fig. 4

Ejemplo:

Tenemos los resultados de un estudio de la calidad de la soldadura de una estructura; el estudio ha demostrado que de los puntos donde se aplicó :

el 20 % se ve mal soldado y lo está.
el 5 % se ve mal soldado pero no lo está.
el 15 % se ve bien soldado pero no lo está.
el 60 % se ve bien soldado y lo está.

Calcular la probabilidad de que un punto dado :

a) Este mal soldado si parece estarlo.
b) Este mal si parece bien soldado.
c) Se vea mal soldado si está bien soldado.
d) Se vea mal soldado si está mal soldado.

Solución:

Sea V: El evento el punto se ve mal soldado.
E: El evento el punto está mal soldado.

Del enunciado del problema se sabe que:

$P(V \cap E) = 0.20$

$P(V \cap E') = 0.05$

$P(V' \cap E) = 0.15$

$P(V' \cap E') = 0.60$

a) Está mal si parece estarlo: $P(E/V) = ?$

$$P(E/V) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)}$$

$P(V) = P(V \cap E) + P(V \cap E') = 0.20 + 0.05 = 0.25$

$P(E \cap V) = 0.20$

$P(E/V) = 0.20/0.25 = \underline{0.80}$

b) Está mal si parece bien soldado:

$$P(E/V') = \frac{P(E \cap V')}{P(V')}$$

$P(V') = P(V' \cap E) + P(V' \cap E') = 0.15 + 0.60 = 0.75$

$P(E \cap V') = 0.15$

$$P(E/V') = \frac{0.15}{0.75} = \underline{0.20}$$

c) Se ve mal soldado si está bien soldado:

$$P(V/E') = \frac{P(V \cap E')}{P(E')}$$

$P(E') = P(V \cap E') + P(V' \cap E') = 0.05 + 0.60 = 0.65$

$P(V \cap E') = 0.05$

$$P(V/E') = \frac{0.05}{0.65} = \underline{0.0769}$$

d) Se vea mal soldado si está mal suldado:

$$P(V/E) = \frac{P(V \cap E)}{P(E)}$$

$P(E) = P(V \cap E) + P(V' \cap E) = 0.20 + 0.15 = 0.35$

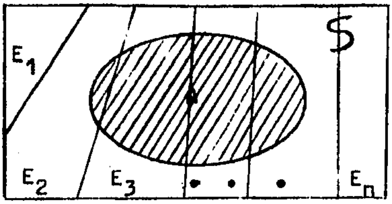
$P(V \cap E) = 0.20$

$$P(V/E) = \frac{0.20}{0.35} = \underline{0.5714}$$

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL.

Sea un conjunto de eventos $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ mutuamente exclusivos y colectivamente exhaustivos (fig. 5).

fig. 5



Entonces para cualquier evento $A \subset S$:

$$A = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \ldots \cup (A \cap E_n)$$

y su probabilidad es:

$$P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \ldots + P(A \cap E_n)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap E_i) \qquad (1)$$

como $P(A/E_i) = \dfrac{P(A \cap E_i)}{P(E_i)}$

entonces

$$P(A \cap E_i) = P(A/E_i)\, P(E_i) \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/E_i)\, P(E_i) \qquad (3)$$

Este es el teorema de la probabilidad total.

Ejemplo:

Se desea construir una presa en uno de tres lugares. La experiencia demuestra que en el primer lugar hay 40 % de probabilidades de que se llene; en el segundo, 50 % y el 70 % en el tercer lugar.

Si se escoje aleatoriamente un lugar, cuál es la probabilidad de que:

a) Se seleccione el lugar 1 y se llene la presa.

b) Se llene la presa.

Solución:

Primero hay que elegir un lugar de los tres, L_1, L_2 o L_3. Y sabemos que la probabilidad de elegir alguno de ellos es:

$$P(L_1) = P(L_2) = P(L_3) = 1/3$$

Una vez escogido el lugar, se tienen los eventos:

S : Si se llena la presa.

S' : No se llena la presa.

y del enunciado se sabe:

$$P(S/L_1) = 0.40 \quad P(S/L_2) = 0.50 \quad P(S/L_3) = 0.70$$

a) Se selecciona el lugar 1 y se llena la presa.

$$P(S/L_1) = \frac{P(S \cap L_1)}{P(L_1)}$$

$$P(L_1 \cap S) = P(S/L_1)\, P(L_1)$$

$$= 0.40\ (1/3) = \underline{0.1333}$$

b) Se llena la presa:

Utilizando la expresión (3):

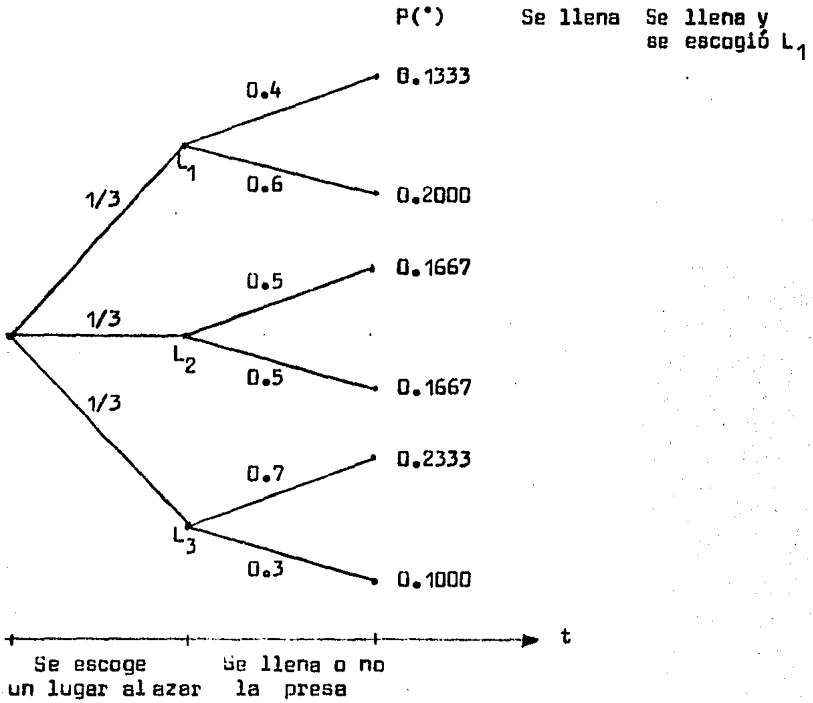
$$P(S) = \sum_{i=1}^{3} P(S \cap L_i) = \sum_{i=1}^{3} P(S/L_i)\, P(L_i)$$

$$P(S) = P(S/L_1)\, P(L_1) + P(S/L_2)\, P(L_2) + P(S/L_3)\, P(L_3)$$

$$P(S) = (0.40)\,(1/3) + (0.50)\,(1/3) + (0.70)\,(1/3)$$

$$= \underline{0.5333}$$

Esto se puede observar en el siguiente diagrama de árbol.



TEOREMA DE BAYES.

Este teorema es la base de la teoría bayesiana de la estimación, que sirve para modificar las probabilidades a partir de nueva información.

Sean $E_1, E_2, E_3, \ldots E_n$ eventos mutuamente exclusivos y colectivamente exhaustivos, y sea A otro evento contenido en S. (fig. 5). Entonces, de la expresión de probabilidad condicional se tiene:

$$P(E_k/A) = \frac{P(E_k \cap A)}{P(A)} \qquad \text{(i)}$$

y

$$P(A/E_k) = \frac{P(A \cap E_k)}{P(E_k)}$$

entonces

$$P(E_k \cap A) = P(A/E_k)\, P(E_k) \qquad \text{(ii)}$$

del teorema de probabilidad total:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/E_k)\, P(E_k) \qquad \text{(iii)}$$

Sustituyendo (ii) y (iii) en (i):

$$P(E_k / A) = \frac{P(A/E_k)\, P(E_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A/E_k) P(E_k)}$$

Esta es la expresión del teorema de Bayes.

Ejemplo:

Si en el ejemplo de los tres lugares para la construcción de la presa tenemos información adicional que nos dice que la presa sí se lleno, calcular la probabilidad de que se haya construido en:

a) El lugar 2.

b) El lugar 3.

Solución:

a) $P(L_2/S) = ?$

Utilizando el teorema de Bayes y los datos del ejemplo anterior:

$$P(L_2/S) = \frac{P(S/L_2)\ P(L_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(S/L_i)P(L_i)} = \frac{0.50 \quad (1/3)}{0.40(1/3)+0.50(1/3)+0.70(1/3)}$$

$$= \underline{0.3125}$$

b) $P(L_3/S) = ?$

$$P(L_3/S) = \frac{P(S/L_3)\ P(L_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(S/L_i)P(L_i)} = \frac{0.7\ (1/3)}{0.5333} = \underline{0.4375}$$

ANEXO II. COMENTARIOS SOBRE LA BIBLIOGRAFIA

COMENTARIOS SOBRE LA BIBLIOGRAFIA

ACOSTA FLORES, JOSE JESUS.
Teoría de decisiones en el sector público y en la empresa privada, Rep. y Serv. de ingeniería, México 1975. Es una introducción rápida a la teoría de decisiones, hace hincapié en la exposición de casos practicos. Es útil como lectura complementaria.

ACOSTA FLORES, JOSE JESUS (COORDINADOR) y otros.
El enfoque de sistemas en el sector transporte, curso de la Div. de Educación Continua de la F. de Ing. de la UNAM, México 1985. Son los apuntes de un ciclo de conferencias donde se exponen los criterios utilizados en el sector. Se recomienda la lectura de los capitulos de deciciones con incertidumbre y para objetivos múltiples.

BENJAMIN, JACK R., CORNELL C. ALLIN
Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers, Mc Graw-Hill, 1970. Este libro es una referencia básica para cursos de probabilidad y estadística; además en su quinto capítulo se exponen los elementos de la teoría de decisiones de una forma clara y concisa.

BORRAS GARCIA, HUGO E., RAFAEL IRIARTE BALDERRAMA y BERNARDO FONTANA DE LA CRUZ.
Apuntes de Probabilidad y Estadística, apuntes editados -

por la Facultad de Ingeniería UNAM, México D.F. 1985. Es una buena referencia para revisar los conceptos basicos de probabilidad requeridos para el análisis de riesgo.

CANADA, JOHN R.
Intermediate Economic Analysis for Management and Engineering, Prentice-Hall, N.Y., 1971. Recomendado para todos los temas - de ingeniería económica y para análisis de decisiones en condiciones de incertidumbre y riesgo. Toca ligeramente la teoría de utilidades.

GOICOECHEA, AMBROSE, DON R. HANSEN & LUCIEN DUCKSTEIN.
Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications, John Wiley & Sons, 1982. En este libro se analizan una gran variedad de métodos de análisis para - problemas con objetivos múltiples. Hace énfasis en las aplicaciones a problemas reales.

GRANT, EUGENE L., W. GRANT IRESON, RICHARD S. LEAVENWORTH.
Principles of Engineering Economy, The Ronald Press Co., 6 th. Ed., 1976. Este es un libro que se publico por vez primera en 1930, sin embargo, los conceptos son los mismos y son explicados en forma clara. Tiene ejemplos ilustrativos.

KEENEY, RALPH L., HOWARD RAIFFA.
Decisions with Multiple Objectives, John Wiley & Sons, 1976. Es la referencia básica para evaluación de problemas con - objetivos múltiples. Describe en forma clara los métodos - conservando la formalidad matemática.

KEENY, RALPH L.
Concepts of Independence in Multiatbribute Utility Theory, Multiple Criteria Decision Making (seminar), Ed. James L. Cochrane, University of South Carolina Press, 1973. En esta lectura se explica claramente el concepto de independencia entre atributos, y se establecen las funciones de utilidad aditiva y multiplicativa.

LUCE, DUNCAN R., HOWARD RAIFFA.
Games and Decisions, John Wiley & Sons, 1957. Tiene un capítulo dedicado a la teoría de utilidades, donde se realiza un tratamiento axiomatico de ésta. Además habla sobre el caso de decisiones en condiciones de incertidumbre.

MENDOZA SANCHES, ALEJANDRO. (COORDINADOR)
Evaluación económica y social de proyectos, curso de la Div. de Educación continua de la F. de Ing. UNAM, México D.F., 1985. Es un conjunto de conferencias relacionadas con la evaluación de proyectos, se recomienda la lectura de las secciones sobre evaluación económica y con objetivos múltiples.

RAIFFA, HOWARD.
Decision Analysis: Introductory Lectures on choices under uncertainty, Ed. Addison-Wesley, Reading Mass., 1968. Es una de las mejores obras sobre análisis de decisiones. Trata los temas de una forma muy clara y con lenguaje cotidiano, en base a un ejemplo que se va completando a lo largo del libro explica todo el proceso de estudio de un problema en condiciones de riesgo e incertidumbre.

RHEAULT, JEAN PAUL.
Introducción a la teoría de las decisiones, Limusa México D.F., 1986. En este libro se expone en lenguaje sencillo y con ejemplos simples la teoría de decisiones. Se usan muy pocas herramientas matemáticas, ya que tiene un enfoque mas bien conceptual e introductorio. Toca las decisiones en condiciones de incertidumbre y riesgo, y da los fundamentos de la tería de utilidades.

SCHLAIFER, ROBERT.
Analysis of decisions under uncertainty, Mc Graw-Hill, 1969. Se centra en el establecimiento lógico de formas de analizar la toma de decisiones desde un punto de vista práctico. Se busca el uso del sentido común mas que la fundamentación matemática de los conceptos.

TARQUIN, ANTHONY J.
Ingeniería Económica, Mc Graw-Hill, 1960. Es un libro fácil de leer, que explica claramente los conceptos de la ingeniería económica. Se recomienda para los primeros temas.

TAYLOR, GEORGE A.
Managerial and Engineering Economy, D. Van Nostrand Co. N.York, 1980. Trata los aspectos principales de la ingeniería económica, sobre todo el papel del decisor en los problemas de las empresas.

TERRAZAS Y ALLENDE, JORGE.
Análisis económico de decisiones en el campo de la inge - ría, Apuntes del curso del mismo nombre, Div. de Educación Continua F. I. UNAM, México, 1985. Describe los conceptos de la ingeniería economica y tiene muchos ejemplos de apli caciones a la ingeniería.

THUESEN, H.G., FABRYCKY , G. J. THUESEN.
Engineering Economy, 5th ed. Prentice-Hall, 1977. Es un - buen libro, establece claramente el papel de las decisio- nes económicas en el contexto de la ingeniería y toca - todos los temas de la ingeniería económica.

WHITE, DOUGLAS JOHN.
Fundamentals of decision theory, North-Holland publushing Co., 1976. Trata sobre la teoría general de decisiones y demuestra los fundamentos con un tratamiento matemático amplio.

WHITE, JOHN A. , MARVIN H. AGEE, KENNETH E. CASE.
Principles of engineering economic analysis, John Wiley, 1977. Es uno de los libros mas claros y completos sobre la materia, contiene además el análisis de decisiones en condiciones de riesgo e incertidumbre.