2 ej.
41

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA CARACTERIZACION DE LA CATEGORIA DE LOS CONJUNTOS

MARTHA TAKANE IMAY

Otoño, 1986

Contenido.

§0. Introducción y Resumen.

El origen de categorizar la teoría de los conjuntos viene de las notas de Lawvere (An elementary theory of the category of sets, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 52 (1964)) en las cuales la teoría elemental de la categoría de los conjuntos CS es desarrollada. Sin embargo, sólo hasta que Lawvere y Tierney introducen la Teoría de los Topos elementales, en 1970, las principales herramientas para investigar la teoría de los conjuntos con método de la teoría de las categorías estuvieron disponibles.

Un año más tarde, la teoría de los conjuntos fué categoriza-da usando las ideas de Lawvere y Tierney.

En 1971, Osius caracteriza (salvo equivalencias) la categoría de las clases en la teoría de conjunto Von Neumann-Bernays-Gödel, y Cole y Mitchell independientemente mejoran el resultado de Lawvere, antes mencionado, por medio de la caracterización puramente elemental de la categoría de los conjunto. Mitchell, en realidad, caracteriza más generalmente las categorías de los conjuntos proveniente de los modelos Boole-valuados de la teoría de los conjuntos. La construcción, de ambos, del modelo, aparece como una traducción de las ideas de la teoría de los conjuntos al lenguaje de la teoría de los topos, la cuál no era muy "categórica" en un sentido más general.

Por lo tanto, este trabajo, de Gerhard Osius, de la Universidad de Bremen, Alemania, dá un método más simple y general para definir modelos de la teoría de los conjuntos en la teoría de los topos. Sin embargo, por razones de simplicidad, se restringe a modelos "clásicos" de la teoría de los conjuntos, aunque estas ideas pueden ser aplicadas en los casos más generales de modelos Boole-valuados para la teoría de los conjuntos.

Mi trabajo fué rehacer las demostraciones de los resultados propuestos por Osius en este trabajo.

Ahora un breve resumen del método que se expone en este trabajo.

En las dos primeras secciones se introduce la teoría de los conjuntos ZF (Zermelo-Fraenkel) junto con una axiomatización finita del subsistema Z_0 y la teoría de los topos elementales TE de Lawvere-Tierney.

En esta tesis sólo se trabajará con dos subsistemas de ZF (Z_0 y Z).

Las propiedades del topos de los Z_0-conjuntos nos llevan en la sección 4 a una extensión de TE: la Teoría de los Topos Elementales Bien Punteado TEBP.

Tratando de caracterizar la relación de membresía $\in$ en términos categóricos, se nota la importancia de los conjuntos transitivos y los morfismos inclusión, que se estudian en la sección 4. Usando el axioma de regularidad y una caracterización de las relaciones bien fundadas (4.2), podremos caracterizar los conjuntos transitivos y los morfismos inclusión entre ellos con la ayuda del funtor objeto potencia.

Añadiendo dos nuevos axiomas a Z_0 obtendremos la teoría de los conjuntos en Z, cuyo topos de conjuntos vamos a caracterizar.

Para introducir los objetos conjunto transitivo en la teoría de los topos TE (que corresponden a los conjuntos transitivos en el topos de los conjuntos) primero estudiaremos el funtor objeto potencia (y otros dos funtores) en TE, que corresponde al funtor conjunto potencia (sección 5).

En la sección 6, son probadas las propiedades importantes de los objetos conjunto transitivo en TE. En particular, la "inclusión" entre objetos conjunto transitivo es definida y son construidas las uniones e intersecciones con respecto a la inclusión. Finalmente, se podrá definir el modelo de los objetos conjunto en TE (sección 6) como sigue: un objeto conjunto es un subobjeto de un objeto conjunto transitivo, y una extensión de la relación local de membresía origina (vía uniones de objetos conjunto transitivos) una relación global de membresía entre objetos conjunto.

La idea detrás de esta construcción es la siguiente: la estructura que un conjunto M (en la teoría de los Z-conjunto) tiene con respecto a $\in$, puede ser explorada en un conjunto transitivo T que contenga a M, por lo que un conjunto puede ser considerado como una pareja (T, M) (o mejor dicho, como una clase de equivalencia de tales parejas)

En realidad, el modelo de los objetos conjunto en el topos de los Z-conjuntos es, salvo equivalencias, la teoría de los Z-conjunto original (7.20).

La sección 8 contiene la prueba de que el modelo de los objetos conjunto en TEBP satisface los axiomas de la teoría de los conjuntos en Z.

Comparando el topos de los conjuntos en este modelo con el topos TEBP original, notamos que estos topos son (lógicamente) equivalentes sólo si se le añade a TEBP un axioma más que nos dará la teoría de los topos elementales de Z-conjuntos TEC(Z).

El artículo también extiende sus resultados a la teoría de los conjuntos en ZF (no se incluye en esta tesis).

Para mayor referencia ver el artículo de Gerhard Osius, Categorical Set Theory: a characterization of the Category of Sets. ([5]).

Agradecimientos.

Quiero agradecer al director de esta tesis, el M. en C. Alejandro Odgers, por su gran paciencia y ayuda en la realización de este trabajo.

Al codirector de esta tesis, el Dr. Leopoldo Román, por su ayuda básica y desinteresada desde antes de empezar este trabajo y por la gran amistad que nos une.

Al Dr. Francisco Tomás, por su valiosa ayuda y consejos en Fundamentos de las Matemáticas.

Al M. en C. Gustavo Arenas, por su desinteresada ayuda, no sólo al asistir a mi seminario de tesis, sino también por el seminario de lógica hecho para mí.

A mis queridas maestras: M. en C. Ana Irene Ramírez y maestra Ma. de los Angeles Maldonado, por su infinita comprensión, apoyo y cariño que me han brindado desde el inicio de mi carrera.

Y a mis amigos, que han hecho que mi vida sea realmente grata.

§1. Axiomatización de la Teoría de los Conjuntos.

En este trabajo se tratarán dos subsistemas de la Teoría de los Conjuntos en ZF (Zermelo-Fraenkel). Consideraremos una clase de "conjuntos" - nuestro universo de discurso - junto con dos relaciones binarias "=" (relación de igualdad) y "$\in$" (la relación de membresía) que satisfacen ciertos axiomas.

Se presentarán los axiomas de la Teoría de conjuntos Z_0 informalmente, utilizando algunas nociones, bien conocidas, de teoría de conjuntos.

1.1. Axioma de Igualdad.

Para conjuntos M, N se tiene:

$M = N$ sii $\forall K(K\in M \Leftrightarrow K\in N) \wedge (M\in K \Leftrightarrow N\in K))$.

1.2 Axioma de Extensionalidad.

Para conjuntos M, N.

$M \subset N \wedge N \subset M \Rightarrow M = N$

1.3. Axiomas de Existencia de Conjuntos.

1) El conjunto vacío ϕ existe.

2) Para conjuntos x, y el conjunto pareja $\{x, y\}$ existe.

3) Para cualquier conjunto M el conjunto potencia, $\wp M$, existe.

4) Para cualquier conjunto M el conjunto unión, $\bigcup M$, existe.

5) Esquema de Axiomas de Separación Restringida:

Si $F(x)$ es una fórmula con cuantificadores restringidos - i.e. los cuantificadores sólo ocurren en la forma $\forall y(y\in z \Rightarrow \ldots)$, $\exists y(y \in z \wedge \ldots)$ entonces el siguiente es un axioma:

Para cualquier conjunto M, el conjunto $\{x\in M / F(x)\}$ existe.

1.4. Axioma de Regularidad.

La relación de membresía es bien fundada (i.e. cualquier conjunto no vacío M tiene un elemento $x\in M$ tal que $x \cap M = \phi$).

Thiele [8] ha demostrado que Z_0 es finitamente axiomatizable. En realidad, el esquema de axiomas de separación restringida junto con el axioma del conjunto unión pueden ser reemplazados, equivalentemente, por los siguientes 5 axiomas de existencia de conjunto:

1.5. Para conjuntos M y N el complemento relativo $M \setminus N$ existe

1.6. Para conjuntos M y N el producto cartesiano existe.

1.7. Para cualquier conjunto M la restricción de la relación de membresía

$$\in\upharpoonright M = \{\langle x,y\rangle \,/\, x \in y \in M\}$$ existe.

1.8. Para cualquier conjunto M el dominio

$$D(M) = \{x \,/\, \exists y, \langle x,y\rangle \in M\}$$ existe.

1.9. Para cualquier conjunto M los siguientes "conjuntos de permutaciones" de M existen:

1) $\{\langle x,y\rangle \,/\, \langle y,x\rangle \in M\}$;

2) $\{\langle\langle x,y\rangle,z\rangle \,/\, \langle\langle y,z\rangle,x\rangle \in M\}$.

Para obtener la teoría de los conjuntos en ZF (Zermelo-Fraenkel) sólo se necesita añadir a Z_0 los siguientes dos axiomas:

1.10 Axioma de Infinito. (Inf.)

Existe un conjunto M tal que

o) $\phi \in M$ y

i) $\forall x\,(x \in M \Rightarrow x \cup \{x\} \in M)$.

1.11 Esquema de Axiomas de Reemplazamiento (Rep.)

Si $F(x,y)$ es una fórmula, entonces el siguiente es un axioma:

$$\forall M\ \exists N\ \forall x \in M\ (\exists y (F(x,y) \Rightarrow \exists y\,(y \in N \wedge F(x,y)))).$$

i.e. $\{y \,/\, \exists\, x \in M,\ F(x,y)\}$ es un conjunto

Esta versión del axioma de reemplazamiento, es en Z_0 equivalente a la versión usual.

El axioma de elección, que no se incluye entre los axiomas de ZF, será mencionado en la sección 3, pero no se trabajará con él en esta tesis.

§2. La Teoría de los topos elementales.

En esta sección se recordarán nociones básicas de la teoría de los topos elementales, desarrollada por Lawvere y Tierney (En el apéndice se mencionan resultados que se utilizan a lo largo de este trabajo). Se está suponiendo que el lector tiene algunos conocimientos de la teoría de los topos elementales.

Una Categoría $\underline{E}$ es una quintupla, $\underline{E} = (\mathcal{O}(\underline{E}), \mathcal{M}(\underline{E}), \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ)$ donde:

1) $\mathcal{O}(\underline{E})$ es una clase cuyos elementos son llamado $\underline{E}$-objeto.

2) $\mathcal{M}(\underline{E})$ es una clase cuyos elementos son llamados $\underline{E}$-morfismos.

3) dom (dominio) y cod (codominio) son dos funciones de los $\underline{E}$-morfismos a los $\underline{E}$-objetos.

Si $f \in \mathcal{M}(\underline{E})$, $A = \mathrm{dom}(f) \in \mathcal{O}(\underline{E})$ y $B = \mathrm{cod}(f) \in \mathcal{O}(\underline{E})$ entonces se denota $f: A \longrightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$;

4) Para cada $\underline{E}$-objeto, A, existe un $\underline{E}$-morfismo llamado el morfismo identidad en A, denotado $1d_A$ tal que $\mathrm{dom}(1d_A) = A = \mathrm{cod}(1d_A)$;

5) Un operador $\circ$ de $D = \{(g,f) \mid f, g \in \mathcal{M}(\underline{E})$ y $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f)\}$ en $\mathcal{M}(\underline{E})$, llamada ley de composición de $\underline{E}$, $\circ(g,f)$ se denota $g \circ f$ con $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f)$ y $\mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g)$, que satisface los siguientes axiomas:

a) La composición es asociativa.

b) Los morfismos identidad son elementos neutros con respecto a la composición (i.e. $f \circ 1d_A = f$, $1d_A \circ g = g$ siempre que la composición esté definida).

Un topo elemental $\underline{E}$ es una categoría tal que.

1) $\underline{E}$ es finitamente bicompleta,

2) $\underline{E}$ tiene exponenciación,

3) $\underline{E}$ tiene clasificador de subobjeto.

Para referencias ver [1, 2, 3].

2.1. Axioma de bicompletez finita.

Una categoría $\underline{E}$ es finitamente bicompleta si:

1) $\underline{E}$ tiene objeto terminal;

2) $\underline{E}$ tiene producto fibrado (P.F.), equivalentemente si $\underline{E}$ tiene productos binarios e igualadores;

3) $\underline{E}$ tiene objeto inicial;

4) $\underline{E}$ tiene coproducto fibrados.

Este axioma implica la existencia de límites finito y colímites finito.

2.2. Axioma de exponenciación.

Una categoría $\underline{E}$ tiene exponenciación si tiene producto binarios y para $A, B \in \mathcal{O}(\underline{E})$ existe un $\underline{E}$-objeto B^A junto con un "morfismo evaluación" $e(A,B) : B^A \pi A \longrightarrow B$ que tiene la siguiente propiedad universal: para todo morfismo $g : C \pi A \longrightarrow B$ existe un único morfismo $C \xrightarrow{f} B^A$ tal que

$$\begin{tikzcd} B^A \pi A \arrow[r, "e(A,B)"] & B \\ C \pi A \arrow[u, dashed, "f \pi 1d_A"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

2.3. Axioma del clasificador de Subobjetos.

Una categoría $\underline{E}$ tiene clasificador de subobjetos si tiene límites finito y existe un objeto Ω y un morfismo $1 \xrightarrow{v} \Omega$, llamado el clasificador de subobjeto, tal que para todo monomorfismo $A \rightarrowtail^{m} B$ existe un único morfismo $B \xrightarrow{\chi_m} \Omega$ (el morfismo característico de m) tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\chi_m"] \\ 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$ es producto fibrado.

Como consecuencia de lo anterior se tiene:

2.4. Sea $\underline{E}$ un topo, entonces para cualquier objeto A existe un "clasificador de morfismos parciales" $A \xrightarrow{\eta_A} \tilde{A}$, i.e. para cualquier par de morfismo $(B \xrightarrow{f} A,\ B \rightarrowtail^{m} C)$ con m mono (llamado un "morfismo parcial de C en A") existe un único "morfismo característico" $C \xrightarrow{\chi(f,m)} \tilde{A}$ tal que

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, dashed, "\chi(f,m)"] \\ A \arrow[r, "\eta_A"'] & \tilde{A} \end{tikzcd}$$

es P.F. (producto fibrado). Aquí η_A es monomorfismo.

Note que el clasificador de subobjeto $1 \xrightarrow{v} \Omega$ es en realidad el clasificador de morfismos parciales de 1, el objeto terminal.

Una definición equivalente de topo elemental es:

Un topo elemental $\underline{E}$ es una categoría tal que:

1) $\underline{E}$ tiene objeto terminal y producto fibrados

2) $\underline{E}$ tiene exponenciación, y

3) $\underline{E}$ tiene clasificador de subobjeto.

Pues 1, 2 y 3 implican que $\underline{E}$ tiene objeto inicial y coproducto fibrado.

§3. El topo de los Conjuntos y la Teoría de los topos TEBP (topo elemental bien punteado).

Se demostrará que Set(Z_0) es un topo.

En cursos de la teoría de las Categorías y de la teoría de los Topos, el primer ejemplo que se dá de éstos es la categoría de los Conjuntos, en la teoría Z.F., que en verdad es un topo.

Demostrar que Set(Z_0) es un topo, (cuyos objetos son los Z_0-conjuntos y los Morfismos son las funciones entre ellos), es casi copiar la demostración que conocemos, lo único que enfatizaremos es que los conjuntos que estamos utilizando son Z_0-conjuntos.

Set(Z_0) es un topo si es categoría y si tiene:

i) Límites finitos (equivalentemente: igualadores, productos binarios y objeto terminal).

ii) Exponenciación.

iii) Clasificador de Subobjetos.

3.1. Set(Z_0) tiene objeto terminal $1 := \{\emptyset\}$ (es Z_0-conjunto por axiomas 1.3.1, 1.3.2) y para cualquier Z_0-conjunto A $!_A := A\times 1$ es la única función de A a 1.

Tiene productos binarios: Si A y B son Z_0-conjuntos, entonces el producto binario de A y B es el producto cartesiano $A\times B$, de A y B (es Z_0-conjunto por ax. 1.7).

Para demostrar que Set(Z_0) tiene igualadores, recordemos qué es una función en Z_0:

Una FUNCIÓN f de A en B, que podemos denotar $f: A\to B$ es un Z_0-subconjunto de $A\times B$ tal que
$\forall a[a\in A \Rightarrow \exists b(b\in B \wedge (a,b)\in f \wedge \forall b'(b'\in B \wedge (a,b')\in f) \Rightarrow b=b')]$
y por la unicidad de b, la denotaremos $b := f(a)$.

Set(Z_0) tiene igualadores: Si $f, g: A \longrightarrow B$ son funciones, entonces el igualador (E, e) de f y g es:

$E := \{a \in A \,/\, f(a) = g(a)\}$ (es Z_0-conj. por ax. 1.3.5) y

$e := \{u \in E \times A \,/\, \exists a\,(a \in E \wedge u = (a,a))\}$

Falta demostrar que e es función, $e: E \longrightarrow A$

Primero: e es Z_0-conj. pues $E \times A$ es Z_0-conj. (ax. 1.7) y por ax. 1.3.5.

Segundo: P.D. Para cualquier $a \in E$, existe una única $x \in A$ tal que $(a,x) \in e$.

Sea $a \in E$, se define $x := a$, como $E \subset A$ entonces $a \in A$, y por definición de e, $(a,a) \in e$; además es única, pues si existiera $b \in A$ tal que $(a,b) \in e$ entonces (por definición de e) existe $a' \in E$ tal que $(a,b) = (a',a')$ entonces $a = a'$ y $b = a' = a$

$\therefore$ $b = a$

$\therefore$ e es función.

Fácilmente se demuestra que (E, e) es el igualador de f y g.

$\therefore$ Set(Z_0) tiene límites finitos.

3.2 Set(Z_0) tiene exponenciación:

Sean A, B Z_0-conjuntos, se define

$B^A := \{f \in \wp(A \times B) \,/\, f \text{ es función}\}$

$\wp(A \times B)$ es el conjunto potencia de $A \times B$ (es Z_0-conj por ax. 1.3.3 y 1.7)

"f es función" es la abreviatura de:

$\forall a[a \in A \Rightarrow \exists b\,(b \in B \wedge (a,b) \in f \wedge \forall b'\,(b' \in B \wedge (a,b') \in f) \Rightarrow b = b')]$

que es una fórmula en Z_0.

$\therefore$ B^A es Z_0-conj. por ax. 1.3.5.

$\exists$ $e(A,B): B^A \times A \longrightarrow B$ la "función evaluación"

$e(A,B) := \{u \in (B^A \times A) \times B \,/\, \exists (f,a)\,((f,a) \in B^A \times A \wedge u = ((f,a), f(a))\}$

Como $f \in B^A$ entonces $f(a) \in B$

entonces $((f,a), f(a)) \in (B^A \times A) \times B$

$e(A,B)$ es Z_0-conj. por ax. 1.7, 1.3.5.

P.D. $e(A,B)$ es función. i.e

P.D. Para toda $(f,a) \in B^A \times A$, existe una únicas $b \in B$ tal que $((f,a),b) \in e(A,B)$.

Sea $(f,a) \in B^A \times A$, se define $b := f(a) \in B$ (pues $f \in B^A$) entonces (por definición de $e(A,B)$) $((f,a), f(a)) \in e(A,B)$

Falta demostrar la unicidad de b.

Suponer que existe $b' \in B$ tal que $((f,a),b') \in e(A,B)$ entonces (por definición de $e(A,B)$) existe $(g,a') \in B^A \times A$ tal que $((f,a),b') = ((g,a'), g(a'))$

entonces $(f,a) = (g,a')$ y $b' = g(a')$

entonces $f = g$, $a = a'$ y $b' = g(a') = f(a) = b$

$\therefore$ $b = b'$

$\therefore$ $e(A,B)$ es función

P.D. $e(A,B)$ tiene la propiedad Universal requerida.

Si tenemos el siguiente diagrama:

existe un único $\bar{h}$

$$\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[r, "e(A,B)"] & B \\
C \times A \arrow[u, dashed, "\bar{h} \times Id_A"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

i.e. si tenemos una función h de $C \times A$ a B.

P.D. existe una única función $\bar{h} : C \longrightarrow B^A$ tal que $e(A,B) \circ (\bar{h} \times Id_A) = h$.

Sea $x \in C$, se define $h_x := \{u \in A \times B \ / \ \exists a (a \in A \wedge u = (a, h(x,a)))\}$

Como $h : C \times A \longrightarrow B$ función, entonces $h(x,a) \in B$ y por ax. 1.3.5 h_x es Z_0-conj.

P.D. h_x es función de A a B, i.e. $h_x \in B^A$.

P.D. Para todo $a \in A$ existe una únicas $b \in B$ tal que $(a,b) \in h_x$

Sea $a \in A$ se define $b := h(x,a) \in B$, entonces (por definición de h_x) $(a,b) = (a, h(x,a)) \in h_x$, y

$b \in B$ es única pues si existe $b' \in B$ tal que $(a,b') \in h_x$ entonces (por definición de h_x) existe $a' \in A$ tal que $(a', h(x,a')) = (a,b')$

entonces $a' = a$ y $h(x,a') = b'$

entonces $b' = h(x,a) = b$

$\therefore$ $b = b'$

$\therefore$ $h_x : A \longrightarrow B$ es función $\therefore$ $h_x \in B^A$ para todo $x \in C$.

Se define $\bar{h} := \{u \in C \times B^A \,/\, \exists x (x \in C \wedge u = (x, h_x))\}$,
$(x, h_x) \in C \times B^A$ pues $h_x \in B^A$ y $\bar{h}$ es Z_0-conjunto por ax. 1.3.5

P.D. $\bar{h}$ es función. i.e.

P.D. Para todo $x \in C$, existe una única $f \in B^A$ tal que $(x, f) \in \bar{h}$.

Sea $x \in C$, se define $f := h_x \in B^A$ y $(x, f) = (x, h_x) \in \bar{h}$ (por definición de $\bar{h}$), y

f es única

Si existe $g \in B^A$ tal que $(x, g) \in \bar{h}$ entonces (por definición de $\bar{h}$) existe $x' \in C$ tal que $(x, g) = (x', h_{x'})$
entonces $x = x'$ y $g = h_{x'}$

$\therefore$ $g = h_x = f$

$\therefore$ $\bar{h}$ es función.

P.D. $h = e(A,B) \circ (\bar{h} \times \mathrm{Id}_A)$

NOTA: daré por conocido que composición de Z_0-funciones es Z_0-función y que si $f: A \to B$ y $g: B \to C$ son Z_0-funciones y $a \in A$ entonces $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Por la unicidad de la imagen, bajo h, de un elemento de $C \times A$, basta demostrar que para toda $(x, a) \in C \times A$, $h(x,a) = e(A,B) \circ (\bar{h} \times \mathrm{Id}_A)(x,a)$

Sea $(x, a) \in C \times A$, entonces

$(e(A,B) \circ (\bar{h} \times \mathrm{Id}_A))(x,a)) = e(A,B)((\bar{h}(x), a)) = e(A,B)(h_x, a) = h(x, a)$

$\therefore$ $e(A,B) \circ (\bar{h} \times \mathrm{Id}_A) = h$

NOTA: Si $f: A' \to B'$ y $g: C' \to D'$ son funciones entonces $f \times g: A' \times C' \to B' \times C'$ es tal que

$f \times g = \{(u, w) \in (A' \times C') \times (B' \times D') \,/\, \exists (a,x)((a,x) \in A' \times C' \wedge u = (a, x) \wedge w = (f(a), g(x))\}$
i.e. como conjunto es producto cartesiano pero también cumple la propiedad de función.

Falta demostrar la unicidad de $\bar{h}$.

Sea $h': C \to B^A$ tal que $e(A,B) \circ (h' \times \mathrm{Id}_A) = h$

Para demostrar que $h' = \bar{h}$ basta demostrar que para toda $x \in C$, $h'(x) = \bar{h}(x)$

Sea $x \in C$ entonces para toda $a \in A$, $(x, a) \in C \times A$ y

$$
\begin{array}{ccccc}
(e(A,B) \circ (h' \times \mathrm{Id}_A))((x,a)) & = & h(x,a) & = & (e(A,B) \circ (\bar{h} \times \mathrm{Id}_A))((x,a)) \\
\| & & & & \| \\
e(A,B)((h'(x), a)) & & & & e(A,B)((h_x, a)) \\
\| & & & & \| \\
h'(x)(a) & & & & h_x(a)
\end{array}
$$

entonces para toda $a \in A$ $h'(x)(a) = h_x(a)$
entonces $h'(x) = h_x = \bar{h}(x)$
$\therefore$ $h' = \bar{h}$
$\therefore$ Set(Z_0) tiene exponenciación.

3.3. Set(Z_0) tiene clasificador de subobjetos, $(\Omega, 1 \xrightarrow{v} \Omega)$.
PD. Existe Ω, Z_0-conjunto y un morfismo $v : 1 \longrightarrow \Omega$ tal que para todo monomorfismo $A \overset{m}{\rightarrowtail} B$, existe un único morfismo $\bar{M} : B \longrightarrow \Omega$ con la propiedad de que hace el siguiente diagrama un P.F. :

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{m}{\rightarrowtail} & B \\ \downarrow & \text{P.F.} & \downarrow \bar{M} \\ 1 & \underset{v}{\rightarrowtail} & \Omega \end{array}$$

NOTA: P.F. = Producto fibrado

Demostración:
Se definen $\Omega := \{0,1\}$, que es Z_0-conjunto (ax. 1.3.2) y $v := \{(0,1)\}$, que es Z_0-conjunto pues $(0,1) := \{\{0\},\{0,1\}\}$ es Z_0-conjunto (ax. 1.3.2) y por ax. 1.3.2.
PD. v es función. $v : 1 \longrightarrow \Omega$
Esto es inmediato, pues si $x \in 1$ entonces (pues $1 = \{0\}$) $x = 0$, y por definición de v, existe un único $1 \in \Omega$ tal que $(x,1) \in v$.
$\therefore$ v es función.

P.D. (Ω, v) tienen la propiedad antes mencionada.
Sea $m : A \rightarrowtail B$ monomorfismo
Se define $\bar{M} := \{(b,y) \in B \times \Omega \,/\, y = 1 \iff \exists a (a \in A \wedge m(a) = b)\}$ es Z_0-conjunto por el ax. 1.3.5.

PD. $\bar{M}$ es función. i.e. P.D. Para todo $b \in B$, existe una única $y \in \Omega$ tal que $(b,y) \in \bar{M}$.
Sea $b \in B$.
Caso 1.- Si existe $a \in A$ tal que $m(a) = b$ entonces (por definición de $\bar{M}$), defino $y := 1$ $\therefore$ $(b,1) \in \bar{M}$ y y es única (por definición de $\bar{M}$)
Caso 2.- Si $a \in A$ entonces $m(a) \neq b$. Entonces defino $y := 0$
$\therefore$ $(b,0) \in \bar{M}$ y y es única por definición de $\bar{M}$.
$\therefore$ $\bar{M}$ es función.
Y fácilmente se demuestra que $(!_A, m) = \text{P.F.}(\bar{M}, v)$

Nota: Recuerdo que Set(Z_0) tiene objeto inicial canónico $0 := \emptyset$, que es Z_0-conjunto por ax 1.3.1

$\therefore$ Set(Z_0) es un topo

Ahora se recordará algunas propiedades importantes de Set(Z_0).

3.4. $0 \not\cong 1$. Basta recordar que no existe función de 1 a 0.
$\therefore$ Set(Z_0) es no degenerado, i.e. $0 \not\cong 1$.

3.5. 1 es un generador. i.e.,
Si A y B son Z_0-conj. y $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ son funciones y $f \neq g$, entonces existe $1 \xrightarrow{a} A$ función tal que $f \circ a \neq g \circ a$.

En otras palabras existe un elemento en A tal que sus imágenes bajo f y g son distintas, pues las funciones de 1 en A corresponden a los elementos de A.

3.6. Existen exactamente dos funciones de 1 en Ω.
$v = \{(0,1)\}$ (el morfismo "verdad") y
falso $= \{(0,0)\}$ (el morfismo "falso").

3.7. Para todo Z_0-conjunto, A, Set(Z_0) tiene un clasificador de morfismos parciales de A, $(\tilde{A}, A \xrightarrow{j_A} \tilde{A})$.

Sea A un Z_0-conj. PD. Existe un Z_0-conj. $\tilde{A}$ y una función $A \xrightarrow{j_A} \tilde{A}$ tal que para cualquier par de funciones $(B \xrightarrow{m} C, B \xrightarrow{f} A)$, con m monomorfismo, entonces existe un único $\chi_{(m,f)} : C \to \tilde{A}$ tal que $(m, f) = \mathrm{P.F.}(\chi_{(m,f)}, j_A)$.

En diagrama, tenemos:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & C \arrow[d, dashed, "\chi_{(m,f)}"] \\ A \arrow[r, "j_A"'] & \tilde{A} \end{tikzcd}$$

Se definen $\tilde{A} := A \amalg 1 := (A \times \{1\}) \cup (\{1\} \times 1)$, que es Z_0-conj (ax 1.7, 1.3.2, 1
$= \bigcup\{A \times \{1\}, \{1\} \times 1\}$ es Z_0-conj).

y $j_A := \{(x,u) \in A \times \tilde{A} \,/\, \exists a (a \in A \wedge x = a \wedge u = (a,1))\}$, es Z_0-conj (ax 1.7, 1.3.5).

PD. j_A es función. i.e. P.D. Para toda $x \in A$, existe un único $u \in \tilde{A}$ tal que $(x,u) \in j_A$.

Sea $x \in A$ entonces defino $u := (a,1) \in \tilde{A}$.
$\therefore$ (por definición de j_A) $(x,u) \in j_A$. Y la u es única, pues si existe $u' \in j_A$ tal que $(x,u') \in j_A$ entonces (por definición de j_A) existe $a \in A$ tal que $(x,u') = (a,(a,1))$, entonces $x = a$ y $u' = (a,1) = (x,1) = u$
$\therefore u = u'$
$\therefore j_A$ es función.

Demostrar que $(\tilde{A}, j_A)$ es el clasificador de morfismos parciales de A es directo.

Los conjuntos antes mencionados son únicos salvo isomorfismos.

Ahora una de las versiones del Axioma de Elección para Set(Zo)

3.8 AXIOMA DE ELECCIÓN (AE)

Cualquier epimorfismo se escinde, i.e. Si A, B son Zo-conjuntos y $f: A \twoheadrightarrow B$ epi entonces existe una función $g: B \to A$ tal que $(B \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B) = 1d_B$

Regresemos a la Teoría de los Topos (TE) (topos elemental) y formularemos los axiomas que corresponden a las propiedades antes mencionadas de Set(Zo)

3.9. AXIOMA DE NO-DEGENERACIÓN (ND) $0 \not\cong 1$

3.10. AXIOMA DEL GENERADOR (G). 1 es un generador.

3.11. AXIOMA DE BIVALENCIA (BV). Hay exactamente dos morfismos de 1 a Ω. (Llamados el morfismo "verdad" y el "falso").

3.12. AXIOMA DE BOOLE (B). $1 \xrightarrow{\top} \Omega$ es un clasificador de subobjetos (i.e. $1 \xrightarrow{\top} \Omega \cong 1 \xrightarrow{x} \Omega$). En otras palabras el topos es de Boole.

Se llamará

$$TEBP := TE + (ND) + (G)$$

la TEORIA DE LOS TOPOS ELEMENTALES BIEN PUNTEADOS.

NOTA: En TEBP los axiomas (B) y (BV) se cumplen.

Sea $\mathcal{E}$ un topos elemental bien punteado.

PD Se cumple (BV)

Sea $A \not\cong 0$ (por lo menos existe el 1 por (ND))

Tomemos $!_A: A \to 1$ y su epi-mono factorización.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "!_A"] \arrow[dr, two heads, "(!_A)^*"'] & 1 \\ & \mathrm{Sop}(A) \arrow[u, hook, "\mathrm{Im}(!_A)"'] \end{tikzcd} \qquad \therefore \mathrm{Im}(!_A) = !_{\mathrm{Sop}(A)}$$

y $\mathrm{Sop}(A) \not\cong 0$ porque si $\mathrm{Sop}(A) \cong 0$ entonces $A \cong 0$ ¡!

Por 3.13.a (se demostrará después) y como $\mathrm{Sop}(A) \not\cong 0$ entonces existe $1 \xrightarrow{x} \mathrm{Sop}(A)$

entonces $!_{\mathrm{Sop}(A)} \cdot x = 1d_1$ (pues 1 es objeto terminal).

PD. $Sop(A) \cong 1$.

Como $!_{Sop(A)}$ es mono y $\underline{E}$ es topo, basta demostrar que $!_{Sop(A)}$ es epi. (por A.3)

Sean $\alpha, \beta : 1 \longrightarrow C$ tal que $\alpha \circ !_{sop(A)} = \beta \circ !_{sop(A)}$. PD. $\alpha = \beta$

Como $\alpha \circ !_{Sop(A)} = \beta \circ !_{sop(A)}$

entonces

$$\begin{array}{ccc} \alpha \circ !_{sop(A)} \circ x & = & \beta \circ !_{sop(A)} \circ x \\ \parallel & & \parallel \\ \alpha \circ Id_1 & & \beta \circ Id_1 \\ \parallel & & \parallel \\ \alpha & & \beta \end{array} \qquad (\text{pues } !_{sop(A)} \circ x = Id_1)$$

$\therefore \alpha = \beta$

$\therefore$ $!_{sop(A)}$ es epi

$\therefore$ $Sop(A) \cong 1$

Ésto nos dice que los únicos subobjetos del 1 son: $0 \xrightarrow{!_0} 1$ y $1 \xrightarrow{Id_1} 1$, pues del 0 al 1 hay exactamente un morfismo y también del 1 al 1 y si $B \ncong 0$ y $!_B : B \rightarrowtail 1$ es mono entonces (por lo anterior) $!_B$ es epi $\therefore$ $B \cong 1$

Y por la correspondencia biyectiva entre los subobjetos del 1 y los morfismos de 1 a Ω (característicos).
Entonces sólo hay dos morfismos de 1 a Ω (que son los morfismos característicos de $!_0$ y Id_1 : $\chi_{!_0} := falso$, $\chi_{Id_1} := v$ (verdad))
$\therefore$ se cumple (BV)

P.D. En $\underline{E}$ se cumple (B) i.e. P.D. $1 \sqcup 1 \cong \Omega$. Por A.4. y A.11, v y falso son monos, entonces $[v, falso] : 1 \sqcup 1 \longrightarrow \Omega$ es mono

Por ser $\underline{E}$ topo basta demostrar que $[v, falso]$ es epi.
Sean $\alpha, \beta : \Omega \longrightarrow C$, $C \in O(\underline{E})$ tal que $\alpha \circ [v, falso] = \beta \circ [v, falso]$
PD $\alpha = \beta$.
$\therefore$ Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, tail, "i_1"] \arrow[dr, bend right, "v"'] & 1 \sqcup 1 \arrow[d, "{[v, falso]}"] & 1 \arrow[l, tail, "i_2"'] \arrow[dl, bend left, "falso"] \\ & \Omega \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] & \\ & C & \end{tikzcd}$$

$\alpha \circ [v, falso] = \beta \circ [v, falso]$

entonces $\alpha \circ [v, falso] \circ i_j = \beta \circ [v, falso] \circ i_j$ $\quad j = 1, 2$

entonces $\alpha \circ v = \beta \circ v$ y
$\alpha \circ falso = \beta \circ falso$
(pues el diagrama conmuta)

Como $\Omega \not\cong 0$. Supongamos que $\alpha \neq \beta$
entonces (por G) existe $1 \xrightarrow{x} \Omega$ tal que $\alpha \circ x \neq \beta \circ x$
entonces (por BV) $x = v$ o $x = falso$
pero $\alpha \circ v = \beta \circ v$ y $\alpha \circ falso = \beta \circ falso$ $\lightning (\alpha \circ x \neq \beta \circ x)$
$\therefore$ $\alpha = \beta$
$\therefore$ $[v, falso]$ es epi.
$\therefore$ $\Omega \cong 1 \sqcup 1$
$\therefore$ Se cumple (B)

3.13. Proposición en TEBP. Sea E un topo elemental bien punteado.

a) Si $A \in O(E)$, $A \not\cong 0$ entonces existe un morfismo $1 \to A$ (i.e. A tiene elementos).

b) El soporte se escinde. i.e. el epimorfismo, de la epi-mono factorización de cualquier $!_A : A \to 1$, se escinde.

c) Un morfismo $A \xrightarrow{b} B$ es monomorfismo sii $A \xrightarrow{b} B$ es inyectivo. donde $A \xrightarrow{b} B$ es inyectivo sii (por definición) Para todo x, y, $1 \underset{y}{\overset{x}{\rightrightarrows}} A$ si $1 \xrightarrow{x} A \xrightarrow{b} B = 1 \xrightarrow{y} A \xrightarrow{b} B$ entonces $x = y$.

d) Un morfismo $A \xrightarrow{b} B$ es epimorfismo sii $A \xrightarrow{b} B$ es sobre. donde $A \xrightarrow{b} B$ es sobre sii Para todo $1 \xrightarrow{z} B$, existe un $1 \xrightarrow{x} A$ tal que $1 \xrightarrow{x} A \xrightarrow{b} B = 1 \xrightarrow{z} B$

e) Ω es cogenerador.
i.e. Si $h, h' : A \to B$ son morfismos en E y $h \neq h'$, entonces existe $f : B \to \Omega$ morfismo tal que $f \circ h \neq f \circ h'$.

Demostración:

a) Sea $A \in O(E)$, $A \not\cong 0$ PD existe un morfismo $1 \longrightarrow A$.
Por A.6.b el igualador de v y $falso$ es el 0.
Como $A \not\cong 0$ entonces $v \circ !_A \neq falso \circ !_A$, pues si $v \circ !_A = falso \circ !_A$ entonces (por ser el $0 = Eq(v, falso)$) existe $A \xrightarrow{h} 0$ morfismo tal que $!_0 \circ h = !_A$, entonces $A \cong 0$ $\lightning$ $(A \not\cong 0)$

$\therefore$ $v \circ !_A \neq falso \circ !_A$
$\therefore$ (por G) existe $1 \xrightarrow{x} A$ tal que $v \circ !_A \circ x \neq falso \circ !_A \circ x$
$\therefore$ A tiene elementos

b) El soporte se escinde.
Sea $A \in O(E)$, tomemos la epi-mono factorización de $!_A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "!_A"] \arrow[dr, "(!_A)^*"'] & 1 \\ & \mathrm{Sop}(A) \arrow[u, "\mathrm{Im}(!_A) = !_{\mathrm{Sop}(A)}"'] \end{tikzcd}$$

P.D. $(!_A)^*$ se escinde. i.e. P.D. Existe un morfismo $s : \mathrm{Sop}(A) \to A$ tal que $(!_A)^* \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{Sop}(A)}$

Caso 1: Si $A \cong 0$ entonces $\mathrm{Sop}(A) \cong 0$ pues $(!_A)^*$ es epi y como $A \cong 0$ entonces $(!_A)^*$ también es mono. ∴ $(!_A)^*$ es iso

∴ $A \cong \mathrm{Sop}(A)$ ∴ $(!_A)^*$ se escinde (pues tomamos $(!_A)^{*\,-1}$)

Caso 2: Si $A \not\cong 0$ entonces (ver demostración de (BV) y por a))

$\mathrm{Sop}(A) \cong 1$ y existe $1 \xrightarrow{x} A$ morfismo.

Defino $s := x \circ !_{\mathrm{Sop}(A)} : \mathrm{Sop}(A) \to A$

PD: $(!_A)^* \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{Sop}(A)}$

Como $\mathrm{Sop}(A) \cong 1$ entonces $(!_A)^* \circ s : \mathrm{Sop}(A) \to \mathrm{Sop}(A)$ es el único morfismo que existe de $\mathrm{Sop}(A)$ en $\mathrm{Sop}(A)$, pero también tenemos $\mathrm{Id}_{\mathrm{Sop}(A)}$

∴ $(!_A)^* \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{Sop}(A)}$

∴ $(!_A)^*$ se escinde.

c) $A \xrightarrow{f} B$ morfismo es mono sii es inyectiva.

<u>sólo si</u>) $A \xrightarrow{f} B$ es mono. Sean $x, y : 1 \to A$ tal que $f \circ x = f \circ y$ entonces (f es mono) $x = y$ ∴ f es inyectiva.

<u>si</u>) $A \xrightarrow{f} B$ es inyectiva.

Sean $C \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ y $\alpha, \beta : C \to A$ morfismos tal que $f \circ \alpha = f \circ \beta$

PD $\alpha = \beta$.

Caso 1: Si $C \cong 0$ entonces $\alpha = \beta = 0_A$

Caso 2: Si $C \not\cong 0$ entonces (por a)) existe $1 \xrightarrow{x} C$ morfismo.

Como $f \circ \alpha = f \circ \beta$ entonces $f \circ (\alpha \circ x) = f \circ (\beta \circ x)$ pero $\alpha \circ x, \beta \circ x : 1 \to A$ entonces (pues f es inyectiva) $\alpha \circ x = \beta \circ x$, pero esto sucede para todo $1 \xrightarrow{x} C$.

Suponer que $\alpha \neq \beta$ entonces (por G) existe $1 \xrightarrow{y} C$ morfismo tal que $\alpha \circ y \neq \beta \circ y$ ⨳ ($\alpha \circ y = \beta \circ y$)

∴ $\alpha = \beta$

∴ f es mono.

d) $A \xrightarrow{f} B$ es epi sii f es sobre.

sólo si) $A \xrightarrow{f} B$ es epi.

PD $A \cong 0$ sii $B \cong 0$

Si $A \cong 0$ entonces $f = 0_B$ que es mono y por hipótesis f es epi ∴ f es iso ∴ $B \cong 0$.

Si $B \cong 0$ entonces $A \cong B \cong 0$ (pues no existe morfismo $1 \xrightarrow{z} A$ porque si existe $1 \xrightarrow{z} A$ entonces $(1 \xrightarrow{z} A \xrightarrow{f} B \cong 0)$ $1 \cong 0$ $\lightning$ (por ND))

PD f es sobre.

Caso 1. Si $A \cong 0$ entonces $B \cong 0$, entonces no existe $1 \xrightarrow{z} B$ morfismo.

$\therefore$ f es sobre por vacuidad.

Caso 2. Si $A \not\cong 0$ entonces $B \not\cong 0$.

Sea $1 \xrightarrow{z} B$ morfismo. PD existe $1 \xrightarrow{x} A$ tal que $f \circ x = z$

Tomemos el PF. (f, z)

i.e.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "!_C"] \arrow[d, "z'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & 1 \arrow[d, "z"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Como f es epi entonces $!_C$ es epi por A.13.

$\therefore$ $C \not\cong 0$ (pues si $C \cong 0$ entonces $!_C$ es mono y como es epi, entonces $1 \cong 0$ $\lightning$ (por ND))

Como $C \not\cong 0$ entonces (por a)) existe $1 \xrightarrow{x'} C$ morfismo, defino $x := z' \circ x' : 1 \longrightarrow A$. Ahora.

$$f \circ x = f \circ z' \circ x' \underset{\text{P.F.}}{=} z \circ \underbrace{!_C \circ x'}_{1 \to 1} = z \circ \mathrm{Id}_1 = z$$

$\therefore$ f es sobre

ii) $A \xrightarrow{f} B$ es sobre. PD f es epi.

Sean $\alpha, \beta : B \longrightarrow C$ tales que $\alpha \circ f = \beta \circ f$

Caso 1: Si $B \cong 0$ entonces $\alpha = \beta = 0_C$

Caso 2: Si $B \not\cong 0$ entonces suponer que $\alpha \neq \beta$

entonces (por G) existe $1 \xrightarrow{z} B$ morfismo tal que $\alpha \circ z \neq \beta \circ z$

$\therefore$ tengo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & C \\ & 1 \arrow[ul, dashed, "x"] \arrow[u, "z"'] \arrow[ul, phantom, "?", near end, shift left=2] & \end{tikzcd}$$

Como f es sobre y $1 \xrightarrow{z} B$ entonces existe $1 \xrightarrow{x} A$ tal que $f \circ x = z$

Pero por otro lado $\alpha \circ f = \beta \circ f$

entonces $\underset{\alpha \circ z}{\underset{\parallel}{\alpha \circ f \circ x}} = \underset{\beta \circ z}{\underset{\parallel}{\beta \circ f \circ x}}$ $\lightning$ $(\alpha \circ z \neq \beta \circ z)$

$\therefore$ $\alpha = \beta$

$\therefore$ f es epi.

c) Ω es un cogenerador.

Sean $h, h' : A \to B$ morfismos tales que $h \neq h'$.
entonces $A \not\cong 0$ (pues si $A \cong 0$ entonces $h = h' = 0_B$)

Como $h \neq h'$ entonces (por G) existe $x : 1 \to A$ tal que $h \circ x \neq h' \circ x$
$\therefore$ $h \circ x, h' \circ x : 1 \to B$. Por A.4. $h \circ x$ y $h' \circ x$ son monos
entonces (porque Ω es clasificador de subobjetos) existe $\chi_{h\circ x} : B \to \Omega$, el característico de $h \circ x$.

Defino $f := \chi_{h \circ x}$
$\therefore$ tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "h\circ x"] \arrow[r, tail, bend left, "h'\circ x"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & B \arrow[d, "f"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

PD. $f \circ h \neq f \circ h'$. Suponer que $f \circ h' = f \circ h$
entonces $f \circ h' \circ x = f \circ h \circ x \underset{\text{P.F.}}{=} v$ $\quad\therefore$ $f \circ h' \circ x = v$
entonces (por ser $f = \chi_{h\circ x}$) existe un único $g : 1 \to 1$ tal que $h \circ x \circ g = h' \circ x$
(pero $g = \mathrm{Id}_1$, pues 1 es objeto terminal)

$$\therefore \quad \begin{aligned} h \circ x \circ g &= h' \circ x \\ h \circ x \circ \mathrm{Id}_1 &= h \circ x \end{aligned} \quad \bigtriangledown \quad (h \circ x \neq h' \circ x)$$

$\therefore$ $f \circ h \neq f \circ h'$
$\therefore$ Ω cogenera

$\square$.

Nota: En TE + (ND) se cumplen las siguientes equivalencias:
i) (G) sii ((B) y 3.13.a)
ii) 3.13.a sii ((BV) y 3.13.b)

Demostración

i) (G) sii ((B) y 3.13.a)

si) Por definición, si tenemos TE + (ND) + G := TEBP entonces (por lo anterior) (B) y 3.13.a.

sólo si) TE + (ND) + (B) + 3.13.a $\quad$ PD (G) = 1 genera.

Sean $h, h' : A \to B$ morfismos tales que $h \neq h'$.
Tomemos $(E, e) = Eq(h, h')$ (el igualador de h y h')
entonces (por (B)) existen $(\neg E, \neg e : \neg E \to A)$ el complemento de $E \overset{e}{\rightarrowtail} A$

i.e.
$$\begin{tikzcd}
\neg E \arrow[r, tail, "\neg e"] \arrow[dd] \arrow[ddr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \arrow[d, "\chi_e"] \\
& \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$
(donde $\neg : \Omega \to \Omega$ $\quad \neg := \chi_{falso}$) y tal que $\neg e \cap e = 0_A$ y $\neg E \cup E \cong A$.

PD. e no es isomorfismo.

Suponer que e es iso, entonces en particular e es epi y como $he = h'e$ (por ser (E,e) el igualador de h y h') entonces $h = h'$ $\triangleright$ (pues $h \neq h'$) $\therefore$ e no es iso.

$\therefore$ $\neg E \not\cong 0$ (Si $\neg E \cong 0$ entonces $(\neg E) \cup E \cong E \cong A$ $\triangleright$, pues $E \not\cong A$ porque e no es iso).

Como $\neg E \not\cong 0$ entonces (por 3.13.a) existe $1 \xrightarrow{x} \neg E$ morfismo

PD. $h(\neg e \circ x) \neq h'(\neg e \circ x)$

Como $\neg e \cap e = 0_A$ entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[drr, bend left, "x"] \arrow[ddr, bend right, "y"'] & & \\
& 0 \arrow[r, "0_{\neg E}"] \arrow[d, "0_E"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \neg E \arrow[d, "\neg e"] \\
& E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "h'"'] & B
\end{tikzcd}$$

Si $h(\neg e \circ x) = h'(\neg e \circ x)$ entonces (por ser $(E,e) = Eq(h,h')$) existe $1 \xrightarrow{y} E$ morfismo tal que $\neg e \circ x = e \circ y$.
entonces (por ser P.F.) existe $f : 1 \longrightarrow 0$ tal que $0_{\neg E} \circ f = x$ y $0_E \circ f = y$; entonces (pues $f : 1 \longrightarrow 0$) $1 \cong 0$ $\triangleright$ (ND)

$\therefore$ existe $1 \xrightarrow{\neg e \circ x} A$ tal que $h(\neg e \circ x) \neq h'(\neg e \circ x)$

$\therefore$ 1 genera (G)

ii) en TE+(ND) : 3.13.a sii ((BV) y 3.13.b)

<u>sólo si)</u> 3.13.a : Si $A \in O(\underline{E})$, $A \not\cong 0$ entonces existe $1 \xrightarrow{x} A$ morfismo.

Si se fijan en la demostración que en TEBP se cumple (BV) pág. 17, se darán cuenta de que sólo utilizamos TE + (ND) + 3.13.a

$\therefore$ se cumple (BV)

Y análogamente si nos fijamos en la demostración de 3.13.b pág. 19, sólo utilizamos TE + (ND) + 3.13.a

$\therefore$ se cumple 3.13.b.

<u>si)</u> TE + (ND) + (BV) + 3.13.b PD. Si $A \in O(\underline{E})$, $A \not\cong 0$ entonces existe un morfismo $1 \xrightarrow{x} A$.

Sea $A \not\cong 0$, tomemos la epi-mono factorización de $!_A$ entonces, tenemos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "!_A"] \arrow[dr, "(!_A)^*"'] & \arrow[d, phantom, "\supseteq"] & 1 \\ & Sop(A) \arrow[ur, "Im(!_A)"'] & \end{tikzcd}$$

Como 1 es objeto terminal entonces $!_{Sop(A)} = Im(!_A)$

Por 3.13.b, $(!_A)^*$ se escinde entonces existe $s: Sop(A) \longrightarrow A$ tal que $(!_A)^* \circ s = Id_{Sop(A)}$

Como $Im(!_A) = !_{Sop(A)}$ es mono entonces (porque Ω es clasificador de subobjetos) existe $\chi_{!_{Sop(A)}} : 1 \longrightarrow \Omega$ su morfismo característico.

Entonces (por (BV)) $\chi_{!_{Sop(A)}} = v$ o $\chi_{!_{Sop(A)}} = falso$

Pero si $\chi_{!_{Sop(A)}} = falso$ entonces (porque $falso = \chi_{!_0}$) $Sop(A) \cong 0$

entonces $A \cong 0$ ¡ $(A \not\cong 0)$

$\therefore$ $\chi_{!_{Sop(A)}} = v$

entonces (pues $v = \chi_{Id_1}$) $Sop(A) \cong 1$

$\therefore$ $(!_A)^* : A \twoheadrightarrow Sop(A) \cong 1$

y como (por 3.13.b) $(!_A)^*$ se escinde entonces existe $s: 1 \to A$ tal que $(!_A)^* \circ s = Id_1$

$\therefore$ existe $a: 1 \longrightarrow A$

$\therefore$ A tiene elementos

$\therefore$ 3.13.a

□.

Ahora vamos a establecer los axiomas de infinito y de elección en TE:

3.14. AXIOMA DEL OBJETO DE NÚMEROS NATURALES (ONN).

Existe un "objeto de números naturales" $1 \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N$
i.e. existe un objeto $N \in O(E)$ y $1 \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N$ morfismos tal que
Para cualquier $1 \xrightarrow{a} A \xrightarrow{g} A$ existe un único $N \xrightarrow{f} A$ morfismo tal que

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[d, "f"] \\ 1 \arrow[ur, "o"] \arrow[r, "a"'] & A \arrow[r, "g"'] & A \end{tikzcd}$$

conmuta

3.15. AXIOMA DE ELECCIÓN (EE).

Los epimorfismos se escinden.

Note que el soporte se escinda (3.13.b) es sólo un caso muy particular de (EE)
$\therefore$ Si TE + (ND) + (B) + (BV) + (EE) entonces (G) pues por lo anterior y como ((EE) entonces 3.13.b) y como en TE + (ND)
(Si 3.13.b + (BV) entonces 3.13.a) y (si 3.13.a + (B) entonces (G))
$\therefore$ se cumple (G)

Claramente el topo de los conjuntos en Z_0 + (Inf), respectivamente Z_0 + (AE), satisface (ONN), respectivamente (EE).

Vamos a investigar si la teoría TEBP caracteriza la categoría $Set(Z_0)$ (salvo equivalencias), y en particular vamos a buscar un modelo interno de Z_0 en TEBP, por medio de la caracterización en términos categóricos de la RELACIÓN DE MEMBRESÍA; los CONJUNTOS; la IGUALDAD o EQUIVALENCIA entre ellos.

Siempre, cuando estudiábamos conjuntos, sabíamos que si A es un conjunto, los elementos de A están en correspondencia biunívoca con las funciones de $1 \longrightarrow A$; y los subconjuntos, con las funciones características $A \longrightarrow \Omega$
Se pensaría que podemos hacer una especie de "teoría local de conjuntos", y después tratar de hacer una

teoría global de conjuntos, pero aquí empezarán nuestros problemas, pues:

i) Sabemos que los elementos son a su vez conjuntos, lo cuál no se ve claro aquí (por el dominio y codominio de los morfismos "elemento" y "subconjuntos").

ii) No podemos hablar de un conjunto metido en dos conjuntos distintos A y A' (los subconjunto de A y A' son $A \longrightarrow \Omega$ y $A' \longrightarrow \Omega$ respectivamente).

Aunque después solucionaremos estos problemas.

§4. Conjuntos transitivos y morfismos inclusión.

Una de nuestras finalidades es caracterizar la relación de membresía $\in|T$ en los conjuntos transitivos T.

Se recuerda que las relaciones $R \subset A \times A$ en un conjunto A están en correspondencia biunívoca con las funciones $A \xrightarrow{r} \wp A$, vía :

$(a,b) \in R$ sii $a \in r(b)$, para toda $a, b \in A$

y por lo tanto se puede pensar a las funciones $A \to \wp A$ como las relaciones en A.

i.e.

$$\{r \,/\, r : A \to \wp A \text{ función}\} \longleftrightarrow \{R \,/\, R \subset A \times A\}$$

$$(*) \qquad A \xrightarrow{r} \wp A \longmapsto R_r := \{(x,y) \in A \times A \,/\, y \in r(x)\}$$

(es Z_0-conjunto por ax. 1.3.5.)

$$(**) \qquad A \xrightarrow{r_R} \wp A \longleftarrow R$$

$$x \longmapsto \{y \in A \,/\, (x,y) \in R\}$$

$\{y \in A / (x,y) \in R\}$ es un Z_0-conj. por el axioma 1.3.5 y además está contenido en A, por lo tanto pertenece a $\wp A$.

Fácilmente se demuestra que r_R es función y $(*)$, $(**)$ son inversas una de la otra.

<u>Definición</u> .- i) Una relación $A \xrightarrow{r} \wp A$ es <u>EXTENSIONAL</u> sii r es mono.

ii) Una relación $A \xrightarrow{r} \wp A$ es <u>BIEN FUNDADA</u> sii se cumplen las siguientes dos condiciones equivalentes :

0) Para todo $M \subset A$, $M \neq \emptyset$ entonces M tiene un elemento r-minimal $x \in M$ (i.e. $r(x) \cap M = \emptyset$)

1) r satisface el PRINCIPIO DE INDUCCIÓN TRANSFINITA, i.e., Para todo $N \subset A$ tenemos que (si $r^{-1}[\wp N] \subset N$ entonces $N = A$).

Primero se demostrará que $0 \equiv 1$.

0 implica 1)

Sea $N \subset A$ tal que $r^{-1}[\wp N] \subset N$. PD. $N = A$.

Como $N \subset A$. Suponer que $N \subsetneq A$.

entonces $\emptyset \neq A - N \subset A$ ($A-N$ es Z_0-conj. por ax. 1.6)

entonces (por 0) existe $x \in A - N$ tal que $r(x) \cap (A-N) = \emptyset$

entonces $r(x) \not\subset A-N$, pero $r(x) \subset A$
entonces $r(x) \subset N$
entonces $r(x) \in \wp N$
entonces $x \in r^{-1}[\wp N] \subset N$ (por hipótesis)
entonces $x \in N$ $\not\!\!\!\!\not\!\!\;\;$ $(x \in A-N)$
$\therefore$ $N = A$

1 implica 0)

Sea $M \subset A$, $M \neq \emptyset$. PD Existe $x \in M$ tal que $r(x) \cap M = \emptyset$
Suponer que para todo $x \in M$, $r(x) \cap M \neq \emptyset$.
PD. $r^{-1}[\wp(A-M)] \subset A-M$.

Caso 1.- Si $r^{-1}[\wp(A-M)] = \emptyset$ entonces $r^{-1}[\wp(A-M)] \subset A-M$.
Caso 2.- Si $r^{-1}[\wp(A-M)] \neq \emptyset$ entonces sea $x \in r^{-1}[\wp(A-M)]$
entonces $r(x) \in \wp(A-M)$
entonces $r(x) \subset A-M$
entonces $r(x) \cap M = \emptyset$
entonces (por hipótesis) $x \notin M$
entonces $x \in A-M$
$\therefore$ $r^{-1}[\wp(A-M)] \subset A-M$
$\therefore$ (por 1) $A-M = A$
$\therefore$ $M = \emptyset$ $\not\!\!\!\!\not\!\!\;\;$ $(M \neq \emptyset)$
$\therefore$ Existe $x \in M$ tal que $r(x) \cap M = \emptyset$

Se recuerda al funtor "Conjunto Potencia", $\wp$.

$\wp : Set(Z_0) \longrightarrow Set(Z_0)$

Objetos: $A \longmapsto \wp A$ (es Z_0-conj. por ax. 1.3.3).

Morfismos:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto] & \wp A \arrow[d, "\wp f"] \\ B & \wp B \end{tikzcd}$$
función: f

donde $\wp f : \wp A \longrightarrow \wp B$ está definido como sigue:
$\wp f := \{ u \in \wp A \times \wp B \ / \ \exists M (M \in \wp A \ \wedge \ u = (M, f[M]) \}$

$\wp f$ es función: Si $M \in \wp A$ entonces $M \subset A$ y
$f[M] = \{ b \in B \ / \ \exists a (a \in A \wedge f(a) = b) \}$ es Z_0-conj por ax. 1.3.5
y $f[M] \subset B$.
$\therefore$ $f[M] \in \wp B$
$\therefore$ $(M, f[M]) \in \wp A \times \wp B$.

PD. Para todo $M \in \wp A$ existe un único $N \in \wp B$ tal que $(M,N) \in \wp f$

Sea $M \in \wp A$ se define $N := f[M] \in \wp B$

$\therefore$ (por definición de $\wp f$) $(M,N) \in \wp f$.

Suponer que existe $N' \in B$ tal que $(M,N') \in \wp f$
entonces existe $M' \in \wp A$ tal que $(M,N') = (M', f[M'])$
entonces $M = M'$ y $N' = f[M'] = f[M] := N$
$\therefore$ N es única
$\therefore$ $\wp f$ es función.

La demostración de que $\wp$ es funtor es la conocida.

Utilizando el funtor "conjunto Potencia" $\wp$, se demostrará lo siguiente:

<u>4.1</u> Teorema en Z_0.

Una relación, $A \xrightarrow{r} \wp A$, es bien fundada sii satisface la siguiente <u>propiedad universal de recursión</u>:

Para todo B, Z_0-conjunto, y para todo $g: \wp B \longrightarrow B$ función, existe una única función $A \xrightarrow{f} B$ tal que

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ r\downarrow & & \uparrow g \\ \wp A & \xrightarrow[\wp f]{} & \wp B \end{array}$$

conmuta.

<u>Demostración</u>

<u>si</u>) $A \xrightarrow{r} \wp A$ es bien fundada.

Sea $g: \wp B \longrightarrow B$ función

PD. Existe una única función $f: A \longrightarrow B$ tal que $g \circ \wp f \circ r = f$

Para ésto, se darán algunas definiciones y lemas.

<u>Definición</u>. Sean $A \xrightarrow{r} \wp A$, $\wp B \xrightarrow{g} B$ dados.

Se dice que $h \subset A \times B$ es una función adecuada si y sólo si:

o) h es función

i) $\operatorname{Dom} h \subset A$

ii) Si $x \in \operatorname{Dom} h$ entonces $r(x) \subset \operatorname{Dom} h$ (ie. h es r-transitivo)

iii) Si $x \in \operatorname{Dom} h$ entonces $h(x) = (g \circ \wp h \circ r)(x)$

Por 1.9 $\operatorname{Dom} h$ es un Z_0-conjunto, para toda h función.

Lema 1.- Si h, h' son funciones adecuadas y $x \in \mathrm{Dom}\, h \cap \mathrm{Dom}\, h'$ entonces $h(x) = h'(x)$.

Demostración:

$\mathrm{Dom}\, h \cap \mathrm{Dom}\, h' = \{x \in \mathrm{Dom}\, h \,/\, \exists y (y \in \mathrm{Dom}\, h' \wedge x = y)\}$ es Z_0-conjunto por ax. 1.3.5 y 1.9.

Sea $M := \{x \in \mathrm{Dom}\, h \cap \mathrm{Dom}\, h' \,/\, h(x) \neq h'(x)\}$ es Z_0-conj. por ax. 1.3.5

PD. $M = \emptyset$.

Suponer que $M \neq \emptyset$. Como $M \subset A$ y r es bien fundada entonces existe $x_0 \in M$ tal que $r(x_0) \cap M = \emptyset$.

$\therefore$ Si $y \in r(x_0)$ y $y \in \mathrm{Dom}\, h \cap \mathrm{Dom}\, h'$ entonces $h(y) = h'(y)$ pero como $x_0 \in \mathrm{Dom}\, h \cap \mathrm{Dom}\, h'$ entonces (pues h y h' son adecuadas) $r(x_0) \subset \mathrm{Dom}\, h \cap \mathrm{Dom}\, h'$.

$\therefore$ Para toda $y \in r(x_0)$ entonces $h(y) = h'(y)$

$$\therefore \quad (\wp h \circ r)(x_0) = \wp h(r(x_0)) = \{w \in B \,/\, \exists y (y \in r(x_0) \wedge w = h(y))\}$$
$$= \{w \in B \,/\, \exists y (y \in r(x_0) \wedge w = h'(y))\}$$
$$:= (\wp h' \circ r)(x_0)$$

$\therefore$ (h, h' adecuadas)

$$h(x_0) = (g \circ \wp h \circ r)(x_0) = g((\wp h \circ r)(x_0)) = g((\wp h' \circ r)(x_0)) = h'(x_0)$$

$\not\,$ (pues $h(x_0) \neq h'(x_0)$)

$\therefore$ $M = \emptyset$ $\quad\therefore$ Para toda $x \in \mathrm{Dom}\, h \cap \mathrm{Dom}\, h'$, $h(x) = h'(x)$.

Lema 2.- Sea $r : A \to \wp A$ relación bien fundada, $g : \wp B \to B$ dados, entonces para toda $a \in A$ existe $h : A \to B$ función adecuada tal que $a \in \mathrm{Dom}\, h$.

Demostración

Sea $N := \{a \in A \,/\, \exists h (h \in \wp(A \times B) \wedge a \in \mathrm{Dom}\, h \wedge \mathrm{Dom}\, h \subset A \wedge \forall x (x \in \mathrm{Dom}\, h \Rightarrow r(x) \subset \mathrm{Dom}\, h) \wedge \forall x (x \in \mathrm{Dom}\, h \Rightarrow h(x) = (g \circ \wp h \circ r)(x))\}$

es Z_0-conj. por ax. 1.3.5 y $N \subset A$.

PD. $r^{-1}[\wp N] \subset N$

Sea $x \in r^{-1}[\wp N]$ entonces $r(x) \subset N$

$\therefore$ Para toda $y \in r(x)$, existe h_y función adecuada tal que $y \in \operatorname{Dom} h_y$.

Se utilizará "h es adecuada" en lugar de la Z_0-fórmula $\operatorname{Dom} h \subset A \wedge \forall z (z \in \operatorname{Dom} h \Rightarrow r(z) \subset \operatorname{Dom} h \wedge h(z) = (g \circ \wp h \circ r)(z))$,

se define $\mathbb{X} := \{h \in \wp(A \times B) / h$ es adecuada $\wedge \operatorname{Dom} h \cap r(x) \neq \phi\}$

es Z_0-conj. por ax. 1.3.5.

Se define $F := \bigcup \mathbb{X} = \{u \in A \times B / \exists h (h \in \mathbb{X} \wedge u \in h)\}$, es Z_0-conj. por ax. 1.3.4.

PD. F es adecuada.

PD. F es función.

$\operatorname{Dom} F = \bigcup \{L \in \wp A / \exists h (h \in \mathbb{X} \wedge L = \operatorname{Dom} h)\}$

$= \{a \in A / \exists h (h \in \mathbb{X} \wedge a \in \operatorname{Dom} h)\}$ es Z_0-conj. (por 1.3.5, 1.3.4.)

$\therefore \operatorname{Dom} F \subset A$

PD. Si $a \in \operatorname{Dom} F$ entonces existe un único $b \in B$ tal que $(a,b) \in F$

Sea $a \in \operatorname{Dom} F$ entonces existe $h \in \mathbb{X}$ tal que $a \in \operatorname{Dom} h$

$\therefore$ Existe $b \in B$ tal que $(a,b) \in h$. $\therefore (a,b) \in F$.

PD. b es única.

Lo que se tiene por ser h función que si $a \in \operatorname{Dom} h$ entonces $h(a)$ es única, con $(a, h(a)) \in h$.

P.D. Si existe $h' \in \mathbb{X}$ tal que $a \in \operatorname{Dom} h'$ entonces $h(a) = h'(a)$

Pero como h, h' son adecuadas y $a \in \operatorname{Dom} h \cap \operatorname{Dom} h'$ entonces (lema 1) $h(a) = h'(a)$

$\therefore$ F es función.

Sea $a \in \operatorname{Dom} F$ P.D. $r(a) \subset \operatorname{Dom} F$

Si $a \in \operatorname{Dom} F$ entonces existe $h \in \mathbb{X}$ tal que $a \in \operatorname{Dom} h$

$\therefore$ (por ser h adecuada) $r(a) \subset \operatorname{Dom} h \subset \operatorname{Dom} F$.

PD. Si $a \in \operatorname{Dom} F$ entonces $F(a) = (g \circ \wp F \circ r)(a)$

Si $a \in \operatorname{Dom} F$ entonces existe $h \in \mathfrak{X}$ tal que $a \in \operatorname{Dom} h$ entonces (pues $h \in \mathfrak{X}$) $h(a) = (g \circ \wp h \circ r)(a)$
pero por definición de F, $F(a) = h(a) = (g \circ \wp h \circ r)(a) = (g \circ \wp F \circ r)(a)$

$\therefore$ F es adecuada.

Se define $H := F \cup \{(x, (g \circ \wp F \circ r)(x))\}$ es Z_0-conjunto, pues F lo es y $\{(x, (g \circ \wp F \circ r)(x))\} = \{\{x\}, \{x, (g \circ \wp F \circ r)(x)\}\}$ donde $\{x\} = \{u \in A \,/\, u = x\}$ y $\{(g \circ \wp F \circ r)(x)\} = \{u \in B \,/\, u = (g \circ \wp F \circ r)(x)\}$ son Z_0-conj. por 1.3.5 y por 1.3.2 ; aplicado varias veces se tiene que $\{(x, (g \circ \wp F \circ r)(x))\}$ es Z_0-conj.

PD. H es adecuada.

H es función pues F lo es y para x existe una única $b = (g \circ \wp F \circ r)(x)$ tal que $(x, b) \in H$.

$\operatorname{Dom} H = \operatorname{Dom} F \cup \{x\} \subset A$.

Sea $a \in \operatorname{Dom} H$. PD $r(a) \subset \operatorname{Dom} H$.

Caso 1.- Si $a \in \operatorname{Dom} F$ entonces $r(a) \subset \operatorname{Dom} F \subset \operatorname{Dom} H$.

Caso 2.- Si $a = x$ entonces (por definición de F) $r(a) \subset \operatorname{Dom} F \subset \operatorname{Dom} H$.
pues para todo $y \in r(x)$ existe $h \in \mathfrak{X}$ tal que $y \in \operatorname{Dom} h \subset \operatorname{Dom} F$
$\therefore y \in \operatorname{Dom} F$.

Sea $a \in \operatorname{Dom} H$ PD. $H(a) = (g \circ \wp H \circ r)(a)$

Caso 1.- Si $a \in \operatorname{Dom} F$ entonces $H(a) = F(a) = (g \circ \wp F \circ r)(a) = (g \circ \wp H \circ r)(a)$

Caso 2.- Si $a = x$ entonces $H(a) = (g \circ \wp F \circ r)(x) := (g \circ \wp H \circ r)(x)$

$\therefore$ H es adecuada y $x \in \operatorname{Dom} H$.

$\therefore$ Para toda $x \in A$ existe H función adecuada tal que $x \in \operatorname{Dom} H$.

$\therefore x \in N$ $\quad \therefore r^{-1}[\wp N] \subset N$

$\therefore$ (por ser r bien fundada) $N = A$.

$\therefore$ Para todo $x \in A$ existe H función adecuada tal que $x \in \mathrm{Dom}\, H$.

Recuerdo lo que se quiere demostrar: Si $A \xrightarrow{r} \wp A$ es bien fundada y $g : \wp B \to B$ función. PD. Existe una única función $f : A \to B$ tal que $g \circ \wp f \circ r = f$

Se define $f := \bigcup \{ h \in \wp(A \times B) \,/\, h \text{ es adecuada} \wedge \mathrm{Dom}\, h \cap A \neq \emptyset \}$

PD. f es función.

Como (por lema 2) para todo $x \in A$ existe una función h adecuada tal que $x \in \mathrm{Dom}\, h$, entonces f es una función de A en B.

Sea $x \in A$ entonces existe h adecuada tal que $x \in \mathrm{Dom}\, h$

$\therefore$ (por definición de f) $(x, h(x)) \in f$, como h es función, $h(x)$ es única, definiendo $f(x) = h(x)$

Y si existe h' adecuada tal que $x \in \mathrm{Dom}\, h'$, entonces $x \in \mathrm{Dom}\, h \cap \mathrm{Dom}\, h'$ $\therefore$ (por lema 1) $h(x) = h'(x)$.

$\therefore$ Para toda $x \in A$, existe una única $b = f(x) \in B$ tal que $(x, b) \in f$.

PD: $g \circ \wp f \circ r = f$

Basta demostrar que para toda $a \in A$, $(g \circ \wp f \circ r)(a) = f(a)$

Pero $f(a) = h(a)$, donde h es adecuada y $a \in \mathrm{Dom}\, h$.

$\therefore$ $f(a) := h(a) = (g \circ \wp h \circ r)(a) := (g \circ \wp f \circ r)(a)$

$\therefore$ $g \circ \wp f \circ r = f$

<u>sólo si)</u> Sea $A \xrightarrow{r} \wp A$ una relación que cumple la propiedad universal de recursión. PD. r es bien fundada.

Sea $B := \{0,1\}$ donde $0 := \emptyset$ y $1 := \{\emptyset\}$, B es Zo-conjunto por axiomas 1.3.1, 1.3.2.

Sea $g : \wp B \longrightarrow B$ la función definida por:

$$g = \{(X,b) \in \wp B \times B \,/\, b = 1 \iff X = \emptyset \vee X = \{1\}\}$$

por definición g es función.

$\therefore$ (por propiedad universal de recursión) Existe una única función $f : A \longrightarrow B$ tal que $g \circ \wp f \circ r = f$.

Sea $M := \{a \in A \,/\, f(a) = 1\} \subset A$, M es Zo-conjunto por 1.3.5.

PD. $M = r^{-1}[\wp M]$.

$\subset$) Sea $x \in M$ entonces $1 = f(x) = (g \circ \wp f \circ r)(x) = g((\wp f \circ r)(x))$
$= g(\{b \in B / \exists y (y \in r(x) \wedge b = f(y))\})$

$\therefore \{b \in B / \exists y (y \in r(x) \wedge b = f(y))\} := f[r(x)] = \begin{cases} \emptyset \text{ ó} \\ \{1\} \end{cases}$

Si $f[r(x)] = \emptyset$ entonces $r(x) = \emptyset \subset M$

Si $f[r(x)] = \{1\}$ entonces para todo $y \in r(x)$, $f(y) = 1$

$\therefore r(x) \subset M \quad \therefore r(x) \in \wp M \quad \therefore x \in r^{-1}[\wp M]$

$\therefore M \subset r^{-1}[\wp M]$

$\supset$) Sea $x \in r^{-1}[\wp M]$ entonces $r(x) \subset M$.

Tenemos que $\quad f(x) = (g \circ \wp f \circ r)(x) = g(f[r(x)]) \underset{r(x) \subset M}{=} g(\{1\}) := 1$

$\therefore f(x) = 1 \quad \therefore x \in M \quad \therefore r^{-1}[\wp M] \subset M$

$\therefore M = r^{-1}[\wp M]$

PD $M \subset A$ es el único subconjunto de A tal que $r^{-1}[\wp M] = M$.
Suponer que existe $M' \subset A$ tal que $r^{-1}[\wp M'] = M'$
Se define $\bar{f}$ función como:

$$\bar{f} := \{(a,b) \in A \times B \,/\, (b=1 \iff a \in M') \wedge (b=0 \iff a \notin M')\}$$

(i.e. $\bar{f}$ es la "función característica" de M')
Por definición $\bar{f}$ es función.
PD. $\bar{f} = g \circ \wp\bar{f} \circ r$ Como ambas son funciones basta ver que para cada elemento de A las imágenes coinciden.
Sea $x \in A$
Caso 1.- Si $x \in M'$ entonces $\bar{f}(x) = 1$
Como $M' = r^{-1}[\wp M']$ entonces $r(x) \subset M'$

$\therefore$ $r(x) = \emptyset$ o para toda $y \in r(x)$ $\bar{f}(y) = 1$

$\therefore$ $\bar{f}[r(x)] = \emptyset$ si $r(x) = \emptyset$ ó $\bar{f}[r(x)] = \{1\}$ si $r(x) \neq \emptyset$

$\therefore$ $(g \circ \wp\bar{f} \circ r)(x) = g(\bar{f}[r(x)]) = 1$ en ambos casos

$\therefore$ $\bar{f}(x) = (g \circ \wp\bar{f} \circ r)(x)$

Caso 2.- Si $x \notin M'$ entonces $\bar{f}(x) = 0$ y $r(x) \not\subset M'$

$\therefore$ $\bar{f}[r(x)] = \{0\}$ si $r(x) \cap M' = \emptyset$

ó $\bar{f}[r(x)] = \{0,1\}$ si $r(x) \cap M' \neq \emptyset$

$\therefore$ $(g \circ \wp\bar{f} \circ r)(x) = g(\bar{f}[r(x)]) = 0 = \bar{f}(x)$

$\therefore$ $g \circ \wp\bar{f} \circ r = \bar{f}$

Pero f es la única tal que $g \circ \wp f \circ r = f$

$\therefore$ $f = \bar{f}$

Pero $M = \{a \in A \,/\, f(a) = 1\} = \{a \in A \,/\, \bar{f}(a) = 1\} = M'$

$\therefore$ $M = M'$

Sea $h: A \longrightarrow B$ definida como $h = \{u \in A \times B / \exists a (a \in A \wedge u = (a, 1))\}$

Por definición h es función.

PD $h = g \circ \wp h \circ r$

Sea $x \in A$ $\therefore$ $h(x) = 1$

$(g \circ \wp h \circ r)(x) = g(h[r(x)]) = g(\phi) = 1$ si $r(x) = \phi$

o $(g \circ \wp h \circ r)(x) = g(h[r(x)]) = g(\{1\}) = 1$ si $r(x) \neq \phi$

$\therefore$ $h = g \circ \wp h \circ r$

$\therefore$ (por la unicidad de f) $h = f$

$\therefore$ $M = \{a \in A \,/\, f(a) = 1\} = \{a \in A \,/\, h(a) = 1\} = A$

$\therefore$ $M = A$

$\therefore$ El único subconjunto M de A tal que $r^{-1}[\wp M] = M$ es A.

Ahora algunas definiciones:

i) Una relación $R: A \longrightarrow \wp A$ es <u>transitiva</u> sí y sólo si para todo $a, a', a'' \in A$ tal que $a \in R(a')$ y $a' \in R(a'')$ entonces $a \in R(a'')$.

ii) Sean $R, R': A \longrightarrow \wp A$ relaciones, se dice que $R \subset R'$ sí y sólo si para todo $a \in A$, $R(a) \subset R'(a)$.

Como en otras secciones, se abreviará, "G es función", con $A \xrightarrow{G} B$, como la Z_0-fórmula: $G \in \wp(A \times B) \wedge \forall a (a \in A \Rightarrow \exists b (b \in B \wedge (a, b) \in G \wedge \forall b' (b' \in B \wedge (a, b') \in G) \Rightarrow b = b')$.

Sea $C := \{R \in \wp(A \times \wp A) / R$ es función $\wedge \forall (a, (a', a''))\, ((a, (a', a'')) \in A \times (A \times A) \Rightarrow (a \in R(a') \wedge a' \in R(a'') \Rightarrow a \in R(a''))) \wedge r \subset R\}$ es Z_0-conjunto por axioma 1.3.5 y $C \neq \phi$ porque $\tilde{R}: A \longrightarrow \wp A$ definida como $\tilde{R} = \{u \in A \times \wp A / \exists a (a \in A \wedge u = (a, A))\}$ es relación transitiva y $r \subset \tilde{R}$.

Se define $F: A \to \wp A$ como:

$F := \{u \in A \times \wp A \,/\, \exists a(a \in A \wedge u = (a, \bigcap\{R(a) \in \wp A \,/\, R \in C\})\}$

PD. F es relación transitiva y $r \subset F$.

1º PD $\bigcap\{R(a) \in \wp A \,/\, R \in C\} \in \wp A$.

$\bigcap\{R(a) \in \wp A \,/\, R \in C\} = \{x \in A \,/\, \forall R(R \in C \Rightarrow x \in R(a)\} \subset A$
y es Z_0-conj. por ax 1.3.5.

$\therefore$ F está bien definida y es función.

2º Sean $a, a', a'' \in A$ tal que $a \in F(a')$ y $a' \in F(a'')$.
PD. $a \in F(a'')$

Si $a \in F(a')$ entonces $a \in R(a')$ para toda $R \in C$ y si $a' \in F(a'')$ entonces $a' \in R(a'')$ para toda $R \in C$.
Como R es transitiva para toda $R \in C$ entonces $a \in R(a'')$ para toda $R \in C$ $\therefore$ $a \in F(a'')$

$\therefore$ F es relación transitiva.

3º $r \subset F$ Sea $a \in A$ como para toda $R \in C$, $r(a) \subset R(a)$
$\therefore$ $r(a) \subset F(a)$.

Ahora vamos a demostrar lo que se quiere, tenemos $A \xrightarrow{r} \wp A$ una relación que tiene la propiedad universal de recursión. PD r es bien fundada

Sea $N \subset A$ tal que $r^{-1}[\wp N] \subset N$ PD $N = A$.

Se define: $M := F^{-1}[\wp N] \subset A$.

PD. i) $M \subset N$
ii) $r^{-1}[\wp M] = M$

i) Sea $x \in M$ entonces $F(x) \subset N$
$\therefore (r \subset F)$ $r(x) \subset F(x) \subset N$ $\therefore$ $r(x) \in \wp N$ $\therefore$ $x \in r^{-1}[\wp N]$.
$\therefore (r^{-1}[\wp N] \subset N)$ $M \subset N$

ii) PD. $r^{-1}[\wp M] = M$

$\supset$) Sea $x \in M = \bar{r}^{-1}[\wp N]$ PD. $r(x) \subset M$ ie. $x \in r^{-1}[\wp M]$.

Sea $y \in r(x)$ como $r(x) \subset \bar{r}(x)$ entonces $y \in \bar{r}(x)$

$\therefore$ ($\bar{r}$ transitiva) $\bar{r}(y) \subset \bar{r}(x)$ y como $x \in M := \bar{r}^{-1}[\wp N]$ entonces $\bar{r}(x) \subset N$ $\therefore$ $\bar{r}(y) \subset N$ Para toda $y \in r(x)$

$\therefore$ $y \in \bar{r}^{-1}[\wp N] = M$ para toda $y \in r(x)$

$\therefore$ $r(x) \subset M$.

$\subset$) Sea $x \in r^{-1}[\wp M]$ entonces $r(x) \subset M := \bar{r}^{-1}[\wp N]$

PD. $x \in M$ ie. $\bar{r}(x) \subset N$

Sea $y \in \bar{r}(x)$

1º Se demostrará que si $a \in A$ entonces para toda $z \in \bar{r}(a)$ existe $w \in r(a)$ tal que $z \in \bar{r}(w)$ o $w = z$.

ie. $\bar{r}(a) = \cup\{\bar{r}(b) / b \in r(a)\} \cup r(a) = \{b' \in A / \exists b (b \in r(a) \wedge b' \in \bar{r}(b)\} \cup r(a)$

Sea $\Delta : A \longrightarrow \wp A$ la relación definida como: Sea $a \in A$ fijo

$\bar{\bar{r}} := \{(u, y) \in A \times \wp A / (y = \bar{r}(u) \Leftrightarrow u \neq a) \wedge (y = \cup\{\bar{r}(b) / b \in r(a)\} \cup r(a) \Leftrightarrow u = a)\}$

Por definición $\bar{\bar{r}}$ es función.

PD. $\bar{\bar{r}}$ es transitiva. Sea $u, u', u'' \in A$ tal que $u \in \bar{\bar{r}}(u')$ y $u' \in \bar{\bar{r}}(u'')$. PD. $u \in \bar{\bar{r}}(u'')$

Caso 1.- Si $u' \neq a \neq u''$ entonces $\bar{\bar{r}}(u') = \bar{r}(u')$ y $\bar{\bar{r}}(u'') = \bar{r}(u'')$.

Como $\bar{r}$ es transitiva y $u \in \bar{r}(u')$ y $u' \in \bar{r}(u'')$ entonces $u \in \bar{r}(u'') = \bar{\bar{r}}(u'')$

Caso 2.- Si $u' = a \neq u''$ entonces $\bar{\bar{r}}(u') = \cup\{\bar{r}(b) / b \in r(a)\} \cup r(a) = \bar{r}(a)$

2.1 Si $u \in \cup\{\bar{r}(b) / b \in r(a)\}$ y $u' \in \bar{\bar{r}}(u'') = \bar{r}(u'')$, entonces existe $b \in r(a)$ tal que $u \in \bar{r}(b)$ y $u' = a \in \bar{r}(u'')$

$\therefore$ ($\bar{r}$ transitivo y $b \in r(a) \subset \bar{r}(a)$) $u \in \bar{r}(b) \subset \bar{r}(a)$ y $a \in \bar{r}(u'')$

$\therefore$ ($\bar{r}$ transitivo) $u \in \bar{r}(u'') = \bar{\bar{r}}(u'')$

2.2 Si $u \in r(a)$ y $a \in \bar{r}(u'')$ como $r(a) \subset \bar{r}(a)$ y $\bar{r}$ es transitivo entonces $u \in \bar{r}(u'')$.

Caso 3.- Si $u' \neq a = u''$ entonces $\bar{\bar{r}}(u') = \bar{r}(u')$ y $\bar{\bar{r}}(u'') = \bar{\bar{r}}(a)$.

3.1 Si $u \in \bar{r}(u')$ y $u' \in \cup\{\bar{r}(b) / b \in r(a)\}$ entonces existe $b \in r(a)$ tal que $u' \in \bar{r}(b)$.

$\therefore$ $u \in \bar{r}(u')$ y $u' \in \bar{r}(b)$ con $b \in r(a)$

$\therefore$ ($\bar{r}$ es transitiva) $u \in \bar{r}(b)$ con $b \in r(a)$ $\therefore$ $u \in \bar{\bar{r}}(a)$

3.2 Si $u \in \bar{r}(u')$ y $u' \in r(a)$ entonces $\bar{r}(u') \subset \cup\{\bar{r}(b) / b \in r(a)\}$

$\therefore$ $u \in \bar{\bar{r}}(a)$

Caso 4.- Si $u' = a = u''$ entonces $\bar{\bar{r}}(u') = \bar{\bar{r}}(u'') = \bar{\bar{r}}(a)$

Como $u \in \bar{\bar{r}}(u') = \bar{\bar{r}}(u'')$ entonces $u \in \bar{\bar{r}}(u'')$

$\therefore$ $\bar{\bar{r}}$ es relación transitiva

$r \subset \bar{\bar{r}}$ porque para $x \in A$. $\bar{\bar{r}}(x) = \bar{r}(x)$ si $x \neq a$ o
$\bar{\bar{r}}(x) = \bigcup\{\bar{r}(b) / b \in r(a)\} \cup r(a)$ si $x = a$.

$\therefore \bar{\bar{r}} \in C$

$\therefore \bar{r} \subset \bar{\bar{r}}$ pues si $x \in A$ $\bar{r}(x) = \bigcap\{R(x) \in \wp A / R \in C\} \subset \bar{\bar{r}}(x)$
pero por definición de $\bar{\bar{r}}$ tenemos que $\bar{\bar{r}} \subset \bar{r}$

$\therefore \bar{r} = \bar{\bar{r}}$

$\therefore \bar{r}(a) = \bar{\bar{r}}(a) = \bigcup\{\bar{r}(b) / b \in r(a)\} \cup r(a)$ para toda $a \in A$.

Ésto se demostró porque se quiere ver que $r^{-1}[\wp M] \subset M$.

PD. Si $x \in r^{-1}[\wp M]$ entonces $x \in M := \bar{r}^{-1}[\wp N]$, i.e. $\bar{r}(x) \subset N$.

Sea $y \in \bar{r}(x)$ entonces (por lo anterior) existe $b \in r(x)$ tal que
$y \in \bar{r}(b)$ o $y = b$

Como $\bar{r}(x) \subset N$, $b \in r(x) \subset \bar{r}(x)$ y $\bar{r}$ es transitiva entonces
$\bar{r}(b) \subset N$.

Por lo tanto si $y \in \bar{r}(b)$ entonces $y \in N$ y si $y = b$ entonces
$y \in r(x) \subset \bar{r}(x) \subset M$ (por hipótesis).

$\therefore$ (como $M \subset N$) en ambos casos $y \in N$, para toda $y \in \bar{r}(x)$

$\therefore$ $\bar{r}(x) \subset N$

$\therefore$ $x \in \bar{r}^{-1}[\wp N] := M$

$\therefore$ $r^{-1}[\wp M] = M$ y $M \subset A$.

Pero A es el único subconjunto de A tal que $r^{-1}[\wp A] = A$

$\therefore$ $M = A$

Como $M \subset N \subset A$ entonces $N = A$.

$\therefore$ Si $N \subset A$ tal que $r^{-1}[\wp N] \subset N$ entonces $N = A$

$\therefore$ r es bien fundada

$\square$.

La relación $\in$ en un conjunto transitivo respecto al morfismo inclusión $T \hookrightarrow \wp T$ es extensional (porque la inclusión es mono) y bien fundada (por el axioma de regularidad (1.4)).

4.2. Nota. En Z.F. se tiene que cualquier relación, $A \xrightarrow{r} \wp A$, extensional y bien fundada es isomorfa a la relación $\in \restriction T$ en un conjunto transitivo T. i.e. existe una biyección f tal que

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & T \\ r \downarrow & & \downarrow \\ \wp A & \xrightarrow[\wp f]{} & \wp T \end{array}$$

conmuta.

No se demostrará ya que en este trabajo sólo se estará trabajando en una teoría menos fuerte, Z_1 que se introducirá después.

Con 4.1 y 4.2 se tiene una caracterización completa de la relación $\in$ en conjuntos transitivos; ahora se dará una descripción de los morfismos inclusión entre conjuntos transitivos:

<u>4.3.</u> Proposición en Z_0.

Para conjuntos transitivos T, T' y un morfismo $T \xrightarrow{f} T'$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & T' \arrow[d, hook] \\ \wp T \arrow[r, "\wp f"'] & \wp T' \end{tikzcd}$$

conmuta sii $T \subset T'$ y f es el morfismo inclusión

<u>Demostración</u>

<u>si</u>) obvia

<u>sólo si</u>) Sea $f: T \longrightarrow T'$ tal que $\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & T' \arrow[d, hook] \\ \wp T \arrow[r, "\wp f"'] & \wp T' \end{tikzcd}$, conmuta

entonces para toda $x \in T$ se tiene que

$$f(x) = \wp f(x) = f[x] = \{f(y) \in T' \,/\, y \in x\}$$

PD. $f(x) = x$, equivalentemente PD. $C = \{x \in T \,/\, f(x) \neq x\} = \emptyset$

Sabemos (por ax. de regularidad, 1.5) $\in \restriction T$ es bien fundada y como $C \subset T$, si $C \neq \emptyset$ entonces existe $x_0 \in C$ tal que $x_0 \cap C = \emptyset$

Como $x_0 \in C$ entonces $f(x_0) \neq x_0$

$\therefore$ Para toda $y \in x_0$ $f(y) = y$

Pero $f(x_0) = f[x_0] = \{f(y) \in T \,/\, y \in x_0\} = \{y \in T \,/\, y \in x_0\} = x_0$

$\therefore f(x_0) = x_0$ ¡ $(x_0 \in C)$

$\therefore C = \emptyset$

$\therefore$ f es inclusión y $T \subset T'$

$\square$.

Si estuviéramos trabajando en ZF. muchos de los problemas mencionados en la sección 3 se resolverían, en realidad sólo necesitamos el axioma de Reemplazamiento (1.12) y que cualquier conjunto es un subconjunto de un conjunto transitivo, por lo que se preferirá introducirlos como axiomas a Z_0 en lugar de trabajar en ZF.

<u>4.4.</u> Axioma de transitividad (AT)
Cualquier conjunto es un subconjunto de un conjunto transitivo.

Este axioma implica en Z_0 que para cada conjunto A existe el conjunto transitivo más pequeño que contiene a A, llamado la cubierta transitiva de A, $CT(A)$.

<u>4.5.</u> Axioma de Representación Transitiva (ART).
Cualquier relación, $A \xrightarrow{r} PA$, extensional y bien fundada es isomorfa a la relación $\in \restriction T$ en un conjunto transitivo T.

<u>Nota</u>- T está únicamente determinado por r (por 4.3 y 4.4) y es llamado la representación transitiva de r, denotado por $RT(r)$.

Se denotará a la teoría $Z_0 + (AT) + (ART)$ por Z, que es un subsistema de ZF.

Ahora se va a caracterizar la categoría de los Z-conjuntos $Set(Z)$, salvo equivalencias.

§5. El funtor Objeto-Potencia en la teoría de los topos.

Ahora regresamos a la teoría TE, definiremos el funtor-objeto-potencia para introducir en TE los "objetos conjunto-transitivo", que corresponden en la categoría de los conjuntos a los conjuntos transitivos.

Ya hemos visto en Set(Z_0) que si A es un Z_0-conjunto, tenemos una correspondencia biunívoca entre sus subconjuntos (salvo isomorfismos) y las funciones $A \to \Omega$ (i.e. sus característicos). Por lo que podemos llamar a las funciones $A \to \Omega$ "subconjuntos"

También podemos hacer ésto en un topo $\underline{E}$:
Por 2.3 tenemos una correspondencia biunívoca entre los monomorfismos de codominio A (salvo isomorfismos), $B \rightarrowtail A$ - los "subobjetos de A", con los morfismos $A \to \Omega$, por lo tanto a los últimos les podemos llamar los "<u>subobjetos</u> <u>de A</u>" := Sub(A).

Recordemos algunas propiedades de Sub(A):
En Sub(A) definamos un orden parcial (i.e. reflexivo, antisimétrico y transitivo).
Sean $\bar{M}, \bar{N} : A \longrightarrow \Omega$, i.e. $\bar{M}, \bar{N} \in \text{Sub}(A)$
$\bar{M} \subset \bar{N}$ sii $\bar{M} \cap \bar{N} := \wedge \langle \bar{M}, \bar{N} \rangle = \bar{M}$ donde $\wedge = \chi_{\langle v, v \rangle}$
$\subset$ es un orden parcial.
i) Reflexivo. $\bar{M} \subset \bar{M}$
PD $\wedge\langle \bar{M}, \bar{M} \rangle = \bar{M}$
Sea $M \overset{m}{\rightarrowtail} A$ el monomorfismo tal que $\chi_m = \bar{M}$, entonces se tiene:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "!_C"'] & & \\
& M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "!_M"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & A \arrow[d, "{\langle \bar{M}, \bar{M} \rangle}"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "{\langle v, v \rangle}"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \Omega \amalg \Omega \arrow[d, "\wedge"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Basta demostrar que Δ es P.F.
$\langle \bar{M}, \bar{M} \rangle \circ m = \langle \bar{M} \circ m, \bar{M} \circ m \rangle = \langle v_M, v_M \rangle$ pues $\chi_m = \bar{M}$
$\therefore$ Δ conmuta
Sea $C \in \mathcal{O}(\underline{E})$ y $\alpha : C \longrightarrow A$ tal que
$\langle \bar{M}, \bar{M} \rangle \circ \alpha = \langle v, v \rangle \circ !_C = \langle v_C, v_C \rangle$
$\langle \bar{M}\alpha, \bar{M}\alpha \rangle$
entonces $\bar{M}\alpha = v_C = v \circ !_C$ entonces $\exists! \ \varphi : C \longrightarrow M$ tal que $\alpha = m \circ \varphi$ (pues $\bar{M} = \chi_m$)
$\therefore$ Δ es P.F.
$\therefore$ $(m, !_M) = PF(\wedge\langle \bar{M}, \bar{M} \rangle, v)$
entonces (Por la unicidad de los característico) $\wedge\langle \bar{M}, \bar{M} \rangle = \bar{M}$. $\therefore$ $\bar{M} \subset \bar{M}$

ii) Antisimétrica : Sean $\bar{M}, \bar{N} : A \to \Omega$ tales que $\bar{M} \subset \bar{N}$ y $\bar{N} \subset \bar{M}$

PD. $\bar{M} = \bar{N}$

$\bar{M} \subset \bar{N}$ entonces $\wedge\langle \bar{M}, \bar{N}\rangle = \bar{M}$ y

$\bar{N} \subset \bar{M}$ entonces $\wedge\langle \bar{N}, \bar{M}\rangle = \bar{N}$

pero $\bar{M} = \wedge\langle \bar{M}, \bar{N}\rangle = \wedge\langle \bar{N}, \bar{M}\rangle = \bar{N}$, por A.q.e.

$\therefore \bar{M} = \bar{N}$

iii) Transitividad : Sean $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N} : A \to \Omega$ tales que $\bar{L} \subset \bar{M}$ y $\bar{M} \subset \bar{N}$

PD. $\bar{L} \subset \bar{N}$

$\bar{L} \subset \bar{M}$ y $\bar{M} \subset \bar{N}$ entonces $\wedge\langle \bar{L}, \bar{M}\rangle = \bar{L}$ y $\wedge\langle \bar{M}, \bar{N}\rangle = \bar{M}$

entonces $\wedge\langle \bar{L}, \bar{N}\rangle = \wedge\langle \wedge\langle \bar{L}, \bar{M}\rangle, \bar{N}\rangle \underset{(A.q.e.)}{=} \wedge\langle \bar{L}, \wedge\langle \bar{M}, \bar{N}\rangle\rangle = \wedge\langle \bar{L}, \bar{M}\rangle = \bar{L}$

$\therefore \wedge\langle \bar{L}, \bar{N}\rangle = \bar{L}$ $\quad\therefore \bar{L} \subset \bar{N}$

$\therefore \subset$ es un orden parcial.

NOTA: Observemos que $\forall\, \bar{M}, \bar{N} \in Sub(A)$, $\wedge\langle \bar{M}, \bar{N}\rangle = \bar{M} \cap \bar{N} \in Sub(A)$

1.- $(Sub(A), \subset)$ es una latiz , i.e :

1.a) $\subset$ es un orden parcial.

1.b) Para todo $\bar{M}, \bar{N} \in Sub(A)$ existe la máxima cota inferior $(\bar{M} \cap \bar{N})$

1.c) Para todo $\bar{M}, \bar{N} \in Sub(A)$ existe la mínima cota superior $(\bar{M} \cup \bar{N})$

Dem :

1.a) ✓ (es lo anterior)

1.b) Sean $\bar{M}, \bar{N} \in Sub(A)$. P.D. $\bar{M} \cap \bar{N}$ es máxima cota inferior de $\bar{M}$ y $\bar{N}$.

i.e. P.D. $\bar{M} \cap \bar{N} \subset \bar{M}$, $\bar{M} \cap \bar{N} \subset \bar{N}$ y (Para todo $\bar{L} \in Sub(A)$ t.q. $\bar{L} \subset \bar{M}$, $\bar{N} \subset \bar{L}$ entonces $\bar{L} \subset \bar{M} \cap \bar{N}$).

Vamos a demostrar $\wedge\langle \bar{M} \cap \bar{N}, \bar{M}\rangle = \bar{M} \cap \bar{N}$; para $\bar{N}$ es análogo.

$\wedge\langle \bar{M} \cap \bar{N}, \bar{M}\rangle := \wedge\langle \wedge\langle \bar{M}, \bar{N}\rangle, \bar{M}\rangle = \wedge\langle \wedge\langle \bar{N}, \bar{M}\rangle, \bar{M}\rangle = \wedge\langle \bar{N}, \wedge\langle \bar{M}, \bar{M}\rangle\rangle =$

$\underset{\text{reflexiva}}{=} \wedge\langle \bar{N}, \bar{M}\rangle = \wedge\langle \bar{M}, \bar{N}\rangle = \bar{M} \cap \bar{N}$

$\therefore \bar{M} \cap \bar{N} \subset \bar{M}$

$\bar{M} \cap \bar{N} \subset \bar{N}$ (análogo)

Sea $\bar{L} \in Sub(A)$ tal que $\bar{L} \subset \bar{M}$ y $\bar{L} \subset \bar{N}$. P.D. $\bar{L} \subset \bar{M} \cap \bar{N}$

$\wedge\langle \bar{L}, \bar{M} \cap \bar{N}\rangle = \wedge\langle \bar{L}, \wedge\langle \bar{M}, \bar{N}\rangle\rangle = \wedge\langle \wedge\langle \bar{L}, \bar{M}\rangle, \bar{N}\rangle \underset{\bar{L} \subset \bar{M}}{=} \wedge\langle \bar{L}, \bar{N}\rangle \underset{\bar{L} \subset \bar{N}}{=} \bar{L}$

$\therefore \bar{L} \subset \bar{M} \cap \bar{N}$

$\therefore \bar{M}, \bar{N}$ tienen máxima cota inferior

1.c) Sean $\bar{M}, \bar{N} \in Sub(A)$ P.D. $\bar{M} \cup \bar{N} = \vee\langle \bar{M}, \bar{N}\rangle$ es mínima cota superior , donde $\vee = \chi_{Im([\langle v_\Omega, Id_\Omega\rangle, \langle Id_\Omega, v_\Omega\rangle])}$.

P.D. $\bar{M} \subset \bar{M}\cup\bar{N}$, $\bar{N} \subset \bar{M}\cup\bar{N}$ y (Para todo $\bar{L} \in Sub(A)$ tal que $\bar{M}\subset\bar{L}$ y $\bar{N}\subset\bar{L}$ entonces $\bar{M}\cup\bar{N} \subset \bar{L}$).

Recuerdo : $Im([\langle v_\Omega, Id_\Omega\rangle, \langle Id_\Omega, v_\Omega\rangle])$ es el monomorfismo de la **epi-mono** factorización de $[\langle v_\Omega, Id_\Omega\rangle, \langle Id_\Omega, v_\Omega\rangle]$.

Por facilidad se denotará a $[\langle v_\Omega, Id_\Omega\rangle, \langle Id_\Omega, v_\Omega\rangle] := \pi$

1º P.D. $P.F(\langle v_\Omega, Id_\Omega\rangle, \langle \bar{M},\bar{N}\rangle) = (\bar{N}\circ m, m)$

$P.F(\langle Id_\Omega, v_\Omega\rangle, \langle \bar{M},\bar{N}\rangle) = (\bar{M}\circ n, n)$

En diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, dashed, "\beta"'] & & \\
& M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "\bar{N}\circ m"'] & A \arrow[d, "\langle \bar{M},\bar{N}\rangle"] \\
& \Omega \arrow[r, "\langle v_\Omega, Id_\Omega\rangle"'] & \Omega\pi\Omega
\end{tikzcd}$$

$\langle \bar{M},\bar{N}\rangle\circ m = \langle \bar{M}\circ m, \bar{N}\circ m\rangle = \langle v_M, \bar{N}\circ m\rangle = \langle v_\Omega\circ\bar{N}\circ m, Id_\Omega\circ\bar{N}\circ m\rangle =$

$= \langle v_\Omega, Id_\Omega\rangle\circ\bar{N}\circ m$

$\therefore$ Conmuta el diagrama

Sean $\alpha : C \to A$ y $\beta : C \to \Omega$ morfismos tales que

$\langle v_\Omega, Id_\Omega\rangle\circ\beta = \langle \bar{M},\bar{N}\rangle\circ\alpha$

entonces $\langle v_C, \beta\rangle = \langle \bar{M}\circ\alpha, \bar{N}\circ\alpha\rangle$ donde $v_C := v\circ !_C$

entonces $v_C = \bar{M}\circ\alpha$ y $\beta = \bar{N}\circ\alpha$

entonces (por ser $\bar{M} = \chi_m$) existe una única $\varphi : C \to M$ tal que

$m\circ\varphi = \alpha$

Falta demostrar que $\bar{N}\circ m\circ\varphi = \beta$, pero

$\bar{N}\circ(m\circ\varphi) = \bar{N}\circ\alpha = \beta$

y φ es única porque m es mono.

$\therefore$ el diagrama es P.F.

Análogamente se demuestra que $P.F.(\langle Id_\Omega, v_\Omega\rangle, \langle \bar{M},\bar{N}\rangle) = (\bar{N}\circ n, n)$ entonces, por A.13.1 se tiene que

$$\begin{tikzcd}
M\amalg N \arrow[r, "{[m,n]}"] \arrow[d, "(\bar{N}\circ m)\amalg(\bar{M}\circ n)"'] & A \arrow[d, "\langle \bar{M},\bar{N}\rangle"] \\
\Omega\amalg\Omega \arrow[r, "\pi"'] & \Omega\pi\Omega
\end{tikzcd}$$ es P.F.

Por A.10.f.. se tiene:

$$\begin{tikzcd} M \amalg N \arrow[r, two heads, "([m,n])^*"] \arrow[d, "(\bar{N}\circ m)\amalg(\bar{M}\circ n)"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & {} \arrow[r, tail, "Im([m,n])"] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \arrow[d, dashed, "\langle \bar{M},\bar{N}\rangle"] \\ \Omega\amalg\Omega \arrow[r, two heads, "(\pi)^*"'] & {} \arrow[r, tail, "Im(\pi)"'] & \Omega\Pi\Omega \end{tikzcd}$$

y como $V := \chi_{Im(\pi)}$ tenemos que

$$\begin{tikzcd} M\cup N \arrow[r, tail, "Im([m,n])"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \arrow[d, "\langle \bar{M},\bar{N}\rangle"] \\ {} \arrow[r, tail, "Im(\pi)"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & \Omega\Pi\Omega \arrow[d, dashed, "V"] \\ 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

$\therefore \quad \bar{M}\cup\bar{N} = \chi_{Im([m,n])}$

Pero se sabe que $m = [m,n]\circ i_M = Im([m,n])\circ([m,n])^*\circ i_M$ y
$n = [m,n]\, i_N = Im([m,n])\circ([m,n])^*\circ i_N$

i.e. m y n se factorizan a través de $Im([m,n])$

$\therefore \; \bar{M}\subset\bar{M}\cup\bar{N}$ y $\bar{N}\subset\bar{M}\cup\bar{N}$.

Sea $\bar{L}: A\longrightarrow\Omega$, $\bar{L}=\chi_\ell$, $\ell: L\rightarrowtail A$ tal que $\bar{M}\subset\bar{L}$ y $\bar{N}\subset\bar{L}$

PD $\bar{M}\cup\bar{N}\subset\bar{L}$

Como $\bar{M}\subset\bar{L}$ y $\bar{N}\subset\bar{L}$ entonces existen $\lambda: M\longrightarrow L$ y $\lambda': N\longrightarrow L$ tales que $m=\ell\circ\lambda$ y $n=\ell\circ\lambda'$

entonces $[m,n] = [\ell\lambda, \ell\circ\lambda'] = \ell\circ[\lambda,\lambda'] = (\ell\circ Im([\lambda,\lambda']))\circ([\lambda,\lambda'])^*$

Como $\ell\circ Im([\lambda,\lambda'])$ es mono y $([\lambda,\lambda'])^*$ es epi, entonces $\ell\circ Im([\lambda,\lambda'])$ es isomorfo a $Im([m,n])$

$\therefore \; Im([m,n])$ se factoriza a través de ℓ

$\therefore \; (\bar{M}\cup\bar{N} = \chi_{Im([m,n])}) \quad \bar{M}\cup\bar{N}\subset\bar{L}$

$\therefore \; \bar{M}\cup\bar{N}$ es la mínima cota superior de $\bar{M}$ y $\bar{N}$.

$\therefore \; (Sub(A), \subset)$ es una latiz.

2.- $(Sub(A), \subset)$ es un álgebra de Heyting, i.e.:

2.a) $(Sub(A), \subset)$ es latiz

2.b) Para todo $\bar{M}, \bar{N} \in Sub(A)$ existe el seudocomplemento de $\bar{M}$ relativo a $\bar{N}$ ($\bar{M} \Rightarrow \bar{N}$).

2.3) $(Sub(A), \subset)$ tiene mínimo $0(A) := \chi_{0_A}$ y máximo $1(A) := \chi_{1d_A}$.

<u>Demostración</u>:

2.a) $(Sub(A), \subset)$ es latiz (por 1)

2.b) Sean $\bar{M}, \bar{N} : A \longrightarrow \Omega$. PD. Existe $(\bar{M} \Rightarrow \bar{N}) \in Sub(A)$ tal que ($\bar{L} \in Sub(A)$ y $\bar{L} \subset (\bar{M} \Rightarrow \bar{N})$ sii $\bar{M} \cap \bar{L} \subset \bar{N}$)

Vamos a introducir un nuevo "conectivo"

Tomemos el igualador de $\wedge, \pi_{\Omega,\Omega} : \Omega\Pi\Omega \longrightarrow \Omega$, i.e.

$Eq(\wedge, \pi_{\Omega,\Omega}) = (\leq, e : \leq \rightarrowtail \Omega\Pi\Omega)$. Sabemos que e es mono, definamos $\Rightarrow := \chi_e$.

PD. $\Rightarrow \circ \langle \bar{M}, \bar{N} \rangle$ es el seudo-complemento de $\bar{M}$ relativo a $\bar{N}$.

Se define $\bar{M} \Rightarrow \bar{N} := \Rightarrow \circ \langle \bar{M}, \bar{N} \rangle := \chi_{m \Rightarrow n}$, $m \Rightarrow n : M \Rightarrow N \longrightarrow A$.

Sea $\bar{L} : A \longrightarrow \Omega$, $\bar{L} = \chi_l$ y $l : L \rightarrowtail A$.

Por A.9.b.

$\bar{M} \cap \bar{L} \subset \bar{N}$ sii $(\bar{M} \cap \bar{N}) \circ l = \bar{M} \circ l$ sii $\wedge \langle \bar{M} \circ l, \bar{N} \circ l \rangle = \pi_{\Omega,\Omega} \circ \langle \bar{M} \circ l, \bar{N} \circ l \rangle$

Pues
$$\begin{array}{ccc}
\bar{M} \cap \bar{N} \circ l & = & \bar{M} \circ l \\
\parallel & & \parallel \\
\wedge \langle \bar{M}, \bar{N} \rangle \circ l & & \pi_{\Omega,\Omega} \circ \langle \bar{M}, \bar{N} \rangle \circ l \\
\parallel & & \parallel \\
\wedge \langle \bar{M} \circ l, \bar{N} \circ l \rangle & & \pi_{\Omega,\Omega} \circ \langle \bar{M} \circ l, \bar{N} \circ l \rangle
\end{array}$$

Pero como $(\leq, e) = Eq(\wedge, \pi_{\Omega,\Omega})$, tenemos:

$\wedge \langle \bar{M} \circ l, \bar{N} \circ l \rangle = \pi_{\Omega,\Omega} \langle \bar{M} \circ l, \bar{N} \circ l \rangle$ sii existe $\lambda : L \to \leq$ morfismo tal que $e \circ \lambda = \langle \bar{M} \circ l, \bar{N} \circ l \rangle$

Para verlo más claramente, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[drr, tail, bend left, "l"] \arrow[ddr, dashed, bend right, "\lambda"'] & & & \\
& M \Rightarrow N \arrow[r, tail, "m \Rightarrow n"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F. (\square)"] & A \arrow[d, "\langle \bar{M}, \bar{N} \rangle"] & \\
& \leq \arrow[r, tail, "e"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & \Omega\Pi\Omega \arrow[r, shift left, "\wedge"] \arrow[r, shift right, "\pi_{\Omega,\Omega}"'] \arrow[d, "\Rightarrow"] & \Omega \\
& 1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega &
\end{tikzcd}$$

Existe $\lambda : L \longrightarrow (\leq)$ tal que $e \circ \lambda = \langle \bar{M} \circ l, \bar{N} \circ l \rangle$
sii ($(\square)$ es P.F) existe $\varphi : L \longrightarrow M \Rightarrow N$ morfismo tal que $(m \Rightarrow n) \circ \varphi = l$
sii $(\bar{M} \Rightarrow \bar{N} = \chi_{m \Rightarrow n})$ $\quad \bar{L} \subset (\bar{M} \Rightarrow \bar{N})$.

$\therefore$ $\bar{M} \cap \bar{L} \subset \bar{N}$ sii $\bar{L} \subset (\bar{M} \Rightarrow \bar{N})$, con $\bar{L} : A \longrightarrow \Omega$
$\therefore$ $\bar{M} \Rightarrow \bar{N}$ es el seudocomplemento de $\bar{M}$ relativo a $\bar{N}$.

2.3. $(\mathrm{Sub}(A), \subset)$ tiene mínimo $0(A) := \chi_{0_A}$
Sea $\bar{M} \in \mathrm{Sub}(A)$, $\bar{M} = \chi_m$ y $m : M \rightarrowtail A$.
P.D. $0(A) \subset \bar{M}$ $\qquad$ P.D. 0_A se factoriza a través de m
Tomemos 0_M entonces (por ser 0 objeto inicial)
$m \circ 0_M = 0_A$
$\therefore$ $0(A) \subset \bar{M}$ $\qquad$ Para toda $\bar{M} \in \mathrm{Sub}(A)$

$(\mathrm{Sub}(A), \subset)$ tiene máximo $1(A) := \chi_{id_A}$.
Sea $\bar{M} \in \mathrm{Sub}(A)$
PD m se factoriza a través de id_A
Pero $m = id_A \circ m$
$\therefore$ $\bar{M} \subset 1(A)$ $\qquad$ Para toda $\bar{M} \in \mathrm{Sub}(A)$

$\therefore$ $(\mathrm{Sub}(A), \subset)$ es un álgebra de Heyting. $\square$.

Si ahora tenemos un morfismo en $\mathcal{E}$, $A \xrightarrow{f} B$, podemos inducir las operaciones de imagen directa e inversa en los subobjetos de A y B:

1) Para cualquier subobjeto de A, $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega$, denotamos la <u>Imagen directa (existencial) de $\bar{M}$ bajo f</u> por $B \xrightarrow{f[\bar{M}]} \Omega$;

2) Para cualquier subobjeto de B, $B \xrightarrow{\bar{N}} \Omega$, denotamos la <u>Imagen inversa de $\bar{N}$ bajo f</u> por $A \xrightarrow{f^{-1}[\bar{N}]} \Omega$; en donde $f^{-1}[\bar{N}] = \bar{N} \circ f$.

3) Para cualquier subobjeto de A, $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega$, denotamos la <u>Imagen directa universal de $\bar{M}$ bajo f</u> por $B \xrightarrow{f\langle \bar{M} \rangle} \Omega$.

Los anteriores queremos que caractericen y equivalgan en la categoría de conjuntos a:

1) Si $M \subset A$, con función característica $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega$, entonces $f[\bar{M}] = \{ b \in B / \exists a (a \in M \wedge f(a) = b) \}$, i.e. lo que conocemos como la imagen de M.

2) Si $N \subset B$, con función característica $B \xrightarrow{\bar{N}} \Omega$, entonces $f^{-1}[\bar{N}] = \{ a \in A / f(a) \in N \}$

3) Si $M \subset A$, con función característica $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega$, entonces $f\langle \bar{M} \rangle = \{ b \in B / \forall a (a \in A \wedge f(a) = b \Rightarrow a \in M) \}$
i.e. $f\langle \bar{M} \rangle$ es el complemento en B de la imagen directa del complemento en A de M.

Ahora veamos como se construyen:

1) Sea $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega$, un subobjeto de A. Definimos $f[\bar{M}] := \chi_{Im(f \circ m)}$.
i.e. Si $\bar{M} = \chi_m$, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[dr, two heads] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & f(M) \arrow[ur, tail, "Im(f\circ m)"'] & \end{tikzcd}$$

la epi-mono factorización de $f \circ m$

Como $f(M) \xrightarrow{Im(f\circ m)} B$ es mono, entonces existe un único $f[\bar{M}] : B \to \Omega$ tal que

$$\begin{tikzcd} f(M) \arrow[r, tail, "Im(f\circ m)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & B \arrow[d, "f[\bar{M}]"] \\ 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

2) Sea $B \xrightarrow{\bar{N}} \Omega$, un subobjeto de B, como ya dijimos; definimos $f^{-1}[\bar{N}] := \bar{N} \circ f : A \longrightarrow \Omega$

3) Sea $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega$, un subobjeto de A, para poder definir $f\langle \bar{M} \rangle$ tenemos que recordar varias cosas:

Recordemos los funtores Π_f y f^*.

Recuerdo, que estamos en un topos $\mathbb{E}$ y tenemos un morfismo $A \xrightarrow{f} B$.

$\Pi_f : \mathbb{E}/A \longrightarrow \mathbb{E}/B$ es un funtor de $\mathbb{E}/A$ a $\mathbb{E}/B$, las categorías coma

Π_f manda a cada objeto, $X \xrightarrow{\xi} A$, de $\mathbb{E}/A$ en $\Pi_f(X) \xrightarrow{\Pi_f(\xi)} B$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\Pi_f(X) \arrow[r, "\Pi_f(\hat{\varphi})"] \arrow[d, dashed, "\Pi_f(\xi)"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \tilde{X}^A \arrow[d, "\tilde{\xi}^A"] \\
B \arrow[r, "\hat{\varphi}"'] & \tilde{A}^A
\end{tikzcd}$$

i.e. Tomo el P.F. $(\tilde{\xi}^A, \hat{\varphi})$ donde para todo $C \in O(\mathbb{E})$ $(\tilde{C}, \eta_C)$ es el clasificador de morfismos parciales de C.

$\hat{\varphi}$ = adjunto exponencial de φ

$\varphi : B \times A \longrightarrow \tilde{A}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "1d_A"] \arrow[d, "\langle f, 1d_A \rangle"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \arrow[d, "\eta_A"] \\
B \times A \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & \tilde{A}
\end{tikzcd}$$

$\tilde{\xi} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{A}$ es el único morfismo tal que

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\eta_X"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \arrow[d, "\eta_A"] \\
\tilde{X} \arrow[r, dashed, "\tilde{\xi}"'] & \tilde{A}
\end{tikzcd}$$

$\tilde{\xi}^A = \hat{\tilde{\xi}}$ i.e. $e(A, \tilde{A})(\tilde{\xi}^A \times 1d_A) = \tilde{\xi} \circ e(A, \tilde{X})$

y manda a cada morfismo, $\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "x"] \arrow[dr, "\xi"'] & & X' \arrow[dl, "\xi'"] \\ & A & \end{tikzcd}$, de $\mathbb{E}/A$ en

$$\begin{tikzcd}
\Pi_f(X) \arrow[rr, "\Pi_f(x)"] \arrow[dr, "\Pi_f(\xi)"'] & \circlearrowleft & \Pi_f(X') \arrow[dl, "\Pi_f(\xi')"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Por medio de.

$$\begin{tikzcd}
\Pi_f(X) \arrow[dr, dashed, "\Pi_f(x)"] \arrow[drr, bend left, "\tilde{x}^A \circ \Pi_f(\hat{\varphi})"] \arrow[ddr, bend right, "\Pi_f(\xi)"'] & & \\
& \Pi_f(X') \arrow[r, "\Pi'_f(\hat{\varphi})"] \arrow[d, "\Pi_f(\xi')"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \tilde{X}'^A \arrow[d, "\tilde{\xi}'^A"] \\
& B \arrow[r, "\hat{\varphi}"'] & \tilde{A}^A
\end{tikzcd}$$

Ahora el funtor $f^*: \mathcal{E}/B \longrightarrow \mathcal{E}/A$
f^* manda a cada objeto, $Y \xrightarrow{z} B$, de $\mathcal{E}/B$ en $f^*(Y) \xrightarrow{f^*(z)} A$ tal que

$$\begin{tikzcd} f^*(Y) \arrow[r, "f^*(z)"] \arrow[d, "f'_Y"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "z"'] & B \end{tikzcd}$$

i.e. tomo el P.F. (f, z)

y f^* manda a cada morfismo, $\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "z"'] & \arrow[d, phantom, "\Omega"] & Y' \arrow[dl, "z'"] \\ & A & \end{tikzcd}$, de $\mathcal{E}/B$ en

$f^*(y): f^*(Y) \longrightarrow f^*(Y')$ donde

$$\begin{tikzcd} f^*(Y) \arrow[drr, bend left, "f^*(z)"] \arrow[d, phantom, ""] \arrow[ddr, bend right, "y \circ f'_Y"'] & & \\ & f^*(Y') \arrow[r, "f^*(z')"] \arrow[d, "f'_{Y'}"] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \arrow[d, "f"] \\ & Y' \arrow[r, "z'"'] & B \end{tikzcd}$$

i.e. es el único morfismo $\ni$
$f^*(z') \circ f^*(y) = f^*(z)$ y
$f'_{Y'} \circ f^*(y) = y \circ f'_Y$

Π_f y f^* son funtores y además $f^* \dashv \Pi_f$, i.e. Π_f es adjunto derecho de f^*.
Para ver todos los detalles y la demostración de ésto pueden consultar [3].
Por A.18.c Π_f preserva monomorfismos, i.e. si tenemos $M \overset{m}{\rightarrowtail} A$ entonces $\Pi_f(M) \overset{\Pi_f(m)}{\rightarrowtail} B$.

Ya podemos definir la Imagen directa universal:
Sea $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega$ un subobjeto de A, donde $\bar{M} = \chi_m$ y $M \overset{m}{\rightarrowtail} A$.
Definimos $f\langle \bar{M} \rangle := \chi_{\Pi_f(m)}$. $\Pi_f(m)$ es monomorfismo por la observación anterior

Ahora vamos a fijarnos en el funtor f^* y si tenemos $Y \overset{z}{\rightarrowtail} B$ es monomorfismo entonces $f^*(z): f^*(Y) \rightarrowtail A$ monomorfismo y $\chi_{f^*(z)} = f^{-1}[\chi_z]$

i.e. $B \xrightarrow{\bar{N}} \Omega$. subobjeto de B, con $N \overset{n}{\rightarrowtail} B$, $\bar{N} = \chi_n$ entonces $\chi_{f^*(n)} = f^{-1}[\bar{N}]$.

Con todo lo anterior, podemos definir 3 funtores:

Me fijo en las categorías $(\hom(A,\Omega),\subset)$ y $(\hom(B,\Omega),\subset)$ donde:

$\mathcal{O}(\hom(A,\Omega),\subset) = \mathrm{Sub}(A)$. $\subset$ es un orden parcial

Los morfismos en $(\hom(A,\Omega),\subset)$ son:

Sean $\bar{M}, \overline{M'} : A \longrightarrow \Omega$, existe un morfismo de $\bar{M}$ a $\overline{M'}$ si y solo si $\bar{M} \subset \overline{M'}$, i.e. a lo más existe un morfismo entre dos objetos, donde $\bar{M} \subset \overline{M'}$ sii $\wedge\langle \bar{M}, \overline{M'} \rangle = \bar{M}$

Con ésto $(\hom(A,\Omega),\subset)$ es una categoría, pues:

i) Hay composición, por ser $\subset$ transitiva:
$\bar{L}, \bar{M}, \bar{N} : A \longrightarrow \Omega$ tal que $\bar{L} \subset \bar{M}$ y $\bar{M} \subset \bar{N}$ entonces $\bar{L} \subset \bar{N}$

ii) Tiene identidades, pues $\subset$ es reflexiva, i.e. $\forall\, \bar{M} : A \longrightarrow \Omega$ $\bar{M} \subset \bar{M}$ y como a lo más existe un morfismo entre dos objetos claramente son identidades.

iii) La composición es asociativa:
$\bar{K}, \bar{L}, \bar{M}, \bar{N} : A \longrightarrow \Omega$ tal que $\bar{K} \subset \bar{L}$, $\bar{L} \subset \bar{M}$, $\bar{M} \subset \bar{N}$ entonces por la unicidad de los morfismos y transitividad de $\subset$, si es composiciones tienen sentido y empiezan y terminan en el mismo lugar, respectivamente, tienen que ser iguales.

$\therefore$ $(\hom(A,\Omega),\subset)$ es una categoría. Análogamente $(\hom(B,\Omega),\subset)$ es una categoría.

a) Definimos $f[-] : (\hom(A,\Omega),\subset) \longrightarrow (\hom(B,\Omega),\subset)$ como:

Objetos: $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega \longmapsto B \xrightarrow{f[\bar{M}]} \Omega$

Morfismo: $\bar{M} \subset \overline{M'} \longmapsto f[\bar{M}] \subset f[\overline{M'}]$

i.e. basta demostrar que preserva contenciones, para que sea funtor, por la unicidad de los morfismos.

Dem:

Sean $\bar{M}, \bar{N} : A \longrightarrow \Omega$ tal que $\bar{M} \subset \bar{N}$. P.D. $f[\bar{M}] \subset f[\bar{N}]$

$\bar{M} \subset \bar{N}$ sii $\wedge\langle \bar{M}, \bar{N} \rangle = \bar{M}$ donde $\chi_m = \bar{M}$, $\chi_n = \bar{N}$, $M \overset{m}{\rightarrowtail} A$ y $N \overset{n}{\rightarrowtail} A$

i.e.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \arrow[d, "{\langle \bar{M}, \bar{N} \rangle}"] \\
1 \arrow[r, tail, "{\langle v, v \rangle}"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\wedge"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

entonces $\langle \bar{M}, \bar{N} \rangle \circ m = \langle \bar{M}m, \bar{N}m \rangle = \langle v_M, v_M \rangle$ y existe un único $\psi : M \to N$ tal que $n\psi = m$ pues $\bar{N}m = v_M$ ... (#)

Basta demostrar que
$$\begin{tikzcd} f(M) \arrow[r, tail, "\mathrm{Im}(fm)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\boxplus"] & \theta \arrow[d, "\langle f[\bar{M}],\, f[\bar{N}]\rangle"] \\ 1 \arrow[r, tail, "\langle v, v\rangle"'] & \Omega\times\Omega \end{tikzcd}$$
es P.F.

donde $f[\bar{M}] = \chi_{\mathrm{Im}(fm)}$, $f[\bar{N}] = \chi_{\mathrm{Im}(fn)}$ y $mf = \mathrm{Im}(fm)\circ(fm)^*$, $nf = \mathrm{Im}(fn)\circ(fn)^*$ (las epi-mono factorizaciones)

$$f[\bar{M}]\circ \mathrm{Im}(fm) = v_{f(M)} \quad \text{pues } f[\bar{M}] = \chi_{\mathrm{Im}(fm)}$$

$$f[\bar{N}]\circ \mathrm{Im}(fm)\circ(fm)^* = f[\bar{N}]\circ f\circ m \underset{(\#)}{=} f[\bar{N}]\circ f\circ n\circ\psi$$
$$= \big(f[\bar{N}]\circ \mathrm{Im}(fn)\big)\circ(fn)^*\circ\psi = v_{f(N)}\circ(fn)^*\circ\psi$$
$$= v_M = v_{f(M)}\circ(fm)^*$$

$$\therefore\ f[\bar{N}]\circ \mathrm{Im}(fm)\circ(fm)^* = v_{f(M)}\circ(fm)^*$$

$$\underset{\substack{(fm)^*\\ \text{epi}}}{\Rightarrow}\quad f[\bar{N}]\circ \mathrm{Im}(fm) = v_{f(M)}$$

$$\therefore\ \langle f[\bar{M}], f[\bar{N}]\rangle\circ \mathrm{Im}(fm) = \langle v, v\rangle\circ !_{f(M)} \qquad \therefore\ \boxplus \text{ conmuta}$$

Si tenemos $\alpha : C \longrightarrow \theta$ tal que $\langle f[\bar{M}], f[\bar{N}]\rangle\circ\alpha = \langle v, v\rangle\circ !_C$
entonces $\langle f[\bar{M}]\circ\alpha,\ f[\bar{N}]\alpha\rangle = \langle v_C, v_C\rangle$
entonces $f[\bar{M}]\circ\alpha = v_C$, entonces (por ser $f[\bar{M}] = \chi_{\mathrm{Im}(fm)}$)
existe un único $\lambda : C\to f(M)$ tal que $\mathrm{Im}(fm)\circ\lambda = \alpha$

$\therefore\ \boxplus$ es P.F. $\qquad\therefore$

$\therefore\ \wedge\langle f[\bar{M}], f[\bar{N}]\rangle = f[\bar{M}]$

por unicidad de característica

$$\begin{tikzcd} f(M) \arrow[r, tail, "\mathrm{Im}(fm)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \theta \arrow[d, "\langle f[\bar{M}],\, f[\bar{N}]\rangle"] \\ 1 \arrow[r, tail, "\langle v, v\rangle"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\wedge"] \\ 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

$\therefore\ f[\bar{M}] \subset f[\bar{N}]$

$\therefore\ f[-]$ es funtor

b) $f^{-1}[-] : (\hom(B,\Omega), \subset) \longrightarrow (\hom(A,\Omega), \subset)$ un funtor

Objeto: $B \xrightarrow{\bar{N}} \Omega \longmapsto A \xrightarrow{f^{-1}[\bar{N}]} \Omega$

Morfismo: $\bar{N} \subset \bar{L} \longmapsto f^{-1}[\bar{N}] \subset f^{-1}[\bar{L}]$

Como el funtor anterior, basta ver que preserva contenciones.

Sean $\bar{N}, \bar{L} : B \longrightarrow \Omega$ tales que $\bar{N} \subset \bar{L}$. PD. $f^{-1}[\bar{N}] \subset f^{-1}[\bar{L}]$

Sea $\bar{N} = \chi_n$, $\bar{L} = \chi_\ell$ donde $N \xrightarrow{n} B$ y $L \xrightarrow{\ell} B$.

$\bar{N} \subset \bar{L}$ sii $\wedge\langle \bar{N}, \bar{L}\rangle = \bar{N}$ sii existe $\lambda : N \to L$ tal que $\ell \circ \lambda = n$.

$\therefore$ tenemos el siguiente diagrama: Con λ mono pues n es mono.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, tail, "\lambda"] \arrow[dr, "n"'] & \arrow[d, phantom, "\curvearrowright"] & L \arrow[dl, "\ell"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

podemos pensar a $\lambda : N \to L$ como morfismo en la categoría $\mathcal{E}/B$.

Ahora aplicamos el funtor $f^* : \mathcal{E}/B \longrightarrow \mathcal{E}/A$.

$\therefore$ tenemos, el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} f^*(N) \arrow[rr, tail, "f^*(\lambda)"] \arrow[dr, "f^*(n)"'] & \arrow[d, phantom, "\curvearrowright"] & f^*(L) \arrow[dl, "f^*(\ell)"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

y sabemos que f^* preserva monomorfismos

Por las observaciones que hicimos antes, página 50

Como $\bar{L}, \bar{N} : B \longrightarrow \Omega$

$$\chi_{f^*(n)} = f^{-1}[\bar{N}] \quad y \quad \chi_{f^*(\ell)} = f^{-1}[\bar{L}]$$

y además tenemos que $f^*(n) = f^*(\ell) \circ f^*(\lambda)$

entonces $f^{-1}[\bar{L}] \circ f^*(n) = (f^{-1}[\bar{L}] \circ f^*(\ell)) \circ f^*(\lambda) = v_{f^{-1}(L)} \circ f^*(\lambda) = v_{f^{-1}(N)}$

$\therefore \wedge\langle f^{-1}[\bar{N}], f^{-1}[\bar{L}]\rangle = f^{-1}[\bar{N}]$

$\therefore f^{-1}[\bar{N}] \subset f^{-1}[\bar{L}]$

$\therefore f^{-1}[-]$ es funtor.

c) $f\langle - \rangle : (\hom(A,\Omega), \subset) \longrightarrow (\hom(B,\Omega), \subset)$ es funtor

Objetos: $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega \longmapsto B \xrightarrow{f\langle \bar{M}\rangle} \Omega$

Morfismos: $\bar{M} \subset \bar{N} \longmapsto f\langle \bar{M}\rangle \subset f\langle \bar{N}\rangle$

También como los funtores anteriores, basta demostrar que preserva contenciones para que sea funtor.

Pero para ésto vamos a utilizar las propiedades del funtor Π_f, ya que preserva monomorfismos.

Sean $\bar{M}, \bar{N} : A \longrightarrow \Omega$, subobjetos de A tales que $\bar{M} \subset \bar{N}$ y donde $\bar{M} = \chi_m$, $\bar{N} = \chi_n$, $M \overset{m}{\rightarrowtail} A$ y $N \overset{n}{\rightarrowtail} A$, con m y n monomorfismos.

Si $\bar{M} \subset \bar{N}$ i.e. $\wedge\langle \bar{M}, \bar{N}\rangle = \bar{M}$, entonces existe un morfismo $\lambda : M \longrightarrow N$ tal que $m = n \circ \lambda$. Hay que notar que λ es monomorfismo pues m lo es.

$\therefore$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, tail, "\lambda"] \arrow[dr, tail, "m"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[dl, tail, "n"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

podemos ver a λ como un morfismo en la categoría $\mathcal{E}/A$, y como $\Pi_f : \mathcal{E}/A \longrightarrow \mathcal{E}/B$ es funtor que preserva monomorfismos entonces tenemos:

$$\begin{tikzcd} \Pi_f(M) \arrow[rr, tail, "\Pi_f(\lambda)"] \arrow[dr, "\Pi_f(m)"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \Pi_f(N) \arrow[dl, "\Pi_f(n)"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

$\therefore$ $\Pi_f(m) = \Pi_f(n) \circ \Pi_f(\lambda)$

y como por definición $f\langle\bar{M}\rangle = \chi_{\Pi_f(m)}$ y $f\langle\bar{N}\rangle = \chi_{\Pi_f(n)}$, entonces $f\langle\bar{M}\rangle \subset f\langle\bar{N}\rangle$

$\therefore$ $f\langle - \rangle$ es funtor.

<u>Observaciones</u> <u>Importantes</u>:

Estos 3 funtores, $f[-]$, $f^{-1}[-]$ y $f\langle-\rangle$, están relacionados de la siguiente manera:

1.- $f[-] \dashv f^{-1}[-]$, i.e. $f[-]$ es adjunto izquierdo de $f^{-1}[-]$ y

2.- $f^{-1}[-] \dashv f\langle-\rangle$, i.e. $f\langle-\rangle$ es adjunto derecho de $f^{-1}[-]$.

<u>Demostración</u>:

Hay que notar, como $(\hom(A,\Omega), \subset)$ y $(\hom(B,\Omega), \subset)$ son conjuntos parcialmente ordenados y entre dos objetos hay a lo más un morfismo, entonces basta demostrar que:

1.- $f[-] \dashv f^{-1}[-]$ sii [para todo $\bar{M} : A \longrightarrow \Omega$, $\bar{M} \subset f^{-1}[f[\bar{M}]]$ y (para todo $\bar{N} : B \longrightarrow \Omega$ tal que $\bar{M} \subset f^{-1}[\bar{N}]$ entonces $f[\bar{M}] \subset \bar{N}$)].

2.- $f^{-1}[-] \dashv f\langle-\rangle$ sii [para todo $\bar{N} : B \longrightarrow \Omega$, $\bar{N} \subset f\langle f^{-1}[\bar{N}]\rangle$ y (para todo $\bar{M} : A \longrightarrow \Omega$ tal que $\bar{N} \subset f\langle\bar{M}\rangle$ entonces $f^{-1}[\bar{N}] \subset \bar{M}$)].

1.- Sea $\bar{M}: A \to \Omega$ PD. $\bar{M} \subset f^{-1}[f[\bar{M}]]$, i.e. PD. $\bar{M} \cap f^{-1}[f[\bar{M}]] = \bar{M}$.

Sea $m: M \rightarrowtail A$ el monomorfismo tal que $\bar{M} = \chi_m$

Basta demostrar que el siguiente diagrama es P.F.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "!_M"'] \arrow[dr, phantom, "\infty"] & A \arrow[d, "{\langle \bar{M}, f^{-1}[f[\bar{M}]] \rangle}"] \\ 1 \arrow[r, tail, "{\langle v, v \rangle}"'] & \Omega \times \Omega \end{tikzcd}$$

pues ya sabemos que
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, tail, "{\langle v, v \rangle}"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\wedge"] \\ 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$
es P.F.

Recordemos que $f[\bar{M}] := \chi_{Im(fm)}$ donde $f \circ m = Im(fm) \circ (fm)^*$ es la epi-mono factorización de $f \circ m$, entonces:

$$\begin{aligned} \langle \bar{M}, f^{-1}[f[\bar{M}]] \rangle \circ m &= \langle \bar{M} \circ m, f^{-1}[f[\bar{M}]] \circ m \rangle \\ &= \langle v_M, f[\bar{M}] \circ f \circ m \rangle \quad \text{pues } \bar{M} = \chi_m \text{ y } f^{-1}[f[\bar{M}]] = f[\bar{M}] \circ f \\ &= \langle v_M, f[\bar{M}] \circ Im(fm) \circ (fm)^* \rangle \quad \text{uso la epi-mono fact.} \\ &= \langle v_M, v_{f(M)} \circ (fm)^* \rangle \quad \text{pues } f[\bar{M}] = \chi_{Im(fm)} \\ &= \langle v_M, v_M \rangle \\ &= \langle v, v \rangle \circ !_M \end{aligned}$$

∴ ∞ conmuta

∴ ∞ es P.F. pues $\bar{M} = \chi_m$, entonces cumple la propiedad universal requerida.

∴ $\bar{M} \subset f^{-1}[f[\bar{M}]]$

Sea $\bar{N}: B \to \Omega$ tal que $\bar{M} \subset f^{-1}[\bar{N}]$. PD. $f[\bar{M}] \subset \bar{N}$.

i.e. PD. $\wedge \langle f[\bar{M}], \bar{N} \rangle = f[\bar{M}]$.

Como hemos visto en la demostración anterior, basta demostrar que

$$\begin{tikzcd} f(M) \arrow[r, tail, "Im(fm)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\triangle"] & B \arrow[d, "{\langle f[\bar{M}], \bar{N} \rangle}"] \\ 1 \arrow[r, tail, "{\langle v, v \rangle}"'] & \Omega \times \Omega \end{tikzcd}$$
es P.F.

Como $\bar{M} \subset f^{-1}[\bar{N}]$ entonces $\wedge \langle \bar{M}, f^{-1}[\bar{N}] \rangle = \bar{M}$, ésto implica que $f^{-1}[\bar{N}] \circ m := \bar{N} \circ f \circ m = v_M$

∴ $v_M = \bar{N} \circ f \circ m = (\bar{N} \circ Im(fm)) \circ (fm)^*$ y como $v_M = v_{f(M)} \circ (fm)^*$

entonces $(\bar{N} \circ Im(fm)) \circ (fm)^* = v_{f(M)} \circ (fm)^*$

entonces (por ser $(fm)^*$ epi) $\bar{N} \circ Im(fm) = v_{f(M)}$

∴ $\langle f[\bar{M}], \bar{N} \rangle \circ Im(fm) = \langle f[\bar{M}] \circ Im(fm), \bar{N} \circ Im(fm) \rangle = \langle v_{f(M)}, v_{f(M)} \rangle$
$= \langle v, v \rangle \circ !_{f(M)}$ ∴ $\triangle$ conmuta

∴ Δ es P.F. pues $f[\bar{M}] = \chi_{Im(fm)}$.
∴ Si $\bar{M} \subset f^{-1}[\bar{N}]$ entonces $f[\bar{M}] \subset \bar{N}$.

∴ $f[-] \dashv f^{-1}[-]$

2.- PD. $f^{-1}[-] \dashv f\langle - \rangle$
Sea $\bar{N} : B \longrightarrow \Omega$ PD. $\bar{N} \subset f\langle f^{-1}[\bar{N}] \rangle$.
Se usará para ésto los funtores f^* y Π_f, mencionados antes. Como vimos en la página 53.
Si $\bar{N} = \chi_n$, donde $n : N \rightarrowtail B$ entonces $f^{-1}[\bar{N}] = \chi_{f^*(n)}$
Como $f^* \dashv \Pi_f : E/A \longrightarrow E/B$ entonces tenemos como consecuencia:

$E/A\,(f^*(n), f^*(n)) \cong E/B\,(n, \Pi_f(f^*(n)))$ i.e. hay un isomorfismo entre el conjunto, en E/A, de morfismo de $f^*(n)$ en sí mismo y el conjunto, en E/B, de los morfismos de n en $\Pi_f(f^*(n))$.
y como tenemos la identidad en $E/A\,(f^*(n), f^*(n))$ entonces tenemos un morfismo, en E/B, de n en $\Pi_f(f^*(n))$.
Viéndolo con diagramas, tenemos:

$$\begin{tikzcd} f^*(N) \arrow[rr, "1d_{f^*(N)}"] \arrow[dr, "f^*(n)"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & f^*(N) \arrow[dl, "f^*(n)"] \\ & A & \end{tikzcd} \quad \text{entonces existe} \quad \begin{tikzcd} N \arrow[rr, dashed, "\lambda"] \arrow[dr, "n"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \Pi_f(f^*(N)) \arrow[dl, "\Pi_f(f^*(n))"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

ésto implica que $\chi_n = \bar{N} \subset \chi_{\Pi_f(f^*(n))}$, pero como $f^{-1}[\bar{N}] = \chi_{f^*(n)}$ entonces

$$f\langle f^{-1}[\bar{N}] \rangle := \chi_{\Pi_f(f^*(n))}$$

∴ $\bar{N} \subset f\langle f^{-1}[\bar{N}] \rangle$

Sea $\bar{M} : A \longrightarrow \Omega$ tal que $\bar{N} \subset f\langle \bar{M} \rangle$ P.D. $f^{-1}[\bar{N}] \subset \bar{M}$.
Otra vez se utilizará que $f^* \dashv \Pi_f$, ésto implica que

$E/A\,(f^*(n), m) \cong E/B\,(n, \Pi_f(m))$ pero por hypótesis $\bar{N} \subset f\langle \bar{M} \rangle := \chi_{\Pi_f(m)}$ entonces existe $\lambda : N \longrightarrow \Pi_f(M)$ tal que $\Pi_f(m) \circ \lambda = n$
i.e. en diagramas tenemos:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "n"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \Pi_f(M) \arrow[dl, "\Pi_f(m)"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

∴ $\lambda \in E/B\,(n, \Pi_f(m))$

Y por la biyección antes mencionada, tenemos que existe $\lambda' : f^*(N) \longrightarrow M$ tal que

$$\begin{tikzcd} f^*(N) \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[dr, "f^*(n)"'] & M \arrow[d, "m"] \\ & A \end{tikzcd}$$ conmuta

ésto implica que $\chi_{f^*(n)} = f^{-1}[\bar{N}] \subset \chi_m = \bar{M}$

$\therefore$ $f^{-1}[\bar{N}] \subset \bar{M}$

$\therefore$ $f^{-1}[-] \dashv f\langle - \rangle$

$\Box$.

Ahora se demostrarán propiedades importantes de estas operaciones:

5.1 Para todo $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega$ y $B \xrightarrow{\bar{N}} \Omega$, donde $\bar{M} = \chi_m$ y $\bar{N} = \chi_n$:

a) $f[\bar{M}] \subset \bar{N}$ sii $\bar{M} \subset f^{-1}[\bar{N}]$;

b) $\bar{N} \subset f\langle \bar{M} \rangle$ sii $f^{-1}[\bar{N}] \subset \bar{M}$.

Ésto es casi un resumen de lo que se acaba de demostrar, recordando que $f[-]$, $f^{-1}[-]$ y $f\langle - \rangle$ son funtores que preservan contenciones.

<u>Demostración</u>

a) $f[\bar{M}] \subset \bar{N}$ PD $\bar{M} \subset f^{-1}[\bar{N}]$

Como $f[\bar{M}] \subset \bar{N}$ entonces $f^{-1}[f[\bar{M}]] \subset f^{-1}[\bar{N}]$, pero también $\bar{M} \subset f^{-1}[f[\bar{M}]]$ (pues $f[-] \dashv f^{-1}[-]$)

$\therefore$ (por transitividad de $\subset$) $\bar{M} \subset f^{-1}[\bar{N}]$

Si $\bar{M} \subset f^{-1}[\bar{N}]$ entonces (por $f[-] \dashv f^{-1}[-]$) $f[\bar{M}] \subset \bar{N}$.

$\therefore$ $f[\bar{M}] \subset \bar{N}$ sii $\bar{M} \subset f^{-1}[\bar{N}]$

b) Si $\bar{N} \subset f\langle \bar{M} \rangle$ entonces (pues $f^{-1}[-] \dashv f\langle - \rangle$) $f^{-1}[\bar{N}] \subset \bar{M}$.

Si $f^{-1}[\bar{N}] \subset \bar{M}$ entonces $f\langle f^{-1}[\bar{N}] \rangle \subset f\langle \bar{M} \rangle$ pero $\bar{N} \subset f\langle f^{-1}[\bar{N}] \rangle$ (pues $f^{-1}[-] \dashv f\langle - \rangle$) y por transitividad de $\subset$, tenemos:

$\bar{N} \subset f\langle \bar{M} \rangle$

$\therefore$ $\bar{N} \subset f\langle \bar{M} \rangle$ sii $f^{-1}[\bar{N}] \subset \bar{M}$.

5.2. Para todo $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega$, $C \xrightarrow{\bar{N}} \Omega$ morfismos, tenemos:

a) $(gf)^{-1}[\bar{N}] = f^{-1}[g^{-1}[\bar{N}]]$; $(gf)[\bar{M}] = g[f[\bar{M}]]$; $(gf)\langle\bar{M}\rangle = g\langle f\langle\bar{M}\rangle\rangle$;

b) $Id_A[\bar{M}] = \bar{M} = Id_A\langle\bar{M}\rangle$; $Id_C^{-1}[\bar{N}] = \bar{N}$;

c) Si f es mono entonces $f^{-1}[f[\bar{M}]] = \bar{M} = f^{-1}[f\langle\bar{M}\rangle]$;

d) Si g es epi entonces $g[g^{-1}[\bar{N}]] = \bar{N} = g\langle g^{-1}[\bar{N}]\rangle$.

Demostración:

a) PD $(gf)^{-1}[\bar{N}] = f^{-1}[g^{-1}[\bar{N}]]$

$$(g\circ f)^{-1}[\bar{N}] := \bar{N}\circ(g\circ f) \underset{(\text{asoc.})}{=} (\bar{N}\circ g)\circ f := (g^{-1}[\bar{N}])\circ f := f^{-1}[g^{-1}[\bar{N}]]$$

PD. $(g\circ f)[\bar{M}] = g[f[\bar{M}]]$

Para demostrar ésto se usará la antisimetría de $\subset$, i.e.

PD $(g\circ f)[\bar{M}] \subset g[f[\bar{M}]]$ y $g[f[\bar{M}]] \subset (g\circ f)[\bar{M}]$

PD $(g\circ f)[\bar{M}] \subset g[f[\bar{M}]]$ i.e. PD $\wedge\langle(g\circ f)[\bar{M}], g[f[\bar{M}]]\rangle = (g\circ f)[\bar{M}]$

Como en las demostraciones anteriores basta demostrar que

$g[f[\bar{M}]]\circ Im((g\circ f)m) = v_{(g\circ f)(M)}$, donde $\chi_m = \bar{M}$ y $M \xrightarrow{m} A$.

Recuerde que $(g\circ f)[\bar{M}] := \chi_{Im((g\circ f)\circ m)}$ y $g[f[\bar{M}]] = \chi_{Im(g\circ Im(fm))}$ y si h es un morfismo entonces $Im(h)\circ(h)^* = h$ denota la epi-mono factorización de h.

$$g[f[\bar{M}]]\circ(Im((g\circ f)\circ m)\circ((g\circ f)\circ m)^*) = g[f[\bar{M}]]\circ((g\circ f)\circ m) =$$
$$= g[f[\bar{M}]]\circ(g\circ(f\circ m)) = g[f[\bar{M}]]\circ(g\circ(Im(fm)\circ(fm)^*)) =$$
$$= g[f[\bar{M}]]\circ((g\circ Im(fm))\circ(fm)^*) = g[f[\bar{M}]]\circ((Im(g\circ Im(fm))\circ(g\circ Im(fm))^*)\circ(fm)^*)$$
$$= (g[f[\bar{M}]]\circ Im(g\circ Im(fm)))\circ(g\circ Im(fm))^*\circ(fm)^* =$$
$$= v_{g(f(M))}\circ(g\circ Im(fm))^*\circ(fm)^* = v_M = v_{(g\circ f)(M)}\circ((g\circ f)\circ m)^*$$

Como $((g\circ f)\circ m)^*$ es epi, entonces

$$g[f[\bar{M}]]\circ Im((g\circ f)\circ m) = v_{(g\circ f)(M)}$$

$\therefore$ $(g\circ f)[\bar{M}] \subset g[f[\bar{M}]]$.

PD. $g[f[\bar{M}]] \subset (g\circ f)[\bar{M}]$. PD. $(g\circ f)[\bar{M}]\circ Im(g\circ Im(fm)) = v_{g(f(M))}$

$$(g\circ f)[\bar{M}]\circ(Im(g\circ Im(fm))\circ(g\circ Im(fm))^*\circ(fm)^*) =$$
$$= (g\circ f)[\bar{M}]\circ((g\circ Im(fm))\circ(fm)^*) = (g\circ f)[\bar{M}]\circ(g\circ(Im(fm)\circ(fm)^*)) =$$
$$= (g\circ f)[\bar{M}]\circ(g\circ(f\circ m)) = (g\circ f)[\bar{M}]\circ((g\circ f)\circ m) =$$
$$= (g\circ f)[\bar{M}]\circ(Im((g\circ f)\circ m)\circ((g\circ f)\circ m)^*) = ((g\circ f)[\bar{M}]\circ Im((g\circ f)\circ m))\circ((g\circ f)\circ m)^* =$$
$$= v_{(g\circ f)(M)}\circ((g\circ f)\circ m)^* = v_M = v_{g(f(M))}\circ(g\circ Im(fm))^*\circ(fm)^*$$

Como $(g\circ Im(fm))^{*}\circ(fm)^{*}$ es epi, entonces:
$(g\circ f)[\bar{M}]\circ Im(g\circ Im(fm)) = v_{g(f(M))}$

$\therefore g[f[\bar{M}]] \subset (g\circ f)[\bar{M}]$

$\therefore g[f[\bar{M}]] = (g\circ f)[\bar{M}]$.

PD. $(g\circ f)\langle\bar{M}\rangle = g\langle f\langle\bar{M}\rangle\rangle$

PD. $(g\circ f)\langle\bar{M}\rangle \subset g\langle f\langle\bar{M}\rangle\rangle$. Tenemos que:

$(g\circ f)\langle\bar{M}\rangle \subset g\langle f\langle\bar{M}\rangle\rangle$ sii (por 5.1.b) $g^{-1}[(g\circ f)\langle\bar{M}\rangle] \subset f\langle\bar{M}\rangle$
sii (por 5.1.b) $f^{-1}[g^{-1}[(g\circ f)\langle\bar{M}\rangle] \subset \bar{M}$
sii (por 5.2.a, 1ª parte) $(g\circ f)^{-1}[(g\circ f)\langle\bar{M}\rangle] \subset \bar{M}$
sii (por 5.1.b) $(g\circ f)\langle\bar{M}\rangle \subset (g\circ f)\langle\bar{M}\rangle$.

pero esto último es cierto pues $\subset$ es reflexiva

$\therefore (g\circ f)\langle\bar{M}\rangle \subset g\langle f\langle\bar{M}\rangle\rangle$.

PD $g\langle f\langle\bar{M}\rangle\rangle \subset (g\circ f)\langle\bar{M}\rangle$. Tenemos que:

$g\langle f\langle\bar{M}\rangle\rangle \subset (g\circ f)\langle\bar{M}\rangle$ sii (por 5.1.b) $(g\circ f)^{-1}[g\langle f\langle\bar{M}\rangle\rangle] \subset \bar{M}$
sii (por 5.2.a, 1ª parte) $f^{-1}[g^{-1}[g\langle f\langle\bar{M}\rangle\rangle]] \subset \bar{M}$
sii (por 5.1.b) $g^{-1}[g\langle f\langle\bar{M}\rangle\rangle] \subset f\langle\bar{M}\rangle$
sii (por 5.1.b) $g\langle f\langle\bar{M}\rangle\rangle \subset g\langle f\langle\bar{M}\rangle\rangle$

pero ésto último es cierto.

$\therefore g\langle f\langle\bar{M}\rangle\rangle \subset (g\circ f)\langle\bar{M}\rangle$

$\therefore g\langle f\langle\bar{M}\rangle\rangle = (g\circ f)\langle\bar{M}\rangle$.

b) PD. $1d_A[\bar{M}] = \bar{M}$

Para demostrar ésto, sólo hay que notar que, si $\bar{M} = \chi m$, $M \overset{m}{\rightarrowtail} A$ y $1d_A[\bar{M}] := \chi_{Im(1d_A\circ m)}$ entonces:

$$1d_A\circ m = (1d_A\circ m)\circ 1d_M = m\circ 1d_M$$ donde m es mono y $1d_M$ es epi

i.e. tenemos su epi-mono factorización

$\therefore$ (pues la epi-mono factorización es única salvo isomorfismos) $Im(1d_A\circ m) = m$

$\therefore 1d_A[\bar{M}] = \chi_m = \bar{M}$

Primero se demostrará que $1d_C^{-1}[\bar{N}] = \bar{N}$.

$1d_C^{-1}[\bar{N}] := \bar{N}\circ 1d_C = \bar{N}$

PD. $\bar{M} = Id_A\langle \bar{M} \rangle$.

PD. $\bar{M} \subset Id_A\langle \bar{M} \rangle$.

$\bar{M} \subset Id_A\langle \bar{M} \rangle$ sii (por 5.1.b) $Id_A^{-1}[\bar{M}] \subset \bar{M}$

sii (porque $Id_A^{-1}[\bar{M}] = \bar{M}$) $\bar{M} \subset \bar{M}$ pero ésto siempre pasa

$\therefore \bar{M} \subset Id_A\langle \bar{M} \rangle$

PD $Id_A\langle \bar{M} \rangle \subset \bar{M}$. Por lo anterior sabemos que $Id_A\langle \bar{M} \rangle = Id_A^{-1}[Id_A\langle \bar{M} \rangle]$

$Id_A\langle \bar{M} \rangle = Id_A^{-1}[Id_A\langle \bar{M} \rangle] \subset \bar{M}$ sii (por 3.1.b) $Id_A\langle \bar{M} \rangle \subset Id_A\langle \bar{M} \rangle$

$\therefore Id_A\langle \bar{M} \rangle \subset \bar{M}$

$\therefore \bar{M} = Id_A\langle \bar{M} \rangle$

c) PD. Si f es mono entonces $f^{-1}[f[\bar{M}]] = \bar{M}$

$f^{-1}[f[\bar{M}]] := f[\bar{M}] \circ f := \chi_{Im(f \circ m)} \circ f$

Como f es mono y m también entonces $Im(f \circ m) = f \circ m$.

PD $f[\bar{M}] \circ f = \bar{M}$ i.e. PD que el siguiente diagrama es P.F.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[dddr, bend right] & & \\
& M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[dd] \arrow[ddr, phantom, "\sigma"] & A \arrow[d, "f"] \\
& & B \arrow[d, "{f[\bar{M}]}"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Lo que se sabe (pues $Im(f \circ m) = f \circ m$) es que el siguiente diagrama es P.F.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \arrow[r, tail, "f"] & B \arrow[d, "{f[\bar{M}]}"] \\
1 \arrow[rr, tail, "v"'] & & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\therefore f[\bar{M}] \circ f \circ m = v_M$

$\therefore \sigma$ conmuta.

Supongamos que existen C y $\alpha : C \to A$ tal que $v_C = f[\bar{M}] \circ f \circ \alpha$ entonces ($f[\bar{M}] = \chi_{f \circ m}$) existe una única $\varphi : C \to M$ tal que $f \circ m = f \circ \alpha$.

$\therefore$ (pues f es mono) $m = \alpha$

y φ es única por ser m mono.

$\therefore \sigma$ es P.F.

$\therefore$ (por unicidad de características) $f[\bar{M}] \circ f := f^{-1}[f[\bar{M}]] = \bar{M}$

PD. Si f es mono entonces $\bar{M} = f^{-1}[f\langle \bar{M}\rangle]$.

PD. $f^{-1}[f\langle \bar{M}\rangle] \subset \bar{M}$

$f^{-1}[f\langle \bar{M}\rangle] \subset \bar{M}$ sii (por 5.1.b) $f\langle \bar{M}\rangle \subset f\langle \bar{M}\rangle$

$\therefore$ $f^{-1}[f\langle \bar{M}\rangle] \subset \bar{M}$

PD. $\bar{M} \subset f^{-1}[f\langle \bar{M}\rangle]$

$\bar{M} \subset f^{-1}[f\langle \bar{M}\rangle]$ sii (por 5.1.a) $f[\bar{M}] \subset f\langle \bar{M}\rangle$

Pero como f es mono y por 5.2.c, 1ª parte tenemos que $f^{-1}[f[\bar{M}]] \subset \bar{M}$ entonces (por 5.1.b) $f[\bar{M}] \subset f\langle \bar{M}\rangle$

$\therefore$ $\bar{M} \subset f^{-1}[f\langle \bar{M}\rangle]$

$\therefore$ $\bar{M} = f^{-1}[f\langle \bar{M}\rangle]$.

d) PD. Si g es epi entonces $g[g^{-1}[\bar{N}]] = \bar{N}$. Sea $\bar{N} = \chi_n$, $N \overset{n}{\rightarrowtail} C$.

$g[g^{-1}[\bar{N}]] := g[\chi_{g^*(n)}] := \chi_{\mathrm{Im}(g \circ g^*(n))}$; donde g^* es el funtor mencionado en la página 49.

En diagrama tenemos:

$$\begin{tikzcd}
g^*(N) \arrow[r, tail, "g^*(n)"] \arrow[d, dashed, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend left=60, "g^{-1}[\bar{N}]"] \\
N \arrow[r, tail, "n"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & C \arrow[d, "\bar{N}"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Como g es epi entonces (por A.13.) γ es epi

Si nos fijamos en el P.F. superior tenemos que $g \circ g^*(n) = n \circ \gamma$ donde γ es epi y n es mono, entonces $n = \mathrm{Im}(g \circ g^*(n))$

$\therefore$ $\bar{N} := \chi_n = \chi_{\mathrm{Im}(g \circ g^*(n))} := g[g^{-1}[\bar{N}]]$.

PD. Si g es epi entonces $g\langle g^{-1}[\bar{N}]\rangle = \bar{N}$.

PD. $g\langle g^{-1}[\bar{N}]\rangle \subset \bar{N}$.

Sabemos que $g\langle g^{-1}[\bar{N}]\rangle \subset g\langle g^{-1}[\bar{N}]\rangle$

entonces (por 5.1.b) $g^{-1}[g\langle g^{-1}[\bar{N}]\rangle] \subset g^{-1}[\bar{N}]$

entonces (por 5.1.a) $g[g^{-1}[g\langle g^{-1}[\bar{N}]\rangle]] \subset \bar{N}$

entonces (por ser g epi y 5.2.d, 1ª parte) $g[g^{-1}[g\langle g^{-1}[\bar{N}]\rangle]] = g\langle g^{-1}[\bar{N}]\rangle$

$\therefore$ $g\langle g^{-1}[\bar{N}]\rangle \subset \bar{N}$

PD $\bar{N} \subset g\langle g^{-1}[\bar{N}]\rangle$

$\bar{N} \subset g\langle g^{-1}[\bar{N}]\rangle$ sii (por 5.1.b) $g^{-1}[\bar{N}] \subset g^{-1}[\bar{N}]$

$\therefore$ $\bar{N} \subset g\langle g^{-1}[\bar{N}]\rangle$

$\therefore$ $\bar{N} = g\langle g^{-1}[\bar{N}]\rangle$ $\square$.

5.3. Si
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & B \arrow[d, "g_2"] \\ C \arrow[r, "g_1"'] & D \end{tikzcd}$$
es P.F. entonces

a) $f_1[f_2^{-1}[-]] = g_1^{-1}[g_2[-]]$.

b) $f_1\langle f_2^{-1}[-]\rangle = g_1^{-1}[g_2\langle - \rangle]$.

Demostración.

a) PD. Para todo $\bar{N}: B \longrightarrow \Omega$, se tiene que $f_1[f_2^{-1}[\bar{N}]] = g_1^{-1}[g_2[\bar{N}]]$. donde $\bar{N} = \chi_n$ y $n: N \rightarrowtail B$.

$g_2[\bar{N}] := \chi_{Im(g_2 \circ n)}$. Tomemos el P.F. (n, f_2), entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "g_2'"] \arrow[d, tail, "n'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & N \arrow[d, tail, "n"] \\ A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & B \arrow[d, "g_2"] \\ C \arrow[r, "g_1"'] & D \end{tikzcd} \quad \ldots (I)$$

donde n' es mono porque n lo es.

Si reacomodamos el P.F. superior y utilizamos que $\bar{N} = \chi_n$, tenemos:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, tail, "n'"] \arrow[d, "f_2'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \arrow[d, "f_2"] \arrow[dd, bend left=60, "= f_2^{-1}[\bar{N}]"] \\ N \arrow[r, tail, "n"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & B \arrow[d, "\bar{N}"] \\ 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

$\therefore$ $\chi_{f_2^*(n)} := f_2^{-1}[\bar{N}] = \chi_{n'}$, en otras palabras $f_2^*(n)$ es isomorfo a n'

$\therefore$ podemos sustituir en (I) a n' por $f_2^*(n)$ y a L por $f_2^*(N)$

Por A.10.6, existe h morfismo tal que

$$\begin{tikzcd} f_2^*(N) \arrow[r, "f_2''"] \arrow[d, "(f_1 \circ f_2^*(n))^*"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N \arrow[d, "(g_2 \circ n)^*"] \\ \cdot \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, tail, "Im(f_1 \circ f_2^*(n))"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \cdot \arrow[d, tail, "Im(g_2 \circ n)"] \\ C \arrow[r, "g_1"'] & D \end{tikzcd} \quad \ldots (II)$$

donde f_2'' es isomorfo a f_2'

Reacomodando el P.F. inferior de (II) y utilizando que $g_2[\bar{N}] = \chi_{(g_2 \circ n)}$ tenemos:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, tail, "\mathrm{Im}(f_1 \circ f_2^*(n))"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & C \arrow[d, "g_1"] \arrow[dd, bend left=60, "g_1^{-1}[g_2[\bar{N}]]"] \\
\cdot \arrow[r, tail, "\mathrm{Im}(g_2 \circ n)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & D \arrow[d, "g_2[\bar{N}]"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

(Por unicidad de característica)

$$\therefore \quad f_1[f_2^{-1}[\bar{N}]] = \chi_{\mathrm{Im}(f_1 \circ f_2^*(n))} = g_1^{-1}[g_2[\bar{N}]].$$

$$\therefore \quad f_1[f_2^{-1}[-]] = g_1^{-1}[g_2[-]].$$

<u>Nota</u>: <u>5.3.a')</u> Como $\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & \cdot \arrow[d, "g_2"] \\ \cdot \arrow[r, "g_1"'] & \cdot \end{tikzcd}$ es igual a $\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & \cdot \arrow[d, "g_1"] \\ \cdot \arrow[r, "g_2"'] & \cdot \end{tikzcd}$

también tenemos que $f_2[f_1^{-1}[-]] = g_2^{-1}[g_1[-]]$.

b) PD. Si $\bar{N} : B \longrightarrow \Omega$ entonces $f_1\langle f_2^{-1}[\bar{N}]\rangle = g_1^{-1}[g_2\langle \bar{N}\rangle]$.

PD. $f_1\langle f_2^{-1}[\bar{N}]\rangle \subset g_1^{-1}[g_2\langle\bar{N}\rangle]$.

$f_1\langle f_2^{-1}[\bar{N}]\rangle \subset g_1^{-1}[g_2\langle\bar{N}\rangle]$ sii (por 5.1.a) $g_1[f_1\langle f_2^{-1}[\bar{N}]\rangle] \subset g_2\langle\bar{N}\rangle$

sii (por 5.1.b) $g_2^{-1}[g_1[f_1\langle f_2^{-1}[\bar{N}]\rangle]] \subset \bar{N}$

sii (por 5.3.a') $f_2[f_1^{-1}[f_1\langle f_2^{-1}[\bar{N}]\rangle]] \subset \bar{N}$

Pero esto último siempre es cierto porque en general:

$h[h^{-1}[\bar{L}]] \subset \bar{L}$ (pues por 5.1.a esto sucede sii $h^{-1}[\bar{L}] \subset h^{-1}[\bar{L}]$)

y $g^{-1}[g\langle\bar{L}\rangle] \subset \bar{L}$ (pues por 5.1.b esto sucede sii $g\langle\bar{L}\rangle \subset g\langle\bar{L}\rangle$).

$$\therefore \quad f_2[f_1^{-1}[f_1\langle f_2^{-1}[\bar{N}]\rangle]] \subset f_2[f_2^{-1}[\bar{N}]] \subset \bar{N}$$

$$\therefore \quad f_1\langle f_2^{-1}[\bar{N}]\rangle \subset g_1^{-1}[g_2\langle\bar{N}\rangle].$$

PD $g_1^{-1}[g_2\langle\bar{N}\rangle] \subset f_1\langle f_2^{-1}[\bar{N}]\rangle$

$g_1^{-1}[g_2\langle\bar{N}\rangle] \subset f_1\langle f_2^{-1}[\bar{N}]\rangle$ sii (por 5.1.b) $f_1^{-1}[g_1^{-1}[g_2\langle\bar{N}\rangle]] \subset f_2^{-1}[\bar{N}]$

sii (por 5.2.a) $(g_1 \circ f_1)^{-1}[g_2\langle\bar{N}\rangle] \subset f_2^{-1}[\bar{N}]$

sii (por ser P.F.) $(g_2\circ f_2)^{-1}[g_2\langle \bar{N}\rangle] \subset f_2^{-1}[\bar{N}]$

sii (por 5.2.a) $f_2^{-1}[g_2^{-1}[g_2\langle \bar{N}\rangle]] \subset f_2^{-1}[\bar{N}]$

pero esto último siempre se dá, por la observación que hicimos anteriormente pues $g_2^{-1}[g_2\langle \bar{N}\rangle] \subset \bar{N}$

$\therefore$ $f_2^{-1}[g_2^{-1}[g_2\langle \bar{N}\rangle]] \subset f_2^{-1}[\bar{N}]$

$\therefore$ $g_1^{-1}[g_2\langle \bar{N}\rangle] \subset f_1\langle f_2^{-1}[\bar{N}]\rangle$

$\therefore$ $g_1^{-1}[g_2\langle - \rangle] = f_1\langle f_2^{-1}[-]\rangle$. □

Un corolario importante de 5.3:

5.4. Sean $A \xrightarrow{f} B$, $C \xrightarrow{g} D$ dos morfismos, entonces:

a) $(\mathrm{Id}_A \pi g)[(f \pi \mathrm{Id}_C)^{-1}[-]] = (f \pi \mathrm{Id}_D)^{-1}[(\mathrm{Id}_B \pi g)[-]]$;

b) $(\mathrm{Id}_A \pi g)\langle (f \pi \mathrm{Id}_C)^{-1}[-]\rangle = (f \pi \mathrm{Id}_D)^{-1}[(\mathrm{Id}_B \pi g)\langle - \rangle]$.

Demostración.

Basta demostrar que

$$\begin{tikzcd} A\pi C \arrow[r, "f\pi \mathrm{Id}_C"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_A\pi g"'] & B\pi C \arrow[d, "\mathrm{Id}_B\pi g"] \\ A\pi D \arrow[r, "f\pi \mathrm{Id}_D"'] & B\pi D \end{tikzcd}$$

es P.F.

$(f\pi \mathrm{Id}_D)\circ(\mathrm{Id}_A \pi g) = f\pi g = (\mathrm{Id}_B \pi g)\circ(f\pi \mathrm{Id}_C)$ $\therefore$ conmuta.

Sean $\alpha : F \longrightarrow A\pi D$ y $\beta : F \longrightarrow B\pi C$ tal que

$(\mathrm{Id}_B \pi g)\circ\beta = (f\pi \mathrm{Id}_D)\circ\alpha$.

Denotemos $\alpha_1 := \pi_{A,D}\circ\alpha$, $\alpha_2 := \pi'_{A,D}\circ\alpha$, $\beta_1 := \pi_{B,C}\circ\beta$ y $\beta_2 := \pi'_{B,C}\circ\beta$

$\therefore$ $\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2\rangle$ y $\beta = \langle \beta_1, \beta_2\rangle$

Como $(\mathrm{Id}_B\pi g)\circ\beta = (f\pi \mathrm{Id}_D)\circ\alpha$ entonces $\beta_1 = f\circ\alpha_1$ y $g\beta_2 = \alpha_2$.

Se define $\varphi := \langle \alpha_1, \beta_2\rangle : F \longrightarrow A\pi C$. Entonces:

$(\mathrm{Id}_A\pi g)\circ\langle\alpha_1,\beta_2\rangle = \langle \alpha_1, g\circ\beta_2\rangle = \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle = \alpha$ y

$(f\pi \mathrm{Id}_C)\circ\langle\alpha_1,\beta_2\rangle = \langle f\circ\alpha_1, \beta_2\rangle = \langle\beta_1,\beta_2\rangle = \beta$

PD. φ es única. Suponer que existe $\psi : F \longrightarrow A\pi C$ tal que $(f\pi \mathrm{Id}_C)\circ\psi = \beta$ y $(\mathrm{Id}_A\pi g)\circ\psi = \alpha$, también podemos poner a $\psi = \langle \psi_1, \psi_2\rangle$ donde $\psi_1 := \pi_{A,C}\circ\psi$ y $\psi_2 := \pi'_{A,C}\circ\psi$.

entonces $\langle f\circ\psi_1, \psi_2\rangle = \langle\beta_1,\beta_2\rangle$ y $\langle\psi_1, g\circ\psi_2\rangle = \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$

entonces $\beta_2 = \psi_2$ y $\alpha_1 = \psi_1$

$\therefore$ $\psi = \langle\psi_1,\psi_2\rangle = \langle\alpha_1,\beta_2\rangle = \varphi$

$\therefore$ φ es única $\therefore$ el diagrama anterior es P.F.

Aplicando 5.3, tenemos que

$$(\mathrm{Id}_A \pi g)[(f \pi \mathrm{Id}_C)^{-1}[-]] = (f \pi \mathrm{Id}_D)^{-1}[(\mathrm{Id}_B \pi g)[-]] \;;$$
$$(\mathrm{Id}_A \pi g)\langle (f \pi \mathrm{Id}_C)^{-1}[-]\rangle = (f \pi \mathrm{Id}_D)^{-1}[(\mathrm{Id}_B \pi g)\langle - \rangle] . \quad \square.$$

Ahora vamos a introducir los "operadores internos" que corresponden a las imágenes directas e inversa.

Recordemos que hay una correspondencia biunívoca entre los "subobjetos de A", $A \xrightarrow{\sqrt{\bar{M}}} \Omega$, y los "elementos de $\wp A$", $1 \xrightarrow{x} \wp A$ por medio de 2.2 :

(5.5)
$$\begin{tikzcd} \wp A \pi A \arrow[r, "e_A"] & \Omega \\ 1 \pi A \arrow[u, dashed, "x \pi \mathrm{Id}_A"] \arrow[r, "\pi'_{1,A}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & A \arrow[u, "\bar{M}"'] \end{tikzcd}$$

i.e. $(x \pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A] = \pi'^{-1}_{1,A}[\bar{M}]$.

Denotemos esta correspondencia como $x := \bar{M}_e$ ($\bar{M}$ visto como "elemento") y $\bar{M} := x_s$ (x como "subobjeto").

Más generalmente, por 2.2, si $C \xrightarrow{f} \wp A$ es un morfismo, entonces está biunívocamente determinado por la imágen inversa $(f \pi A)^{-1}[e_A]$, en otras palabras si $C \xrightarrow{g} \wp A$ es otro morfismo tenemos :

$$f = g \quad \text{sii} \quad (f \pi A)^{-1}[e_A] = (g \pi A)^{-1}[e_A] .$$

En particular para cualquier morfismo $A \xrightarrow{f} B$ podemos definir los siguientes morfismos :

$$\wp A \xrightarrow{\wp f} \wp B \;, \quad \wp A \xrightarrow{\wp_{\forall} f} \wp B \quad \text{y} \quad \wp B \xrightarrow{\wp^{*} f} \wp A$$

(usando 2.2)

5.6.
$$(\wp f \pi \mathrm{Id}_B)^{-1}[e_B] = (\mathrm{Id}_{\wp A} \pi f)[e_A],$$
$$(\wp_{\forall} f \pi \mathrm{Id}_B)^{-1}[e_B] = (\mathrm{Id}_{\wp A} \pi f)\langle e_A \rangle \;,$$
$$(\wp^{*} f \pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A] = (\mathrm{Id}_{\wp B} \pi f)^{-1}[e_B] .$$

En otras palabras, se define como $\wp f : \wp A \longrightarrow \wp B$ al único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\wp B \times B \arrow[r, "e_B"] & \Omega \\
\wp A \pi B \arrow[u, dashed, "\wp f \,\pi\, Id_B"] \arrow[ur, "(Id_{\wp A} \pi f)[e_A]"'] \arrow[u, phantom, shift left=8, "\circlearrowright"]
\end{tikzcd}
\qquad (Id_{\wp A}\pi f)[e_A] := \chi_{Im((Id_{\wp A}\pi f)\circ e_a)}$$

donde $e_A = \chi_{e_a}$

Análogamente $\wp_+ f$ y $\wp^* f$.

Estos morfismos, $\wp f$, $\wp_+ f$, $\wp^* f$, representan a las operaciones $f[-]$, $f\langle - \rangle$, $f^{-1}[-]$ internamente:

5.7. Para todo $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega$, $B \xrightarrow{\bar{N}} \Omega$, tenemos:
(Nota: aunque a veces lo omita, $\bar{M} = \chi_m$, $m : M \rightarrowtail A$, $\bar{N} = \chi_n$, $n : N \rightarrowtail B$).

a) $1 \xrightarrow{\bar{M}e} \wp A \xrightarrow{\wp f} \wp B = 1 \xrightarrow{f[\bar{M}]e} \wp B$,

b) $1 \xrightarrow{\bar{M}e} \wp A \xrightarrow{\wp_+ f} \wp B = 1 \xrightarrow{f\langle \bar{M}\rangle e} \wp B$,

c) $1 \xrightarrow{\bar{N}e} \wp B \xrightarrow{\wp^* f} \wp A = 1 \xrightarrow{f^{-1}[\bar{N}]e} \wp A$.

<u>Demostración.</u>

a) PD. $\wp f \circ \bar{M}e = f[\bar{M}]e$

$$\begin{aligned}
(\wp f \circ \bar{M}e \,\pi\, Id_B)^{-1}[e_B] &= ((\wp f \,\pi\, Id_B)\circ(\bar{M}e \,\pi\, Id_B))^{-1}[e_B] \\
\text{(por 5.2.a)} &= (\bar{M}e \,\pi\, Id_B)^{-1}[(\wp f \,\pi\, Id_B)^{-1}[e_B]] \\
\text{(por 5.6)} &= (\bar{M}e \,\pi\, Id_B)^{-1}[(Id_{\wp A} \pi f)[e_A]] \\
\text{(por 5.4)} &= (Id_1 \pi f)[(\bar{M}e \,\pi\, Id_A)^{-1}[e_A]] \\
\text{(por 5.5)} &= (Id_1 \pi f)[\pi_{1,A}'^{-1}[\bar{M}]] \\
\left(\text{por 5.3 y porque } \begin{array}{ccc} 1\pi A & \xrightarrow{\pi'_{1,A}} & A \\ {\scriptstyle Id_1\pi f}\downarrow & \text{P.F.} & \downarrow{\scriptstyle f} \\ 1\pi B & \xrightarrow[\pi'_{1,B}]{} & B \end{array}\right) &= \pi_{1,B}'^{-1}[f[\bar{M}]] \\
\text{(por 5.5)} &= (f[\bar{M}]e \,\pi\, Id_B)^{-1}[e_B]
\end{aligned}$$

$\therefore$ (Por 2.2) $\mathcal{P}f \circ \bar{M}_e = f[\bar{M}]e$

Nota: La demostración de que
$$\begin{array}{ccc} 1\pi A & \xrightarrow{\pi'_{1,A}} & A \\ \downarrow{\scriptstyle 1_1 \pi f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ 1\pi B & \xrightarrow[\pi'_{1,B}]{} & B \end{array}$$
es P.F. es directa.

b) PD $\mathcal{P}_{\forall} f \circ \bar{M}_e = f\langle \bar{M}\rangle e$.

Es análogo al anterior, sólo que en lugar de poner la imagen directa existencial se pone la imagen directa universal, ya que todas las propiedades utilizadas en la demostración anterior valen para la imagen directa universal.

c) PD. $\mathcal{P}^{*}f \circ \bar{N}_e = f^{-1}[\bar{N}]e$.

$$\begin{aligned}
((\mathcal{P}^{*}_{f} \circ \bar{N}_e)\pi\, 1d_A)^{-1}[e_A] &= ((\mathcal{P}^{*}_{f}\pi 1d_A)\circ(\bar{N}_e \pi 1d_A))^{-1}[e_A] \\
(\text{por } 5.2.a)\quad &= (\bar{N}_e \pi 1d_A)^{-1}[(\mathcal{P}_{f}^{*}\pi 1d_A)^{-1}[e_A]] \\
(\text{por } 5.6)\quad &= (\bar{N}_e \pi 1d_A)^{-1}[(1d_{\mathcal{P}B}\pi f)^{-1}[e_B]] \\
(\text{por } 5.2.a)\quad &= ((1d_{\mathcal{P}E}\pi f)\circ(\bar{N}_e \pi 1d_A))^{-1}[e_B] \\
&= (\bar{N}_e \pi f)^{-1}[e_B] \\
&= ((\bar{N}_e \pi 1d_B)\circ(1d_1 \pi f))^{-1}[e_B] \\
(\text{por } 5.2.a)\quad &= (1d_1 \pi f)^{-1}[(\bar{N}_e \pi 1d_B)^{-1}[e_B]] \\
(\text{por } 5.5)\quad &= (1d_1 \pi f)^{-1}[\pi'^{-1}_{1,B}[\bar{N}]] \\
(\text{por } 5.2.a)\quad &= (\pi'_{1,B}\circ(1d_1 \pi f))^{-1}[\bar{N}] \\
(\text{porque } 1d_1 \pi f := \langle \pi_{1,A}, f\circ\pi'_{1,A}\rangle)\quad &= (f\circ\pi'_{1,A})^{-1}[\bar{N}] \\
(\text{por } 5.2.a)\quad &= \pi'^{-1}_{1,A}[f^{-1}[\bar{N}]] \\
(\text{por } 5.5)\quad &= (f^{-1}[\bar{N}]e\ \pi\, 1d_A)^{-1}[e_A]
\end{aligned}$$

$\therefore$ (por 2.2) $\mathcal{P}^{*}f \circ \bar{N}_e = f^{-1}[\bar{N}]e$

$\square$

En realidad $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}_{\forall}$ son funtores covariantes; ie, $\mathcal{P}, \mathcal{P}_{\forall} : \underline{E} \longrightarrow \underline{E}$

Si $A \in \mathcal{O}(\underline{E})$ entonces $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}A$ (se define igual $\mathcal{P}_{\forall}(A) = \mathcal{P}A$)

Si $f: A \to B$ es un morfismo en $\underline{E}$ entonces $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}_f$ (respectivamente $\mathcal{P}_{\forall}(f) = \mathcal{P}_{\forall} f$).

La demostración de que $\wp$ y $\wp_{\forall}$ son funtores es muy sencilla, utilizando 2.2, por lo que se omite, pero dan por consecuencia:

$$\wp(A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C) = \wp A \xrightarrow{\wp f} \wp B \xrightarrow{\wp g} \wp C.$$
$$\wp(1d_A) = 1_{\wp A}$$
análogo para $\wp_{\forall}$.

También se tiene que $\wp^*: \underline{E} \longrightarrow \underline{E}$ es funtor contravariante: Si $A \in O(\underline{E})$ entonces $\wp^*(A) = \wp A$ y si $f: A \longrightarrow B$ es morfismo en $\underline{E}$ entonces $\wp^*(f) = \wp^* f : \wp B \longrightarrow \wp A$.
También para su demostración se utiliza 2.2 y propiedades antes mencionadas.

A $\wp$ se le llama el Funtor (covariante) objeto-Potencia, y a $\wp^*$ se le llama el Funtor contravariante objeto-Potencia.

En la categoría de los conjuntos $Set(Z_0)$, $\wp$ y $\wp^*$ son los funtores Conjunto-Potencia que conocemos.

5.8. Proposición en TE.

a) Si $A \rightarrowtail^{f} B$ es mono, entonces $\wp^* f \circ \wp f = 1d_{\wp A}$, en particular <u>$\wp f$ es mono</u> y $\wp^* f$ es epi.

b) Si $A \xrightarrow{f} \!\!\!\!\rightarrow B$ es epi, entonces $\wp f \circ \wp^* f = 1d_{\wp B}$, en particular <u>$\wp^* f$ es mono</u> y $\wp f$ es epi.

<u>Demostración</u>.

a) Sea $A \rightarrowtail^{f} B$ mono. PD. $\wp^* f \circ \wp f = 1d_{\wp A}$.

$$\begin{aligned}
((\wp^* f \circ \wp f)\pi 1d_A)^{-1}[e_A] &= ((\wp^* f \,\pi\, 1d_A)\circ(\wp f \,\pi\, 1d_A))^{-1}[e_A] \\
(\text{por } 5.2.a) &= (\wp f \,\pi\, 1d_A)^{-1}[(\wp^* f \,\pi\, 1d_A)^{-1}[e_A]] \\
(\text{por } 5.6) &= (\wp f \,\pi\, 1d_A)^{-1}[(1d_{\wp B} \,\pi\, f)^{-1}[e_B]] \\
(\text{por } 5.2.a) &= ((1d_{\wp B} \,\pi\, f)\circ(\wp f \,\pi\, 1d_A))^{-1}[e_B] \\
&= (\wp f \,\pi\, f)^{-1}[e_B] \\
&= ((\wp f \,\pi\, 1d_B)\circ(1d_{\wp A} \,\pi\, f))^{-1}[e_B] \\
(\text{por } 5.2.a) &= (1d_{\wp A} \,\pi\, f)^{-1}[(\wp f \,\pi\, 1d_B)^{-1}[e_B]] \\
(\text{por } 5.6) &= (1d_{\wp A} \,\pi\, f)^{-1}[(1d_{\wp A} \,\pi\, f)[e_A]]
\end{aligned}$$

(Como f y $1d_{\wp A}$ son monos entonces $f\pi 1d_{\wp A}$ es mono y por 5.2.c) $= e_A$
$= (1d_{\wp A}\pi 1d_A)^{-1}[e_A]$

$\therefore\ ((\wp^*_f\circ\wp_f)\pi 1d_A)^{-1}[e_A] = (1d_{\wp A}\pi 1d_A)^{-1}[e_A]$

$\therefore$ (Por 2.2) $\quad \wp^*_f\circ\wp_f = 1d_{\wp A}$.

b) Sea $A \xrightarrow{f} B$ epi. PD $\wp_f\circ\wp^*f = 1d_{\wp B}$.

$((\wp_f\circ\wp^*_f)\pi 1d_B)^{-1}[e_B] = ((\wp_f\pi 1d_B)\circ(\wp^*_f\pi 1d_B))^{-1}[e_B]$

(por 5.2.a) $= (\wp^*_f\pi 1d_B)^{-1}[(\wp_f\pi 1d_B)^{-1}[e_B]]$

(por 5.6) $= (\wp^*_f\pi 1d_B)^{-1}[(1d_{\wp A}\pi f)[e_A]]$

(por 5.4) $= (1d_{\wp B}\pi f)[(\wp^*f\pi 1d_A)^{-1}[e_A]]$

(por 5.6) $= (1d_{\wp B}\pi f)[(1d_{\wp B}\pi f)^{-1}[e_B]]$

($1d_{\wp B}\pi f$ es epi y por 5.2.d) $= e_B$
$= (1d_{\wp B}\pi 1d_B)^{-1}[e_B]$

$\therefore$ (Por 2.2) $\quad \wp_f\circ\wp^*f = 1d_{\wp B}$.

<u>5.8</u>.a') Si $A \rightarrowtail^{f} B$ es mono entonces $\wp^*_f\circ\wp_\forall f = 1d_{\wp A}$, en particular <u>$\wp_\forall f$ es mono</u> y $\wp^*f$ es epi.

b') Si $A \xrightarrow{f} B$ es epi entonces $\wp_{\forall f}\circ\wp^*f = 1d_{\wp B}$, en particular $\wp_\forall f$ es epi y <u>$\wp^*f$ es mono</u>.

Las demostraciones son análogas a las anteriores, poniendo $\wp_\forall$ en lugar de $\wp$.

Como se ve en 5.8, $\wp$ preserva monomorfismos, entonces $\wp$ induce una operación potencia interna:

Para cualquier subobjeto $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega$ de A tenemos un subobjeto potencia interno $\wp A \xrightarrow{\wp[\bar{M}]} \Omega$ de $\wp A$, donde $\wp[\bar{M}] := \chi_{\wp m}$, $\bar{M} = \chi_m$.

<u>5.9</u>. Teorema en TE. $\wp$ preserva imágenes inversas, i.e., para m monomorfismo tenemos:

Si
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "n"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & D \arrow[d, tail, "m"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$
entonces
$$\begin{tikzcd} \wp C \arrow[r, "\wp g"] \arrow[d, tail, "\wp n"'] \arrow[dr, phantom, "\circledast"] & \wp D \arrow[d, tail, "\wp m"] \\ \wp A \arrow[r, "\wp f"'] & \wp B \end{tikzcd}$$
es P. F.

(Como m es mono entonces n lo es)

<u>Demostración.</u>

P.D. $\circledast$ es P.F.

$$\wp m \circ \wp g \overset{(\wp\text{ funtor})}{=} \wp(m \circ g) \overset{(\text{P.F.})}{=} \wp(f \circ n) \overset{(\wp\text{ funtor})}{=} \wp f \circ \wp n \quad \therefore \circledast \text{ conmuta}$$

Sean $u : H \longrightarrow \wp A$ y $w : H \longrightarrow \wp D$ morfismos tal que $\wp f \circ u = \wp m \circ w$. P.D. existe un único morfismo $\varphi : H \longrightarrow \wp C$ tal que $\wp n \circ \varphi = u$ y $\wp g \circ \varphi = w$.

Se define $\varphi := \wp^*_n \circ u : H \longrightarrow \wp C$. En diagrama, tenemos:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[drr, bend left, "w"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\ & \wp C \arrow[r, "\wp g"] \arrow[d, tail, "\wp n"'] \arrow[dr, phantom, "\circledast"] & \wp D \arrow[d, tail, "\wp m"] \\ & \wp A \arrow[r, "\wp f"'] & \wp B \end{tikzcd}$$

P.D. $\wp g \circ \varphi = w$ y $\wp n \circ \varphi = u$

P.D. $\wp g \circ \varphi = w$

Por A.16. (Condición de Beck para existe) $\wp g \circ \wp^* n = \wp^* m \circ \wp f$

entonces $\wp g \circ \wp^* n \circ u = \wp^* m \circ (\wp f \circ u) = (\wp^* m \circ \wp m) \circ w$

Por 5.8.a y por ser m mono, tenemos que $\wp^* m \circ \wp m = \mathrm{Id}_{\wp D}$

$\therefore \wp g \circ \wp^* n \circ u = \wp g \circ \varphi = w$

PD $\wp n \circ \varphi = u$. Ésto es equivalente a demostrar que $((\wp n \circ \varphi)\, \pi\, \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A] = (u\, \pi\, \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]$.

c)
$$((\wp_n \circ \varphi)\, \pi\, \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A] = ((\wp_n \circ \wp^*_n \circ u)\, \pi\, \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A] =$$

(por definición de $\wp$ y $\wp^*$)
$$= (\mathrm{Id}_H\, \pi\, n)[(\mathrm{Id}_H\, \pi\, n)^{-1}[(u\, \pi\, \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]]]$$

Pero $(\mathrm{Id}_H\, \pi\, n)[(\mathrm{Id}_H\, \pi\, n)^{-1}[(u\, \pi\, \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]]] \subset (u\, \pi\, \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]$

sii (por 5.1.a) $(\mathrm{Id}_H\, \pi\, n)^{-1}[(u\, \pi\, \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]] \subset (\mathrm{Id}_H\, \pi\, n)^{-1}[(u\, \pi\, \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]]$

pero ésto siempre sucede.

$\therefore \; ((\wp_n \circ \varphi)\pi \, Id_A)^{-1}[e_A] \subset (u \pi Id_A)^{-1}[e_A]$.

$\supset$) PD $\quad (u\pi Id_A)^{-1}[e_A] \subset ((\wp_n \circ \varphi)\pi Id_A)^{-1}[e_A]$

Para demostrar ésto se necesita demostrar lo siguiente:

1º. Como $PF.(m, f) = (g, n)$ entonces (por A-10.e)

$$PF(Id_{\wp D}\pi m,\ Id_{\wp D}\pi f) = (Id_{\wp D}\pi g,\ Id_{\wp D}\pi n)$$

entonces (por 5.3) $(Id_{\wp D}\pi n)[(Id_{\wp D}\pi g)^{-1}[-]] = (Id_{\wp D}\pi f)^{-1}[(Id_{\wp D}\pi m)[-]]$

2º PD. $\quad (u\pi Id_A)^{-1}[e_A] \subset (Id_H \pi n)[(\omega\pi g)^{-1}[e_D]]$

$(Id_H \pi n)[(\omega\pi g)^{-1}[e_A]] = (Id_H\pi n)[((Id_{\wp D}\pi g)\circ(\omega\pi Id_C))^{-1}[e_D]] =$

$\overset{5.2.a}{=} (Id_H\pi n)[(\omega\pi Id_C)^{-1}[(Id_{\wp D}\pi g)^{-1}[e_D]]] =$

$\overset{5.4.a}{=} (\omega\pi Id_A)^{-1}[(Id_{\wp D}\pi n)[(Id_{\wp D}\pi g)^{-1}[e_D]]] =$

$\overset{(1º)}{=} (\omega\pi Id_A)^{-1}[(Id_{\wp D}\pi f)^{-1}[(Id_{\wp D}\pi m)[e_D]]] =$

$\overset{5.2.a}{=} (\omega\pi f)^{-1}[(Id_{\wp D}\pi m)[e_D]] =$

$\overset{5.6}{=} (\omega\pi f)^{-1}[(\wp m\pi Id_B)^{-1}[e_B]] =$

$\overset{5.2.a}{=} ((\wp m\circ\omega)\pi f)^{-1}[e_B] \overset{(hipótesis)}{=} ((\wp f\circ u)\pi f)^{-1}[e_B] =$

$= ((\wp f\pi Id_B)\circ(u\pi f))^{-1}[e_B] \overset{5.2.a}{=} (u\pi f)^{-1}[(\wp f\pi Id_B)^{-1}[e_B]] =$

$\overset{5.6}{=} (u\pi f)^{-1}[(Id_{\wp A}\pi f)[e_A]] = ((Id_{\wp A}\pi f)\circ(u\pi Id_A))^{-1}[(Id_{\wp A}\pi f)[e_A]] =$

$\overset{5.2.a}{=} (u\pi Id_A)^{-1}[(Id_{\wp A}\pi f)^{-1}[(Id_{\wp A}\pi f)[e_A]]]$

$e_A \subset (Id_{\wp A}\pi f)^{-1}[(Id_{\wp A}\pi f)[e_A]]$ sii (por 5.1.a) $(Id_{\wp A}\pi f)[e_A] \subset (Id_{\wp A}\pi f)[e_A]$
entonces

$$(u\pi Id_A)^{-1}[e_A] \subset (u\pi Id_A)^{-1}[(Id_{\wp A}\pi f)^{-1}[(Id_{\wp A}\pi f)[e_A]]]$$

pues $(u\pi Id_A)[(u\pi Id_A)^{-1}[e_A]] \subset e_A$ por 5.1.a y usando la transitividad de $\subset$.

$\therefore \; (u\pi Id_A)^{-1}[e_A] \subset (Id_H\pi n)[(\omega\pi g)^{-1}[e_D]]$.

3º Por A.10.e y como $PF.(m, f) = (g, n)$ entonces $P.F.(Id_{\wp D}\pi m,\ \omega\pi f) = (\omega\pi g,\ Id_H\pi n)$
y en diagramas, se tiene:

Por 2º

$$\begin{tikzcd}
(u\pi Id_A)^{\#}(E_A) \arrow[d, dashed, "\alpha"] \arrow[rr, tail, bend left, "(u\pi Id_A)^{\#}(E_A)"] & & & \\
(\omega\pi g)^{\#}(E_D) \arrow[r, tail, "(\omega\pi g)^{\#}(E_D)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & H\pi C \arrow[r, tail, "Id_H\pi n"] \arrow[d, "\omega\pi g"] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & H\pi A \arrow[r, "(Id_H\pi n)[(\omega\pi g)^{-1}[e_D]]"] \arrow[d, "\omega\pi f"] & \Omega \\
E_D \arrow[r, tail, "e_D"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \wp D\pi D \arrow[r, tail, "Id_{\wp D}\pi m"'] \arrow[d, "e_D"] & \wp D\pi B & \\
1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega & &
\end{tikzcd}$$

Existe un único $\alpha : (u\Pi \mathrm{Id}_A)^*(E_A) \longrightarrow (\omega\Pi g)^*(E_D)$ tal que
$(\mathrm{Id}_H\Pi n)\circ(\omega\Pi g)^*(\epsilon_D)\circ\alpha = (u\Pi \mathrm{Id}_A)^*(\epsilon_A)$

Pero también se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(u\Pi \mathrm{Id}_A)^*(E_A) \arrow[drr, bend left, "(\omega\Pi g)^*(\epsilon_D)\circ\alpha"] \arrow[dr, dashed, "\beta"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{Id}_{(u\Pi \mathrm{Id}_A)^*(E_A)}"'] & & & \\
 & (u\Pi n)^*(E_A) \arrow[r, tail, "(u\Pi n)^*(\epsilon_A)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & H\Pi C \arrow[r, "\omega\Pi g"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_H\Pi n"] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \wp D\Pi D \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\wp D}\Pi m"] \\
 & (u\Pi \mathrm{Id}_A)^*(E_A) \arrow[r, tail, "(u\Pi \mathrm{Id}_A)^*(\epsilon_A)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & H\Pi A \arrow[r, "\omega\Pi f"'] \arrow[d, "u\Pi \mathrm{Id}_A"] & \wp D\Pi B \\
 & E_A \arrow[r, tail, "\epsilon_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \wp A\Pi A \arrow[d, "e_A"] & \\
 & 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega &
\end{tikzcd}$$

entonces (por lo anterior) existe un único $\beta : (u\Pi \mathrm{Id}_A)^*(E_A) \longrightarrow (u\Pi n)^*(E_A)$ tal que
$(u\Pi n)^*(\epsilon_A)\circ\beta = (\omega\Pi g)^*(\epsilon_D)\circ\alpha$.

entonces
$$(\mathrm{Id}_H\Pi n)\circ(u\Pi n)^*(\epsilon_A)\circ\beta = (\mathrm{Id}_H\Pi n)\circ(\omega\Pi g)^*(\epsilon_D)\circ\alpha = (u\Pi \mathrm{Id}_A)^*(\epsilon_A)$$

pero
$$\chi_{(\mathrm{Id}_H\Pi n)\circ(u\Pi n)^*(\epsilon_A)} = (\mathrm{Id}_H\Pi n)[(\mathrm{Id}_H\Pi n)^{-1}[(u\Pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]]]$$
(ver antes)
$$= ((\wp_n\circ\wp^*{}_n\circ u)\Pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]$$

y $\chi_{(u\Pi \mathrm{Id}_A)^*(\epsilon_A)} = (u\Pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]$

$\therefore$ $(u\Pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A] \subset ((\wp_n\circ\wp^*{}_n\circ u)\Pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]$

$\therefore$ $(u\Pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A] = ((\wp_n\circ\wp^*{}_n\circ u)\Pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]$

entonces (propiedad universal de la exponenciación)
$u = \wp_n\circ\wp^*{}_n\circ u = \wp_n\circ\varphi$

$\therefore$ ⊗ es P.F. $\square$

<u>5.10.</u> Para morfismos $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{\overline{M}} \Omega$, se tiene que
$$\wp[f^{-1}[\overline{M}]] = (\wp_f)^{-1}[\wp[\overline{M}]].$$

<u>Demostración.</u>

Sea $\overline{M} = \chi_{m:M\to B}$ entonces $\wp[\overline{M}] := \chi_{\wp_m:\wp M\to\wp B}$.

En diagrama se tiene: $\quad f^{-1}[\bar{M}] := \bar{M} \circ f$

$$\begin{tikzcd} f^*(M) \arrow[r, tail, "f^*(m)"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & B \arrow[d, "\bar{M}"] \\ 1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega \end{tikzcd}$$

entonces (por 5.9)

$$\begin{tikzcd} \wp f^*(M) \arrow[r, tail, "\wp_{f^*(m)}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \wp A \arrow[d, dashed, "\wp f"] \\ \wp M \arrow[r, tail, "\wp m"] & \wp B \end{tikzcd}$$

es P.F.

entonces si completamos el diagrama.

$$\begin{tikzcd} \wp f^*(M) \arrow[r, "\wp_{f^*(m)}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \wp A \arrow[d, dashed, "\wp f"] \\ \wp M \arrow[r, tail, "\wp m"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \wp B \arrow[d, dashed, "\wp[\bar{M}]"] \\ 1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega \end{tikzcd}$$

$$\therefore \quad (\wp f)^{-1}[\wp[\bar{M}]] = \wp[\bar{M}] \circ \wp f = \chi_{\wp_{f^*(m)}} = \wp[f^{-1}[\bar{M}]]$$

Finalmente, para propósitos posteriores, se introducirán los morfismos:

$\wp A \pi \wp A \xrightarrow{\cap_A} \wp A$, $\quad \wp A \pi \wp A \xrightarrow{\cup_A} \wp A$, $\quad \wp A \xrightarrow{\delta_A} \wp\wp A \quad$ para cualquier objeto A:

$\cap_A$ es el único morfismo tal que

(5.11)

$$\begin{tikzcd} \wp A \pi A \arrow[r, "e_A"] & \Omega \\ (\wp A \pi \wp A) \pi A \arrow[u, dashed, "\cap_A \pi \mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "\binom{p_1}{p_3}^{-1}[e_A] \cap \binom{p_2}{p_3}^{-1}[e_A]"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

donde $p_1 := \pi_{\wp A, \wp A} \circ \pi_{\wp A \pi \wp A, A}$; $p_2 := \pi'_{\wp A, \wp A} \circ \pi_{\wp A \pi \wp A, A}$; $p_3 := \pi'_{\wp A \pi \wp A, A}$.

y $\binom{p_1}{p_3}^{-1}[e_A] \cap \binom{p_2}{p_3}^{-1}[e_A] = \wedge \left\langle \binom{p_1}{p_3}^{-1}[e_A], \binom{p_2}{p_3}^{-1}[e_A] \right\rangle$. (ver el principio de la sección)

Y similarmente, se define $\cup_A$ como el único morfismo tal que

$(\cup_A \pi \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A] = \binom{p_1}{p_3}^{-1}[e_A] \cup \binom{p_2}{p_3}^{-1}[e_A]$, donde

$\binom{p_1}{p_3}^{-1}[e_A] \cup \binom{p_2}{p_3}^{-1}[e_A] = \vee \left\langle \binom{p_1}{p_3}^{-1}[e_A], \binom{p_2}{p_3}^{-1}[e_A] \right\rangle$.

y $\wp_A$ es el único morfismo tal que

(5.12)
$$\begin{tikzcd} \wp\wp A \,\Pi\, \wp A \arrow[r, "e_{\wp A}"] & \Omega \\ \wp A \,\Pi\, \wp A \arrow[u, dashed, "\wp_A \Pi Id_{\wp A}"] \arrow[ur, "C_A^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$
conmuta

y donde C_A^{-1} es el característico de $Eq(\cap_A, \pi'_{\wp A,\wp A})$, el igualador de $\cap_A$ y $\pi'_{\wp A,\wp A}$.

Los morfismos $\cap_A, \cup_A$ representan internamente las operaciones $\cap$ y $\cup$ en los subobjetos de A:

<u>5.13.</u> Para subobjetos $A \xrightarrow{\bar M} \Omega$, $A \xrightarrow{\bar N} \Omega$, se tiene

$$\cap_A \circ \binom{\bar M e}{\bar N e} = (\bar M \cap \bar N)e \quad , \quad \cup_A \circ \binom{\bar M e}{\bar N e} = (\bar M \cup \bar N)e$$

<u>Demostración.</u>

PD. $\cap_A \circ \binom{\bar M e}{\bar N e} = (\bar M \cap \bar N)e$

Basta demostrar que $\left(\left(\cap_A \circ \binom{\bar M e}{\bar N e}\right) \Pi\, Id_A\right)^{-1}[e_A] = \left((\bar M \cap \bar N)e \,\Pi\, Id_A\right)^{-1}[e_A]$.

$$\left(\left(\cap_A \circ \binom{\bar M e}{\bar N e}\right) \Pi\, Id_A\right)^{-1}[e_A] = \left((\cap_A \Pi\, Id_A) \circ \left(\binom{\bar M e}{\bar N e} \Pi\, Id_A\right)\right)^{-1}[e_A] =$$
$$\overset{5.2.c}{=} \left(\binom{\bar M e}{\bar N e} \Pi\, Id_A\right)^{-1}\left[(\cap_A \Pi\, Id_A)^{-1}[e_A]\right] \overset{5.11}{=} \left(\binom{\bar M e}{\bar N e} \Pi\, Id_A\right)^{-1}\left[\binom{p_1}{p_3}^{-1}[e_A] \cap \binom{p_2}{p_3}^{-1}[e_A]\right]$$
$$:= \wedge\left\langle e_A \circ \binom{p_1}{p_3}, e_A \circ \binom{p_2}{p_3}\right\rangle \circ \left(\binom{\bar M e}{\bar N e} \Pi\, Id_A\right) =$$
$$= \wedge\left\langle e_A \circ \binom{p_1}{p_3} \circ \left(\binom{\bar M e}{\bar N e} \Pi\, Id_A\right), e_A \circ \binom{p_2}{p_3} \circ \left(\binom{\bar M e}{\bar N e} \Pi\, Id_A\right)\right\rangle =$$
$$= \wedge\left\langle e_A \circ \binom{\bar M e \circ \pi_{1,A}}{\pi'_{1,A}}, e_A \circ \binom{\bar N e \circ \pi_{1,A}}{\pi'_{1,A}}\right\rangle =$$
$$= \wedge\left\langle e_A \circ (\bar M e \,\Pi\, Id_A), e_A \circ (\bar N e \,\Pi\, Id_A)\right\rangle = \wedge\left\langle (\bar M e \,\Pi\, Id_A)^{-1}[e_A], (\bar N e \,\Pi\, Id_A)^{-1}[e_A]\right\rangle$$
$$\overset{5.5}{=} \wedge\left\langle \pi'^{-1}_{1,A}[\bar M], \pi'^{-1}_{1,A}[\bar N]\right\rangle = \wedge\left\langle \bar M \circ \pi'_{1,A}, \bar N \circ \pi'_{1,A}\right\rangle = \wedge\langle \bar M, \bar N\rangle \circ \pi'_{1,A} =$$
$$:= (\bar M \cap \bar N) \circ \pi'_{1,A} \overset{5.5}{=} \left((\bar M \cap \bar N)e \,\Pi\, Id_A\right)^{-1}[e_A]$$

Así (por 5.5) $\quad \cap_A \circ \binom{\bar M e}{\bar N e} = (\bar M \cap \bar N)e$.

En la demostración anterior si se reemplaza "$\cap$" por "$\cup$" se tiene que
$$\cup_A \circ \begin{pmatrix} \bar{M}e \\ \bar{N}e \end{pmatrix} = (\bar{M} \cup \bar{N})e$$

Nota. También se tiene que para cualquier subobjeto de A, $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega$
$\mathcal{P}_A(\bar{M}e) = \mathcal{P}[\bar{M}]e$.

5.14. Para $A \xrightarrow{f} B$, $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega$, $A \xrightarrow{\bar{K}} \Omega$, $B \xrightarrow{\bar{L}} \Omega$, $B \xrightarrow{\bar{N}} \Omega$, se tiene :

i) Si f es mono y $\bar{K} \subset \bar{M}$ entonces $f[\bar{K}] \subset f[\bar{M}]$

ii) Si $\bar{L} \subset \bar{N}$ entonces $f^{-1}[\bar{L}] \subset f^{-1}[\bar{N}]$.

Demostración.

i) Como $\bar{K} \subset \bar{M}$ entonces existe $\varphi : K \longrightarrow M$ tal que $k = m \circ \varphi$, donde $\bar{M} = \chi_{m : M \to A}$ y $\bar{K} = \chi_{k : K \to A}$.

Como f es mono entonces $f[\bar{K}] = \chi_{f \circ k}$ y $f[\bar{M}] = \chi_{f \circ m}$

$\therefore$ $f \circ k = (f \circ m) \circ \varphi$

$\therefore$ $f[\bar{K}] \subset f[\bar{M}]$.

ii) Sea $\bar{L} \subset \bar{N}$ P.D. $f^{-1}[\bar{L}] \subset f^{-1}[\bar{N}]$.

Sea $1 \xrightarrow{x} A$, $x \in f^{-1}[\bar{L}]$

entonces $f \circ x \in \bar{L} \subset \bar{N}$

entonces $f \circ x \in \bar{N}$

$\therefore$ $x \in f^{-1}[\bar{N}]$

$\therefore$ $f^{-1}[\bar{L}] \subset f^{-1}[\bar{N}]$

$\square$.

§6. Los Objetos-conjunto transitivo en la Teoría de los Topos.

Habiendo estudiado el funtor objeto-potencia $\wp$, ahora se introducirán los objetos-conjunto transitivos en TE (que corresponden a los conjuntos transitivos en la categoría de los conjuntos) y se probarán sus propiedades básicas. Se empezará con algunas definiciones en TE.

<u>Definición</u>. Una relación $A \xrightarrow{r} \wp A$ se llama

1) extensional sii r es mono,

2) bien fundada sii satisface el <u>Principio de inducción transfinita</u>:
$$\forall \bar{N} \left(A \xrightarrow{\bar{N}} \Omega \ \wedge \ r^{-1}[\wp[\bar{N}]] \subset \bar{N} \Rightarrow \bar{N} = 1(A) \right),$$

3) recursiva sii r tiene la siguiente <u>propiedad de recursión</u>: para cualquier $\wp B \xrightarrow{g} B$ existe un único morfismo $A \xrightarrow{f} B$, "r recursivamente definido por g", denotado $f = rec_r(g)$, tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \\ \wp A \arrow[r, "\wp f"'] & \wp B \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

conmuta;

4) un objeto-conjunto transitivo (o obj-conj-tr) sii r es extensional y recursiva.

Los objetos-conjunto transitivos en la categoría de los conjuntos en Z son isomorfos a los morfismos inclusión $T \hookrightarrow \wp T$ para conjuntos transitivos T y por lo tanto a los conjuntos-transitivos.

5) Sean $A \xrightarrow{r} \wp A$, $B \xrightarrow{s} \wp B$ relaciones; entonces un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ se llama una inclusión de r a s (denotado $r \xrightarrow{f} s$) sii

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[d, "s"] \\ \wp A \arrow[r, "\wp f"'] & \wp B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Se escribirá $r \subset s$ sii existe una inclusión $r \to s$.

6) Para caracterizar inclusiones, se definirá para cada monomorfismo $C \overset{t}{\rightarrowtail} \wp C$ un morfismo $\wp\tilde{C} \xrightarrow{\hat{t}} \tilde{C}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, tail, "t"] \arrow[d, equal] & \wp C \arrow[r, tail, "\wp j_C"] \arrow[d, phantom, "\text{P.F.}"] & \wp\tilde{C} \arrow[d, "\hat{t}"] \\
C \arrow[rr, tail, "j_C"] & & \tilde{C}
\end{tikzcd}$$

es Producto fibrado, donde $(\tilde{C}, j_C)$ es el clasificador de morfismos parciales para C, i.e. $\hat{t} = \chi(1d_C, (\wp j_C)\circ t)$, por ser t mono.

<u>6.1.</u> Proposición en TE.

Sean $A \xrightarrow{r} \wp A$ recursiva y $B \xrightarrow{s} \wp B$ extensional. Entonces:

a) Un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ es una inclusión sii

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[r, "j_B"] & \tilde{B} \\
\wp A \arrow[r, "\wp f"] & \wp B \arrow[r, "\wp j_B"] & \wp\tilde{B} \arrow[u, "\hat{s}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e. $j_B\circ f = rec_r(\hat{s})$.

b) Si $r\subset s$, entonces existe una <u>única</u> inclusión $r\to s$, denotada $in(r,s)$.

c) Si $r\subset s$ y r, s son objeto-conjunto transitivo, entonces la inclusión $in(r,s)$ es mono.

<u>Demostración</u>

a) <u>si</u>) Sea $A \xrightarrow{f} B$ tal que $j_B\circ f = rec_r(\hat{s})$

PD $r \xrightarrow{f} s$. ie. PD. $\wp f\circ r = s\circ f$.

Por hipótesis se tiene que $\hat{s}\circ\wp j_B\circ\wp f\circ r = j_B\circ f$ y por 6) se tiene:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dashed] \arrow[rrr, bend left, "\wp j_B\circ\wp f\circ r"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & B \arrow[r, tail, "s"] \arrow[d, equal] & \wp B \arrow[r, tail, "\wp j_B"] \arrow[d, phantom, "\text{P.F.}"] & \wp\tilde{B} \arrow[d, "\hat{s}"] \\
 & B \arrow[rr, tail, "j_B"] & & \tilde{B}
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces (P.F.) existe una única $A \xrightarrow{g} B$ tal que

$\wp j_B\circ s\circ g = \wp j_B\circ\wp f\circ r$ y $1d_B\circ g = f$

entonces $g = f$

$\therefore$ $\wp j_B\circ s\circ f = \wp j_B\circ\wp f\circ r$

$\therefore$ (por ser $\wp j_B$ mono) $s\circ f = \wp f\circ r$ $\therefore$ $r \xrightarrow{f} s$.

<u>sólo si</u>) Sea $r \xrightarrow{f} s$. PD. $j_B \circ f = \hat{s} \circ \wp j_B \circ \wp f \circ r$.

Por 6) se tiene que $\hat{s} \circ \wp j_B \circ s = j_B$, entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & B \arrow[r, "j_B"] \arrow[d, "s"] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & \tilde{B} \\
\wp A \arrow[r, "\wp f"'] & \wp B \arrow[r, "\wp j_B"'] & \wp \tilde{B} \arrow[u, "\hat{s}"']
\end{tikzcd}$$

(*) y (**) conmutan $\therefore$ el rectángulo exterior conmuta

$\therefore \quad \hat{s} \circ \wp j_B \circ \wp f \circ r = j_B \circ f$

b) PD. Si $r \subset s$ entonces existe una única inclusión $r \to s$.

Si $r \subset s$ entonces existe $A \xrightarrow{f} B$ tal que $\wp f \circ r = s \circ f$

Suponer que existe $A \xrightarrow{g} B$ tal que $\wp g \circ r = s \circ g$, por 6) se tiene que $\hat{s} \circ \wp j_B \circ s = j_B$, entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[r, "j_B"] \arrow[d, "s"] & \tilde{B} \\
\wp A \arrow[r, "\wp f"'] & \wp B \arrow[r, "\wp j_B"'] & \wp \tilde{B} \arrow[u, "\hat{s}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, análogamente para g.

entonces $\hat{s} \circ \wp j_B \circ \wp f \circ r = j_B \circ f$ y $\hat{s} \circ \wp j_B \circ \wp g \circ r = j_B \circ g$ ....(7)

Como r es recursiva entonces (por 3) para $\hat{s} : \wp \tilde{B} \to \tilde{B}$ existe un único morfismo $A \xrightarrow{h} \tilde{B}$ tal que $\hat{s} \circ \wp h \circ r = h$, pero por 7) $j_B \circ f$ y $j_B \circ g$ tienen la misma propiedad

$\therefore \; j_B \circ f = j_B \circ g$

$\therefore$ (j_B mono) $f = g$

c) P.D. Si $r \subset s$ y r, s son objeto-conj-tr. entonces $in(r,s)$ es mono.

Como r es extensional, por 6) existe $\hat{r} : \wp \tilde{A} \to \tilde{A}$ tal que $j_A = \hat{r} \circ \wp j_A \circ r$.

entonces (por ser s recursiva) existe un único morfismo $B \xrightarrow{g} \tilde{A}$ tal que $\hat{r} \circ \wp g \circ s = g$ (i.e. $g = rec_s(\hat{r})$), entonces se tiene:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "in(r,s)"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & \tilde{A} \\
\wp A \arrow[r, "\wp in(r,s)"'] & \wp B \arrow[r, "\wp g"'] & \wp \tilde{A} \arrow[u, "\hat{r}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Entonces (por ser r recursiva) $g \circ in(r,s) = rec_r(F)$, pero también $\hat{P} \circ \mathcal{P}_{j_A} \circ r = j_A$,
entonces (por la unicidad) $j_A = g \circ in(r,s)$, pero j_A es mono entonces $in(r,s)$ es mono.

□.

La relación de inclusión es claramente un preorden (i.e es reflexiva y transitiva), además:

6.2. Para objeto-conjunto-transitivo r, s se tiene
$r \subset s$ y $s \subset r$ sii $r \cong s$
($r \cong s$ significa que las inclusiones $in(r,s)$ e $in(s,r)$ son isomorfismos).

Demostración.

si) Si $r \cong s$ entonces, en particular se tiene que $r \subset s$ y $s \subset r$.

sólo si) Si $r \subset s$ y $s \subset r$ PD. $r \cong s$.

Como r y s son objetos-conj-tr entonces (por 6.1.c) $in(r,s)$ e $in(s,r)$ son monos.

Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "in(r,s)"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[r, tail, "in(s,r)"] \arrow[d, "s"'] & A \arrow[d, "r"'] \\ \mathcal{P}A \arrow[r, tail, "\mathcal{P}in(r,s)"'] & \mathcal{P}B \arrow[r, tail, "\mathcal{P}in(s,r)"'] & \mathcal{P}A \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, equal, "1d_A"] \arrow[d, "r"'] & A \arrow[d, "r"] \\ \mathcal{P}A \arrow[r, tail, "1_{\mathcal{P}A}"'] & \mathcal{P}A \end{tikzcd} \quad \text{conmutan}$$

entonces (por 6.1.b) $1d_A = in(r,r) = in(s,r) \circ in(r,s)$
entonces $in(s,r)$ es retracción y es mono
entonces (en TE) $in(s,r)$ es isomorfismo

Análogamente $in(r,s)$ es isomorfismo

$\therefore r \cong s$

□.

Ahora se quiere demostrar que los objetos-conj-tr tienen intersecciones y uniones (i.e. ínfimo y supremo con respecto a la inclusión, para ésto se requiere de lo siguiente:

6.3. Teorema en TE.

Los objetos-conjunto transitivo son bien fundados.

Demostración.

Sea $A \xrightarrow{r} \mathcal{P}A$ un objeto-conj-tr. y $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega$ un subobjeto de A tal que $r^{-1}[\mathcal{P}[\bar{M}]] \subset \bar{M}$.

PD. $\overline{M} = 1(A)$.

Sea $\overline{M} = \chi_{M \overset{m}{\rightarrowtail} A}$ y $r^{-1}[\beta[\overline{M}]] = \chi_{r^*(\beta m)}$, $r^*(\beta M) \xrightarrow{r^*(\beta m)} A$

PD. m es isomorfismo.

Como $r^{-1}[\beta[\overline{M}]] \subset \overline{M}$ entonces existe $r^*(\beta M) \xrightarrow{k} M$ tal que $m \circ k = r^*(\beta m)$, entonces se tiene:

$$\begin{tikzcd}
r^*(\beta M) \arrow[r, tail, "r^*(\beta m)"] \arrow[d, "n"] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \arrow[d, "r"] \\
\beta M \arrow[r, tail, "\beta m"] & \beta A
\end{tikzcd}$$

Sea $\beta\tilde{M} \xrightarrow{g} \tilde{M}$ el morfismo característico $\chi(k, \beta j_M \circ n)$ entonces como r es recursiva, para g, existe una única $f : A \to \tilde{M}$ tal que $g \circ \beta f \circ r = f$ (i.e. $f = rec_r(g)$).

Sea $\tilde{m} : \tilde{M} \to \tilde{A}$ el morfismo característico $\chi(m, j_M)$, entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "j_M"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \arrow[d, "j_A"] \\
\tilde{M} \arrow[r, tail, dashed, "\tilde{m}"'] & \tilde{A}
\end{tikzcd}$$

entonces (por 5.9 y j_A mono)

$$\begin{tikzcd}
\beta M \arrow[r, tail, "\beta m"] \arrow[d, "\beta j_M"'] & \beta A \arrow[d, "\beta j_A"] \\
\beta\tilde{M} \arrow[r, tail, "\beta\tilde{m}"'] & \beta\tilde{A}
\end{tikzcd}$$

es P.F.

y sea $\hat{r} = \chi(1d_A, \beta j_A \circ r)$ (ver 6))

Juntando todo se tienen los siguientes productos fibrados

$$\begin{tikzcd}
r^*(\beta M) \arrow[r, tail, "n"] \arrow[d, "r^*(\beta m)"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \beta M \arrow[r, tail, "\beta j_M"] \arrow[d, "\beta m"] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \beta\tilde{M} \arrow[d, "\beta\tilde{m}"] \\
A \arrow[r, tail, "r"] \arrow[d, equal] & \beta A \arrow[r, "j_A"] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \beta\tilde{A} \arrow[d, "\hat{r}"] \\
A \arrow[rr, tail, "j_A"'] & & \tilde{A}
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
r^*(\beta M) \arrow[r, tail, "n"] \arrow[d, "k"] \arrow[dd, bend right=60, "r^*(\beta m)"'] & \beta M \arrow[r, tail, "\beta j_M"] \arrow[d, phantom, "\text{P.F}"] & \beta\tilde{M} \arrow[d, "g"] \\
M \arrow[rr, tail, "j_M"'] \arrow[d, "m"] & \text{P.F.} & \tilde{M} \arrow[d, "\tilde{m}"] \\
A \arrow[rr, tail, "j_A"'] & & \tilde{A}
\end{tikzcd}$$

entonces (propiedad universal de $(\tilde{A}, j_A)$) $\hat{r} \circ \beta\tilde{m} = \chi(r^*(\beta m), \beta j_M \circ n) = \tilde{m} g$

entonces ($f = rec_r(g)$)

$$\tilde{m} \circ f = \tilde{m} \circ g \circ \beta f \circ r = \hat{r} \circ \beta\tilde{m} \circ \beta f \circ r = \hat{r} \circ \beta \tilde{m} \circ f \circ r$$

entonces $\tilde{m} \circ f = rec_r(\hat{r}) \underset{(6)}{=} j_A$ (por ser r recursiva)

Ahora tomemos el P.F. (j_M, f), entonces se tiene

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "l"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "j_M"] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & A \arrow[d, "j_A"] \\
A \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "j_A"'] & \tilde{M} \arrow[r, "\tilde{m}"'] \arrow[d, phantom, "2"] & \tilde{A} \\
& {} &
\end{tikzcd}$$

pero j_A es mono $\Rightarrow$ $(1d_A, 1d_A) = P.F.(j_A, j_A)$

entonces existe $\psi : A \longrightarrow D$ isomorfismo tal que $m \circ l \circ \psi = 1d_A$
entonces m es epi

$\therefore$ (m es mono) m es isomorfismo

$\therefore$ $M \simeq A$

$\therefore$ $\bar{M} = 1(A)$

$\therefore$ r es bien fundada $\square$.

6.4. Proposición en TE.

Para cualquier relación bien fundada, $A \xrightarrow{r} \mathcal{P}A$ y cualquier $\mathcal{P}B \xrightarrow{g} B$, existe a lo más un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \\
\mathcal{P}A \arrow[r, "\mathcal{P}f"'] & \mathcal{P}B \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

conmuta.

<u>Demostración:</u>

Suponer que existen $A \overset{f}{\underset{f'}{\rightrightarrows}} B$ tales que $g \circ \mathcal{P}f \circ r = f$ y $g \circ \mathcal{P}f' \circ r = f'$. PD. $f = f'$.

Sea (M, m) el igualador de f y f' (m es monomorfismo)
y sea $\bar{M} = \chi_m$

PD. $r^{-1}[\mathcal{P}[\bar{M}]] \subset \bar{M}$.

Se tiene el siguiente P.F.

$$\begin{tikzcd}
r^*(\mathcal{P}M) \arrow[r, tail, "r^*(\mathcal{P}m)"] \arrow[d, "n"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \arrow[d, "r"] \\
\mathcal{P}M \arrow[r, tail, "\mathcal{P}m"'] & \mathcal{P}A
\end{tikzcd}$$

pues $r^{-1}[\mathcal{P}[\bar{M}]] = \chi_{r^*(\mathcal{P}m)}$

1º. PD. $f \circ r^*(\mathcal{P}m) = f' \circ r^*(\mathcal{P}m)$

$$f \circ r^*(\mathcal{P}m) = (g \circ \mathcal{P}f \circ r) \circ r^*(\mathcal{P}m) \underset{(P.F)}{=} g \circ \mathcal{P}f \circ \mathcal{P}m \circ n \underset{\mathcal{P}\text{ funtor}}{=} g \circ \mathcal{P}_{f \circ m} \circ n =$$

$$\underset{\text{como } ((M,m) = Eq(f,f'))}{=} g \circ \mathcal{P}_{f' \circ m} \circ n = g \circ \mathcal{P}_{f'} \circ \mathcal{P}_m \circ n \underset{P.F.}{=} (g \circ \mathcal{P}f' \circ r) \circ r^*(\mathcal{P}m) =$$

$$= f' \circ r^*(\mathcal{P}m)$$

entonces ((M,m) = Eq(f,f')) existe una única $r^*(\wp m) \xrightarrow{k} M$ tal que $m \circ k = r^*(\wp m)$

$\therefore$ $r^{-1}[\wp[\bar{M}]] \subset \bar{M}$

$\therefore$ (r es bien fundada) $\bar{M} = 1(A)$ (ie. $m \cong 1d_A$)

$\therefore$ $f = f'$

D.

6.5. Teorema en TE.

Si $A \xrightarrow{r} \wp A$, $B \xrightarrow{s} \wp B$ son relaciones y $s \xrightarrow{i} r$ es una inclusión, entonces:

a) Si r es bien fundada entonces s es bien fundada;

b) Si la inclusión i es mono entonces:

Si r es un objeto-conjunto transitivo entonces s también lo es.

Demostración.

a) Sean $A \xrightarrow{r} \wp A$, $B \xrightarrow{s} \wp B$ relaciones y $s \xrightarrow{i} r$ es una inclusión

PD. Si r es bien fundada entonces s es bien fundada.

Sea $B \xrightarrow{\bar{N}} \Omega$ un subobjeto de B tal que $s^{-1}[\wp[\bar{N}]] \subset \bar{N}$

PD. $\bar{N} = 1(B)$.

Sea $\bar{N} = \chi_{n: N \rightarrowtail B}$

Como $B \xrightarrow{i} A$ entonces $i\langle\bar{N}\rangle : A \longrightarrow \Omega$, la imagen directa universal de $\bar{N}$ bajo i, (ver §5), donde $i\langle\bar{N}\rangle = \chi_{\pi_i(n)}$

1º PD $r^{-1}[\wp[i\langle\bar{N}\rangle]] \subset i\langle\bar{N}\rangle$

Por 5.1.b $i^{-1}[i\langle\bar{N}\rangle] \subset \bar{N}$ ... (1)

Por 5.10 $(\wp i)^{-1}[\wp[i\langle\bar{N}\rangle]] = \wp[i^{-1}[i\langle\bar{N}\rangle]] \underset{(1)}{\subset} \wp[\bar{N}]$

entonces $s^{-1}[(\wp i)^{-1}[\wp[i\langle\bar{N}\rangle]]] \subset s^{-1}[\wp[\bar{N}]] \underset{\text{hipótesis}}{\subset} \bar{N}$

$$\| \ (5.2.a)$$

$$(\wp i \circ s)^{-1}[\wp[i\langle\bar{N}\rangle]]$$

$$\| \ (i: s \subset r)$$

$$(r \circ i)^{-1}[\wp[i\langle\bar{N}\rangle]]$$

$$\| \ (5.2.a)$$

$$i^{-1}[r^{-1}[\wp[i\langle\bar{N}\rangle]]]$$

$\therefore$ $i^{-1}[r^{-1}[\wp[i\langle\bar{N}\rangle]]] \subset \bar{N}$

entonces (por 5.1.b) $r^{-1}[\wp[i\langle\bar{N}\rangle]] \subset i\langle\bar{N}\rangle$

entonces (por ser r bien fundada) $i\langle\bar{N}\rangle = 1(A)$

El siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, dashed] \arrow[rr, bend left, "\beta"] \arrow[dr, bend right, "\alpha"'] & B \arrow[r, "1d_B"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "i"] \\
 & A \arrow[r, "1d_A"] & A
\end{tikzcd}$$

Pues claramente conmuta y si $C \xrightarrow{\beta} B$ y $C \xrightarrow{\alpha} A$ son morfismos tales que $i\beta = \alpha$, entonces existe $h := \beta$ tal que $ih = i\beta = \alpha$ y es única por ser $1d_B$ monomorfismo.

$\therefore\ i^{-1}[1(A)] = 1(B)$
$\therefore\ i^{-1}[i\langle\bar{N}\rangle] = i^{-1}[1(A)] = 1(B)$
entonces $1(B) = i^{-1}[i\langle\bar{N}\rangle] \underset{(5.2.6)}{\subset} \bar{N} \subset 1(B)$
$\therefore\ \bar{N} = 1(B)$
$\therefore$ s es bien fundada.

b) Sean $B \xrightarrow{s} \wp B$ y $A \xrightarrow{r} \wp A$ relaciones, $s \xrightarrow{i} r$ una inclusión e i es un monomorfismo.
PD. Si r es obj-conj-tr entonces s es obj-conj-tr.
1º PD. s es extensional (ie. es monomorfismo).
Como $s \xrightarrow{i} r$ entonces $\wp i \circ s = r \circ i$, como r e i son monomorfismos entonces $r \circ i$ lo es.
$\therefore\ \wp i \circ s$ es mono $\therefore$ s es mono
$\therefore$ s es extensional.

2º PD. s es recursiva.
Sea $\wp C \xrightarrow{g} C$ un morfismo. PD. Existe un único morfismo $B \xrightarrow{h} C$ tal que $h \overset{!}{=} g \circ \wp h \circ s$.
Como r es recursiva entonces existe un único $A \xrightarrow{f} C$ tal que $f = g \circ \wp f \circ r$
Sea $h := f \circ i$
$g \circ \wp_{f \circ i} \circ s = g \circ \wp f \circ \wp i \circ s \underset{i:s\subset r}{=} (g \circ \wp f \circ r) \circ i = f \circ i$

PD. h es única con esa propiedad.
Como r es obj-conj. tr. entonces (por 6.3) r es bien fundada entonces (por a) s es bien fundada, entonces (por 6.4) h es única con esa propiedad.
$\therefore$ s es recursiva
$\therefore$ s es extensional y recursiva
$\therefore$ s es obj-conj-tr $\square$.

Ahora se probará un teorema importante:

<u>6.6.</u> Teorema en TE.
Para objetos-conjunto transitivo $A \xrightarrow{r} \wp A$, $B \xrightarrow{s} \wp B$ existe un

objeto-conjunto transitivo $A\cap B \xrightarrow{r\cap s} \wp(A\cap B)$, la intersección de r y s y un objeto-conjunto transitivo $A\cup B \xrightarrow{r\cup s} \wp(A\cup B)$, la unión de r y s, los cuáles son el ínfimo y el supremo de (r,s) con respecto a la relación inclusión.

Demostración.

1) Para la construcción de $r\cap s$, considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& A\cap B \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[dd, dashed, "r\cap s"] \arrow[drr, phantom, "P.F."] & & B \arrow[dl, "j_B"'] \arrow[dd, "s"] \\
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "r"'] & & \tilde{B} & \\
& \wp(A\cap B) \arrow[rr, "\wp d_2"] \arrow[dl, "\wp d_1"'] \arrow[drr, phantom, "P.F."] & & \wp B \arrow[dl, "\wp j_B"] \\
\wp A \arrow[rr, "\wp f"'] & & \wp\tilde{B} \arrow[uu, "\hat{s}"'] &
\end{tikzcd}$$

el cuál conmuta si:

$f = \mathrm{rec}_p(\hat{s})$

$(d_1, d_2) = P.F.\,(f, j_B)$

$\hat{s} = \chi(\mathrm{id}_B, \wp j_B \circ s)$

Como
$$\begin{tikzcd}
A\cap B \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & B \arrow[d, "j_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & \tilde{B}
\end{tikzcd}$$
y j_B es mono, entonces (por 5.9)

$(\wp d_1, \wp d_2) = P.F.\,(\wp f, \wp j_B)$

PD. $\wp j_B \circ s \circ d_2 = \wp f \circ r \circ d_1$

$$(\hat{s}\circ \wp f \circ r)\circ d_1 = f\circ d_1 \underset{P.F.}{=} j_B \circ d_2 = (\hat{s}\circ \wp j_B \circ s)\circ d_2$$

entonces
$$\begin{tikzcd}
A\cap B \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "\wp f\circ r\circ d_1"] \arrow[ddr, bend right, "d_2"'] & & \\
& B \arrow[r, "\wp j_B \circ s"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \wp\tilde{B} \arrow[d, "\hat{s}"] \\
& B \arrow[r, "j_B"'] & \tilde{B}
\end{tikzcd}$$

entonces existe un único $h: A\cap B \to B$ tal que $\mathrm{id}_B \circ h = d_2$ y $\wp j_B \circ s \circ h = \wp f \circ r \circ d_1$

$\therefore\ h = d_2$ y $\wp f \circ r \circ d_1 = \wp j_B \circ s \circ d_2$.

Entonces se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A\cap B \arrow[dr, dashed, "r\wedge s"] \arrow[drr, bend left, "s\circ d_2"] \arrow[ddr, bend right, "r\circ d_1"'] & & \\
& \wp(A\cap B) \arrow[r, "\wp d_2"] \arrow[d, "\wp d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \wp B \arrow[d, "\wp j_B"] \\
& \wp A \arrow[r, "\wp f"'] & \wp\tilde{B}
\end{tikzcd}$$

entonces existe un único morfismo $r\wedge s$ tal que $\wp d_2\circ(r\wedge s)=s\circ d_2$ y $\wp d_1\circ(r\wedge s)=r\circ d_1$.

∴ todo el cubo anterior conmuta.

Y como $\wp d_1\circ(r\wedge s)=r\circ d_1$, $\wp d_2\circ(r\wedge s)=s\circ d_2$ y d_1 es mono (por serlo j_B) entonces (por 6.5.b) $r\wedge s$ es un obj-conj. tr. entonces (por 6.1.c) d_2 es mono.

∴ $r\wedge s\subset r$ y $r\wedge s\subset s$

2) PD. $r\wedge s$ es el ínfimo de (r,s) (i.e. Si t es obj-conj. tr. tal que $t\subset r$ y $t\subset s$ entonces $t\subset r\wedge s$)

Sea $C\xrightarrow{t}\wp C$ obj-conj. tr tal que $t\xrightarrow{h}r$ y $t\xrightarrow{k}s$ son inclusiones. Como r es recursiva y $\wp\tilde{B}\xrightarrow{\hat{s}}\tilde{B}$ el morfismo característico $\chi(1d_B,\wp j_B\circ s)$ entonces sea $f:=rec_r(\hat{s})$

entonces $\hat{s}\circ\wp f\circ(\wp h\circ t)\underset{t\xrightarrow{h}r}{=}(\hat{s}\circ\wp f\circ r)\circ h=f\circ h$

∴ (por ser t recursiva) $f\circ h=rec_t(\hat{s})$

Pero $\hat{s}\circ\wp j_B\circ(\wp_k\circ t)\underset{t\xrightarrow{k}s}{=}(\hat{s}\circ\wp j_B\circ s)\circ k\underset{\text{P.F.}}{=}j_B\circ k$

∴ (por ser t recursiva) $j_B\circ k=rec_t(\hat{s})$

entonces (unicidad de $rec_t(\hat{s})$) $j_B\circ k=f\circ h$

entonces ($(d_1,d_2)=\text{P.F.}(f,j_B)$) existe un único $C\xrightarrow{l}A\cap B$ tal que $d_2\circ l=k$ y $d_1\circ l=h$

PD. $\wp l\circ t=(r\wedge s)\circ l$, $l:C\to A\cap B$.

$$\wp d_1\circ\wp l\circ t=\wp_{d_1\circ l}\circ t=\wp_h\circ t\underset{t\xrightarrow{h}r}{=}r\circ h=r\circ d_1\circ l\underset{m\xrightarrow{d_1}r}{=}\wp d_1\circ(r\wedge s)\circ l$$

entonces (por ser $\wp d_1$ mono) $\wp l\circ t=(r\wedge s)\circ l$

∴ $l:t\to r\wedge s$ ∴ $t\subset r\wedge s$.

3) Construcción de $r \cup s$. Considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A\cap B \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[dd, "r\cap s"] \arrow[dr, phantom, "C.F.\ y\ P.F."] & & B \arrow[dl, "v_2"] \arrow[dd, "s"] \\
A \arrow[rr, "v_1"] \arrow[dd, "r"'] & & A\cup B \arrow[dd, dashed, "r\cup s" near start] & \\
& \wp(A\cap B) \arrow[rr, "\wp d_2"] \arrow[dl, "\wp d_1"] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & & \wp B \arrow[dl, "\wp v_2"] \\
\wp A \arrow[rr, "\wp v_1"'] & & \wp(A\cup B) &
\end{tikzcd}$$

el cuál conmuta si

$(v_1, v_2) = CF(d_1, d_2)$, con d_1, d_2, m_s como en el diagrama anterior.

Como d_1 y d_2 son monos entonces por A.14. v_1 y v_2 son monos y $(d_1, d_2) = P.F.\ (v_1, v_2)$.

$\therefore$ (por 5.9) $\quad (\wp d_1, \wp d_2) = P.F.\ (\wp v_1, \wp v_2)$.

Ahora $(\wp v_1 \circ r) \circ d_1 = \wp v_1 \circ \wp d_1 \circ (r \cap s) = \wp v_2 \circ \wp d_2 \circ (r\cap s) = (\wp v_2 \circ s) \circ d_2$ entonces (por ser $(v_1, v_2) = CF(d_1, d_2)$) existe un único morfismo, que denotaremos $r \cup s : A \cup B \longrightarrow \wp(A\cup B)$ tal que $(r \cup s) \circ v_2 = \wp v_2 \circ s$ y $(r\cup s) \circ v_1 = \wp v_1 \circ r$.

$\therefore$ todo el cubo conmuta.

PD. $r \subset (r\cup s)$ y $s \subset (r \cup s)$

Pero $\wp v_1 \circ r = (r \cup s) \circ v_1$ y $\wp v_2 \circ s = (r\cup s) \circ v_2$

$\therefore$ $r \xrightarrow{v_1} r\cup s$ y $s \xrightarrow{v_2} r \cup s$.

a) PD. $r \cup s$ es recursiva.

Sea $\wp C \xrightarrow{g} C$ un morfismo.

PD. Existe un único morfismo $A\cup B \xrightarrow{l} C$ tal que $g \circ \wp_l \circ (r\cup s) = l$

Como r y s son recursivas existen morfismos $A \xrightarrow{l'} C$ y $B \xrightarrow{l''} C$, únicos, tales que $g \circ \wp l' \circ r = l'$ y $g \circ \wp l'' \circ s = l''$.

Entonces $l' \circ d_1 = g \circ \wp l' \circ r \circ d_1 \underset{m_s \xrightarrow{d_1} r}{=} g \circ \wp l' \circ \wp d_1 \circ (r \cap s) \underset{\wp \text{ funtor}}{=} g \circ \wp_{l' \circ d_1} \circ (r\cap s)$

y $l'' \circ d_2 = g \circ \wp l'' \circ s \circ d_2 \underset{m_s \xrightarrow{d_2} s}{=} g \circ \wp l'' \circ \wp d_2 \circ (r \cap s) \underset{\wp \text{ funtor}}{=} g \circ \wp_{l'' \circ d_2} \circ (r \cap s)$

entonces (por ser $r \cap s$ recursiva) $\quad l' \circ d_1 = rec_{m_s}(g) = l'' \circ d_2$

$\therefore$ $l' \circ d_1 = l'' \circ d_2$

entonces (C.F.) existe un único $A \cup B \xrightarrow{l} C$ tal que $l \circ v_1 = l'$ y $l \circ v_2 = l''$.

PD. $g\circ\wp_\ell\circ r\cup s = \ell$

$$g\circ\wp_\ell\circ(r\cup s\circ v_1) = g\circ\wp_\ell\circ\wp_{v_1}\circ r \underset{\wp\ \text{funtor}}{=} g\circ\wp_{\ell\circ v_1}\circ r = g\circ\wp_{\ell'}\circ r =$$
$$\underset{z=rec_r(y)}{=} \ell'$$

Análogamente se demuestra que $g\circ\wp_\ell\circ r\cup s\circ v_2 = \ell''$ entonces (propiedad universal del C.F.) $g\circ\wp_\ell\circ r\cup s = \ell$

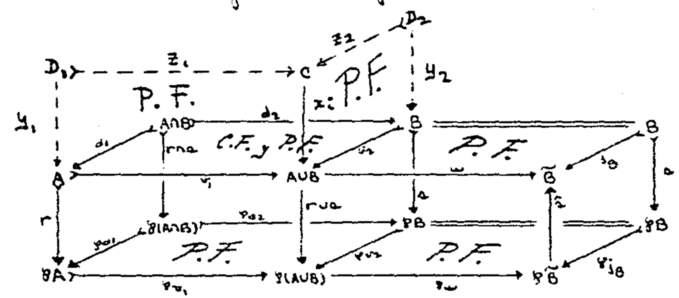
$\therefore$ $r\cup s$ es recursiva.

b) PD. $r\cup s$ es extensional (ie monomorfismo).

Sean $C \overset{x_1}{\underset{x_2}{\rightrightarrows}} A\cup B$ morfismos tales que $(r\cup s)\circ x_1 = (r\cup s)\circ x_2$

PD. $x_1 = x_2$.

Considérese el siguiente diagrama: $i=1,2$



... (*)

donde $w = \chi(1d_B, v_2)$ entonces (por 5.9) $(\wp v_2, 1d_{\wp B}) = P.F.(\wp w, \wp_{j_B})$

PD. $w = rec_{r\cup s}(\hat{z})$

$$w\circ v_2 \underset{(AB)}{=} j_B \underset{(b)}{=} \hat{z}\circ\wp_{j_B}\circ s \underset{(P.F.)}{=} \hat{z}\circ(\wp w\circ\wp v_2)\circ s \underset{\text{conmuta}}{=} \hat{z}\circ\wp w\circ(r\cup s)\circ v_2$$

entonces $\quad w\circ(v_1\circ d_1) \underset{(C.F.)}{=} w\circ v_2\circ d_2 = \hat{z}\circ\wp w\circ(r\cup s)\circ v_2\circ d_2 \underset{(C.F.)}{=} \hat{z}\circ\wp w\circ(r\cup s)\circ v_1\circ d_1$

entonces (C.F.) existe un único morfismo $A\cup B \xrightarrow{h} \tilde{B}$ tal que

$w\circ v_1 = h\circ v_1 \quad , \quad \hat{z}\circ\wp w\circ(r\cup s)\circ v_1 = h\circ v_1$;

$w\circ v_2 = h\circ v_2 \quad , \quad \hat{z}\circ\wp w\circ(r\cup s)\circ v_2 = h\circ v_2$

$\therefore$ (unicidad) $h = w = \hat{z}\circ\wp w\circ(r\cup s)$

$\therefore$ $w = \hat{z}\circ\wp w\circ r\cup s$

entonces (por ser $r\cup s$ recursiva) $w = rec_{r\cup s}(\hat{z})$

Como $w\circ v_i = \hat{z}\circ\wp w\circ r\cup s\circ v_i \quad , \quad i=1,2$

entonces $\quad \hat{z}\circ(\wp w\circ\wp_{v_1})\circ r \underset{\text{conmuta}}{=} \hat{z}\circ\wp w\circ r\cup s\circ v_1 = w\circ v_1$

entonces (por ser r recursiva) $w \circ v_1 = rec_r(\hat{s}) \underset{(1)}{=} f$
entonces (por 1) P.F. $(w \circ v_1, j_B) = (d_1, d_2)$, pero también se tiene que $PF(v_1, v_2) = (d_1, d_2)$

En diagrama se tiene:

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & B \arrow[r, equal] \arrow[d, "v_2"] & B \arrow[d, "j_B"] \\
A \arrow[r, "v_1"'] \arrow[rr, bend right, "f"'] & A \cup B \arrow[r, "w"'] & \tilde{B}
\end{tikzcd}$$
es P.F.

$\therefore \quad PF(w, j_B) = (v_2, Id_B)$

$$w \circ x_1 = \hat{s} \circ \wp w \circ (r \cup s \circ x_1) \underset{\text{hipótesis}}{=} \hat{s} \circ \wp w \circ (r \cup s \circ x_2) = w \circ x_2$$

$$\therefore \ PF(j_B, w \circ x_1) = PF.(j_B, w \circ x_2) = (y_2, z_2)$$

entonces se tiene:

$$\begin{tikzcd}
D_2 \arrow[r, "z_2"] \arrow[d, "y_2"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & C \arrow[d, "w \circ x_i"] \\
B \arrow[r, tail, "j_B"'] & \tilde{B}
\end{tikzcd} \qquad i = 1, 2$$

Como $w \circ v_2 = j_2$ y z_2 mono, por serlo j_B
entonces se tiene que para $i = 1, 2$ $\quad PF(x_i, v_2) = (z_2; y_2)$

$$\begin{tikzcd}
D_2 \arrow[r, "z_2"] \arrow[d, "y_2"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & C \arrow[d, "x_i"] \\
B \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \cup B \arrow[d, "w"] \\
B \arrow[r, "j_B"'] & \tilde{B}
\end{tikzcd}$$

Análogamente se demuestra que para $i = 1, 2$ $\quad$ P.F.$(x_i, v_1) = (z_1, y_1)$ con z_1 monomorfismo.
Con ésto ya se tiene que $(*)$ conmuta.

Entonces para $i = 1, 2$ se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, tail, "z_1"] \arrow[d, "y_1"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & C \arrow[d, "x_i"] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & D_2 \arrow[l, tail, "z_2"'] \arrow[d, "y_2"] \\
A \arrow[r, tail, "v_1"'] & A \cup B & B \arrow[l, tail, "v_2"]
\end{tikzcd}$$

Entonces por A.13. se tiene:

$$\begin{tikzcd} D_1 \amalg D_2 \arrow[r, "{[z_1,z_2]}"] \arrow[d, "y_1 \amalg y_2"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & C \arrow[d, "x_i"] \\ A \amalg B \arrow[r, "{[v_1,v_2]}"'] & A \cup B \end{tikzcd} \qquad i = 1,2.$$

$\therefore \quad x_1 \circ [z_1,z_2] = [v_1,v_2] \circ (y_1 \amalg y_2) = x_2 \circ [z_1,z_2]$

y por A.15. $[v_1,v_2]$ es epi

entonces A.13. $[z_1,z_2]$ es epi

$\therefore$ $x_1 = x_2$

$\therefore$ $r \cup s$ es monomorfismo (ie. extensional)

$\therefore$ $r \cup s$ es obj.-conj. tr.

4) Falta demostrar que $r \cup s$ es el supremo de (r,s)

Sea $C \xrightarrow{t} \wp C$ un obj.-conj.-tr. tal que $r \xrightarrow{h} t$ y $s \xrightarrow{k} t$ inclusiones

PD. $r \cup s \subset t$

$(t \circ h) \circ d_1 \underset{r \subset t}{=} \wp h \circ r \circ d_1 \underset{r \cap s \subset r}{=} \wp h \circ \wp d_1 \circ r \cap s$ y

$(t \circ k) \circ d_2 \underset{s \subset t}{=} \wp k \circ s \circ d_2 \underset{r \cap s \subset s}{=} \wp k \circ \wp d_2 \circ r \cap s$

entonces $r \cap s \underset{h \circ d_1}{\overset{k \circ d_2}{\rightrightarrows}} t$ son inclusiones

entonces (6.1.b) $k \circ d_2 = h \circ d_1$

entonces ($(v_1,v_2) = $ C.F. (d_1,d_2)) existe un único $h \cup k : A \cup B \longrightarrow C$ tal que $(h \cup k) \circ v_1 = h$ y $(h \cup k) \circ v_2 = k$

Pero también se tiene que $t \circ h \circ d_1 = t \circ k \circ d_2$ entonces (C.F.) existe un único $g : A \cup B \longrightarrow \wp C$ tal que $g \circ v_1 = t \circ h$ y $g \circ v_2 = t \circ k$

pero $t \circ (h \cup k)$ lo hace $\therefore$ $g = t \circ (h \cup k)$

pero también se tiene

$\wp(h \cup k) \circ (r \cup s \circ v_1) = (\wp(h \cup k) \circ \wp v_1 \circ r \underset{\wp \text{ funtor}}{=} \wp_{(h \cup k) \circ v_1} \circ r = \wp h \circ r = t \circ h$

Análogamente $\wp(h \cup k) \circ r \cup s \circ v_2 = t \circ k$

$\therefore$ (unicidad) $\quad t \circ (h \cup k) = g = \wp(h \cup k) \circ (r \cup s)$.

$\therefore \quad r \cup s \xrightarrow{h \cup k} t$ es inclusión

$\therefore \quad r \cup s$ es el supremo de (r,s)

D.

<u>6.7.</u> $0 \to \wp 0$ es "el" objeto conjunto transitivo mínimo (con respecto a $\subset$)

Se sabe que $\wp 0 \cong 1$, el objeto terminal del topo, se denotará $!_0 := \phi_0$

PD. ϕ_0 es obj. conj. tr.

1.- ϕ_0 es extensional porque tiene de dominio a 0, el objeto inicial

2.- ϕ_0 es recursiva. Sea $\wp B \xrightarrow{g} B$ un morfismo, entonces como 0 es obj. inicial, existe un único morfismo $0_B : 0 \to B$

$\therefore \quad g \circ \wp_{0_B} \circ \phi_0 = 0_B$

$\therefore$ ϕ_0 es obj. conj. tr.

Sea $A \xrightarrow{r} \wp A$ un obj. conj. tr. PD. $\phi_0 \subset r$

De nuevo, se tiene un único morfismo $0_A : 0 \to A$, entonces

$r \circ 0_A = \wp_{0_A} \circ \phi_0 = 0_{\wp A}$

$\therefore \phi_0 \subset r$ Para todo r obj. conj. tr. $\square$

<u>Observaciones</u>

Como corolario de 6.7. se tiene que si r es obj. conj. tr entonces $r \cup \phi_0 = r$ y $r \cap \phi_0 = \phi_0$.

<u>6.8.</u> Proposición en TE.

Si $A \xrightarrow{r} \wp A$ es un objeto conjunto transitivo entonces $\wp A \xrightarrow{\wp r} \wp\wp A$ también lo es y $r \xrightarrow{r} \wp r$ es la inclusión.

<u>Demostración</u>

Como r es extensional entonces (por 5.8.a) $\wp r$ también lo es.

PD. $\wp r$ es recursiva.

Sea $\wp B \xrightarrow{g} B$ un morfismo. PD. Existe un único $\wp A \xrightarrow{h} B$ morfismo tal que $g \circ \wp h \circ \wp r = h$

Como r es recursiva, tomemos $rec_r(g)$.

Se define $h := g \circ \wp_{rec_r(g)}$

$$g \circ \wp h \circ \wp r = g \circ \wp_{g \circ \wp_{rec_r(g)}} \circ \wp r \underset{\wp \text{ funtor}}{=} g \circ \wp_{g \circ \wp_{rec_r(g)} \circ r} \underset{rec_r(g)}{=} g \circ \wp_{rec_r(g)} = h$$

PD. h es única

Suponer que existe $\wp A \xrightarrow{h'} B$ tal que $g \circ \wp h' \circ \wp r = h'$ entonces $g \circ \wp_{h' \circ r} \circ r = g \circ \wp h' \circ \wp r \circ r = h' \circ r$.

$\therefore$ (r recursiva) $h' \circ r = rec_r(g)$

$\therefore \quad h := g \circ \wp_{rec_r(g)} = g \circ \wp_{h'} \circ \wp_r = h' \qquad \therefore h = h'$

$\therefore$ $\wp r$ es recursiva $\qquad \therefore$ $\wp r$ es obj-conj-tr. $\square$

<u>Definición</u>. Un objeto B es llamado parcialmente transitivo (p. tr.) sii existe un obj. conj. tr. $A \longrightarrow \wp A$ tal que $B \subset A$ (i.e. existe un monomorfismo $B \rightarrowtail A$). Entonces la subcategoría plena de todos los objetos parcialmente transitivos es un "subtopos".

<u>6.9.</u> **Teorema en TE**

La subcategoría plena de los objetos p. tr. tienen:
1.- Objeto terminal; 2.- P.F. (producto binario e igualadores); 3.- Exponenciación; 4.- clasificador de subobjetos.

<u>Demostración</u>

1.- 0 y 1 son obj. p. tr. pues ϕ_0 es obj. conj. tr. entonces (6.8) $\wp\phi_0$ lo es y como $\wp 0 \cong 1$ y $\wp 0 \xrightarrow{\wp\phi_0} \wp\wp 0$, entonces se tiene lo deseado.

2.- Sean B y B' objeto p. tr. PD. $B \amalg B'$ es obj. p. tr.

Como B y B' son objeto p. tr. entonces existen $A \xrightarrow{r} \wp A$ y $A' \xrightarrow{r'} \wp A'$ objeto conj. tr. y monomorfismo $B \xrightarrow{\alpha} A$ y $B' \xrightarrow{\alpha'} A'$.

Por 6.6 sea $D \xrightarrow{s} \wp D$ el supremo de (r, r'), s es obj. conj. tr. y $A \xrightarrow{in(r,s)} D$, $A' \xrightarrow{in(r',s)} D$ son monomorfismo.

$\therefore$ (por A.7.h., $f := (in(r,s)\circ\alpha) \amalg (in(r',s)\circ\alpha') : B \amalg B' \rightarrowtail D \amalg D$ es mono.

Por A.17.

$$Kpr_D : D \amalg D \rightarrowtail \wp\wp D \text{ es mono}$$

y por 6.8 $\quad \wp\wp D \xrightarrow{\wp\wp s} \wp\wp\wp D$ es obj. conj. tr.

$\therefore$ $Kpr_D \circ f : B \amalg B' \longrightarrow \wp\wp D$ es mono.

$\therefore$ $B \amalg B'$ es p. tr.

3.- Sean A y B objeto p. tr. y $A \overset{f}{\underset{f'}{\rightrightarrows}} B$ morfismo.

PD. $Eq(f, f')$ el igualador de f y f' es obj. p. tr.

Como A es p. tr. existe $D \xrightarrow{r} \wp D$ obj. conj. tr. y $A \xrightarrow{\alpha} D$ un monomorfismo. Sea $(E, E \xrightarrow{e} A) = Eq(f, f')$ entonces, por A.6.C, e es mono

$\therefore$ $\alpha \circ e$ es mono

$\therefore$ E es p. tr.

4.- Sean A y B objeto p. tr. PD. B^A es p. tr.

Como A y B son objeto p. tr. entonces (por 2) $A \amalg B$ también lo es y por 6.8 $\wp(A \amalg B)$ es obj. p. tr.

Se demostrará que $B^A \subset \wp(A \amalg B)$.

Se tiene el siguiente diagrama conmutativo, por la propiedad universal de la exponenciación.

$$\begin{tikzcd}
\wp(A\Pi B)\Pi(A\Pi B) \arrow[rr, "e_{A\Pi B}"] & & \Omega \\
& & B\Pi B \arrow[u, "\delta_B"'] \\
B^A\Pi(A\Pi B) \arrow[uu, dashed, "m\Pi Id_{A\Pi B}"] \arrow[rr, tail, two heads, "\varphi"'] & & (B^A\Pi A)\Pi B \arrow[u, "e(A,B)\Pi Id_B"']
\end{tikzcd}$$

donde $\delta_B := \chi_{\langle Id_B, Id_B\rangle}$

PD. $B^A \xrightarrow{m} \wp(A\Pi B)$ es mono.

Sean $C \overset{\overline{\alpha}_1}{\underset{\overline{\alpha}_2}{\rightrightarrows}} B^A$ morfismos tales que $m\circ\overline{\alpha}_1 = m\circ\overline{\alpha}_2$

Sean $\alpha_i := e(A,B)\circ(\overline{\alpha}_i\Pi Id_A)$ $\quad i=1,2$

i.e $\overline{\alpha}_i$ es el adjunto exponencial de α_i , $i=1,2$.

PD. Para $i=1,2$ el siguiente diagrama es un P.F.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, dashed, "\gamma_1"'] \arrow[rr, bend left, "\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle"] \arrow[dr, bend right, "\beta"'] & C\Pi A \arrow[r, tail, "\langle Id_{C\Pi A},\alpha_i\rangle"] \arrow[d, "\alpha_i"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & (C\Pi A)\Pi B \arrow[d, "\alpha_i\Pi Id_B"] \\
& B \arrow[r, tail, "\langle Id_B, Id_B\rangle"] & B\Pi B
\end{tikzcd}$$

$(\alpha_i\Pi Id_B)\circ\langle Id_{C\Pi A},\alpha_i\rangle = \langle\alpha_i,\alpha_i\rangle = \langle Id_B, Id_B\rangle\circ\alpha_i$

$\therefore$ $(*)$ conmuta.

Suponer que $D \xrightarrow{\beta} B$, $D \xrightarrow{\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle} (C\Pi A)\Pi B$ son morfismos tales que $\underbrace{\langle Id_B, Id_B\rangle\circ\beta}_{\langle\beta,\beta\rangle} = \underbrace{(\alpha_i\Pi Id_B)\circ\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle}_{\langle\alpha_i\circ\gamma_1,\gamma_2\rangle}$

$\therefore$ $\beta = \alpha_i\circ\gamma_1 = \gamma_2$

$\therefore$ $\gamma_1 : D \to C\Pi A$ es el único morfismo (por ser $\langle Id_{C\Pi A},\alpha_i\rangle$ mono) tal que $\alpha_i\circ\gamma_1 = \beta$ y $\langle Id_{C\Pi A},\alpha_i\rangle\circ\gamma_1 = \langle\gamma_1,\gamma_2\rangle$

$\therefore$ $(*)$ es P.F.

$\therefore$ el siguiente diagrama es P.F.

$$\begin{tikzcd}
C\Pi A \arrow[r, "{\langle Id_{C\Pi A}, \alpha_i \rangle}"] \arrow[d, "\alpha_i"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & (C\Pi A)\Pi B \arrow[d, "\alpha_i \Pi Id_B"] \\
B \arrow[r, tail, "{\langle Id_B, Id_B \rangle}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & B\Pi B \arrow[d, "\delta_B"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd} \qquad i=1,2.$$

Pero $\delta_B \circ (\alpha_1 \Pi Id_B) = \delta_B \circ \left[(e(A,B) \circ (\bar{\alpha}_1 \Pi Id_A)) \Pi Id_B \right]$

$$= e_{A\Pi B} \circ (m \circ \bar{\alpha}_1 \Pi Id_{A\Pi B})$$

$$\underset{\text{hipótesis}}{=} e_{A\Pi B} \circ (m \circ \bar{\alpha}_2 \Pi Id_{A\Pi B}) = \delta_B \circ (\alpha_2 \Pi Id_B)$$

$\therefore$ $(\langle Id_{C\Pi A}, \alpha_1 \rangle, !_{C\Pi A}) = P.F.\ (\delta_B \circ (\alpha_1 \Pi Id_B), v) = (\langle Id_{C\Pi A}, \alpha_2 \rangle, !_{C\Pi A})$

$\therefore$ Existe un isomorfismo $C\Pi A \xrightarrow{\psi} C\Pi A$ tal que
$\underset{\langle \psi, \alpha_1 \circ \psi \rangle}{\underset{\|}{\langle Id_{C\Pi A}, \alpha_1 \rangle \circ \psi}} = \langle Id_{C\Pi A}, \alpha_2 \rangle$

$\therefore$ $\psi = Id_{C\Pi A}$ y $\alpha_1 \circ \psi = \alpha_1 = \alpha_2$

$\therefore$ $\alpha_1 = \alpha_2$ $\therefore$ $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2$

$\therefore$ m es mono

$\therefore$ B^A es p. tr.

5.- PD. Ω es objeto p.tr. (Ω es el clasificador de subobjetos).
Pero $\Omega = 81$ y por 1. Ω es obj. p. tr.

$\therefore$ La subcategoría plena de todos los objetos parcialmente transitivos es un subtopos. $\square$

§7. Definición del modelo de los Objetos - conjunto en la teoría de los topos.

En esta sección, a menos que se diga lo contrario, se trabajará en la teoría de los topos TEBP, y la finalidad en esta sección será definir un modelo de la <u>Teoría de los Z-conjuntos</u> dentro de TEBP.

Se empezará con la definición de las "teorías locales de conjuntos" y un estudio sobre sus propiedades básicas.

Sea <u>E</u> un topo elemental bien punteado.
Para un objeto A, dado, se define una "<u>teoría local de conjuntos con respecto a A</u>", donde los **A-elementos** serán los morfismos de 1 en A, $1\longrightarrow A$; los **A-conjuntos** serán los morfismos de A en Ω, $A\longrightarrow\Omega$ y la $\in_A$ **relación de membresía** entre A-elementos y A-conjuntos está dada de la siguiente forma:

(<u>7.1</u>) $\quad (1\longrightarrow A)\in_A(A\longrightarrow\Omega)$:sii $\quad 1\longrightarrow A\longrightarrow\Omega = 1\xrightarrow{v}\Omega$
(donde v es el "morfismo verdad".

Note que esta **definición** puede ser dada en TE.

La definición de $\subset_A$ la inclusión de conjuntos es la usual, utilizando $\in_A$, i.e.: $\bar M\subset_A\bar N$ sii $\forall x(x\in_A\bar M\Rightarrow x\in_A\bar N)$.

<u>7.2</u> Si $\bar M,\bar N$ son A-conjuntos entonces $(\bar M\subset_A\bar N$ sii $\bar M\subset\bar N)$ se recuerda que $\bar M\subset\bar N$:sii $\bar M\cap\bar N=\bar M$ (ver §5).
<u>Demostración</u>
Sean $\bar M,\bar N$ A-conjuntos, donde $\bar M=\chi_m$, con $m:M\rightarrowtail A$ y $\bar N=\chi_n$, con $n:N\rightarrowtail A$.

Se toma el producto fibrado de m y n:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, tail, "k"] \arrow[d, "k'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & M \arrow[d, tail, "m"] \\ N \arrow[r, tail, "n"'] & A \end{tikzcd}$$

k y k' son monos por serlo m y n respectivamente

(*)

Se demostrará que $\bar{M} \subset \bar{N}$ sii k es epi sii $\bar{M} \subset_A \bar{N}$.

1º PD. $\bar{M} \subset \bar{N}$ sii k es epi.

si) $\bar{M} \subset \bar{N}$ sii $\bar{M} \cap \bar{N} = \wedge\langle \bar{M}, \bar{N} \rangle = \bar{M}$
entonces $\bar{N} \circ m = v_M$
entonces existe $\psi : M \longrightarrow N$ tal que $m = n \circ \psi$, con lo que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "Id_M"] \arrow[ddr, bend right, "\psi"'] & & \\
& K \arrow[r, tail, "k"] \arrow[d, "k'"'] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & M \arrow[d, tail, "m"] \\
& N \arrow[r, tail, "n"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad m \circ Id_M = m = n \circ \psi$$

$\therefore$ (P.F.) Existe un único morfismo $\varphi : M \longrightarrow K$ tal que $k \circ \varphi = Id_M$ y $k' \circ \varphi = \psi$

Como $k \circ \varphi = Id_M$ y Id_M es iso, en particular epi. entonces k es epi.

sólo si) k es epi. Pero como k es mono entonces (TEBP, A.1.c) k es iso.

PD m se factoriza a través de n

Como k es iso entonces existe $k^{-1} : M \longrightarrow K$ tal que $k \circ k^{-1} = Id_M$ y $k^{-1} \circ k = Id_K$.

Tenemos que $m \circ k = n \circ k'$ entonces $m \circ k \circ k^{-1} = n \circ k' \circ k^{-1}$

$\therefore$ $m = n \circ k' \circ k^{-1}$

$\therefore$ $\bar{M} \subset \bar{N}$

2º PD. k es epi sii $\bar{M} \subset_A \bar{N}$

si) k es epi PD. $\bar{M} \subset_A \bar{N}$

k es epi entonces (por 3.13.d) Para toda $z : 1 \longrightarrow M$ existe un $x : 1 \longrightarrow K$ tal que $z = k \circ x$.

Sea $1 \xrightarrow{\ l\ } A \in_A \bar{M}$ i.e. $\bar{M} \circ l = v$, visto en diagrama, tenemos:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, dashed, "z"] \arrow[drr, bend left, "l"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \arrow[d, "\bar{M}"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

entonces (por su P.F.) existe un único $z : 1 \longrightarrow M$ tal que $l = m \circ z$

Como k es epi, $k : K \longrightarrow M$ y $z : 1 \longrightarrow M$, entonces existe $x : 1 \longrightarrow K$ tal que $k \circ x = z$,

entonces $\quad l = m \circ z = m \circ (k \circ x) = (m \circ k) \circ x \underset{\substack{\text{P.F.}\\(*)}}{=} (n \circ k') \circ x$

entonces $\quad \bar{N} \circ l = (\bar{N} \circ n) \circ k' \circ x = v_N \circ k' \circ x = v$

$\therefore$ (por definición de $\in_A$) $\quad l \in_A \bar{N}$

$\therefore \quad \bar{M} \subset_A \bar{N}$

<u>sólo si</u>) $\quad \bar{M} \subset_A \bar{N} \qquad$ PD. k es epi.

i.e., PD. Para todo $z : 1 \longrightarrow M$ existe $x : 1 \longrightarrow K$ tal que $k \circ x = z$

Sea $\quad z : 1 \longrightarrow M \quad$ entonces $\bar{M} \circ m \circ z = v_M \circ z = v$

$\therefore \quad m \circ z \in_A \bar{M}$

entonces $\quad (\bar{M} \subset_A \bar{N}) \quad m \circ z \in_A \bar{N} \quad$ i.e. $\quad \bar{N} \circ m \circ z = v$

entonces $\quad (\bar{N} = \chi_n)$ existe un único $\delta : 1 \longrightarrow N$ tal que $\quad m \circ z = n \circ \delta$

Como (*) es P.F. Tenemos:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "x"] \arrow[rr, bend left, "z"] \arrow[dr, bend right, "\delta"'] & K \arrow[r, tail, "k"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & M \arrow[d, "m"] \\
& N \arrow[r, tail, "n"] & A
\end{tikzcd}$$

existe un único $x : 1 \longrightarrow K$ tal que $k \circ x = z$

$\therefore \quad$ Para todo $\quad z : 1 \longrightarrow M \quad$ existe $\quad x : 1 \longrightarrow K \quad$ tal que $\quad k \circ x = z$

$\therefore \quad k$ es epi.

$\therefore \quad \bar{M} \subseteq \bar{N}$ sii k es epi sii $\bar{M} \subset_A \bar{N}$

$\therefore \quad \bar{M} \subset \bar{N}$ sii $\bar{M} \subset_A \bar{N}$

$\square$.

De 7.2 fácilmente se deduce que la teoría local de los conjuntos satisface el **AXIOMA DE EXTENSIONALIDAD:**

<u>**7.3.**</u> Para $\bar{M}, \bar{N}$, A-conjuntos, se tiene: $\bar{M} \subset_A \bar{N}$ y $\bar{N} \subset_A \bar{M}$ sii $\bar{M} = \bar{N}$.

<u>Demostración</u> $\quad$ Por 7.2.

$\bar{M} \subset_A \bar{N}$ y $\bar{N} \subset_A \bar{M}$ sii $\bar{M} \subset \bar{N}$ y $\bar{N} \subset \bar{M}$ sii (por §5) $\bar{M} = \bar{N}$

Por lo tanto podemos introducir la siguiente notación:

Si para una fórmula $F(x)$ existe un A-conjunto, $\bar{M}$, tal que $\forall\, 1 \xrightarrow{x} A\ (x \in_A \bar{M} \Leftrightarrow F(x))$ entonces $\bar{M}$ es único y se denotará por $\{x \,/_A\, F(x)\}$.

Demostrar la unicidad de $\bar{M}$ es muy sencillo:

Suponer que existe $\bar{N}$, A-conjunto tal que $\forall 1 \xrightarrow{x} A \; (x \in_A \bar{N} \Leftrightarrow F(x))$. PD. $\bar{M} = \bar{N}$

$x \in_A \bar{N}$ sii $F(x)$ sii $x \in_A \bar{M}$

$\therefore \; \bar{N} \subset_A \bar{M}$ y $\bar{M} \subset_A \bar{N}$ $\quad \therefore$ (7.3) $\bar{M} = \bar{N}$.

Ahora se darán algunas propiedades de la teoría local de Conjuntos.

7.4. $1(A)$ es el "conjunto Universal" $E_A := \{x \,/_A\, x = x\}$, donde $1(A) = \chi_{1d_A} : A \longrightarrow \Omega$

PD. Para todo $1 \xrightarrow{x} A \quad (x \in_A 1(A)$ sii $x = x)$

$x = x = 1d_A \circ x$ sii $v_A \circ x = v$ sii $(1(A) \circ 1d_A) \circ x = v$ sii $1(A) \circ x = v$
sii $x \in_A 1(A)$

$\therefore \; 1(A) = \{x \,/_A\, x = x\}$

7.5. $O(A)$ es el "conjunto vacío" $\phi_A := \{x \,/_A\, x \neq x\}$, donde $O(A) := \chi_{0 \xrightarrow{0_A} A}$

$x \neq x$ sii $x \in_A O(A)$ (pues de falso se implica lo que sea.)

7.6. Para $\bar{M}, \bar{N}$, A-conjuntos, tenemos:

a) $\neg\bar{M}$ es el "complemento" $\{x \,/_A\, x \notin_A \bar{M}\}$ de $\bar{M}$, donde $\neg := \chi_{falso}$

b) $\bar{M} \cap \bar{N}$ es la "intersección" $\{x \,/_A\, x \in_A \bar{M} \wedge x \in_A \bar{N}\}$ de $\bar{M}$ y $\bar{N}$.

c) $\bar{M} \cup \bar{N}$ es la "unión" $\{x \,/_A\, x \in_A \bar{M} \vee x \in_A \bar{N}\}$ de $\bar{M}$ y $\bar{N}$.

Demostración

a) PD. $1 \xrightarrow{x} A \in_A \neg\bar{M}$ sii $x \notin_A \bar{M}$, donde $\neg\bar{M} := \chi_{\neg m}$. $\neg m : \neg M \rightarrowtail A$

Sea $1 \xrightarrow{x} A$

$x \in_A \neg\bar{M}$ sii existe $z : 1 \longrightarrow \neg M$ tal que $x = \neg m \circ z$
sii $\bar{M} \circ x = \bar{M} \circ \neg m \circ z = falso \circ !_{\neg M} \circ z = falso \neq v$
sii (por BV) $x \notin_A \bar{M}$

Visto en diagrama, tenemos:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "z"] \arrow[drr, bend left, "x"] \arrow[dddr, bend right] & & \\
& \neg M \arrow[r, tail, "\neg m"] \arrow[d, "!_{\neg M}"'] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & A \arrow[d, "\bar{M}"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "falso"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

b) PD. $1 \xrightarrow{x} A \in_A \bar{M} \cap \bar{N}$ sii $x \in_A \bar{M}$ y $x \in_A \bar{N}$, donde $\bar{M} \cap \bar{N} = \wedge\langle \bar{M}, \bar{N} \rangle$ y $\wedge = \chi_{\langle v, v \rangle}$.

Sea $1 \xrightarrow{x} A$

$x \in_A \bar{M} \cap \bar{N}$ sii $\wedge\langle \bar{M}, \bar{N} \rangle \circ x = \wedge\langle \bar{M}x, \bar{N}x \rangle = v$

sii $\bar{M}x = v$ y $\bar{N}x = v$ (porque $\wedge = \chi_{\langle v, v \rangle}$)

sii $x \in_A \bar{M}$ y $x \in_A \bar{N}$.

En diagrama, tenemos:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "x"] \arrow[dd, bend right=60] & & \\
M \cap N \arrow[r, tail, "m \cap n"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \arrow[d, "\langle \bar{M}, \bar{N} \rangle"] \\
1 \arrow[r, tail, "\langle v, v \rangle"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\wedge"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

c) PD. $1 \xrightarrow{x} A \in_A \bar{M} \cup \bar{N}$ sii $x \in_A \bar{M}$ o $x \in_A \bar{N}$, donde $\bar{M} \cup \bar{N} = \vee\langle \bar{M}, \bar{N} \rangle$ y $\vee := \chi_{Im([\langle v_\Omega, Id_\Omega \rangle, \langle Id_\Omega, v_\Omega \rangle])}$

$x \in_A \bar{M} \cup \bar{N}$ sii $\vee\langle \bar{M}, \bar{N} \rangle \circ x = \vee\langle \bar{M}x, \bar{N}x \rangle = v$

sii (por A.9.d.) $\bar{M}x = v$ o $\bar{N}x = v$

sii $x \in_A \bar{M}$ v $x \in_A \bar{N}$.

$\square$.

7.7. Para cualquier A-elemento, $x : 1 \to A$, χ_x es el "unitario" $\{x\}_A = \{y \,/\, y =_A x\}$ de x.

Demostración.

Como 1 es objeto terminal entonces $1 \xrightarrow{x} A$ es mono, por lo tanto tiene sentido hablar de χ_x, el característico de x.

PD $1 \xrightarrow{y} A \in_A \chi_x$ sii $x = y$

Sea $1 \xrightarrow{y} A$

$1 \xrightarrow{y} A \in_A \chi_x$ sii existe $\varphi : 1 \to 1$ tal que $y \circ \varphi = x$

pero 1 es objeto terminal $\therefore \varphi = Id_1$ $\therefore y\varphi = y = x$

$\therefore \chi_x = \{x\}_A$

$\square$.

Dado un morfismo $A \xrightarrow{f} B$, podemos describir los operadores imagen e imagen inversa en términos de las teorías locales de conjuntos con respecto a A y B:

7.8. Para cualquier A-conjunto $\bar{M}$ y cualquier B-conjunto $\bar{N}$, se tiene:

a) $f^{-1}[\bar{N}] = \{x/_A \, fx \in_B \bar{N}\}$; donde $f^{-1}[\bar{N}] := \bar{N} \circ f$

b) $f[\bar{M}] = \{y/_B \, \exists x \,(fx = y \wedge x \in_A \bar{M})\}$, donde $f[\bar{M}] := \chi_{Im(fm)}$

c) $f\langle \bar{M} \rangle = \{y/_B \, \forall x \,(fx = y \Rightarrow x \in_A \bar{M})\}$.

Demostración

a) PD $1 \xrightarrow{x} A \in_A f^{-1}[\bar{N}]$ sii $fx \in_B \bar{N}$.

$x \in_A f^{-1}[\bar{N}] := \bar{N} \circ f$ sii $(\bar{N} \circ f) \circ x = \bar{N} \circ (f \circ x) = \top$

sii $f \circ x \in_B \bar{N}$ (por definición de $\in_B$)

$\therefore$ $f^{-1}[\bar{N}] = \{x/_A \, fx \in_B \bar{N}\}$

b) PD. $1 \xrightarrow{y} B \in_B f[\bar{M}]$ sii existe $1 \xrightarrow{x} A \in_A \bar{M}$ tal que $fx = y$

$y \in_B f[\bar{M}]$ sii existe $y' : 1 \longrightarrow f(M)$ tal que $Im(fm) \circ y' = y$

se recuerda que $fm = Im(fm) \circ (fm)^*$ la epi-mono factorización de fm. Como $(fm)^* : M \longrightarrow f(M)$ es epi y $1 \xrightarrow{y'} f(M)$ entonces (por 3.13.d) existe $x' : 1 \longrightarrow M$ tal que $(fm)^* \circ x' = y'$

entonces $f \circ m \circ x' = Im(fm) \circ (fm)^* x' = Im(fm) \circ y' = y$

Sea $x := m x' \in_A \bar{M}$ porque $\bar{M} \circ x = \bar{M} \circ m \circ x' = \top$

$\therefore$ Si $y \in_B f[\bar{M}]$ entonces existe $x \in_A \bar{M}$ tal que $fx = y$

Sea $y : 1 \longrightarrow B$ tal que existe $x : 1 \longrightarrow A \in_A \bar{M}$ y $fx = y$

PD $y \in_B f[\bar{M}]$

Como $x \in_A \bar{M}$ entonces existe $z : 1 \longrightarrow M$ tal que $x = mz$

$\therefore$ $y = f \circ x = (f \circ m) \circ z = Im(fm) \circ ((fm)^* \circ z)$

$\therefore$ $y \in_B f[\bar{M}]$. (pues $f[\bar{M}] = \chi_{Im(fm)}$)

$\therefore$ $f[\bar{M}] = \{y/_B \, \exists x \,(fx = y \wedge x \in_A \bar{M})\}$

c) PD. $1 \xrightarrow{y} B \in_B f\langle \bar{M} \rangle$ sii (Para toda $1 \xrightarrow{x} A$ tal que $fx = y$ se tiene $x \in_A \bar{M}$)

<u>si</u>). Sea $1 \xrightarrow{y} B$ tal que para toda $1 \xrightarrow{x} A$, si $fx = y$ entonces $x \in_A \bar{M}$

PD. $y \in_B f\langle \bar{M} \rangle$. (Nota: en la categoría de conjuntos $f\langle \bar{M} \rangle$ equivale al complemento en B de la imagen (imagen directa existencial) del complemento en A de $\bar{M}$, se seguirá la misma idea para la demostración.).

Caso 1.- PD. Si $y \in_B \neg f[1(A)]$ entonces $y \in_B f\langle \bar{M} \rangle$.

i.e. PD. $\neg f[1(A)] \subset f\langle \bar{M} \rangle$. Por 5.1.b y 7.2 ésto es equivalente a demostrar que $f^{-1}[\neg f[1(A)]] \subset_A \bar{M}$.

Por a) y 7.6.a) $f^{-1}[\neg f[1(A)]] = \{ x/_A \, fx \notin_B \{ y/_B \exists w (fw = y \wedge w \in_A 1(A))\}\}$

pero este A-conjunto es el vacío y por 7.5 está contenido en $\bar{M}$.

$\therefore$ $f^{-1}[\neg f[1(A)]] \subset_A \bar{M}$.

$\therefore$ $\neg f[1(A)] \subset f\langle \bar{M} \rangle$.

Caso 2: PD. Si $y \in_B f[1(A)]$ y (para toda $1 \xrightarrow{x} A$ tal que $fx = y$ se tiene $x \in_A \bar{M}$) entonces $y \in_B f\langle \bar{M} \rangle$.

De hecho se tiene que $f[\bar{M}] \cap \neg f[\neg \bar{M}] = f[1(A)] \cap f\langle \bar{M} \rangle$

Sea $y \in_B f[1(A)]$ tal que si $1 \xrightarrow{x} A$ y $fx = y$ entonces $x \in_A \bar{M}$ entonces (por b)) $y \in_B f[\bar{M}]$

Por 7.6.a y b) $\neg f[\neg \bar{M}] = \{ z/_B \, z \notin \{ w/_B \exists u (fu = z \wedge u \notin_A \bar{M})\}\}$

$\therefore$ $y \in_B \neg f[\neg \bar{M}]$ $\quad\therefore$ $y \in_B f[\bar{M}] \cap \neg f[\neg \bar{M}]$

PD. $f[\bar{M}] \cap \neg f[\neg \bar{M}] \subset f\langle \bar{M} \rangle$. Por 5.1.b ésto es equivalente a

PD. $f^{-1}[f[\bar{M}] \cap \neg f[\neg \bar{M}]] \subset_A \bar{M}$.

Sea $x \in_A f^{-1}[f[\bar{M}] \cap \neg f[\neg \bar{M}]]$ entonces (por b)) $fx \in_B f[\bar{M}] \cap \neg f[\neg \bar{M}]$ entonces (por 7.6.b y b)) $fx \in_B f[\bar{M}]$ y $fx \notin_B f[\neg \bar{M}]$

entonces (a, b) $x \in_A f^{-1}[f[\bar{M}]]$ y (para toda $u \in_A \neg \bar{M}$ se tiene $fu \neq fx$)

entonces $x \in_A \bar{M}$ pues si $x \notin_A \bar{M}$ entonces $fx \neq fx$ ¡!

$\therefore$ $f[\bar{M}] \cap \neg f[\neg \bar{M}] \subset_B f\langle \bar{M} \rangle$

$\therefore$ $y \in_B f\langle \bar{M} \rangle$

<u>sólo si</u>) Sea $y \in_B f\langle \bar{M} \rangle$ y $1 \xrightarrow{x} A$ tal que $fx = y$ PD. $x \in_A \bar{M}$

Si $y \in_B f\langle \bar{M} \rangle$ entonces $f\langle \bar{M} \rangle \circ y = v$

entonces $f^{-1}[f\langle \bar{M} \rangle] \circ x = f\langle \bar{M} \rangle \circ fx = f\langle \bar{M} \rangle \circ y = v$

$\therefore$ $x \in_A f^{-1}[f\langle \bar{M} \rangle]$

Pero $f^{-1}[f\langle\bar{M}\rangle] \subset \bar{M}$ sii (por 5.1.6) $f\langle\bar{M}\rangle \subset f\langle\bar{M}\rangle$.

∴ $x \in_A \bar{M}$

∴ $f\langle\bar{M}\rangle = \{ y_B / \forall x\, (fx = y \Rightarrow x \in_A \bar{M})\}$

□.

Se recuerda que los A-conjuntos corresponden a los $\mathcal{P}A$-elementos (ver 5.5).

7.9. Para cualquier A-conjunto $\bar{M}$ se tiene:

$$\mathcal{P}[\bar{M}] = \{\bar{N}e_{\mathcal{P}A} \,/\, \bar{N} \text{ es un A-conjunto } \wedge \bar{N} \subset \bar{M}\}$$

Demostración.

Por 5.5 si $y \in_{\mathcal{P}A} 1(\mathcal{P}A)$ entonces existe $\bar{L} \subset 1(A)$ tal que $y = \bar{L}e$, donde se recuerda que $e_A^{-1}[y\pi\, Id_A] = \pi_{1,A}^{-1}[\bar{L}]$.

Por lo tanto hay que demostrar:

$\xrightarrow{\bar{N}e} \mathcal{P}A \in_{\mathcal{P}A} \mathcal{P}[\bar{M}]$ sii $\bar{N}$ es un A-conjunto y $\bar{N} \subset \bar{M}$.

si) Sea $\bar{N}$ un A-conjunto tal que $\bar{N} \subset \bar{M}$, donde $\bar{N} = \chi_{n:N \to A}$, $\bar{M} = \chi_{m:M \to A}$, y $\mathcal{P}[\bar{M}] := \chi_{\mathcal{P}m : \mathcal{P}M \to \mathcal{P}A}$.

entonces existe $l : N \to M$ tal que $m \circ l = n$ y l **mono** (por serlo n)

entonces $m[\bar{L}] = \bar{N}$ donde $\bar{L} = \chi_l : M \to \Omega$ porque:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, tail, "l"] \arrow[rr, bend left, "n"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "\bar{L}"] & A \arrow[dd] \\
1 \arrow[r, tail, "v"] \arrow[d, equal] & \Omega \arrow[r, phantom, "P.F"] & {} \\
1 \arrow[rr, tail, "v"] & & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad m[L] := \chi_{Im(m\circ l)}$$

$Im(m\circ l) \cong m\circ l$ por ser m y l monos, pero $m \circ l = n$

∴ $m[\bar{L}] = \bar{N}$.

∴ (por 5.7) $\bar{N}e = m[\bar{L}]_e = \mathcal{P}m \circ \bar{L}_e$

∴ $\bar{N}e \in_{\mathcal{P}A} \mathcal{P}[\bar{M}]$

sólo si) Sea $y \in_{\mathcal{P}A} \mathcal{P}[\bar{M}]$ entonces existe $\bar{N} : A \to \Omega$ tal que $\bar{N}_e = y$

Falta demostrar que $\bar{N} \subset \bar{M}$

Si $\bar{N}e \in \mathcal{P}[\bar{M}]$ entonces existe $\bar{L}e : 1 \to \mathcal{P}M$ tal que $\mathcal{P}m \circ \bar{L}e = \bar{N}e$

(donde $\bar{L} : M \to \Omega$, i.e. M-conjunto) entonces (por 5.7.a)

$\mathcal{P}m \circ \bar{L}e = m[\bar{L}]_e = \bar{N}_e$ entonces (por 5.5) $m[\bar{L}] = \bar{N}$

pero $m[\bar{L}] := \chi_{Im(m\circ l)}$, con $\bar{L} = \chi_{l : L \to M}$ e $Im(m \circ l) \cong m\circ l$ por ser m y l monos

∴ $n \cong m \circ l$ donde $\bar{N} = \chi_n$

∴ existe $\varphi : N \to L$ isomorfismo tal que $n = m(l\circ\varphi)$ ∴ $\bar{N} \subset \bar{M}$.

□.

Finalmente se introducirá la noción de pareja ordenada y producto cartesiano en las teorías locales de conjuntos. Para elementos $1 \xrightarrow{x} A$, $1 \xrightarrow{y} B$, le corresponde un único elemento $1 \longrightarrow A\pi B$ llamado la <u>PAREJA ORDENADA</u> de x y y, $\langle x, y\rangle$ que denotaremos desde ahora por $\binom{x}{y}$ tal que $\pi_{A,B}\binom{x}{y} = x$ y $\pi'_{A,B}\binom{x}{y} = y$

Y si $\bar{M}$ es un A-conjunto, $\bar{N}$ un B-conjunto tal que $\bar{M} = \chi_{m:M \rightarrowtail A}$ y $\bar{N} = \chi_{n:N \rightarrowtail B}$, entonces el <u>PRODUCTO CARTESIANO</u> de $\bar{M}$ y $\bar{N}$ es un $A\pi B$-conjunto, que se denotará por $\bar{M}\times\bar{N}$ y es el morfismo característico de $m\pi n$, que es **monomorfismo** porque m y n lo son. i.e. $\bar{M}\times\bar{N} := \chi_{m\pi n}$

7.10. $\bar{M}\times\bar{N} = \left\{\binom{x}{y} \big/_{A\pi B}\ x \in_A \bar{M} \wedge y \in_B \bar{N}\right\}$.

<u>Demostración</u> PD. $\binom{x}{y} \in_{A\pi B} \bar{M}\times\bar{N}$ sii $x \in_A \bar{M}$ y $y \in_B \bar{N}$

<u>sólo si</u>) Sea $w \in_{A\pi B} \bar{M}\times\bar{N}$ sii existe $\alpha : 1 \longrightarrow M\pi N$ tal que $(m\pi n)\circ\alpha = w$, visto en diagrama, tenemos:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, dashed, "\alpha"'] \arrow[dr, bend left, "w"] & \\
M\pi N \arrow[r, tail, "m\pi n"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & A\pi B \arrow[d, "\bar{M}\times\bar{N}"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\therefore\ w = \begin{pmatrix} m\circ\pi_{M,N}\circ\alpha \\ n\circ\pi'_{M,N}\circ\alpha \end{pmatrix}$ y $m\circ(\pi_{M,N}\circ\alpha) \in_A \bar{M}$ y $n\circ(\pi'_{M,N}\circ\alpha) \in_B \bar{N}$

<u>si</u>) Sea $x \in_A \bar{M}$ y $y \in_B \bar{N}$ entonces existen $x' : 1 \longrightarrow M$ y $y' : 1 \longrightarrow N$ tal que $x = m\circ x'$ y $y = n\circ y'$; entonces $\binom{x}{y} = \binom{m\circ x'}{n\circ y'} = (m\pi n)\binom{x'}{y'}$

$\therefore\ \binom{x}{y} \in_{A\pi B} \bar{M}\times\bar{N}$ $\square$.

El morfismo <u>evaluación</u> $e_A : \wp A\pi A \longrightarrow \Omega$ es un $\wp A\pi A$-conjunto y representa "internamente" la relación de membresía local $\in_A$:

7.11. $e_A = \left\{\binom{\bar{M}}{x} \big/_{\wp A\pi A}\ \bar{M}$ es un A-conjunto $\wedge$ x es un A-elemento $\wedge\ x \in_A \bar{M}\right\}$

PD. $1 \xrightarrow{\binom{\overline{M}e}{x}} \mathcal{P}A \,\pi\, A \in_{\mathcal{P}A\pi A} e_A$ sii $\overline{M}: A \to \Omega$, $x: 1 \to A$ y $x \in_A \overline{M}$.

$$\binom{\overline{M}e}{x}: 1 \longrightarrow \mathcal{P}A \,\pi\, A \quad \text{sii} \quad \overline{M}e: 1 \longrightarrow \mathcal{P}A \quad y \quad x: 1 \longrightarrow A$$
$$\text{sii} \quad \overline{M}: A \longrightarrow \Omega \quad y \quad x: 1 \longrightarrow A.$$

$$\binom{\overline{M}e}{x} \in_{\mathcal{P}A\pi A} e_A \quad \text{sii} \quad v = e_A \circ \binom{\overline{M}e}{x} = e_A \circ (\overline{M}e \,\pi\, Id_A) \circ (Id_1 \,\pi\, x) \binom{Id_1}{Id_1}$$
$$(\text{por } 5.5) \qquad = \overline{M} \circ \pi'_{1,A} \circ (Id_1 \,\pi\, x) \binom{Id_1}{Id_1}$$
$$= \overline{M} \circ \pi'_{1,A} \binom{Id_1}{x} = \overline{M} \circ x$$

En diagramas se tiene:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}A \,\pi\, A \arrow[r, "e_A"] & \Omega \\
1 \,\pi\, A \arrow[u, "\overline{M}e \,\pi\, Id_A"] \arrow[ur, "\overline{M} \circ \pi'_{1,A}"'] & \\
1 \times 1 \arrow[u, "Id_1 \,\pi\, x"] & \\
1 \arrow[u] \arrow[uuur, bend right, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

$\square$.

Hemos visto, al final de la sección 3, que los A-elementos y los A-conjuntos son dos colecciones ajenas de morfismos, ahora quitaremos esa desventaja, definiendo otra "relación" de membresía.

Para una relación extensionbl $A \xrightarrow{r} \mathcal{P}A$, dada, (i.e. r es monomorfismo), se tiene una correspondencia biunívoca entre los A-elementos y los $\mathcal{P}A$-elementos que se factorizan a través de r, y estos últimos están en correspondencia con ciertos A-conjuntos que llamaremos **r-elementos**:

<u>Definición</u> Un A-conjunto $\overline{M}$ es llamado un <u>r-elemento</u> si $\overline{M}e$ se factoriza a través de r.

Entonces los A-elementos están en correspondencia biunívoca con los r-elementos:

$$\{1 \xrightarrow{x} A \,/\, x \text{ es A-elemento}\} \longleftrightarrow \{\overline{M}: A \to \Omega \,/\, \overline{M} \text{ es un r-elemento}\}$$
$$x \longmapsto r \circ x : 1 \longrightarrow \mathcal{P}A$$
$$1 \xrightarrow{x} A \longleftarrow \overline{M}$$

donde $\overline{M}e = r \circ x$.

Y se denotará esta correspondencia por $\bar{M} = (x/r)$ y $x = (\bar{M}/r)$ si $\bar{M}e = r\circ x$

La relación local de membresía $\in_A$ da entonces lugar a la RELACIÓN LOCAL DE MEMBRESÍA $\in_r$ entre A-conjuntos:

7.12. $(A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega) \in_r (A \xrightarrow{\bar{N}} \Omega)$:sii $\bar{M}$ es un r-elemento y $(\bar{M}/r) \in_A \bar{N}$.

Como la relación $\in_r$ es una variación de $\in_A$, las propiedades de 7.2 a 7.11 de $\in_A$ pueden ser establecidas como propiedades de $\in_r$. El propósito ahora es tratar de obtener una teoría <u>global</u> de conjuntos, por medio de las teorías locales (con respecto a los monomorfismos $A \longrightarrow \wp A$):

7.13. Proposición en TEBP. Sean $A \xrightarrow{r} \wp A$, $B \xrightarrow{s} \wp B$ relaciones extensionales con una inclusión $r \xrightarrow{i} s$. Entonces para un A-elemento x y A-conjuntos $\bar{M}$ y $\bar{N}$ tenemos:

a) $(ix/s) = i[(x/r)]$;

b) Si $\bar{M}$ es un r-elemento entonces $i[\bar{M}]$ es un s-elemento y $i(\bar{M}/r) = (i[\bar{M}]/s)$;

c) $\bar{M} \in_r \bar{N}$ sii $i[\bar{M}] \in_s i[\bar{N}]$, si i es mono.

<u>Demostración.</u>

Se recuerda que $i : r \longrightarrow s$ es una inclusión si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[d, "s"] \\ \wp A \arrow[r, "\wp i"'] & \wp B \end{tikzcd}$$

conmuta (ver §6).

Sean $\bar{M} = \chi_{m:M\to A}$ y $\bar{N} = \chi_{n:N\to B}$.

<u>a</u>) PD. $(ix/s) = i[(x/r)]$, es equivalente a PD. $(ix/s)_e = i[(x/r)]_e$ (por 5.5).

Por 5.7.a $i[(x/r)]_e = \wp i \circ (x/r)e := \wp i \circ r \circ x \underset{r\to s}{=} s \circ i \circ x := (ix/s)_e$

$\therefore$ $i[(x/r)] = (ix/s)$

<u>b</u>) Sea $\bar{M}$ un r-elemento, i.e. $\bar{M}e = r \circ (\bar{M}/r)$

PD. $i[\bar{M}]$ es un s-elemento y $i(\bar{M}/r) = (i[\bar{M}]/s)$

$$i[\bar{M}]e \underset{5.7.a}{=} \wp i \circ \bar{M}e \underset{\substack{\bar{M}\text{ es}\\ r\text{-elemento}}}{=} \wp i \circ r \circ (\bar{M}/r) \underset{r\to s}{=} s \circ i \circ (\bar{M}/r)$$, donde $i \circ (\bar{M}/r) : 1 \longrightarrow B$

$\therefore$ (por definición) **$i[\bar{M}]$** es un s-elemento

y por la **correspondencia 1-1** entre B-elementos y s-elementos **tenemos que:** $i(\bar{M}/r) = (i[\bar{M}]/s)$.

c)

sólo si) Sea $\bar{M} \in_r \bar{N}$ .i.e. $\bar{M}e$ se factoriza a través de r, $\bar{M}e = r(\bar{M}/r)$ y $(\bar{M}/r) \in_A \bar{N}$. PD. $i[\bar{M}] \in_a i[\bar{N}]$

Por b) se tiene que:

$i[\bar{M}]$ es un a-elemento y $i(\bar{M}/r) = (i[\bar{M}]/a)$, y como $(\bar{M}/r) \in_A \bar{N}$ entonces existe $l : 1 \longrightarrow N$ tal que $(\bar{M}/r) = n \circ l$

∴ $(i[\bar{M}]/a) = i(\bar{M}/r) = (i \circ n) \circ l$, como $i[\bar{N}] := \chi_{\mathrm{Im}(i \circ n)}$ y $i \circ n = \mathrm{Im}(i \circ n) \circ (i \circ n)^*$ la epi-mono factorización de $i \circ n$, entonces $(i[\bar{M}]/a) = \mathrm{Im}(i \circ n) \circ ((i \circ n)^* \circ l)$

∴ $(i[\bar{M}]/a) \in_B i[\bar{N}]$

∴ (por definición) $i[\bar{M}] \in_a i[\bar{N}]$.

si) Sea i mono y $i[\bar{M}] \in_a i[\bar{N}]$.

PD. $\bar{M} \in_r \bar{N}$.

$i[\bar{M}] \in_a i[\bar{N}]$ sii $i[\bar{M}]e = a(i[\bar{M}]/a)$ y $(i[\bar{M}]/a) \in_B i[\bar{N}]$

Como i es mono entonces $i[\bar{M}] = \chi_{i \circ m}$ y $i[\bar{N}] = \chi_{i \circ n}$ entonces $((i[\bar{M}]/a) \in_B i[\bar{N}])$ existe $y : 1 \longrightarrow N$ tal que $(i \circ n) \circ y = (i[\bar{M}]/a)$

PD. $r \circ n \circ y = \bar{M}e$

$$(\mathcal{P}i \circ r) \circ n \circ y \underset{r \to a}{=} a(i \circ n \circ y) = a(i[\bar{M}]/a) = i[\bar{M}]e \underset{5.7.a}{=} \mathcal{P}i \circ \bar{M}e$$

Como i es mono entonces (por 5.8.a) $\mathcal{P}i$ es mono, entonces $r \circ n \circ y = \bar{M}e$

∴ (por definición y como $ny \in_A \bar{N}$) $\bar{M} \in_r \bar{N}$ □.

Ahora estamos listos para definir nuestro **MODELO DE LA TEORÍA DE LOS CONJUNTOS**.

Primero se definirán los OBJETOS-CONJUNTO como subconjunto de objeto-conjunto transitivo.

7.14. Definición en TE. Un **OBJETO-CONJUNTO** es una pareja de morfismos $(A \xrightarrow{r} \mathcal{P}A,\ A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega)$ tal que r es un objeto-conjunto transitivo (i.e. r es extensional y recursiva, ver 3.6).

O equivalentemente: Un OBJETO-CONJUNTO es el morfismo $\binom{r}{\bar{M}} : A \longrightarrow \mathcal{P}A \,\Pi\, \Omega$ tal que $A \xrightarrow{r} \mathcal{P}A$ es un objeto-conjunto transitivo y $\bar{M}$ un A-conjunto.

(Esta última definición es realmente la correcta ya que en TE no tenemos la noción de $(r, \bar{M})$ pareja ordenada).

Se definirá una <u>relación de equivalencia</u> "$\sim$" entre objeto-conjunto:

7.15. Definición en TE. Sean $(r, \bar{M})$ y $(s, \bar{N})$ objetos-conjunto se dice que son **EQUIVALENTES**, denotado por $(r,\bar{M}) \sim (s,\bar{N})$ si alguna de las tres condiciones, equivalentes, se satisface:

a) $in(r, r\cup s)[\bar{M}] = in(s, r\cup s)[\bar{N}]$, i.e. las inclusiones $r \to r\cup s$ y $s \to r\cup s$ llevan a $\bar{M}$ y $\bar{N}$ al mismo subobjeto.

b) Existe un objeto-conjunto-transitivo t tal que $r\subset t$, $s\subset t$ e $in(r,t)[\bar{M}] = in(s,t)[\bar{N}]$;

c) Para todo objeto-conjunto transitivo t, si $r\subset t$ y $s\subset t$ entonces $in(r,t)[\bar{M}] = in(s,t)[\bar{N}]$.

PD. b) sii a) sii c)

PD. b) sii a)

<u>si</u>) Sea $in(r,r\cup s)[\bar{M}] = in(s,r\cup s)[\bar{N}]$. PD. existe t objeto-conj-transitivo t tal que $r\subset t$, $s\subset t$ e $in(r,t)[\bar{M}] = in(s,t)[\bar{N}]$.

Sea $t := r\cup s$ por 6.6 $r\cup s$ es objeto-conjunto-transitivo

<u>sólo si</u>) Existe un objeto-conj. transitivo t tal que $r\subset t$, $s\subset t$ e $in(r,t)[\bar{M}] = in(s,t)[\bar{N}]$. PD. $in(r,r\cup s)[\bar{M}] = in(s,r\cup s)[\bar{N}]$.

Como $r\subset t$ y $s\subset t$ entonces (por 6.6) $r\cup s\subset t$ y por 6.1.b pues $r\subset r\cup s$ y $s\subset r\cup s$ entonces $in(r,t) = in(r\cup s,t)\circ in(r,r\cup s)$ e $in(s,t) = in(r\cup s,t)\circ in(s,r\cup s)$

$\therefore$ $in(r\cup s,t)[in(r,r\cup s)[\bar{M}]] \overset{5.2.a}{=} (in(r\cup s,t)\circ in(r,r\cup s))[\bar{M}] = in(r,t)[\bar{M}]$

$\underset{\text{hipótesis}}{=} in(s,t)[\bar{N}] = (in(r\cup s,t)\circ in(s,r\cup s))[\bar{N}] \underset{5.2.a}{=} in(r\cup s,t)[in(s,r\cup s)[\bar{N}]]$

Por 6.1.c $in(r\cup s,t)$, $in(r,r\cup s)$ e $in(s,r\cup s)$ son monos.

y como $\chi_{Im(in(r,t)\circ m)} := in(r,t)[\bar{M}] = in(s,t)[\bar{N}] = \chi_{Im(in(s,t)\circ n)}$

entonces $in(r\cup s,t)\circ in(r,r\cup s)\circ m = in(r,t)\circ m \cong Im(in(r,t)\circ m)$

$\cong Im(in(s,t)\circ n) \cong in(s,t)\circ n = in(r\cup s,t)\circ in(s,r\cup s)\circ n$

$\therefore$ Existe $\varphi: N \to M$ isomorfismo tal que

$in(r\cup s,t)\circ in(r,r\cup s)\circ m = in(r\cup s,t)\circ in(s,r\cup s)\circ n\circ\varphi$

entonces (por ser $in(r\cup s,t)$ mono) $in(r,r\cup s)\circ m = in(s,r\cup s)\circ n\circ\varphi$

i.e. $in(r,r\cup s)\circ m \cong in(s,r\cup s)\circ n$

$\therefore$ $in(r,r\cup s)[\bar{M}] = in(s,r\cup s)[\bar{N}]$.

PD. a) sii c)

<u>si</u>) Si t es objeto-conj. transitivo tal que $r \subset t$ y $a \subset t$ entonces $in(r,t)[\bar{M}] = in(a,t)[\bar{N}]$, con $\bar{M}$ y $\bar{N}$ A-conjuntos.

PD. $in(r, r\cup a)[\bar{M}] = in(a, r\cup a)[\bar{N}]$. Esto sucede porque $r \subset r\cup a$ y $a \subset r\cup a$.

<u>sólo si</u>) $in(r, r\cup a)[\bar{M}] = in(a, r\cup a)[\bar{N}]$. PD. Si t es obj-conj-transitivo tal que $r\subset t$ y $a \subset t$ entonces $in(r,t)[\bar{M}] = in(a,t)[\bar{N}]$

Si $r \subset t$ y $a \subset t$ entonces (por 6.6) $r\cup a \subset t$ y (por 6.1.b)

$in(r,t) = in(r\cup a, t) \circ in(r, r\cup a)$ y

$in(a,t) = in(r\cup a, t) \circ in(a, r\cup a)$

entonces $in(r,t)[\bar{M}] = (in(r\cup a,t) \circ in(r,r\cup a))[\bar{M}] =$

(por 5.2a) $= in(r\cup a, t)\,[in(r, r\cup a)[\bar{M}]] =$

(por a)) $= in(r\cup a,t)\,[in(a, r\cup a)[\bar{N}]] =$

(por 5.2a) $= (in(r\cup a,t) \circ in(a, r\cup a))[\bar{N}] =$

$= in(a,t)[\bar{N}]$

$\therefore$ b) sii a) sii c)

□.

PD. "$\sim$" es una relación de equivalencia:

1.- Reflexiva: $(r,\bar{M}) \sim (r,\bar{M})$ porque $in(r, r\cup r)[\bar{M}] = in(r, r\cup r)[\bar{M}] = \bar{M}$

2.- Simétrica: Sean $(r,\bar{M}) \sim (a,\bar{N})$ sii $in(r, r\cup a)[\bar{M}] = in(a, r\cup a)[\bar{N}]$ sii $in(a, r\cup a)[\bar{N}] = in(r, r\cup a)[\bar{M}]$ sii $(a,\bar{N}) \sim (r,\bar{M})$

3.- Transitiva: Sean $(r,\bar{M}) \sim (a,\bar{N})$ y $(a,\bar{N}) \sim (t,\bar{L})$

PD. $(r,\bar{M}) \sim (t,\bar{L})$. Sea w un obj-conj-tr. tal que $r \subset w$ y $t \subset w$ entonces $r\cup t \subset w$ y $(r\cup t)\cup a \subset w \cup a$

entonces (por 6.1.b) $in(w, w\cup a)[in(r,w)[\bar{M}]] = in(r, w\cup a)[\bar{M}] \underset{\substack{(r,\bar{M})\sim \\ (a,\bar{N})}}{=} in(a, w\cup a)[\bar{N}] \underset{\substack{(a,\bar{N}) \\ \sim(t,\bar{L})}}{=} in(t, w\cup a)[\bar{L}] = in(w, w\cup a)[in(t,w)[\bar{L}]]$

entonces (por ser $in(w, w\cup a)$ mono) $in(r,w)[\bar{M}] = in(t,w)[\bar{L}]$

$\therefore (r,\bar{M}) \sim (t,\bar{L})$.

□.

La relación de equivalencia $\sim$ es localmente la igualdad:

7.16. Lema en TE. Para objetos-conjunto $(r,\bar{M})$, $(r,\bar{N})$ tenemos que $(r,\bar{M}) \sim (r,\bar{N})$ sii $\bar{M} = \bar{N}$.

<u>si</u>) $(r,\bar{M}) \sim (r,\bar{N})$ por ser $\sim$ reflexiva.

<u>sólo si</u>) $(r,\bar{M}) \sim (r,\bar{N})$ PD $\bar{M} = \bar{N}$

$(r,\bar{M}) \sim (r,\bar{N})$ sii $\bar{M} = in(r, r\cup r)[\bar{M}] = in(r, r\cup r)[\bar{N}] = \bar{N}$

□.

Se utilizarán las siguientes abreviaturas: obj-conj. tr. y obj-conj. para objeto-conjunto transitivo y objeto-conjunto respectivamente.

7.17. Lema en TE. Para objetos-conjunto transitivos r, s y t tales que $r \subset t$, $s \subset t$, $\bar{M}$ un r-elemento y $\bar{N}$ un s-elemento, tenemos:

$$(r,\bar{M}) \sim (s,\bar{N}) \text{ sii } in(r,t)(\bar{M}/r) = in(s,t)(\bar{N}/s)$$

Demostración.

Tenemos: $A \xrightarrow{r} \mathcal{P}A$, $B \xrightarrow{s} \mathcal{P}B$, $C \xrightarrow{t} \mathcal{P}C$, $A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega$ y $B \xrightarrow{\bar{N}} \Omega$, donde $\bar{M} = \chi_m : M \to A$ y $\bar{N} = \chi_n : N \to B$.

si) Sea $in(r,t)(\bar{M}/r) = in(s,t)(\bar{N}/s)$, donde $\bar{M}e = r(\bar{M}/r)$ y $\bar{N}e = s(\bar{N}/s)$. PD $in(r, r\cup s)[\bar{M}] = in(s, r \cup s)[\bar{N}]$

En particular para $t = r \cup s$ se tiene que $in(r, r\cup s)(\bar{M}/r) =$
$= in(s, r\cup s)(\bar{N}/s)$.

entonces $(r\cup s)\circ in(r,r\cup s)(\bar{M}/r) = (r\cup s)\circ in(s,r\cup s)(\bar{N}/s)$

$$\begin{array}{cc}
in(r,r\cup s): r \to r\cup s \ \| & \| \ in(s,r\cup s): s \to r\cup s \\
\mathcal{P}in(r,r\cup s)\circ r(\bar{M}/r) & \mathcal{P}in(s,r\cup s)\circ s(\bar{N}/s) \\
\| & \| \\
\mathcal{P}in(r,r\cup s)\,\bar{M}e & \mathcal{P}in(s,r\cup s)\,\bar{N}e \\
5.7.a \ \| & \| \ 5.7.a \\
in(r,r\cup s)[\bar{M}]e & in(s,r\cup s)[\bar{N}]e
\end{array}$$

entonces (por 5.5) $in(r,r\cup s)[\bar{M}] = in(s,r\cup s)[\bar{N}]$

$\therefore$ $(r,\bar{M}) \sim (s,\bar{N})$

sólo si) Sea $(r,\bar{M}) \sim (s,\bar{N})$ PD. $in(r,t)(\bar{M}/r) = in(s,t)(\bar{N}/s)$ si $r \subset t$ y $s \subset t$.

Sea t tal que $r \subset t$ y $s \subset t$.

Como $(r,\bar{M}) \sim (s,\bar{N})$ entonces $in(r,t)[\bar{M}] = in(s,t)[\bar{N}]$

entonces (por 5.5) $in(r,t)[\bar{M}]e = in(s,t)[\bar{N}]e$

$$\begin{array}{cc}
(5.7.a) \ \| & \| \ (5.7.a) \\
\mathcal{P}in(r,t)\circ\bar{M}e & \mathcal{P}in(s,t)\circ\bar{N}e \\
\bar{M} \text{ es } r\text{-elemento} \ \| & \| \ \bar{N} \text{ es } s\text{-elemento} \\
\mathcal{P}in(r,t)\circ r(\bar{M}/r) & \mathcal{P}in(s,t)\circ s(\bar{N}/s) \\
in(r,t): r \to t \ \| & \| \ in(s,t): s \to t \\
t\circ in(r,t)\circ(\bar{M}/r) & t\circ in(s,t)\circ(\bar{N}/s)
\end{array}$$

Como t es mono entonces $in(r,t)(\bar{M}/r) = in(s,t)(\bar{N}/s)$.

$\square$.

Ya tenemos los objetos-conjunto y la igualdad (o equivalencia) ahora se definirá la **RELACIÓN DE MEMBRESÍA** $\in$ entre obj-conjunto:

7.18. Definición en TE. Para objetos-conjunto $(r,\bar{M})$ y $(s,\bar{N})$ se define $(r,\bar{M}) \in (s,\bar{N})$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones, equivalentes:

a) Existen objetos-conjunto $(t, \bar{M}')$ y $(t, \bar{N}')$ tal que $(r, \bar{M}) \sim (t, \bar{M}')$, $(s, \bar{N}) \sim (t, \bar{N}')$ y $\bar{M}' \in_t \bar{N}'$;

b) Existe un s-elemento $\bar{K} \in_s \bar{N}$ tal que $(r, \bar{M}) \sim (s, \bar{K})$;

c) $in(r, r\cup s)[\bar{M}] \in_{r\cup s} in(s, r\cup s)[\bar{N}]$.

PD. a) si b) si c) si a). Donde $C \xrightarrow{t} \wp C$, $B \xrightarrow{s} \wp B$ y $A \xrightarrow{r} \wp A$.

<u>a) si b)</u>. Suponer que existe $\bar{K}$ tal que $\bar{K} \in_s \bar{N}$ y $(r, \bar{M}) \sim (s, \bar{K})$

PD. a). Sean $\bar{N}' = \bar{N}$, $\bar{M}' = \bar{K}$ y $t = s$

$\therefore$ $(r, \bar{M}) \sim (t, \bar{M}')$, $(s, \bar{N}) \sim (t, \bar{N}')$ y $\bar{M}' \in_t \bar{N}'$

<u>b) si c)</u>. $in(r, r\cup s)[\bar{M}] \in_{r\cup s} in(s, r\cup s)[\bar{N}]$ PD. b)

$in(r, r\cup s)[\bar{M}] \in_{r\cup s} in(s, r\cup s)[\bar{N}]$ sii (por 7.12) $in(r, r\cup s)[\bar{M}]$ es un $r\cup s$-elemento y $(in(r, r\cup s)[\bar{M}]/r\cup s) \in_{A\cup B} in(s, r\cup s)[\bar{N}]$

sii existe $\underline{y} : 1 \longrightarrow N$ tal que $in(r, r\cup s)[\bar{M}]_e = (r\cup s) \circ in(s, r\cup s) \circ n \circ \underline{y}$

entonces $in(r, r\cup s)[\bar{M}]_e = (r\cup s) \circ in(s, r\cup s) \circ n \circ \underline{y}$

(por 5.7.a) $\|$ $\quad \|$ $(in(s, r\cup s) : s \to r\cup s)$

$\wp_{in(r, r\cup s)} \circ \bar{M}_e \qquad \wp_{in(s, r\cup s)} \circ s \circ n \circ \underline{y}$

Sea $\bar{K} := (s \circ n \circ \underline{y} / s) : S \to \Omega$, i.e. $\bar{K}_e = s \circ n \circ \underline{y}$

$\therefore$ $in(s, r\cup s)[\bar{K}]_e \underset{5.7.a}{=} \wp_{in(s, r\cup s)} \circ \bar{K}_e = \wp_{in(s, r\cup s)} \circ s \circ n \circ y \underset{\text{entonces}}{=} in(r, r\cup s)[\bar{M}]_e$

$\therefore$ (por 3.5) $in(s, r\cup s)[\bar{K}] = in(r, r\cup s)[\bar{M}]$

$\therefore$ (por definición) $(r, \bar{M}) \sim (s, \bar{K})$

PD. $\bar{K} \in_s \bar{N}$

$\bar{K}_e := s \circ n \circ y$ $\therefore$ $\bar{K}$ es s-elemento y $(\bar{K}/s) = n \circ \underline{y} \in_B \bar{N}$

$\therefore$ b)

<u>c) si a)</u>. Existen obj-conj $(t, \bar{M}')$ y $(t, \bar{N}')$ tal que $(r, \bar{M}) \sim (t, \bar{M}')$, $(s, \bar{N}) \sim (t, \bar{N}')$ y $\bar{M}' \in_t \bar{N}'$, entonces existe $1 \xrightarrow{z} N'$ tal que $\bar{M}'_e = t \circ n' \circ z$

PD $in(t, r\cup s\cup t)[\bar{M}'] \in_{r\cup s\cup t} in(t, r\cup s\cup t)[\bar{N}']$

$in(t, r\cup s\cup t)[\bar{M}']_e \underset{5.7.a}{=} \wp_{in(t, r\cup s\cup t)} \bar{M}'_e \underset{\bar{M}' \in_t \bar{N}'}{=} \wp_{in(t, r\cup s\cup t)} \circ t \circ n' \circ z$

$(in(t, r\cup s\cup t) : t \to r\cup s\cup t)$ $= (r\cup s\cup t)\, in(t, r\cup s\cup t) \circ n' \circ z$

y $in(t, r\cup s\cup t) \circ n' \circ z \in_{A\cup B\cup C} in(t, r\cup s\cup t)[\bar{N}']$

$\therefore$ $in(t, r\cup s\cup t)[\bar{M}'] \in_{r\cup s\cup t} in(t, r\cup s\cup t)[\bar{N}']$

Como $(r,\bar{M}) \sim (t,\bar{M}')$ entonces $in(r, r\cup t)[\bar{M}] = in(t, r\cup t)[\bar{M}']$ entonces $(in(r\cup t, r\cup s\cup t) \circ in(r, r\cup t))[\bar{M}] = (in(r\cup t, r\cup s\cup t) \circ in(t, r\cup t))[\bar{M}']$

$\therefore$ $in(r, r\cup s\cup t)[\bar{M}] = in(t, r\cup s\cup t)[\bar{M}']$

Análogamente, como $(s,\bar{N}) \sim (t,\bar{N}')$ entonces

$in(s, r\cup s\cup t)[\bar{N}] = in(t, r\cup s\cup t)[\bar{N}']$

$\therefore$ (con lo anterior) $in(r, r\cup s\cup t)[\bar{M}] \in_{r\cup s\cup t} in(s, r\cup s\cup t)[\bar{N}]$.

PD. $in(r, r\cup s)[\bar{M}] \in_{r\cup s} in(s, r\cup s)[\bar{N}]$

Por 6.1.b $in(r, r\cup s\cup t) = in(r\cup s, r\cup s\cup t) \circ in(r, r\cup s)$ y

$in(s, r\cup s\cup t) = in(r\cup s, r\cup s\cup t) \circ in(s, r\cup s)$

y por ser $\wp$ funtor entonces

$\wp_{in(r, r\cup s\cup t)} = \wp_{in(r\cup s, r\cup s\cup t)} \circ \wp_{in(r, r\cup s)}$ y

$\wp_{in(s, r\cup s\cup t)} = \wp_{in(r\cup s, r\cup s\cup t)} \circ \wp_{in(s, r\cup s)}$.

Como $in(r, r\cup s\cup t)[\bar{M}] \in_{r\cup s\cup t} in(s, r\cup s\cup t)[\bar{N}]$ entonces existe

$1 \xrightarrow{z} N$ tal que $in(r, r\cup s\cup t)[\bar{M}]_e = (r\cup s\cup t) \circ in(s, r\cup s\cup t) \circ n \circ z$

entonces $\wp_{in(r\cup s, r\cup s\cup t)} \circ \wp_{in(r, r\cup s)} \circ \bar{M}_e = \wp_{in(r, r\cup s\cup t)} \circ \bar{M}_e =$

por 7.1.a $=$ $in(r, r\cup s\cup t)[\bar{M}]_e = (r\cup s\cup t) \circ in(s, r\cup s\cup t) \circ n \circ z =$ (como $s \xrightarrow{in(s, r\cup s\cup t)} r\cup s\cup t$)

$= \wp_{in(s, r\cup s\cup t)} \circ s \circ n \circ z = \wp_{in(r\cup s, r\cup s\cup t)} \circ \wp_{in(s, r\cup s)} \circ s \circ n \circ z =$

($s \subseteq r\cup s$) $= \wp_{in(r\cup s, r\cup s\cup t)} \circ r\cup s \circ in(s, r\cup s) \circ n \circ z$

$\therefore$ (por ser $\wp_{in(r\cup s, r\cup s\cup t)}$ mono):

$in(r, r\cup s)[\bar{M}]_e = \wp_{in(r, r\cup s)} \circ \bar{M}_e = (r\cup s) \circ in(s, r\cup s) \circ n \circ z$ y

$in(s, r\cup s) \circ n \circ z \in_{A\cup E} in(s, r\cup s)[\bar{N}]$

$\therefore$ $in(r, r\cup s)[\bar{M}] \in_{r\cup s} in(s, r\cup s)[\bar{N}]$

$\therefore$ a) si b) si c) si a)

□

7.19. Lema en TE. Para objetos-conjunto $(r,\bar{M})$ y $(r,\bar{N})$ se tiene:

$(r,\bar{M}) \in (r,\bar{N})$ sii $\bar{M} \in_r \bar{N}$.

Demostración

si) $\bar{M} \in_r \bar{N}$ y como $(r,\bar{M}) \sim (r,\bar{M})$ entonces (por 7.18.b)

$(r,\bar{M}) \in (r,\bar{N})$.

sólo si) $(r,\bar{M}) \in (r,\bar{N})$ sii (por 7.18.b) existe $\bar{K} \in_r \bar{N}$ tal que

$(r,\bar{M}) \sim (r,\bar{K})$ entonces (por 7.16) $\bar{M} = \bar{K}$

$\therefore$ $\bar{M} \in_r \bar{N}$.

□.

Ahora las definiciones 7.14, 7.15 y 7.18 dan lugar a un modelo del lenguaje de la teoría de los conjuntos; pues dan una interpretación de las nociones indefinidas de la Teoría de los conjuntos: Conjunto (objeto-conjunto), $=(\sim)$ y $\in$. Este modelo será llamado el Modelo de los objetos-conjunto en la Teoría de los topos, o brevemente el MODELO.

Sabemos que $Set(Z)$ es un topos elemental bién punteado, entonces, también tenemos el Modelo de los objeto conjunto (en $Set(Z)$) que llamaremos $\mathcal{M}$ y a continuación se estudiará.

Cualquier Conjunto M tiene una cerradura transitiva T y por lo tanto $Ob(M) := (T \hookrightarrow \wp T,\ T \xrightarrow{\bar{M}} \Omega)$ es un obj. conj. en $Set(Z)$, por axioma 4.4.

Inversamente, para cualquier objeto conjunto $(A \xrightarrow{r} \wp A, A \xrightarrow{\bar{N}} \Omega)$, en el modelo de los objetos conjunto de $Set(Z)$, tenemos un subconjunto $St(r, \bar{N})$ del representante transitivo $RT(r)$ de r el cuál es la imagen de N bajo el isomorfismo de A en $RT(r)$ (ver 4.5)

<u>**7.20.**</u> Proposición en Z. Para Z-conjuntos M y N y objeto-conjunto X, Y en $Set(Z)$, tenemos:

a) $St(Ob(M)) = M$
b) $Ob(St(X)) \sim X$
c) $X \sim Y$ sii $St(X) = St(Y)$
d) $X \in Y$ sii $St(X) \in St(Y)$
e) $M = N$ sii $Ob(M) \sim Ob(N)$
f) $M \in N$ sii $Ob(M) \in Ob(N)$

<u>Demostración.</u>

a) Sea M un Z-conjunto. PD $St(Ob(M)) = M$

$Ob(M) := (T \xrightarrow{r} \wp T, T \xrightarrow{\bar{M}} \Omega)$ donde T es la cerradura transitiva de M y $\bar{M}$ es el morfismo característico de $M \xrightarrow{m} T$.

y $St(Ob(M)) = St((T \xrightarrow{r} \wp T, T \xrightarrow{\bar{M}} \Omega))$

Por 4.5 y como r es extensional y bién fundada, por ser obj. conj. tr., es isomorfa a la relación $\in \restriction T'$ en un conjunto transitivo T'

i.e. Existe $f: T \longrightarrow T'$ isomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "r"'] & T' \arrow[d] \\ \wp T \arrow[r, tail, "\wp f"'] & \wp T' \end{tikzcd}$$ conmuta.

Como T y T' son conjuntos transitivos entonces (por 4.3)
φ es inclusión

$\therefore\ T = T'$ y $\varphi = \mathrm{Id}_T$

$\therefore\ St(r, \bar{M}) = (\varphi \circ m)(M) = (\mathrm{Id}_T \circ m)(M) = M$

$\therefore\ St(Ob(M)) = M$

b) Sea $X = (A \xrightarrow{r} \wp A,\ A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega)$ un objeto-conjunto.

PD. $Ob(St(X)) \sim X$

Sea T la representación transitiva de r, entonces se tiene:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "m"'] & \\ A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, tail, "r"'] & T \arrow[d, tail, "t"] \\ \wp A \arrow[r, tail, "\wp i"'] & \wp T \end{tikzcd}$$

conmuta y $\bar{M} = \chi_m$

$St(X) = i \circ m(M)$ i.e. $i[\bar{M}] = \chi_{St(X) \xrightarrow{j} T}$

entonces

$Ob(St(X)) = Ob(i \circ m(M)) = (T' \xrightarrow{a} \wp T', \bar{N})$, donde T' es la cerradura transitiva de $St(X)$ y $\bar{N} = \chi_{St(X) \xrightarrow{j'} T'}$

Como T y T' son conj. transitivos y $St(X) \subset T$ y $St(X) \subset T'$ entonces (por ser T' la cerradura transitiva de $St(X)$) $T' \subset T$

PD. $(a, \bar{N}) \sim X$ Por 7.15.b basta demostrar que

$in(r,t)[\bar{M}] = in(a,t)[\bar{N}]$

donde $in(r,t) = i$ y $in(a,t) : T' \hookrightarrow T$

Tenemos que

$$\begin{tikzcd} St(X) \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, hook, "j'"'] & T \\ T' \arrow[ur, hook, "in(a,t)"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta

$\therefore\ i[\bar{M}] = \chi_j = \chi_{in(a,t) \circ j'} := in(a,t)[\chi_{j'}] := in(a,t)[\bar{N}]$

$\therefore\ X = (r, \bar{M}) \sim (a, \bar{N}) = Ob(St(X))$

$\therefore\ Ob(St(X)) \sim X$

c) Sean $X = (A \xrightarrow{r} \wp A, \bar{M})$ y $Y = (B \xrightarrow{s} \wp B, \bar{N})$ objetos-conjunto

PD. $X \sim Y$ sii $St(X) = St(Y)$.

si) **Suponer que** $St(X) = St(Y)$ PD. $X \sim Y$

Por b) se tiene que

$$X \sim Ob(St(X)) = Ob(St(Y)) \sim Y$$

$\therefore X \sim Y$

sólo si) Suponer que $X \sim Y$ PD. $St(X) = St(Y)$

Sean T' y T'' las representaciones transitivas de r y s respectivamente y T la representación transitiva de $r \cup s$.

En diagrama se tiene:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "in(r,r\cup s)"] \arrow[dr, "f'"] \arrow[dd, "r"'] & & A\cup E \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "r\cup s"] & & E \arrow[ll, "in(s,r\cup s)"'] \arrow[dr, "f''"] \arrow[dd, "s"'] & \\
& T' \arrow[dd, hook, "t'"'] & & T \arrow[dd, "t"] & & T'' \arrow[dd, hook, "t''"'] \\
\wp A \arrow[rr, "\wp in(r,r\cup s)"'] \arrow[dr, "\wp_{f'}"'] & & \wp(A\cup E) \arrow[dr, "\wp_f"'] & & \wp E \arrow[ll, "\wp in(s,r\cup s)"] \arrow[dr, "\wp_{f''}"'] & \\
& \wp T' & & \wp T & & \wp T''
\end{tikzcd}$$

conmuta y

$f = in(r\cup s, t)$

$f' = in(r, t')$

$f'' = in(s, t'')$

$\therefore \quad f \circ in(r, r\cup s) \circ f'^{-1} : T' \longrightarrow T$ es mono

y $\quad \wp(f \circ in(r,r\cup s) \circ f'^{-1}) \circ t' \underset{\wp\ \text{funtor}}{=\!=} \wp_f \circ \wp_{in(r,r\cup s)} \circ (\wp_{f'^{-1}} \circ t') =$

$= \wp_f \circ \wp_{in(r,r\cup s)} \circ r \circ f'^{-1} = (\wp_f \circ r\cup s) \circ in(r,r\cup s) \circ f'^{-1} =$

$= t \circ (f \circ in(r,r\cup s) \circ f'^{-1})$

$\therefore \quad \wp(f \circ in(r,r\cup s) \circ f'^{-1}) \circ t' = t \circ (f \circ in(r,r\cup s) \circ f'^{-1})$

$\therefore$ (por 4.3) $\quad f \circ in(r,r\cup s) \circ f'^{-1} : T' \hookrightarrow T$ es inclusión

$\therefore \quad f \circ in(r,r\cup s) \circ f'^{-1} = in(t', t)$

Análogamente $\quad f \circ in(s,r\cup s) \circ f''^{-1} = in(t'', t)$ y $T'' \subset T$.

Ahora $\quad St(X) = (f' \circ m)(M)$ donde $\bar{M} = \chi_{m : M \to A}$

y $\quad St(Y) = (f'' \circ n)(N)$ donde $\bar{N} = \chi_{n : N \to A}$

Como $X \sim Y$ entonces $in(r, r\cup s)[\bar{M}] = in(s, r\cup s)[\bar{N}]$

ie. $(in(r,r\cup s) \circ m)(M) = (in(s,r\cup s) \circ n)(N)$

entonces (por ser $in(t',t)$ e $in(t'',t)$ contenciones)

$$\begin{aligned}
St(X) &= in(t',t)(St(X)) = (f \circ in(r,r\cup s) \circ f'^{-1} \circ f' \circ m)(M) = \\
&= (f \circ in(r,r\cup s) \circ m)(M) = (f \circ in(s,r\cup s) \circ n)(N) = \\
&= (f \circ in(s,r\cup s) \circ f''^{-1} \circ f'' \circ n)(N) \\
&= in(t'',t)((f'' \circ n)(N)) = in(t'',t)(St(Y)) = St(Y)
\end{aligned}$$

$\therefore \quad St(X) = St(Y)$

$\therefore \quad X \sim Y$ sii $St(X) = St(Y)$

d) Sean $X=(A \xrightarrow{r} \wp A, \bar{M})$, $Y=(B \xrightarrow{s} \wp B, \bar{N})$ obj-conj.

PD. $X \in Y$ sii $St(X) \in St(Y)$

<u>sólo si)</u> Sean $T'=RT(r)$, $T''=RT(s)$, $t': T' \hookrightarrow \wp T'$ y $t'': T'' \hookrightarrow \wp T''$

Suponer que $X \in Y$. PD $St(X) \in St(Y)$

entonces (por 7.18.b) existe $\bar{K}$ s-elemento tal que $\bar{K} \in_s \bar{N}$ y $(r, \bar{M}) \sim (s, \bar{K})$

entonces (por c)) $St(X) = St((r,\bar{M})) = St((s,\bar{K}))$

Basta demostrar que $St((s,\bar{K})) \in St(Y)$

Como $\bar{K} \in_s \bar{N}$ entonces existe $x: 1 \to N$ tal que $\bar{K}_e = s \circ n \circ x$,

en realidad $\bar{K}_e : 1 \to \wp B$ $\quad 0 \mapsto k(K)$ i.e. existe $x \in N$ tal que $(s \circ n)(x) = k(K)$, $1 \xrightarrow{x} N$ $\quad 0 \mapsto x$

Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[d, tail, "k"] & \\
1 \arrow[r, "x"] \arrow[drr, bend right, "\bar{K}_e"'] & N \arrow[r, tail, "n"] & B \arrow[r, tail, "f''"] \arrow[d, tail, "s"] & T'' \arrow[d, hook, "t''"] \\
 & & \wp B \arrow[r, tail, "\wp f''"'] & \wp T''
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Por 7.13.c, ya que f'' es mono, se tiene que $f''[\bar{K}] \in_{t''} f''[\bar{N}]$

y $f''[\bar{K}]_e \underset{5.7a}{=} \wp_{f''} \circ \bar{K}_e = \wp_{f''} \circ s \circ n \circ x = t'' \circ f'' \circ n \circ x$

i.e. $(f'' \circ k)(K) = (\wp_{f''} \circ s \circ n)(x) = (t'' \circ f'' \circ n)(x) = (f'' \circ n)(x) \in_{T''} f''[\bar{N}]$

$\therefore$ $(f'' \circ k)(K) \in (f'' \circ n)(N)$

$\therefore$ $St(s,\bar{K}) = (f'' \circ k)(K) \in (f'' \circ n)(N) = St(Y)$

$\therefore$ $St(X) \in St(Y)$

<u>si)</u> Suponer que $St(X) \in St(Y)$, $St(X) = (f' \circ m)(M)$ y $St(Y) = (f'' \circ n)(N)$

Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail, "m"] & A \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "r"] & T' \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "t'"] & T' \cup T'' \arrow[d, hook, "t' \cup t''"] & T'' \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[d, hook, "t''"] & B \arrow[l, tail, "f''"'] \arrow[d, "s"] & N \arrow[l, tail, "n"'] \\
 & \wp A \arrow[r, tail, "\wp f'"'] & \wp T' \arrow[r, hook, "\wp i"'] & \wp(T' \cup T'') & \wp T'' \arrow[l, hook', "\wp j"] & \wp B \arrow[l, tail, "\wp f''"] &
\end{tikzcd}$$

conmuta

Como $St(X) \in St(Y)$ entonces $(i \circ f' \circ m)(M) \in (j \circ f'' \circ n)(N)$ es decir existe $1 \xrightarrow{x} N$ tal que $j \circ f'' \circ n \circ x : 1 \longmapsto T'UT''$
$0 \longmapsto (i \circ f' \circ m)(M)$

Sea $\bar{K}_e := s \circ n \circ x$ (por 5.5 y 7.11) sea $\bar{K}$ el B-conjunto que le corresponde, entonces $\bar{K} \in_s \bar{N}$

$\therefore$ (por 7.19) $(s, \bar{K}) \in (s, \bar{N})$

PD $X \sim (s, \bar{K})$

Basta demostrar que $in(r, t'ut'')[\bar{M}] = in(s, t'ut'')[\bar{K}]$

$in(r, t'ut'')[\bar{M}] = (i \circ f')[\bar{M}]$

$in(s, t'ut'')[\bar{K}] = (j \circ f'')[\bar{K}]$

$$in(s, t'ut'')[\bar{K}]_e \underset{5.7.a}{=} \wp_j \circ \wp_{f''} \circ \bar{K}_e = \wp_j \circ (\wp_{f''} \circ s) \circ n \circ x =$$

$$= \wp_j \circ t'' \circ f'' \circ n \circ x = (t'ut'') \circ j \circ f'' \circ n \circ x$$

$\therefore$ (por ser $t'ut''$ contención y lo anterior)

$in(s, t'ut'')[\bar{K}]_e = (t'ut'') \circ j \circ f'' \circ n \circ x : 1 \longmapsto \wp(T'UT'')$
$0 \longmapsto (i \circ f' \circ m)(M)$

Pero $in(r, t'ut'')[\bar{M}]_e = (i \circ f')[\bar{M}]_e : 1 \longmapsto \wp(T'UT'')$
$0 \longmapsto (i \circ f' \circ m)(M)$

$\therefore$ $in(s, t'ut'')[\bar{K}]_e = in(r, t'ut'')[\bar{M}]_e$

$\therefore$ $in(s, t'ut'')[\bar{K}] = in(r, t'ut'')[\bar{M}]$

$\therefore$ $(r, \bar{M}) \sim (s, \bar{K})$ y $(s, \bar{K}) \in Y$

$\therefore$ $X \in Y$

$\therefore$ $X \in Y$ sii $St(X) \in St(Y)$

e) Sean M y N Z-conjuntos

PD. $M = N$ sii $Ob(M) \sim Ob(N)$

sólo si) Si $M = N$ entonces $Ob(M) \sim Ob(N)$

si) Suponer que $Ob(M) \sim Ob(N)$, ie. $(T \hookrightarrow \wp T, \bar{M}) \sim (T' \hookrightarrow \wp T', \bar{N})$ donde T y T' son las cerraduras transitivas de M y N

entonces $in(r, rus)[\bar{M}] = in(s, rus)[\bar{N}]$

entonces $(in(r, rus) \circ m)(M) = (in(s, rus) \circ n)(N)$

pero $in(r, rus)$, $in(s, rus)$, n y m son inclusiones

entonces $M = N$

$\therefore$ $M = N$ sii $Ob(M) \sim Ob(N)$

f) Sean M y N Z-conjuntos

PD. $M \in N$ sii $Ob(M) \in Ob(N)$

$Ob(M) \in Ob(N)$ sii (por d) $St(Ob(M)) \in St(Ob(N))$

sii (por a) $M \in N$

$\square$.

Esta proposición dice que el modelo de la teoría de los objetos-conjunto en $Set(Z)$ es "equivalente" a la teoría de los Z-conjuntos.

§ 8. Propiedades del Modelo de los Objetos - Conjunto.

La finalidad de esta sección es demostrar que el modelo de los objetos - conjunto en la teoría de los topos satisface los axiomas de la teoría de los conjuntos en $\mathcal{Z}$ y que el topos de los conjuntos es en realidad equivalente al topos en el que estamos trabajando, para ésto se requerirá de otro axioma en TEBP.

A menos que se indique lo contrario, se trabajará en TEBP.

8.1. Proposición en TEBP.

Para objetos-conjunto $(r, \bar{M})$, $(s, \bar{N})$, son equivalentes:

1) $(r, \bar{M}) \subset (s, \bar{N})$;
2) $in(r, r\cup s)[\bar{M}] \subset in(s, r\cup s)[\bar{N}]$;
3) Existe un objeto - conjunto $(s, \bar{K})$ tal que $(r, \bar{M}) \sim (s, \bar{K})$ y $\bar{K} \subset \bar{N}$.

<u>Demostración.</u>

Sean $(A \xrightarrow{r} PA, A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega)$, $(B \xrightarrow{s} PB, B \xrightarrow{\bar{N}} \Omega)$, $\bar{M} = \chi_{m: M \to A}$ y $\bar{N} = \chi_{n: N \to B}$.

PD. 2) si 1)

$(r, \bar{M}) \subset (s, \bar{N})$ sii para todo $(t, \bar{L})$(si $(t, \bar{L}) \in (r, \bar{M})$ entonces $(t, \bar{L}) \in (s, \bar{N})$).

PD. $in(r, r\cup s)[\bar{M}] \subset in(s, r\cup s)[\bar{N}]$. Por 7.3 es equivalente a demostrar que $in(r, r\cup s)[\bar{M}] \subset_{A\cup B} in(s, r\cup s)[\bar{N}]$.

Sea $1 \xrightarrow{l} A\cup B \in_{A\cup B} in(r, r\cup s)[\bar{M}]$ PD. $l \in_{A\cup B} in(s, r\cup s)[\bar{N}]$.

entonces existe $1 \xrightarrow{x} M$ tal que $l = in(r, r\cup s) \circ m \circ x$.

Se define $\bar{L}_e := r \circ m \circ x$ $(: 1 \to PA)$, entonces (5.5) existe $\bar{L}: A \to \Omega$ tal que $(\bar{L}_e \,\Pi\, 1d_A)^{-1}[e_A] = \Pi'^{\,-1}_{1,A}[\bar{L}]$.

$\therefore$ (por definición) $\bar{L}$ es un r-elemento y $(\bar{L}/r) := m \circ x \in_A \bar{M}$

$\therefore$ $\bar{L} \in_r \bar{M}$ $\therefore$ (7.19) $(r, \bar{L}) \in (r, \bar{M})$

entonces (por 1) $(r, \bar{L}) \in (s, \bar{N})$

$(r, \bar{L}) \in (s, \bar{N})$ sii (7.18) $in(r, r\cup s)[\bar{L}] \in_{r\cup s} in(s, r\cup s)[\bar{N}]$

entonces $in(r, r\cup s)[\bar{L}]_e = (r\cup s) \circ (in(r, r\cup s)[\bar{L}]/r\cup s)$ y $(in(r, r\cup s)[\bar{L}]/r\cup s) \in_{A\cup B} in(s, r\cup s)[\bar{N}]$, pero

$$in(r, r\cup s)[\bar{L}]_e \underset{5.7.a}{=} \mathcal{P}_{in(r, r\cup s)} \circ \bar{L}_e := \mathcal{P}_{in(r, r\cup s)} \circ r \circ m \circ x =$$

$$= (r\cup s) \circ (in(r, r\cup s) \circ m \circ x)$$

$\therefore$ $l = in(r, r\cup s) \circ m \circ x = (in(r, r\cup s)[\bar{L}]/r\cup s) \in_{A\cup B} in(s, r\cup s)[\bar{N}]$

$\therefore$ $in(r, r\cup s)[\bar{M}] \subset_{A\cup B} in(s, r\cup s)[\bar{N}]$

$\therefore$ $in(r, r\cup s)[\bar{M}] \subset in(s, r\cup s)[\bar{N}]$.

PD. 3) si 2)

Sea $in(r, r\cup a)[\bar{M}] \subset in(a, r\cup a)[\bar{N}]$.

PD. Existe un objeto-conjunto $(a, \bar{K})$ tal que $(r, \bar{M}) \sim (a, \bar{K})$ y $\bar{K} \subset \bar{N}$.

Sea $\bar{K} := in(a, r\cup a)^{-1}[in(r, r\cup a)[\bar{M}]]$

PD. $\bar{K} \subset \bar{N}$. Por 5.1.b PD. $in(r, r\cup a)[\bar{M}] \subset in(a, r\cup a)\langle \bar{N} \rangle$

pero $in(a, r\cup a)[\bar{N}] \subset in(a, r\cup a)\langle \bar{N} \rangle$ sii (por 5.1.b)

$\bar{N} \underset{5.2.c}{=} in(a, r\cup a)^{-1}[in(a, r\cup a)[\bar{N}]] \subset \bar{N}$

$\therefore$ $in(r, r\cup a)[\bar{M}] \subset in(a, r\cup a)[\bar{N}] \subset in(a, r\cup a)\langle \bar{N} \rangle$

$\therefore$ $\bar{K} \subset \bar{N}$.

PD $(r, \bar{M}) \sim (a, \bar{K})$ i.e. PD $in(r, r\cup a)[\bar{M}] = in(a, r\cup a)[\bar{K}]$

$\subset$) PD. $in(r, r\cup a)[\bar{M}] \subset in(a, r\cup a)[\bar{K}] = in(a, r\cup a)[in(a, r\cup a)^{-1}[in(r, r\cup a)[\bar{M}]]]$

Sea $1 \xrightarrow{x} A\cup B \in in(r, r\cup a)[\bar{M}]$ PD. $x \in in(a, r\cup a)[\bar{K}]$

Entonces existe $y : 1 \to M$ tal que $x = in(r, r\cup a) \circ m \circ y$ y como $in(r, r\cup a)[\bar{M}] \subset in(a, r\cup a)[\bar{N}]$ entonces existe $y' : 1 \to N$ tal que $x = in(a, r\cup a) \circ n \circ y'$.

Visto en diagrama, tenemos:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[rrrd, bend left, "n\circ y'"] \arrow[dr, dashed, "y''"] \arrow[ddr, bend right, "y"'] & & & & \\
& K \arrow[rr, tail, "k"] \arrow[d, tail] \arrow[rrd, phantom, "P.F."] & & B \arrow[r, tail, "in(a, r\cup a)"] \arrow[d, tail, "in(a, r\cup a)"] \arrow[dd, bend left, "\bar{K}"] & A\cup B \arrow[dd, "in(a, r\cup a)[\bar{K}]"] \\
& M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d] \arrow[rrd, phantom, "P.F"] & A \arrow[r, tail, "in(r, r\cup a)"] & A\cup B \arrow[d, "in(r, r\cup a)[\bar{M}]"] & \\
& 1 \arrow[rr, tail] & & \Omega & \Omega \arrow[l, equal]
\end{tikzcd}
$$

$\therefore$ $(in(r, r\cup a) \circ m) \circ y = x = in(a, r\cup a)(n \circ y')$

$\therefore$ existe un único $1 \xrightarrow{y''} K$ tal que $k \circ y'' = n \circ y'$

$\therefore$ $x = in(a, r\cup a) \circ n \circ y' = in(a, r\cup a) \circ k \circ y''$

$\therefore$ $x \in_{A\cup B} in(a, r\cup a)[\bar{K}]$.

$\therefore$ $in(r, r\cup a)[\bar{M}] \subset in(a, r\cup a)[\bar{K}]$

$\supset$) PD. $in(a, r\cup a)[\bar{K}] = in(a, r\cup a)[in(a, r\cup a)^{-1}[in(r, r\cup a)[\bar{M}]]] \subset in(r, r\cup a)[\bar{M}]$

Por 5.1.a. es equivalente a demostrar que:

$in(a, r\cup a)^{-1}[in(r, r\cup a)[\bar{M}]] \subset in(a, r\cup a)^{-1}[in(r, r\cup a)[\bar{M}]]$

pero ésto siempre es cierto

$\therefore$ $in(r, r\cup a)[\bar{M}] = in(a, r\cup a)[\bar{K}]$

$\therefore$ $(r, \bar{M}) \sim (a, \bar{K})$ y $\bar{K} \subset \bar{N}$.

PD. 1) si 3)

Existe un obj-conj. $(s, \bar{K})$ tal que $(r,\bar{M}) \sim (s,\bar{K})$ y $\bar{K} \subset \bar{N}$

PD. $(r,\bar{M}) \subset (s,\bar{N})$

Como $(r,\bar{M}) \sim (s,\bar{K})$ basta demostrar que $(s,\bar{K}) \subset (s,\bar{N})$

Sea $(t,\bar{L}) \in (s,\bar{K})$ PD. $(t,\bar{L}) \in (s,\bar{N})$

Por 7.18.b. existe $\bar{L}' \in_s \bar{K}$ tal que $(s,\bar{L}') \sim (t,\bar{L})$

PD $(s,\bar{L}') \in (s,\bar{N})$

Por 7.19. es equivalente a demostrar que $\bar{L}' \in_s \bar{N}$

Como $\bar{L}' \in_s \bar{K}$ entonces existe $1 \xrightarrow{x} K$ tal que $\bar{L}'_e = s \circ k \circ x$

Como $\bar{K} \subset \bar{N}$ (ie. $\bar{K} \subset_B \bar{N}$) y $k \circ x \in_B \bar{K}$

entonces $k \circ x \in_B \bar{N}$

$\therefore$ $\bar{L}' \in_s \bar{N}$ $\therefore$ $(s,\bar{L}') \in (s,\bar{N})$

$\therefore$ 1) si 3) si 2) si 1)

□.

En particular se tiene que:

$(r,\bar{M}) \subset (s,\bar{N})$ y $(s,\bar{N}) \subset (r,\bar{M})$ sii $(r,\bar{M}) \sim (s,\bar{N})$, pues

$(r,\bar{M}) \subset (s,\bar{N})$ y $(s,\bar{N}) \subset (r,\bar{M})$ sii (por 8.1) $in(r, r\cup s)[\bar{M}] \subset in(s, r\cup s)[\bar{N}]$ e
$in(s, r\cup s)[\bar{N}] \subset in(r, r\cup s)[\bar{M}]$

sii (por 7.2) $in(r, r\cup s)[\bar{M}] \subset_{A\cup B} in(s, r\cup s)[\bar{N}]$ e
$in(s, r\cup s)[\bar{N}] \subset_{A\cup B} in(r, r\cup s)[\bar{M}]$

sii (por 7.3) $in(r, r\cup s)[\bar{M}] = in(s, r\cup s)[\bar{N}]$

sii (por definición) $(r,\bar{M}) \sim (s,\bar{N})$.

8.2. Corolario en TEBP.

El modelo satisface los axiomas de Igualdad (1.1) y extensionalidad (1.2).

AXIOMA DE IGUALDAD: Sean $(r,\bar{M})$, $(s,\bar{N})$ objetos-conjunto entonces $(r,\bar{M}) \sim (s,\bar{N})$ **sii Para todo** $(t,\bar{L})((t,\bar{L}) \in (r,\bar{M})$ **sii** $(t,\bar{L}) \in (s,\bar{N}))$
y $((r,\bar{M}) \in (t,\bar{L})$ sii $(s,\bar{N}) \in (t,\bar{L}))$.

Por lo anterior sólo falta ver que si tenemos $(t,\bar{L})$ un objeto-conjunto, **entonces:**

Si $(r,\bar{M}) \sim (s,\bar{N})$ entonces $((r,\bar{M}) \in (t,\bar{L})$ sii $(s,\bar{N}) \in (t,\bar{L}))$.

$(s,\bar{N}) \in (t,\bar{L})$ sii (por 7.8) existe $\bar{K} \in_t \bar{L}$ tal que $(s,\bar{N}) \sim (t,\bar{K})$

como $(r,\bar{M}) \sim (s,\bar{N})$ y $\sim$ es **transitiva**, entonces

$(r,\bar{M}) \sim (t,\bar{K})$ y $\bar{K} \in_t \bar{L}$ sii (por 7.8) $(r,\bar{M}) \in (t,\bar{L})$

AXIOMA DE EXTENSIONALIDAD: Para objeto-conjunto $(r,\bar{M})$ y $(s,\bar{N})$, si $(r,\bar{M}) \subset (s,\bar{N})$ y $(s,\bar{N}) \subset (r,\bar{M})$ entonces $(r,\bar{M}) \sim (s,\bar{N})$.

Esto se tiene también por la observación anterior $\square$

Ahora se probarán los axiomas de existencia de conjuntos, del 1.3.1 al 1.3.3 y los axiomas 1.3.4 y 1.3.5 se demostrarán vía 1.6 a 1.10. (ver §1).

8.3. Lema en TEBP. (axioma 1.3.1)

$(0 \xrightarrow{\varnothing} \wp 0, \bar{\varnothing}: 0 \to \Omega)$ es el conjunto vacío $\varnothing$ en el modelo.

Demostración

Por 6.7 $\varnothing_0 : 0 \longrightarrow \wp 0$, donde $\wp 0 \cong 1$ es un objeto-conj-tr.

$\therefore$ $(\varnothing_0, \bar{\varnothing})$ es un obj-conj. y $\bar{\varnothing} = \chi_{1d_0}$

PD. Para todo obj-conj. $(r,\bar{M})$, entonces $(r,\bar{M}) \notin (\varnothing_0, \bar{\varnothing})$.

Suponer que existe $(r,\bar{M})$ obj-conj. tal que $(r,\bar{M}) \in (\varnothing_0, \bar{\varnothing})$ entonces (por 7.18.b) existe $\bar{K} \in_{\wp_0} \bar{\varnothing}$ tal que $(r,\bar{M}) \sim (\varnothing_0, \bar{K})$

entonces (por definición de $\in_{\varnothing_0}$) $\bar{K}e = \varnothing_0 \cdot (\bar{K}/\varnothing_0)$ y $(\bar{K}/\varnothing_0) \in_0 \bar{\varnothing}$

entonces existe $1 \xrightarrow{x} 0$ tal que $\bar{K}e = \varnothing_0 \cdot 1d_0 \cdot x$

entonces $1 \cong 0$ $\underset{0}{P}$ $(1 \not\cong 0)$

$\therefore$ $(\varnothing_0, \bar{\varnothing}) := \varnothing$ es el conjunto vacío en el modelo.

8.4. Lema en TEBP.

a) Para objetos-conjunto $(r,\bar{M})$ y $(r,\bar{N})$ tales que $\bar{M}$ y $\bar{N}$ son r-elementos,

$$\{(r,\bar{M}),(r,\bar{N})\} \sim (r,\{(\bar{M}/r),(\bar{N}/r)\})$$ se cumple en el modelo.

b) Si $(r,\bar{M})$ es un objeto - conjunto entonces $(r,\bar{M}) \sim (\wp r, r[\bar{M}])$ y $r[\bar{M}]$ es un $\wp r$-elemento tal que $(r[\bar{M}]/\wp r) = \bar{M}e$

c) El axioma de la existencia del conjunto par (1.3.2) se cumple en el modelo.

Demostración

PD. a) Sea $(t,\bar{L})$ un objeto - conj.

PD $(t,\bar{L}) \in (r,\{(\bar{M}/r),(\bar{N}/r)\})$ sii $(t,\bar{L}) \sim (r,\bar{M})$ o $(t,\bar{L}) \sim (r,\bar{N})$

<u>si</u>) Sea $(t,\bar{L})$ obj-conj tal que $(t,\bar{L}) \sim (r,\bar{M})$ o $(t,\bar{L}) \sim (r,\bar{N})$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(t,\bar{L}) \sim (r,\bar{M})$
PD. $(t,\bar{L}) \in (r, \{(\bar{M}/r), (\bar{N}/r)\})$
Como $(t,\bar{L}) \sim (r,\bar{M})$ basta demostrar que $(r,\bar{M}) \in (r, \{(\bar{M}/r),(\bar{N}/r)\})$
Por 7.19 . PD. $\bar{M} \in_r \{(\bar{M}/r),(\bar{N}/r)\}$ donde $r : A \longrightarrow \wp A$
Se tiene que $(\bar{M}/r), (\bar{N}/r) : 1 \longrightarrow A$ y por 7.7.
$\{(\bar{M}/r),(\bar{N}/r)\} = \{(\bar{M}/r)\}_A \cup \{(\bar{N}/r)\}_A := \chi_{(\bar{M}/r)} \cup \chi_{(\bar{N}/r)}$

Por hipótesis $\bar{M}$ es r-elemento, i.e. $\bar{M}e = r \circ (\bar{M}/r)$
PD. $(\bar{M}/r) \in_A \{(\bar{M}/r), (\bar{N}/r)\} = v\langle \chi_{(\bar{M}/r)}, \chi_{(\bar{N}/r)} \rangle$
pero

$$\begin{aligned} v\langle \chi_{(\bar{M}/r)}, \chi_{(\bar{N}/r)} \rangle \circ (\bar{M}/r) &= v\langle \chi_{(\bar{M}/r)} \circ (\bar{M}/r), \chi_{(\bar{N}/r)} \circ (\bar{M}/r) \rangle \\ &= v\langle v, \chi_{(\bar{N}/r)}(\bar{M}/r) \rangle = v \quad \text{por A.9.d.} \end{aligned}$$

$\therefore$ $(r,\bar{M}) \in (r, \{(\bar{M}/r),(\bar{N}/r)\})$
$\therefore$ $(t,\bar{L}) \in (r, \{(\bar{M}/r), (\bar{N}/r)\})$

<u>sólo si</u>)
Sea $(t,\bar{L}) \in (r, \{(\bar{M}/r), (\bar{N}/r)\})$
PD $(t,\bar{L}) \sim (r,\bar{M})$ o $(t,\bar{L}) \sim (r,\bar{N})$
$(t,\bar{L}) \in (r, \{(\bar{M}/r),(\bar{N}/r)\})$ sii (por 7.18.b) existe $\bar{K} \in_r \{(\bar{M}/r),(\bar{N}/r)\}$ y $(t,\bar{L}) \sim (r,\bar{K})$
Entonces basta demostrar que $(r,\bar{K}) \sim (r,\bar{M})$ o $(r,\bar{K}) \sim (r,\bar{N})$.
i.e. (por 7.16) PD. $\bar{K} = \bar{M}$ o $\bar{K} = \bar{N}$

Como $\bar{K} \in_r \{(\bar{M}/r),(\bar{N}/r)\}$ entonces $\bar{K}e = r \circ (\bar{K}/r)$ y
$(\bar{K}/r) \in_A \{(\bar{M}/r),(\bar{N}/r)\} = \chi_{(\bar{M}/r)} \cup \chi_{(\bar{N}/r)}$, por 7.6.c
$(\bar{K}/r) \in_A \chi_{(\bar{M}/r)}$ o $(\bar{K}/r) \in_A \chi_{(\bar{N}/r)}$, por 7.7 se tiene que
$(\bar{K}/r) = (\bar{M}/r)$ o $(\bar{K}/r) = (\bar{N}/r)$
Sin pérdida de generalidad $(\bar{K}/r) = (\bar{M}/r)$
$\therefore$ $\bar{K}e = r\circ(\bar{K}/r) = r \circ (\bar{M}/r) = \bar{M}e$
$\therefore$ (por 6.5) $\bar{K} = \bar{M}$
$\therefore$ $(r,\bar{K}) \sim (r,\bar{M})$
$\therefore$ ($\sim$ transitiva) $(t,\bar{L}) \sim (r,\bar{M})$.

$\therefore$ $\{(r,\bar{M}), (r,\bar{N})\} \sim (r, \{(\bar{M}/r), (\bar{N}/r)\})$.

PD. b) Sea $(r,\bar{M})$ un obj-conj. PD. $(r,\bar{M}) \sim (\wp r, r[\bar{M}])$ y $r[\bar{M}]$ es un $\wp r$-elemento tal que $(r[\bar{M}]/\wp r) = \bar{M}e$.
Por 6.8 $\wp r$ es obj-conj-tr. $\therefore$ $(\wp r, r[\bar{M}])$ es un obj-conj.

PD $\quad in(r, r\cup\wp r)[\bar{M}] = in(\wp r, r\cup\wp r)[r[\bar{M}]]$

Sea $r: A \to \wp A$, PD $r \subset \wp r$.

Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "r"] \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, phantom, "\supseteq"] & \wp A \arrow[d, "\wp r"] \\ \wp A \arrow[r, "\wp r"'] & \wp\wp A \end{tikzcd}$$

conmuta $\therefore$ $r \subset \wp r$ y $r = in(r, \wp r)$

Como $r, \wp r \subset \wp r$ entonces $r \cup \wp r \subset \wp r$ pero $\wp r \subset r \cup \wp r$

$\therefore$ $\wp r = r \cup \wp r$ $\therefore$ $in(\wp r, r\cup \wp r) = Id_{\wp A}$

$\therefore$ $in(r, r\cup\wp r)[\bar{M}] = in(r, \wp r)[\bar{M}] = r[\bar{M}]$

$in(\wp r, r\cup\wp r) = Id_{\wp A}[r[\bar{M}]] = r[\bar{M}]$ por 5.2.6

$\therefore$ $in(r, r\cup\wp r)[\bar{M}] = in(\wp r, r\cup\wp r)[r[\bar{M}]]$

$\therefore$ $(r, \bar{M}) \sim (\wp r, r[\bar{M}])$

Por 5.7 $r[\bar{M}]_e = \wp r \circ \bar{M}e$ $\therefore$ $r[\bar{M}]$ es $\wp r$-elemento y $(r[\bar{M}]/\wp r) = \bar{M}e$

PD. C) (axioma 1.3.2) AXIOMA DE EXISTENCIA DEL CONJUNTO PAR:

Sean $(r,\bar{M})$ y $(s,\bar{N})$ objeto-conjunto entonces el conjunto par $\{(r,\bar{M}), (s,\bar{N})\}$ existe.

Sea $t := \wp r \cup \wp s$ es obj-conj-tr por 6.8 y 6.6.

Como $r \subset \wp r \subset \wp r \cup \wp s$ y $s \subset \wp s \subset \wp r \cup \wp s$, entonces se define

$\bar{M}' := in(r, \wp r \cup \wp s)[\bar{M}]$ y $\bar{N}' := in(s, \wp r\cup\wp s)[\bar{N}']$

i.e. $\bar{M}' = in(r,t)[\bar{M}]$ y $\bar{N}' = in(s,t)[\bar{N}]$

i) PD. $(r,\bar{M}) \sim (t, \bar{M}')$ y $(s, \bar{N}) \sim (t, \bar{N}')$

Sólo se demostrará una equivalencia, la otra es análogo.

Como antes:

$in(r, \wp r \cup \wp s) = in(\wp r, \wp r\cup\wp s) \circ in(r, \wp r) = in(\wp r, \wp r \cup \wp s)\circ r$

y como $r \subset \wp r \cup \wp s =: t$ entonces $r \cup t = t$.

PD $\quad in(r,t)[\bar{M}] = in(r, r\cup t)[\bar{M}] = in(t, r\cup t)[\bar{M}'] = in(t,t)[\bar{M}'] = \bar{M}'$

$\bar{M}' := in(r,t)[\bar{M}]$

$\therefore$ $(r,\bar{M}) \sim (t,\bar{M}')$ y análogamente $(s,\bar{N}) \sim (t, \bar{N}')$

ii) PD. $\bar{M}'$ y $\bar{N}'$ son t-elementos. También sólo se demostrará una de ellas, la otra es análoga.

$\bar{M}' := in(r,t)[\bar{M}] := in(r, \wp r \cup \wp s)[\bar{M}] = (in(\wp r, \wp r \cup \wp s)\circ in(r,\wp r))[\bar{M}]$

$= (in(\wp r, \wp r\cup \wp s)\circ r)[\bar{M}]$.

Entonces $\bar{M}'_e = (in(\wp r, \wp r \cup \wp a) \circ r)[\bar{M}]e \underset{5.7.a}{=} \wp_{in(\wp r, \wp r\cup\wp a)\circ r} \circ \bar{M}e$

($\wp$ funtor) $= \wp_{in(\wp r, \wp r \cup \wp a)} \circ \wp_r \circ \bar{M}_e \underset{\wp r \xrightarrow{in(\wp r, \wp r\cup \wp a)} \wp r \cup \wp a}{=} (\wp_r \cup \wp a) \circ in(\wp r, \wp r \cup \wp a) \circ \bar{M}e$

$\therefore$ $\bar{M}'$ es $\wp_r \cup \wp a$ - elemento $\quad \wp r \cup \wp a = t$

análogamente $\bar{N}'$ es t-elemento

En resumen tenemos: $(t, \bar{M}') \sim (r, \bar{M})$, $(t, \bar{N}') \sim (a, \bar{N})$ y $\bar{M}'$, $\bar{N}'$ son t elementos, entonces por 8.4

$\{(t,\bar{M}'), (t,\bar{N}')\} \sim (t, \{(\bar{M}'/t), (\bar{N}'/t)\})$

PD. $\{(r,\bar{M}), (a,\bar{N})\} \sim (t, \{(\bar{M}'/t), (\bar{N}'/t)\})$

i.e. PD Para un obj-conj $(t', \bar{L})$ se tiene que:

$(t',\bar{L}) \in (t, \{(\bar{M}'/t), (\bar{N}'/t)\})$ sii $(t',\bar{L}) \sim (r,\bar{M})$ o $(t',\bar{L}) \sim (a,\bar{N})$.

<u>si</u>) Sea $(t',\bar{L}) \sim (r,\bar{M})$ o $(t',\bar{L}) \sim (a,\bar{N})$. Sin pérdida de generalidad $(t',\bar{L}) \sim (r,\bar{M})$ entonces ($\sim$ transitiva)

$(t',\bar{L}) \sim (t,\bar{M}')$

$\therefore$ (por 8.4) $(t',\bar{L}) \in (t, \{(\bar{M}'/t), (\bar{N}'/t)\})$

<u>otro si</u>) Sea $(t',\bar{L}) \in (t, \{(\bar{M}'/t), (\bar{N}'/t)\})$ entonces (por 8.4)

$(t',\bar{L}) \sim (t,\bar{M}')$ o $(t',\bar{L}) \sim (t,\bar{N}')$

$\therefore$ (por ser $\sim$ transitiva) $(t',\bar{L}) \sim (r,\bar{M})$ o $(t',\bar{L}) \sim (a,\bar{N})$

$\therefore$ $\{(r,\bar{M}), (a,\bar{N})\} \sim (t, \{(\bar{M}'/t), (\bar{N}'/t)\})$

i.e. el conjunto par existe en el modelo. $\square$.

<u>8.5.</u> Lema en TEBP. (axioma 1.3.3)

Si $(r,\bar{M})$ es un obj-conj entonces $(\wp r, \wp[\bar{M}])$ es el conjunto potencia $\wp(r,\bar{M})$ de $(r,\bar{M})$ en el modelo.

PD. Para todo $(t,\bar{L})$ obj-conj $((t,\bar{L}) \subset (r,\bar{M})$ sii $(t,\bar{L}) \in (\wp r, \wp[\bar{M}]))$

<u>si</u>) Se recuerda que $\wp[\bar{M}] := \chi_{\wp m}$, donde $\bar{M} = \chi_m$

$(t,\bar{L}) \in (\wp r, \wp[\bar{M}])$ sii (por 7.18.b) existe $\bar{K} \in_{\wp r} \wp[\bar{M}]$ tal que

$(t,\bar{L}) \sim (\wp r, \bar{K})$

sii existe $1 \xrightarrow{x} \wp M$ tal que $\bar{K}e = \wp r \circ \wp m \circ x$ y

$(t,\bar{L}) \sim (\wp r, \bar{K})$

entonces $1 \xrightarrow{\wp m \circ x} \wp A \underset{\wp A}{\in} \wp[\bar{M}]$ y por **5.5** existe $\bar{N}: A \longrightarrow \Omega$ tal que

$\bar{N}e = \wp m \circ x$

$\therefore$ (por 7.9) $\bar{N} \subset \bar{M}$

PD $r[\bar{N}] = \bar{K}$

$r[\bar{N}]e \underset{5.7.a}{=} \wp r \circ \bar{N}e := \wp r \circ \wp m \circ x = \bar{K}e$

$\therefore$ (por 5.6) $r[\bar{N}] = \bar{K}$

En resumen, tenemos: Si $(t,\bar{L})\in(\wp r, \wp[\bar{M}])$ entonces existe $\bar{N}: A\to\Omega$ tal que $\bar{N}\subset\bar{M}$ y $(t,\bar{L})\sim(\wp r, r[\bar{N}]) \underset{8.4.b}{\sim} (r,\bar{N})$

$\therefore$ (por 8.1.3) $(t,\bar{L})\subset(r,\bar{M})$

<u>sólo si</u>) Sea $(t,\bar{L})\subset(r,\bar{M})$ entonces (por 8.1.3) existe un obj-conj $(r,\bar{K})$ tal que $\bar{K}\subset\bar{M}$ y $(t,\bar{L})\sim(r,\bar{K})\underset{8.4.b}{\sim}(\wp r, r[\bar{K}])$, $r[\bar{K}]$ es un $\wp r$-elemento

$\therefore$ $(t,\bar{L})\sim(\wp r, r[\bar{K}])$ y $r[\bar{K}]$ es un $\wp r$-elemento.

PD. $(\wp r, r[\bar{K}])\in(\wp r,\wp[\bar{M}])$ sii (por 7.19) $r[\bar{K}]\in_{\wp r}\wp[\bar{M}]$

$r[\bar{K}]e \underset{5.7.a}{=} \wp r\circ\bar{K}e$ y $\bar{K}e\in_{\wp A}\wp[\bar{M}]$ (por 7.9, $\bar{K}\subset\bar{M}$)

$\therefore$ $(t,\bar{L})\in(\wp r,\wp[\bar{M}])$

$\therefore$ $(\wp r,\wp[\bar{M}]) = \wp(r,\bar{M})$ el conjunto Potencia de $(r,\bar{M})$.

□.

<u>8.6 Nota en TE.</u> Para objetos-conjunto $(r,\bar{M}),(s,\bar{N})$ existen objetos-conjunto $(t,\bar{M}')$ y $(t,\bar{N}')$ tal que $(r,\bar{M})\sim(t,\bar{M}')$ y $(s,\bar{N})\sim(t,\bar{N}')$.

<u>Demostración</u> Sea $t := r\cup s$, $\bar{M}' := in(r, r\cup s)[\bar{M}]$ y $\bar{N}' := in(s, r\cup s)[\bar{N}]$.

Como $r\subset r\cup s$ y $s\subset r\cup s$ entonces $r\cup(r\cup s) = r\cup s = s\cup(r\cup s)$.

PD $(r,\bar{M})\sim(t,\bar{M}')$ y $(s,\bar{N})\sim(t,\bar{N}')$

$in(r\cup s, r\cup(r\cup s))[\bar{M}'] = in(r\cup s, r\cup s)[\bar{M}'] = \bar{M}' = in(r, r\cup s)[\bar{M}]$

$\therefore$ $(r,\bar{M})\sim(t,\bar{M}')$ y análogamente $(s,\bar{N})\sim(t,\bar{N}')$

Ésto significa que si consideramos un número finito de objetos-conjunto podemos representarlos con respecto a $\sim$ por "subobjetos" de un mismo obj-conj-tr.

De aquí en adelante, así lo usaré.

<u>8.7. Lema en TEBP.</u>

a) Si $(r,\bar{M}),(r,\bar{N})$ son objetos-conjunto, entonces $(r,\bar{M}\setminus\bar{N})$ es el complemento relativo $(r,\bar{M})\setminus(r,\bar{N})$ en el modelo.

b) El axioma de la existencia del complemento relativo (1.6) se cumple en el modelo.

<u>Demostración</u>.

a) Se recuerda que $\bar{M}\setminus\bar{N} = \wedge\langle\bar{M},\neg\bar{N}\rangle$

PD. Para todo $(t,\bar{L})$ $\big((t,\bar{L})\in(r,\bar{M})$ y $(t,\bar{L})\notin(r,\bar{N})$ sii $(t,\bar{L})\in(r,\bar{M}\setminus\bar{N})\big)$

<u>sólo si</u>) Sea $(t,\bar{L})$ obj-conj tal que $(t,\bar{L})\in(r,\bar{M})$ y $(t,\bar{L})\notin(r,\bar{N})$

Por 8.6 puedo suponer $t=r$

$\therefore$ (Por 7.19) $\bar{L}\in_r\bar{M}$ y $\bar{L}\notin_r\bar{N}$

Entonces existe $1 \xrightarrow{x} A$ tal que $\bar{L}e = r \cdot m \circ x = r \cdot (\bar{L}/r)$ y $(\bar{L}/r) \notin_A \bar{N}$ (pues $\bar{L} \notin_r \bar{N}$ sii $\bar{L}$ no es r-elemento o $(\bar{L}/r) \notin_A \bar{N}$, pero $\bar{L}$ sí es r-elemento).

$\therefore$ $(\bar{L}/r) \in_A \bar{M} \setminus \bar{N}$

$\therefore$ $\bar{L} \in_r \bar{M} \setminus \bar{N}$ $\quad\therefore$ $(r, \bar{L}) \in (r, \bar{M} \setminus \bar{N})$

<u>si</u>) Sea $(r, \bar{L}) \in (r, \bar{M} \setminus \bar{N})$ PD. $(r, \bar{L}) \in (r, \bar{M})$ y $(r, \bar{L}) \notin (r, \bar{N})$

entonces $\bar{L} \in_r \bar{M} \setminus \bar{N}$ (por 7.19)

entonces $\bar{L}e = r \cdot (\bar{L}/r)$ y $(\bar{L}/r) \in_A \bar{M}/\bar{N} = \bar{M} \cap (\neg \bar{N})$

entonces (por 7.6.a y 7.6.b) $\bar{L}e = r \circ (\bar{L}/r)$ y $(\bar{L}/r) \in_A \bar{M}$ y $(\bar{L}/r) \notin_A \bar{N}$

entonces (por 7.12) $\bar{L} \in_r \bar{M}$ y $\bar{L} \notin_r \bar{N}$

$\therefore$ $(r, \bar{L}) \in (r, \bar{M})$ y $(r, \bar{L}) \notin (r, \bar{N})$

$\therefore$ $(r, \bar{M} \setminus \bar{N}) \sim (r, \bar{M}) \setminus (r, \bar{N})$.

<u>b</u>) EL AXIOMA DE LA EXISTENCIA DEL COMPLEMENTO RELATIVO (1.6) se cumple en el modelo.

Sean $(r, \bar{M})$ y $(s, \bar{N})$ conjuntos entonces por 8.6 puedo suponer que $r = s$ y por a) $(r, \bar{M}) \setminus (r, \bar{N}) = (r, \bar{M} \setminus \bar{N})$

□.

Antes de probar los otros axiomas de existencia de conjunto se probarán el axioma de regularidad y el axioma de transitividad.

8.8. Lema en TEBP.

a) El axioma de regularidad (1.4) se cumple en el modelo.

b) Cualquier objeto-conjunto $(A \xrightarrow{\sqsubset} \wp A, \in_A)$ es un conjunto transitivo en el modelo.

c) El axioma de transitividad (4.4) se cumple en el modelo.

<u>Demostración</u>

<u>a</u>) AXIOMA DE REGULARIDAD: La relación de membresía es bien fundada (i.e. Si $(r, \bar{M}) \not\sim (\phi_0, \bar{\phi})$ entonces existe $(t, \bar{L}) \in (r, \bar{M})$ tal que $(t, \bar{L}) \cap (r, \bar{M}) \sim (\phi_0, \bar{\phi})$).

Sea $(r, \bar{M}) \not\sim (\phi_0, \bar{\phi})$; $A \xrightarrow{\sqsubset} \wp A$. PD. $\bar{M} \neq \bar{\phi}$

Si $\bar{M} = \bar{\phi}$ entonces $(\bar{\phi}: 0 \to \Omega)$ $A \cong 0$ y $\wp A \cong 1$, lo que daría como consecuencia que $r = \bar{\phi}$ ¿$((r, \bar{M}) \not\sim (\phi_0, \bar{\phi}))$

P.D. $\mathbb{E}_A \setminus \overline{M} \neq \mathbb{E}_A$, donde $\mathbb{E}_A = 1(A) := \chi_{\mathrm{Id}_A}$.

$\mathbb{E}_A \setminus \overline{M} = \wedge \langle \mathbb{E}_A, \neg \overline{M} \rangle = \neg \overline{M}$ (por 7.4 $\mathbb{E}_A$ es el "conjunto universal" en A)

$\underset{7.6.a}{=} \{ \underset{A}{x /} x \notin \overline{M} \}$

Como $\overline{M} \neq \overline{\phi} : 0 \longrightarrow \Omega$ entonces $M \xrightarrow{m} A \not\cong 0 \xrightarrow{\mathrm{Id}_0} 0$ (i.e. $M \not\cong 0$)

$\therefore$ (TEBP) existe $1 \xrightarrow{x} M$,

entonces $m \circ x \in_A \overline{M} \subset \mathbb{E}_A$ $\therefore$ $m \circ x \notin_A \mathbb{E}_A \setminus \overline{M}$

$\therefore$ $\mathbb{E}_A \setminus \overline{M} \neq \mathbb{E}_A$, y como r es obj-con-tr, en particular bien fundado (§6), se tiene que $r^{-1}[\wp[\mathbb{E}_A \setminus \overline{M}]] \not\subset \mathbb{E}_A \setminus \overline{M}$

entonces (por 7.2) $r^{-1}[\wp[\mathbb{E}_A \setminus \overline{M}]] \not\subset_A \mathbb{E}_A \setminus \overline{M}$

entonces existe $1 \xrightarrow{y} A$ tal que $y \in_A r^{-1}[\wp[\mathbb{E}_A \setminus \overline{M}]]$ y $y \notin_A \mathbb{E}_A \setminus \overline{M}$

entonces (por 7.8, 7.6.a) $r \circ y \in_{\wp A} \wp[\mathbb{E}_A \setminus \overline{M}]$ y $y \in_A \overline{M}$

entonces (por 7.9) existe $\overline{L} : A \longrightarrow \Omega$ tal que $\overline{L} \subset \mathbb{E}_A \setminus \overline{M}$ y $\overline{L}_e = r \circ y$

$\therefore$ $(\overline{L}/r) = y \in_A \overline{M}$

$\therefore$ $\overline{L} \in_r \overline{M}$, entonces (por 7.19) $(r, \overline{L}) \in (r, \overline{M})$

PD $(r, \overline{L}) \cap (r, \overline{M}) \sim (\phi_0, \overline{\phi})$

PD $(r, \overline{L}) \cap (r, \overline{M}) \sim (r, \overline{L} \cap \overline{M})$

PD. Para todo $(a, \overline{N})$ ($(a, \overline{N}) \in (r, \overline{L} \cap \overline{M})$ sii $(a, \overline{N}) \in (r, \overline{L})$ y $(a, \overline{N}) \in (r, \overline{M})$)

Por 8.6 sea $(r, \overline{N}) \in (r, \overline{L} \cap \overline{M})$ sii (por 7.19) $\overline{N} \in_r \overline{L} \cap \overline{N}$

sii $\overline{N}_e = r \circ (\overline{N}/r)$ y $(\overline{N}/r) \in_A \overline{L} \cap \overline{M} \underset{7.6.b}{=} \{ \underset{A}{x /} x \in_A \overline{L} \wedge x \in_A \overline{M} \}$

sii $\overline{N}_e = r \circ (\overline{N}/r)$ y $(\overline{N}/r) \in_A \overline{L}$ y $(\overline{N}/r) \in_A \overline{M}$

sii $\overline{N} \in_r \overline{L}$ y $\overline{N} \in_r \overline{M}$

sii (por 7.19) $(r, \overline{N}) \in (r, \overline{L})$ y $(r, \overline{N}) \in (r, \overline{M})$

$\therefore$ $(r, \overline{L}) \cap (r, \overline{M}) \sim (r, \overline{L} \cap \overline{M})$

PD. $(r, \overline{L} \cap \overline{M}) \sim (\phi_0, \overline{\phi})$, i.e. PD. $\mathrm{in}(r, r \cup \phi_0)[\overline{L} \cap \overline{M}] = \mathrm{in}(\phi_0, r \cup \phi_0)[\overline{\phi}]$

Por 6.7 $r \cup \phi_0 = r$ entonces $\mathrm{in}(r, r \cup \phi_0) = \mathrm{Id}_A$ & $\mathrm{in}(\phi_0, r \cup \phi_0) = O_A$

PD. $\overline{L} \cap \overline{M} = O_A[\overline{\phi}] := \chi_{O_A \circ \mathrm{Id}_0} = \chi_{O_A} = \neg \circ !_A$

En diagrama, tenemos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "O_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \arrow[d, "!_A"] \arrow[dd, bend left=60, "\chi_{O_A}"] \\ 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & 1 \arrow[d, "\neg"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L \cap M \arrow[r, "l \cap m"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & A \arrow[d, "\langle \overline{L}, \overline{M} \rangle"] \\ 1 \arrow[r, "\langle v, v \rangle"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\wedge"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Basta demostrar que $L \cap M \cong 0$.

Suponer que $L \cap M \not\cong 0$, entonces (TEBP) existe $1 \xrightarrow{x} L \cap M$ entonces $(\ell \cap m)x \in_A \bar{L} \cap \bar{M}$

$\therefore$ (por 7.6.6) $(\ell \cap m)x \in_A \bar{L}$ y $(\ell \cap m)x \in_A \bar{M}$

Pero se recuerda que $\bar{L} \subset \mathbb{E}_A \setminus \bar{M}$ (i.e. $\bar{L} \subset_A \mathbb{E}_A \setminus \bar{M}$).

$\therefore$ $(\ell \cap m)x \in_A \mathbb{E}_A \setminus \bar{M}$ y $(\ell \cap m)x \in_A \bar{M}$

entonces (por ser $\mathbb{E}_A \setminus \bar{M} = \neg\bar{M}$, 7.6.2) $(\ell \cap m)x \notin_A \bar{M}$ $\not\!\!\!\;\because ((\ell \cap m)x \in_A \bar{M})$

$\therefore$ $L \cap M \cong 0$ $\therefore$ $\bar{L} \cap \bar{M} = \bar{\varphi}$

$\therefore$ $(r, \bar{L} \cap \bar{M}) \sim (\varphi_0, \bar{\varphi})$

$\therefore$ La relación de membresía es bien fundada.

b) Cualquier objeto-conj. $(A \xrightarrow{r} \mathcal{P}A, \mathbb{E}_A)$ es un conjunto transitivo en el modelo.

i.e. PD. Para todo $(a, \bar{N})$ $((a, \bar{N}) \in (r, \mathbb{E}_A)$ entonces $(a, \bar{N}) \subset (r, \mathbb{E}_A))$

Sea $(a, \bar{N}) \in (r, \mathbb{E}_A)$ por 8.6 puedo suponer que $a = r$

entonces (por 7.19) $\bar{N} \in_r \mathbb{E}_A$, donde $\bar{N}: A \to \Omega$.

entonces (por 7.4) $\bar{N} \subset \mathbb{E}_A$

$\therefore$ (por 8.1.3) $(r, \bar{N}) \subset (r, \mathbb{E}_A)$

$\therefore$ $(r, \mathbb{E}_A)$ es un conj. transitivo

c) PD. AXIOMA DE TRANSITIVIDAD (TA): Cualquier objeto-conjunto es un subobjeto-conjunto de un objeto-conjunto transitivo

Sea $(r, \bar{M})$ obj-conj. $r: A \to \mathcal{P}A$, $\bar{M}: A \to \Omega$

entonces $\bar{M} \subset \mathbb{E}_A$

$\therefore$ (por 8.1.3) $(r, \bar{M}) \subset (r, \mathbb{E}_A)$ y $(r, \mathbb{E}_A)$ es transitivo por b.

□.

Antes de probar los axiomas restantes de existencia de conjuntos, 1.7 — 1.10), primero se verá la siguiente consecuencia de 8.4:

8.9 Lema en TEBP: Si $A \xrightarrow{r} \mathcal{P}A$ es un objeto-conjunto transitivo y x, y son A-elementos, entonces $(\mathcal{P}r, \{\{x\}_e, \{x, y\}_e\}_{\mathcal{P}A})$ es la pareja ordenada $\langle (r, (x/r)), (r, (y/r)) \rangle$ en el modelo.

<u>Demostración</u>

$$\langle (r,(x/r)),(r,(y/r))\rangle :\sim \{\{(r,(x/r))\},\{(r,(x/r)),(r,(y/r))\}\} \sim$$

$$\underset{8.4.a}{\sim} \{(r,\{x\}_A),(r,\{x,y\}_A)\} \text{ ; donde } \{x,y\}_A = \{x\}_A \cup \{y\}_A \quad (7.7)$$

$$\underset{8.4.c}{\sim} (\wp r, \{(r[\{x\}_A]/r),(r[\{x,y\}_A]/r)\})$$

pero $r[\{x\}_A]_e \underset{5.7.a}{=} \wp r \circ \{x\}_e \quad \therefore \{x\}_e = (r[\{x\}_A]/r)$

y $r[\{x,y\}_A]_e \underset{5.7.a}{=} \wp r \circ \{x,y\}_e \quad \therefore \{x,y\}_e = (r[\{x,y\}_A]/r)$

$$\therefore \langle (r,(x/r)),(r,(y/r))\rangle \sim (\wp r, \{\{x\}_e,\{x,y\}_e\}_{\wp A})$$

□.

<u>8.10</u> Proposición en TE

Existen morfismos canónicos $A \xrightarrow{\{-\}_A} \wp A$, $A\pi A \xrightarrow{\{-,-\}_A} \wp A$ y $A\pi A \xrightarrow{\langle -,-\rangle_A} \wp\wp A$ tal que para x, y A-elementos, se tiene que: $\{-\}_A \circ x = \{x\}_e$, $\{-,-\}_A \circ \binom{x}{y} = \{x,y\}_e$ y $\langle -,-\rangle_A \circ \binom{x}{y} = \{\{x\}_e,\{x,y\}_e\}_e$

<u>Demostración.</u>

Se recuerda que $\{-\}_A : A \longrightarrow \wp A$ es el único morfismo tal que $(\{-\}_A \pi\, 1d_A)^{-1}[e_A] = \delta_A$, donde $\delta_A = \chi_{\binom{1d_A}{1d_A}}$ y $\{-\}_A$ es llamado el MORFISMO UNITARIO.

Se define $\{-,-\}_A := \cup_A \circ (\{-\}_A \pi \{-\}_A)$, i.e. $A\pi A \xrightarrow{\{-\}_A \pi \{-\}_A} \wp A \pi \wp A \xrightarrow{\cup_A} \wp A$ (ver 5.11)

Y se define $\langle -,-\rangle_A := \{-,-\}_{\wp A} \circ \beta$, donde $\beta := \begin{pmatrix} \{-\}_A \circ \pi_{A,A} \\ \{-,-\}_A \end{pmatrix}$, es decir:

$$A\pi A \xrightarrow{\beta} \wp A \pi \wp A \xrightarrow{\{-,-\}_{\wp A}} \wp\wp A$$

y

$$\begin{tikzcd}
\wp A & \wp A \pi \wp A \arrow[l, "\pi_{\wp A,\wp A}"'] \arrow[r, "\pi'_{\wp A,\wp A}"] & \wp A \\
A \arrow[u, "\{-\}_A"] & A\pi A \arrow[l, "\pi_{A,A}"] \arrow[u, dashed, "\beta"] \arrow[ur, "\{-,-\}_A"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

i) PD. Si $1 \xrightarrow{x} A$ entonces $\{-\}_A \circ x = \{x\}_e$

Recuerdo que $\{x\}_e : 1 \longrightarrow \wp A$ es el único morfismo tal que $(\{x\}_e \pi\, 1d_A)^{-1}[e_A] = \pi'^{-1}_{1,A}[\{x\}_A]$ y $\{x\}_A = \chi_x$ (ver 7.7 y 5.5)

$$((\{-\}_A \circ x)\pi\, 1d_A)^{-1}[e_A] = ((\{-\}_A \pi\, 1d_A)\circ(x \pi\, 1d_A))^{-1}[e_A] =$$

$$\underset{5.12.a}{=} (x\pi\, 1d_A)^{-1}[(\{-\}_A \pi\, 1d_A)^{-1}[e_A]] =$$

$$= (x\pi\, 1d_A)^{-1}[\delta_A] := \delta_A \circ (x\pi\, 1d_A) =$$

$$:= \delta_A \cdot \begin{pmatrix} x \cdot \pi_{1,A} \\ \pi'_{1,A} \end{pmatrix} = \delta_A \cdot \begin{pmatrix} x \cdot !_A \\ \mathrm{Id}_A \end{pmatrix} \cdot \pi'_{1,A} \overset{(*)}{=} \{x\}_A \cdot \pi'_{1,A} =$$

$$= \pi'^{-1}_{1,A}[\{x\}_A] = (\{x\}_e \,\Pi\, \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]$$

$$\therefore \quad ((\{-\}_A \circ x) \,\Pi\, \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A] = (\{x\}_e \,\Pi\, \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]$$

$$\underset{\text{unicidad}}{\therefore} \quad \{-\}_A \cdot x = \{x\}_e$$

Falta demostrar $(*)$. Tenemos que $\delta_A = \chi_{\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{Id}_A \\ \mathrm{Id}_A \end{smallmatrix}\right)}$, entonces:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "\gamma"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma'"'] & & \\
& 1 \arrow[r, tail, "x"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "(\#)"] & A \arrow[d, "\begin{pmatrix} x \cdot !_A \\ \mathrm{Id}_A \end{pmatrix}"] \\
& A \arrow[r, "\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_A \\ \mathrm{Id}_A \end{pmatrix}"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \,\Pi\, A \arrow[d, "\delta_A"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

PD. $(\#)$ es P.F.

Conmuta pues $\begin{pmatrix} x \cdot !_A \\ \mathrm{Id}_A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x \cdot !_A \cdot x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \mathrm{Id}_1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_A \\ \mathrm{Id}_A \end{pmatrix} x$

Sean C objeto y $\gamma, \gamma' : C \longrightarrow A$ tales que $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_A \\ \mathrm{Id}_A \end{pmatrix} \gamma' = \begin{pmatrix} x \cdot !_A \\ \mathrm{Id}_A \end{pmatrix} \gamma$

entonces $\begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot !_C \\ \gamma \end{pmatrix}$ $\quad \therefore \quad \gamma' = x \cdot !_C$ y $\gamma' = \gamma$

$\therefore$ Existe un morfismo $!_C$ tal que $x \cdot !_C = \gamma' = \gamma$
y es único por ser x mono.

$\therefore$ $\#$ es P.F.

$\therefore$ el rectángulo exterior es P.F.

$\therefore$ (por unicidad de característica) $\{x\}_A = \delta_A \circ \begin{pmatrix} x \cdot !_A \\ \mathrm{Id}_A \end{pmatrix}$

ii) Sean $x, y : 1 \longrightarrow A$ $\quad$ PD. $\{-,-\}_A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \{x, y\}_e$

$$\{-,-\}_A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \cup_A \circ (\{-\}_A \,\Pi\, \{-\}_A) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \cup_A \circ \begin{pmatrix} \{-\}_A \cdot x \\ \{-\}_A \cdot y \end{pmatrix} =$$

$$\underset{i)}{=} \cup_A \cdot \begin{pmatrix} \{x\}_e \\ \{y\}_e \end{pmatrix} \underset{5.13}{=} (\{x\}_A \cup \{y\}_A)_e$$

$$:= (\vee \langle \{x\}_A, \{y\}_A \rangle)_e = \{x, y\}_e$$

$$\therefore \quad \{-,-\}_A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \{x, y\}_e$$

iii) PD. $\langle -,-\rangle_A \circ \binom{x}{y} = \{\{x\}_e, \{x,y\}_e\}_e$

$$\langle -,-\rangle_A \circ \binom{x}{y} := \{-,-\}_{\wp A} \circ f \circ \binom{x}{y} := \{-,-\}_{\wp A} \circ \begin{pmatrix}\{-\}_A\circ\pi_{A,A}\\ \{-,-\}_A\end{pmatrix}\circ\binom{x}{y} =$$

$$= \{-,-\}_{\wp A}\circ \begin{pmatrix}\{-\}_A\circ x\\ \{-,-\}_A\circ\binom{x}{y}\end{pmatrix} \underset{\text{i), ii)}}{=} \{-,-\}_{\wp A}\circ\begin{pmatrix}\{x\}_e\\ \{x,y\}_e\end{pmatrix} =$$

$$\underset{\substack{\text{ii)}\\ \text{aplicado}\\ \text{a } \wp A}}{=} \{\{x\}_e,\{x,y\}_e\}_e$$

$\therefore\ \langle -,-\rangle_A\circ\binom{x}{y} = \{\{x\}_e,\{x,y\}_e\}_e$

□.

8.11 Lema en TEBP. Los morfisma $\{-\}_A$ y $\langle -,-\rangle_A$ son mono.

Demostración. (3.13.c : $A\xrightarrow{f}B$ es mono sii Para todos $x,y:1\to A$ si $f\circ x = f\circ y$ entonces $x=y$).

PD. $\{-\}_A$ es mono. Sean $x,y:1\longrightarrow A$ tal que $\{-\}_A x = \{-\}_A y$
entonces (por 8.10) $\{x\}_e = \{-\}_A\circ x = \{-\}_A\circ y = \{y\}_e$
entonces (por 5.5) $\{x\}_A = \{y\}_A$
$\therefore$ (por 7.7) $x=y$
$\therefore$ $\{-\}_A$ es mono

PD. $\langle -,-\rangle_A$ es mono. $\langle -,-\rangle_A : A\pi A \longrightarrow \wp\wp A$.

Todo $A\pi A$-elemento es de esta forma: $\binom{x}{y}:1\longrightarrow A\pi A$ donde x,y son A-elemento.

Sean $\binom{x}{y}, \binom{w}{z}$ $A\pi A$-elementos tales que $\langle -,-\rangle_A\circ\binom{x}{y} = \langle -,-\rangle_A\circ\binom{w}{z}$

PD. $\binom{x}{y} = \binom{w}{z}$

$$\langle -,-\rangle_A\circ\binom{x}{y} := \{-,-\}_{\wp A}\circ\begin{pmatrix}\{-\}_A\circ\pi_{A,A}\\ \{-,-\}_A\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \{-,-\}_{\wp A}\circ\begin{pmatrix}\{-\}_A\circ x\\ \{-,-\}_A\circ\binom{x}{y}\end{pmatrix} =$$

$$\underset{8.10}{=} \{-,-\}_{\wp A}\circ\begin{pmatrix}\{x\}_e\\ \{x,y\}_e\end{pmatrix} \underset{8.10}{=} \{\{x\}_e,\{x,y\}_e\}_e$$

Análogamente $\langle -,-\rangle_A\circ\binom{w}{z} = \{\{w\}_e,\{w,z\}_e\}_e$

$\therefore$ $\{\{x\}_e,\{x,y\}_e\}_e = \{\{w\}_e,\{w,z\}_e\}_e$

$\therefore$ (por 5.5) $\left\{\{x\}_e,\{x,y\}_e\right\}_{\wp A} = \left\{\{w\}_e,\{w,z\}_e\right\}_{\wp A}$

i.e. $\left\{\{x\}_e\right\}_{\wp A} \cup \left\{\{x,y\}_e\right\}_{\wp A} = \left\{\{w\}_e\right\}_{\wp A} \cup \left\{\{w,z\}_e\right\}_{\wp A}$; los morfismo característicos (ver 7.7, 7.6.c) entonces (por 7.6.c)

$$\{u/_{\wp A}\ u\in_{\wp A}\{\{x\}_e\}_{\wp A} \vee u\in_{\wp A}\{\{x,y\}_e\}_{\wp A}\} = \{u/_{\wp A}\ u\in_{\wp A}\{\{w\}_e\}_{\wp A} \vee u\in_{\wp A}\{\{w,z\}_e\}_{\wp A}\}$$

entonces (por 7.7)

$$\{u/_{\wp A}\ u=\{x\}_e \vee u=\{x,y\}_e\} = \{u/_{\wp A}\ u=\{w\}_e \vee u=\{w,z\}_e\}$$

y $\{x\}_e, \{x,y\}_e \in_{\wp A} \{u/_{\wp A}\ u=\{w\}_e \vee u=\{w,z\}_e\}$, entonces tenemos varios casos:

Caso 1.- $\{x\}_e = \{w\}_e = \{x,y\}_e$ entonces (por 5.5) $\{x\}_A = \{w\}_A = \{x\}_A \cup \{y\}_A$ entonces (por 7.7) $x = w = y$

y como $\{w,z\}_e \in \{u/_{\wp A}\ u=\{x\}_e \vee u=\{x,y\}_e\}$ entonces $z = y$

$\therefore \binom{x}{y} = \binom{w}{z}$

Caso 2.- $\{x\}_e = \{w\}_e$ y $\{x,y\}_e = \{w,z\}_e$, entonces (por 5.5) $\{x\}_A = \{w\}_A$ y $\{x\}_A \cup \{y\}_A = \{w\}_A \cup \{z\}_A$, entonces (por 7.7) $x = w$

2.a) $y = w$ entonces $z = y = x = w$

2.b) $y = z$

$\therefore$ (en ambos subcasos) $\binom{x}{y} = \binom{w}{z}$

Caso 3.- $\{x\}_e = \{w,z\}_e$ y $\{x,y\}_e = \{w\}_e$ entonces (por 5.5 y 7.7) $x = w = y = z$ $\therefore \binom{x}{y} = \binom{w}{z}$

Caso 4.- $\{x\}_e = \{w,z\}_e = \{x,y\}_e$ entonces (por 5.5 y 7.7) $w = z = x = y$ $\therefore \binom{x}{y} = \binom{w}{z}$

$\therefore \langle -,- \rangle_A$ es mono $\square$.

Ahora se demostrarán los axiomas de existencia de conjuntos que faltan.

8.12. Lema en TEBP.

a) Si $A \xrightarrow{\subseteq} \wp A$ es un objeto-conjunto transitivo y x, y son A-elementos entonces $\langle (r,(x/r)),(r,(y/r))\rangle \sim (\wp r, (\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y})_s) \sim (\wp\wp r, (\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y}/\wp\wp r))$ (ver 7.11)

b) Si $(r,\bar{M})$ y $(r,\bar{N})$ son objeto-conjuntos, entonces $(\wp\wp r, \langle -,- \rangle_A[\bar{M}\times\bar{N}])$ es el producto cartesiano $(r,\bar{M})\times(r,\bar{N})$ en el modelo (ver §7 para la definición de $\bar{M}\times\bar{N}$)

c) El axioma de la existencia del producto cartesiano (1.7) se cumple en el modelo.

Demostración

a) Sean x, y A-elementos y $A \xrightarrow{r} \wp A$ un obj-conj-tr.
Se recuerda (ver 5.5) que $(\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y})_\Delta$ es el único $\wp A$-conjunto tal que
$$\left(\left(\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y}\right) \pi \, \mathrm{Id}_{\wp A} \right)^{-1} [e_{\wp A}] = \pi_{1,\wp A}^{-1} \left[(\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y})_\Delta \right]$$

PD. $\langle (r,(x/r)), (r,(y/r)) \rangle \sim (\wp r, (\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y})_\Delta) \sim (\wp\wp r, (\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y} / \wp\wp r))$

Por 8.9 tenemos que $\langle (r,(x/r)), (r,(y/r)) \rangle \sim (\wp r, \{\{x\}_e, \{x,y\}_e\}_{\wp A})$

y por 8.10 $\quad \langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y} = \{\{x\}_e, \{x,y\}_e\}_e$, entonces (por 5.5)
$$(\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y})_\Delta = \{\{x\}_e, \{x,y\}_e\}_{\wp A}$$

$\therefore \ \langle (r,(x/r)), (r,(y/r)) \rangle \sim (\wp r, (\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y})_\Delta)$

Por 8.4.b
$$(\wp r, (\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y})_\Delta) \sim (\wp\wp r, \wp r[(\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y})_\Delta])$$

PD. $\wp r[(\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y})_\Delta] = (\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y} / \wp\wp r)$
$$\wp r[(\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y})_\Delta]_e \underset{5.7.a}{=} \wp\wp r \circ (\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y}) = (\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y} / \wp\wp r)_e$$

$\therefore$ (por 5.5) $\quad \wp r[(\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y})_\Delta] = (\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y} / \wp\wp r)$

$\therefore \ (\wp r, (\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y})_\Delta) \sim (\wp\wp r, (\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y} / \wp\wp r))$

$\therefore \ \langle (r,(x/r)), (r,(y/r)) \rangle \sim (\wp r, (\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y})_\Delta) \sim (\wp\wp r, (\langle -,- \rangle_A \circ \binom{x}{y} / \wp\wp r))$

b) Sean $(r,\bar{M})$ y $(r,\bar{N})$ objetos-conjunto. PD $(\wp\wp r, \langle -,- \rangle_A[\bar{M} \times \bar{N}]) \sim (r,\bar{M}) \times (r,\bar{N})$

PD. Para todos $(s,\bar{L}), (t,\bar{K})$ $\left(\langle (s,\bar{L}), (t,\bar{K}) \rangle \in (\wp\wp r, \langle -,- \rangle_A[\bar{M} \times \bar{N}]) \text{ sii } (s,\bar{L}) \in (r,\bar{M}) \text{ y } (t,\bar{K}) \in (r,\bar{N}) \right)$.

Donde $\langle (s,\bar{L}), (t,\bar{K}) \rangle := \{ \{(s,\bar{L})\}, \{(s,\bar{L}), (t,\bar{K})\} \}$ y

$\{(s,\bar{L})\} \sim \{(s,\bar{L}), (s,\bar{L})\}$ (ver 8.4.c)

sólo si) Sean $(s,\bar{L})$ y $(t,\bar{K})$ obj-conj. Por 8.6 supongamos $s = r = t$ y por 8.4.b podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que $\bar{L}$ y $\bar{K}$ son r-elementos, tal que
$$\langle (r,\bar{L}), (r,\bar{K}) \rangle \in (\wp\wp r, \langle -,- \rangle_A[\bar{M} \times \bar{N}]), \quad \text{donde } A \xrightarrow{r} \wp A$$
$$\langle (r,\bar{L}), (r,\bar{K}) \rangle \underset{8.12.a}{\sim} \left(\wp\wp r, \left(\langle -,- \rangle_A \circ \binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{K}/r)} / \wp\wp r\right)\right)$$

entonces (por 7.19) $\quad \left(\langle -,- \rangle_A \circ \binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{K}/r)} / \wp\wp r\right) \in_{\wp\wp r} \langle -,- \rangle_A [\bar{M} \times \bar{N}]$

$\therefore \ \langle -,- \rangle_A \circ \binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{K}/r)} \in_{\wp\wp A} \langle -,- \rangle_A [\bar{M} \times \bar{N}]$

entonces existe $\varphi : 1 \longrightarrow A \pi A$ tal que $\langle -,- \rangle_A \circ \binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{K}/r)} = \langle -,- \rangle_A \circ (m \pi n) \circ \varphi$
donde $\chi_m = \bar{M} \quad \chi_n = \bar{N}$

entonces (por ser $\langle -,- \rangle_A$ mono, 3.11)

$$\binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{K}/r)} = (m \,\pi\, n) \circ \varphi$$

entonces (por ser $\bar{M} \times \bar{N} = \chi_{m\pi n}$) $\quad \binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{K}/r)} \in_{A\pi A} \bar{M} \times \bar{N}$

$\therefore$ (7.10) $\quad (\bar{L}/r) \in_A \bar{M} \quad$ y $\quad (\bar{K}/r) \in_A \bar{N}$

$\therefore$ $\bar{L} \in_r \bar{M} \quad$ y $\quad \bar{K} \in_r \bar{N}$

$\therefore$ $(r,\bar{L}) \in (r,\bar{M}) \quad$ y $\quad (r,\bar{K}) \in (r\bar{N})$

ii) Usando de nuevo 3.6 y 3.7.b.

Sean $(r,\bar{L})$ y $(r,\bar{K})$ obj-conj, donde $\bar{L}$ y $\bar{K}$ son r-elementos tales que $(r,\bar{L}) \in (r,\bar{M})$ y $(r,\bar{K}) \in (r,\bar{N})$.

PD $\quad \langle (r,\bar{L}),(r,\bar{K}) \rangle \sim \left(\wp\wp r, \left(\langle -,- \rangle_A \circ \binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{K}/r)} \middle/ \wp\wp r\right)\right) \in (\wp\wp r, \langle -,- \rangle_A[\bar{M} \times \bar{N}])$

Como $(r,\bar{L}) \in (r,\bar{M})$ y $(r,\bar{K}) \in (r,\bar{N})$ entonces (por 7.19)

$\bar{L} \in_r \bar{M}$ y $\bar{K} \in_r \bar{N}$, i.e. $(\bar{L}/r) \in_A \bar{M}$ y $(\bar{K}/r) \in_A \bar{N}$

$\therefore$ (por 7.10) $\quad \binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{K}/r)} \in_{A\pi A} \bar{M} \times \bar{N}$

$\therefore$ $\quad \langle -,- \rangle_A \circ \binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{K}/r)} \in_{\wp\wp A} \langle -,- \rangle_A [\bar{M} \times \bar{N}]$; por 7.19, entonces

$$\left(\wp\wp r, \left(\langle -,- \rangle_A \circ \binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{K}/r)} \middle/ \wp\wp r\right)\right) \in (\wp\wp r, \langle -,- \rangle_A [\bar{M} \times \bar{N}])$$

$\therefore$ $\quad \langle (r,\bar{L}),(r,\bar{K}) \rangle \in (\wp\wp r, \langle -,- \rangle_A [\bar{M} \times \bar{N}]$

$\therefore$ $\quad (r,\bar{M}) \times (r,\bar{N}) \sim (\wp\wp r, \langle -,- \rangle_A [\bar{M} \times \bar{N}])$

c) EL AXIOMA DE LA EXISTENCIA DEL PRODUCTO CARTESIANO (1.7) se cumple en el modelo.

Sean $(r,\bar{M})$ y $(a,\bar{N})$ obj-conj. Por 3.6 puedo suponer que $r=a$ y por b) $\quad (r,\bar{M}) \times (r,\bar{N}) \sim (\wp\wp r, \langle -,- \rangle_A [\bar{M} \times \bar{N}])$

$\square$.

8.13. Teorema en TEBP.

Los axiomas de la existencia de conjuntos, 1.8 – 1.10, se cumplen en el modelo.

Demostración. Sea $(A \xrightarrow{r} \wp A, A \xrightarrow{\bar{M}} \Omega)$ un obj-conj.

1.8) Para cualquier objeto-conjunto $(r,\bar{M})$ la restricción de la relación de membresía

$$\in \restriction (r,\bar{M}) = \{ \langle (a,\bar{L}),(t,\bar{K}) \rangle \,/\, (a,\bar{L}) \in (t,\bar{K}) \in (r,\bar{M}) \}$$

existe.

Se demostrará 1.7. suponiendo cierto 1.9., que después se demostrará.

PD $(\in \upharpoonright (r,\bar{M}))^{-1} := \{ \langle (t,\bar{K}),(s,\bar{L})\rangle / (s,\bar{L}) \in (t,\bar{K}) \in (r,\bar{M}) \}$ existe en el modelo.

PD $(\in \upharpoonright (r,\bar{M}))^{-1} \sim (88r, \langle -,-\rangle_A [\Pi_{A,A}^{-1}[\bar{M}] \cap (r\pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]])$

PD. Para todo $(t,\bar{K}),(s,\bar{L})$ $(\langle (t,\bar{K}),(s,\bar{L})\rangle \in (88r, \langle -,-\rangle_A [\Pi_{A,A}^{-1}[\bar{M}] \cap (r\pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]])$ sii $(s,\bar{L}) \in (t,\bar{K}) \in (r,\bar{M})$).

sii) Sean $(s,\bar{L})$ y $(t,\bar{K})$ obj-conj. tales que $(s,\bar{L}) \in (t,\bar{K}) \in (r,\bar{M})$

Por 8.6 podemos suponer que $s = r = t$

Si $(r,\bar{L}) \in (r,\bar{K})$ y $(r,\bar{K}) \in (r,\bar{M})$ entonces $\bar{L} \in_r \bar{K}$ y $\bar{K} \in_r \bar{M}$

i.e. $(\bar{L}/r) \in_A \bar{K}$ y $(\bar{K}/r) \in_A \bar{M}$

$$\langle (r,\bar{K}),(r,\bar{L})\rangle \underset{8.12.a}{\sim} (88r, (\langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)}/88r))$$

PD $(\langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)}/88r) \in_{88r} \langle -,-\rangle_A [\Pi_{A,A}^{-1}[\bar{M}] \cap (r\pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]]$

Basta demostrar que $\binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} \in_{A\pi A} \Pi_{A,A}^{-1}[\bar{M}] \cap (r\pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]$

como $\Pi_{A,A}\binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} = (\bar{K}/r) \in_A \bar{M}$ entonces $\Pi_{A,A}^{-1}[\bar{M}] \circ \binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} = \bar{M} \circ \Pi_{A,A} \circ \binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} =$

$= \bar{M} \circ (\bar{K}/r) = v$ $\therefore$ $\binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} \in_{A\pi A} \Pi_{A,A}^{-1}[\bar{M}]$

$$(r\pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A] \circ \binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} = e_A \circ (r\pi \mathrm{Id}_A) \circ \binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} = e_A \circ \binom{r \circ (\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)}$$

$$= e_A \circ \binom{\bar{K}e}{(\bar{L}/r)} = v$$ porque $\bar{K}$ es un A-conjunto y $(\bar{L}/r) \in_A \bar{K}$ y por 7.11

$\therefore$ $\binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} \in_{A\pi A} (r\pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]$

entonces (por 7.6.b) $\binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} \in_{A\pi A} \Pi_{A,A}^{-1}[\bar{M}] \cap (r\pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]$

$\therefore$ $\langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} \in_{88A} \langle -,-\rangle_A [\Pi_{A,A}^{-1}[\bar{M}] \cap (r\pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]]$

$\therefore$ $(\langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)}/88r) \in_{88r} \langle -,-\rangle_A [\Pi_{A,A}^{-1}[\bar{M}] \cap (r\pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]]$

$\therefore$ $\langle (r,\bar{K}),(r,\bar{L})\rangle \in (88r, (\langle -,-\rangle_A [\Pi_{A,A}^{-1}[\bar{M}] \cap (r\pi \mathrm{Id}_A)^{-1}[e_A]])$

sólo si) Sean (por 5.6) $(r,\bar{L})$, $(r,\bar{K})$ obj-conj tales que

$\langle (r,\bar{K}),(r,\bar{L})\rangle \in (\wp\wp r, \langle -,-\rangle_A [\Pi^{-1}_{A,A}[\bar{M}] \cap (r \Pi\, 1d_A)^{-1}[e_A]])$

PD. $(r,\bar{L}) \in (r,\bar{K}) \in (r,\bar{M})$

Por 8.4.b, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\bar{L}$ y $\bar{K}$ son r-elementos.

Por 8.12.a

$\langle (r,\bar{K}),(r,\bar{L})\rangle \sim (\wp\wp r, (\langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)})/\wp\wp r))$

entonces (por 7.19)

$\langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} \in_{\wp\wp A} \langle -,-\rangle_A\, [\Pi^{-1}_{A,A}[\bar{M}] \cap (r\Pi\, 1d_A)^{-1}[e_A]]$

entonces (por ser $\langle -,-\rangle_A$ mono)

$$\binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} \in_{A\Pi A} \Pi^{-1}_{A,A}[\bar{M}] \cap (r\Pi\, 1d_A)^{-1}[e_A]$$

entonces (por 7.6.b) $\binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} \in_A \Pi^{-1}_{A,A}[\bar{M}]$ y $\binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} \in_A (r\Pi\, 1d_A)^{-1}[e_A]$

entonces $v = \Pi^{-1}_{A,A}[\bar{M}] \circ \binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} = \bar{M} \circ \Pi_{A,A} \circ \binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} = \bar{M} \circ (\bar{K}/r)$ y

$v = (r\Pi\, 1d_A)^{-1}[e_A] \circ \binom{(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} = e_A \circ \binom{r\circ(\bar{K}/r)}{(\bar{L}/r)} = e_A \circ \binom{\bar{K}e}{(\bar{L}/r)}$

entonces (por 7.11) $(\bar{K}/r) \in_A \bar{M}$ y $(\bar{L}/r) \in_A \bar{K}$

∴ $\bar{K} \in_r \bar{M}$ y $\bar{L} \in_r \bar{K}$ ∴ $(r,\bar{K}) \in (r,\bar{M})$ y $(r,\bar{L}) \in (r,\bar{K})$

∴ $(\in|(r,\bar{M}))^{-1} \sim (\wp\wp r, \langle -,-\rangle_A [\Pi^{-1}_{A,A}[\bar{M}] \cap (r\Pi\, 1d_A)^{-1}[e_A]])$

∴ $(\in|(r,\bar{M}))^{-1}$ existe en el modelo

∴ (por 1.10) $\in|(r,\bar{M})$ existe en el modelo.

1.9) Para cualquier conjunto $(r,\bar{M})$ el dominio $D(r,\bar{M}) = \{(a,\bar{N}) / \exists (t,\bar{K})\ \langle (a,\bar{N}),(t,\bar{K})\rangle \in (r,\bar{M})\}$ existe

PD. $D(r,\bar{M}) \sim (r, \Pi_{A,A}[\langle -,-\rangle_A^{-1}[(\wp r \circ r)[\bar{M}]]])$

PD Para todo $(a,\bar{N})\,((a,\bar{N}) \in (r, \Pi_{A,A}[\langle -,-\rangle_A^{-1}[(\wp r\circ r)[\bar{M}]]])$ sii existe $(t,\bar{K})\,(\langle (a,\bar{N}),(t,\bar{K})\rangle \in (r,\bar{M}))$.

si) Sea $(a,\bar{N})$ obj-conj tal que existe $(t,\bar{K})$ y $\langle (a,\bar{N}),(t,\bar{K})\rangle \in (r,\bar{M})$ puedo suponer que $r = a = t$ y $\bar{N}$ y $\bar{K}$ son r-elementos, por 8.4.a y si no me quedaran en r, aplico 8.6.

Entonces $\langle (r,\bar N),(r,\bar K)\rangle \underset{8.12.a}{\sim} (\mathcal{P}\mathcal{P}r, (\langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar N/r)}{(\bar K/r)}/\mathcal{P}\mathcal{P}r)) \in (r,\bar M)$

y por 8.4.b $(r,\bar M)\sim(\mathcal{P}r, r[\bar M])\sim(\mathcal{P}\mathcal{P}r, (\mathcal{P}r\circ r)[\bar M])$

$\therefore$ $(\langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar N/r)}{(\bar K/r)}/\mathcal{P}\mathcal{P}r) \in_{\mathcal{P}\mathcal{P}r} (\mathcal{P}r\circ r)[\bar M]$

entonces $\langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar N/r)}{(\bar K/r)} \in_{\mathcal{P}\mathcal{P}A} (\mathcal{P}r\circ r)[\bar M]$

entonces $v = ((\mathcal{P}r\circ r)[\bar M]\circ \langle -,-\rangle_A)\circ \binom{(\bar N/r)}{(\bar K/r)}$

$\therefore$ $\binom{(\bar N/r)}{(\bar K/r)} \in_{A\Pi A} \langle -,-\rangle_A^{-1}[(\mathcal{P}r\circ r)[\bar M]]$

$\therefore$ existe un único morfismo $\varphi : 1 \to E$ tal que $\binom{(\bar N/r)}{(\bar K/r)} = \alpha\circ\varphi$
donde $\alpha : E \rightarrowtail A\Pi A$ y $\langle -,-\rangle_A^{-1}[(\mathcal{P}r\circ r)[\bar M]] = \chi_\alpha$
entonces $(\bar N/r) = \pi_{A,A}\circ\binom{(\bar N/r)}{(\bar K/r)} = (\pi_{A,A}\circ\alpha)\circ\varphi = Im(\pi_{A,A}\circ\alpha)\circ((\pi_{A,A}\circ\alpha)^*\circ\varphi)$

(donde $Im(-)\circ(-)^*$ es la epi-mono factorización de $-$)
y como $\pi_{A,A}[\langle -,-\rangle_A^{-1}[(\mathcal{P}r\circ r)[\bar M]]] := \chi_{Im(\pi_{A,A}\circ\alpha)}$

entonces $(\bar N/r)\in_A \pi_{A,A}[\langle -,-\rangle_A^{-1}[(\mathcal{P}r\circ r)[\bar M]]]$

$\therefore$ $(r,\bar N)\in (r, \pi_{A,A}[\langle -,-\rangle_A^{-1}[(\mathcal{P}r\circ r)[\bar M]]])$

<u>sólo si)</u> Sea $(s,\bar N)\in (r,\pi_{A,A}[\langle -,-\rangle_A^{-1}[(\mathcal{P}r\circ r)[\bar M]]])$. Por 8.6 puedo suponer $s=r$.
entonces $\bar N \in_r \pi_{A,A}[\langle -,-\rangle_A^{-1}[(\mathcal{P}r\circ r)[\bar M]]]$ i.e. $(\bar N/r)\in_A \pi_{A,A}[\langle -,-\rangle_A^{-1}[(\mathcal{P}r\circ r)[\bar M]]]$

entonces existe $1\xrightarrow{y}\pi_{A,A}(E)$ tal que $(\bar N/r) = Im(\pi_{A,A}\circ\alpha)\circ y$
donde $\alpha : E\to A\Pi A$ y $\chi_\alpha = \langle -,-\rangle_A^{-1}[(\mathcal{P}r\circ r)[\bar M]]$ e
$Im(\pi_{A,A}\circ\alpha) : \pi_{A,A}(E)\to A$.
Como $(\pi_{A,A}\circ\alpha)^*$ es epi entonces (3.13.d) $(\pi_{A,A}\circ\alpha)^*$ es sobre
entonces existe $1\xrightarrow{y'} E$ tal que $(\pi_{A,A}\circ\alpha)^*\circ y' = y$

Sea $\bar K_e := r\circ\pi'_{A,A}\circ\alpha\circ y' : 1 \to \mathcal{P}A$ $\underset{(5.5)}{\therefore}$ $\bar K$ es A-conjunto y

por construcción $\bar K$ es r-elemento, con $(\bar K/r) = \pi'_{A,A}\circ\alpha\circ y'$
PD. $\langle (r,\bar N),(r,\bar K)\rangle \in (r,\bar M)$
Por 8.12.a $\langle (r,\bar N),(r,\bar K)\rangle \sim (\mathcal{P}\mathcal{P}r, (\langle -,-\rangle_A\circ\binom{(\bar N/r)}{(\bar K/r)}/\mathcal{P}\mathcal{P}r))$
y por 8.4.b $(r,\bar M)\sim(\mathcal{P}\mathcal{P}r, (\mathcal{P}r\circ r)[\bar M])$

PD. $\left(\langle -,-\rangle_A \circ \begin{pmatrix}(\bar N/r)\\(\bar K/r)\end{pmatrix}/\wp\wp r\right) \in_{\wp\wp r} (\wp r\circ r)[\bar M]$

i.e. PD $\langle -,-\rangle_A \circ \begin{pmatrix}(\bar N/r)\\(\bar K/r)\end{pmatrix} \in_{\wp\wp A} (\wp r\circ r)[\bar M]$

Como $(\bar N/r) = \mathrm{Im}(\pi_{A,A}\circ\alpha)\circ y$, $(\bar K/r) = \pi'_{A,A}\circ\alpha\circ y'$ y $y = (\pi_{A,A}\circ\alpha)^{*}\circ y'$

entonces $\begin{pmatrix}(\bar N/r)\\(\bar K/r)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{Im}(\pi_{A,A}\circ\alpha)\circ(\pi_{A,A}\circ\alpha)^{*}\circ y'\\ \pi'_{A,A}\circ\alpha\circ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_{A,A}\\ \pi'_{A,A}\end{pmatrix}\circ\alpha\circ y'$

entonces $\langle -,-\rangle_A \circ \begin{pmatrix}(\bar N/r)\\(\bar K/r)\end{pmatrix} = \langle -,-\rangle_A \circ \begin{pmatrix}\pi_{A,A}\\ \pi'_{A,A}\end{pmatrix}\circ\alpha\circ y' = \langle -,-\rangle_A\circ\alpha\circ y'$

pues $1d_{A\Pi A} = \begin{pmatrix}\pi_{A,A}\\ \pi'_{A,A}\end{pmatrix}$

y como

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & A\Pi A \arrow[d, "\langle -,-\rangle_A"] \\ M \arrow[r, tail, "\wp_r\circ r\circ m"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \wp\wp A \arrow[d, "(\wp r\circ r)[\bar M]"] \\ 1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega \end{tikzcd}$$

i.e. $\langle -,-\rangle_A\circ\alpha = \wp_r\circ r\circ m\circ\psi$

entonces $\langle -,-\rangle_A \circ \begin{pmatrix}(\bar N/r)\\(\bar K/r)\end{pmatrix} = (\wp_r\circ r\circ m)\circ\psi\circ y'$

$\therefore$ $\langle -,-\rangle_A \circ \begin{pmatrix}(\bar N/r)\\(\bar K/r)\end{pmatrix} \in_{\wp\wp A} (\wp r\circ r)[\bar M]$

$\therefore$ $\left(\langle -,-\rangle_A \circ \begin{pmatrix}(\bar N/r)\\(\bar K/r)\end{pmatrix}/\wp\wp r\right) \in_{\wp\wp r} (\wp_r\circ r)[\bar M]$

$\therefore$ $\underbrace{\left(\wp\wp r, \left(\langle -,-\rangle_A \circ \begin{pmatrix}(\bar N/r)\\(\bar K/r)\end{pmatrix}/\wp\wp r\right)\right)}_{\langle (r,\bar N),\ (r,\bar K)\rangle} \in \underbrace{(\wp\wp r, (\wp r\circ r)[\bar M])}_{(r,\bar M)}$

$\therefore$ $\langle (r,\bar N), (r,\bar K)\rangle \in (r,\bar M)$

$\therefore$ $D(r,\bar M) \sim (r, \pi_{A,A}[\langle -,-\rangle_A^{-1}[(\wp r\circ r)[\bar M]]])$

1.9.) Para cualquier objeto-conjunto $(r,\bar M)$, los siguientes "conjuntos de permutaciones" de $(r,\bar M)$ existen:

1) $\{\langle (s,\bar N), (t,\bar L)\rangle \,/\, \langle (t,\bar L), (s,\bar N)\rangle \in (r,\bar M)\}$;

2) $\{\langle\langle (s,\bar N),(t,\bar L)\rangle, (u,\bar K)\rangle \,/\, \langle\langle (t,\bar L),(u,\bar K)\rangle, (s,\bar N)\rangle \in (r,\bar M)\}$

1) P.D. $\{\langle (s,\bar N),(t,\bar L)\rangle / \langle (t,\bar L),(s,\bar N)\rangle \in (r,\bar M)\} \sim$

$$\sim \left(\wp\wp r, \langle -,-\rangle_A\left[\binom{\pi'_{A,A}}{\pi_{A,A}}\left[\langle -,-\rangle_A^{-1}[(\wp r\circ r)[\bar M]]\right]\right]\right) := X$$

P.D. Para todos $(s,\bar N),(t,\bar L)$ $\left(\langle (s,\bar N),(t,\bar L)\rangle \in X \text{ sii } \langle (t,\bar L),(s,\bar N)\rangle \in (r,\bar M)\right)$

si) Por 8.6 y 8.4.b sean $(r,\bar N),(r,\bar L)$ dy-cory tales que $\bar N$ y $\bar L$ son r-elementos y $\langle (r,\bar L),(r,\bar N)\rangle \in (r,\bar M)$

P.D. $\langle (r,\bar N),(r,\bar L)\rangle \in X$

$\langle (r,\bar L),(r,\bar N)\rangle \underset{8.12.a}{\sim} \left(\wp\wp r, \left(\langle -,-\rangle_A\circ\binom{(\bar L/r)}{(\bar N/r)} / \wp\wp r\right)\right) \in (r,\bar M)$ y

Por 8.4.b $(r,\bar M)\sim(\wp\wp r, (\wp r\circ r)[\bar M])$

entonces (por 7.19)

$\left(\langle -,-\rangle_A\circ\binom{(\bar L/r)}{(\bar N/r)}/\wp\wp r\right) \in_{\wp\wp r} (\wp r\circ r)[\bar M]$, i.e. $\langle-,-\rangle_A\circ\binom{(\bar L/r)}{(\bar N/r)} \in_{\wp\wp A} (\wp r\circ r)[\bar M]$

En diagrama, se tiene:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, dashed, "y"] \arrow[rr, bend left, "\binom{(\bar L/r)}{(\bar N/r)}"] \arrow[dr, dashed, "x"'] & E \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}\ (\Delta)"] & A\pi A \arrow[r, tail, "\binom{\pi'_{A,A}}{\pi_{A,A}}"] \arrow[d, "\langle -,-\rangle_A"] & A\pi A \arrow[r, tail, "\langle -,-\rangle_A"] & \wp\wp A \arrow[dd, "\langle -,-\rangle_A\left[\binom{\pi'_{A,A}}{\pi_{A,A}}\left[\langle -,-\rangle_A^{-1}[(\wp r\circ r)[\bar M]]\right]\right]"] \\
& M \arrow[r, tail, "\wp r\circ r\circ m"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & \wp\wp A \arrow[d, "(\wp r\circ r)[\bar M]"] & & \\
& 1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega \arrow[rr, equal] & & \Omega
\end{tikzcd}$$

Como $\langle-,-\rangle_A\circ\binom{(\bar L/r)}{(\bar N/r)}\in_{\wp\wp A}(\wp r\circ r)[\bar M]$ entonces existe $1\xrightarrow{x}M$ tal que $\wp r\circ r\circ m\circ x = \langle-,-\rangle_A\circ\binom{(\bar L/r)}{(\bar N/r)}$ y como (Δ) es P.F. entonces existe $1\xrightarrow{y}E$ tal que $\alpha\circ y=\binom{(\bar L/r)}{(\bar N/r)}$

$$\therefore\quad \begin{aligned}&\langle-,-\rangle_A\circ\binom{\pi'_{A,A}}{\pi_{A,A}}\circ\binom{(\bar L/r)}{(\bar N/r)} = \left(\langle-,-\rangle_A\circ\binom{\pi'_{A,A}}{\pi_{A,A}}\circ\alpha\right)\circ y\\ &\qquad\shortparallel\\ &\langle-,-\rangle_A\circ\binom{(\bar N/r)}{(\bar L/r)}\end{aligned}$$

$\therefore\quad \langle-,-\rangle_A\circ\binom{(\bar N/r)}{(\bar L/r)}\in_{\wp\wp A}\langle-,-\rangle_A\left[\binom{\pi'_{A,A}}{\pi_{A,A}}\left[\langle-,-\rangle_A^{-1}[(\wp r\circ r)[\bar M]]\right]\right]$.

$$\therefore\quad \begin{aligned}&\left(\wp\wp r, \left(\langle-,-\rangle_A\circ\binom{(\bar N/r)}{(\bar L/r)}/\wp\wp r\right)\right)\in X\\ &\qquad\wr\\ &\langle (r,\bar N),(r,\bar L)\rangle\end{aligned}$$

<u>sólo si</u>) Sean (por 8.6 y 8.4.b) $(r,\bar{N})$ y $(r,\bar{L})$ obj-conj. Tales que $\bar{N}$ y $\bar{L}$ son r-elementos y $\langle (r,\bar{N}),(r,\bar{L})\rangle \in X$.

PD. $\langle (r,\bar{L}),(r,\bar{N})\rangle \in (r,\bar{M})$.

$\therefore \langle (r,\bar{L}),(r,\bar{N})\rangle \underset{8.12.a}{\sim} \left(\wp\wp r, \left(\langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{N}/r)}\Big/\wp\wp r\right)\right) \in X$

entonces (por 7.19) $\langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{N}/r)} \in_{\wp\wp A} \left(\langle -,-\rangle_A \circ \binom{\pi'_{A,A}}{\pi_{A,A}}\right)\left[\langle -,-\rangle_A^{-1}\left[(\wp r\circ r)[\bar{M}]\right]\right]$

entonces existe $1 \xrightarrow{x} E$ tal que

$\langle -,-\rangle_A \circ \binom{\pi'_{A,A}}{\pi_{A,A}} \circ \binom{(\bar{N}/r)}{(\bar{L}/r)} = \langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{N}/r)} = \langle -,-\rangle_A \circ \binom{\pi'_{A,A}}{\pi_{A,A}} \circ \alpha \circ x$

entonces $\left(\text{por ser } \langle -,-\rangle_A \circ \binom{\pi'_{A,A}}{\pi_{A,A}} \text{ mono}\right)$ $\binom{(\bar{N}/r)}{(\bar{L}/r)} = \alpha\circ y$

$\therefore \binom{(\bar{N}/r)}{(\bar{L}/r)} \in_{A\pi A} \langle -,-\rangle_A^{-1}\left[(\wp r\circ r)[\bar{M}]\right]$

$\therefore$ (por 7.8.a) $\langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar{N}/r)}{(\bar{L}/r)} \in_{\wp\wp A} (\wp r\circ r)[\bar{M}]$

$\therefore \underbrace{\left(\wp\wp r, \left(\langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar{N}/r)}{(\bar{L}/r)}\Big/\wp\wp r\right)\right)}_{\langle (r,\bar{N}),(r,\bar{L})\rangle} \in \left(\wp\wp r, (\wp r\circ r)[\bar{M}]\right) \underset{8.4.b}{\sim} (r,\bar{M})$

$\therefore \{\langle (t,\bar{L}),(s,\bar{N})\rangle / \langle (s,\bar{N}),(t,\bar{L})\rangle \in (r,\bar{M})\} \sim \left(\wp\wp r, \left(\langle -,-\rangle_A \circ \binom{\pi'_{A,A}}{\pi_{A,A}}\right)\left[\langle -,-\rangle_A^{-1}\left[(\wp r\circ r)[\bar{M}]\right]\right]\right)$

2) PD $\{\langle\langle (s,\bar{N}),(t,\bar{L})\rangle,(u,\bar{R})\rangle / \langle\langle (t,\bar{L}),(u,\bar{R})\rangle,(s,\bar{N})\rangle \in (r,\bar{M})\} \sim$
$\left(\wp^4 r, \langle -,-,-\rangle_A\left[h\left[\langle -,-,-\rangle_A^{-1}\left[(\wp^3 r\circ\wp^2 r\circ\wp r\circ r)[\bar{M}]\right]\right]\right]\right)$ con $(r,\bar{M})$ un objeto-conjunto dado y donde

i) $\wp^j r := \overbrace{\wp\cdots\wp}^{j\text{-veces}} r$, $j\in\{1,4\}$, es obj-conj-tr (porque r lo es y por 6.8)

ii) $\langle -,-,-\rangle_A : (A\pi A)\pi A \longrightarrow \wp^4 A := \wp\wp\wp\wp A$ es la composición de los siguientes morfismos:

$$(A\pi A)\pi A \xrightarrow{\langle -,-\rangle_A \pi\, \mathrm{Id}_A} \wp\wp A\ \pi\ A \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\wp\wp A}\ \pi\,(\wp r\circ r)} \wp\wp A\ \pi\ \wp\wp A \xrightarrow{\langle -,-\rangle_{\wp\wp A}} \wp^4 A$$

$\therefore \langle -,-,-\rangle_A$ es monomorfismo (pues es composición de monomorfismos)

y iii) $h : (A\pi A)\pi A \longrightarrow (A\pi A)\pi A$ es la siguiente composición de morfismos:

$$(A\pi A)\pi A \xrightarrow{\binom{\pi'_{A\pi A,A}}{\pi_{A\pi A,A}}} A\pi(A\pi A) \xrightarrow{\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_{A,A\pi A}\\ \pi_{A,A}\circ\pi'_{A,A\pi A}\end{pmatrix}\\ \pi'_{A,A}\circ\pi'_{A,A\pi A}\end{pmatrix}} (A\pi A)\pi A$$

Lo que hace h es "permutar". Si tenemos $A_i = A$, $i = 1,2,3$, tenemos:

$$(A_1 \Pi A_2)\Pi A_3 \xrightarrow{h} (A_3 \Pi A_1)\Pi A_2$$

PD. Para todos $(s,\bar N), (t,\bar L), (u,\bar K)$ objeto-conjunto
$(\langle\langle (s,\bar N),(t,\bar L)\rangle,(u,\bar K)\rangle \in (\wp^4 r, \langle -,-,-\rangle_A[h^{-1}[\langle -,-,-\rangle_A^{-1}[(\wp^3 r\circ \wp^2 r\circ \wp r\circ r)[\bar M]]]])$
sii $\langle\langle (t,\bar L),(u,\bar K)\rangle,(s,\bar N)\rangle \in (r,\bar M)$)

Por 8.4.b $(r,\bar M) \sim (\wp^4 r, (\wp^3 r\circ \wp^2 r\circ \wp r\circ r)[\bar M])$

si) Por 8.6 y 8.4.b, sean $(r,\bar N), (r,\bar L), (r,\bar K)$ objeto-conj tales que $\bar N, \bar L$ y $\bar K$ son r-elementos y $\langle\langle (r,\bar L),(r,\bar K)\rangle,(r,\bar N)\rangle \in (r,\bar M)$

PD. $\langle\langle (r,\bar N),(r,\bar L)\rangle,(r,\bar K)\rangle \in (\wp^4 r, \langle -,-,-\rangle_A[h[\langle -,-,-\rangle_A^{-1}[(\wp^3 r\circ\wp^2 r\circ\wp r\circ r)[\bar M]]]])$

Por 8.12.a y por 8.1c y porque $(r,\bar N)\sim(\wp\wp r,(\wp r\circ r)[\bar N])$
$\langle\langle (r,\bar L),(r,\bar K)\rangle,(r,\bar N)\rangle \sim (\wp^4 r, (\langle\langle(\bar L/r),(\bar K/r)\rangle_e, \wp r\circ r\circ(\bar N/r)\rangle_e / \wp^4 r)) \in (r,\bar M)$
entonces por 7.19
$\langle\langle(\bar L/r),(\bar K/r)\rangle_e, \wp r\circ r\circ(\bar N/r)\rangle_e \in_{\wp^4 A} (\wp^3 r\circ\wp^2 r\circ\wp r\circ r)[\bar M]$
entonces existe $x: 1 \longrightarrow M$ tal que
$\langle\langle(\bar L/r),(\bar K/r)\rangle_e, \wp r\circ r\circ(\bar N/r)\rangle_e = \wp^3 r\circ\wp^2 r\circ\wp r\circ r\circ m\circ x$

$$
\begin{aligned}
&\| \ 8.10\\
&\langle -,-\rangle_{\wp\wp A}\circ\begin{pmatrix}\langle -,-\rangle_A\circ\begin{pmatrix}(\bar L/r)\\(\bar K/r)\end{pmatrix}\\ \wp r\circ r\circ(\bar N/r)\end{pmatrix}\\
&\|\\
&\langle -,-\rangle_{\wp\wp A}\circ(Id_{\wp A}\,\Pi\,(\wp r\circ r))\circ(\langle -,-\rangle_A\,\Pi\, Id_A)\circ\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}(\bar L/r)\\(\bar K/r)\end{pmatrix}\\(\bar N/r)\end{pmatrix}\\
&\|\\
&\langle -,-,-\rangle_A\circ\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}(\bar L/r)\\(\bar K/r)\end{pmatrix}\\(\bar N/r)\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

en diagrama tenemos:

```tikzcd
1 \arrow[dr, dashed, "y"] \arrow[drr, bend left, "\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}(\bar L/r)\\(\bar K/r)\end{pmatrix}\\(\bar N/r)\end{pmatrix}"] \arrow[ddr, bend right, dashed, "x"'] & & & & \\
& D \arrow[r, tail, "\beta"] \arrow[d, "\beta'"'] \arrow[dr, phantom, "P.F\ (\#)"] & (A\Pi A)\Pi A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\langle -,-,-\rangle_A"] & (A\Pi A)\Pi A \arrow[r, tail, "\langle -,-,-\rangle_A"] & \wp^4 A \arrow[dd, "\langle -,-,-\rangle_A[h[\langle -,-,-\rangle_A^{-1}[(\wp^3 r\circ\wp^2 r\circ\wp r\circ r)[\bar M]]]]"] \\
& M \arrow[r, tail, "\wp^3 r\circ\wp^2 r\circ\wp r\circ r\circ m"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & \wp^4 A \arrow[d] & & \\
& 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega \arrow[rr, equal] & & \Omega
```

entonces existe un único $1 \xrightarrow{y} D$ tal que $\beta\circ y = \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}(\bar L/r)\\(\bar K/r)\end{pmatrix}\\(\bar N/r)\end{pmatrix}$

entonces $\langle -,-,- \rangle_A \circ h \circ \begin{pmatrix} ((\bar{L}/r) \\ (\bar{K}/r)) \\ (\bar{N}/r) \end{pmatrix} \in_{\wp^4 A} \langle -,-,- \rangle_A [h[\langle -,-,- \rangle_A^{-1} [(\wp^3_r \circ \wp^2_r \circ \wp_r \circ r)[\bar{M}]]]]$

$$\| $$

$$\langle -,-,- \rangle_A \begin{pmatrix} ((\bar{N}/r) \\ (\bar{L}/r)) \\ (\bar{K}/r) \end{pmatrix}$$

$$\| \; 8.10$$

$$\langle \langle (\bar{N}/r), (\bar{L}/r) \rangle_e, \wp_r \circ r \circ (\bar{K}/r) \rangle_e$$

entonces (por 7.19)

$$(\wp^4 r, (\langle\langle\langle (\bar{N}/r), (\bar{L}/r) \rangle_e, \wp_r \circ r \circ (\bar{K}/r) \rangle_e / \wp^4 r)) \in (\wp^4 r, \langle -,-,- \rangle_A [h[\langle -,-,- \rangle_A^{-1} [(\wp^3_r \circ \wp^2_r \circ \wp_r \circ r)[\bar{M}]]]])$$

$$\wr \; 8.12.a$$

$$\langle \langle (r, \bar{N}) ; (r, \bar{L}) \rangle, (r, \bar{K}) \rangle$$

<u>sólo si)</u> Sean $(r,\bar{N}), (r,\bar{L}), (r,\bar{K})$ sly-con, tales que $\bar{N}, \bar{L}$ y $\bar{K}$ son r-elementos y $\langle\langle (r,\bar{N}), (r,\bar{L}) \rangle, (r,\bar{K}) \rangle \in (\wp^4 r, \langle -,-,- \rangle_A [h[\langle -,-,- \rangle_A^{-1} [(\wp^3_r \circ \wp^2_r \circ \wp_r \circ r)[\bar{M}]]]])$

PD. $\langle\langle (r,\bar{L}), (r,\bar{K}) \rangle, (r,\bar{N}) \rangle \in (r, \bar{M})$

Como

$\langle\langle (r,\bar{N}), (r,\bar{L}) \rangle, (r,\bar{K}) \rangle \in (\wp^4 r, \langle -,-,- \rangle_A [h[\langle -,-,- \rangle_A^{-1} [(\wp^3_r \circ \wp^2_r \circ \wp_r \circ r)[\bar{M}]]]])$

y $\langle\langle (r,\bar{N}), (r,\bar{L}) \rangle, (r,\bar{K}) \rangle \sim (\wp^4 r, (\langle\langle (\bar{N}/r), (\bar{L}/r) \rangle_e, \wp_r \circ r \circ (\bar{K}/r) \rangle_e / \wp^4 r)$

entonces (por 7.19) existe $1 \xrightarrow{y} D$ tal que

$$\langle -,-,- \rangle_A \circ h \circ \beta \circ y = \langle\langle (\bar{N}/r), (\bar{L}/r) \rangle_e, \wp_r \circ r \circ (\bar{K}/r) \rangle_e$$

$$\| \text{ (como antes)}$$

$$\langle -,-,- \rangle_A \circ \begin{pmatrix} ((\bar{N}/r) \\ (\bar{L}/r)) \\ (\bar{K}/r) \end{pmatrix} = \langle -,-,- \rangle_A \circ h \circ \begin{pmatrix} ((\bar{L}/r) \\ (\bar{L}/r)) \\ (\bar{N}/r) \end{pmatrix}$$

Como $\langle -,-,- \rangle_A \circ h$ es mono, entonces

$$\beta \circ y = \begin{pmatrix} ((\bar{L}/r) \\ (\bar{K}/r)) \\ (\bar{N}/r) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \langle -,-,- \rangle_A \circ \begin{pmatrix} ((\bar{L}/r) \\ (\bar{K}/r)) \\ (\bar{N}/r) \end{pmatrix} = \langle -,-,- \rangle_A \circ \beta \circ y \underset{\substack{(*) \\ \text{P.F.}}}{=\!=} \wp^3_r \circ \wp^2_r \circ \wp_r \circ r \circ m \circ \beta' \circ y)$$

$$\therefore \quad \langle -,-,- \rangle_A \circ \begin{pmatrix} ((\bar{L}/r) \\ (\bar{K}/r)) \\ (\bar{N}/r) \end{pmatrix} = \langle \langle (\bar{L}/r), (\bar{K}/r) \rangle_e, \wp_r \circ r \circ (\bar{N}/r) \rangle_e \in_{\wp^4 A} (\wp^3_r \circ \wp^2_r \circ \wp_r \circ r)[\bar{M}]$$

$$\therefore \text{ (por 7.19 y 8.12.a)} \quad \langle\langle (r,\bar{L}), (r,\bar{K}) \rangle, (r,\bar{N}) \rangle \in (\wp^4 r, (\wp^3_r \circ \wp^2_r \circ \wp_r \circ r)[\bar{M}]) \sim (r, \bar{M})$$

$$\therefore \; \{ \langle\langle (s,\bar{N}), (t,\bar{L}) \rangle, (u,\bar{K}) \rangle / \langle\langle (t,\bar{L}), (u,\bar{K}) \rangle, (s,\bar{N}) \rangle \in (r,\bar{M}) \} \sim$$
$$\sim (\wp^4 r, \langle -,-,- \rangle_A [h[\langle -,-,- \rangle_A^{-1} [(\wp^3_r \circ \wp^2_r \circ \wp_r \circ r)[\bar{M}]]]]) \qquad \square.$$

Ya con este último teorema, se han demostrado todos los axiomas de la Teoría de los conjuntos en Z, excepto el axioma de representación transitiva (ART) (4.5), que también se cumple en el modelo. Pero antes de probarlo, se comparará el topo de los conjuntos en el modelo con el topo en el que estamos trabajando.

Para evitar complicaciones posteriores, se va a suponer que se tiene un representante canónico para toda clase de isomorfía de objeto-conj.
Es decir, se introducirá una función ρ en los objetos-conjunto, que satisface:

<u>8.14.</u> Propiedad de Representación en TE:
Para objeto-conjunto X, Y, se tiene:
1) $\rho X \cong X$;
2) $X \cong Y$ sii $\rho X = \rho Y$.

i.e. existe una función biyectiva $F : \rho X \longrightarrow X$ y si $X \cong Y$ (existe G biyección) entonces $\rho X = \rho Y$.

<u>Observación de 8.14.</u>
Si $X \sim Y$, donde X y Y son objeto-conjunto entonces se tiene que $X \cong Y$, puesto que el morfismo identidad es biyectiva.

<u>8.15.</u> Nota: Para introducir propiamente a ρ, el operador ρ ha sido tomado como un nuevo concepto indefinido de la teoría TE que satisface 8.14 como axioma.

<u>8.16.</u> Nota: El topo de los Z-conjunto, Set(Z), admite un operador ρ que cumple 8.14, a saber:

$$\rho(r, \bar{A}) = (T \hookrightarrow \wp T,\ i[\bar{A}])$$

donde T es el representante transitivo de r e i es el isomorfismo canónico de r a $T \hookrightarrow \wp T$ (ver 4.5).

<u>Observación.</u> Sea $\mathcal{M}$ la categoría tal que $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ son los objetos conjunto y los morfismos en $\mathcal{M}$ son las funciones entre ellos. Como en $\mathcal{M}$ se cumplen todos los axiomas de Z, entonces, por §3, <u>$\mathcal{M}$ es un topo elemental bien punteado</u>.

Usando este operador ϱ, seremos capaces de introducir un funtor φ del topos de los conjuntos en el modelo al topos en el que estamos trabajando:

8.17. Definición y lema en TE:

a) Para cualquier objeto-conjunto X, con $\varrho X = (A \xrightarrow{r} \varrho A, \overline{M})$, se define $\varphi X \xrightarrow{P_X} A := P_1(\overline{M}, v)$, i.e.

$$\begin{array}{ccc} \varphi X & \xrightarrow{P_X} & A \\ \downarrow & \text{P.F.} & \downarrow \overline{M} \\ 1 & \xrightarrow{v} & \Omega \end{array}$$

es el P.F. canónico (ver 2.1). Como v es mono entonces P_X es mono y φX es obj. p. tr. (pues r es obj-conj-tr, ver § 6)

b) Para objeto-conjunto X, Y, se tiene:
Si $X \sim Y$ entonces $P_X = P_Y$ y $\varphi X = \varphi Y$

Demostración.

b) Sean $X \sim Y$ entonces (por 8.14.2) $\varrho X = \varrho Y$ entonces (por a)) $P_X = P_Y$ y $\varphi X = \varphi Y$. $\square$.

Observación de 8.17.

Sean $X = (A \hookrightarrow \varrho A, \overline{M} = \chi_{m:M \to A})$ y $Y = (A \hookrightarrow \varrho A, \overline{N} = \chi_{n:N \to A})$ objetos conjunto, entonces $X \cong Y$ sii $m \cong n$, pues se verá en 8.18 que si $F : X \to Y$ es una biyección, entonces existe un isomorfismo $\varphi F : \varphi X \to \varphi Y$.

8.18. Proposición y definición en TEBP.

Para objeto-conjunto X, Y tales que $\varrho X = (r, \overline{M})$ y $\varrho Y = (s, \overline{N})$; se tiene:

a) Para cualquier *función* $X \xrightarrow{F} Y$ en el modelo existe un **único** morfismo $\varphi X \xrightarrow{\varphi F} \varphi Y$ tal que para todo $1 \xrightarrow{u} \varphi X$ el valor $F(r, (P_X \circ u / r))$ de $(r, (P_X \circ u / r))$ bajo F en el modelo es $(s, (P_Y \circ (\varphi F) \circ u / s))$.

b) φ es una correspondencia biunívoca entre las funciones $X \to Y$ en el modelo y los morfismos $\varphi X \to \varphi Y$.

Demostración. Sean ϱX y ϱY, los representantes de X y Y objetos-conjunto dados, por 8.6 puedo suponer que $\varrho X = (r, \overline{M})$ y $\varrho Y = (r, \overline{N})$, tienen el mismo objeto conj-tr $r : A \to \varrho A$.

I). Las relaciones $R \subset (X \times Y) \sim (\varrho X \times \varrho Y)$ están en correspondencia biunívoca α, con los $(A \pi A)$-conjuntos $\alpha R \subset \overline{M} \times \overline{N}$

Sea $R \subset X \times Y$ entonces (por 8.1 y 8.12.6) existe $\bar{K} \subset \langle -,- \rangle_A [\bar{M} \times \bar{N}]$ tal que $R \sim (88r, \bar{K})$

Sea $\alpha R := \langle -,- \rangle_A^{-1} [\bar{K}]$

P.D. $\alpha R \subset \bar{M} \times \bar{N}$

Como $\bar{K} \subset \langle -,- \rangle_A [\bar{M} \times \bar{N}]$ entonces (por 5.14) $\langle -,- \rangle_A^{-1} [\bar{K}] \subset \langle -,- \rangle_A^{-1} [\langle -,- \rangle_A [\bar{M} \times \bar{N}]]$
y (por 5.2.c y $\langle -,- \rangle_A$ mono) $\langle -,- \rangle_A^{-1} [\langle -,- \rangle_A [\bar{M} \times \bar{N}]] = \bar{M} \times \bar{N}$

$\therefore \alpha R \subset \bar{M} \times \bar{N}$

También se tiene que $R \sim (88r, \bar{K}) \sim (88r, \langle -,- \rangle_A [\alpha R])$
basta demostrar por 7.16. $\bar{K} = \langle -,- \rangle_A [\alpha R] = \langle -,- \rangle_A [\langle -,- \rangle_A^{-1} [\bar{K}]]$

$\supseteq$) $\langle -,- \rangle_A [\langle -,- \rangle_A^{-1} [\bar{K}]] \subset \bar{K}$ sii (por 5.1.a) $\langle -,- \rangle_A^{-1} [\bar{K}] \subset \langle -,- \rangle_A^{-1} [\bar{K}]$
que siempre es cierto

$\subseteq$) Sea $1 \xrightarrow{x} 88A \in_{88A} \bar{K} \subset \langle -,- \rangle_A [\bar{M} \times \bar{N}]$ PD. $x \in \langle -,- \rangle_A [\alpha R]$

$\therefore$ Existen $z : 1 \longrightarrow K$ y $z' : 1 \longrightarrow M \amalg N$ tales que $x = R \circ z$ y
$x = \langle -,- \rangle_A \circ (m \amalg n) \circ z'$, donde $m \amalg n \cong P_x \amalg P_y$ (ver 8.17)
en diagrama se tiene:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, dashed, "z''"] \arrow[rr, bend left, "(m\amalg n)\circ z'"] \arrow[dr, bend right, "z"'] & D \arrow[r, tail, "d"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \amalg A \arrow[r, tail, "\langle -,- \rangle_A"] \arrow[d, "\langle -,- \rangle_A"] & 88A \arrow[dd, "{\langle -,- \rangle_A [\langle -,- \rangle_A^{-1} [\bar{K}]]}"] \\
 & K \arrow[r, tail, "R"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & 88A \arrow[d, "\bar{K}"] & \\
 & 1 \arrow[r, tail, "v"] & \Omega \arrow[r, equal] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ (por ser P.F.) existe $1 \xrightarrow{z''} D$ tal que $d \circ z'' = (m \amalg n) \circ z'$

$\therefore$ $(\langle -,- \rangle_A \circ d) \circ z'' = \langle -,- \rangle_A \circ (m \amalg n) \circ z' = x$

$\therefore$ $x \in_{88A} \langle -,- \rangle_A [\langle -,- \rangle_A^{-1} [\bar{K}]] = \langle -,- \rangle_A [\alpha R]$

$\therefore$ $\bar{K} = \langle -,- \rangle_A [\alpha R]$

$\therefore$ $R \sim (88r, \langle -,- \rangle_A [\alpha R])$

PD α es inyectiva. Sean $R, R' \subset X \times Y$. tales que $\alpha R = \alpha R'$
entonces $\langle -,- \rangle_A [\alpha R] = \langle -,- \rangle_A [\alpha R']$
entonces (por lo anterior)

$R \sim (88r, \langle -,- \rangle_A [\alpha R]) \sim (88r, \langle -,- \rangle_A [\alpha R']) \sim R'$

$\therefore R \sim R'$

$\therefore$ α es inyectiva.

PD. α es sobre

Sea $\bar{L} \subset \bar{M}\times\bar{N}$ entonces (por 5.14) $\langle -,- \rangle_A[\bar{L}] \subset \langle -,- \rangle_A[\bar{M}\times\bar{N}]$

sea $R := (8Br, \langle -,- \rangle_A[\bar{L}])$, entonces

$$\alpha\bar{R} = \langle -,- \rangle_A^{-1}[\langle -,- \rangle_A[\bar{L}]] \underset{5.2.c}{=} \bar{L}$$

$\therefore$ α es biyectiva.

II) Existe una correspondencia biunívoca β, entre los $A\pi A$-conjuntos $\bar{G} \subset \bar{M}\times\bar{N}$ y los $(\varphi X \pi \varphi Y)$-conjuntos

Sea $\bar{G} \subset \bar{M}\times\bar{N}$, entonces $\beta\bar{G} := (P_x \pi P_y)^{-1}[\bar{G}]$, donde $\bar{M}\times\bar{N} = \chi_{P_x\pi P_y}$ (ver 8.17).

$\therefore$ $\beta\bar{G} : \varphi X \pi \varphi Y \longrightarrow \Omega$ (i.e. es un $\varphi X \pi \varphi Y$-conjunto)

PD. β es inyectiva.

Sean $\bar{G}$; $\bar{G'} \subset \bar{M}\times\bar{N}$ tales que $\beta\bar{G} = \beta\bar{G'}$ PD. $\bar{G} = \bar{G}'$

S) Sea $1 \xrightarrow{x} A\pi A \in_{A\pi A} \bar{G}$ y como $\bar{G} \subset \bar{M}\times\bar{N}$ entonces existen $1 \xrightarrow{z} G$ y $1 \xrightarrow{z'} \varphi X \pi \varphi Y$ tales que $g \circ z = x = (P_x \pi P_y)\circ z'$, donde $\bar{G} = \chi_{G \xrightarrow{g} A\pi A}$

En diagrama, se tiene:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, dashed, "z''"] \arrow[drr, bend left, "z'"] \arrow[ddr, bend right, "z"'] & & \\
& E \arrow[r, tail, "\varepsilon"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & \varphi X \pi \varphi Y \arrow[d, "P_x \pi P_y"] \\
& G \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & A\pi A \arrow[d, "\bar{G}"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

entonces (por ser P.F.) existe $1 \xrightarrow{z''} E$ tal que $\varepsilon\circ z'' = z'$

$$\therefore \quad \bar{G}\circ(P_x\pi P_y)\circ\varepsilon\circ z'' = \bar{G}\circ x = v$$

$$\begin{aligned}
&\quad \| \\
&(P_x\pi P_y)^{-1}[\bar{G}]\circ\varepsilon\circ z'' \\
&\quad \| \\
&(P_x\pi P_y)^{-1}[\bar{G}']\circ\varepsilon\circ z'' \\
&\quad \| \\
&\bar{G}'\circ(P_x\pi P_y)\circ\varepsilon\circ z'' \\
&\quad \| \\
&\bar{G}'\circ x
\end{aligned}$$

$\therefore$ $x \in_{A\pi A} \bar{G}'$

$\therefore$ $\bar{G} \subset \bar{G}'$

Análogamente $\bar{G}' \subset \bar{G}$

$\therefore$ $\bar{G} = \bar{G}'$

$\therefore$ β es inyectiva

PD. β es sobre Sea $\mathcal{P}X \,\pi\, \mathcal{P}Y \xrightarrow{\bar{L}} \Omega$

Sea $\bar{G} := (P_X \pi P_Y)[\bar{L}]$

$\bar{G} \subset \bar{M} \times \bar{N}$, pues si $x \in_{A\pi A} \bar{G}$ entonces existe $\cdot \xrightarrow{\ell} L$ tal que

$x = (P_X \pi P_Y) \circ \ell \circ y$ (pues $P_X \pi P_Y$ es mono por serlo P_X y P_Y)

$\therefore$ (pues $\bar{M} \times \bar{N} = \mathcal{X}_{P_X \pi P_Y}$) $x \in_{A\pi A} \bar{M} \times \bar{N}$

y $\beta\bar{G} := (P_X \pi P_Y)^{-1}[(P_X \pi P_Y)[\bar{L}]] \underset{5.2.c}{=} \bar{L}$

$\therefore$ β es biyección

III). $F \subset X \times Y$ es **función** sii
Para todo $(t, \bar{L}) \in X$ existe un único $(s, \bar{K}) \in Y$ tal que
$\langle (t, \bar{L}), (s, \bar{K}) \rangle \in F$

Por I) $F \sim (\mathcal{G}\mathcal{G}r, \langle -,- \rangle_A [\alpha F])$

IV) PD. $F \subset X \times Y$ es función sii Para toda $a \in_A \bar{M}$ existe una única $b \in_A \bar{N}$ tal que $\binom{a}{b} \in_{A\pi A} \alpha F$

si) PD. F es función

Sea $(t, \bar{L}) \in X$ (por 8.6 puedo suponer que $t = r$)

entonces (por 7.19) $\bar{L} \in_r \bar{M}$ i.e. existe $\cdot \xrightarrow{x} M$ tal que $(\bar{L}/r) = m \circ x$;

Como $m \circ x \in_A \bar{M}$ entonces existe una única $b \in_A \bar{N}$ tal que $\binom{m \circ x}{b} \in_{A\pi A} \alpha F$

Sea $\bar{K} := (b/r) : A \longrightarrow \Omega$

PD. $\langle (r, \bar{L}), (r, \bar{K}) \rangle \in F$

$\langle (r, \bar{L}), (r, \bar{K}) \rangle \underset{8.12.a}{\sim} (\mathcal{G}\mathcal{G}r, (\langle -,- \rangle_A \circ \binom{m \circ x}{b})/\mathcal{G}\mathcal{G}r))$

Por 7.19 basta demostrar que $(\langle -,- \rangle_A \circ \binom{m \circ x}{b})/\mathcal{G}\mathcal{G}r) \in_{\mathcal{G}\mathcal{G}r} \langle -,- \rangle_A [\alpha F]$

Como $\binom{m \circ x}{b} \in_{A\pi A} \alpha F$ entonces (por 7.8.b) $\langle -,- \rangle_A \binom{m \circ x}{b} \in_{\mathcal{P}A} \langle -,- \rangle_A [\alpha F]$

$\therefore$ $\langle (r, \bar{L}), (r, \bar{K}) \rangle \in F$

PD $(r, \bar{K})$ es única tal que $\langle (r, \bar{L}), (r, \bar{K}) \rangle \in F$

Suponer existe $(t, \bar{K}') \in Y$ (por 8.6 y 8.4.b puedo suponer que $t = r$ y $\bar{K}'$ es r-elemento) tal que $\langle (r, \bar{L}), (r, \bar{K}') \rangle \in F$

$$\langle (r,\bar{L}),(r,\bar{K}')\rangle \underset{8.12.a}{\sim} (88r_1\ (\langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{K}'/r)})/88r)) \in F$$

entonces (por 7.19 y 7.12) $\langle -,-\rangle_A \circ \binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{K}'/r)} \in_{88A} \langle -,-\rangle_A[\alpha F]$

entonces (por 7.8.b) $\binom{(\bar{L}/r)}{(\bar{K}'/r)} \in_{A\pi A} \alpha F$ pero $(\bar{L}/r) = m \circ x$

entonces (por unicidad de b) $(\bar{K}'/r) = b$

$\therefore$ $\bar{K}' = (b/r) = \bar{K}$

$\therefore$ $(r,\bar{K}') = (r,\bar{K})$

$\therefore$ F es función

<u>sólo si</u>) Sea $F \subset X \times Y$ función, $F \sim (88r_1 \langle -,-\rangle_A[\alpha F])$

Sea $a \in_A \bar{M}$ entonces $(r,(a/r)) \in X$

entonces existe un único $(r,\bar{K}) \in Y$ tal que $\langle (r,(a/r)),(r,\bar{K})\rangle \in F$

$\therefore$ $\langle (r,(a/r)),(r,\bar{K})\rangle \underset{8.12.a}{\sim} (88r_1 (\langle -,-\rangle_A \circ \binom{a}{(\bar{K}/r)})/88r))$

y $(\bar{K}/r) \in_A \bar{N}$

entonces (por 7.8.b) $\binom{a}{(\bar{K}/r)} \in_{A\pi A} \alpha F$.

y $(\bar{K}/r)$ es única porque si existiera $1 \xrightarrow{y} A \in_A \bar{N}$ tal que $\binom{a}{y} \in \alpha F$ entonces

$$\langle (r,(a/r)),(r,(y/r))\rangle \sim (88r_1\ (\langle -,-\rangle_A \circ \binom{a}{y})/88r)) \in F$$

entonces (por ser F función) $y = (\bar{K}/r)$.

V). PD. (Para todo $a \in_A \bar{M}$ existe un único $b \in_A \bar{N}$ tal que $\binom{a}{b} \in_{A\pi A} \alpha F$)

sii (Para todo $1 \xrightarrow{u} \varphi X$ existe un único $1 \xrightarrow{w} \varphi Y$ tal que $\binom{u}{w} \in_{\varphi X \pi \varphi Y} \beta\alpha F$)

<u>si</u>)

Sea $a \in_A \bar{M}$ entonces existe $u: 1 \to \varphi X$ tal que $a = P_X \circ u$

entonces existe un único $w: 1 \to \varphi Y$ tal que $\binom{u}{w} \in_{\varphi X \pi \varphi Y} \beta\alpha F := (P_X \pi P_Y)^{\to}[\alpha F]$

entonces (por 7.8.a) $\binom{a}{P_Y \circ w} = \binom{P_X \circ u}{P_Y \circ w} = (P_X \pi P_Y) \circ \binom{u}{w} \in_{A\pi A} \alpha F$

PD $P_Y \circ w$ es única tal que $\binom{a}{P_Y \circ w} \in_{A\pi A} \alpha F$

Si existe $b \in_A \bar{N}$ tal que $\binom{a}{b} \in_{A\pi A} \alpha F$

entonces existe $z: 1 \to P_Y$ tal que $b = P_Y \circ z$ (pues $\bar{N} = \chi_{P_Y}$)

entonces $\binom{a}{b} = \binom{P_X \circ u}{P_Y \circ z} = (P_X \pi P_Y) \circ \binom{u}{z} \in_{A\pi A} \alpha F$

entonces (por 7.8.a) $\binom{u}{z} \in_{\varphi X \pi \varphi Y} (p_X \pi p_Y)^{-1}[\alpha F] = \beta\alpha F$
entonces (por unicidad de y) $z = \underline{u}$

<u>sólo si</u>) Sea $u : 1 \to \varphi X$ entonces $p_X \circ u \in_A \bar{M}$ entonces existe un único $b \in_A \bar{N}$ (i.e. un único $w : 1 \to \varphi Y$, $b = p_Y \circ w$) tal que

$\binom{a}{b} \in_{A \pi A} \alpha F$

entonces $\binom{a}{b} = \binom{p_X \circ u}{p_Y \circ w} = (p_X \pi p_Y) \circ \binom{u}{w} \in_{A \pi A} \alpha F$

entonces (por 7.8.a) $\binom{u}{w} \in (p_X \pi p_Y)^{-1}[\alpha F]$ y por lo anterior w es única

VI) PD. Existe una correspondencia biunívoca γ entre

$$\{ \varphi X \xrightarrow{f} \varphi Y \ / \ f \text{ es morfismo} \} \xleftrightarrow{\gamma} \{ \gamma_f : \varphi X \pi \varphi Y \to \Omega \ / \ \text{Para toda } 1 \xrightarrow{u} \varphi X \text{ existe una única } 1 \xrightarrow{w} \varphi Y \text{ tal que } \tbinom{u}{w} \in_{\varphi X \pi \varphi Y} \gamma_f \} =:$$

Sea $f : \varphi X \to \varphi Y$ entonces $\gamma_f := \chi_{\binom{1d_{\varphi X}}{f}} : \varphi X \pi \varphi Y \to \Omega$

$\binom{1d_{\varphi X}}{f}$ es mono pues $1d_{\varphi X}$ lo es.

PD. γ_f tiene la propiedad requerida

Sea $1 \xrightarrow{u} \varphi X$ tomo $w := f \circ u$

$\binom{u}{f \circ u} = \binom{1d_{\varphi X}}{f} \circ u \qquad \therefore \ \binom{u}{w} \in_{\varphi X \pi \varphi Y} \gamma_f$

PD w es única.

Suponer existe $w' : 1 \to \varphi Y$ tal que $\binom{u}{w'} \in_{\varphi X \pi \varphi Y} \gamma_f$

entonces existe $1 \xrightarrow{z} \varphi X$ tal que $\binom{u}{w'} = \binom{1d_{\varphi X}}{f} \circ z = \binom{z}{f \circ z}$
entonces $z = u$ y $w' = f \circ z = f \circ u = w$

PD. γ es inyectiva.

Sean $f, g : \varphi X \to \varphi Y$ tal que $\gamma f = \gamma g$

entonces $\chi_{\binom{1d_{\varphi X}}{f}} = \chi_{\binom{1d_{\varphi X}}{g}}$

entonces existe $\lambda : \varphi X \to \varphi Y$ isomorfismo tal que $\binom{1d_{\varphi X}}{f} \circ \lambda = \binom{1d_{\varphi X}}{g}$

entonces $\lambda = 1d_{\varphi X} \circ \lambda = 1d_{\varphi X}$ y $f \circ \lambda = g$

$\therefore f = g$

$\therefore \gamma$ es inyectiva

PD. γ es sobre

Sea $\bar{M}: \varphi X \pi \varphi Y \longrightarrow \Omega$ tal que para todo $1 \xrightarrow{u} \varphi X$ existe un único $1 \xrightarrow{w} \varphi Y$ tal que $\binom{u}{w} \in_{\varphi X \pi \varphi Y} \bar{M}$.

Como $\bar{M}: \varphi X \pi \varphi Y \longrightarrow \Omega$ entonces existe un único morfismo $g: \varphi X \longrightarrow \mathcal{P}\varphi Y$ tal que $\bar{M} = (g \,\pi\, 1d_{\varphi Y})^{-1}[e_{\varphi Y}]$

PD. $\chi_{\{-\}_{\varphi Y}} \circ g = v_{\varphi X}$, donde $\{-\}_{\varphi Y}$ es el definido en 8.10

$\chi_{\{-\}_{\varphi Y}} \circ g,\ v_{\varphi X}: \varphi X \to \Omega$, pero $v_{\varphi X} = 1(\varphi X)$

$$\chi_{\{-\}_{\varphi Y}} \circ g = g^{-1}[\chi_{\{-\}_{\varphi Y}}] \underset{7.8.a}{=} \left\{ x \underset{\varphi X}{/} g \circ x \in_{\mathcal{P}\varphi Y} \chi_{\{-\}_{\varphi Y}} \right\}$$

PD. $\chi_{\{-\}_{\varphi Y}} \circ g = 1(\varphi X)$

$\subseteq$) por 7.4

$\supseteq$) Sea $1 \xrightarrow{u} \varphi X$ PD. $u \in_{\varphi X} g^{-1}[\chi_{\{-\}_{\varphi Y}}]$

entonces (por hipótesis) existe $1 \xrightarrow{w} \varphi Y$ tal que $\binom{u}{w} \in_{\varphi X \pi \varphi Y} \bar{M}$

entonces
$$\begin{aligned} v = \bar{M} \circ \binom{u}{w} &= ((g \,\pi\, 1d_{\varphi Y})^{-1}[e_{\varphi Y}]) \circ \binom{u}{w} \\ &= e_{\varphi Y} \circ (g \,\pi\, 1d_{\varphi Y}) \circ \binom{u}{w} \\ &= e_{\varphi Y} \circ \binom{g \circ u}{w} \end{aligned}$$

$\therefore$ $\binom{g \circ u}{w} \in_{\mathcal{P}\varphi Y \pi \varphi Y} e_{\varphi Y} \underset{7.11}{=} \left\{ \binom{\bar{L}e}{z} \underset{\mathcal{P}\varphi Y \pi \varphi Y}{/} \bar{L} \text{ es un } \varphi Y\text{-conjunto y } z \in_{\varphi Y} \bar{L} \right\}$

$\therefore$ existe $\bar{N}: \varphi Y \to \Omega$ tal que $\bar{N}e = g \circ u$ y $w \in_{\varphi Y} \bar{N}$

PD $\bar{N} = \{w\}_{\varphi Y} \underset{7.7}{=} \{z \underset{\varphi Y}{/} z = w\}$

$\supseteq$) pues $w \in_{\varphi Y} \bar{N}$

$\subseteq$) sea $1 \xrightarrow{z} \varphi Y \in_{\varphi Y} \bar{N}$, como $\bar{N}e = g \circ u$ entonces

$$((g \circ u) \pi\, 1d_{\varphi Y})^{-1}[e_{\varphi Y}] = \pi_{1,\varphi Y}^{)-1}[\bar{N}]$$

$$\bar{M} \circ \binom{u}{z} = e_{\varphi Y} \circ (g \,\pi\, 1d_{\varphi Y}) \circ \binom{u}{z} = e_{\varphi Y} \circ \binom{gu}{z} = v \quad \text{pues } z \in_{\varphi Y} \bar{N} \text{ y } \bar{N}e = g \circ u$$

$\therefore$ (por unicidad de w)

$z = w$

$\therefore$ $z \in_{\varphi Y} \{w\}_{\varphi Y}$

$\therefore\ \bar{N} = \{\omega\}_{\varphi Y}$

$\therefore\ g\circ u = \bar{N}_e = \{\omega\}_e \underset{3.10}{=} \{1-t_{\varphi Y}\}\circ\omega$

$\therefore\ g\circ u \in_{\varphi Y} \chi_{1-t_{\varphi Y}}$

entonces (por 7.8.a) $u \in_{\varphi X} g^{-1}[\chi_{1-t_{\varphi Y}}]$

$\therefore\ g^{-1}[\chi_{1-t_{\varphi Y}}] = 1(\varphi X) = v_{\varphi X}$

En diagrama, se tiene:

$$\begin{tikzcd}
\varphi X \arrow[dr, dashed, "\xi"] \arrow[drr, bend left, "\exists"] \arrow[ddr, bend right, dashed] & & \\
& \varphi Y \arrow[r, "1-t_{\varphi Y}"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \varphi\varphi Y \arrow[d, "\chi_{1-t_{\varphi Y}}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ existe una única $\xi:\varphi X\to\varphi Y$ tal que $1-t_{\varphi Y}\circ\xi = g$

PD $\gamma_\xi = \bar{M}$

donde $\gamma_\xi = \chi_{\binom{\mathrm{Id}_{\varphi X}}{\xi}}$

$$\bar{M} = (g\,\pi\,\mathrm{Id}_{\varphi Y})^{-1}[e_{\varphi Y}] = ((1-t_{\varphi Y}\circ\xi)\,\pi\,\mathrm{Id}_{\varphi Y})^{-1}[e_{\varphi Y}]$$

$$= ((1-t_{\varphi Y}\,\pi\,\mathrm{Id}_{\varphi Y})\circ(\xi\,\pi\,\mathrm{Id}_{\varphi Y}))^{-1}[e_{\varphi Y}]$$

$$\underset{5.2.a}{=} (\xi\,\pi\,\mathrm{Id}_{\varphi Y})^{-1}\left[(1-t_{\varphi Y}\,\pi\,\mathrm{Id}_{\varphi Y})^{-1}[e_{\varphi Y}]\right] = (\xi\,\pi\,\mathrm{Id}_Y)^{-1}[\delta_{\varphi Y}]$$

PD
$$\begin{tikzcd}
\varphi X \arrow[r, "\binom{\mathrm{Id}_{\varphi X}}{\xi}"] \arrow[d, "\xi"'] & \varphi X\,\pi\,\varphi Y \arrow[d, "\xi\,\pi\,\mathrm{Id}_{\varphi Y}"] \\
\varphi Y \arrow[r, "\binom{\mathrm{Id}_{\varphi Y}}{\mathrm{Id}_{\varphi Y}}"'] & \varphi Y\,\pi\,\varphi Y
\end{tikzcd}$$
es P.F.

Conmuta pues $\binom{\mathrm{Id}_{\varphi Y}}{\mathrm{Id}_{\varphi Y}}\circ\xi = \binom{\xi}{\xi} = (\xi\,\pi\,\mathrm{Id}_Y)\circ\binom{\mathrm{Id}_{\varphi X}}{\xi}$

Sean $\alpha: C\longrightarrow\varphi Y$ y $\binom{\beta_1}{\beta_2}: C\longrightarrow \varphi X\,\pi\,\varphi Y$ tales que
$\binom{\alpha}{\alpha} = \binom{\mathrm{Id}_{\varphi Y}}{\mathrm{Id}_{\varphi Y}}\circ\alpha = \binom{\xi\circ\beta_1}{\beta_2}$

$\therefore\ \beta_1 : C \longrightarrow \varphi X$ y $f\circ\beta_1 = x$ $\therefore \begin{pmatrix} id_{\varphi X} \\ f \end{pmatrix}\circ\beta_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ f\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$
y β_1 es única por ser $\begin{pmatrix} id_{\varphi X} \\ f \end{pmatrix}$ mono

$\therefore$ es P.F.

$$\therefore\quad \begin{tikzcd} \varphi X \arrow[r, "\begin{pmatrix} id_{\varphi X} \\ f \end{pmatrix}"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & \varphi X \,\pi\, \varphi Y \arrow[d, "f \,\pi\, id_{\varphi Y}"] \\ \varphi Y \arrow[r, "\begin{pmatrix} id_{\varphi Y} \\ id_{\varphi Y} \end{pmatrix}"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & \varphi Y \,\pi\, \varphi Y \arrow[d, "\delta_{\varphi Y}"] \\ 1 \arrow[r, tail, "T"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

i.e. $\delta_{\varphi Y}\circ(f \,\pi\, id_{\varphi Y}) = \chi_{\begin{pmatrix} id_{\varphi X} \\ f \end{pmatrix}} = \gamma f$

$\therefore\ \bar{\mu} = \gamma_f$ $\qquad\qquad \therefore\ \gamma$ es sobre

$\therefore\ \gamma$ es biyectiva

Ahora juntando todo, obtenemos lo deseado:
Sea $X \xrightarrow{F} Y$ función entonces (por IV y V), $\beta\alpha F : \varphi X \,\pi\, \varphi Y \longrightarrow \Omega$
pertenece a $\mathfrak{I}$
entonces (por VI) existe $\varphi F : \varphi X \longrightarrow \varphi Y$ tal que $\gamma(\varphi F) = \beta\alpha F$
PD. φF satisface o:
i.e. φF es el único morfismo tal que para toda $1 \xrightarrow{u} \varphi X$ el valor $F(r, (P_X\circ u/r))$ bajo F en el modelo es $(r, (P_Y\circ\varphi F\circ u/r))$.

Sea $1 \xrightarrow{u} \varphi X$ entonces (como $\beta\alpha F \in \mathfrak{I}$) existe un único $1 \xrightarrow{w} \varphi Y$ tal que $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \in_{\varphi X \pi \varphi Y} \beta\alpha F = (P_X \,\pi\, P_Y)^{-1}[\alpha F]$ donde $w = \varphi F\circ u$ (ver VI)

entonces (por 7.8.a) $(P_X \,\pi\, P_Y)\circ\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_X\circ u \\ P_Y\circ\varphi F\circ u \end{pmatrix} \in_{A\pi A} \alpha F$

entonces (por V, IV)
$(\forall\forall r,\ (\langle -,- \rangle_A \circ \begin{pmatrix} P_X\circ u \\ P_Y\circ\varphi F\circ u \end{pmatrix}/\forall\forall r)) \sim \langle (r, (P_X\circ u/r)), (r, (P_Y\circ\varphi F\circ u/r)) \rangle \in F$
En otras palabras
$F((r, (P_X\circ u/r))) = (r, (P_Y\circ\varphi F\circ u/r))$ con $1 \xrightarrow{u} \varphi X$

PD. φF es única.
Si existiera $g : \varphi X \longrightarrow \varphi Y$ tal que para toda $1 \xrightarrow{u} \varphi X$
$F((r, (P_X\circ u/r))) = (r, (P_Y\circ g\circ u/r))$ y $g \neq \varphi F$

entonces (por (G):1 genera) existe $1 \xrightarrow{z} \varphi X$ tal que $g \circ z \neq \varphi F \circ z$

entonces (por lo anterior) $\binom{z}{g \circ z} \in_{\varphi X \pi \varphi Y} \beta\alpha F$ y $\binom{z}{\varphi F \circ z} \in_{\varphi X \pi \varphi Y} \beta\alpha F$

entonces (por la unicidad de $\varphi F \circ z$) $g \circ z = \varphi F \circ z$ $\not\!\!\!\;\;$ ($g \circ z \neq \varphi F \circ z$)

$\therefore$ $g = \varphi F$.

b) PD. φ es una correspondencia biunívoca entre las funciones $X \longrightarrow Y$ en el modelo y los morfismos $\varphi X \longrightarrow \varphi Y$.

Ésto es consecuencia de todo lo anterior:

Si $X \xrightarrow{F} Y$ es una función, entonces $\varphi X \xrightarrow{\varphi F} \varphi Y$ es tal que $\gamma \varphi F = \beta\alpha F$ y $(\mathcal{8}\mathcal{8}r, \langle -,- \rangle_A [(P_X \pi P_Y)[\gamma \varphi F]]) \sim F$.

Y si $\varphi X \xrightarrow{\xi} \varphi Y$ es un morfismo, entonces $(\mathcal{8}\mathcal{8}r, \langle -,- \rangle_A [(P_X \pi P_Y)[\gamma\xi]] := F$ es una función de X en Y tal que $\varphi F = \xi$, en realidad se aplicó β^{-1} y α^{-1}.

Con lo que se tiene la biyección. $\square$.

<u>Observación de 8.18.</u>

Sea $X \xrightarrow{F} Y$ una función entre objetos-conjunto, entonces:

a) F es monomorfismo sii φF lo es

b) F es epimorfismo sii φF lo es.

<u>Demostración</u>

Sean $X = (r, \bar{R})$, $Y = (s, \bar{N})$

<u>si</u>) Sea φF un monomorfismo.

Por 7.18. Sean $1 \overset{u}{\underset{w}{\rightrightarrows}} \varphi X$ tales que $F(r, (P_X \circ u / r)) \sim F(r, (P_X \circ w / r))$

entonces (por 8.18) $(s, (P_Y \circ \varphi F \circ u / s)) \sim (s, (P_Y \circ \varphi F \circ w / s))$

entonces (por 7.16 y 7.11) $P_Y \circ \varphi F \circ u = P_Y \circ \varphi F \circ w$

entonces (por ser $P_Y \circ \varphi F$ mono) $u = w$ $\therefore$ $(r, (P_X \circ u / r)) \sim (r, (P_X \circ w / r))$

$\therefore$ F es mono.

<u>sólo si</u>) Sea F mono y sean $1 \overset{u}{\underset{w}{\rightrightarrows}} \varphi X$ elementos tales que $\varphi F \circ u = \varphi F \circ w$

entonces $P_Y \circ \varphi F \circ u = P_Y \circ \varphi F \circ w$

entonces
$$\begin{array}{ccc} (s, (P_Y \circ \varphi F \circ u / s)) & \sim & (s, (P_Y \circ \varphi F \circ w / s)) \\ \wr & & \wr \\ F(r, (P_X \circ u / r)) & & F(r, (P_X \circ w / r)) \end{array}$$

entonces (por ser F mono)

$(r, (P_X \circ u / r)) \sim (r, (P_X \circ w / r))$

entonces (por 7.16 y 7.11) $P_X \circ u = P_X \circ w$

entonces (por ser P_X mono) $u = w$

$\therefore$ φF es mono

b) $X \xrightarrow{F} Y$ una función. PD F es epi sii φF lo es

si) Sea φF epi.

Sea $1 \xrightarrow{y} Y$ un Y-elemento

entonces (por 8.18.b) $\varphi y : \varphi 1 \longrightarrow \varphi Y$

Como se verá en 8.19 $\varphi 1 \cong 1$

entonces (por ser φF epi y por 8.18.b) existe $1 \xrightarrow{x} X$ tal que

$\varphi(F\circ x) = \varphi F \circ \varphi x = \varphi y$

entonces (por ser φ fiel, ver 8.19) $F \circ x = y$

$\therefore$ F es epi

sólo si) Sea F epi. Como $\varphi 1 \cong 1$, sea $\varphi 1 \xrightarrow{\varphi y} \varphi Y$ tal que $1 \xrightarrow{y} Y$

entonces (por ser F epi) existe $1 \xrightarrow{x} X$ tal que $F \circ x = y$

entonces $\varphi F \circ \varphi x = \varphi(F \circ x) = \varphi y$, donde $\varphi x : \varphi 1 \longrightarrow \varphi X$

$\therefore$ φF es epi $\square$.

Nota: El inciso b) de esta observación utiliza cosas que vienen posteriormente, pero para la demostración de éstas no se utiliza este inciso.

8.19. Teorema en TEBP.

El operador φ es un "funtor" del topo de los conjuntos en el modelo a el topo en el que estamos trabajando, el cuál es pleno, fiel y lógico (i.e. preserva la estructura de topo), y la "imagen" de φ es equivalente al subtopo de todo los objetos parcialmente transitivos.

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ el topo de los conjuntos en el modelo y $\mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} \underline{E}$ el funtor tal que si $X = (r, \bar{M})$ es un objeto de $\mathcal{M}$, entonces φX es un $\underline{E}$-objeto tal que

$$\begin{tikzcd} \varphi X \arrow[r, "P_X"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \arrow[d, "\bar{M}"] \\ 1 \arrow[r, "v"] & \Omega \end{tikzcd}$$

donde $\bar{M} = \chi_{M \rightarrowtail A}$

Si $X \xrightarrow{F} Y$ es un morfismo en $\mathcal{M}$ entonces $\varphi F : \varphi X \longrightarrow \varphi Y$ el morfismo definido en 8.18.a.

1º. PD. φ es funtor.

a) PD. $\varphi(X \xrightarrow{1_X} X) = \mathrm{Id}_{\varphi X}$

Como $1_X \subset X \times X$ es una función entonces (por 8.18.a) existe un único morfismo $\varphi 1_X : \varphi X \longrightarrow \varphi X$ tal que para todo $1 \xrightarrow{u} \varphi X$

$$(r,(P_X \circ u/r)) \sim 1_X(r,(P_X \circ u/r)) \sim (r,(P_X \circ \varphi 1_X \circ u/r))$$

entonces $P_X \circ u = P_X \circ \varphi 1_X \circ u$, para todo $1 \xrightarrow{u} \varphi X$

entonces (por ser P_X mono) $u = \varphi 1_X \circ u$, para todo $1 \xrightarrow{u} \varphi X$

$\therefore \quad Id_{\varphi X} \circ u = u = \varphi 1_X \circ u \quad$ para todo $1 \xrightarrow{u} \varphi X$

entonces (por la unicidad de $\varphi 1_X$) $\quad Id_{\varphi X} = \varphi 1_X$

b) Sean $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} Z$ funciones en $\mathcal{M}$, donde $X = (r, \bar{N})$ $Y = (s, \bar{N})$ y $Z = (t, \bar{L})$.

PD. $\varphi(GF) = \varphi G \circ \varphi F$.

Por 8.18.a para todo $1 \xrightarrow{u} \varphi X$

$$(G \circ F)(r, (P_X \circ u / r)) = (t, (P_Z \circ \varphi(GF) \circ u / t))$$

$$\| $$

$$G(F(r, (P_X \circ u / r)) = G(s, (P_Y \circ \varphi F \circ u / s)) \quad \text{donde } 1 \xrightarrow{\varphi F \circ u} \varphi Y$$

$$= (t, (P_Z \circ \varphi G \circ \varphi F \circ u / t))$$

Análogamente como en a), por la unicidad de $\varphi(GF)$ se tiene que $\varphi(GF) = \varphi G \circ \varphi F$.

$\therefore \varphi$ es funtor.

2º PD. φ es funtor fiel.

Sean X y Y objetos-conjunto y $F, G : X \longrightarrow Y$ funciones tales que $\varphi F = \varphi G$, entonces (por 8.18.b) $F = G$

$\therefore \varphi$ es fiel.

3º PD. φ es funtor pleno.

PD. Si $X, Y \in O(\mathcal{M})$ y $g : \varphi X \longrightarrow \varphi Y$ morfismo en $\underline{E}$ entonces existe $F : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{M}$ tal que $g = \varphi F$.

Pero ésto es parte de lo que dice 8.18.b.

$\therefore \varphi$ es funtor pleno.

4º PD. φ es un funtor lógico.(ie. preserva objeto terminal, igualadores, productos binarios, exponenciaciones y clasificador de subobjetos). En otras palabras preserva la estructura de Topos.

a) PD. $\varphi 1$ es el objeto terminal en $\underline{E}$, donde se recuerda que $1 := \{\phi\}$ y como $\phi := (0 \xrightarrow{\phi_0} \wp 0, \bar{\phi}) \underset{8.4.b}{\sim} (\wp\phi_0, \phi_0[\bar{\phi}])$

entonces (por 8.4.c) $\quad \{\phi\} \sim (\wp\phi_0, \{(\phi_0[\bar{\phi}] / \wp\phi_0)\})$ y

$(\phi_0[\bar{\phi}] / \wp\phi_0) \underset{8.4.b}{=} \bar{\phi}_e$

Como $\bar{\phi} := \mathcal{X}_{1d_0}$ y $\wp 0 \cong 1$ entonces $1 \xrightarrow{\bar{\phi}_e} 1 = 1 \xrightarrow{1d_1} 1$

$\therefore \quad \{\bar{\phi}_e\} = \mathcal{X}_{1d_1} = v$

$\therefore$ (por observación 8.17) $\varphi 1 = \varphi\{\phi\} \cong 1$

b). PD. $\varphi\Omega$ es el clasificador de subobjetos en $\underline{E}$.

$$\Omega := \{\phi, \{\phi\}\} \underset{8.4}{\simeq} (\wp\wp\phi_0, \{\wp\phi_0 \circ \bar{\phi}_e, \{\bar{\phi}_e\}_e\})$$

Como $\wp\wp\phi_0 : \wp\wp 0 \longrightarrow \wp\wp\wp 0$ y $\wp\wp 0 \cong \Omega$
entonces (por observación 8.14) $\varphi\Omega \simeq \Omega$
y por a) como $\varphi 1 \cong 1$, entonces se tiene que $\varphi(1 \xrightarrow{v} \Omega)$ es isomorfo a $1 \xrightarrow{v} \Omega$.
$\therefore$ $(\varphi\Omega, \varphi v)$ es el clasificador de subobjetos en $\underline{E}$.

c) PD. φ preserva igualadores.
Sean $X \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} Y$ funciones en $\mathcal{M}$ y $(E, E \xrightarrow{e} X)$ el igualador de F y G.
PD. $(\varphi E, \varphi e)$ es el igualador de $(\varphi F, \varphi G)$.

Como φ es funtor entonces $\varphi F \circ \varphi e = \varphi(F \circ e) = \varphi(G \circ e) = \varphi G \circ \varphi e$
Sea (E', e') el igualador en $\underline{E}$ de $(\varphi F, \varphi G)$. Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, tail, "e'"] & \varphi X \arrow[r, shift left, "\varphi F"] \arrow[r, shift right, "\varphi G"'] & \varphi Y \\ & \varphi E \arrow[u, "\varphi e"'] \arrow[ul, dashed, "\lambda"] & \end{tikzcd}$$

conmuta

entonces existe un único morfismo $\varphi E \xrightarrow{\lambda} E'$ tal que $e' \circ \lambda = \varphi e$
$\therefore$ $e' \circ \lambda, \varphi e : \varphi E \longrightarrow \varphi X$
Por observación 8.18.a, φe es un monomorfismo, entonces λ es monomorfismo.
Basta demostrar que λ es epi.
PD. (por 3.13.b) Si $1 \xrightarrow{y} E'$ entonces existe $1 \xrightarrow{x} \varphi E$ tal que $\lambda \circ x = y$.
Por a) Como $\varphi 1 \cong 1$ podemos trabajar con $\varphi 1$

Sea $\varphi 1 \xrightarrow{y} E'$ un E'-elemento, entonces $\varphi 1 \xrightarrow{e' \circ y} \varphi X$ es tal que $\varphi F \circ (e' \circ y) = \varphi G \circ (e' \circ y)$ y como φ es funtor pleno y fiel existe una única función $\gamma : 1 \longrightarrow X$ en $\mathcal{M}$ tal que $\varphi\gamma = e' \circ y$

Como Ψ es funtor, se tiene que $\Psi(F\circ\gamma) = \Psi(G\circ\gamma)$

$\therefore$ (por ser Ψ fiel) $F\circ\gamma = G\circ\gamma$

entonces (por ser $(E,e) = Eq(F,G)$) existe una única función

$1 \xrightarrow{\alpha} E$ en $\mathcal{M}$ tal que $e\circ\alpha = \gamma$.

$\therefore$ $\Psi e\circ\Psi\alpha = \Psi(e\circ\alpha) = \Psi\gamma = e'\circ y$

$\therefore$ (por ser $\Psi e = e'\circ\lambda$ y e' mono) $\lambda\circ\alpha = y$

$\therefore$ λ es epi. y $e'\circ\lambda = \Psi e$

$\therefore$ $(\Psi E, \Psi e)$ es el igualador de $(\Psi F, \Psi G)$ en $\underline{E}$

d) PD. Ψ preserva productos binarios.

Sean $X = (r, \bar{M})$ y $Y = (s, \bar{N})$ objeto-conjunto.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $s = r$ y $A \xrightarrow{r} \wp A$.

PD. $\Psi(X\times Y) \cong \Psi X \,\pi\, \Psi Y$

Por 8.12. $X\times Y \sim (\wp\wp r, \langle -,-\rangle_A[\bar{M}\times\bar{N}])$

Entonces se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Psi(X\times Y) \arrow[r, "P_{X\times Y}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \wp\wp A \arrow[d, "{\langle -,-\rangle_A[\bar{M}\times\bar{N}]}"] \\
1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Pero como $\bar{M}\times\bar{N} = \chi_{P_X \pi P_Y}$, entonces:

$$\begin{tikzcd}
\Psi X \,\pi\, \Psi Y \arrow[r, tail, "P_X \pi P_Y"] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \,\pi\, A \arrow[r, tail, "{\langle -,-\rangle_A}"] & \wp\wp A \arrow[d, "{\langle -,-\rangle_A[\bar{M}\times\bar{N}]}"] \\
1 \arrow[rr, tail, "v"'] & & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ $\Psi(X\times Y) \cong \Psi X \,\pi\, \Psi Y$

e) PD. Ψ preserva exponenciaciones.

Sean $X = (r, \bar{M})$ y $Y = (s, \bar{N})$ objeto-conjunto.

PD $\Psi(Y^X) \cong \Psi Y^{\Psi X}$ y $\Psi(e(X,Y)) \cong e(\Psi X, \Psi Y)$

Por d) se tiene que $\Psi(Y^X\times X) \cong \Psi(Y^X)\,\pi\,\Psi X$

Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\Psi Y^{\Psi X}\,\pi\,\Psi X \arrow[r, "{e(\Psi X,\Psi Y)}"] & \Psi Y \\
\Psi(Y^X)\,\pi\,\Psi X \arrow[u, "\lambda\,\pi\,1d_{\Psi X}"] \arrow[ur, "{\Psi e(X,Y)}"']
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ Existe un único morfismo $\varphi(Y^X) \xrightarrow{\lambda} \varphi Y^{\varphi X}$ tal que $e(\varphi X, \varphi Y)\circ(\lambda \,\pi\, \mathrm{Id}_{\varphi X}) = \varphi e(X,Y)$

PD. λ es isomorfismo

PD. λ es mono. Por a) se usará $\varphi 1$ en lugar de 1.

Como φ es pleno, sean $\varphi 1 \overset{\varphi x}{\underset{\varphi x'}{\rightrightarrows}} \varphi(Y^X)$ $\varphi(Y^X)$-elementos tales que $\lambda\circ\varphi x = \lambda\circ\varphi x'$, donde $1 \overset{x}{\underset{x'}{\rightrightarrows}} Y^X$

$$\therefore\quad e(\varphi X,\varphi Y)\circ((\lambda\circ\varphi x)\,\pi\, \mathrm{Id}_{\varphi X}) = e(\varphi X,\varphi Y)\circ((\lambda\circ\varphi x')\,\pi\, \mathrm{Id}_{\varphi X})$$

$$\therefore\quad \varphi e(X,Y)\circ(\varphi x\,\pi\,\mathrm{Id}_{\varphi X}) = \varphi e(X,Y)\circ(\varphi x'\,\pi\,\mathrm{Id}_{\varphi X})$$

Como φ es funtor.

$$\varphi e(X,Y)\circ(x\,\pi\,1_X) = \varphi e(X,Y)\circ(x'\,\pi\,1_X)$$

entonces (por ser φ fiel) $e(X,Y)\circ(x\,\pi\,1_X) = e(X,Y)\circ(x'\,\pi\,1_X)$

$\therefore$ (propiedad universal de la exponenciación) $x = x'$

$\therefore$ $\varphi x = \varphi x'$

$\therefore$ λ es mono.

PD. λ es epi.

Sea $\varphi 1 \xrightarrow{y} \varphi Y^{\varphi X}$ un $\varphi Y^{\varphi X}$- elemento.

PD existe $\varphi 1 \xrightarrow{\varphi x} \varphi(Y^X)$ tal que $\lambda\circ\varphi x = y$

Como $e(\varphi X,\varphi Y)\circ(y\,\pi\,\mathrm{Id}_{\varphi X}) : \varphi 1\,\pi\,\varphi X \simeq \varphi(1\,\pi\,X) \longrightarrow \varphi Y$ entonces (por ser φ pleno) existe $1\times X \xrightarrow{\gamma} Y$ en $\mathcal{M}$ Tal que $\varphi\gamma = e(\varphi X,\varphi Y)\circ(y\,\pi\,\mathrm{Id}_{\varphi X})$.

Entonces (por propiedad universal de la exponenciación) existe una única función $1 \xrightarrow{x} Y^X$ tal que el diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
Y^X\times X \arrow[r, "e(X,Y)"] & Y \\
1\times X \arrow[u, "x\times 1_X"] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\therefore\quad \varphi(e(X,Y)\circ(x\times 1_X)) = \varphi e(X,Y)\circ(\varphi x\,\pi\,\mathrm{Id}_{\varphi X}) = \varphi\gamma$$

$$\therefore\quad e(\varphi X,\varphi Y)\circ(\lambda\,\pi\,\mathrm{Id}_{\varphi X})\circ(\varphi x\,\pi\,\mathrm{Id}_{\varphi X}) = \varphi\gamma = e(\varphi X,\varphi Y)\circ(y\,\pi\,\mathrm{Id}_{\varphi X})$$

$\therefore$ (por propiedad universal) $\lambda\circ\varphi x = y$

$\therefore$ λ es epi.

$$\therefore\quad \varphi(Y^X) \cong \varphi Y^{\varphi X} \quad y \quad \varphi e(X,Y) \cong e(\varphi X,\varphi Y).$$

$\therefore$ φ es un funtor lógico.

5º La "imagen" de φ es equivalente al subtopo de todos los objetos parcialmente transitivo (salvo isomorfismos), ver §6.

Si $X = (A \xrightarrow{r} \wp A, \bar{M})$ es un objeto-conjunto, por definición de φ.

$$\begin{tikzcd} \varphi X \arrow[r, tail, "p_x"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \arrow[d, "\bar{M}"] \\ 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

$\therefore$ φX es p. tr.

Si B es objeto p. tr. entonces existe $A \xrightarrow{r} \wp A$ un obj-conj-tr y $B \xrightarrow{m} A$ un monomorfismo, entonces $(A \xrightarrow{r} \wp A, \chi_m) =: X$ es un objeto-conjunto y $\varphi X \cong B$.

Como se definió $\wp X$ para cualquier objeto-conjunto (ver 8.17) y por la observación de 8.17 se obtiene lo que se quiere.

□.

Desafortunadamente φ no es una equivalencia entre $\mathcal{M}$ y $\underline{E}$ pues un topo puede tener objeto no-parcialmente-transitivo, por lo tanto se introducirá el siguiente axioma:

8.20. AXIOMA DE TRANSITIVIDAD PARCIAL (ATP).

Todos los objetos son parcialmente transitivo, i.e., para cualquier objeto B existe un objeto conjunto-transitivo $A_B \xrightarrow{r} \wp A_B$ y un monomorfismo $B \xrightarrow{m_B} A_B$.

8.21. El topo de los conjuntos en $Z_0 + (AT)$ (ver 4.4) satisface (ATP), pues cada conjunto B está incluido en su cubierta transitiva $B \hookrightarrow T$ y $T \hookrightarrow \wp T$ es un objeto-conjunto-transitivo.

En esta sección se vió que nuestro modelo satisface $Z_0 + (AT)$ y por lo tanto el topo de los conjuntos en el modelo, $\mathcal{M}$, satisface (ATP).

(ATP) es invariante bajo funtores lógicos y equivalencias, de esta manera (ATP) es en realidad no sólo una condición suficiente sino también necesaria para que el topo de los conjuntos en el modelo sea equivalente (bajo cualquier funtor lógico) al topo en el que estamos trabajando.

Ya que nos dimos cuenta de la importancia del axioma (ATP) llamaremos

$$TEC(Z) := TEBP + (ATP)$$

la Teoría del Topo Elemental de los Conjuntos en Z.

8.22. Nota en TEC(Z).

Como en TEC(Z) se cumple (ATP) entonces, por 8.19, φ es un funtor equivalencia, cuya equivalencia inversa es:

a) Por 8.20, se define para cualquier objeto B en $\mathbb{E}$ un objeto-conjunto $\Psi B := (r_B, \chi_{m_B})$ y se tiene que $\varphi\Psi B \cong B$.

b) Ψ se puede extender a un funtor, el cuál es una equivalencia inversa de φ.

Se demostrará que el modelo satisface el axioma restante de Z, (ART), el axioma de representación transitiva.

8.23. Proposición en TEC(Z).

a) φ preserva objeto-conjunto transitivo.

b) El axioma de representación transitiva (ART) (4.5) se cumple en el modelo.

Demostración.

a) Sea $X \xrightarrow{R} \wp X$ un objeto-conj. tr. en el modelo, i.e. (ver §6) R es extensional y recursiva.

PD. φR es extensional y recursiva.

Esto es inmediato porque φ es equivalencia y es funtor lógico.

b) EL AXIOMA DE REPRESENTACIÓN TRANSITIVA (ART) se cumple en el modelo.

ART: Cualquier relación $X \xrightarrow{R} \wp X$ extensional y bien fundada es isomorfa a la relación $\in\restriction T$ para un conjunto transitivo T.

Sea $X = (A \xrightarrow{r} \wp A, \overline{M})$ objeto-conjunto

Primero se demostrará que $\varphi \wp X \cong \wp \varphi X$.

PD. $\wp\varphi X \cong \varphi\wp X$

Por 8.5 $\wp X = (\wp r, \wp[\bar{M}])$

entonces (por definición 8.17.a)

$$\begin{tikzcd} \varphi\wp X \arrow[r, tail, "P_{\wp X}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \wp A \arrow[d, "\wp[\bar{M}]"] \\ 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \varphi X \arrow[r, tail, "P_X"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \arrow[d, "\bar{M}"] \\ 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Como P_X es mono, entonces (por 5.9) $\wp_{P_X} : \wp\varphi X \longrightarrow \wp A$ es mono y además $\wp[\bar{M}] = \chi_{\wp_{P_X}}$

$\therefore \quad \wp_{P_X} \cong P_{\wp X}$

entonces existe un isomorfismo $\wp\varphi X \xrightarrow{\lambda} \varphi\wp X$ tal que

$P_{\wp X} \circ \lambda = \wp_{P_X}$

$\therefore \quad \wp\varphi X \cong \varphi\wp X.$

PD. (ART) se cumple en el modelo

Sea $X \xrightarrow{R} \wp X$ una relación extensional y bien fundada, en nuestro modelo, entonces (como el modelo cumple los axiomas de Zo y 4.1) R es un objeto-conj. tr. (i.e. es extensional y recursiva).

Como R es obj-conj tr entonces (por a) $\varphi X \xrightarrow{\varphi R} \varphi\wp X \cong \wp\varphi X$ es un obj-conj. tr y por 8.8.b $T := (\varphi R, \mathbb{E}_{\varphi X})$ es un conjunto transitivo en el modelo. (se recuerda que $\mathbb{E}_{\varphi X} := \chi_{\mathrm{Id}_{\varphi X}}$).

PD. Existe $X \xrightarrow{F} T$ isomorfismo tal que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "R"'] & T \arrow[d, hook, "i"] \\ \wp X \arrow[r, "\wp F"'] & \wp T \end{tikzcd}$$

conmuta.

Por definición φT es el objeto tal que el siguiente diagrama es un P.F.

$$\begin{tikzcd} \varphi T \arrow[r, tail, "P_T"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \varphi X \arrow[d, "\mathbb{E}_{\varphi X}"] \\ 1 \arrow[r, tail, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

$\therefore$ Existe un isomorfismo $\varphi X \xrightarrow{\alpha} \varphi T$ tal que $P_T \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\varphi X}$.

Entonces (por 8.18.b y la observación de 8.18) existe un isomorfismo $X \xrightarrow{F} T$ tal que $\varphi F = \alpha$.

PD.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "e"'] & T \arrow[d, hook, "i"] \\ \mathcal{S}X \arrow[r, "\mathcal{S}F"'] & \mathcal{S}T \end{tikzcd}$$
conmuta.

Sea $1 \xrightarrow{u} \varphi X$ PD. $(i \circ F)(r, (P_X \circ u / r)) = (\mathcal{S}F \circ R)(r, (P_X \circ u / r))$

$$i(F(r, (P_X \circ u / r))) \underset{8.18.a}{=} i(\varphi R, (P_T \circ \varphi F \circ u / \varphi R)) \underset{T \subset \mathcal{S}T}{=} (\varphi R, (u / \varphi R))$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}F(R(r, (P_X \circ u / r))) &\underset{8.12.a}{=} \mathcal{S}F(\mathcal{S}r, (P_{\mathcal{S}X} \cdot \varphi R \circ u / \mathcal{S}r)) = \\ &\doteq (\mathcal{S}\varphi R, (P_{\mathcal{S}T} \circ \varphi \mathcal{S}F \circ \varphi R \circ u / \mathcal{S}\varphi R)) \\ &= (\mathcal{S}\varphi R, (\mathcal{S}_{P_T} \circ \mathcal{S}\varphi F \circ \varphi R \circ u / \mathcal{S}\varphi R)) \\ &= (\mathcal{S}\varphi R, (\mathcal{S}_{P_T \circ \varphi F} \circ \varphi R \circ u / \mathcal{S}\varphi R)) \\ &= (\mathcal{S}\varphi R, (\varphi R \circ u / \mathcal{S}\varphi R)) \end{aligned}$$

PD. $(\varphi R, (u / \varphi R)) \sim (\mathcal{S}\varphi R, (\varphi R \circ u / \mathcal{S}\varphi R))$

Por 8.4.b $(\varphi R, (u / \varphi R)) \sim (\mathcal{S}\varphi R, \varphi R[(u / \varphi R)])$

Por 7.19 basta demostrar que $\varphi R[(u / \varphi R)] = (\varphi R \circ u / \mathcal{S}\varphi R)$

$$\varphi R[(u / \varphi R)]_e \underset{7.7.a}{=} \mathcal{S}\varphi R \circ (u / \varphi R)_e \underset{§7}{=} \mathcal{S}\varphi R \circ \varphi R \circ u \underset{§7}{=} (\varphi R \circ u / \mathcal{S}\varphi R)_e$$

$\therefore$ $\varphi R[(u / \varphi R)] = (\varphi R \circ u / \mathcal{S}\varphi R)$

$\therefore$ $(\varphi R, (u / \varphi R)) \sim (\mathcal{S}\varphi R, (\varphi R \circ u / \mathcal{S}\varphi R))$

$\therefore$ $i \circ F = \mathcal{S}F \circ R$ y F es un isomorfismo.

D.

<u>Nota</u>. La proposición 8.23 puede ser probada en TEBP; sin embargo la prueba de a) es un poco más complicada.

A continuación se hará un breve resumen de las secciones §7 y §8.

8.24. Metateorema.

Entre la teoría de los conjuntos en Z y la teoría del topo TEC(Z) existen las siguientes conexiones:

1) En la teoría de los Z-conjuntos existe un modelo "interno" de la Teoría de los Topos en TEC(Z) llamado el topo de los conjuntos en Z (dado por 3.1 – 3.3, 8.15)

2) En la teoría de los topos en TEC(Z) existe un modelo "interno" de la teoría de los Z-conjuntos llamado el modelo de los objetos-conjunto en TEC(Z) (dado por 7.14 – 7.15, 7.18)

3) El modelo de los objetos-conjunto en el topo de los Z-conjuntos es una teoría de los conjuntos "equivalente a Z" (en el sentido de 7.20)

4) El topo de los conjuntos en el modelo de los objetos-conjunto en TEC(Z) es "equivalente al topo TEC(Z)" (i.e. existe un funtor equivalencia y lógico entre estos topos).

El metateorema establece la existencia de dos operadores

$$\boxed{\text{Modelos de } Z} \;\underset{\text{modelo de objetos-conj}}{\overset{\text{el topo de los conjuntos}}{\rightleftarrows}}\; \boxed{\text{Modelos de TEC}(Z)}$$

que tienen las propiedades de (3) y (4). Podríamos interpretar el metateorema y diría:

La Teoría de los topos TEC(Z) caracteriza al topo de los Z-conjuntos.

§A. Apéndice.

Algunos resultados de la Teoría de las Categorías y la Teoría de los Topos Elementales.

<u>A.1.</u> Definiciones:

Un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ en una categoría $\underline{E}$ es:

a) un monomorfismo (o mono) si para todo par de morfismos $C \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A$ tales que $f \circ g = f \circ h$ se tiene $g = h$.

b) un epimorfismo (o epi) si para todo par de morfismos $B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} C$ tales que $g \circ f = h \circ f$ se tiene $g = h$.

c) un isomorfismo (o iso) si existe un morfismo $B \xrightarrow{g} A$ tal que $g \circ f = 1d_A$ y $f \circ g = 1d_B$.

<u>A.2.</u> En un topo elemental $\underline{E}$ se tiene que si $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo entonces se puede factorizar por medio de un epimorfismo seguido de un monomorfismo, denotados:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^*"'] & & B \\ & f(A) \arrow[ur, "\mathrm{Im} f"'] & \end{tikzcd}$$

y se le llama la "epi-mono factorización de f" y es única salvo isomorfismos conmutantes.

<u>A.3.</u> En un topo elemental $\underline{E}$ se tiene que un morfismo f es un isomorfismo sii f es monomorfismo y epimorfismo.

<u>A.4.</u> Todos los morfismos que tienen como dominio al 1, el objeto terminal, o al 0, el objeto inicial, son monomorfismos.

<u>A.5.</u> Sea $A \in \mathcal{O}(\underline{E})$, $\underline{E}$ un topo elemental, si existe un morfismo $A \longrightarrow 0$, de A en el objeto inicial entonces A es isomorfo al 0 ($A \cong 0$)

Para ver detalles, consultar [2].

<u>A.6.</u> a) Definición: Sea $\underline{E}$ una categoría y $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ dos morfismos en $\underline{E}$, entonces el igualador de f y g, denotado $Eq(f,g)$ consiste de un $\underline{E}$-objeto, E, y un morfismo $E \xrightarrow{e} A$ tal que:

i) $f \circ e = g \circ e$;

ii) Si se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ & C \arrow[u, "h"'] \arrow[ul, dashed, "\bar{h}"] & \end{tikzcd}$$

tal que $g \circ h = f \circ h$ entonces existe un único morfismo $C \xrightarrow{\bar{h}} E$ tal que $e \circ \bar{h} = h$.

(El igualador es único salvo isomorfía).

b) El igualador de los morfismos verdad, v, y falso es el objeto inicial. (ie., $Eq(v, \text{falso}) = 0$)

c) El igualador de cualquier par de morfismos es un monomorfismo.

<u>A.7.</u> a). Definición. Sean $\underline{E}$ una categoría y $A, B \in \mathcal{O}(\underline{E})$ entonces el "Producto" de A y B consiste de un $\underline{E}$-objeto $A \Pi B$ y un par de morfismos $\pi_{A,B} : A\Pi B \longrightarrow A$ y $\pi'_{A,B} : A \Pi B \longrightarrow B$ que satisfacen la siguiente propiedad universal:

Para cualquier par de morfismos $C \xrightarrow{f} A$ y $C \xrightarrow{g} B$, existe un único morfismo $\langle f, g\rangle : C \longrightarrow A \Pi B$ tal que

$$\begin{tikzcd} A & A \Pi B \arrow[l, "\pi_{A,B}"'] \arrow[r, "\pi'_{A,B}"] & B \\ & C \arrow[ul, bend left, "f"] \arrow[u, dashed, "\langle f, g\rangle"] \arrow[ur, bend right, "g"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. (ie. $\pi_{A,B} \langle f, g\rangle = f$ y $\pi'_{A,B} \langle f, g\rangle = g$).

b) El producto de A y B es único salvo isomorfismo.

c) $\langle \pi_{A,B}, \pi'_{A,B}\rangle = 1d_{A\Pi B}$

d) $A \Pi B \cong B \Pi A$.

e) Si $\langle f, g\rangle = \langle h, k\rangle$ entonces $f = h$ y $g = k$.

f) $\langle f \circ h, g \circ h\rangle = \langle f, g\rangle \circ h$.

g) Si m es un monomorfismo entonces $\langle m, f\rangle$ también lo es, para todo morfismo f.

h) Si $m : C \longrightarrow A$ y $n : D \longrightarrow B$ son monomorfismos entonces $m \Pi n := \langle m \circ \pi_{C,D}, n \circ \pi'_{C,D}\rangle : C \Pi D \longrightarrow A \Pi B$ es monomorfismo.

<u>A.8.</u> a) Definición: Sea $\underline{E}$ una categoría y $A, B \in \mathcal{O}(\underline{E})$ entonces el "Coproducto" de A y B consiste de un $\underline{E}$-objeto $A \amalg B$ y un par de morfismos $i_A : A \longrightarrow A \amalg B$ & $i_B : B \longrightarrow A \amalg B$ que satisface

la siguiente propiedad universal:

Para cualquier par de morfismos $A \xrightarrow{f} C$ y $B \xrightarrow{g} C$ existe un único morfismo $[f,g]: A \amalg B \longrightarrow C$ tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \amalg B \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

conmuta. (ie., $[f,g] \circ i_A = f$ y $[f,g] \circ i_B = g$).

b) El coproducto de A y B es único salvo isomorfismo.

c) $[i_A, i_B] = 1d_{A \amalg B}$

d) $A \amalg B \cong B \amalg A$

e) Si $[f,g] = [h,k]$ entonces $f = h$ y $g = k$

f) $h[f,g] = [h \circ f, h \circ g]$

g) Si e es un epimorfismo entonces $[e,f]$ y $[g,e]$ son epimorfismos para todo f y g.

h) Si $f: A \longrightarrow C$ y $g: B \longrightarrow D$ son epimorfismos, entonces $f \amalg g : A \amalg B \longrightarrow C \amalg D$ es epimorfismo.

<u>A.9.</u> Si $\wedge := \chi_{\langle v,v \rangle}$, donde $1 \xrightarrow{v} \Omega$ es el morfismo verdad y $\bar{L} := \chi_{L \xrightarrow{l} A}$, $\bar{M} = \chi_{M \xrightarrow{m} A}$ y $\bar{N} := \chi_{N \xrightarrow{n} A}$ morfismos característicos (ie., $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}: A \longrightarrow \Omega$) se tiene:

a) $\wedge\langle \wedge\langle \bar{L}, \bar{M}\rangle, \bar{N}\rangle = \wedge\langle \bar{L}, \wedge\langle \bar{M}, \bar{N}\rangle\rangle$. En otras palabras si definimos $\wedge\langle \bar{L}, \bar{M}\rangle := \bar{L} \cap \bar{M}$, para todo $\bar{L}$ y $\bar{M}$, se tiene que

$$(\bar{L} \cap \bar{M}) \cap \bar{N} = \bar{L} \cap (\bar{M} \cap \bar{N}).$$

b) $\bar{M} \cap \bar{L} \subset \bar{N}$ (ie., $\bar{N} \cap (\bar{M} \cap \bar{L}) = \bar{M} \cap \bar{L}$) sii $(\bar{M} \cap \bar{N}) \circ l = \bar{M} \circ l$.

c) $\wedge\langle v, v\rangle = v$, $\wedge\langle v, \text{falso}\rangle = \wedge\langle \text{falso}, v\rangle = \wedge\langle \text{falso}, \text{falso}\rangle = \text{falso}$.

d) $\vee\langle v, v\rangle = \vee\langle v, \text{falso}\rangle = \vee\langle \text{falso}, v\rangle = v$ y $\vee\langle \text{falso}, \text{falso}\rangle = \text{falso}$.

donde $\vee := \chi_{\mathrm{Im}([\langle v_\Omega, 1d_\Omega\rangle, \langle 1d_\Omega, v_\Omega\rangle])}$.

e) $\bar{M} \cap \bar{N} = \bar{N} \cap \bar{M}$.

<u>A.10.</u> a) Definición: Sean $\underline{E}$ una categoría y $A \xrightarrow{f} C$, $B \xrightarrow{g} C$ $\underline{E}$-morfismo, entonces un "Producto fibrado" de (f,g), denotado $P.F.(f,g)$ es un par de morfismos $f': D \longrightarrow B$ y $g': D \longrightarrow A$ tales que:

i) $f \circ g' = g \circ f'$;

ii) Propiedad Universal: Si $E \xrightarrow{\alpha} A$ y $E \xrightarrow{\beta} B$ son $\underline{E}$-morfismos tales que $f \circ \alpha = g \circ \beta$ entonces existe un único morfismo $E \xrightarrow{\gamma} D$ tal que $f' \circ \gamma = \beta$ y $g' \circ \gamma = \alpha$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, dashed, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & \\
& D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

y se denotará

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

b) El producto fibrado es único salvo isomorfismo.

c) Si
$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$
tal que f es mono entonces f' es mono.

d) Sea
$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h'"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & C \arrow[d, "h"] \\
E \arrow[r, "f''"'] & F
\end{tikzcd}$$
tal que $(*)$ y $(**)$ son productos fibrados

entonces
$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h' \circ g'"'] & B \arrow[d, "h \circ g"] \\
E \arrow[r, "f''"'] & F
\end{tikzcd}$$
es P.F.

e) Si
$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$
y $H \xrightarrow{\omega} E$ entonces
$$\begin{tikzcd}
H \amalg D \arrow[r, "1_H \amalg f'"] \arrow[d, "\omega \amalg g'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & H \amalg B \arrow[d, "\omega \amalg g"] \\
E \amalg A \arrow[r, "1_E \amalg f"'] & E \amalg C
\end{tikzcd}$$

f) Si $\underline{E}$ es un topo y
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "f"'] & D
\end{tikzcd}$$
entonces existe un morfismo $h : f'(A) \longrightarrow f(C)$ tal que el cuadrado de la derecha en el siguiente diagrama es P.F.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "f'^*"] \arrow[d, "g'"'] & f'(A) \arrow[r, tail, "\operatorname{Im} f'"] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, two heads, "f^*"'] & f(C) \arrow[r, tail, "\operatorname{Im} f"'] & D
\end{tikzcd}$$

A.11. a) Si $A \rightarrowtail^{m} C$ y $B \rightarrowtail^{n} C$ son monomorfismos ajenos en un topo $\underline{E}$, entonces $[m,n]: A \amalg B \longrightarrow C$ es mono.

Se dice que m y n morfismos son ajenos cuando
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & B \arrow[d, "n"] \\ A \arrow[r, "m"'] & C \end{tikzcd}$$
donde 0 es el objeto inicial de $\underline{E}$.

b) $[v, \text{falso}] : 1 \amalg 1 \longrightarrow \Omega$ es mono.

A.12. a). Definición: Sean $\underline{E}$ una categoría y $C \xrightarrow{f} A$, $C \xrightarrow{g} B$ $\underline{E}$-morfismos, entonces un "coproducto fibrado" de (f,g), denotado C.F.(f,g) consta de un par de morfismos $B \xrightarrow{f'} D$ y $A \xrightarrow{g'} D$ tal que:

i) $g' \circ f = f' \circ g$;

ii) Propiedad Universal: Si $A \xrightarrow{\alpha} E$ y $B \xrightarrow{\beta} E$ son $\underline{E}$-morfismos tales que $\alpha \circ f = \beta \circ g$ entonces existe un único $\underline{E}$-morfismo $\gamma : D \longrightarrow E$ tal que $\gamma \circ g' = \alpha$ y $\gamma \circ f' = \beta$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \arrow[ddr, bend left, "\beta"] & \\ A \arrow[r, "g'"'] \arrow[drr, bend right, "\alpha"'] & D \arrow[dr, "\gamma"] & \\ & & E \end{tikzcd}$$
y se denotará
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\text{C.F.}"] & B \arrow[d, "f'"] \\ A \arrow[r, "g'"'] & D \end{tikzcd}$$

b) El coproducto fibrado es único salvo isomorfismo.

c) Si
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\text{C.F.}"] & B \arrow[d, "f'"] \\ A \arrow[r, "g'"'] & D \end{tikzcd}$$
y g es epi entonces g' es epi.

A.13. Los Hechos Fundamentales. Sea $\underline{E}$ un topo.

El Primer Hecho Fundamental: Los producto fibrado preservan epimorfismo. i.e.,

Si
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$
y f es epi entonces f' también lo es.

El Segundo Hecho Fundamental: Los coproductos preservan productos fibrados. i.e.

Si
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & D \arrow[d, "k"] \\ B \arrow[r, "h"'] & E \end{tikzcd}$$
y
$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & D \arrow[d, "k"] \\ B' \arrow[r, "h'"'] & E \end{tikzcd}$$
entonces

$$\begin{array}{ccc} A\amalg A' & \xrightarrow{[b,b']} & D \\ {\scriptstyle g\amalg g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ B\amalg B' & \xrightarrow[{[h,h']}]{} & E \end{array}$$

es Producto fibrado.

Para ver detalles de todo lo anterior ver [2].

A.14. El Teorema del Coproducto Fibrado.

El coproducto fibrado de un mono por algo es mono y el diagrama resultante también es producto fibrado.

i.e.

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrowtail & B \\ \downarrow & \text{C.F.} & \downarrow \\ C & \rightarrowtail & D \end{array}$$

es P.F.

Esto resultado está desarrollado en detalle en [4].

A.15. Sea

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{b} & B \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \text{C.F.} & \downarrow{\scriptstyle v_1} \\ C & \xrightarrow[v_2]{} & D \end{array}$$

entonces $[v_1,v_2]: B\amalg C \longrightarrow D$ es epi.

Demostración:

Sean $D \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} E$ tales que $\alpha[v_1,v_2] = \beta[v_1,v_2]$

$$\begin{array}{ccc} \alpha[v_1,v_2] & = & \beta[v_1,v_2] \\ \| & & \| \\ [\alpha v_1,\alpha v_2] & & [\beta v_1,\beta v_2] \end{array}$$

entonces $\alpha v_1 = \beta v_1$ y $\alpha v_2 = \beta v_2$

entonces

$$\alpha v_2 g \underset{(C.F.)}{=} \alpha v_1 b = \beta v_1 b \underset{(C.F.)}{=} \beta v_2 g$$

entonces (C.F.) existe un único $D \xrightarrow{\gamma} E$ tal que $\gamma\circ v_2 = \alpha v_2 = \beta v_2$ y $\gamma\circ v_1 = \alpha\circ v_1 = \beta\circ v_1$

pero α y β tienen esta propiedad entonces $\alpha=\beta$

$\therefore$ $[v_1,v_2]$ es epi.

A.16. (Condición de Beck para Existe ($\mathcal{P}$)).

Si

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & D \\ {\scriptstyle n}\downarrow & \text{P.F.} & \downarrow{\scriptstyle m} \\ A & \xrightarrow[b]{} & B \end{array}$$

entonces

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}D & \xrightarrow{\mathcal{P}m} & \mathcal{P}B \\ {\scriptstyle \mathcal{P}^{\circ}g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{P}^{\circ}b} \\ \mathcal{P}C & \xrightarrow[\mathcal{P}n]{} & \mathcal{P}A \end{array}$$

conmuta.

(ver definiciones de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}^{\circ}$ en 5.6)

Este resultado viene en [3, página 32].

A.17. Sea $\underline{E}$ un topos, si $A \in O(\underline{E})$ entonces existe un monomorfismo $Kpr_A : A \Pi A \longrightarrow \delta\delta A$ llamado el morfismo de la pareja-ordenada de Kuratowski.

(Para A.17 ver [3, pág. 164])

A.18. a) Definición. Sean $\underline{C}$ y $\underline{D}$ dos categorías y $L : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$, $R : \underline{D} \longrightarrow \underline{C}$ funtores, se dice que (L, R) es un "Par adjunto" y se denota $L \dashv R$ si existe una función $\tau : O(\underline{C}) \times O(\underline{D}) \longrightarrow \mathcal{M}(Set)$ tal que: Para todo $A \in O(\underline{C})$ y $B \in O(\underline{D})$ se tiene que

$\tau(A,B) := \tau_{A,B} : Hom_{\underline{D}}(L(A), B) \longrightarrow Hom_{\underline{C}}(A, R(B))$ es un isomorfismo y además:

$$\tau_{A,-} : Hom_{\underline{D}}(L(A), -) \longrightarrow Hom_{\underline{C}}(A, R-) \quad \text{y}$$

$$\tau_{-,B} : Hom_{\underline{D}}(L-, B) \longrightarrow Hom_{\underline{C}}(-, RB)$$ son transformaciones naturales.

b) Si $L \dashv R$ es un par adjunto, se dice que L es adjunto izquierdo de R o R es adjunto derecho de L.

c) Si $L \dashv R$, un par adjunto, entonces L preserva epimorfismos y coproductos y R preserva monomorfismos y productos.

Para mayor referencia consultar [6].

Referencias.

[1] Mac Lane, Saunders.
Categories for the working mathematician.
Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag 1971.

[2] Goldblatt, Robert.
Topoi, the categorical analysis of logic.
North-Holland Publishing Company 1979.

[3] Johnstone, P. T.
Topos Theory
Academic Press, 1977.

[4] Kock A. y Wraith G. C.
Elementary Toposes.
Lecture Notes Series No. 30, Univ. of Aarhus, 1971.

[5] Osius, Gerhard.
Categorical Set Theory: a characterization of the Category of Sets
Journal of Pure and Applied Algebra 4 (1974). 79-119.
North-Holland Publishing Company.

[6]. Herrlich H. y Strecker G. E.
Category Theory, an introduction.
Allyn and Bacon, 1973.

[7] Suppes, P.
Axiomatic Set Theory.
Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960.

[8] Thiele E. J.
Uber endlich axiomatisierbare Teilsysteme der Zermelo-Fraenkelschen.
Mengenlehre, Z. Math. Logik Grundl. Math 14 (1968) 39-58.

Lista de símbolos importantes.

ART	axioma de Representación transitiva.
AT	axioma de transitividad
ATP	axioma de transitividad Parcial
B	axioma de Boole
BV	axioma de Bivalencia
C.F.	coproducto fibrado
conj.	conjunto
$\underline{E}$	el topo elemental $\underline{E}$ (en algunos casos la categoría $\underline{E}$)
$f^{-1}[-]$	funtor imagen inversa
$f[-]$	funtor imagen directa (existencial)
$f\langle - \rangle$	funtor imagen directa universal
G	axioma del Generador
$\mathcal{M}$	el topo de los objeto conjunto
$\mathcal{M}(\underline{E})$	la clase de los $\underline{E}$-morfismos
ND	axioma de No degeneración
$\mathcal{O}(\underline{E})$	la clase de los $\underline{E}$-objetos
obj.-conj.	objeto conjunto
obj.-conj. tr.	objeto conjunto transitivo
obj. p. tr.	objeto parcialmente transitivo
$\wp$	funtor (covariante) objeto-potencia
$\wp^*$	funtor contravariante objeto potencia
PD.	Por demostrar
P.F.	Producto fibrado
Set	la categoría de los conjuntos
sii	si y sólo si.
Sub(A)	los subobjetos de A
TE	topo elemental
TEBP	TE + (ND) + G (topo elemental bien punteado)
TEC(Z)	TEBP + (ATP) (teoría del topo elemental de los conjuntos en Z)
v	Morfismo "verdad"
Z	Z_0 + (AT) + (ART) (subsistema de ZF).
Z_0	la teoría de los conjunto Z_0 (subsistema de ZF)
ZF	la teoría de los conjunto ZF (Zermelo-Fraenkel)

Sean $A, B \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$, $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ y F, G funtores.

$(\tilde{A}, j_A)$	clasificador de morfismo parciales de A.
$Eq(f,g)$	el igualador de f y g.
Id_A	el morfismo identidad de A
$1(A)$	el morfismo característico de Id_A
$1_{(r,\bar{A})}$	el morfismo identidad de $(r,\bar{A})$ en $\mathcal{M}$
$!_A$	el único morfismo $A \longrightarrow 1$
0_A	el único morfismo $0 \longrightarrow A$
1	el objeto terminal
0	el objeto inicial
δ_A	el morfismo característico de $\langle \mathrm{Id}_A, \mathrm{Id}_A \rangle$
Ω	el clasificador de subobjeto
$A \Pi B$	el "producto" de A y B
$Y \times Y'$	el producto de Y y Y' en $\mathcal{M}$.
$\langle f,g \rangle$ o $\binom{f}{g}$	el único morfismo inducido por la propiedad universal del producto!
$f \Pi g$	el morfismo producto de f y g.
$A \amalg B$	el "coproducto" de A y B.
$[f,g]$	el único morfismo inducido por la propiedad universal del coproducto.
$Im(f) \circ f^*$	la epi-mono factorización de f
$F \dashv G$	F es adjunto izquierdo de G (o G es adjunto derecho de F)
χ_f	el morfismo característico de f
$\rightarrowtail$	monomorfismo (o mono)
$\twoheadrightarrow$	epimorfismo (o epi)
$\circlearrowleft$	conmuta
$\therefore$	por lo tanto.