2 ej 3

DIFERENCIALES CUADRATICAS SOBRE SUPERFICIES DE RIEMANN

Tēsis de Licenciatura

presentada por

Rocío Cerecero Lōpez

Dirigida por

Dr. R. Michael Porter K.

Indice.

1. Introducción.

Aproximadamente en el año 1928, Grötzsch planteó y resolvió un problema con respecto a la clase de todos los homeomorfismos de clase C^1, que presenrvan orientación, entre dos rectángulos del plano complejo. Grötzsch sabia (por propiedades conformes de aplicaciones conformes) que si R y R' eran dos rectángulos diferentes, entonces no existia un map conforme de R a R', el cual mapeara vértices en vértices. Sin embargo, al estar trabajando con este tipo de mapeos inventó el concepto de dilatación y entonces se preguntó ¿ cuál era el homeomorfismo $f:R \to R'$, en esta clase, que tenia dilatación D_f minima ?.

El encontró que el homeomorfismo en esta clase con esta propiedad era un map afin bien especifico.

Este mismo problema fue planteado por Teichmüller para Superficies de Riemann Compactas de género mayor que uno, el cual fue resuelto por él en 1937 (véase sección 8.5).

Una de las herramientas fundamentales para la solución del problema de Grötzsch sobre Superficies de Riemann Compactas de género mayor que uno son las diferenciales cuadráticas.

Con este trabajo pretendi dar un pequeño panorama acerca de los aspectos geométricos de las diferenciales cuadráticas, el conocerlo, ayudará a entender con más facilidad la Teoria de Teichmüller [1] y otras teorias como la de Foliaciones Medibles sobre Superficies debida a William Thurston.

La relación de ésta última con las diferenciales cuadráticas fue encontrada por Hubbard y Masur. Ellos encontraron que sobre una Superficie de Riemann Compacta fija (sin borde) existe una correspondencia uno a uno entre las clases de equivalencia de las foliaciones medibles y las diferenciales cuadráticas holomorfas. La correspondencia está en términos de la estructura de las trayectorias horizontales (tema que tratamos brevemente en este trabajo) y la medida vertical determinada por una diferencial cuadrática [11].

En el capitulo 2 se estudiarán algunos resultados importantes acerca de los revestimientos de espacios topológicos tales como: levantamiento de curvas y de funciones arbitrarias en un espacio topológico a su revestimiento y condiciones necesarias y suficientes para la existencia de este tipo de levantamientos en términos del grupo fundamental de los revestimientos.

En el capitulo 3 se verán, entre otras cosas, las condiciones necesarias y suficientes que tiene que cumplir un espacio topológico para que exista un revestimiento de éste. Además analizaremos cuando dos revestimientos de un espacio topológico son isomorfos. Todo ésto no lo proporcionará el Teorema de Clasificación, con el que finalizaremos este capitulo.

En el capitulo 4 definiremos lo que es una Superficie de Riemann, una Superficie de Riemann con borde, la imágen simétrica de éstas y la doble de una Superficie de Riemann con borde. Además definiremos lo que es un map holomorfo entre Superficies de

Riemann y veremos algunas propiedades de éstos.

En el capitulo 5 se definirá el concepto fundamental de este trabajo, el de diferencial cuadrática meromorfa sobre una Superficie de Riemann. Definiremos un parametro que llamaremos parámetro natural o distinguido, en términos de una diferencial cuadrática, alrededor de los puntos regulares de ésta. Además definiremos una métrica asociada a una diferencial cuadrática demostrando, en ésta, la existencia y unicidad local de curvas más cortas entre dos puntos cualesquiera. Finalizamos este capitulo con la definición de trayectoria horizontal y vertical asociada a una diferencial cuadrática.

En el capitulo 6 definiremos parámetros distinguidos en una vecindad de los puntos criticos de la diferencial cuadrática, los cuales nos ayudarán a visualizar con más facilidad la conducta local de las trayectorias que están cerca de esos puntos. Demostraremos también, la existencia y unicidad de curvas más cortas, con respecto a la métrica inducida por una diferencial cuadrática, entre dos puntos arbitrarios en una vecindad de los puntos criticos finitos de ésta.

La estructura de las trayectorias de una diferencial cuadrática desde un punto de vista global se estudiará en el capitulo 7. En este capitulo definiremos y estudiaremos algunos conceptos tales como: trayectorias cerradas, no cerradas, rayos de una trayectoria, trayectorias criticas, espirales y trayectorias excepcionales, demostrando que éstas últimas forman un conjunto de medida cero (con respecto al área definida en términos de la diferencial cuadrática) sobre una Superficie de Riemann Compacta si la diferencial cuadrática en cuestión es holomorfa y de norma finita.

En el último capitulo demostraremos la existencia y unicidad global de curvas más cortas (geodésicas), con respecto a la métrica asociada a la diferencial cuadrática, en cualquier clase de homotopia de curvas que unen dos puntos arbitrarios de una Superficie de Riemann Compacta.

Finalizaremos este capitulo exponiendo brevemente el problema de Grötzsch y el Teorema de Tiechmüller, con el cual finalizaremos este trabajo.

2. Revestimientos.

Sea X un espacio topológico conexo y localmente conectable por trayectorias, a grandes rasgos un revestimiento de X consiste de un espacio topológico X y una aplicación continua de X a X la cual satisface ciertas condiciones. La teoría de los revestimientos juega un papel muy importante no sólo en la topología sino también en las diciplinas afines tales como la Geometría Diferencial, la Teoría de Grupos de Lie y la teoría de Superficies de Riemann.

Veamos ahora formalmente qué es un revestimiento.

Definición 2.1 Sea X un espacio topológico conectable por trayectorias y localmente conectable por trayectorias. Un revestimiento de X es una pareja (X,P) donde X es un espacio topológico y p es una función continua y suprayectiva de X a X que cumple con la siguiente condición: para cada x X existe una vecindad U de x, a la que llamaremos vecindad elemental, tal que para toda componente conexa U de $p^{-1}(U)$, $p|U:U \to U$ es un homeomorfismo.

A p le llamamos la proyección de revestimiento, a X el espacio base y a $p^{-1}(x)$ la fibra sobre el punto x X.

2.2 Ejemplos.

Los siguientes ejemplos quizá no sean muy sofisticados pero ayudan a visualizar el consepto de revestimiento.

a) Si X es un espacio topológico arbitrario e $i:X \to X$ denota la identidad, entonces el par (X,i) es un revestimiento trivial de X. Análogamente si f es cualquier homeomorfismo de Y sobre X, entonces (Y,f) es un revestimiento de X.

b) Definamos ahora $p:R \to S^1$ por $p(t)=e^{2\ it}$ para todo t R. Asi (R,p) es un revestimiento de S^1. De hecho si $z_o=e^{2\ it_o}$,

$$p^{-1}(z_o)=\{t_o+n,\ n\ Z\}.$$

En este caso cualquier subintervalo abierto propio de S^1 que contenga a z_o puede servir como la vecindad elemental requerida.

Cabe notar que este ejemplo aunque puede considerarse como simple trae consigo una gran importancia.

c) Consideremos ahora $p:C \to C\setminus\{0\}$ definida como $p(z)=e^z$. Afirmamos que (C,p) es un revestimiento de $C\setminus\{0\}$. En este caso la vecindad elemental de un punto z $C\setminus\{0\}$ requerida es

$$U=\{w\ \ C: |w-z|<|z|\}.$$

d) Sea S^2 la 2-esfera, definimos sobre ésta la siguiente relación de equivalencia: x,y S^2 son equivalentes si y sólo si son antipodales. El espacio cociente módulo esta relación de equivalencia es llamado <u>el espacio proyectivo</u> P.

2.3 Levantamiento de una trayectoria al espacio de revestimiento.

Uno de los conceptos que nos sera muy útil más adelante es el de levantamiento de una trayectoria al espacio de revestimiento.

Definamos ahora unos conceptos necesarios.

Definición. *Una trayectoria en X* es un map continuo del intervalo $I=[0,1]$ al espacio topológico X. Decimos que la trayectoria $f:I \to X$ *es cerrada* si $f(0)=f(1)$.

Sean $f,g:I \to X$ dos trayectorias en X decimos que *f es homotópica a g* ($f \simeq g$) si existe un map continuo $F:I \times I \to X$ tal que

$$F(t,0)=f(t) \text{ y } F(t,1)=g(t) \text{ para todo } t \ I.$$

Se dice que *f es homotópica a g relativa a los extremos de I* ($f \simeq g$ rel $\{0,1\}$) si se cumple lo anterior pero además

$$F(0,t)=f(0)=g(0) \text{ y } F(1,t)=f(1)=g(1) \text{ para toda } t \ I.$$

Sea $(\tilde{X},p)$ un revestimiento de X . Sabemos que si $f:I \to \tilde{X}$ es una trayectoria en $\tilde{X}$, entonces $p \ f:I \to X$ es una trayectoria en X, así mismo, si $f,g:I \to \tilde{X}$ son dos trayectorias en $\tilde{X}$ tales que $f \simeq g$, entonces $p \ f \simeq p \ g$.

Una pregunta interesante que surge inmediatamente es ¿qué pasa con el recíproco de las afirmaciones anteriores ?. Planteemos esto más formalmente.

Si f es una trayectoria en X, ¿existirá alguna trayectoria $g:I \to X$ en X, tal que $p\,g=f$?. Y si además $f,g:I \to X$ son trayectorias en X tales que $p\,f \simeq p\,g$ ¿podemos deducir que $f \simeq g$?.

Veamos a continuación que ambas preguntas tienen un si como respuesta, además las respuestas a estas preguntas expresan propiedades básicas muy importantes en la teoría de los revestimientos.

Comencemos con el siguiente

Lema 2.3.1 Sea (X,p) un revestimiento de X, $\tilde{x}_0$ X y $x_0=p(\tilde{x}_0)$. Entonces para cada trayectoria $f:I \to X$ con origen x_0, existe una trayectoria con origen $\tilde{x}_0$ tal que $p\,g=f$.

A esta trayectoria le llamaremos <u>levantamiento de f al espacio de revestimiento</u> de X.

Demostración.

Supongamos primero que la trayectoria f está totalmente contenida en alguna vecindad elemental U. Sea U la componente conexa de $p^{-1}(U)$ que contiene a x_0, así $p:U \to U$ es un homeomorfismo. Por tanto $g=p^{-1}\,f:I \to X$ (donde p^{-1} denota el homeomorfismo inverso de p) es la trayectoria deseada ya que $p\,g=f$.

Supongamos ahora que f es una trayectoria arbitraria. Para cada x X, sea U_x la vecindad elemental en x, así X= U_x , por lo tanto las vecindades elementales forman una cubierta abierta de X. Pero ya que I es un conjunto compacto, existe un entero n suficientemente grande tal que cada intervalo $[i-1/n, i/n]$, $1 \leq i \leq n$ es mapeado por f dentro de alguna vecindad elemental. Ya que tememos un número finito de intervalos podemos aplicar en cada uno de éstos el primer paso, así construimos la trayectoria deseada.

Hemos visto hasta estos momentos la existencia de la trayectoria g, pero ahora surge otra pregunta natural ¿será esta trayectoria única ?, la respuesta a esta pregunta nos la dará el siguiente

Lema 2.3.2 Sea (X,p) un revestimiento de X, e Y un espacio conexo. Dadas dos funciones continuas f,g:Y -> X tales que p f=p g el conjunto B={y Y:f(y)=g(y)} es vacío o es todo Y.

Demostración.

Ya que Y es un espacio conexo bastará probar que B es abierto y cerrado.

Sean b B y x=p f(b)=p g(b). Sea U una vecindad elemental de x y U la componente conexa de $p^{-1}(U)$ que contiene a b. Ya que p:U -> U es un homeomorfismo, p es inyectiva en U y ya que p f(U)=p g(U) para todo ũ U se tiene que f(ũ)=g(ũ) para todo ũ U, de aquí que B es abierto.

Ahora, sea b un punto de acumulación de B y x=p f(b)=p g(b), ya que p f y f g son continuas podemos encontrar una vecindad

V de b tal que $p\,f(V)$ U, $p\,g(V)$ U donde U es una vecindad elemental de x.

Pero ya que $f(V)$ y $g(V)$ son conexos cada uno debe de estar contenido en alguna componente conexa de $p^{-1}(U)$, pero b es un punto de acumulación de B así, que existe v V tal que $f(v)=g(v)$ por lo tanto estas componentes deben de ser la misma, llamemos a esta componente U.

Ahora puesto que $p:U \to U$ es un homeomorfismo y

$$p\,f(b)=p\,g(b)$$

podemos concluir que $f(b)=g(b)$ de donde b B, por tanto B es cerrado.

Hasta el momento hemos contestado a la primera pregunta que nos habíamos formulado, la respuesta a la segunda nos la da el siguiente

Lema 2.3.3 Sea (X,p) un revestimiento de X, y $f,g:I \to X$ dos trayectorias en X con el mismo origen. Si $p\,f \simeq p\,g$ rel $\{0,1\}$, entonces $f \simeq g$, en particular f y g tienen el mismo extremo.

Demostración.

Ya que $p\,f \simeq p\,g$ rel $\{0,1\}$ existe una homotopía $F:I\times I \to X$ tal que

$$F(s,0)=p\,f(s),\quad F(s,1)=p\,g(s),\quad F(0,t)=p\,f(0)=p(\tilde{x}_0)\quad y$$
$$F(1,t)=p\,f(1).$$

Sea U_x la cubierta abierta de X formada por las vecindades elementales, ya que F es continua, $\{F^{-1}(U_x)\}$ forma una cubierta abierta de IxI. Ya que IxI es compacto, aplicando el teorema de Lebesgue [9], existen descomposiciones

$$0=s_0<s_1<\ldots<s_m=1 \quad y \quad 0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$$

del intervalo I tales que para toda i, j

$$F([s_{i-1},s_i]x[t_{i-1},t_i]) \quad U_{i,j}$$

donde $U_{i,j}$ es una vecindad elemental.

Construiremos F: IxI -> X tal que p F=F y $F(0,0)=\%_0$ de la forma siguiente. Comencemos con el rectángulo $[0,s_1]x[0,t_1]$ tal que $F([0,s_1]x[0,t_1]$ $U_{1,1}$ y consideremos la componente $U_{1,1}$ de $p^{-1}(U_{1,1})$ que contiene a $\%_0$.

Sea $(p_{1,1})^{-1}:U_{1,1} \to U_{1,1}$ el homeomorfismo inverso de $p|U_{1,1}$ hagamos $F_1(s,t)=(p_{1,1})^{-1}$ $F(s,t)$ para (s,t) $[0,s_1]x[0,t_1]$. Pasamos ahora a $U_{2,1}$ $F([s_1,s_2]x[0,t_1])$ sea $U_{2,1}$ la componente conexa de $p^{-1}(U_{2,1})$ que contenga el punto $F(s_1,0)$ y

$$(p_{2,1})^{-1}:U_{2,1} \to U_{2,1}$$

el homeomorfismo inverso de $p|U_{2,1}$.

Definamos ahora

$$F_2(s,t)=(p_{2,1})^{-1} \; F(s,t), \quad (s,t) \; [s_1,s_2]x[0,t_1].$$

Las dos funciones F_1 y F_2 coinciden en el punto $(s_1,0)$ y la unicidad del levantamiento de trayectorias, demostrado anteriormente, nos muestra que coinciden sobre $\{s_1\}x[0,t_1]$. Asi podemos definir F como:

$$F=\begin{cases} F_1(s,t) & \text{si } (s,t)\ [0,s_1]\times[0,t_1] \\ F_2(s,t) & \text{si } (s,t)\ [s_1,s_2]\times[0,t_1] \end{cases}$$

esta función está definida sobre $[0,s_2]\times[0,t_1]$.

Siguiendo este procedimiento demostramos que F está definida sobre la franja $[0,1]\times[0,t_1]$ y de forma análoga sobre la franja $[0,1]\times[t_1,t_2]$, etc. Así tenemos definida F sobre $I\times I$.

Debido a la unicidad del levantamiento de trayectorias tenemos que $F(s,0)=f(s)$, análogamente $F(s,1)=g(s)$. Por otro lado p $F(0,t)=\tilde{x}_0$ y $F(1,t)=\tilde{x}_1$ para $0\leq t\leq 1$. Así $f\simeq g$ rel $\{0,1\}$.

Como un corolario a los resultados anteriores acerca de levantamientos de trayectorias al espacio de revestimientos tenemos el siguiente

Lema.2.3.4 Si (X,p) es un revestimiento de X, entonces para todo x X los conjuntos $p^{-1}(x)$ tienen el mismo cardinal.

Demostración.

Sean x,y X arbitrarios. Sea $f:I\to X$ una trayectoria en X tal que $f(0)=x$ y $f(1)=y$. Para cualquier punto $\tilde{x}$ $p^{-1}(x)$ sea $g:I\to X$ el levantamiento de f a X con punto inicial $\tilde{x}$, es decir, p $g=f$ y $g(0)=\tilde{x}$. Sea $\tilde{y}=g(1)$. Así podemos dar una correspondencia inyectiva entre los puntos de $p^{-1}(x)$ y $p^{-1}(y)$, a saber, a cada $\tilde{x}$ le asociamos $\tilde{y}$.

Considerando la trayectoria inversa, es decir, de y a x podemos dar, mediante un argumento análogo al anterior, una correspondencia inyectiva de $p^{-1}(y)$ a $p^{-1}(x)$. Por lo tanto ambos conjuntos tienen el mismo cardinal.

Con los resultados hasta ahora obtenidos, podemos analizar la relación entre el grupo fundamental del espacio de revestimiento y el del espacio base.

2.4 Grupo Fundamental del Espacio de Revestimiento.

Sea $p:X \to X$ la proyección de un revestimiento. x_0 X y $\tilde{x}_0$ $p^{-1}(x_0)$ puntos fijos. Entonces $p:(X,\tilde{x}_0) \to (X,x_0)$ induce un homomorfismo entre dos grupos fundamentales $p_\#: (X,\tilde{x}_0) \to (X,x_0)$.

Teorema 2.4.1 Si (X,p) es un revestimiento de X y si $p(\tilde{x}_0)=x_0$, entonces $p_\#: (X,\tilde{x}_0) \to (X,x_0)$ es un monomorfismo.

Demostración.

Basta probar que el kernel de $p_\#$ es el elemento identidad. Sea f $(X,\tilde{x}_0)$ (estoy considerando f como el representante de la clase de equivalencia a la que pertenece), y supongamos que $p_\#(f)=1$, es decir, $p\ f \simeq cte$ en x_0 rel $\{0,1\}$. Así existe una homotopía $F:I\times I \to X$ entre $p\ f$ y cte en x_0 rel $\{0,1\}$; conforme al lema 2.3.3 existe una homotopia $F:IxI \to X$ tal que $p\ F=F$ y $F(s,0)=f(s)$.

La restricción de F al conjunto $E=\{0,1\}xI \quad Ix\{1\}$ es proyectada por p a x_0, así $F(E) \quad p^{-1}(x_0)$, pero cada punto $\tilde{x}_0$ de $p^{-1}(x_0)$ tiene una vecindad que no contiene otro punto, distinto de $\tilde{x}_0$ (de $p^{-1}(x_0)$) y puesto que F es continua, $F(E)$ conexo, por tanto $F(E)=\tilde{x}_0$. Así $f \simeq cte$ en x_0 rel $\{0,1\}$.

La imagen de $(X,\tilde{x}_0)$ en (X,x_0) depende en general de la elección del punto base $\tilde{x}_0 \quad p^{-1}(x_0)$. Sea $[h]$ la clase de trayectorias que unen $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_1 \quad p^{-1}(x_0)$. Esta clase define un homomorfismo $U: (X,\tilde{x}_0) \to (X,\tilde{x}_1)$ mediante $U(g)=h^{-1}\ g\ h$.

Obteniendo así el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
(X,\tilde{x}_0) & \xrightarrow{\quad p\# \quad} & (X,x_0) \\
U & & V \\
(X,\tilde{x}_0) & \xrightarrow[\quad p\# \quad]{} & (X,x_0)
\end{array}$$

donde U y V están definidas como sigue:

$$U(g)=h^{-1}\ g\ h \quad y \quad V(f)=p\#(h)^{-1}\ f\ p\#(h).$$

Pero como $\tilde{x}_0$ y $\tilde{x}_1$ pertenecen a la misma fibra, la proyección de h es un lazo en x, y por tanto $[p\,h]$ (X,x_0).

Como $p_\#\ U(g)=V\ p_\#(g)$ se sigue que los subgrupos $p_\#$ (X,x_0) y $p_\#$ $(X,\tilde{x}_1)$ son conjugados.

Surge entonces la siguiente pregunta: ¿ es cualquier subgrupo conjugado de $p_\#$ $(X,\tilde{x}_0)$ en (X,x_0) es la imagen del grupo fundamental de X con un punto base apropiado en $p^{-1}(x_0)$?.

La respuesta a esta pregunta es que si. En efecto, si $[f]=1$ es un elemento identidad de (X,x_0), consideremos el subgrupo

$$[f]^{-1}\ p_\#\ (X,\tilde{x}_0)\ [f],$$

sea f un representante de $[f]$ y $f:I \to X$ el levantamiento de f con punto inicial $\tilde{x}_0$. Sea $\tilde{x}_2=f(1)$, entonces $p_\#[f]=[f]$ y el diagrama conmutativo anterior muestra que

$$p_\#\ (X,\tilde{x}_2)=[f]^{-1}\ p_\#\ (X,\tilde{x}_0)[f].$$

Los anteriores resultados pueden ser resumidos en el siguiente

Teorema 2.4.2 Sea (X,p) un revestimiento de X con x_0 X y $\tilde{x}_0$ $p^{-1}(x_0)$ puntos base. Entonces la familia de subgrupos $p_\#$ $(X,\tilde{x})$, $\tilde{x}$ $p^{-1}(x_0)$ está dada por

$$p_\#\ (X,x)=[f]^{-1}\ p_\#\ (X,\tilde{x}_0)\ [f],$$

donde $[f]=p_\#[g]$, y $g:I \to X$ es una trayectoria de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}$. Más aún todo subgrupo conjugado de $p_\#$ $(X,\tilde{x}_0)$ en (X,x_0) es de esta forma.

2.5 Levantamiento de funciones arbitrarias al espacio de revestimiento.

En una sección anterior estudiamos el levantamiento de una trayectoria de X al espacio de revestimiento X.

Veremos ahora el problema análogo para funciones de un espacio arbitrario Y en X.

Para visualizar más fácilmente este problema introduzcamos la siguiente notación.

Si X y Y son espacios topológicos, x X y y Y, entonces $f:(X,x) \to (Y,y)$ significa que f es una función continua de X a Y y que $f(x)=y$. Con esta notación podemos plantear de manera precisa el problema anterior de la forma siguiente:

Sea (X,p) un revestimiento de X, $\tilde{x}_0$ X, $x_0=p(\tilde{x}_0)$, y_0 Y y $f:(Y,y_0) \to (X,x_0)$. ¿ Bajo qué condiciones existe

$$f:(Y,y_0) \to (X,\tilde{x}_0)$$

tal que el diagrama

$$(Y,y_0) \xrightarrow{f} (X,\tilde{x}_0)$$

f p

$(X,\tilde{x}_0)$

es conmutativo ?.

Si f existe decimos que f <u>es un levantamiento de f</u>.

Una condición necesaria para que lo anterior se realice se obtiene pasando a los a los grupos fundamentales y a los homomorfismos inducidos. Es decir, supongamos que el diagrama anterior conmuta, así tenemos también el siguiente diagrama conmutativo.

$$(Y, y_o) \dashrightarrow (X, \tilde{x}_o)$$

$$f_\# \qquad\qquad\qquad\qquad p_\#$$

$$(X, x_o)$$

Puesto que p es un monomorfismo, la existencia de un homeomorfismo $f_\#$: $(Y, y_o) \to (X, \tilde{x}_o)$, que haga conmutativo el diagrama, implica que la imagen de $f_\#$ esté contenida en la imagen de $p_\#$. Veremos, mediante el siguiente teorema, que esta condición también es suficiente para la existencia del levantamiento.

Teorema 2.5.1 Sea $(\tilde{X},p)$ un levantamiento de X, Y un espacio conexo y localmente conectable por trayectorias, y_0 Y, $\tilde{x}_0$ $\tilde{X}$ y $x_0=p(\tilde{x}_0)$. Dada una función $f:(Y,y_0) \to (X,x_0)$ existe un levantamiento $\tilde{f}:(Y,y_0) \to (\tilde{X},\tilde{x}_0)$ de f si y sólo si

$$f_{\#} \quad (Y,y_0) \quad p_{\#} \quad (\tilde{X},\tilde{x}_0).$$

Demostración.

Hemos probado ya la condición necesaria, veamos ahora que $f_{\#}$ (Y,y_0) $p_{\#}$ $(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ es una condición suficiente para que exista un tal levantamiento.

Ya que Y es conexo y localmente conectable por trayectorias es conectable por trayectorias. Asi para todo y Y, existe una trayectoria $g:I \to Y$ que une y_0 a y. Entonces f g es una trayectoria en X con origen x_0. Sea $g:I \to \tilde{X}$ una trayectoria cuyo origen es $\tilde{x}_0$ y tal que p $g=f$ g. Definimos $f(y)=g(1)$.

Para justificar esta definición tenemos que demostrar que $f(y)$ es independiente de la elección de la trayectoria g.

Por el lema 2.3.3 vemos que la definición de f es independiente de la trayectoria elegida en una misma clase de equivalencia.

Hemos visto hasta el momento que la función f está bien definida, por tanto lo único que nos falta ver es que esta función es continua.

Sea y Y arbitrario, $x=f(y)$ y V una vecindad de $\tilde{x}$ en $\tilde{X}$. Podemos elegir una vecindad elemental U de $x=p(\tilde{x})$ tal que la componente conexa U de $p^{-1}(U)$ que contiene a $\tilde{x}$ esté contenida en V.

Ya que f es continua, existe una vecindad conectable por trayectorias W de y tal que f(W) U. Basta mostrar que f(W) U. Para esto sea y' W, k:I->Y una trayectoria uniendo y' a y en W, g:I -> Y una trayectoria de yo a y. Levantando ambas trayectorias vemos que existe g tal que p g=f g y g(0)=$\tilde{x}_0$ y una trayectoria k tal que p k=f k y k(0)=g(1).

Así p (g*k)=f(g*k) y por la definición de f tenemos que f(y')=(g*k)(1)=k(1).

Además ya que p k=f k es una trayectoria de f(W) U y k(0)=$\tilde{x}$ U se sigue que f(y')=k(1) U. De aquí que f(W) U V, por tanto f es continua.

Una consecuencia inmediata al teorema anterior nos la da el siguiente:

Corolario 2.5.2 Sea Y un espacio topológico simplemente conexo, entonces para toda función continua f:(Y,yo)->(X,xo) y para todo $\tilde{x}_0$ $p^{-1}(xo)$ existe una función f:(Y,yo) -> (X,$\tilde{x}_0$) tal que p f=f.

Demostración.

Sea f:(Y,yo) -> (X.xo) una función continua y sea $\tilde{x}_0$ $p^{-1}(xo)$.

Ya que Y es un espacio topológico simplemente conexo se tiene que (Y,yo) es el grupo trivial, así f# (Y,yo) también es el grupo trivial, el cual claramente está contenido en p# (X,$\tilde{x}_0$). Aplicando ahora el teorema anterior obtenemos que existe el levantamiento f de f deseado.

3. Automorfismos de Revestimientos y Grupo discontinuo de Homeomorfismos

3.1 Homomorfismos y Automorfismos de Revestimientos

Nuestro siguiente propósito es obtener información acerca de todos los posibles revestimientos de un espacio X dado. Además encontraremos cuáles son las condiciones que tiene que satisfacer X para que tenga un revestimiento, asimismo vamos a definir cuándo dos revestimientos de X son isomorfos y mediante ésto dar una clasificación de los revestimientos, es decir, analizar bajo qué condiciones podemos afirmar que dos revestimientos de X son isomorfos.

Sean (X_1, p_1) y (X, p_2) dos revestimientos de X. Un <u>homomorfismo</u> de (X_1, p_1) en (X_2, p_2) es una función continua $f: X_1 \to X_2$ tal que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Se dice que un homomorfismo $f:X_1 \to X_2$ es un isomorfismo si existe un homomorfismo $f^{-1}:X_2 \to X_1$ tal que $f^{-1}\ f=id_1$ y $f\ f^{-1}=id_2$, donde $id_j: X_j \to X_j$, $j=0,1$, es el map identidad de X_j en si mismo.

Definición 3.1.1 Un isomorfismo $f:X \to X$ del revestimiento (X,p) en si mismo es llamado un automorfismo. El conjunto de todos los automorfismos de (X,p) será denotado por $Aut(X,p)$.

$Aut(X,p)$ forma un grupo bajo la composición, por lo siguiente:

Sea f $Aut(X,p)$, de aqui que $p\ f=p$, ya que f es un isomorfismo de (X,p) en si mismo existe $f^{-1}:X \to X$ homomorfismo tal que $f\ f^{-1}=id=f^{-1}\ f$. Asi $p=(p\ f)\ f^{-1}=p\ f^{-1}$ de aqui que f^{-1} es un homomorfismo tal que $f\ f^{-1}=f^{-1}\ f$ asi f^{-1} $Aut(X,p)$.

Ahora si f,g $Aut(X,p)$, entonces $f\ g$ $Aut(X,p)$. En efecto, ya que $f\ g$ es homomorfismo

$$p\ (f\ g)=(p\ f)\ g=p\ g=p$$

además $(f\ g)^{-1}=g^{-1}\ f^{-1}$ es tal que

$$(f\ g)\ (f\ g)^{-1}=(f\ g)^{-1}\ (f\ g)=id.$$

Asi $Aut(X,p)$ forma un grupo bajo la composición.

Un resultado interesante por si mismo y por el hecho de que nos será muy útil para probar algunos resultados posteriorés es el siguiente:

Teorema 3.1.2 Sea X un espacio conexo y localmente conectable por trayectorias. Sean (X_1, p_1) y (X_2, p_2) revestimientos de X; y sea $f: X_1 \to X_2$ un homomorfismo arbitrario. Entonces $f: X_1 \to X_2$ es una proyección de revestimiento para X_2.

Demostración.

En primer lugar veamos que $f: X_1 \to X_2$ es suprayectiva, para ésto consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Sean $\tilde{x}_2$ X_2 y $\tilde{x}_1$ X_1 arbitrarios. Ya que los espacios son conectables por trayectorias podemos tomar una trayectoria g de $f(\tilde{x}_1)$ a $\tilde{x}_2$. Entonces $p_2\ g: I \to X$ es una trayectoria que une los puntos

$$p_2\ f(\tilde{x}_1) = p_1(\tilde{x}_1) \quad y \quad p_2(\tilde{x}_2).$$

De los lemas 2.3.1 y 2.3.2 se sigue que existe una trayectoria $h: I \to X_1$ tal que $p_1\ h = p_2\ g$ y $h(0) = \tilde{x}_1$. Pero la trayectoria $f\ h: I \to X_2$ satisface $f\ h(0) = f(\tilde{x}_1)$ y $p_2\ f\ h = p_1\ h = p_2\ g$. Por lo tanto $f\ h$ se proyecta a g bajo p_2, pero por la unicidad de levantamientos $f\ h = g$. Así $f\ h(1) = g(1) = \tilde{x}_2$. Por lo tanto f es suprayectiva.

Veamos ahora que en realidad $f:X_1 \to X_2$ es en efecto una proyección de revestimiento.

Sea $\tilde{x}_2$ X_2, y U una vecindad elemental de $p(\tilde{x}_2)$ tanto para la proyección p_1 como para la p_2. Para probar lo deseado bastará verificar que las componentes conexas de $p_2^{-1}(U)$ son abiertos elementales para f. Para ésto, sea U_2 una componente conexa de $p_2^{-1}(U)$ que contiene a $\tilde{x}_2$. Ya que f es suprayectiva y $f^{-1}\ p_2^{-1}(U)=p_1^{-1}(U)$ existe una componente U_1 de $p_1^{-1}(U)$ tal que $f(U_1)$ U_2. Pero para cualquier componente de p_1^{-1} satisfaciendo $f(U_1)$ U_2 tenemos que

$$p_2|U_2\ \ f|U_1=p_1|U_1:U_1 \to U$$

es homeomorfismo.

Pero ya que $p_1|U_1$ y $p_2|U_2$ son homeomorfismos de U_1 y U_2 a U respectivamente, se sigue que $f|U_1=p_2|U_2^{-1}\ p_1|U_1:U_1 \to U_2$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, f es una proyección de revestimiento.

El siguiente resultado nos proporcionará condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un homomorfismo entre dos espacios de revestimiento X, para obtener éste necesitamos el concepto de functorial hasta el momento no mencionado, el cual veremos a continuación.

Intuitivamente podemos decir que un <u>functorial</u> es un map de una categoria C_1 a otra C_2 que <u>preserva identidades y composiciones</u> [19], donde por una categoria entenderemos una clase de objetos con la siguiente propiedad: para todo par de objetos X y Y, elementos de la clase, tenemos un conjunto de morfismos de X a Y que denotaremos hom(X,Y), y para cada terna de elementos de la clase X, Y y Z tenemos una función asociando a cualquier par de morfismos $f:X \to Y$ y $g:Y \to Z$ llamada composición $g\ f:X \to Z$. Estos morfismos tienen que cumplir a su vez los siguientes axiomas:

a) Si $f:X \to Y$, $g: Y \to Z$ y $h: Z \to W$, entonces

$$h\ (g\ f)=(h\ g)\ f:\ X \to W$$

b) Para todo objeto Y existe un morfismo $I_Y:Y \to Y$ tal que si $f: X \to Y$, entonces $I_Y\ f=f$ y si $h: Y \to Z$, entonces $h\ I_Y=h$.

Las categorias que vamos a utilizar son las siguientes: C_1 consistira de todos los espacios topológicos y como morfismos tomaremos todas las funciones continuas entre estos espacios, C_2 consistira de la clase de todos los grupos y como morfismos entre dos grupos cualesquiera consideraremos los homomorfismos entre éstos.

Teorema 3.1.3 Sean (X_1,p_1) y (X_2,p_2) dos revestimientos de un espacio X. Entonces existe un homomorfismo $f:X_1 \to X_2$ si y sólo si existen $\tilde{x}_1$ X_1 y $\tilde{x}_2$ X_2 tales que $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$, $x_0=p_1(\tilde{x}_1)$ y $p_{1\#}(X_1,\tilde{x}_1)$ es conjugado en (X,x_0) a un subgrupo de $p_{2\#}(X_2,\tilde{x}_2)$.

Demostración.

Supongamos que existe un homomorfismo $f:X_1 \to X_2$. Sean $\tilde{x}_1$ X_1

y $\tilde{x}_2$ X_1. Ya que $p_2\ f=p_1$ tenemos que $x_0=p_1(\tilde{x}_1)=p_2(\tilde{x}_2)$.

Ahora aplicando el teorema 2.5.1 y el hecho de que p -> p# es functorial, podemos concluir que $p_{2\#}\ f_\#\ (X_1,\tilde{x}_1) = p_{1\#}\ (X_1,\tilde{x}_1)$. Ya que f es una proyección de revestimiento, por el teorema 2.4.1, podemos concluir que $f_\#$ es un momomorfismo, asi $f_\#$ es un isomorfismo sobre su imagen. De aqui que $p_{1\#}\ (X_1,\tilde{x}_1)$ es isomorfo a un subgrupo de $p_{2\#}\ (X_2,\tilde{x}_2)$, al cual es conjugado.

Reciprocamente, supongamos que existe $g\ \ (X,x_0)$ tal que

$$g\ p_{1\#}\ (X_1,\tilde{x}_1)\ g^{-1}\ \ p_{2\#}\ (X_2,\tilde{x}_2).$$

Entonces

$$p_{1\#}\ (X_1,\tilde{x}_1)\ \ g^{-1}\ p_{2\#}\ (X_2,\tilde{x}_2)\ g.$$

Por el teorema 2.4.2 existe $x_3\ \ p_2^{-1}p_2(\tilde{x}_2)$ tal que

$$g^{-1}\ p_{2\#}\ (X_2,\tilde{x}_2)\ g=p_{2\#}\ (X_2,x_3)$$

Por lo tanto $p_{1\#}\ (X_1,\tilde{x}_1)\ \ p_{2\#}\ (X_2,\tilde{x}_3)$. Aplicando ahora el teorema 2.5.1, existe $h:(X_1,\tilde{x}_1) \to (X_2,\tilde{x}_3)$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, phantom, "p_1"] & & X_2 \arrow[dl, phantom, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

es decir, existe un homomorfismo entre (X_1,p_1) y (X_2,p_2).

El teorema que veremos a continuación es muy importante ya que éste es una herramienta para la clasificación de los revestimientos, a saber nos dice cuándo dos revestimientos son isomorfos.

Teorema 3.1.4 Sean (X_1, p_1) y (X_2, p_2) revestimientos de X. Entonces existe un isomorfismo $f: X_1 \to X_2$ si y sólo si dados $\tilde{x}_1$ X_1 y $\tilde{x}_2$ X_2 tales que $p_1(\tilde{x}_1)=p_2(\tilde{x}_2)=x_0$, entonces $p_{1\#}$ $(X_1, \tilde{x}_1)$ y $p_{2\#}$ $(X_2, \tilde{x}_2)$ son conjugados en (X, x_0).

Demostración.

Supongamos que existe un isomorfismo $f: X_1 \to X_2$, entonces f es un homomorfismo y por lo tanto tenemos que p_2 $f=p_1$ así

$$p_{1\#} \quad (X_1, \tilde{x}_1)=p_{2\#}\ f_\# \quad (X_1, \tilde{x}_1)=p_{2\#} \quad (X_2, f(\tilde{x}_1)).$$

Pero ya que $\tilde{x}_2$ y $f(\tilde{x}_1)$ están en la misma fibra, entonces $p_{2\#}$ $(X_2, f(X_1))$ y $p_{2\#}$ $(X_2, \tilde{x}_2)$ son conjugados, por lo tanto

$$p_{1\#} \ (X_1, \tilde{x}_1)=h\ p_{2\#} \ (X_2, \tilde{x}_2)\ h^{-1}.$$

Supongamos ahora que los grupos $p_{1\#}$ $(X_1, \tilde{x}_1)$ y $p_{2\#}$ $(X_2, \tilde{x}_2)$ son conjugados en (X, x_0), esto es, existe h (X, x_0) tal que se cumple la igualdad anterior.

Por el teorema 2.4.2 existe $\tilde{x}_3$ $p_2^{-1}(x_0)$ tal que

$$p_{2\#} \quad (X_2, \tilde{x}_3)=h\ p_{2\#} \quad (X_2, \tilde{x}_2)\ h^{-1}.$$

Aplicando ahora el teorema 2.5.1, tomando $(Y, y_0)=(X_1, \tilde{x}_1)$ y f como la proyección $p_1: (X_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$ existe

$$f: (X_1, \tilde{x}_1) \to (X_2, \tilde{x}_3) \text{ tal que } p_2\ f=p_1.$$

Así f es un homomorfismo.

Pero ya que $p_{1\#}$ $(X_1, \tilde{x}_1) = p_{2\#}$ $(X_2, \tilde{x}_3)$ nos permite aplicar nuevamente el teorema 2.5.1 y así concluir que existe un homomorfismo $g:(X_2, \tilde{x}_3) \to (X_1, \tilde{x}_1)$. Entonces $g\ f: X_1 \to X_1$ es un homomorfismo tal que $p_1\ (g\ f) = (g\ f)$ y ya que $g\ f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1$ podemos concluir a partir del lema 2.3.2 que $g\ f = id.$ en X_1. Análogamente tenemos que $f\ g = id.$ en X_2, así $f: X_1 \to X_1$ es un isomorfismo.

Definición 3.1.5 Sea (X, p) un revestimiento de X, decimos que (X, p) es un <u>revestimiento universal</u> de X si X es un espacio simplemente conexo, es decir, si el grupo fundamental de X en cualquier punto es trivial.

Observación. Los ejemplos 2.2 (b) y 2.2 (c) son ejemplos de revestimientos universales.

Lema 3.1.6 Sea (X_1, p_1) un revestimiento universal de X, si (X_2, p_2) es cualquier revestimiento, entonces existe un homomorfismo $f: X_1 \to X_2$.

Demostración.

Sean x_0 X, $\tilde{x}_1$ $p_1^{-1}(x_0)$ y $\tilde{x}_2$ $p_2^{-1}(x_0)$ arbitrarios ya que $(X_1, \tilde{x}_1)$ es trivial, éste es conjugado en (X, x_0) a un subgrupo de $p_{2\#}$ (X_2, x_2), a saber, al subgrupo identidad. Aplicando ahora el teorema 3.1.3 tenemos que existe un homomorfismo $f: X_1 \to X_2$.

3.2 Acción del grupo (X,x) sobre el conjunto $p^{-1}(x)$.

Para continuar con el estudio del grupo de automorfismos de un espacio de revestimiento (X,p) de X, definiremos una acción del grupo (X,x) sobre el conjunto $p^{-1}(x)$ para cualquier x X.

La definición de esta acción es muy natural, de hecho ya la hemos visto anteriormente en la demostración del lema 2.3.4 si tomamos el caso particular de una trayectoria cerrada.

Veamos esto nuevamente, sea f (X,x_0) definimos

$$f^{-}:p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_0)$$

de la forma siguiente, si $\tilde{x}_0$ $p^{-1}(x_0)$, sea $f:I \to X$ el levantamiento de f con punto inicial en x_0, definimos $f^{-}(\tilde{x}_0)=f(1)$. Por la unicidad de levantamientos al espacio de revestimiento f^{-} está bien definida.

Obsérvese que $f^{-}(x_0)$ es nuevamente un elemento de $p^{-1}(x_0)$.

Ya que $(f\ g)^{-}=f^{-}\ g^{-}$, la relación $f \to f^{-}$ define una acción del grupo (X,x_0) sobre el conjunto $p^{-1}(x_0)$.

A continuación veremos en el siguiente teorema que esta acción es transitiva.

Teorema 3.2.1 El grupo (X,x) actúa transitivamente sobre el conjunto $p^{-1}(x)$.

Demostración.

Sean $\tilde{x}_0,\tilde{x}_1$ X arbitrarios, ya que X es conectable por trayectorias existe una clase de trayectorias f en X uniendo x_0 y $\tilde{x}_1$. Sea f=p#f, así f es la clase de equivalencia de trayectorias cerradas y $f^{-}(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_1$, por lo tanto la acción es transitiva.

Otros resultados de gran importancia son los siguientes:

Teorema 3.2.2 Sean (X,p) un revestimiento de X y $\tilde{x}_0$, $\tilde{x}_1$ $p^{-1}(x_0)$ dos puntos arbitrarios de la fibra. Entonces existe w Aut(X,p) tal que $w(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_1$ si y sólo si para toda clase f de trayectorias uniendo $\tilde{x}_0$ y $\tilde{x}_1$,

$$p\#(f) \quad N(H) \text{ donde } H=p\# \quad (X,\tilde{x}_0)$$

y donde

$$N(H)=\{g \quad (X,x_0): g \quad (X,x_0)\ g^{-1}= \ (X,x_0)\}$$

es el normalizador de H en (X,xo).

Demostración.

Supongamos que existe w Aut(X,p) tal que $w(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_1$. Sea f una clase de trayectorias uniendo $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_1$. Ya que w es un automorfismo p w=p, luego pasando a los homomorfismos inducidos tenemos

$$H=p\# \quad (X,\tilde{x}_0)=p\# \ w\# \quad (X,X_0)=P\# \quad (X,\tilde{x}_1)=f^{-1}\ H\ f$$

donde f=p#(f), así f N(H).

Recíprocamente, sea f una clase de trayectorias uniendo $\tilde{x}_0$ y $\tilde{x}_1$ y f=p#(f). Supongamos que f N(H), es decir,

$$f^{-1}\ p\# \quad (X,\tilde{x}_0)\ f=p\# \quad (X,\tilde{x}_0).$$

Aplicando ahora el teorema 3.1.4 concluimos que existe un isomorfismo $w:(X,\tilde{x}_0) \to (X,\tilde{x}_1)$ de aquí que w Aut(X,p).

Teorema 3.2.3 Sea $H=p_\#$ $(X,\tilde{x}_o)$ (X,x_o), $N(H)$ el normalizador de H en (X,x_o). Entonces $Aut(X,p) \cong N(H)/H$.

Demostración.

Sea $f:Aut(X,p) \to p^{-1}(x_o)$ la función definida como sigue: $f(w)=w(\tilde{x}_o)$. Esta función es inyectiva ya que si $f(w)=f(w')$, entonces $w(\tilde{x}_o)=w'(\tilde{x}_o)$. Pero w y w' son automorfismos, asi $p\ w=p$ y $p\ w'=p$. Aplicando ahora el lema 2.3.2 se tiene que $w=w'$.

Consideremos ahora la función F: $(X,\tilde{x}_o) \to p^{-1}(\tilde{x}_o)$ definida como $F(f)=f^{\sim}(\tilde{x}_o)$, donde $\tilde{x}_o$ es un punto fijo en la fibra. Ya que la acción sobre $p^{-1}(x_o)$ es transitiva podemos concluir que F es suparayectiva.

Supongamos ahora que $F(f)=F(g)$, asi $f^{\sim}(\tilde{x}_o)=g^{\sim}(\tilde{x}_o)$ por lo tanto $(g^{\sim})^{-1}$ $f^{\sim}(\tilde{x}_o)=\tilde{x}_o$. En vista de la unicidad del levantamiento tenemos que g^{-1} f $H=p_\#$ $(X,\tilde{x}_o)$, de aqui que F: $(X,x_o)/H \to p^{-1}(x_o)$ define una función biyectiva.

Sea $F^{\sim}:=F^{-1}$ $f:Aut(X,p) \to (X,x_o)/H$, de la forma en que está definida $F^{\sim}$ vemos claramente que ésta es inyectiva.

Una forma alternativa de describir a $F^{\sim}$ la cual nos permitirá ver más fácilmente cuál es su imagen y además utilizaremos mas tarde es la siguiente:

Sea w $Aut(X,p)$, $w(\tilde{x}_o)$ $p^{-1}(x_o)$, y f una clase de trayectorias uniendo $\tilde{x}_o$ y $w(\tilde{x}_o)$, entonces $f=p_\#(f)$ es un elemento de

(X, x_0). Con esta notación observamos que $F^-(w) = H\ f$.

Aplicando ahora el teorema 3.2.2 observamos que $f = p_\#(f)$ en realidad es un elemento de $N(H)$ así la imagen del mapeo F^- es $N(H)/H$.

Por lo tanto $F^-: Aut(X,,P) \to N(H)/H$ es una función biyectiva.

Ahora lo único que nos falta por checar es que F^- es un homomorfismo.

Sean w, w' $Aut(X,p)$, h una trayectoria en X uniendo $\tilde{x}_0$ y $w(\tilde{x}_0)$ y j una trayectoria uniendo $\tilde{x}_0$ y $w'(\tilde{x}_0)$; entonces $w'\ h$ es una trayectoria en X que une $w'(\tilde{x}_0)$ a $w'\ w(\tilde{x}_0)$ y $j*(w'\ h)$ es una trayectoria que une $\tilde{x}_0$ y $w'\ w(\tilde{x}_0)$. Utilizando ahora la descripción alternativa de F^- dada anteriormente y haciendo $h=[h]$, $j=[j]$ tenemos que

$$F^-(w'\ w) = H(p_\#(j\ w'_\#) = H(p_\# j)\ H(p_\# h) = F^-(w')\ F^-(w),$$

locual demuestra que $F^-: Aut\ (X,p) \to N(H)/H$ es un isomorfismo.

La definición siguiente, de revestimiento regular, nos proporcionará resultados que se usan muy frecuentemente.

Definición. Se dice que un revestimiento (X,p) de X es <u>regular</u> si $p_\#$ $(X,\tilde{x}_0)$ es un subgrupo normal de (X,x_0).

Unos corolarios inmediatos al teorema anterior son los siguientes.

Corolario 3.2.4 Sea (X,p) un revestimiento regular de X, entonces $Aut(X,p) \cong$ $(X,x_0)/p_\#$ $(X,\tilde{x}_0)$ para cualquier $\tilde{x}_0$ elemento de

$p^{-1}(x_0)$.

Demostración.

Ya que (X,p) es regular, $p_\#\ (X,\tilde{x}_0)$ es un subgrupo normal de (X,x_0) para todo $\tilde{x}_0\ p^{-1}(x_0)$, por lo tanto para todo $\tilde{x}_0\ p^{-1}(x_0)$

$$N(p_\#\ (X,\tilde{x}_0)) = \ (X,x_0),$$

aplicando ahora el teorema 3.2.3 obtenemos que

$$Aut(X,p) \cong \ (X,x_0)/p_\#\ (X,\tilde{x}_0).$$

Corolario 3.2.5 Sea (X,p) un revestimiento universal de X, entonces $Aut(X,p) \cong \ (X,x_0)$.

Demostración.

Ya que (X,p) es un revestimiento universal, $(X,\tilde{x}_0)$ es el grupo trivial para todo $\tilde{x}_0\ p^{-1}(x_0)$, de donde $p_\#\ (X,\tilde{x}_0)$ también es trivial, así $(X,x_0)/p_\#\ (X,\tilde{x}_0) \cong \ (X,x_0)$. Aplicando ahora el corolario anterior obtenemos que $Aut(X,p) \cong \ (X,x_0)$.

Ejemplos 3.2.6

a) Consideremos el revestimiento (R,p) del circulo S^1, definido por $p(t)=(\text{sen } t, \cos t)$, para todo $t\ R$. Ya que R es simplemente conexo, (R,p) es un revestimiento universal de S^1. Determinemos el grupo de automorfismos de este revestimiento. De la periodicidad de las funciones sen t y cos t, $T_n : R \rightarrow R$ definida por $T_n(t)=t+2\ n$ es un automorfismo, para toda n. Más aún, si x es un punto cualquiera de S^1 y t_1 y t_2 son dos puntos arbitrarios de $p^{-1}(x)$ entonces existe un entero n tal que $T_n(t_1)=t_2$. Esto implica que todo automorfismo de revestimiento es una T_n. Puesto que el grupo $\{T_n : n \; Z\}$ es cíclico infinito, el corolario 3.2.5 nos dice que (S^1) es cíclico infinito. Esta es otra forma de demostrar que $(S^1) = Z$.

b) Sea $p: S^2 \to P$ la proyección natural de la 2-esfera en su espacio cociente, el plano proyectivo; entonces (S^2, p) es un revestimiento de P, ya que S^2 es simplemente conexo, este revestimiento es universal. En este caso el mapeo antipodal $T: S^2 \to S^2$ definido por $T(x,y,z)=(-x,-y,-z)$ genera el grupo $Aut(S^2, p)$. Aplicando ahora el corolario 3.2.4 podemos concluir que el grupo fundamental de P es isomorfo a Z_2.

Sea (X,p) un revestimiento de X, ya que p es una función abierta, X tiene la topología cociente inducida por p. Así podemos considerar a X como el resultado de aplicar un proceso de identificación a los puntos de X, esto es, para cada $x \; X$ el conjunto de puntos $p^{-1}(x)$ se identifica, bajo p, a un sólo punto. Hemos visto que el grupo de automorfismos $Aut(X,p)$ permuta los puntos del conjunto $p^{-1}(x)$. Pero en general no es cierto que el espacio cociente $X/Aut(X,p)$ sea homeomorfo a X, ya que pueden existir puntos $\tilde{x}, \tilde{y} \; p^{-1}(x)$ para los cuales no existe ningún automorfismo $w \; Aut(X,p)$ tal que $w(\tilde{x}) = \tilde{y}$, es decir, no siempre podemos decir que el grupo de automorfismos $Aut(X,p)$ actúa transitivamente sobre $p^{-1}(x)$.

Una condición necesaria y suficiente para que esto ocurra no la proporciona el siguiente.

Teorema 3.2.7 Sea (X,p) un revestimiento de X. El grupo de automorfismos $Aut(X,p)$ actúa transitivamente sobre $p^{-1}(x)$, x X, si y sólo si (X,p) es un revestimiento regular de X.

Demostración.

Supongamos que $Aut(X,p)$ actúa transitivamente sobre la fibra $p^{-1}(x_0)$ y sea f (X,x_0). Un levantamiento de f (tómese a f mismo como el representante de su clase) es una trayectoria que une los puntos $\tilde{x}_0$ y $\tilde{x}_1$, donde $\tilde{x}_0,\tilde{x}_1$ $p^{-1}(x_0)$. Sea w un automorfismo tal que $w(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_1$, analizando la demostración del teorema 3.2.2 vemos que $p_\#$ $(X,\tilde{x}_0)=f^{-1}$ $p_\#$ $(X,\tilde{x}_1)$ f así $H=f^{-1}$ H f para toda f (X,x_0), es decir, (X,p) es un revestimiento regular.

Recíprocamente, si (X,p) es un revestimiento regular $H=p_\#$ $(X,\tilde{x}_0)$ es un subgrupo normal de $N(H)=$ (X,x_0). Aplicando el teorema 3.2.2. obtenemos que $Aut(X,p)$ actúa transitivamente sobre $p^{-1}(x_0)$.

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es que si (X,p) es un revestimiento regular de X, entonces X es homeomorfo al espacio cociente $X/Aut(X,p)$, donde la relación de equivalencia que lo define es la siguiente: decimos que $\tilde{x}_0$, $\tilde{x}_1$ X son equivalentes si y sólo si existe w $Aut(X,p)$ tal que $w(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_1$.

En base a lo anterior surge una pregunta bastante natural:

Sea X un espacio topológico y G un grupo de homeomorfismos de X. Sea $p:X \to X/G$ la proyección natural de X sobre el espacio cociente. ¿ Bajo qué condiciones (X,p) es un revestimiento regular de X/G con $G=Aut(X,p)$?.

Analicemos un poco la pregunta anterior.

Si (X,p) es un revestimiento regular de X, entonces $Aut(X,p)$ actúa sobre X sin puntos fijos. Además la órbita de todo punto $\tilde{x}$ X de la acción del grupo $Aut(X,p)$ es un subgrupo cerrado y discreto de X. Es más, se tiene la siguiente condición: todo punto $\tilde{x}$ X tiene una vecindad U tal que si w,w' $Aut(X,p)$ y $w=w'$, entonces $w(U)$ $w'(U)=0$. Basta considerar una vecindad elemental U de $x=p(\tilde{x})$ y tomar una componente U de $p^{-1}(U)$ que contenga a $\tilde{x}$.

Esto nos lleva directamente a la siguiente:

Definición. Sea G un grupo de homeomorfismos de un espacio Y. Se dice que G actúa <u>propiamente discontinuamente</u> sobre Y si para todo y Y, existe una vecindad V de y tal que si g_1,g_2 G y $g_1=g_2$, entonces $g_1(V)$ $g_2(V)=0$.

Obsérvese que esta condición implica que G actúa sin puntos fijos, es decir, si g G es tal que $g(y)=y$, entonces $g=id$.

En base a las observaciones anteriores podemos responder a la pregunta, anteriormente planteada, con el siguiente:

Teorema 3.2.8 Sea Y un espacio conexo y localmente conectable por trayectorias, G un grupo propiamente discontinuo de homeomorfismos de Y. Entonces la proyección canónica $p:Y \to Y/G$ es una proyección de revestimiento y (Y,p) es un revestimiento regular de Y. Además $G=Aut(Y,p)$.

Demostración.

Un resultado importante de topología dice que si $p:X \to X/G$ es la proyección natural, p es abierta si y sólo si $G(U)= \ g(U)$ donde la unión se toma sobre todos los elementos de G, para todo abierto U en X [9] (pag. 125). Para mostrar lo requerido, sea U un abierto de X arbitrario. Ya que G es un grupo propiamente discontinuo de homeomorfismos $G(U)$ es una unión de abiertos y por lo tanto es abierto. Así, p es una función abierta.

Sea ahora $x \ Y/G$ y $y \ p^{-1}(x)$. Por hipótesis existe una vecindad V de y, que podemos suponer abierta y conectable por trayectorias tal que si $g_1, g_2 \ G$ y $g_1 = g_2$, entonces $g_1(V) \ g_2(V)=0$.

Sea $W=p(V)$, W es una vecindad de x abierta y conectable por trayectorias y además $p^{-1}(W)= \ g(V)$ donde la unión se toma sobre todos los elementos de G. Una restricción $p|g(V):g(V) \to W$ es continua abierta y biyectiva, por lo tanto un homeomorfismo. De aquí concluimos que W es una vecindad elemental de x en Y/G y puesto que x fue arbitrario, concluimos que $p:Y \to Y/G$ es una proyección de revestimiento.

Pero $G \ Aut(Y,p)$ y como G actúa transitivamente sobre la fibra $p^{-1}(x)$, si $w \ Aut(Y,p)$ es tal que $w(y_0)=y_1$, donde $y_0, y_1 \ p^{-1}(x)$, existe $g \in G$ tal que $g(y_0)=y_1$ por lo tanto $G=Aut(Y,p)$.

Por último, ya que G actúa transitivamente sobre la fibra $p^{-1}(x)$ y aplicando el teorema 3.2.7 obtenemos que (Y,p) es un revestimiento regular.

Ejemplos 3.2.9

a) Sea $Y=\mathbb{R}$ y para cada entero n, $w_n:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $w_n(x)=x+n$. Sea $G=\{w_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Entonces G es un grupo propiamente discontinuo de homeomorfismos de $\mathbb{R}$; en efecto, si para cada $x \in \mathbb{R}$ tomamos por vecindad elemental U el intervalo abierto $(x-1/2,x+1/2)$, los abiertos $w_n(U)$ son ajenos dos a dos. Entonces por el teorema que acabamos de demostrar $\mathbb{R}$ es un revestimiento regular del espacio cociente $\mathbb{R}/G$. Pero $\mathbb{R}/G \cong S^1$. Con este resultado hemos demostrado nuevamente que la cubierta universal de S^1 es $\mathbb{R}$.

b) Sea $Y=S^n$, la n-esfera en $\mathbb{R}^{n+1}$ y sea $T:S^n \to S^n$ la función antipodal definida por $T(x)=-x$, para todo $x \in S^n$. Ya que T^2 es la identidad, T genera un grupo G de homeomorfismos de S^n que es un grupo cíclico de orden dos. Y puesto que G es propiamente discontinuo, aplicando nuevamnente el teorema 3.2.8 vemos que, S^n es el espacio de revestimiento del n-espacio proyectivo real S^n/G. Puesto que S^n es simplemente conexo, el revestimiento es universal y así el grupo fundamental del n-espacio proyectivo real es cíclico de orden dos.

3.3 Existencia de Revestimientos y el Teorema de Clasificación.

Hemos visto hasta el momento que un revestimiento (X,p) de X está únicamente determinado, salvo isomorfismos, por la clase de conjugación del subgrupo p# (X,x̃) de (X,x). Estos nos da la pauta para preguntarnos qué pasa si tenemos un espacio topológico X y una clase de conjugación de (X,x), ¿existirá un revestimiento (X,p) de X tal que p# (X,x̃) pertenezca a la clase de conjugación dada ?. La respuesta a esta pregunta es sí en caso de que en X se verifiquen algunas hipótesis adicionales.

Veamos ahora qué tipo de condiciones adicionales tiene que satisfacer X para que se cumpla lo deseado.

Si existe un revestimiento (X,p) de X, entonces las vecindades elementales de un punto arbitrario x X tienen la siguiente propiedad. Sea U una vecindad elemental de x X, x̃ $p^{-1}(x)$, U una componente de $p^{-1}(U)$ que contiene al punto x̃, i:U -> X e i':U -> X las inclusiones, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{array}{ccc}
 & i\#' & \\
(U,\tilde{x}) & \text{------------->} & (X,\tilde{x}) \\
 & & \\
p\#' & & p\# \\
 & & \\
(U,x) & \text{------------->} & (X,x) \\
 & i\# &
\end{array}
$$

Ya que (X,x)=id. y $p\#'$ es un isomorfismo, $i\# = p\#\ i\#'\ p\#'^{-1}$ es el homomorfismo trivial. Pero esto significa que toda trayectoria cerrada en U se deforma en X a un punto.

El análisis anterior nos lleva naturalmente a la siguiente:

Definición 3.3.1 Sea X un espacio conexo y localmente conectable por trayectorias, y x X arbitrario. Un abierto U conectable por trayectorias tal que x U, se dice una _vecindad básica_ de x si el homomorfismo inducido $i\#$: (U,x) -> (X,x) es trivial.

Si cada x X tiene una vecindad básica, entonces se dice que X es _semilocalmente simplemente conexo_.

El análisis anterior muestra que una condición necesaria para que el espacio topológico X, conexo y localmente conectable por trayectorias, admita un revestimiento universal es que X seá un espacio semilocalmente simplemente conexo. Veremos a continuación que esta condición también es suficiente.

Pero antes introduciremos la noción de _grupoide fundamental_ G(X) del espacio X que utilizaremos a continuación.

G(X) es definido como el espacio cociente de

$$C(I,X)=\{f:I \to X : f \text{ es una trayectoria en } X\}$$

módulo la relación de equivalencia " $\simeq$ rel {0,1} ". Así, los elementos de G(X) son las clases de homotopia (rel {0,1}) de trayectorias $g:I \to X$ uniendo dos puntos arbitrarios en X.

Teorema 3.3.2 Sea X un espacio conexo, localmente conectable por trayectorias y semilocalmente simplemente conexo, entonces X admite un revestimiento universal.

Demostración.

Sea $G(X)$ el grupoide fundamental de X y xo X un punto base, definimos $X=\{f \quad G(X)$:el punto inicial de f sea $xo\}$ y $p:X \to X$ como $p(f)$=punto final de f.

Nuestro siguiente propósito es convertir a X en un espacio topológico conectable por trayectorias y mostrar que $p:X \to X$ es una función continua y abierta.

Para ésto, definimos para cada f X y U una vecindad básica de $x=p(f)$, definimos el subconjunto (f,U) X como sigue:

$(f,U)=\{f*g : g \; G(U)$ y $g \; T(U,x)\}$, donde $T(U,x)$ es el conjunto de trayectorias que unen $x=p(f)$ a algún punto de U.

Mediante estos conjuntos definiremos una topología en X, mostrando que $\{(f,U)\}$, con U una vecindad básica, constituye un sistema fundamental de vecindades para f.

i) Ya que $f=f*id$ en x se tiene que $(f,U)=0$.

ii) Si f' (f,U), entonces $(f',U)=(f,U)$.

En efecto, ya que existe g' tal que $f'=f*g'$, si f'' (f',U), entonces existe g'' tal que $f''=f'*g''=(f*g')*g''=f*(g'*g'')$ que es un elemento de (f,U) asi, (f',U) (f,U). Análogamente como

$$f=f'*g'^{-1} \quad (f',U)$$

se sigue que (f,U) (f',U) de donde podemos concluir que

$$(f,U)=(f',U).$$

iii) Dadas (f,U) y (f,U'), sea U'' una componente conectable por trayectorias de U U' que contenga a $x=p(f)$, entonces U'' es una vecindad básica, y (f,U'') (f,U) (f,U').

Estas propiedades muestran que

$$\{(f,U):U \text{ es vecindad básica en } x\}$$

constituye un sistema fundamental de vecindades para f.

Este sistema fundamental le proporciona a X una topología. Denotemos por el mismo símbolo X el espacio topológico.

iv) $p:X \to X$ es continua y abierta.

Sea f X arbitrario y U una vecindad básica de $p(f)$ X, entonces $p(f,U)=U$. Por tanto p es continua en f y ya que $p(f,U)$ es una vecindad de $x=p(f)$, p es abierta.

v) Veamos ahora que X es conectable por trayectorias, demostrando que id en x_0 (es decir, $id:X \to X$ definida por $id(\tilde{X})=x_0$), x_0 X puede ser unida mediante una trayectoria en X a cualquier punto f X.

Sea $f:I \to X$ un representante de la clase de f. Para cada s $[0,1]$ definimos $f_s(t)=f(st)$, t $[0,1]$, f_s une x_0 con $f(s)$ y $[f_0]=id$ en x_0 y $[f_1]=f$.

Sea $f':I \to X$, definida como sigue: $f'(s)=[f_s]=f_s$.

Obviamente $f'(0)=id$ en x_0, $f'(1)=f$ y $p\ f'(s)=f(s)$ se cumple. Para terminar nos falta demostrar que f' es continua en todo I. Para verificar ésto, sea s_0 I un punto arbitrario. Sea U una vecindad básica de $f(s_0)$, por la continuidad de f existe >0 tal que si $|s-s_0|<$, entonces $f(s)$ U, de donde para $|s-s_0|<$ tenemos que f_s (f_{s_0},U) y $f'(s)=f_s$ es continua en s_0.

Asi $f':I \to X$ es una trayectoria uniendo id. en x_0 y f por lo tanto X es conectable por trayectorias.

Debido a lo anterior, para probar el teorema debemos demostrar que (X,p) es en realidad un revestimiento de X y además que es universal. Para este fin demostraremos en primer lugar que $p|(f,U)$ es un homeomorfismo de (f,U) sobre U.

Hemos visto que $p(f,U)=U$,asi $p|(f,U)$ es una función suprayectiva. Supongamos ahora que $f*g$, $f*g'$ (f,U) tal que $p(f*g)=p(f*g')$, entonces $g\ g'^{-1}$ (U,x) donde $x=p(f)$. Ya que $i_\#: (U,x) \to (X,x)$ es trivial $i_\#g=i_\#g'$. Asi en $G(X)$ $f*g=f*g'$. Ahora, ya que p es continua, abierta y biyectiva $p|(f,U)$ es homeomorfismo de (f,U) sobre U.

Ahora mostraremos que las vecindades elementales que necesitamos son precisamente las vecindades básicas.

En efecto, ya que $p^{-1}(U)=$ (f_i,U) donde $\{f_i\}$ es el subconjunto de elementos de $G(X)$ uniendo x_0 y x, ya que $p|(f,U)$ es un homeomorfismo, para demostrar lo requerido basta verificar que los (f_i,U) son ajenos.

Si g (f_i, U) (f_j, U), entonces por i)

$$(g,U)=(f_I,U) \text{ y } (g,U)=(f_j,U)$$

de donde $(f_i,U)=(f_j,U)$.

Por lo tanto $p:X \to X$ es una proyección de revestimiento.

Para terminar con la demostración probaremos que X es simplemente conexo.

Tomemos un punto base $\tilde{x}_0=id$ en x_0 y sea f $(X,\tilde{x}_0)$. Sea f un representante de la clase de trayectorias $f=p\#(f)$. Entonces la trayectoria $f'':I \to X$ definida como antes por $s \to f_s$ une $\tilde{x}_0$ a f y cubre $f(s)$. Ya que $f=p\#(f')$, se sigue que la clase de f'' debe coincidir con la de f' y así en el punto final de f'', $f''(1)=f_1=f$. Por lo tanto f es el elemento identidad en (X,x_0). Además como $p\#$ es un monomorfismo, se tiene que $f'=1$ y ya que f fue arbitrario por tanto $(X,\tilde{x}_0)=\{1\}$.

Hemos demostrado hasta el momento la existencia de un revestimiento universal para X. El siguiente teorema nos dice que basta conocer este resultado para poder contestar la pregunta planteada anteriormente.

Veamos primero la siguiente:

Definición Sea (X,p) un revestimiento de X, diremos que (X,p) <u>corresponde a la clase de conjugación</u> de H (X,x_0) si existe $\tilde{x}_1$ $p^{-1}(x_0)$ tal que $p\#$ $(X,\tilde{x}_1)=H$.

Teorema 3.3.3. Sea X un espacio topológico conexo y localmente conectable por trayectorias. Si X admite un revestimiento universal, entonces para todo subgrupo H (X, x_0) existe un revestimiento (X, p) que corresponde a la clase de conjugación de H en (X, x_0).

Demostración.

Sea (Y, q) un revestimiento universal de X. Como Y es simplemente conexo, el isomorfismo del teorema 3.2.3 $F^- = F^{-1} f$ nos da que $F^- : Aut(Y, q) \to (X, x_0)$ es un isomorfismo.

Sea G el subgrupo de $Aut(Y, q)$ definido por $G = (F^-)^{-1}(H)$; entonces $F^- | G : G \cong H$.

Fijando y_0 $q^{-1}(x_0)$ podemos factorizar la función F^- como sigue:

$$Aut(Y,q) \xrightarrow{\quad f \quad} q^{-1}(x_0) \xrightarrow{\quad F^{-1} \quad} (X, x_0)$$

Este isomorfismo puede ser descrito de la manera siguiente: $F^-(w) = f$ si y sólo si $w(y_0) = f(1)$, es decir, es igual al extremo final del levantamiento de f con punto inicial y_0.

Ya que $Aut(Y, q)$ actúa sin puntos fijos G $Aut(Y, q)$ es un grupo totalmente discontinuo de homeomorfismos Y. Sea $X = Y/G$. Aplicando ahora el teorema 3.2.8 vemos que la proyección canónica $r: Y \to X$ es un revestimiento (universal) sobre X.

Sea $p: X \to X$ la función inducida por q. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$Y \xrightarrow{\quad r \quad} X=Y/G$$

$$q \qquad\qquad\qquad p$$

$$X$$

Afirmamos que p es una proyección de revestimiento. En efecto, si U es una vecindad elemental de x X, entonces $q^{-1}(U)=\ U_k$. Pero el subgrupo G permuta los U_k por homeomorfismos

$$p^{-1}(U)=r[\ U_k]=[\ U_k]/G=\ U'_j,\ j\ p^{-1}(x).$$

Cada $U_j{}'\cong U_k$ para algún k y $q|U_k:U_k\cong U$.

Asi $p|U_j{}'=(q|U_k)\ (r|U_k)^{-1}:U_j{}'\ \to U$ es un homeomorfismo, por tanto $p:X\ \to X$ es una proyección de revestimiento.

Para terminar, lo único que nos falta demostrar es que

$$p_\#\ (X,x_0)=H \text{ para algún } x_0\ p^{-1}(x_0).$$

Sea f $(X,\tilde{x}_0)$ donde $\tilde{x}_0=r(y_0)$.

Por el análisis descrito de la función $F^{\sim}$, $p_\#(f)$ H si y sólo si existe w G tal que $w(y_0)=f^{\sim}(y_0)=f(1)$, donde f es el levantamiento de f con punto inicial y_0.

Ya que Y es simplemente conexo, $Aut(Y,p) \simeq (X)$. Y puesto que (X) actúa en $r^{-1}(\tilde{x}_c)$ y como $f^{-}(y_0)=f(1)$, tenemos que existe w G tal que $w(y_0)=f(1)$, lo cual queríamos demostrar. Por lo tanto $p_{\#}(X,\tilde{x}_0)=H$.

Combinando ahora el teorema .1.4 y éste último teorema podemos enunciar el teorema de clasificación con el cual finalizamos el capitulo.

Teorema 3.3.4 Sea X un espacio topológico conexo, localmente conectable por trayectorias y semilocalmente simplemente conexo. Entonces a toda clase de conjugación de un subgrupo H (X,x_0) le corresponde un revestimiento (X,p) de X, es decir existe $\tilde{x}_1$ $p^{-1}(x_0)$ tal que $p_{\#}(X,\tilde{x}_1)=H$. Además dos revestimientos de este tipo serán isomorfos si y sólo si éstos corresponden a la misma clase de conjugación del subgrupo H (X,x_0).

4. Superficies de Riemann.

Definicion 4.1 Una Superficie de Riemann es un espacio topológico Hausdorff conexo S junto con una cubierta abierta $\{U_i\}$ de S y una familia de homeomorfismos $\{z_i\}$, donde cada z_i está definido de U_i S al abierto $V_i = z_i\{U_i\}$ C, donde eata familia cumple además con la siguiente propiedad: para todo i,j tal que $U_i \quad U_j = 0$, la composición de homeomorfismos

$$z_j \quad z_i^{-1} : z_i(U_i \quad U_j) \to z_j(U_i \quad U_j)$$

es conforme.

La familia $\{(U_i, z_i)\}$ es llamada <u>una estructura conforme sobre la Superficie S</u>. Un par arbitrario (U,z), donde U es un abierto de S y z es un homeomorfismo de U sobre un conjunto abierto V del plano complejo se dice que es <u>compatible con la estructura conforme</u> $\{(U_i, z_i)\}$ si podemos adicionar (U,z) a $\{(U_i, z_i)\}$ y que el resultado siga siendo una estructura conforme para S.

Dos estructuras conformes $\{(U_i, z_i)\}$ y $\{(U_i, \tilde{z}_i)\}$ sobre la mismo espacio topológico S se dice que <u>son equivalentes</u> si todo par (U_i, z_i) es compatible con la estructura $\{(U_i, \tilde{z}_i)\}$.

Se dice que dos Superficies de Riemann

$$S=(S,\{(U_i\,,z_i\,)\}) \quad y \quad S=(S,\{(U_i\,,z_i\,)\})$$

son equivalentes si como espacio topológico son iguales y además tienen estructuras conformes equivalentes.

Para simplificar la notación utilizaremos sólamente S para denotar la Superficie de Riemann, y a $\{(U_i\,,z_i\,)\}$ le llamaremos usualmente un sistema de cartas coordenadas y a la composición de homeomorfismos $z_j\,(z_i\,)^{-1}$ definidos en $U_i \quad U_j=0$ se les llamará funciones de transición.

Ejemplos 4.1.1

a) El ejemplo más sencillo de una Superficie de Riemann no compacta es el plano complejo. La única carta coordenada (C,id) define la estructura conforme sobre C.

b) Si S es una Superficie de Riemann, entonces cualquier subconjunto abierto y conexo D de S es también una Superficie de Riemann. El sistema de cartas coordenadas de D es obtenido restringiendo el sistema de cartas coordenadas de S a D. Así todo conjunto abierto conexo (es decir, un dominio) de C es también una Superficie de Riemann.

c) La compactificación a un punto C { }, de C, normalmente conocida como el plano extendido o la esfera de Riemann, es el ejemplo más sencillo de una Superficie de Riemann compacta.

Aqui $\{(U_1\,,z_1\,),(U_2\,,z_2\,)\}$ es un sistema de cartas coordenadas donde $U_1=C$, $U_2=C\backslash\{0\} \quad \{\ \}$, $z_1(z)=z$ y $z_2(z)=1/z$.

Las funciones de transición son las siguientes:

para i,j $\{0,1\}$ e $i=j$ z_j $z_i^{-1}: z_i(U_1$ $U_2) \to z_j(U_1$ $U_2)$ está definida como

$$z_j\ (z_i)^{-1}(z)=1/z$$

para todo z $z_i(U_1$ $U_2)$.

Y para i $\{0,1\}$ z_i $(z_i)^{-1}: z_i(U_i) \to z_i(U_i)$ está definida como

$$z_i\ (z_i)^{-1}(z)=z$$

para todo z $z_i(U_i)$.

4.2 La imagen simétrica de una Superficie de Riemann y la doble de una Superficie de Riemann con borde.

Definición 4.2.1 Una <u>Superficie de Riemann con borde S</u> es un espacio topológico Hausdorff conexo junto con una cubierta abierta $\{U_i\}$ se S y una familia de homeomorfismos $\{z_i\}$ donde, para cada i, z_i, definido en U_i, mapea èste sobre un subconjunto relativamente abierto V_i del semiplano cerrado de C definido como el subconjunto de puntos $z=x+iy$ de C tales que $y \geq 0$. Además esta familia de homeomorfismos cumple con la siguiente propiedad: para todo i,j tales que U_i $U_j=0$, z_j $(z_i)^{-1}$ es conforme en los puntos en los puntos interiores de $V_i=z_i(U_i)$.

Si un punto P S es mapeado por un homeomorfismo z_i a algún punto x del eje real, todo homeomorfismo de la familia $\{z_i\}$ definido en P tiene la misma propiedad. El conjunto B, de puntos de S, con esa propiedad forman el <u>borde</u> de la Superficie de Riemann S.

El borde, junto con las restricciones a él de los homeomorfismos z_i forman una variedad de dimensión uno no necesariamente conexa.

Sea $S=(S,\{U_i, z_i\})$ una Superficie de Riemann (con borde o sin él), para cada i, definamos $z_i^- := r\, z_i$, donde $r(z)=z$ es la reflección del plano complejo sobre el eje real. Nótese que z_i^- es también un homeomorfismo.

Definición 4.2.2 La imagen simétrica de S está definida para ser la Superficie $S^-=(S,\{(U_i, z_i^-)\})$.

Obsérvese que la Superficie S^- es nuevamente una Superficie de Riemann ya que para todo i, j tal que $U_i \quad U_j=0$ los homeomorfismos

$$z_j^- \; (z_i^-)^{-1} : z_i^-(U_i \quad U_j) \to z_j^-(U_i \quad U_j)$$

son conformes.

A continuación veremos que la imagen simétrica S^- de una Superficie de Riemann con borde S puede ser pegada, a lo largo de los puntos de éste, a la Superficie de Riemann original obteniendo una nueva Superficie.

Definamos $S^\#$ como el conjunto formado de la unión ajena de S y S^-, vistos como espacios topológicos, con cada punto P del borde de S identificado con su imagen simétrica P^- del borde de S^-.

Daremos a $S\#$ una estructura conforme de la forma siguiente: la cubierta abierta que vamos a considerar contiene todos los conjuntos abiertos U_i S que no contienen puntos del borde y de sus imágenes simétricas U_i^-. Además agregamos los abiertos que construiremos como sigue: Si U_j contiene algún punto del borde de S, consideramos U_j^- (la imagen simétrica de U_j), el abierto en $S\#$ será U_j U_j^- con los puntos del borde identificados (véase la siguiente figura).

Así formamos una cubierta abierta para $S\#$ de los abiertos ya mencionados.

Definamos ahora, para cada elemento de esa cubierta los homeomorfismos correspondientes.

Para cada U_i que no contenga puntos del borde de S tomemos el homeomorfismo z_i de la estructura de S, análogamente para cada U_i^- que no contenga puntos del borde de S^- tomemos el homeomorfismo z_i^-.

Para los abiertos en $S\#$ formados por la unión U_i U_j^- (con los puntos del borde identificados) definimos el homeomorfismo $z\#_j$ tal que

$$z\#_j|U_i = z_j \quad \text{y} \quad z\#_j|U_j^- = z_j^-$$

ya que sobre los puntos del borde z_j y z_j^- coinciden, este homeomorfismo está bien definido.

Lo único que nos falta por demostrar es que si dos de esos abiertos se intersectan (véase la siguiente figura) el map

$$z\#_j \ (z\#_i)^{-1}$$

es un homeomorfismo conforme.

Pero esto es evidentemente cierto ya que este homeomorfismo restringido a los conjuntos $z\#_i(U_i \ \ U_j)$ y $z\#_i(U_i{}^* \ \ U_j{}^*)$ respectivamente es conforme y además coinciden sobre el eje real así por continuación analítica $z\#_j\ (z\#_i)^{-1}$ es conforme.

Por lo tanto S# junto con esta estructura es una Superficie de Riemann. Esta Superficie es llamada <u>la doble de S a lo largo de B</u>.

4.3 Mapeos holomorfos sobre Superficies de Riemann.

Definición 4.3.1 Un map continuo $f:S \to S'$ entre Superficies de Riemann es llamado <u>holomorfo</u> (o <u>analítico</u>) si para toda coordenada local (U,z) sobre S y toda coordenada local (U',z') sobre S' con $U \ \ f^{-1}(U')=0$, el map $z' \ \ f \ \ z^{-1}:z(U \ \ f^{-1}(U') \to z'(U')$ es holomorfo como map de **C** en **C**. El map f es llamado <u>conforme</u> si éste es también uno a uno y sobre.

Un map holomorfo $f:S \to C$ es llamado una <u>función holomorfa</u>

en S. Un map holomorfo $f:S \to C\{\}$ es llamado una <u>función meromorfa</u> en S.

Un resultado bastante importante y cuya demostración es prácticamente trivial es el siguiente:

Teorema 4.3.2 Sean S y S' Superficies de Riemann con S compacta. Sea $f:S \to S'$ un map holomorfo. Entonces f es constante o su prayectiva (en el último caso S' también es compacta).

Demostración.

Ya que un map holomorfo es un map abierto, si f no es constante, entonces f(S) es abierto en S'. Sabemos además, que la imagen continua de un conjunto compacto es compacta, por lo tanto f(S) es un conjunto compacto de S'. Pero ya que en un espacio Hausdorff todo compacto es cerrado, f(S) es cerredo en S'. Por lo tanto f(S) es abierto y cerrado en S', que es un espacio conexo, de aqui que $f(S)=S'$. Por lo tanto f es suprayectiva.

Consideremos ahora un map holomorfo $f:S \to S'$ entre Superficies de Riemann. Sea P S, elijamos una coordenada local $\tilde{z}$ en S anulándose en P (es decir, $\tilde{z}(P)=0$) y otra $\tilde{z}'$ en S' anulándose en f(P). En términos de estas coordenadas locales, podemos escribir

$$\tilde{z}'=f(\tilde{z})=\tilde{z}^n(a_n+a_{n+1}\tilde{z}+\ldots) \text{ con } n>0 \text{ y } a_n=0.$$

Puesto que una función holomorfa que no se anula (definida en un disco) tiene una rama bien definida de la n-ésima raiz, tenemos que: existe $h(\tilde{z})$ holomorfa tal que $h(0)=0$ y $(a_n+a_{n+1}\tilde{z}+\ldots)=h(\tilde{z})^n$, así

$$z'=z^n\, h(z)^n=(z\, h(z))^n,$$

Nótese que $z \to z\, h(z)$ es otra coordenada local anulándose en P, y que en términos de ésta el map f está dado localmente por

$$z'=z^n.$$

Veamos ahora que el número n está bien definido.

Sea z_1 otra coordenada local en S anulándose en P. Ya que el cambio de variable de un parámetro a otro es conforme

$$z=b_1 z_1+b_2 z_1^2+\ldots, \quad b_1=0.$$

Así

$$z'=f(z)=(b_1 z_1+b_2 z_1^2+\ldots)^n[a_n+a_{n+1}(b_1 z_1+b_2 z_1^2+\ldots)+\ldots]$$
$$=z_1^n(c_0+c_1 z_1+\ldots),$$

como antes, existe $h_1(z_1)^n$ holomorfa anulándose en 0 tal que

$$h_1(z_1)^n=c_0+c_1 z_1+\ldots,$$

así

$$z'=[z_1 h_1(z_1)]^n.$$

Nuevamente, $z \to z h(z)$ define una coordenada local en P, en términos de la cual f tiene la representación

$$z'=z_1^n.$$

Por lo tanto el número n está bien definido.

En tal caso escríbase $b_f(P)=n-1$.

En base a este análisis surge la siguiente:

Definición 4.3.3 Sea $f:S \to S'$ un map holomorfo entre dos Superficies de Riemann. Sean P S, z una coordenada local anulándose dos los P_k' diferentes.

Ya que hay solamente un número finito de puntos en S' (véase la relación de Riemann-Hurwitz [10]) que son imágenes de puntos de ramificación de f, pasando nuevamente a una subsucesión, si es necesario, para todo k y todo P $f^{-1}(P_k')$ tenemos que $b_f(P)=0$. Pero para todo k

$$(b_f(P_k)+1)\geq n.$$

Asi $\#f^{-1}(P_k')=\#\{P_1^k,P_2^k,\ldots,P_{n_k}^k\}=n_k\geq n$. Ahora, para cada k, elijamos n puntos $P_1^k,P_2^k,\ldots,P_n^k$ del conjunto $\{P_1^k,P_2^k,\ldots,P_{n_k}^k\}$.

Puesto que S es compacta, para cada j, $1\leq j\leq n$, existe una subsucesión $\{P_j^k\}$ que converge a un punto limite P_j. Estos puntos no necesariamente son distintos, si éstos lo fueran, es decir, si $\#\{P_j\}=n$, ya tendriamos que $(b_f(P)+1)\geq n$ ya que $f(P_j)=P'$ para todo j y $b_f(P)\geq 0$.

Si no todos los P_j son diferentes. Sea $f^{-1}(P')=\{P_{r_1},P_{r_2},\ldots,P_{r_t}\}$ donde $r_s=\#\{j:P_j=P_{r_s}\}$, $1\leq s\leq t$. Obsérvese que $r_s=n$.

Sea P_{r_s} $f^{-1}(P')$ arbitrario. Es decir, P_{r_s} es el punto al cual convergen exactamente l_s de las sucesiones $\{P_j^k\}_j$. Ya que éstas consisten de puntos diferentes y además toda vecindad de P_{r_s} tiene al un punto de cada una de éstas f es al menos r_s-a-1 en esa vecindad, se tiene $b_f(P_{r_s})+1\geq r_s$.

Ya que P_{r_s} fue arbitrario.

$$(b_f(P)+1)= \quad (b_f(P_{r_s})+1)\geq \quad r_s=n.$$

De aquí que P' S_n' y por lo tanto S_n' es cerrado.

Sean P' S' arbitrario y $m=$ $(b_f(P)+1)$, así P' S_m' y P' S_{m+1}', pero ya que S'es compacta y por tanto el único subconjunto cerrado en P y z' en S' anulándose en f(P). El número $b_f(P)=n-1$ es llamado el número rama de f en P. Decimos que P es un punto de ramificación de f si $b_f(P)>0$.

El siguiente resultado nos permitirá concluir algunos hechos muy importantes acerca de los mapeos entre Superficies de Riemann y de éstas en particular.

Teorema 4.3.4 Sea f:S -> S' un map holomorfo no constante entre Superficies de Riemann compactas. Entonces existe un entero positivo m tal que todo P' S' es asumido precisamnete m veces sobre S por f (contando multiplicidades), es decir, para todo P' S',

$$(b_f(P)+1)=m.$$

Demostración.

Para cada entero $n\geq 1$, sea

$$S_n'=\{P' \ S': \quad (b_f(P)+1)\geq n\}.$$

Por el análisis anterior a la definición 4.3.3 tenemos que S_n' es abierto. Ahora mostraremos que S_n' es cerrado probando que si P' es un punto de acumulación de S_n', entonces P' S_n' también.

Sea pues P' un punto de acumulación de S, así $P'=\lim P_k'$ cuando k -> con P_k' S_n'.

Supongamos sin pérdida de generalidad que hay un número infinito de puntos P_k' diferentes, ya que en caso contrario $P'=P_k'$ S_n' para alguna k y por tanto S_n' sería cerrado.

Pasando ahora a una subsucesión, si es necesario, tomemos to-y abierto en S' es todo S' o es el vacio, concluimos que $S_m'=S'$ y $S_n'=0$ para todo n $Z\setminus\{m\}$. Por lo tanto para todo P' S', $b_f(P)+1)=m$, lo que concluye la demostración.

Corolario 4.3.5 Si f es una función meromorfa no constante en S, entonces f tiene el mismo número de ceros que de polos.

Demostración.

Ya que f es una función meromorfa no constante en S y **C** { } es compacto, f es suprayectiva, es decir, cubre todo **C** { } (Teorema 4.3.2). Así por el teorema anterior el cero y el infinito son asumidos por f exactamente el mismo número de veces (contanto multiplicidades). Por lo tanto f tiene el mismo número de ceros que, de polos.

4.4 Revestimientos anulares sobre Superficies de Riemann.

En esta sección definiremos lo que es el revestimiento anular de una Superficie de Riemann inducido por una curva cerrada homotópicamente no trivial en la Superficie. También veremos algunos resultados importantes acerca de una clase especial de curvas sobre la Superficie.

Asi pues definamos un concepto que obviamente necesitaremos.

Definición 4.4.1 Por una curva en una Superficie de Riemann S entenderemos un map $c:I \to S$ continuo donde I es el intervalo [0,1] del eje real.

De hecho tiene sentido hablar de curvas continua o diferenciables ya que estas nociones no dependen del parámetro local elegido sobre S.

Definamos ahora el concepto de revestimiento anular de una Superficie de Riemann.

Para ésto, sean S una Superficie de Riemann y c una curva cerrada homotópicamente no trivial, en S, con punto inicial Po (es decir, c no es homotópica a Po relativa a los extremos). Consideremos ahora la clase de homotopia de c, ésta genera un subgrupo ciclico infinito G=<[c]> de (S,Po). Sabemos por el teorema 3.3.3 existen, un revestimiento (S,p) de S y un punto Po p^{-1}(Po) tales que $p_\#$ (S,Po)=G.

Como el grupo fundamental de S es ciclico infinito, esta superficie es homeomorfa a un dominio del plano doblemente conexo.

A S le llamaremos <u>revestimiento anular de S inducido por c</u>.

Hemos visto hasta el momento cómo se define el revestimiento anular S de S inducido por una curva cerrada, homotópicamente no trivial, c.

Veamos ahora que S depende únicamente de la clase de homotopia de c, es decir, que si c' es una curva cerrada libremente homotópica a c, entonces los revestimientos anulares de S inducidos por cada una de estas curvas son isomorfos.

Para probar ésto, sea c' una curva cerrada, con punto inicial

Po' y libremente homotópica a c.

Ya que c' es libremente homotópica a c, existe una deformación continua h:IxI -> S tal que

h(t,0)=c(t), h(t,1)=c'(t) y h(0,t)=h(1,t) para todo t I.

Sea j:I ->S la curva de Po a Po' definida como j(t)=h(0,t) para todo t I, aplicando el lema 2.3.1 existe un levantamiento j:I ->S de j al revestimiento anular S de S inducido por c con punto inicial j(0)=Po y punto final j(1)=Po'.

Por la construcción de S, existe una curva cerrada c̃ en S con punto inicial Po y que se proyecta a c.

Pero existe también un levantamiento c̃' de c' ya que si h:IxI -> S es un levantamiento de h a S (esto lo tenemos aplicando el teorema 2.5.1), tenemos que

h(t,0)=c̃(t) y h(t,1)=c̃'(t)

y puesto que c̃ es cerrada h(0,1)=h(1,0).

Lo que queremos probar es que h(0,1)=h(1,1), es decir, que c̃' también es una curva cerrada.

Para ésto, consideremos ahora las funciones

h(0,t),h(1,t):I -> S

ya que p h(0,t)=p h(1,t) para todo t I (donde p es el map proyección) y éstas coinciden cuando t=1, aplicando el lema 2.3.2 obtenemos que h(0,t)=h(1,t) para todo t I, en particular

h(0,1)=h(1,1)

y por lo tanto c̃' es cerrada.

Así j induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales (S,Po') y (S,Po) dado por

$[c] \rightarrow j*[c]*j^{-1}$ donde $[c]$ (S,Po')

Ya que $\tilde{c}'$ corresponde a $\tilde{c}$, $\tilde{c}'$ genera a (S,Po'). Por lo tanto (S,Po') se proyecta al subgrupo de (S,Po') generado por c' lo cual significa que S es el revestimiento anular de S inducido por c', y de aquí podemos concluir que S no depende de la curva elegida en la clase de homotopía libre.

Como una aplicación de los revestimientos anulares demostraremos el siguiente:

Lema 4.4.2 Sea c una curva cerrada, homotópicamente no trivial, en una Superficie de Riemann S. Si $c \simeq c^n$ con n Z, entonces $n=1$.

Demostración.

Sea S un revestimieno anular de S inducido por c. Ya que S es un dominio doblemente conexo, éste es conformemente equivalente al anillo $0 \leq r_0 < |z| < r_1 \leq$ del plano complejo [12]. Supongamos que S es igual a este anillo. Sea $\tilde{c}$ un levantamiento cerrado de c con punto inicial z_0 arriba del punto inicial P_0 de c. Por definición, $<[\tilde{c}]>$ genera a (S,z_0). Por lo tanto, el número de vueltas de $\tilde{c}$ alrededor de $z=0$ debe de ser uno (con una orientación apropiada de c). Así, el levantamiento de c^n, el cual es $\tilde{c}^n$, debe de dar exactamente n vueltas alrededor de $z=0$. Ya que $c \simeq c^n$ puede ser levantada a S, tenemos que $\tilde{c} \simeq \tilde{c}^n$. Pero ésto es posible únicamente cuando el número de vueltas, de ambas curvas, alrededor del cero es el mismo. Así $n=1$.

Veamos a continuación que existe una relación estrecha entre los automorfismos de S y los levantamientos cerrados de c.

Sean $\tilde{c}$ un levantamiento cerrado de c a S y $w: S \to S$ un automorfismo de S con $w(z_0)=z_1$, entonces $w(\tilde{c})$ es también un levantamiento cerrado de c pero con punto inicial z_1.

Reciprocamente, sea $\tilde{c}_1$ un levantamiento cerrado de c con punto inicial $z_1=z_0$ arriba de P_0, si el número de vueltas de $\tilde{c}_1$, alrededor de $z=0$ es n, entonces $\tilde{c}_1 \simeq \tilde{c}^n$. Proyectando sobre S obtenemos que $c \simeq c^n$, aplicando el lema 4.4.1 obtenemos que $n=1$.

Ahora, unamos z_0 a z_1 mediante una curva h sobre S. Entonces $h^{-1}\ \tilde{c}\ h \simeq \tilde{c}_1$ así $[h]^{-1}\ [c]\ [h]=[c]$ (donde $[h]$ es la clase de homotopía de la proyección cerrada h de h) por lo tanto

$$[h]\ N(<[c]>).$$

donde $N(<[c]>)$ el normalizador de $<[c]>$ en (S, z_0).

Así por el teorema 3.2.2, podemos concluir que existe w, un automorfismo de S, tal que $w(z_0)=z_1$.

Definición 4.4.3 Sea $c: I \to S$ una curva en S, decimos que c <u>es simple</u> si para todo t_1 y t_2 en I tal que $c(t_1)=c(t_2)$, $t_1=t_2$.

Definición 4.4.4 Una curva cerrada simple será llamada <u>una curva de Jordan</u>.

Ahora probaremos dos importantes teoremas acerca de curvas de

Jordan sobre Superficies de Riemann, los cuales utilizaremos mas tarde, para ésto necesitaremos un importante resultado conocido como el teorema de uniformización que dice lo siguiente:

Teorema de Uniformización. Sea S una Superficie de Riemann simplemente conexa. Entonces S es conformemente equivalente a uno de estos tres espacios:

a) la esfera de Riemann C\{ }

b) el plano complejo C

c) el disco D={z C:|z|<1}

Teorema 4.4.5 Sea c una curva de Jordan, en una Superficie de Riemann arbitraria S, la cual es homotópicamente trivial en S. Entonces c es la frontera de un disco D sobre S.

Demostración.

Supongamos primero que S es conformemente equivalente a la esfera de Riemann y sea c una curva de Jordan arbitraria en S, aplicando el Teorema de la curva de Jordan [18], c acota una región la cual es (aplicando el teorema del mapeo de Riemann) conformemente equivalente a un disco.

Supongamos ahora que S es diferente a la esfera de Riemann. Sea c̃ un levantamiento de c al revestimiento universal (S^,p) de S el cual representaremos en el z-plano (el plano complejo). Todo levantamiento de éste tipo es una curva de Jordan (ésta es cerrada por el teorema de monodromía [2] y ya que los levantamientos de curvas de Jordan son biyectivos). Ya que estamos suponiendo que S no es la esfera de Riemann, por el teorema de uniformización [3] de $S^{\sim}$ es el plano o el disco unitario, así $\tilde{c}$ es la frontera de un disco $D^{\sim}$. Ahora lo que deseamos demostrar es que la restricción de la proyección p a la cerradura de $D^{\sim}$ es un homeomorfismo, con esto se demostrará que el disco buscado es $D=p(D^{\sim})$.

Procedamos por contradicción. Supongamos que z_1 y $z_2 \neq z_1$ son dos puntos en la cerradura de $D^{\sim}$ teniendo la misma proyección, es decir, $p(z_1)=p(z_2)=P_0$.

Observemos que dos levantamientos $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ de una curva de Jordan c no pueden intersectarse. Ya que si $z \in \tilde{c}_1 \cap \tilde{c}_2$, entonces la proyección P_0 de z es un punto sobre c. Aplicando ahora los lemas 2.3.1 y 2.3.2 tenemos que $\tilde{c}_1=\tilde{c}_2$.

Aplicando ahora el teorema 3.2.7 podemos asumir que existe w, automorfismo de $S^{\sim}$, tal que $w(z_1)=z_2$. Sea $D^{\sim}_1=w(D^{\sim})$. Si $S^{\sim}$ es conformemente equivalente al disco, w es una transformación lineal parabólica o hiperbólica [12]. Representamos $S^{\sim}$ como el semiplano superior, los puntos fijos correspondientes infinito o cero e infinito respectivamente. Ya que al menos uno de los puntos z_1 o z_2 está dentro de $D^{\sim}$, podemos asumir, por un desplazamiento simultáneo pequeño, que ambos puntos están en $D^{\sim}$. Entonces $D^{\sim}$ y $D^{\sim}_1$ tienen el punto z_2 en común, pero sus fronteras son curvas de Jordan ajenas con la misma proyección lo cual es una contradicción. Por lo tanto p es uno a uno en $D^{\sim}$.

El siguiente teorema probará una propiedad similar a la anterior pero tomando ahora dos curvas de Jordan ajenas y libremente homotópicas.

Teorema 4.4.6 Sean c_1 y c_2 dos curvas de Jordan, ajenas y libremente homotópicas en una Superficie de Riemann arbitraria S, las cuales no son homotópicas a un punto de S. Entonces ellas acotan un anillo D sobre S.

Demostración.

Puesto que toda curva de Jordan sobre la esfera de Riemann es homotópicamente trivial, no consideraremos a ésta.

Supongamos primero que S es un toro. Sean c_1 y c_2 dos curvas de Jordan ajenas y libremente homotópicas. Ya que S puede ser visto como el paralelogramo formado por los puntos 0,1,1+b y b, donde b C y Imb>0, con las siguientes identificaciones $z \to z+1$ y $z \to z+b$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que los puntos base z_1 y z_2 de c_1 y c_2 respectivamente corresponden, cada uno de ellos, a dos puntos en el paralelogramo uno en el lado cuyos extremos son 0,b y el otro sobre el lado de extremos 1 y 1+b, ya que en caso contrario los puntos estarían en los otros dos

mento sería exactamente el mismo.

Ya que c_1 y c_2 son ajenas y libremente homotópicas éstas, en el paralelogramo, acotan una banda la cual mediante las identificaciones antes descritas es conformemente equivalente a un anillo en S acotado por c_1 y c_2.

Supongamos ahora que S no es un toro. Sea $\tilde{S}$ el revestimiento anular de S generado o asociado por c_1 (y por tanto a c_2). Ya que toda cubierta de S la podemos representar como el cociente de la cubierta universal (que en este caso es el disco unitario en $\mathbb{C}$) módulo un subgrupo del grupo fundamental de S, en este caso, módulo el grupo cíclico infinito generado por la clase de homotopía libre de c, $\tilde{S}$ será representado como el anillo centrado en $z=0$ en el disco unitario (disco de Poincaré).

Sean $\tilde{c}_1$ y $\tilde{c}_2$ levantamientos de c_1 y c_2 a $\tilde{S}$ respectivamente.

Estos levantamientos son curvas de Jordan ajenas conteniendo el punto $z=0$ en su interior.

Así ellas acotan un anillo $\tilde{D}$ en $\tilde{S}$ ([12] pag.279)

Mostremos que la proyección p de la cerradura de $\tilde{D}$ es uno a uno obteniendo así el anillo D sobre S.

Supongamos que existen z_1 y z_2 dos puntos diferentes en $\tilde{D}$ tales que $p(z_1)=p(z_2)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que uno de los puntos, por ejemplo z_1, está sobre la frontera de $\tilde{D}$, mientras que el otro está en $\tilde{D}$.

Si ambos puntos están en $\tilde{D}$ podemos hacerlo siguiente: unamos

z_1 a δ_1 por una curva f_1 en D. La proyección f de f_1 puede ser levantada a z_2 para obtener un arco f_2 cuyo punto final está en D o fuera de éste. Si está dentro de D éste punto y el punto de f_1 que está sobre δ_1 tienen la misma proyección, así utilizamos estos dos puntos.

En caso contrario, es decir, si el punto final de f_2 está fuera de D acortamos f de tal forma que f_2 esté dentro de D excepto por su punto final que estará sobre δ_1. Así este punto y el punto final del levantamiento de f recortada a z_1, cumplen con la condición requerida.

Así podemos suponer que z_1 δ_1 y z_2 D.

Continuemos f de z_2. Ya que la cerradura de D es compacta puede haber únicamente un número finito de puntos que tienen la misma proyección, así la continuación debe de ser cerrada después de un número finito de iteraciones. Pero ésto contradice el hecho de que los levantamientos cerrados son únicos. Por lo tanto p es uno a uno en la cerradura de D.

5. Diferenciales Cuadráticas.

Nuestro propósito en este capitulo es definir lo que es una diferencial cuadrática w sobre una Superficie de Riemann y analizar ciertos aspectos de ellas.

Comencemos con la siguiente:

Definición 5.1 Sea $S=(S,\{U_i, z_i\})$ una Superficie de Riemann. Una diferencial cuadrática meromorfa sobre S es una familia de funciones meromorfas $\{w_i\}$ donde, para cada i, w_i está definida en el dominio $z_i(U_i)$ del plano complejo y además cumple con la siguiente condición: para todo i, j tal que $U_i \quad U_j=0$ se tiene

$$w_i=(w_j \quad z_j \quad z_i^{-1})(z_j \quad z_i^{-1})'^2.$$

Es decir, las funciones $w_i(z_i)$ y $w_j(z_j)$ coinciden en el dominio $U_i \quad U_j$ excepto por un factor $(z_j \quad z_i^{-1})'^2$.

Para simplificar la notación escribimos la condición anterior como:

$$w_i(z_i)dz_i^2=w_j(z_j)dz_j^2.$$

y en general denotaremos por

$$w(z)dz^2$$

la diferencial cuadrática sobre la Superficie.

Decimos que una diferencial cuadrática $\{w_i\}$ es holomorfa si cada una de las w_i lo es.

Hemos definido hasta el momento lo que es una diferencial cuadrática sobre una Superficie de Riemann dada, surge entonces la siguiente pregunta : dada una diferencial cuadrática $\{w_i\}$ sobre una Superficie de Riemann $S=(s,\{U_i,z_i\})$ ¿ qué pasa con la diferencial cuadrática si adicionamos una coordenada local $\{U,\tilde{z}\}$ compatible con la estructura conforme dada ?.

La respuesta a esta pregunta es: se tiene que adicionar una función definida en el dominio $\tilde{z}(U)$ del plano complejo a la diferencial cuadrática $\{w_i\}$. Pero la función que vamos a adicionar a la familia no puede ser una función arbitraria ya que las diferenciales cuadráticas tienen que cumplir con una cierta condición.

Así si adicionamos esta función a la familia, el resultado también tiene que cumplir la condición requerida.

Definamos $\hat{w}$ de la siguiente forma: para cada z_i tal que $U \quad U_i=0$ definimos

$$w=(w_i \quad z_i \quad \tilde{z}^{-1})(z_i \quad \tilde{z}^{-1})'^2 \text{ en } \tilde{z}(U \quad U_i).$$

Tenemos que ver que $\hat{w}$ está bien definida, es decir, que si $U \quad (U_i \quad U_j)=0$, entonces

$$\hat{w}=(w_i \quad z_i \quad \tilde{z}^{-1})(z_i \quad \tilde{z}^{-1})'^2 \quad \text{y} \quad \hat{w}=(w_j \quad z_j \quad \tilde{z}^{-1})(z_j \quad \tilde{z}^{-1})'^2$$

coinciden en $z(U \quad (U_i \quad U_j))$.

Para ésto consideremos U_i y U_j tales que $U \quad (U_i \quad U_j)=0$. Ya que w_i y w_j son elementos de la diferencial

$$w_i=(w_j \quad z_j \quad z_i^{-1})(z_j \quad z_i^{-1})'^2$$

así

$$\hat{w}=(w_i \quad z_i \quad \tilde{z}^{-1})(z_i \quad \tilde{z}^{-1})'^2$$
$$=(w_j \quad z_j \quad z_i^{-1} \quad z_i \quad \tilde{z}^{-1})(z_j \quad z_i^{-1})'^2 \quad (z_i \quad \tilde{z}^{-1})'^2$$

$$=(w_j \quad z_j \quad \tilde{z}^{-1})(z_j \quad \tilde{z}^{-1})'^2 .$$

Por lo tanto la función $\tilde{w}$ está bien definida y además si adicionamos ésta a la familia $\{w_i\}$, el resultado sigue siendo una diferencial cuadrática sobre la Superficie.

5.2 Ejemplos de diferenciales cuadráticas.

a) Sea D es un dominio arbitrario del plano complejo, hemos visto que (ejemplos 4.1.1) D puede ser considerado como una Superficie de Riemann con la estructura $(\{D, id\})$. Una función analítica arbitraria f, definida en D, puede ser considerada como una diferencial cuadrática sobre D.

b) Sea S la esfera de Riemann, con la estructura

$$(\{U_1, z_1\}, \{U_2, z_2\})$$

donde $U_1 = \mathbf{C}$, $U_2 = \mathbf{C} \setminus \{0\} \quad \{\ \}$, $z_1 = z$ y $z_2 = 1/z$ respectivamente (véase ejemplo 4.4.1 (b)). Para dar una diferencial cuadrática sobre la esfera, elejamos una función analítica arbitraria $w_1(z)$ la cual está definida en $z_1(U_1)$, es decir, sobre el plano complejo, y a partir de ésta definamos w_2. Ya que tanto ésta como w_1 tienen que cumplir la condición antes mencionada definamos para cada $z \quad U_2$

$$w_2(z) = w_1(1/z)(1/z)^4 \quad \text{si } z =$$

y

$$w_2(\quad) = 0$$

Así $\{w_1, w_2\}$ forma una diferencial cuadrática sobre la esfera de Riemann.

5.3 Puntos regulares y puntos criticos de una diferencial cuadrática..

En esta sección definiremos lo que son los puntos regulares y los puntos criticos de una diferencial cuadrática.

Para esto sea w una diferencial cuadrática meromorfa sobre una Superficie de Riemann arbitraria S.

Decimos que un punto P S es un cero (o un polo) de orden n de w si z(P) es un cero (o un polo) de orden n de w(z), donde z es algún parámetro local en P.

Definicion 5.3.1 Sea w una diferencial cuadrática meromorfa sobre una Superficie de Riemann arbitraria los polos y los ceros de ésta serán llamados puntos criticos, todos los otros puntos sobre la Superficie S serán llamados puntos regulares. Decimos que P es un punto critico finito si éste es un cero o un polo de orden uno. Si P es un polo de orden mayor o igual a dos, éste es llamado punto critico infinito.

5.4 Levantamiento de una diferencial cuadrática.

En la sección 2.4 vimos cómo podiamos levantar funciones arbitrarias al espacio de revestimiento, a continuación veremos que una diferencial cuadrática sobre una Superficie de Riemann S puede ser levantada al dominio de un map holomorfo f:S -> S donde S también es una Superficie de Riemann.

Sea $f:S \to S$ un map holomorfo donde

$$S=(S,\{U_i,\tilde{z}_i\}) \quad y \quad S=(S,\{U_j,z_j\})$$

son Superficies de Riemann.

Sea w una diferencial cuadrática sobre S, es decir $w=\{w_j\}$.

Definimos una diferencial cuadrática $\tilde{w}=\{\tilde{w}_i\}$ sobre S a partir de $\{w_j\}$ de la forma siguiente:

Sea P S y $P=f(P)$. Sean $\tilde{z}_i:U_i \to V_i$ y $z_j:U_j \to V_j$ parámetros locales alrededor de P y P respectivamente.

Sea $f_{ji}=z_j \ f \ \tilde{z}_i^{-1}:V_i \to V_j$.

Definimos

$$\tilde{w}_i(\tilde{z}_i)(P)=[w_j \ f_{ji} \ \tilde{z}_i(P)][f_{ji}' \ \tilde{z}_i(P)]^2 .$$

Veamos que esta función está bien definida, es decir tenemos que ver que si $f(P)$ $U_{j'}$, la función $\tilde{w}_i(\tilde{z}_i)$ definida como

$$\tilde{w}_i(\tilde{z}_i)=[w_{j'} \ f_{j'i} \ \tilde{z}_i(P)][f_{j'i}' \ \tilde{z}_i(P)]^2$$

coincide con la anterior.

Ya que $w=\{w_j\}$ es una diferencial cuadrática

$$w_j=(w_{j'} \ z_{j'} \ z_j^{-1})(z_{j'} \ z_j^{-1})'^2 \quad en \quad z_j(U_j \ U_{j'}),$$

así

$$\begin{aligned}\tilde{w}_i(\tilde{z}_i)(P)&=[w_j \ f_{ji} \ \tilde{z}_i(P)][f_{ji}' \ \tilde{z}_i(P)]^2\\ &=[w_{j'} \ z_{j'} \ z_j^{-1} \ f_{ji} \ \tilde{z}_i(P)][z_{j'}' \ z_j^{-1\prime} \ f_{ji}' \ \tilde{z}_i(P)]^2\\ &=[w_{j'} \ z_{j'} \ f \ \tilde{z}_i^{-1} \ \tilde{z}_i(P)][z_{j'}' \ (f \ \tilde{z}_i^{-1})' \ \tilde{z}_i(P)]^2\\ &=[w_{j'} \ f_{j'i} \ \tilde{z}_i(P)][f_{j'i}' \ \tilde{z}_i(P)]^2 .\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{w}_i$ está bien definida.

Veamos ahora que la familia $\{\tilde{w}_i\}$ es una diferencial cuadrática sobre S, es decir, demostremos que si $\tilde{U}_i \quad \tilde{U}_{i'}=0$, entonces

$$\tilde{w}_i(\tilde{z}_i)=(w_j \quad f_{ji} \quad \tilde{z}_i)(f_{ji}' \quad \tilde{z}_i)^2$$

y

$$\tilde{w}_{i'}(\tilde{z}_{i'})=(w_j \quad f_{j'i} \quad \tilde{z}_{i'})(f_{j'i'}' \quad \tilde{z}_{i'})^2$$

cumplen con la condición requerida.

Para simplificar la notación escribamos el map f en términos de los parámetros $\tilde{z}_i, \tilde{z}_j$ y z_i, z_j alrededor de P y f(P) respectivamente como $z_i=f(\tilde{z}_i)$ y $z_j=f(\tilde{z}_j)$.

Con esta notación tenemos

$$\begin{aligned}\tilde{w}_i(\tilde{z}_i)d\tilde{z}_i^2 &= w_i(f(\tilde{z}_i))dz_i^2\\ &= w_i(z_i)d\tilde{z}_i^2\\ &= w_j(z_j)dz_j^2\\ &= w_j(f(z_j)dz_j^2\\ &= \tilde{w}_j(\tilde{z}_j)d\tilde{z}_j^2\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{w}=\{\tilde{w}_i\}$ es una diferencial cuadrática sobre S. Esta diferencial es llamada <u>el levantamiento de w a S</u>.

Ejemplo 5.4.1

Para encontrar las diferenciales cuadráticas holomorfas w sobre el toro S, consideremos el revestimiento universal de S, éste, como sabemos, es conformemente equivalente a C [17]. El map proyección p:C -> S es doblemente periódico.

Sea z_o C y $P_o=p(z_o)$, elegimos parámetros locales $\tilde{z}$=id. de z_o y z de P_o , así en terminos de estos parámetros tenemos que $z=p(\tilde{z})$. Denotemos por $w(z)$ la correspondiente función elemento asociada por w a ese parámetro, así el levantamiento (por medio del map p) $\tilde{w}$ de w a C satisface

$$\tilde{w}(\tilde{z})=w(p(\tilde{z}))[dz/d\tilde{z}]^2 .$$

Sea a_o un período arbitrario de p, es decir, $p(\tilde{z}+a_o)=p(\tilde{z})$, considerando ahora el parámetro local $\tilde{z}+a_o$ en z_o+a tenemos:

$$\begin{aligned}\tilde{w}(\tilde{z}+a_o)&=w(p(\tilde{z}+a_o))[dz/d(\tilde{z}+a_o)]^2\\ &=w(p(\tilde{z}))[dz/d\tilde{z}]^2\\ &=\tilde{w}(\tilde{z}).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{w}$ es una función holomorfa y doblemente periódica en el plano, por lo tanto $\tilde{w}$ es acotada (vèase [2] cap.7). Pero por el teorema de Liouville [2] $\tilde{w}$ es constante.

Por lo tanto el espacio de diferenciales cuadráticas holomorfas sobre el toro es isomorfo a C.

5.5 Extensión de una diferencial cuadrática al doble de la Superficie.

Veremos a continuación que bajo ciertas condiciones es posible continuar una diferencial cuadrática sobre una Superficie de Riemann con borde a su doble.

Sean $S=(S,\{U_i, z_i\})$ una Superficie de Riemann con borde B (véase sección 4.2) y w una diferencial cuadrática sobre S. Supongamos que w es real en cada punto P B, es decir, para todo parámetro z_i definido en P, $w_i(z_i(P))$ $\mathbb{R}$. Nótese que si P U_i U_j B y si $w_i(z_i(P))$ $\mathbb{R}$, entonces $w_j(z_j(P))$ $\mathbb{R}$ también.

Sean U_j $\{U_i\}$ arbitrario y U_j^- su imágen simètrica sobre S^- (la imágen simétrica de S). Si z_j es un parámetro definido en U_j, entonces $z_j^-=z_j^-$ (para la definición de ésto véase definición 4.2.2) es un parámetro local en U_j^-. Definimos

$$w_j^-(z_j^-)=[w_j(z_j)]^-(z_j\ (z_j^-)^{-1})'^2$$

Sea $S\#$ el doble de S, definamos una diferencial $w\#$ sobre $S\#$ de la forma siguiente: para todo U_i y por tanto todo U_i^- que no contenga puntos del borde de S y de S^- respectivamente vamos a considerar a w_i y w_i^- (definida arriba) como elementos de la familia $w\#$.

Si U_i contiene puntos del borde de S, considero el abierto U_i U_i^-, con los puntos del borde identificados (véase definición de $S\#$ en la sección 4.2), de $S\#$. Ya que $w_i(z_i)$ en puntos del borde de S es real, si P es un punto del borde de S, entonces

$$w_i(z_i(P))=w_i^-(z_i^-(P)).$$

Asi ambas funciones elemento coinciden sobre el eje real, en la parte donde están definidas, por lo tanto son las restricciones de alguna función analítica $w\#_i$. Adicionamos éstas a la familia.

Asi formamos la familia $w\#$ y de la forma en que están definidos sus elementos, ésta cumple con la condición de diferencial cuadratica.

La diferencial $w\#$ será llamada la extensión de la diferencial cuadrática w de S a su doble $S\#$.

5.6 Parámetros distinguidos cerca de los puntos regulares.

En muchas ocasiones la elección de un parámetro adecuado alrededor de un punto de la Superficie puede simplificarnos algunos cálculos y proporcionarnos más información acerca de propiedades de la diferencial cuadrática, a éste tipo de parámetros se les llamará parámetros distinguidos o parámetros naturales. En esta sección estudiaremos los parámetros distinguidos sobre puntos regulares.

Sea w una diferencial cuadrática , P_o un punto regular de ésta y z un parámetro local definido en una vecindad U de P_o, anulándose en P_o.

Definamos ahora un nuevo parámetro $\tilde{z}$ alrededor de P_o de la siguiente forma:

$$\tilde{z}=\tilde{z}(P)= \quad w(z)dz.$$

Ya que P_o es un punto regular de w, podemos definir una rama univaluada de la raiz cuadráda de $w(z)$ en una vecindad de $z(P_o)$. asi $\tilde{z}$ está bien definida y puesto que la integral de una función holomorfa nuevamente es holomorfa, $\tilde{z}$ lo es.

Pero $d\tilde{z}/dz= w(z)$ y ésta última es diferente de cero en una vecindad de $z(P_o)$, aplicando el teorema de la función inversa tenemos que $\tilde{z}$ es biyectiva en esa vecindad.

Por lo tanto $\tilde{z}$ es un parámetro local en una vecindad U de Po.

Obsérvese que las dos posibles elecciones de las ramas de la raiz de $w(z)$ determinan los parámetros naturales, definidos en una vecindad de Po, $\tilde{z}_1$ y $\tilde{z}_2$ respectivamente.
Pero éstos en esa vecindad de Po cumplen con $\tilde{z}_2 = \tilde{z}_1$.

Podemos ahora introducir $\tilde{z}$ como un parámetro conforme en U. Ya que la diferencial $d\tilde{z} = w(z)dz$, entonces

$$d\tilde{z}^2 = w(z)dz^2,$$

así la diferencial cuadrática w en términos de éste parámetro tiene una representación =1, es decir, en este parámetro el correspondiente elemento de linea de la familia w es la función identidad.

El parámetro $\tilde{z}$ es llamado <u>parámetro distinguido o parámetro natural</u> cerca de Po.

Los resultados anteriores de esta sección podemos ahora resumirlos en el siguiente:

Teorema 5.6.1 Sean w una diferencial cuadrática sobre una Superficie de Riemann arbitraria y Po un punto regular de w. Sea z un parámetro local anulándose en Po. Entonces en alguna vecindad de Po existe un parámetro local $\tilde{z}$, en términos del cual la representación de w es idénticamente igual a uno. El parámetro está dado por

$$\tilde{z} = w(z)dz.$$

Obsérvese que si P_0 un punto regular de w y $\tilde{z}_0$ una rama univaluada de $\tilde{z}$ en una vecindad de P_0, entonces $\tilde{z}_0(P_0)=0$. De hecho, existe una vecindad U de P_0 la cual es mapeada uno a uno y confor memente sobre un conjunto V abierto en delplano complejo, podemos suponer (mediante una restricción si es necesario) que V es un disco alrededor de $z=0$.

El inverso $\tilde{z}_0^{-1}$ es un homeomorfismo conforme de V en la Superficie S. Existe un disco V_0 alrededor de $z=0$ de radio máximo en el cual la continuación analítica de $\tilde{z}_0^{-1}$ (la cual denotaremos nuevamente por $\tilde{z}_0^{-1}$) sigue siendo un homeomorfismo.

La imagen $U_0=\tilde{z}_0^{-1}(V_0)$ es llamado el w-disco máximo alrededor de P_0.

Formalicemos lo anterior en la siguiente:

Definición 5.6.2 Sea w una diferencial cuadrática meromorfa sobre una Superficie de Riemann arbitraria S. Un w-disco máximo es una región máxima en S la cual es mapeada homeomorficamente sobre un disco en el plano complejo por una rama del parámetro natural $\tilde{z}$ o por una continuación analítica de ella.

5.7 Métrica asociada a una diferencial cuadrática.

Una de las cosas que nos interesan para nuestros propósitos es poder definir una métrica sobre la Superficie. ésto nos permitirá hablar de longitud de una curva y del área de un subconjunto de la Superficie.

A continuación veremos que a cada diferencial cuadrática le podemos asociar una métrica, definiremos el elemento de longitud y el de área en esa métrica.

Sea $c:[0,1] \to S$ una curva en S. Si c está contenida en un disco U_0 en el cual está definida una rama $\tilde{z}_0$ de $\tilde{z}$, esta curva es mapeada bajo $\tilde{z}_0$ a una curva c_1 contenida en $V_0=\tilde{z}_0(U_0)$. La longitud euclideana de la curva c_1 no depende de la elección de la rama ya que si $\tilde{z}_1$ es la otra rama de $\tilde{z}$ y c_2 es la imagen bajo $\tilde{z}_1$ de c, entonces

$$c_2(t)= c_1(t) + cte.$$

asi c_2 tiene la misma longitud que c_1.

Una curva arbitraria c en S la cual no pasa a través de puntos criticos de w, puede ser subdividida en intervalos, cada uno de los cuales yace en un disco. Entonces, la longitud de la imagen de cada uno de los intervalos está bien definida y la longitud total no depende de las subdivisiones (equivalentemente, podemos continuar una rama de $\tilde{z}$ a lo largo de c [17] y así obtener una imagen c_1 de toda la curva, la longitud euclideana de ésta sigue siendo la misma).

Definición 5.7.1 Sea w una diferencial cuadrática meromorfa sobre una Superficie de Riemann arbitraria S. Si c es una curva en S la cual no pasa a través de los puntos críticos de w, entonces la w-longitud de c en términos de un parámetro arbitrario z está dada por:

$$|c|_w = \ |w(z)|^{1/2}|dz|.$$

El correspondiente elemento de área es $|w(z)dxdy$; éste también es invariante al cambio de parámetros. El área total de la Superficie de Riemann S en esta métrica es la L^1-norma de w:

$$|S|_w = \ |w(z)|dxdy.$$

Observación 5.7.2 Si en particular tomamos el parámetro natural ζ, la w-longitud de c llega a ser:

$$|c|_w = \ |d\zeta|.$$

Obsérvese que como la integral siempre es positiva la definición de longitud de una curva también tiene sentido si ésta pasa a través de puntos críticos de w, sin embargo la longitud es infinita si la curva pasa por algún punto crítico infinito de w, es decir, por algún polo de orden mayor o igual a dos.

Veamos esto último más formalmente.

Teorema 5.8.3 Sea w una diferencial cuadrática meromorfa sobre una Superficie de Riemann arbitraria S. Sea c una curva en S que contenga un punto crítico infinito de w. Entonces c tiene longitud infinita.

Demostración.

Sea P_o S un punto crítico infinito de w tal que P_o c.

Sea z un parámetro local definido en una vecindad U_0 de P_0 tal que $z(P_0)=0$. Así en términos de este parámetro

$$w(z)=z^{-n}(a_{-n}+a_{-n+1}z+\ldots),\quad a_{-n}=0 \text{ y } n\geq 2.$$

Ya que $a_{-n}=0$, podemos definir, en una vecindad de $z=0$, una rama de la raíz cuadrada del término que está dentro del paréntesis, sea

$$(b_0+b_1z+\ldots)^{1/2}=(a_{-n}+a_{-n+1}z+\ldots).$$

Por lo tanto

$$|\ w(z)\ |=|z^{-n/2}(b_0+b_1z+\ldots)|,$$

integrando a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$|\ w(z)\ ||dz|=\ |z^{-n/2}(b_0+b_1z+\ldots)||dz|\ .$$

Obsérvese que al integrar (en el lado izquierdo de la igualdad) término a término obtenemos que uno de éstos es

$$b_{(n+2)/2}\ \ 1/z\ dz$$

y éste tiende a infinito cuando c se aproxima a P_0.

Por lo tanto la longitud de c es infinita.

5.8 Curvas más cortas en una vecindad de un punto regular. Geodésicas y trayectorias.

Hasta el momento hemos definido la longitud de una curva, sobre una Superficie de Riemann, en la métrica asociada a una diferencial cuadrática.

Surge entonces la siguiente pregunta: dados dos puntos regulares arbitrarios P_1, P_2 S ¿ existirá una curva que los une, de tal forma que, en la w-métrica, esta curva sea la longitud más corta ?.

Esta pregunta la responderemos parcialmente en el siguiente:

Teorema 5.8.1 Todo punto regular P_0 de w tiene una vecindad U tal que cualesquiera dos puntos P_1 y P_2 en U pueden ser unidos por una curva, ùnicamnete determinada, más corta en la w-mètrica.

Demostración.

Sean P_0 un punto regular de w y U el w-disco máximo alrededor de P_0.

Sabemos que la longitud de una curva es más fàcilmente medida por medio del parámetro natural z, pues ésta es de hecho una longitud euclideana, y puesto que U es mapeado por $\dot{z}$ homeomorficamente sobre un disco del z-plano (del plano complejo), tenemos que dados dos puntos P_1, P_2 U, èstos pueden ser unidos por una curva de longitud más corta, siendo èsta la imagen bajo z^{-1} de la linea recta que une los puntos $\dot{z}(P_1)$ y $\dot{z}(P_2)$.

Cuando se habla de curvas de longitud más corta entre dos puntos, inmediatamente uno piensa en las geodésicas. Definamos qué es una geodèsica sobre una Superficie de Riemann S.

Definición 5.8.2 Sea $g:[a,b] \to S$, una curva localmente rectificable (es decir, localmente tiene longitud finita). Esta curva es llamada una <u>geodèsica</u> si es localmente la más corta, es decir, que todo punto t está en el interior de un intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ tal que el arco $g([t_i, t_{i+1}])$ es la conección más corta entre los puntos $P_i=g(t_i)$ y $P_{i+1}=g(t_{i+1})$ con respecto a la métrica usada.

Observación. Toda curva localmente rectificable c que no pase a través de polos de orden mayor o igual a dos de w es de hecho localmente rectificable en la w-métrica y puede ser parametrizada por la longitud de arco en esta métrica. Lo mismo es verdad para geodésicas.

Un parámetro que mide la longitud de arco de c en la w-métrica (es decir, si $u_1<u_2$ la diferencia u_2-u_1 es igual a la longitud del subarco correspondiente al subintervalo $[u_1,u_2]$) es llamado <u>el parametro natural</u> de la curva c.

De ahora en adelante utilizaremos esta parametrización.

Ha llegado el momento de definir uno de los conceptos más importantes para nuestros propósitos, definiremos a continuación lo que entenderemos por una w-trayectoria sobre una Superficie de Riemann S.

Definición 5.8.3 <u>Un arco recto</u>, con respecto a la diferencial cuadrática w, es una curva suave c a lo largo de la cual existe una constante k tal que

$$\arg dz^2 = \arg w(z)dz^2 = k = cte., \quad 0 \leq k \leq 2 .$$

Obsérvese que ésto implica, en particular, que $w(z)=0$, sobre

c. Es decir, un arco recto contiene únicamente puntos regulares de w.

Un *arco recto maximal* es un arco recto que no está propiamente contenido en otro.

Sean c_1 y c_2 dos curvas localmente rectificables, decimos que c_1 está *contenida propiamente* en c_2 si en el parámetro natural el map c_1 es una restricción del map c_2.

Decimos que *c es un arco horizontal* (*arco vertical*) para $w(z)dz^2$ si $k=0$ $(k=)$.

Definición 5.8.4 Si se dice *w-trayectoria horizontal* o simplemente una *w-trayectoria*, sin especificar la dirección, siempre entenderemos por ésto un arco horizontal maximal para $w(z)dz^2$. Un arco vertical maximal para $w(z)dz^2$ es llamado una *w-trayectoria vertical*.

Un arco recto maximal con $k=0$ es llamado una *0-trayectoria*.

La existencia y unicidad local de arcos horizontales a través de todo punto regular, está garantizada por la conformalidad del parámetro natural $\tilde{z}$ (la existencia y unicidad global será probada más adelante).

Formalicemos lo anterior en el siguiente:

Teorema 5.8.5 Sea w una diferencial cuadrática meromorfa sobre una Superficie de Riemann arbitraria S. Entonces a través de todo punto regular de w existe una w-trayectoria únicamente determinada. En particular, dos trayectorias nunca tienen un punto en común, a menos que ellas coincidan, de hecho una w-trayectoria no puede autointersectarse e un ángulo distinto de 0, .

Por otro lado, una trayectoria puede ser periódica. Podemos restringir el parámetro a un periodo primitivo, y entonces hablar de una trayectoria cerrada, trataremos este tipo de trayectorias mas adelante.

Veremos mas adelante que las geodésicas son, en general, composiciones de arcos rectos de diferentes inclinaciones, con vértices precisamente en los puntos criticos de w.

6. Conducta local de las trayectorias en la métrica asociada a una diferencial caudrática.

Uno de los conceptos que definimos en el capítulo anterior es el de w-trayectoria horizontal (o simplemente trayectoria) de una diferencial cuadrática meromorfa w en una Superficie de Riemann arbitraria S. Hicimos la importante observación de que las trayectorias contenían únicamente puntos regulares, ya que pediamos que sobre éstas $\arg w(z)dz^2=0$ y en particular ésto implica que $w(z)\neq 0$, es decir, ningún punto de la trayectoria puede ser un cero o un polo de la diferencial cuadrática.

Sin embargo, una trayectoria puede tender a un punto crítico. Veamos a continuación ¿ qué significa eso ?.

Supongamos que P_o es un punto regular de w y sea c la trayectoria que pasa por P_o (veáse la siguiente figura).

Dividamos la trayectoria c en dos partes c^+ y c^- orientadas de tal forma que P_o sea el punto inicial de ambas. A c^+ y c^- se les llamará los rayos con extremo P_o de la trayectoria c.

Ya que tenemos definida una cierta orientación en estos rayos, intuitivamente podemos hablar de rayos que tienden a un punto (éste concepto será formalizado con más detalle en el siguiente capítulo).

En este capitulo estudiaremos la estructura de las trayectorias dentro de una vecindad de un punto regular y luego la estructura, en una vecindad de un punto critico, de las trayectorias que tienden a éste. Este estudio se facilitará teniendo algunas coordenadas locales especificas alrededor del punto en cuestión. Hemos visto que el elegir una coordenada especifica en un punto regular (parámetro natural) nos permitió visualizar con más claridad el concepto de longitud de una curva, y obtuvimos que, en ese parámetro, calcular la longitud de una curva sobre una Superficie de Riemann, se reduce a calcular una longitud euclideana.

Asi, introduciremos un parámetro conforme, definido en una vecindad del punto analizado, en términimos del cual la representación de la diferencial cuadrática es más simple.

6.1 Parámetros distinguidos cerca de los puntos criticos.

Supongamos primero que Po es un punto critico finito o infinito de orden impar de la diferencial cuadrática w, asi en términos de un parámetro z cerca de Po y anulándose en Po, es decir, z(Po)=0 tenemos que w tiene la siguiente representación:

$$w(z)=z^n(a_n+a_{n+1}z+...),\quad a_n=0.$$

Ya que el factor que está dentro del paréntesis es distinto de cero, en una vecindad del cero suficientemente pequena, podemos elegir una rama univaluada de la raiz cuadrada, asi

$$(a_n+a_{n+1}z+\dots)^{1/2}=b_0+b_1z+b_2z^2+\dots$$

Asi obtenemos que $w(z)=z^{n/2}(b_0+b_1z+b_2z^2+\dots)$, integrando término a término obtenemos:

$$\tilde{z}=z^{(n+2)/2}(c_0+c_1z+c_2z^2+\dots).$$

Sea $d_0+d_1z+d_2z^2+\dots=(c_0+c_1z+c_2z^2+\dots)^{2/(n+2)}$, en una rama univaluada y en una vecindad suficientemente pequeña de $z=0$. Entonces $z \to \tilde{z}$, donde

$$\tilde{z}=\tilde{z}'^{(n+2)/2},\ \text{donde}\ \tilde{z}'=z(d_0+d_1z+\dots)$$

es un homeomorfismo en alguna vecindad de $z=0$.

Ya que $\tilde{z}=\tilde{z}'^{(n+2)/2}$, entonces $d\tilde{z}^2=[(n+2)/2]^2\tilde{z}'^n d\tilde{z}'^2$.

Asi la representación de w en tèrminos de èste parámetro es:

$$w(\tilde{z}')=[(n+2)/2]^2\tilde{z}'^n.$$

Hasta estos momentos hemos encontrado un parámetro especial alrededor de los puntos criticos finitos o infinitos de orden impar, en el cual w tiene la representación:

$$[(n+2)/2]^2\tilde{z}'^n.$$

Surge entonces una pregunta, ¿ este parámetro será el único en el cual w tiene esa representación ?, daremos a continuación de una respuesta a esta pregunta.

Supongamos que existe un parámetro $\tilde{z}''$ tal que $\tilde{z}''(P_0)=0$ y que w, en este parámetro, tenga la misma representación, es decir,

$$[(n+2)/2]z''^{n/2}dz''=[(n+2)/2]z'^{n/2}dz'.$$

Integrando ambos términos de la igualdad obtenemos

$$z''^{(n+2)/2}=z'^{(n+2)/2} + C, \text{ así } z''=[z'^{(n+2)/2} + C]^{2/(n+2)}.$$

Ya que para $n\geq-1$ tenemos $z''(0)=C^{2/(n+2)}=0$, por tanto $C=0$. Pero para $n\leq-3$ y n impar ésto también es cierto. Además,

$$z''=z'[1 + Cz'^{(-n+2)/2}]^{2/(n+2)}.$$

De aquí que $z''=kz'$ donde $k=\exp(2\ ij/(n+2))$, $j=0,1,\ldots,n+1$. Así, podemos concluir que este parámetro es único salvo una transformación de la forma: $z'' \to z'\exp(2\ ij/(n+2))$, $j=0,1,\ldots,n+1$.

Resumiendo lo anterior tenemos demostrado el siguiente:

Teorema 6.1.1 Sea P_0 un punto crítico finito o infinito de orden impar, entonces en una vecindad de P_0 podemos introducir un parametro local z', con $z'(P_0)=0$, en términos del cual la diferencial cuadrática tiene la representación:

$$w(z')dz'^2=[(n+2)/2]^2 z'^n dz'^2.$$

Este parámetro está únicamente determinado excepto por un factor $k=\exp(2\ ij/(n+2))$, $j=0,1,\ldots,n+1$.

A este parámetro se le llamará <u>parámetro distinguido</u> o <u>parámetro natural</u> cerca de P_0.

Hemos encontrado, hasta el momento, parametros naturales para los ceros (de cualquier orden) y los polos de orden impar de una diferencial cuadrática w. A continuación analizaremos el caso de polos de orden par.

Supongamos primero que P_0 es un polo de orden dos. La diferencial w, en este caso, tiene la representación:

$$w(z)=z^{-2}(a_{-2}+a_{-1}z+\ldots),\quad a_{-2}=0.$$

Así, $w(z)=z^{-1}(b_0+b_1z+\ldots)$. Integrando ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\check{z}=b_0\log z+b_1z+b_2/2z^2+\ldots$$

Si hacemos $\check{z}=b_0\log\check{z}'$ donde $\log\check{z}'=\log z+(b_1/b_0)z+(b_2/2b_0)z^2+\ldots$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\check{z}'&=z\exp[(b_1/b_0)z+(b_2/2b_0)z^2+\ldots]\\&=z(1+d_1z+\ldots).\end{aligned}$$

Así con este parámetro w tiene la representación:

$$d\check{z}^2=[(b_0/\check{z}'d\check{z}']^2=[a_{-2}/\check{z}'^2]d\check{z}'^2.$$

Formalizando lo anterior tenemos el siguiente:

Teorema 6.1.2 Si P_0 es un polo de orden dos de una diferencial cuadrática w, entonces en una vecindad de P_0 podemos introducir un parámetro natural $\check{z}'$, $\check{z}'(P_0)=0$, en el cual w tiene la representación

$$d\check{z}^2=[a_{-2}/\check{z}'^2]d\check{z}'^2.$$

Por último analicemos el caso en el cual P_0 es un polo de orden par ≥ 4.

Sea $n=2m$, donde $m\leq -2$. Como antes,

$$w(z)=z^m(b_0+b_1 z+\ldots),$$

integrando obtenemos

$$\tilde{z}=z^{m+1}(c_0+c_1 z+\ldots)+b_{|m|-1}\log z.$$

Asi si $\tilde{z}'=z(d_0+d_1 z+\ldots)$, $\tilde{z}=\tilde{z}'^{m+1}+b_{|m|-1}\log\tilde{z}'+C$.

De aqui que $d\tilde{z}^2=[(m+1)\tilde{z}'^m+b_{|m|-1}/\tilde{z}']^2 d\tilde{z}'^2$.

Por lo tanto obtenemos lo siguiente:

Teorema 6.1.3 Sea w una diferencial cuadrática meromorfa sobre una Superficie de Riemann arbitraria S y sea P_0 un polo de w de orden par ≥ 4. Entonces en una vecindad de P_0 podemos introducir un parámetro $\tilde{z}'$ con $\tilde{z}'(P_0)=0$ y en el cual una rama de la raíz cuadrada de w tiene la representación:

$$w(z)dz=[(n+2/2)\tilde{z}'^{n/2}+b_{|m|-1}/\tilde{z}']d\tilde{z}'.$$

6.2 Estructura de trayectorias cerca de los puntos regulares, criticos y de las que tienden a puntos criticos.

Útilizaremos ahora los parámetros obtenidos para visualizar la estructura de las trayectorias en una vecindad de los puntos regulares, de las trayectorias en una vecindad de los puntos criticos y de las que tienden a éstos.

Ya que el cambio de variable de un parámetro a otro es conforme, el comportamiento en términos de un parámetro arbitrario será una imagen conforme de la que obtendremos utilizando los parámetros naturales.

Supongamos primero que P_o es un punto regular arbitrario de w, entonces $\tilde{z}= \quad w(z)dz$ es un parámetro natural definido en una vecindad de P_o, si hacemos ahora el cambio de variable

$$z' = \quad w(z)dz$$

obtenemos $z=\tilde{z}'$. Pero ya que las trayectorias son las preimágenes de las horizontales $\mathrm{Im}\, \tilde{z}=cte.$ tenemos que, mediante el cambio de variable, las preimágenes de éstas (en el $\tilde{z}'$-plano) son nuevamente trayectorias horizontales.

Supongamos ahora P_o es un punto critico finito, es decir, un cero o un polo de primer orden. Entonces por el teorema 6.1.1 la representación de la diferencial cuadrática w en términos del parámetro distinguido $\tilde{z}'$ es $[(n+2)/2]^2 \tilde{z}'^n d\tilde{z}'^2$ así, si resolvemos por $\tilde{z}$ integrando la raiz cuadrada de w obtenemos

$$\tilde{z}=\tilde{z}'^{(n+2)/2},$$

eligiendo al cero como la constante de integración.

El sector $0\leq \arg z' \leq 2$ es subdividido en $n+2$ sectores iguales.

$$2\ k/n+2 \leq \arg z' \leq 2\ (k+1)/n+2,\ k=0,1,\ldots,n+1.$$

Cada sector es mapeado por $\tilde{z}$ sobre un semidisco del semiplano superior o el inferior. Las preimágenes de las horizontales $\mathrm{Im}\, \check{z}=cte.$, son <u>los arcos horizontales con respecto a w</u>. Analicemos a continuación tres casos especiales.

a) Sea P_o un polo de orden uno. Así $\check{z}=\check{z}'^{1/2}$, ya que en este caso $n=-1$, este parámetro mapea toda vecindad alrededor de P_o a un semidisco del semiplano superior (o del inferior). El map $\check{z}'^{-1}$ dado por

$$(\check{z})^{-1}:\check{z}' \to \check{z}'^{2},$$

así, la estructura de las trayectorias en una vecindad de P_o está dada como sigue: la recta horizontal, dentro del semidisco, que pasa a través de cero es mapeada, bajo $\check{z}'^{-1}$, a un rayo que tiene a P_o como extremo, cualquier otra horizontal dentro del semidisco será mapeada bajo $\check{z}'^{-1}$ a una parábola cuyo eje de simetría contiene al rayo con extremo P_o descrito anteriormente.

b) Ahora, sea P_o es un cero de orden uno, entonces $\check{z}=\check{z}'^{3/2}$. Así, las trayectorias en una vecindad de P_o son las imágenes de las horizontales $\mathrm{Im}\, \check{z}=cte.$ bajo el map $\check{z}^{-1}:\check{z}' \to \check{z}'^{2/3}$. El semidisco en el semiplano superior centrado en cero es mapeado por $\check{z}^{-1}$ a una vecindad centrada en P_o. Este map puede ser visto como la composición de dos mapeos, primero elevando al cuadrado y luego aplicando la raíz cúbica, así la horizontal en el semidisco que pasa a través de $\check{z}'=0$ es mapeada bajo el primer map al rayo que tiene al cero como extremo, este rayo bajo el segundo map es mapeado a tres rayos, tieniendo a Po como extremo, que dividen la vecindad de Po en tres sectores con ángulos iguales. Cada horizontal Im $\tilde{z}$=cte. en el semidisco, es mapeada bajo el primer map a una parábola cuyo eje de simetría contiene al rayo con extremo en cero descrito anteriormente y bajo el segundo ésta es mapeada a tres curvas simétricas, cada una de las cuales se encuentra en uno de los sectores divididos por los rayos que tienen a Po como extremo.

Obsérvese que en estos dos últimos ejemplos existe, al menos, un rayo de trayectoria que tiende a Po.

Definición 6.2.2. Las trayectorias que emanan o llegan al punto Po (excepto cuando Po es un punto regular) son llamadas <u>trayectorias críticas</u>.

Veamos ahora el caso en el que Po es un polo de orden dos.

Como vimos en el teorema 6.1.2 en términos del parámetro distinguido $\tilde{z}'$ la diferencial cuadrática tiene la representación $[a_{-2}/\tilde{z}'^2]d\tilde{z}'^2$, así $\tilde{z}= a_{-2}\log\tilde{z}'$. Por lo tanto las trayectorias que pasan por Po son las imágenes de las horizontales bajo el map $\tilde{z}^{-1}:\tilde{z} \to \tilde{z}'=\exp(\tilde{z}/ a_{-2})$.

Tenemos entonces las siguientes tres posibilidades:

a) Si $a-z>0$, entonces $a-z$ es un real positivo así las imágenes de las horizontales $\mathrm{Im}\, z=\mathrm{cte.}=k$, bajo $z^{-1}=\exp(z/\ \ a-z)$ son los rayos que tienen Po como extremo y cuya inclinación está determinada por la constante k. Es decir, la horizontal $\mathrm{Im}\, z=k$, es mapeada bajo z^{-1} a un rayo que con extremo Po y que pasa por el punto cosk+isenk (en su forma polar).

b) Si $a-z<0$, puesto que $a-z=i\ -(a-z)$, entonces $z/i\ \ -a-z$ convierte a cada horizontal $\mathrm{Im}\, z=k$ a la vertical $\mathrm{Re}\, z=-k$, pero el map exp mapea cada una de estas últimas en un círculo centrado en Po, cuyo radio está determinado, nuevamente, por la constante k.

c) Si $a-z$ es no real, aunque estamos mapeando horizontales (con parte imaginaria constante), al variar el valor de x en el z'-plano variamos tanto la parte real como la imaginaria de $z/\ a-z$. Así, las horizontales $\mathrm{Im}\, z=k$ son mapeadas bajo

$$z^{-1}=\exp(z/\ \ a-z)$$

a espirales logarítmicas, cada una de éstas, tendiendo a Po.

Supongamos ahora, Po un polo de orden impar ≥ 3 o de orden par ≥ 4 sin término logarítmico. Así por los teoremas 6.1.1 y 6.1.3

w tiene la representación siguiente en el parámetro distinguido Z':

$$w(Z')dZ'^2=[(n+2)/2]^2 Z'^n dZ'^2 .$$

Integrando una rama de la raiz cuadrada de w obtenemos

$$Z=Z'^{(n+2)/2} ,$$

salvo una constante aditiva, la cual elegimos como cero.

Hagamos un cambio conveniente de parámetro. Sea $z=1/Z$, entonces las trayectorias horizontales en el Z-plano corresponden a los circulos a través de $z=0$ con el eje real como tangente. Por medio del map $Z'=z^{2/(|n|-2)}$ encontramos las trayectorias en términos del parámetro distinguido Z'.

a) Para $n=3$, es decir, un polo de orden 3 tenemos $Z'=z^2$. Así, la horizontal $\mathrm{Im}\, Z=0$ es mapeada bajo $Z'=z^2$ al rayo con extremo en P_0, y cada circulo tangente a $\mathbb{R}$ en cero es mapeado a una especie de cardeoide, todas ellas con P_0 como punto en común.

b) Para un polo de orden 4, se tiene que $Z'=z$, así una vecindad de $z=0$ con los circulos tangentes al eje real en el punto $z=0$ es mapeada en ella misma. Por lo tanto las trayectorias que tienden a P_0, en una vecindad de este punto son precisamente los circulos tangentes al punto P_0 junto con la horizontal $\mathrm{Im}\, z=0$.

c) Para un polo de orden 5, tenemos que $Z'=z^{2/3}$, este map también lo podemos ver como la composición de dos, primero elevamos al cuadrado y luego obtenemos raíz cúbica. Así la estructura de las trayectorias que tienden a Po son las imágenes de los círculos tangentes al eje real en z=0 bajo la composición de estos mapeos. Las imágenes de estos círculos bajo el primer map la describimos en a), el rayo que tiene a Po como extremo es mapeado bajo el segundo map a tres rayos (que, nuevamente, tienen a Po como extremo) y además dividen la vecindad en tres sectores iguales. Cada cardeoide es mapeada a tres círculos, cada uno de los cuales yace en cada sector, tangentes en el punto Po.

Obsérvese que en estos tres últimos casos, todas las trayectorias tienden a Po en alguna de las |n|-2 direcciones, las cuales acotan sectores congruentes con ángulos 2 /|n|-2. En estos casos afirmamos que Po tiene una vecindad con la propiedad de que todo rayo de trayectoria que entra a ésta tiende a Po.

En el siguiente capítulo analizaremos más detalladamente este tipo de trayectorias.

6.3 Curva más cortas en una vecindad de un punto crítico finito.

En la sección 5.8 vimos que cada punto regular tiene una vecindad en la cual cualesquiera dos puntos en ella pueden ser unidos por una única curva con longitud mínima, es decir, que si estos dos puntos son unidos por cualquier otra curva, ésta tiene longitud estrictamente mayor.

A continuación veremos que esta propiedad también la tienen los puntos críticos finitos, utilizando el parámetro natural $\tilde{z}'$ definido en la sección anterior.

Sea P_o un cero de orden n de la diferencial cuadrática w. Entonces la representación de ésta en términos del parámetro distinguido $\tilde{z}'$ es

$$w(\tilde{z}')d\tilde{z}'^2=[(n+2)/2]^2\tilde{z}'^n d\tilde{z}'^2.$$

Así, $\tilde{z}= \quad w(\tilde{z}')d\tilde{z}'=\tilde{z}'^{(n+2)/2}$.

Analicemos primero el caso para $n=1$, este ejemplo nos ayudará a visualizar cuáles son las curvas deseadas.

Sabemos que en una vecindad de un cero de orden uno, las trayectorias que tienen un rayo tendiendo a P_o dividen una vecindad de éste en tres sectores iguales cada uno de los cuales tiene un ángulo igual a $2\ /3$ en P_o.

Sea U el w-disco máximo en el cual $\tilde{z}$ está definido, así $\tilde{z}(U)=V$ donde $V=\{z\ C:|z|=r\}$. Sea $U_o=\tilde{z}^{-1}(\{z\ C:|z|=r/2\})$.

Afirmamos que la vecindad U_o es una en la cual está definido el parámetro natural, es una vecindad en la que existen curvas más cortas.

Veamos entonces que en esta vecindad se cumple lo deseado.

Sean P_1 y P_2 dos puntos arbitrarios de esa vecindad.

Supongamos primero que P_1 y P_2 son tales que $|\arg P_1 - \arg P_2| < 2\ /3$. Así P_1 y P_2 pueden o no estar en el mismo de los sectores mencionados, supongamos el caso más general, es decir, supongamos que P_1 y P_2 se encuentran en dos sectores consecutivos. Pero ya que el parámetro natural $\mathcal{Z}'$ (veáse sección 6.1) mapea cada uno de los sectores en un semidisco del semiplano superior o inferior, tenemos que la imagen de estos dos sectores, bajo ese map, es un disco con centro en cero. Sean z_1 y z_1 las imagenes, bajo $\mathcal{Z}'^{-1}$, de P_1 y P_2 respectivamente.

La preimagen de la recta en **C** que une z_1 y z_2 bajo el map $\mathcal{Z}'$ es la curva deseada, ya que, como vimos en la observación 5.7.2, calular la w-longitud de una curva sobre la Superficie en términos del parámetro natural es de hecho calcular una longitud euclideana, así si P_1 y P_2 son unidos por otra curva cualquiera, la longitud de la curva imagen de ésta bajo el map $\mathcal{Z}'$ es mayor o igual que la longitud euclideana de la recta que une los puntos z_1 y z_2.

Así, la curva más corta entre los puntos P_1 y P_2 en el caso de que $|\arg P_1 - \arg P_2| < 2\ /3$ es el arco recto que los une.

Supongamos ahora que P_1 y P_2 son tales que $|\arg P_1 - \arg P_2| \geq 2\ /3$, nuevamente como en el caso anterior P_1 y P_2 pueden o no estar en el mismo sector (con la condición impuesta en los argumentos de P_1

y P_2 el estar en el mismo sector significa que cada uno de estos puntos yace en los rayos que dividen a éste). Supongamos primero que ambos yacen en sectores consecutivos. Como antes, estos dos sectores son mapeados bajo $\ddot{z}'$ a un disco con centro en cero. Sean z_1 y z_2 las imágenes de P_1 y P_2 respectivamente.

Nuevamente, la imagen de la recta que une z_1 con z_2 bajo al map $\ddot{z}'^{-1}$ es la curva deseada, ya que la imagen, bajo $\ddot{z}'$, de cualquier otra curva que una los puntos P_1 y P_2 tiene longitud estrictamente mayor.

Obsérvese que si la linea recta que une z_1 con z_2 no pasa a través del cero, la imagen de ésta bajo $\ddot{z}'^{-1}$ es un arco recto que une P_1 y P_2, en cambio, si ésta pasa por el cero, la imagen de ésta bajo $\ddot{z}'^{-1}$ es la unión de los dos rayos P_1P_0 y P_0P_2, siendo ésta última la curva más corta entre P_1 y P_2.

Supongamos ahora que $|\arg P_1 - \arg P_2| = 2\ \ /3$, asi cada uno de estos puntos yace en los rayos que dividen a el sector antes mencionado. Nuevamente, este sector es mapeado por $\ddot{z}'$ un semidisco en el semiplamo superior. Sean z_1 y z_2 las imágenes de P_1 y P_2 respectivamente. Por el mismo argumento de antes, la imagen de la recta que une los puntos z_1 y z_2 bajo el map $\ddot{z}'^{-1}$ es la curva deseada.

El caso general, es decir, para un n arbitrario, la vecindad de P_0 está dividida en $n+2$ sectores cada uno de los cuales teniendo ángulos $2\ \ /(n+2)$.

Nuevamente dividimos el análisis en dos casos:

a) P_1 y P_2 son puntos en la vecindad tales que

$$|\arg P_1 - \arg P_2| < 2\ /(n+2).$$

b) P_1 y P_2 son tales que $|\arg P_1 - \arg P_2| \geq 2\ /(n+2)$.

Haciendo en cada uno de estos casos un análisis similar al ejemplo anterior tenemos demostrado el siguiente:

Teorema 6.3.1 Sea w una diferencial cuadrática sobre una Superficie de Riemann arbitraria S y P_0 un cero de w de orden n. Entonces existe una vecindad de P_0 tal que para cualesquiera dos puntos P_1 y P_2 en pueden ser unidos por una única curva más corta en la vecindad. Esta curva o bien es un arco recto

$$\arg dz^2 = \arg w(z')dz'^2 = cte,$$

o bien es una unión de dos radios encerrando ángulos $\geq 2\ /(n+2)$.

Observación. En el segundo caso, es decir, cuando la curva más corta es la unión de los dos radios, la cantidad $\arg dz^2$ puede ser diferente a lo largo de ellos.

Consideremos ahora el caso en que P_0 es un polo de w de primer orden.

Asi en términos del parámetro distinguido z', w tiene la representacion

$$dz^2 = w(z')dz'^2 = 1/4z'dz'^2,$$

por lo tanto

$$z = z'^{1/2},$$

así bajo este map, una vecindad U_0 de P_0 es mapeada un semidisco en el semiplano superior.

Sean P_1 y P_2 en U_0.

Si $|\arg P_1 - \arg P_2| =$ y P_1 y P_2 tienen parte real negativa y positiva respectivamente, la vecindad U_0 en mapeada bajo $z = z'^{1/2}$ al semicirculo en el plano superior. Sean z_1, z_2 y $-z_2$ las imágenes bajo este map de los puntos P_1 y P_2 respectivamente.

Ya que P_2 tiene dos preimágenes bajo este map, existen dos curvas más cortas entre P_1 y P_2, a saber las imágenes, bajo el map z^{-1}, de las rectas que unen los puntos z_1 con z_2 y $-z_2$ con z_1 las cuales llamaremos c_1 y c_2 respectivamente. Por lo tanto en este caso no tenemos unicidad de curvas más cortas. La falta de unicidad de esta curva es la razón por la cual perforamos el disco en P_0 y únicamente consideramos curvas en la misma clase de homotopía en el disco perforado. Esta clase está determinada por el número de vueltas de la curva alrededor del punto P_0.

Así pues si consideramos las curvas en la clase de homotopía a las que pertenecen, c_1 y c_2 son las únicas curvas más cortas uniendo los puntos P_1 y P_2.

En general si P_1 y P_2 son dos puntos en U_0 y $c: I \rightarrow U_0$ es una curva que los une (es decir, $c(0)=P_1$ y $c(1)=P_2$).

Supongamos primero que c no da ninguna vuelta alrededor de P_0, es decir,

$$I(\arg Z'(c))=|\arg P_2-\arg P_1|=0,$$

entonces en su clase de homotopía tenemos una curva más pequeña que une esos dos puntos, a saber la imagen inversa bajo Z^{-1} de la recta que une los puntos z_1 con z_2.

Supongamos ahora que el número de vueltas de c alrededor del cero es mayor que cero, es decir,

$$I(\arg Z'(c))=|\arg P_2-\arg P_1|>0$$

(veâse la siguiente figura).

Ya que $I(\arg(Z'(c))>0$, entonces existe P c, un primer punto, tal que $\arg P=2$.

Sea $r_i=|P_i|^{1/2}$, $i=0,1,2$ (es decir, la w-longitud de los radios con punto final P_i). Entonces la w-longitud del subarco c' de c que une los puntos P_1 y P es $\geq r_0+r_1$ con igualdad únicamente si este subarco es igual a la suma de los dos radios. Si reemplazamos c' por esta suma obtenemos una nueva curva $\tilde{c}$, la cual es más corta que c y pasa por P_0.

El mismo argumento muestra que entre todas las curvas uniendo P_1 y P_2 que pasan por P_0, la suma de los dos radios es la única curva más corta. Esto también muestra que la única conección más corta de los puntos P_1 y P_2 cuando éstos están en el mismo radio es precisamente el intervalo radial $[P_1, P_2]$.

Así resumientdo estos últimos resultados tenemos lo siguiente:

Teorema 6.3.2 Sea w una diferencial cuadrática sobre una Superficie de Riemann arbitraria S y sea P_0 S un polo simple de w. Entonces P_0 tiene una vecindad U_0 S en la cual se cumple la siguiente propiedad: sean P_1, P_2 U_0 y sea c S una curva arbitraria uniendo estos dos puntos. Si $I(\arg(Z'(c))=0$, entonces existe una única curva más corta en la clase de homotopía de c, a saber, el arco recto conectando los dos puntos. Si por el contrario

$$I(\arg Z'(c))>0,$$

todo arco, en la clase de homotopía de c es más largo que la suma de los dos radios, los cuales pueden ser considerados como los únicos límites más cortos en la clase de homotopía de todas las curvas que unen a éstos.

Observación 6.3.3 En los últimos dos teoremas de hecho demostramos que una geodésica es una composición de arcos rectos (que puede ser uno solo) con diferentes inclinaciones y con vértices en los puntos críticos finitos de w.

Además el ángulo formado por dos arcos rectos (en una geodésica) tiene que ser mayor o igual a $2\ /(n+2)$ donde n es el orden de w en el vértice.

7. Estructura de las trayectorias de una diferencial cuadrática desde un punto de vista global.

Hemos visto que las trayectorias de una diferencial cuadrática w son los arcos horizontales maximales que contienen ûnicamente puntos regulares, sin embargo éstas pueden tender a un punto critico de w.

En la sección 6.2 analizamos la estructura de las trayectorias cerca de los puntos regulares es decir; en una vecindad de éstos y además la estructura de las trayectorias que tienden a puntos criticos de w, también este análisis se hizo localmente. Vimos además que las trayectorias pueden ser vistas como las imagenes de las rectas horizontales del z'-plano bajo el map z^{-1} donde éste es el parámetro natural.

El propósito principal de este capitulo es dar una representación de la trayectoria, que pasa a través de un punto regular de w, desde un punto de vista global, es decir, veremos que esa trayectoria puede ser vista como la imagen inversa, bajo un continuación analitica del parámetro natural z, de un intervalo de R { , }.

Para ésto, sean w una diferencial cuadrática meromorfa sobre una Superficie de Riemann arbitraria S, Po un punto regular de w, c la w-trayectoria que pasa a través de Po y Uo el w-disco máximo con centro en Po.

Sea z_0 un parámetro natural definido en Uo con $z_0(Po)=0$.

Sea v_1 $V_0=\zeta_0(U_0)$, $v_1=0$ un punto sobre el eje real y U_1 el w-disco máximo centrado en $P_1=(\zeta_0)^{-1}(v_1)$, éste también es un punto regular de w. Elijamos un parámetro natural ζ_1 definido en U_1, ya que P_1 U_0 U_1, tenemos que $\zeta_1=\zeta_0$ (véase inicio de la sección 5.6) en U_0 U_1. Tomemos $\zeta_1=\zeta_0$ en esa intersección.

Asi podemos decir que ζ_1^{-1} es continuacion analitica [2],[17] de ζ_0^{-1}.

Elijamos ahora un punto v_2 $V_1=\zeta_1(U_1)$ y procedamos de la misma forma. Continuando con este proceso obtenemos una cadena finita de discos $C=V_0$ V_1 ... V_k en C con centros en el eje real. Sea D C la región que consta de la unión de todas las posibles cadenas obtenidas utilizando el proceso antes descrito.

Definamos ahora un map, el cual llamaremos nuevamente ζ^{-1}, de la región D a la Superficie S de la siguiente forma: si v D, entonces v está en alguna cadena C de las descritas anteriormente, definimos $\zeta^{-1}(v)$ como el valor en v de la continuación analitica de ζ_0^{-1} a lo largo de esa cadena. Este map está bien definido, es conforme y localmente uno a uno.

Ya que todas las colecciones de discos contienen a V_0, y cada una tiene unión conexa, D es un conjunto conexo.

Sea I=D R [,], éste intervalo puede ser abierto, semiabierto o cerrado, por simple notación escribamos I=(a,b). Asi $\zeta^{-1}((a,b))$ define la trayectoria c a través de P_0.

7.1 Trayectorias cerradas.

Supongamos (el caso opuesto lo trataremos en la siguiente sección) que existen dos puntos x_0, x_1 (a,b) tales que

$$z^{-1}(x_0)=P_0=z^{-1}(x_1),\ P_0 \ S.$$

ya que z^{-1} es localmente un homeomorfismo (véase principio de este capitulo) existen puntos en (a,b) los cuales son mapeados por z^{-1} a un mismo punto y cuya distancia entre ellos es minima, sean éstos u_0 y u_1 donde $u_1>u_0$.

Sean V_0, V_1 $\mathbb{C}$ los discos euclideanos maximos abiertos con centros u_0 y u_1 respectivamente, en los cuales z^{-1} es uno a uno. Asi ellos tienen como imagen bajo z^{-1} a U_0, el w-disco máximo centrado en P_0.

Los dos parâmetros naturales

$$z_0 : U_0 \to V_0 \ \text{y} \ z_1 : U_0 \to V_1$$

satisfacen $z_1 = \ z_0+(u_1-u_0)$.

Pero la relación $z_1=-z_0+(u_1-u_0)$ no puede darse, ya que si ésta pasa existirian puntos u_0' y u_1' en (u_0, u_1) imágenes bajo z de un mismo punto P_0' de S, contradiciendo la minimalidad de la elección del intervalo (u_0, u_1). Asi

$$z_1=z_0+(u_1-u_0).$$

Denotemos $s=u_1-u_0$, de lo anterior podemos concluir que

$$z^{-1}(z+s)=z^{-1}(z) \ \text{para todo} \ z \ \ V_0.$$

Asi bajo la suposición de que existen puntos x_0, x_1 (a,b) teniendo la misma imagen bajo z^{-1} debemos tomar $(a,b)=\mathbb{R}$ y concluir que z^{-1} restringido a $\mathbb{R}$ es un map periódico con periodo s.

El intervalo $[u_0, u_1)$ es mapeado bajo $\tilde{z}^{-1}$ inyectivamente sobre todo el conjunto imagen y ya que $\tilde{z}^{-1}(u_0)=\tilde{z}^{-1}(u_1)$, y el hecho de que la trayectoria que pasa a través de un punto regular es simple tenemos que la imagen es una curva de Jordan.

Estas trayectorias serán llamadas <u>trayectorias cerradas</u>.

Nuestro siguiente propósito es mostrar que si w es una diferencial cuadrática meromorfa sobre una Superficie de Riemann arbitraria S, toda trayectoria cerrada c de w puede ser encajada en un dominio anular D de S (el cual definiremos más adelante)..

Sea c una trayectoria cerrada de w, una diferencial cuadrática meromorfa sobre S. Por el análisis anterior sabemos que c es la imagen (inyectiva) bajo z^{-1} de un intervalo $[u_0, u_1)$ de **R**. Mostraremos que existe un número $r>0$ tal que $\tilde{z}^{-1}$ está inyectivamente definida sobre el rectángulo $[u_0, u_1) \times (-r, r)$.

Supongamos que lo anterior no sucede, así existen sucesiones (z_n) y (z_n') con $u_0 \leq \operatorname{Re} z_n < u_1$, $u_0 \leq \operatorname{Re} z_n' < u_1$, tales que $z_n \to u$ y $z_n' \to u'$, cuando $n \to$, $u, u' \cdot [u_0, u_1)$ y $\tilde{z}^{-1}(z_n)=\tilde{z}^{-1}(z_n')$. Ya que $\tilde{z}^{-1}$ es continua obtenemos que $\tilde{z}^{-1}(u)=\tilde{z}^{-1}(u')$.

El punto u es diferente a u', ya que en caso contrario toda vecindad de $u=u'$ tendría puntos z_k, z_k' distintos con

$$\tilde{z}^{-1}(z_k)=\tilde{z}^{-1}(z_k')$$

lo cual contradice la inyectividad local de $\tilde{z}^{-1}$ en u.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $u<u'$. La diferencia $u'-u$ tiene que ser mayor o igual que $s=u_1-u_0$, ya que en caso contrario, se contradice la minimalidad de s. Por lo tanto $u=u_0$ y $u'=u_1$.

Pero con ésto tenemos que $z_n+s \to u_1$ y $\Xi^{-1}(z_n+s)=\Xi^{-1}(z_n')$ pero ya que $u_0 \leq \mathrm{Re}\, z_n < u_1$ y $u_0 \leq \mathrm{Re}\, z_n' < u_1$ tenemos que $z_n+s=z_n'$ lo cual contradice la inyectividad de Ξ^{-1} en una vecindad de u_1.

Por lo tanto existe $r>0$ tal que Ξ^{-1} es uno a uno en el rectángulo $[u_0, u_1)\times(-r,r)$. Así el map Ξ^{-1} es un homeomorfismo del espacio de identificación del rectángulo $[u_0, u_1]\times(-r,r)$ (con iy identificado con $iy+s$ donde $-r<y<r$) sobre un dominio anular D S.

Continuemos ahora Ξ^{-1} a lo largo de las verticales al intervalo $[u_0, u_1)$ como lo hicimos antes a lo largo del eje real. Ahora, para cada punto x $[u_0, u_1)$ existe un intervalo máximo $(r^-(x), r^+(x))$, $r^-(x) < 0 < r^+(x)$, tal que Ξ^{-1} es un homeomorfismo del rectángulo $[u_0, u_1)\times(r^-(x), r^+(x))$, nuevamente con los puntos iy e $iy+s$ identificados $(r^-(x) < y < r^+(x))$.

Sea $r^-=\max r^-(x)$ y $r^+=\min r^+(x)$ donde el máximo y el mínimo están tomados sobre todos los x $[u_0, u_1]$.

Así el map Ξ^{-1} es uno a uno en $[u_0, u_1)\times(r^-, r^+)$, ya que de otro modo se contradice la maximalidad y minimalidad de r^- y r^+ respectivamente.

Definición. El dominio D S imagen, bajo Ξ^{-1} del rectángulo $[u_0, u_1]\times(r^-, r^+)$ se le llamará <u>dominio anular máximo asociado a c</u>.

Resumiendo los últimos resultados tenemos probado el siguiente:

Teorema 7.1.1 Sea w una diferencial cuadrática meromorfa definida sobre una Superficie de Riemann arbitraria S, entonces toda w-trayectoria cerrada c puede ser encajada en un dominio anular maximal D S.

Sean w una diferencial cuadrática sobre una Superficie de Riemann arbitraria S y c una w-trayectoria cerrada, por el análisis del inicio de este capitulo, c puede ser considerada como la imagen bajo $\tilde{z}^{-1}$ de R, es decir, $c=\tilde{z}^{-1}(- \ , \ )$. Con esta notación tenemos que los rayos de la w-trayectoria c, desde P_0, c^+ y c^- pueden ser representados como:

$$c^- = \tilde{z}^{-1}(- \ ,0] \text{ y } c^+ = \tilde{z}^{-1}[0, \ ).$$

Ejemplo 7.1.2 Sea w una diferencial cuadrática holomorfa sobre el toro S. La Superficie S puede ser considerada como un paralelogramo cuyas esquinas son 0,1,b y 1+b (con b un número complejo cuya parte imaginaria es positiva) y con las siguientes identificaciones z -> z+1, z -> z+b sobre los lados. Como vimos en el ejemplo 5.4.1, w(z) es una función holomorfa doblemente periódica sobre el plano complejo y por tanto w(z)=k=cte. Asi, las trayectorias son las lineas rectas definidas por $kdz^2>0$, es decir,

$$\arg dz=-1/2 \arg k (\mathrm{mod} \ ).$$

Sea c una w-trayectoria que pasa a travès del cero y supongamos que èsta corta el lado del paralelogramo formado por los puntos 1 y $1+b$ en el punto z_0.

Afirmamos que c es cerrada si y sòlo si $|z_0-1|$ es un múltiplo racional de $|b|$. Para probarlo, supongamos que el cociente de esas longitudes es un irracional j, afirmamos que entonces ambos rayos de c, c^+ y c^-, son densos en todas partes en S. esto se sigue de que, en el lado del paralelogramo, formado por los puntos 1 y $1+b$, el conjunto de puntos

$$\{nj \bmod 1 : n\ \mathbf{N}\}$$

es denso [10], asi c no puede ser cerrada.

Recíprocamente, si el cociente de las longitudes $l_z=|z_0-1|$ y $l_b=|b|$ es racional, es decir, si $l_b/l_z=r/t$, entonces $rl_b=tl_z$.

Recorramos la trayectoria c comenzando con cero, èsta intersecta por primera vez al lado del paralelogramo formado por los puntos 1 y $1+b$ en el punto z_0, continuando c vuelve a intersectar a ese lado en un punto z_1, ya que $rl_b=tl_z$, $z_t=(1,1+b)$, por lo tanto la trayectoria se cierra en este punto.

Por lo tanto c es cerrada si y sòlo si $|z_0-1|$ es un múltiplo racional de $|b|$ como fue afirmado.

Sea nuevamente w una diferencial cuadrática sobre una Superficie de Riemann arbitraria S y c una w-trayectoria cerrada en S.

Observación. Por la construcción del dominio anular (véase inicio de esta sección), si c es una w-trayectoria cerrada y D el dominio anular asociado a ésta, toda trayectoria cerrada c' en D es la imagen, bajo el map z^{-1}, de una recta horizontal y por tanto es libremente homotópica a c en

$$S'=S\setminus\{\text{polos de } w\}.$$

Resulta que el inverso de esto, es decir, si c' es una w-trayectoria cerrada libremente homotópica a c en S', entonces c' D, también es cierto excepto en el caso siguiente: supongamos que S es un toro, w es una diferencial cuadrática holomorfa sobre S y si c es cerrada, entonces todas las w-trayectorias (horizontales) sobre S son cerradas y por lo tanto no hay un único anillo anular D que cubre a S salvo por una trayectoria cerrada c', es decir, no se cumple la unicidad de anillos anulares.

Por otra parte probemos a continuación el siguiente:

Teorema 7.1.3 Sea w una diferencial cuadrática meromorfa sobre una Superficie de Riemann arbitraria S. Sea D un dominio anular asociado a una w-trayectoria cerrada c. Si c' es otra w-trayectoria ibremente homotópica a c en la Superficie

$$S'=S\setminus\{\text{polos de } w\},$$

entonces c' D.

Demostración.

Afirmamos que c no pede ser libremente homotópica a un punto P sobre S'. De otro modo, aplicando el teorema 4.4.5 esta curva acota un disco D S'. Sea f un map conforme de D sobre el disco unitario $|z|<1$, es decir introducimos en D el parámetro z . Como c es una curva de Jordan, la representación de w en el parámetro z, w(z), es analítica en $|z|\leq 1$, y sobre $|z|=1$ tenemos que para dz, $w(z)dz^2>0$. Así

$$\arg w(z)dz^2=0$$

a lo largo del circulo unitario. así $d(\arg w(z))=-2d(\arg dz)$.

Pero ya que el incremento de arg dz a lo largo de $|z|=1$ es 2 , tenemos que 1/2 d arg w(z)=-2, lo cual implica que w tiene al menos un polo en D, lo cual contradice el hecho de que D S'. Por lo tanto c no es homotópica a un punto P S'.

Ya que c y c' son w-trayectorias c' c=0, así, por el teorema 4.4.6 las dos curvas acotan un anillo D sobre S'. Este anillo puede ser mapeado conformemente sobre el anillo $0<r_0<|z|<r_1<$ [12]. Aplicando nuevamente el argumento anterior w no tiene ceros sobre D, por lo tanto el dominio anular D de c contiene a c'.

7.2 Trayectorias no cerradas.

Hemos visto, al inicio de este capitulo, que una w-trayectoria puede ser representada como la imagen bajo una continuación analítica de $\tilde{z}^{-1}$ (donde $\tilde{z}$ es el parámetro natural) de un intervalo $(a.b)$ R { , }. En particular, vimos (en la sección anterior) que una w-trayectoria cerrada puede representarse como la imagen inyectiva, bajo ese map de un intervalo semicerrado $[u_0,u_1)$ R donde además $\zeta^{-1}(u_0)=\zeta^{-1}(u_1)$.

Supongamos ahora que c es una w-trayectoria no cerrada, es decir, para todo u_1,u_2 (a,b), si $u_1=u_2$, entonces

$$\zeta^{-1}(u_1)=\zeta^{-1}(u_2).$$

Sea $c^+=\zeta^{-1}([0,b))$ un rayo de la trayectoria c.

Denotemos por L^+ el conjunto de puntos P S tales que existe una sucesión $(u_n) \to b$ y $P_n=\zeta^{-1}(u_n) \to P$. A L^+ le llamaremos <u>el conjunto límite de c^+</u>. Ya que la trayectoria c tiene dos rayos, c^+ y c^-, ésta tiene dos conjuntos límite L^+ y L^- respectivamente.

Obsérvese que los conjuntos límite L^+ y L^- dependen de la elección del parámetro natural, es decir, si se usó ζ ó $-\zeta$ para la representación de c como la imagen bajo ζ^{-1} de un intervalo de R { , }. Observemos además que L^+ y L^- no dependen de la elección del punto inicial P_0 de c^+ y c^-.

Definición 7.2.1 Si L^+ es vacio, decimos que c^+ es <u>un rayo que tiende a la frontera</u> o que es <u>un rayo frontera</u>. Si c^+ y c^- son rayos frontera, c es llamada <u>un corte cruzado</u>.

Observación 7.2.2 Una condición necesaria y suficiente para que c sea un corte cruzado es que para todo conjunto K S existe un número u_0 tal que si $u_0 \leq u < b$ entonces $\zeta^{-1}(u)$ K.

Sea c una w=trayectoria no cerrada en S y L^{+} el conjunto límite del rayo c^{+} de c desde P_o.

Supongamos que L^{+} es no vacio y que existe P L^{+} un punto regular de w. Sea c_1 la w-trayectoria no cerrada que pasa a través de P (la existencia de ésta última la garantiza el Teorema 5.8.5).

Sean $\tilde{z}_1^{-1}$ y $\tilde{z}^{-1}$ los maps definidos de los intervalos $(a_1, b_1), (a,b)$ R $\{\ ,\ \}$ a la Superficie S respectivamente, tales que c_1 y c pueden ser representadas como:

$$c_1 = \tilde{z}_1^{-1}((a_1, b_1)) \quad y \quad c = \tilde{z}^{-1}((a,b)).$$

Sea $Q=P$ un punto arbitrario sobre c_1 y sea s la w-longitud del intervalo cerrado I c_1 que une los puntos P y Q.

Sea R el rectángulo máximo donde está contenido I (véase inicio de la sección 7.1) y en el cual $\tilde{z}_1^{-1}$ es uno a uno.

Sea $\{u_n\}$ R, $u_n \to b$ tal que $\tilde{z}^{-1}(u_n)=P_n \to P$ (esto lo podemos hacer ya que P L_{+}).

Pero ya que para una n suficientemente grande P_n R, al considerar el map $\tilde{z}_1^{-1}$ para c_1 (en una vecindad de R obtenemos parte del $\tilde{z}^{-1}$ para c, así tomaremos éstos como el mismo map $\tilde{z}^{-1}$ dentro del rectángulo R. Por lo tanto para una n suficientemente grande el subintervalo de c, que pasa a través de P_n, puede ser continuado a lo largo de R, así c contiene necesariamente, un número infinito de subintervalos de w-longitud s, de aquí que

$b=$. Ya que $u_n+s \to$ y $z^{-1}(u_n\ s)=Q_n \to Q$, con una elección apropiada de los signos, se tiene que $Q\ L^+$, pero ya que $Q\ c_1$ fue arbitrario podemos concluir que $c_1\ \ L^+$.

Así tenemos demostrado el siguiente:

Teorema 7.2.3 Sea w una diferencial cuadrática sobre una Superficie de Riemann arbitraria S. Sea c una w-trayectoria no cerrada. Si $P\ L^+$ es un punto regular de w, entonces la w-trayectoria c_1 que pasa a través de P está contenida en L^+.

Supongamos ahora que $P\ L^+$ es un punto crítico finito de w. Sea c_1 una trayectoria que converge a P.

Hemos visto (al inicio de la sección 6.2) que los rayos de las trayectorias que convergen a P dividen a una vecindad de P en un número finito de sectores con ángulos iguales (estos ángulos están determinados por el orden de w en P). Así en cada sector existe un rectángulo cerrado R que tiene a P como punto medio de uno de sus lados horizontales.

P polo de orden uno. P un cero de orden uno.

Sea $2s$ la longitud del lado horizontal de los rectángulos en los cuales P es punto medio. Si c_1 es uno de los rayos que convergen a P, entonces $L^+=\{P\}$. Si este caso no se da, al menos en uno de los sectores existen un número de puntos P_n e intervalos horizontales a través de ellos los cuales son intervalos de c_1.

Asi nuevamente b= y un s -> cuando n -> . Por lo tanto las sucesiones $P_n'=\Xi^{-1}(u_n+s)$ y $P_n''=\Xi^{-1}(u_n-s)$ tienden a P',P" R De aqui podemos concluir que si P es un cero de w, L^+ contiene al menos dos rayos (dentro de la vecindad de P) convergiendo a P, mientras que si P es un polo de primer orden L^+ contiene el rayo convergiendo a él.

Por último si P L^+ es un punto critico infinito, tenemos que (véase final de la sección 6.2) todo rayo c^+ que entra a una vecindad suficientemente pequeña de P tiende a P. Asi en este caso nuevamente $L^+=\{P\}$.

Definición 7.2.5 Un rayo de trayectoria c^+ es llamado <u>recurrente</u> si P_o, el punto inicial de c^+, pertenece a L^+. Si ambos rayos de la trayectoria c son recurrentes, c es llamada una <u>espiral</u>.

Observación. Si P_o, el punto inicial del rayo recurrente c^+, esta contenido en L^+, entonces c L^+. Ya que L^+ es cerrado c L^+, pero además L^+ c por lo tanto $c=L^+$. Inversamente. si $c=L^+$, entonces P_0 L^+.

Resumiendo los resultados anteriores obtenemos el siguiente:

Teorema 7.2.6 Sea c^+ un rayo de una w-trayectoria c sobre una Superficie de Riemann arbitraria S, entonces tenemos que:

a) Si $L^+=0$, entonces el rayo c^+ es un rayo frontera.

b) Si $L^+=\{P\}$, entonces P es un cero de w y c^+ es un rayo critico.

c) Si L^+ consiste de más de un punto, este conjunto es la unión de trayectorias. Si éstas son criticas L^+ además contienen a sus puntos criticos limite.

Teorema 7.2.7 Sea c una w-trayectoria con un rayo recurrente c^+, entonces c^- no puede tender a un punto critico infinito.

Demostración.

Supongamos que c^- tiende a un punto critico infinito, es decir, $L^-=\{P\}$, donde P es un polo de orden ≥ 2. Sea U una vecindad de P de tal forma que el punto P_0, punto inicial de c^-, esté fuera de U y que todo rayo que entre a U converja a P (véase la sección 6.2).

Ahora sea P_1 c^- U. Ya que c^+ es un rayo recurrente P_0 L^+ (esto por definición) aplicando ahora la observación que sigue a la definición 7.2.5 tenemos que c L^+ de aqui que P_1 L^+. Ya que U es una vecindad de P_1 y éste es un punto limite de c^+, existe P_2 c^+ con P_2 U, lo cual implica que c^+ entra a U y por lo tanto tiende a P lo cual contradice el hecho de que $L^- = \{P\}$.

Por lo tanto c^- no puede converger a un punto critico infinito.

Otra propiedad importante de los rayos recurrentes nos la da el siguiente:

Teorema 7.2.8 Sea c una w-trayectoria en S. Si c^+ c es un rayo recurrente con punto inicial P_0, entonces c^+ pasa a traves de todo intervalo vertical I, que contiene a P_0, en la dirección determinada por c^+ en P_0.

Demostración.

Sea I un intervalo vertical que contiene a P_0. Como c^+ pasa a través de toda vecindad que contiene a P_0, esta curva tiene una primera intersección con I en un punto P_1. Supongamos que en esta intersección la curva llega en dirección contraria a la deseada (véase la siguiente figura).

Sea R el rectángulo horizontal con el subintervalo $[P_0, P_1]$ de c^+ como lineá central. éste tiene como lados verticales sobre I a I_0 e I_1 los cuales contienen a P_0 y P_1 respectivamente. El rayo c^+ pasa después de P_1 a través de I_0 en un punto P_2, si el rayo pasara a través de este punto en dirección positiva terminariamos, si no, recorramos c^+, a partir de P_2, en sentido contrario a la orientación comenzando en P_2 y recorriendo c^+ dentro de R hasta llegar a I_1 en un punto P_3. Este punto es el deseado.

Definición 7.2.9 Sea w una diferencial cuadrática sobre una Superficie de Riemann arbitraria S y c una w-trayectoria. Si L^+, el conjunto limite del rayo c^+ de c, contiene más de un punto, c^+ es llamada <u>divergente</u>.

Observación 7.2.10 Sea c^+ un rayo de trayectoria de una w-trayectoria c. Puesto que $c^+=\tilde{z}^{-1}([0,b))$ tenemos que la w-longitud de c^+ está dada por:

$$|c|_w = \quad |w(z)|^{1/2}\,|dz| = \quad |du| = b.$$

Si c^+ tiene longitud finita, es decir, $b<$, c^+ es un rayo critico o un rayo frontera. Si por el contrario $b=$, es decir, c^+ tiene longitud infinita, c^+ es divergente o es un rayo frontera o un rayo el cual converge a un punto critico infinito.

7.3 Algunos resultados adicionales acerca de las trayectorias sobre Superficies de Riemann Compactas.

Uno de los resultados más importantes en esta sección es el que afirma que todo rayo de trayectoria c^+ divergente sobre una Superficie de Riemann compacta S es recurrente.

Este resultado lo obtendremos como una consecuencia inmediata al siguiente :

Teorema 7.3.1 Sea w una diferencial cuadrática meromorfa sobre una Superficie de Riemann Compacta $\tilde{S}$. Entonces todo rayo de trayectoria divergente c^+ tiene la siguiente propiedad: si I_o S es un intervalo vertical cerrado con el punto inicial P_o de c^+ como punto medio de éste, entonces para todo P c^+ existe un punto P_1 c^+ tal que $\mathcal{Z}(P_1)=u>\mathcal{Z}(P)$ y c^+ corta a I_o en P_1 en la misma dirección que tiene c^+ en P_o.

Demostración.

Dado P c^+, sea I_o el lado vertical de un rectángulo adyacente al intervalo cerrado $I=[P_o,P_1]$ sobre c^+. Supongamos además que ninguna trayectoria cerrada pasa a través de I_o y que I tiene únicamente a P_o en común con I_o.

Todo esto puede ser conseguido si acortamos I_o si es necesario.

Consideremos ahora todos los rayos de trayectoria t^+ los cuales tienen origen en I_o con dirección positiva y tienen además las siguientes propiedades:

a) t^+ es critica (es decir, tiende a un punto critico).

b) t^+ no cruza I_o en dirección positiva excepto en su punto inicial.

Sean $t_1{}^+$ y $t_2{}^+$ dos rayos de trayectoria con las caracteristicas anteriores con puntos iniciales P_1 y P_2 respectivamente sobre I_o.

Afirmamos que estos rayos de trayectoria tienden a puntos críticos diferentes, ya que en caso contrario t_2^+ sería un subrrayo de t_1^+, así t_1^+ cortaría a I_0 en P_2 en dirección positiva contradiciendo lo supuesto.

Pero ya que solamente hay un número finito de puntos críticos finitos (ya que S es compacta), entonces podemos concluir que sólo hay un número finito de rayos de trayectoria t^+ que cumplen con las dos condiciones anteriores. Así podemos elegir un subintervalo I'_0 de I_0 adyacente a P_0, y del cual ningún rayo t^+ emana.

Sean $Q=P$ c^+ un punto arbitrario, J el subintervalo de c^+ cuyos puntos finales son P_0 y Q y sea R el rectángulo con lados I_0' y J. Elejimos R tan largo como sea posible y además con la propiedad de que $\bar{z}^{-1}$ sea uno a uno sobre R.

Así la w-área de R está dada por $|R|_w=|I_0'|_w|J|_w$. Si ninguno de los rayos de las trayectorias que emanan de I_0' volviera a cruzar I_0' en dirección positiva, R podría ser continuado infinitamente. Pero ya que c^+ se encuentra fuera de las vecindades U_i de los puntos críticos infinitos tenemos que $|R|_w \leq \quad |w(z)|dxdy < \quad$, ésto último ya que S es compacta, así lo anterior no puede ocurrir. Por lo tanto existe al menos una trayectoria t^+ en R que cruza I_0' nuevamente en sentido positivo.

Si c^+ lo hace, digamos en un punto $P_1=P_0$, entonces tenemos demostrado el teorema ya que P_1 corta a I_0 después de P_0.

En caso contrario, podemos considerar el rectángulo R'acotado por un intervalo sobre c^+, un intervalo sobre c^-, un subintervalo de I_o' y su imagen simétrica sobre c en P_o. Procediendo ahora con R' como con R encontramos un punto de c^+ sobre I_o el cual llega en la forma deseada después de P_1, lo cual prueba el teorema.

Corolario 7.3.2 Si c^+ es un rayo de trayectoria divergente de una diferencial cuadrática meromorfa w sobre una Superficie de Riemann Compacta, entonces existe una sucesión de números reales u_n tales que los puntos $P_n = z^{-1}(u_n)$ tiende al punto inicial P_o de c^+. Por lo tanto todo tal rayo es recurrente.

7.4 Diferenciales cuadráticas con norma finita.

Definimos en la sección 5.7 el elemento de área asociado a una diferencial cuadrática w como $|w(z)|dxdy$. Y definimos el área total de la Superficie S como la L^1-norma de w, es decir,

$$||S||_w = ||w|| = \quad |w(z)|dxdy.$$

En esta sección estudiaremos diferenciales cuadráticas, sobre Superficies de Riemann arbitrarias, cuya norma es finita.

Mostraremos, y de hecho éste es el resultado más importante en esta sección, que excepto por un conjunto de w-medida cero, es decir, medida euclideana cero en términos de los parámetros locales, todas las w-trayectorias son cerradas o son cortes cruzados de longitud finita o son espirales.

Definición 7.4.1 Una trayectoria de una diferencial cuadrática holomorfa de norma finita, la cual no es cerrada ni un corte cruzado de longitud finita ni una espiral es llamada <u>una trayectoria excepcional</u>.

Veamos que cualquier trayectoria excepcional c de una diferencial cuadrática holomorfa de norma finita tiene alguna de las siguientes caracteristicas:

1. c es critica.
2. c tiene un rayo no recurrente de longitud infinita.
3. c tiene un rayo recurrente y el otro frontera.

Si c es una curva cerrada excepcional y no critica, al menos uno de sus rayos tiene longitud infinita, ya que en otro caso sería un corte cruzado de longitud finita. Supongamos que c^+ tiene longitud infinita. Si c^+ no fuera recurrente c estaría clasificada en 2.

Supongamos que c^+ es recurrente. Si c^- tiene longitud finita, c es de la clase 3 ya que c^- debe de ser un rayo frontera.

Si por último c^- tiene longitud infinita, como c es excepcional, c^- no puede ser recurrente, de aquí que c está enlistada en 3.

Ya que el conjunto de trayectorias criticas es finito, y por tanto tiene w-medida cero, únicamente nos ocuparemos de las trayectorias de la segunda y tercera clase.

Consideremos primero las w-trayectorias de segunda clase.

Sea w una diferencial cuadrática holomorfa de una Superficie de Riemann arbitraria S. Sea I un arco vertical cerrado orientado de w. Ya que el conjunto de puntos de S los cuales son cubiertos por trayectorias cerradas de w es abierto, el conjunto $E=E(I)$ de puntos P I los cuales yacen sobre una trayectoria no cerrada es cerrado.

Denotemos por $c(P)$ la trayectoria que pasa a través de P, su rayo positivo será denotado por $c^+(P)$.

Probaremos ahora el siguiente:

Teorema 7.4.2 Si A $E=E(I)$ es el conjunto de puntos P I tales que la trayectoria $c(P)$ tiene al menos un rayo recurrente de w-longitud infinita, entonces A tiene w-medida cero.

Demostración.

Denotemos por E_a^+ el conjunto consistiendo de todos los puntos P $E(I)$ tales que $c^+(P)$ tiene un intervalo cerrado $[P,P']$ de w-longitud $>a$ y el cual tiene únicamente a P como punto en común con I.

Ya que si $b>a$, E_b^+ E_a^+ el conjunto E^+ de los puntos P E con $|c^+(P)|=$ y $c^+(P)$ $I=\{P\}$ es la intersección $E^+=$ E_n^+.

Sea P E_a^+, entonces el intervalo $[P,P']$ es la linea media de un rectángulo R, de longitud a y en el cual $\check{z}^{-1}$ es uno a uno, y cuya intersección con I es un subintervalo cerrado I_o de I.

Obsérvese que los rayos $c^+(P)$ con P I_o E tiene también un intervalo de w-longitud a con $c^+(P)$ $I=\{P\}$, así $E_a{}^+$ es un subconjunto relativamente abierto de E para todo $a>0$. Por lo tanto E^+ es la intersección denumerable de subconjuntos medibles de I, de aquí que E^+ es medible.

Consideremos ahora $I'=\check{z}(I)$ y $E'=\check{z}(E^+)$ sobre éste.

El conjunto B', consistiendo de los semirrayos positivos con puntos iniciales en E' es medible. Más aún este conjunto es mapeado por la continuación de $\check{z}^{-1}$ a lo largo de esos semirrayos, inyectivamente.

Entonces $\|w\|\geq|B'|_w=|B'|$ donde $|B'|$ es el área euclideana de B'. Ya que cada horizontal en B' tiene longitud infinita y la norma de w es finita, concluimos que E' y por tanto E^+ son conjuntos de w-medida cero.

Sea ahora A^+ el subconjunto de E(I) para el cual $c^+(P)$ tiene longitud infinita y no es recurrente. Construimos una subdivisión de I en subintervalos cerrados de longitud más y más pequeña tendiendo a cero, sean éstos $I_1, I_2, \ldots$

Entonces todo P A^+ está contenido en algún I_j para algún j **N**. Por lo tanto A^+ es la unión de un número numerable de conjuntos de w-medida cero, y por lo tanto tiene w-medida cero.

Si denotamos por A^- el conjunto de los puntos P E con $|c^-(P)|=$ y $c^-(P)$ no recurrente procediendo como antes se muestra que A^- tiene también w-medida cero. Ya que $A=A^+ \quad A^-$, tenemos que A tiene w-medida cero.

Consideremos ahora las trayectorias con un rayo recurrente y otro frontera.

Teorema 7.4.3 Sea w una diferencial cuadrática de norma finita sobre una Superficie de Riemann arbitraria S y sea I S un arco vertical abierto orientado de w. Entonces el conjunto A de puntos P I tales que c(P) consiste de un rayo frontera y otro recurrente es un conjunto de w-medida cero.

Demostración.

Denotemos por E_o^+ el conjunto de puntos P $E=E(I)$ tales que $c^+(P)$ es recurrente y $c^-(P)$ es un rayo frontera y además tiene únicamente a P como punto en común con I.

Sea P_o E. Supongamos que $c^+(P_o)$ tiene w-longitud >n, n **N**. Entonces el intervalo $[P_o, P_1]$ de longitud n, de $c^+(p_o)$ es el diametro central de un rectángulo R en el cual $\tilde{z}^{-1}$ es uno a uno sobre S.

Sea I_o el lado vertical de R que contiene a P_o. Para cada P I_o I el rayo $c^+(P)$ pasa a través de R y así $|c^+(P)|>n$. Por lo tanto el conjunto de puntos P E tales que $|c^+(P)|>n$ es un conjunto relativamente abierto, de aqui que el conjunto de puntos P E tales que $|c^+(P)|=$ es la intersección numerable de conjuntos relativamente abiertos, por tanto es medible.

Pero todo rayo $c^+(P)$ que es recurrente tiene longitud infinita. Aplicando ahora el teorema 7.4.2 podemos concluir que el conjunto de puntos P E tales que $c^+(P)$ es no recurrente y de longitud infinita tiene w-medida cero, asi el conjunto de puntos P E con $c^+(P)$ recurrente es medible.

Aplicando un argumento similar tenemos que el conjunto de puntos P E para los cuales $|c^-(P)|\leq n$ es relativamente cerrado, asi el conjunto de puntos P E con $|c^-|$ finito es unión finita de subconjuntos cerrados de E, por tanto es medible.

Pero si $c^-(P)$ es un rayo frontera, éste tiene longitud finita o longitud infinita pero sin ser recurrente. Pero el conjunto de puntos con la última propiedad tiene w-medida cero, así podemos concluir que el conjunto de puntos P E tales que $c^-(P)$ es un rayo frontera es medible.

Supongamos ahora que $c^-(P_0)$ tiene al menos otro punto P_1 en común con I. Entonces ya que I es abierto, el intervalo $[P_0, P_1]$ sobre $c^-(P_0)$ es el diametro medio de un rectángulo horizontal cerrado R con ambos lados verticales sobre I.

Obsérvese que para un punto P suficientemente cercano a P_0, tiene también la propiedad anterior, es decir, $c^-(P)$ pasa a través de I después de P. Así este conjunto es abierto y así el conjunto de puntos P E con $c^-(P)$ I={P} es un subconjunto relativamente cerrado de E y por lo tanto medible.

Pero E_o^+ es la intersección de los tres conjuntos medibles anteriores así E_o^+ es medible.

Nuestro siguiente propósito es mostrar que E_o^+ tiene w-medida cero.

Para ésto definamos la siguiente sucesión de mapeos T_n, n **N**, del conjunto E_o^+ sobre los conjuntos E_n^+ E definidos como sigue: si P_o E_o^+, $T_n(P_o)=P_n$ donde P_n es la n-ésima intersección, después de P_o, de $c^+(P_o)$ con I. Ya que $c^+(P_o)$ es recurrente siempre existe el punto P_n para todo P_o E_o^+.

Definamos $E_n^+=T_n(E_o^+)$.

Supongamos que existen P_o y P_o' en E_o^+ tales que

$$T_n(P_o)=T_n(P_o'),$$

así, los rayos $c^+(P_o)$ y $c^+(P_o')$ deben cortar a I en P_n en la misma dirección porque en caso contrario $c(P_n)$ sería un corte cruzado lo cual no es posible. Por lo tanto, uno de los rayos $c^+(P_o)$ y $c^+(P_o')$ debe de ser subrrayo uno del otro. Pero ya que P_n es la n-ésima intersección $P_o=P_o'$. Así T_n es inyectiva y por lo tanto una biyección sobre $E_n^+=T_n(E_o^+)$.

Ahora, si P E_n^+ E_m^+ con $n=m$, entonces existirían puntos P_o y P_o' tales que $P=P_n=P_m$ es la n-ésima intersección de $c^+(P_o)$ y la m-ésima intersección de $c^+(P_o')$respectivamente con I.

Nuevamente los dos rayos deben de cortar a I en la misma dirección y uno de éstos tiene que ser subrrayo del otro. Supongamos que $c^+(P_o)$ es un subrrayo de $c^+(P_o')$, si $P_o=P_o'$, el rayo $c^-(P_o)$ cortaria a I en P'_o lo cual no puede ser ya que $c^-(P_o)$ tiene únicamente a P_o como punto en común con I. Por lo tanto $P_o=P_o'$. Asi P_o es la n-ésima intersección con I de $c^+(P_o)$ y también es la m-ésima intersección de $c^+(P_o')$ pero ésto sólamente se da si $n=m$ contradiciendo lo supuesto.

Por lo tanto si $n=m$, entonces E_n^+ $E_m^+=0$.

Mostraremos ahora que E_n^+ es medible.

Sea $[P_o, P_n]$ el intervalo sobre el rayo $c^+(P_o)$ con P_n E_n^+ y n arbitrario.

Consideremos todos los puntos P_o E_o^+ tales que el intervalo

para todo P_o considerado, existe un rectángulo abierto de w-longitud $|[P_o, P_n]|_w$ el cual contiene el intervalo abierto (P_o, P_n) como un diámetro que intersecta a I $n-1$ veces y Ξ^{-1} es uno a uno sobre éste.

El conjunto de intervalos verticales de esos rectangulos horizontales R cubren E_0^+ salvo los dos puntos eliminados. Además para todo I'el subconjunto $I'\ E_0^+$ es mapeado por T_n a $I''\ E_n^+$ (véase figura anterior) preservando medida (donde I" es el otro lado vertical de R).

Sea J una de las componentes de la cubierta abierta I'de E_0^+. Existe un numero a lo más numerable de intervalos I_j' los cuales cubren a J (ésto ya que todo intervalo cerrado de J es cubierto por un número finito y J puede ser cubierto por un número numerable de intervalos cerrados). Podemos así, dividir $J\ E_0^+$ en un número numerable de subconjuntos ajenos dos a dos. Por lo tanto T_n es un map de $J\ E_0^+$ a $T_n(J\ E_0^+)$ que preserva medida. Así E_n^+ es una unión numerable de imágenes bajo T_n de conjuntos medibles, por lo tanto éste es medible y $|E_0^+|_w=|E_n^+|_w$. Como n fue elegido arbitrariamente $|E_0^+|_w=|E_1^+|_w=\ldots$, y todos esos conjuntos son ajenos. Pero ya que I tiene w-longitud finita estos conjuntos tienen que tener w-medida cero, similarmente se prueba lo mismo para E_0^-.

Por tanto $(E_i^+\ \ E_i^-)$ también tiene w-medida cero.

Ahora si P I es un punto tal que la trayectoria c(P) tiene un rayo frontera y una recurrente, entonces el rayo frontera tiene una última intersección P_o con I, el cual es un punto de E_o^+ o de E_o^-. Por lo tanto P está en algún conjunto E_i^+ o E_i^-, $i=1,2,\ldots$; Asi nuestro conjunto A= $(E_i^+ \quad E_i^-)$, y por lo tanto es un conjunto de w-medida cero.

Aplicando los teoremas 7.4.2 y 7.4.3 y el hecho de que el conjunto que cubren las trayectorias criticas tiene w-medida cero, tenemos demostrado el siguiente:

Teorema 7.4.4 Las trayectorias excepcionales de una diferencial cuadrática holomorfa w de norma finita sobre una Superficie de Riemann arbitraria S cubre un conjunto de w-medida cero, es decir, de w-área cero o equivalentemente de medida euclideana cero en los parámetros locales.

8. Métrica asociada a una diferencial cuadrática.

Definimos anteriormente (sección 5.8) que una w-geodésica entre dos puntos era una curva que localmente era la más corta con respecto a la métrica inducida por la diferencial cuadrática w.

En la sección 6.3 se demostró, localmente, la existencia y unicidad de geodésicas, además que éstas son, de hecho, composiciones de arcos rectos de diferentes inclinaciones con vértices en los puntos criticos de la diferencial cuadrática w.

Nuestro principal propósito en este capítulo es demostrar la existencia y unicidad de geodésicas en una clase de homotopía de curvas que unen dos puntos arbitrarios de una Superficie de Riemann Compacta de género mayor que uno.

8.1 Unicidad de Geodésicas.

Una de las herramientas más importantes para nuestros propósitos inmediatos (demostrar la unicidad de geodésicas) es el lema de Teichmüller. Para demostrarlo necesitaremos el principio del argumento en su forma general. Este dice lo siguiente:

Principio del Argumento (forma general) 8.1.1 Sea D un dominio del plano relativamente compacto, acotado por un número finito de curvas $\{c_j\}$ suaves a trozos y sea w una función meromorfa sobre la cerradura de D. Denotemos por P_i los ceros (o polos) de w en D con órdenes n_i (o $-n_i$) y por Q_j los ceros (o polos) de w en D= c_j (la frontera de D) con órdenes n_j (o $-n_j$). Sea O_j el ángulo interior de D entre dos curvas adyacentes con vértice en Q_j ($0 \leq O_j \leq 2$). Entonces

$$1/2 \quad d(\arg w(z)) := 1/2 \quad d(\arg w(z)) = \quad n_i + \quad (O_j n_j)/2 \quad .$$

Definición 8.1.2 Sea w=0 una diferencial cuadrática meromorfa. Decimos que C es un <u>w-polígono</u> si C es una curva compuesta de arcos rectos abiertos con respecto a w (véase la definición 5.8.3) y de sus puntos finales, los cuales son puntos críticos de w. El w-polígono C es llamado <u>simple</u> si éste forma un arco de Jordan y es llamado <u>simple cerrado</u> si éste es una curva de Jordan.

Teorema (lema de Teichmüller) 8.1.3 Sea D el interior de un w-polígono cerrado simple C con lados c_j y ángulos interiores O_j ($0 \leq O_j \leq 2$) en sus vértices P_j. Supongamos que w es meromorfa sobre la cerradura de D. Denotemos por n_j el orden de w en P_j. Entonces

$$[1-O_j(n_j+2)/2] = 2+ \quad n_i$$

donde n_i es el orden del cero o polo de w en P_i D.

Demostración.

Ya que los lados del w-polígono C son arcos rectos abiertos (con respecto a w), sobre éstos tenemos que

$$0=d(\arg w(z)dz^2)=d(\arg w(z)) + 2d(\arg dz).$$

Por tanto

$$d(\arg w(z)) = -2 \quad d(\arg dz).$$

Para evaluar la integral del lado derecho de la igualdad, calcularemos el cambio total que sufre la cantidad arg dz a lo largo de C.

Sean $P_1, \dots, P_n$ los puntos críticos de w en C (los cuales son los vértices de éste w-polígono). Sea c_j el lado de C cuyos puntos finales son P_j y P_{j+1} con $j=1,\dots,n$ y $P_{n+1}=P_1$.

Ya que los c_j son arcos w-rectos, arg dz no varía sobre éstos. Sin embargo arg dz cambia cuando pasamos de un lado c_j al siguiente a través de P_j. El cambio que sufre arg dz, al pasar a través de P_j, es por un sumando de -0_j. Esta cantidad no es considerada en la d(arg dz) ya que ésta está definida como la suma de las integrales sobre los c_j.

Por lo tanto el cambio total del arg dz sobre C es

$$2 \quad - \quad (\quad -0_j).$$

Así,

$$1/2 \quad d(\arg dz)= -2/2 \quad [2 \quad - \quad (\quad -0_j)]$$
$$= -2 + \quad (1-0_j / \quad).$$

Aplicando ahora el principio del argumento en su forma general 8.1.1 a la primera obtenemos

$$1/2 \quad d(\arg w(z)) = \quad (0_j n_j)/2 \quad + \quad n_i .$$

Igualando las dos integrales tenemos

$$(0_j n_j)/2 \quad + \quad n_i = -2 + \quad (1+0_j / \ ).$$

De aqui obtenemos

$$2 + \quad n_i = \quad (1-0_j / \ ) - \quad (0_j n_j)/2$$

$$= \quad [1-0_j (n_j+2)/2 \ ].$$

Por lo tanto

$$[1-0_j (n_j+2)/2 \ ] = 2 + \quad n_i .$$

Observación 8.1.4 Si w es una diferencial cuadrática holomorfa en D, entonces para todo i $n_i \geq 0$. Así

$$[1-0_j (n_j+2)/2 \ ] \geq 2.$$

El lema de Teichmüller tiene una versión para dominios doblemente conexos y es la siguiente:

Teorema 8.1.5 Supongamos que D es un dominio doblemente conexo del z-plano acotado por dos w-polígonos C' y C" (donde C" acota la componente acotada del complemento de D), positivamente orientadas con respecto a D, entonces

$$[1-0_j (n_j+2/2 \ )] = \quad n_i ,$$

donde n_i es el orden del cero o polo P_i D de w.

Demostración.

Aplicando un argumento similar al de la demostración del teorema anterior vemos que el cambio de arg dz sobre C' es

$2 - (- \theta_j')$ y sobre C" es $-2 - (-\theta_j'')$, asi el cambio total de arg dz sobre C es $- (-\theta_j)$.

$$n_i + (\theta_j n_j/2 = -1/ \quad d(\arg dz)$$

$$= -1/ [- \quad (\quad -\theta_j)$$

$$= 1/ \quad (\quad -\theta_j)$$

$$= \quad (1-\theta_j/ \ ).$$

Por tanto

$$[1-\theta_j(n_j+2)/2 \ ] = \quad n_i .$$

Probaremos a continuación la unicidad de arcos geodésicos en dominios simplemente conexos.

Teorema 8.1.6 Sea w una diferencial cuadratica holomorfa en un dominio simplemente conexo D. Entonces cualesquiera dos puntos en D pueden ser unidos por a lo más un arco geodésico.

Demostración.

Sean z_1 y z_2 dos puntos arbitrarios en D. Supongamos que existen dos arcos geodésicos c_1 y c_2 uniendo a éstos. Ya que estos puntos son distintos podemos encontrar dos puntos z_1' y z_2' tales que los subarcos c_1' y c_2' de c_1 y c_2 respectivamente forman un w-polígono simple cerrado.

Sea a_i, $i=1,2$ el ángulo en z_i' formado por las curvas c_1' y c_2'. Los ángulos a_1 y a_2 satisfacen $0 < a_1 , a_2 < 2$. Ya que en cada vértice del w-polígono se tiene un ángulo $\geq 2 /(n_j+2)$ (véase observación 6.3.3) se tiene que $\theta_j(n_j+2)/2 \geq 1$.

Asi $1-\theta_j(n_j+2)/2 \leq 0$. Pero por la observación 8.1.4 tenemos

$$[1-\theta_j(n_j+2)/2\ )]\geq 2,$$

lo cual es imposible en este caso ya que los únicos ángulos que pueden contribuir a esa suma con un término positivo, que además es menor que uno, son a_1 y a_2.

Por lo tanto no pueden existir dos arcos geodésicos uniendo dos puntos de D.

Unos resultados muy importantes que se desprenden del teorema anterior son los siguientes:

Corolario 8.1.7 Sea w una diferencial cuadrática holomorfa sobre un dominio simplemente conexo D, entonces no pueden existir w-geodésicas cerradas en D.

Demostración.

Supongamos que existe, $c[0,1\} \to D$, una w-geodésica cerrada en D.

Sean $P_0=c(0)=c(1)$ y $P_1=c(1/2)$, así los subarcos de c que unen P_0, P_1 y P_1, P_0 son también w-geodésicas distintas uniendo P_0 y P_1 lo cual contradice el teorema anterior.

Corolario 8.1.8 Sea w una diferencial cuadrática holomorfa sobre una Superficie de Riemann arbitraria S. Entonces en toda clase de homotopía de curvas uniendo dos puntos arbitrarios P_1 y P_2 de S existe a lo más una geodésica.

Demostración.

Sean P_1, P_2 S dos puntos arbitrarios. Sea c una curva que los une y [c] su clase de homotopía en S.

Supongamos que existen c_0 y c_1 [c] w-geodésicas uniendo esos puntos.

Sea $\tilde{c}_0$ el levantamiento de c_0 al revestimiento universal $(\tilde{S},p)$ de S, teniendo como puntos extremos $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ arriba de P_1 y P_2 respectivamente. Sea $\tilde{c}_1$ el levantamiento de c_1, con punto inicial $\tilde{P}_1$, a $(\tilde{S},p)$. Ya que $c_0 \simeq c_1$, aplicando el teorema de monodromía [2] obtenemos que $\tilde{c}_1$ tiene al punto $\tilde{P}_2$ como su otro extremo. Aplicando ahora el teorema 8.1.6 tenemos que $\tilde{c}_0=\tilde{c}_1$. Así $c_0=p\ \tilde{c}_0=p\ \tilde{c}_1=c_1$.

Por lo tanto existe una única geodésica, que une los puntos P_1 y P_2, en la clase de homotopía de c.

8.2 Propiedad de la mínima longitud de arcos geodésicos sobre Superficies de Riemann.

Una de las cosas que nos interesan probar es que una geodésica es la curva que globalmente tiene longitud mínima. Esta propiedad la obtendremos como resultado inmediato al siguiente

Teorema 8.2.1 Sea w una diferencial cuadrática holomorfa, no cero, en un dominio simplemente conexo D y sea c un arco geodésico uniendo dos puntos arbitrarios z_0 y z_0' en D. Sea c' es cualquier otra curva uniendo esos dos puntos, entonces $|c|_w \leq |c'|_w$. La igualdad se cumple si y solamente si las curvas coinciden.

Demostración.

Eligiendo un número finito de puntos sobre c' y reemplazando los arcos entre los puntos de una misma vecindad por arcos cortos podemos asumir, sin pérdida de generelidad que c' es un poligono geodésico.

Supongamos primero que c es un arco horizontal.

Sea D_o un subdominio, acotado por un poligono geodésico C_o, que contiene a c y c'.

Seleccionemos todos los puntos sobre c que pertenescan a un arco vertical critico. Como solamente hay un número finito de ceros de w en D_o y como cualquier arco vertical tiene a lo más una intersección con c, entonces solamente puede haber un número finito de estos puntos. Sean $z_1, \ldots, z_n$ éstos.

Sea z un punto en el subarco abierto (z_{i-1}, z_i) c.

El arco vertical c_z que contiene a z es un corte cruzado, asi éste divide a D_o en dos dominios simplemente conexos conteniendo cada uno de éstos a z_o y a z_o' respectivamente. Por lo tanto c' corta a c_z.

Pero el conjunto que cubren los arcos verticales a través de los puntos z (z_{i-1}, z_i) es un conjunto simplemente conexo, que es mapeado bajo Z^{-1} sobre una banda paralela B_i con ancho a_i.

Pero c' B_i consiste de un número finito de arcos de c'cuya suma de w-longitudes es al menos a_i, con igualdad si y sólo si c' B_i es un arco paralelo a c.

Pero como los B_i no se traslapan, concluimos que

$$|c'|_w \geq \quad a_i = |c|_w$$

Si $|c'|_w = |c|_w$, entonces c' debe atravesar una sola vez a cada B_i y en una forma horizontal.

Consideremos el subarco de c' entre los puntos z_0 y z_1 ya que este subarco es horizontal a c y éstos tienen a z_0 como punto en común, en este subarco, c' y c coinciden. Por el mismo argumento vemos que c' y c coinciden en el subarco de c' entre los puntos z_1 y z_2. Continuando con este proceso obtenemos que $c=c'$.

Tomemos ahora el caso original, es decir, sea c un arco geodésico arbitrario.

Ya que éste está compuesto por arcos rectos c_i, construyamos, en cada uno de éstos, las bandas B_{ij} descritas anteriormente.

Para poder aplicar a cada una de éstas el argumento anterior tenemos que demostrar que para toda i, todo arco ortogonal t_i de c_i no intersecta nuevamente a c. Pero esto es cierto, ya que en caso contrario se contradice la unicidad de arcos geodésicos. .

Además tenemos que demostrar que si $i=j$, ningún arco vertical t_i de c_i puede intersectar a un arco vertical t_j de c_j.

Supongamos que ésto no es cierto, es decir, que existen dos arcos verticales t_i y t_j de c_i y c_j respectivamente, con $i=j$, que se intersectan.

Sean $z_i = t_i \quad c_i$ y $z_j = t_j \quad c_j$ y sea $t_0 = t_i \quad t_j$.

Así, el subarco de c entre z_i y z_j junto con los subarcos de t_i y t_j entre los puntos z_i, t_0 y t_0, z_j respectivamente forman un w-polígono, en el cual no se cumple el lema de Teichmüller ya que el único vértice del polígono que puede contribuir, a la suma del lema, con un número positivo es t_0, pero este número siempre es menor que uno, así el lema de Teichmüller no se cumple. Por lo tanto ningún arco vertical t_i de c_i puede intersectar a uno de c_j si $i=j$.

Así c' atraviesa toda banda B_{ij}, aplicando a cada una de éstas el argumento anterior obtenemos el resultado deseado.

Esta misma propiedad la tienen los arcos geodésicos que unen dos puntos arbitrarios de una Superficie de Riemann si comparamos los arcos únicamente en su clase de homotopía, lo mismo es cierto si consideremos w una diferencial cuadrática meromorfa, c un arco que no pase através de los polos de w y además considerando la clase de homotopía sobre la Superficie perforada

$$S'=S\setminus\{\text{polos de } w\}.$$

Como un corolario inmediato al teorema anterior tenemos el siguiente

Corolario 8.2.2 Sea w una diferencial cuadrática sobre una Superficie de Riemann arbitraria S y sea c un arco geodésico uniendo dos puntos arbitrario P_0 y P_1 de S, el cual no pasa a través de los polos de w. Entonces para cualquier arco c' uniendo P_0 y P_1 el cual es homotópico a c en S' se tiene que $|c'|_w \geq |c|_w$, con igualdad si y solamente si $c'=c$.

Demostración.

Sea c' un arco homotópico a c en S' uniendo P_0 y P_1.

Sea $\tilde{c}$ el levantamiento de c, con puntos extremos P_0 y P_1, al revestimiento universal $\tilde{S}$ de S y sea $\tilde{c}'$ el levantamiento de c', con punto inicial P_0, a $\tilde{S}$. Ya que $c \simeq c'$ en S', aplicando el teorema de monodramia [2] obtenemos que $\tilde{c}'$ tiene a P_1 como el otro de sus extremos. Aplicando el teorema 8.2.1 obtenemos que $|\tilde{c}'|_{\tilde{w}} \geq |\tilde{c}|_{\tilde{w}}$ donde $\tilde{w}$ es el levantamiento de w a $\tilde{S}$, pero ya que la longitud de una curva con respecto a la métrica inducida por una diferencial cuadrática es igual a la longitud del levantamiento de la curva con respecto a la métrica inducida por el levantamiento de ésta, tenemos que $|c'|_w \geq |c|_w$.

8.3 Propiedad de la longitud mínima de geodésicas cerradas sobre Superficies de Riemann.

En esta sección mostraremos algo similar a la anterior pero ahora considerando geodésicas cerradas, es decir, demostraremos que una geodésica cerrada, sobre una Superficie de Riemann, es la curva más corta en su clase de homotopía libre.

Este resultado lo obtendremos como un corolario inmediato al siguiente

Teorema 8.3.1 Sea $w \neq 0$ una diferencial cuadrática holomorfa sobre el anillo $A: 0 \leq r_0 < |z| < r_1 \leq$, y sea c una w-geodésica cerrada en A. Sea c' cualquier curva cerrada en A libremente homotópica a c, entonces $|c'|_w \geq |c|_w$.

Demostración.

Ya que c es una w-geodésica, aplicando el teorema 8.1.6, tenemos que c es una curva simple, de aqui, una curva de Jordan separando las dos componentes del anillo A.

Sean P y P' puntos arbitrarios en c y c' respectivamente. Unamos estos dos puntos por medio de un arco f contenido en A. Sea $d=|f|_w<$.

Levantando la diferencial cuadrática w y las curvas a la banda paralela, contenida en C, por medio del map log z, obtenemos dos arcos $\tilde{c}$ y $\tilde{c}'$ conectando consecutivos levantamientos P_i y P_i', i=1,2., de P y P' respectivamente.

Sea f el levantamiento de f, a la banda, conectando P_1 y P_1'.

Considerando n levantamientos consecutivos obtenemos arcos geodésicos $n\tilde{c}$ y $n\tilde{c}'$, con respecto a la métrica inducida por el levantamiento de w a la banda mediante el logz.

Aplicando ahora el teorema 8.2.1 obtenemos

$$n|\tilde{c}|_w \leq n|\tilde{c}'|_w + 2d$$

Por lo tanto

$$|\tilde{c}|_w \leq |\tilde{c}'|_w + 2d/n$$

así, si hacemos tender a n a obtenemos

$$|\tilde{c}_w \leq |\tilde{c}'|_w.$$

Pero ya que las longitudes de un arco y de su levantamiento, con respecto a las métricas correspondientes, son la misma, obtenemos

$$|c|_w \leq |c'|_w .$$

Esto concluye la demostración.

8.4 Existencia de Geodésicas.

Teorema 8.4.1 Sea D una región acotada por un w-polígono simple P, donde w=0 es una diferencial cuadrática holomorfa en D. Entonces, cualesquiera dos puntos z_1, z_2 D pueden ser unidos por una curva más corta c D.

Demostración.

Sean z_1, z_2 D dos puntos arbitrarios. Sea ĉ D una curva simple que los une y sea $|c|_w$ su w-longitud.

Denotemos por $L=\inf|c|_w$, donde el ínfimo es tomado sobre todas las curvas simples c D que unen z_1 con z_2. Así existe una sucesión de curvas simples c_n D, uniendo z_1 con z_2 tales que $|c_n| \to L$ cuando $n \to$. Parametricemos cada c_n por medio de la longitud de arco.

Sea N un número positivo tal que para toda n N y para cualesquiera dos puntos x_0, x_1 $[0,|c_n|_w]$ tales que $|x_0 - x_1|<N$, los puntos x_0 y x_1 pueden ser unidos por un único arco más corto en D. Dividamos, para cada n, $[0,|c_n|_w]$ en N partes iguales, sean $\{P^n{}_1, \ldots, P^n{}_{N+1}\}$ los puntos que dividen esos subintervalos.

Pasando ahora a una subsucesión de (c_n), si es necesario (la cual llamaremos nuevamente c_n), tenemos que $c_n(P^n{}_i) \to P_i$ cuando

$n \to$, $i=1,2,\ldots,N+1$.

Por lo tanto, por la construcción de los P_{ni}, tenemos que P_i y P_{i+1} pueden ser unidos por un único arco más pequeño en D. Sea c la unión de todos esos arcos. Por lo tanto c es una curva más corta entre z_1 y z_2. Esto termina la demostración.

Observación 8.4.2 La curva c es un arco geodésico con respecto a w excepto quizá en algunos puntos de la frontera de D si permitimos que w tenga polos simples sobre ésta (véase Teorema 6.3.2).

Mostraremos ahora la existencia de arcos geodésicos entre dos puntos cualesquiera, para ésto necesitamos la siguiente :

Definición 8.4.3 Sea $w=0$ una diferencial cuadrática sobre un dominio simplemente conexo D y sean z_1, z_2 D arbitrarios, la <u>w-distancia</u> entre z_1 y z_2, la cual denotaremos por $d_w(z_1,z_2)$, es el infimo de las w-longitudes de todos los arcos que une z_1 con z_2 en D.

Teorema 8.4.4 Sea $w=0$ una diferencial cuadrática sobre un dominio simplemente conexo D y sea z_1, z_2 D arbitrarios. Si la w-distancia de z_1 a la frontera de D es mayor que $d_w(z_1,z_2)$, entonces existe un arco más corto (y de aqui una geodésica) uniendo z_1 con z_2 en D.

Demostración.

Ya que z_1, z_2 D (y éste es abierto), elijamos un subdominio D_0 D el cual es acotado por un w-polígono P= D y tal que

$$d_w(z_1, P) > d_w(z_1, z_2).$$

Aplicando ahora el Teorema 8.4.1 a D_0 obtenemos que existe una curva más corta, contenida en D_0 y por tanto en D, entre los puntos z_1 y z_2.

Observación 8.4.5 Este último resultado es cierto para todo punto z_1, z_2 D si la frontera de D está a w-distancia infinita, es decir, para todo z D la w-distancia de éste a la frontera de D es infinita.

Definición 8.4.6 Sea S una Superficie de Riemann y sea S C su revestimiento universal. Sea G=Aut S, el grupo de automorfismos de S (véase definición 3.1.1). Decimos que una región R D es una región fundamental para el grupo G si se cumplen las siguientes condiciones:

a) ninguna pareja de puntos z_1 y z_2 de R son congruentes bajo G, es decir, no existe g G tal que $z_2 = g(z_1)$.

b) toda vecindad de un punto frontera de R contiene puntos congruentes a puntos en la región.

Sea S una Superficie de Riemann Compacta y sea w≠0 una diferencial cuadrática holomorfa sobre S. Sean P_1 y P_2 dos puntos arbitrarios de S y c_0 una curva que los une.

Nuestro siguiente propósito es mostrar que en la clase de homotopía de co existe una curva más corta c, que une estos dos puntos, con respecto a la w-métrica.

Este resultado lo obtendremos como una consecuencia inmediata del siguiente:

Teorema 8.4.7 Sea w=0 una diferencial cuadrática holomorfa sobre una Superficie de Riemann S y sea S su revestimiento universal. Seal ŵ el levantamiento de w a S. Entonces todo par de puntos z_1, z_2 S pueden ser unidos por una curva más pequeña, con respecto a la ŵ-métrica, en S.

Demostración.

Aplicando la observación 8.4.5 bastará probar que la frontera del revestimiento universal S esta a distancia infinita de cualquiera de los puntos de S.

Supongamos primero que S es un toro. Sabemos, por el Teorema de Uniformización, que el revestimiento universal S de S es conformemente equivalente S=C. Pero ya que ŵ, el levantamiento de w a S, es constante en la coordenada {id} (véase ejemplo 5.4.1), obtenemos que la distancia de cualquier punto z C a la frontera de C es infinita.

Supongamos ahora que S no es el toro. Ya que el revestimiento universal S de S es conformemente equivalente al disco |z|<1, tomemos S como éste. Demostraremos que en la ŵ-métrica el punto 0 está a distancia infinita de la frontera de S (es decir, de {z C: |z|=1}).

Sean r_0, r_1 $(0,1)$ tales que $r_0 < r_1$ y el disco $|z| < r_0$ cubra la región fundamental R del grupo G=Aut S.

Sea d>0 la w-distancia entre los circulos $|z| = r_0$ y $|z| = r_1$. Por la definición de R sabemos que cada punto z_i sobre el circulo $|z| = r_1$ existen g_i G y z_i' dentro del circulo $|z| < r_0$ tales que $g_i(z_i') = z_i$. Asi $\{g_i(\{z\ C: |z| < r_0\})\}$ forma una cubierta abierta del circulo $|z| = r_1$. Pero ya que éste es compacto existe una subcubierta finita $\{g_j(\{z\ C: |z| < r_0\})\}_{j=1,\dots,n}$ que cubre a $|z| = r_1$. Consideremos ahora las imágenes del disco $|z| = r_1$ bajo g_j, $j=1,\dots,n$. Sea r_2 $(0,1)$ tal que el disco $|z| < r_2$ contenga a todas esas imagenes. Pero ya que los g_i son isometrias tenemos que la w-distancia entre los conjuntos cerrados $g_i(\{z\ C: |z| = r_0\})$ y $g_i(\{z\ C: |z| = r_1\})$ es d. Además puesto que R $g_i(R) = 0$ para todo g_i G\{id} [12], podemos concluir que la w-distancia del 0 al circulo $|z| = r_2$ es por lo menos 2d. Este argumento se puede continuar tantas veces como uno lo desee, por tanto la w-distancia del 0 a la frontera del disco de Poincaré es infinita como se tenia que probar.

Asi como una consecuencia inmediata a este último resultado obtenemos el siguiente:

Teorema 8.4.8 Sea w=0 una diferencial cuadrática holomorfa sobre una Superficie de Riemann Compacta S. Sean P_1, P_2 S dos puntos arbitrarios y c S una curva que los une. Entonces existe una curva más corta c_0 S, con respecto a la w-métrica, en la clase de homotopia de c.

Demostración.

Sean P_1, P_2 S dos puntos arbitrarios y c una curva que los une. Sea $\tilde{c}$ el levantamiento de c al revestimiento universal S de S, con puntos extremos z_1 y z_2 arriba de P_1 y P_2 respectivamente. Por el teorema 8.4.7 podemos concluir que existe un arco más corto $\tilde{c}_0$, el cual es homotópico a $\tilde{c}$, uniendo los puntos z_1 y z_2.

Pero ya que las curvas más cortas con respecto a la w-métrica son precisemente las proyecciones de las curvas más cortas con respecto a la $\tilde{w}$-métrica, tenemos que c_0, la proyección de $\tilde{c}_0$ a S, es una curva más corta, con respecto a la w-métrica, uniendo P_1 y P_2, donde además, ésta es homotópica a c.

8.5 Teoria de Grötzsch y Teichmüller.

En esta sección expondremos en una forma muy general el Teorema de Grötzsch para el caso de Superficies de Riemann Compactas de género mayor que uno, el cual llamamos Teorema de Teichmüller. Este resultado es una de las aplicaciones de las diferenciales cuadráticas estudiadas, brevemente, en los capitulos anteriores.

Para una más fácil exposición del Teorema de Grötzsch daremos antes una definición, la cual nos permitirá dar un enunciado más simple de este Teorema.

Sea $w=f(z)$ (abreviamos $z=x+iy$, $w=u+iv$) un homeomorfismo de clase C^1, que presenva orientación, de una región del plano complejo a otra.

En un punto z el isomorfismo f induce un map lineal de las diferenciales $dz=(dx,dy) \mapsto (du,dv)=dw$ donde

$$du=u_x\,dx+u_y\,dy$$

$$dv=v_x\,dx+v_y\,dy$$

que en notación compleja es:

$$dw=f_z\,dz+f_z\,dz$$

donde

$$f_z=1/2(u_x+v_y)+i/2(v_x-u_y)$$

$$f_z=1/2(u_x-v_y)+i/2(v_x+u_y).$$

Ya que estamos considerando homeomorfismos que preservan orientación el Jacobiano J tiene que ser mayor que cero, así en nuestra notación tenemos que:

$$J=|f_z|^2-|f_z|^2>0$$

de aquí obtenemos que $|f_z| < |f_z|$.

Pero ya que $dw=f_z\,dz+f_z\,dz$ obtenemos

$$(|f_z|-|f_z|)|dz|\leq|dw|\leq(|f_z|+|f_z|)|dz|.$$

Por lo tanto

$$(|f_z|+|f_z|)/(|f_z|-|f_z|)\geq 1.$$

Escribamos

$$D_f(z)=(|f_z|+|f_z|)/(|f_z|-|f_z|).$$

A $D_f(z)$ se le llamará la dilatación de f en el punto z y a

$D_f = \sup D_f(z)$, donde el sup es tomado sobre todo los z en la región, se le llamará <u>la dilatación de f</u>.

Obsérvese que un map f es conforme en z si y sólo si $D_f(z)=1$, ya que esto se da si y sólo si $f_{\bar{z}}=0$.

Consideremos ahora la clase de todos los homeomorfismos $f:R \to R'$, de clase C^1 y preservando orientación, entre dos rectángulos R y R' del plano complejo.

El problema de Grötzsch podemos plantearlo ahora como sigue: ¿ Cuál es el homeomorfismo de esa clase con dilatación mínima ?.

Grötzsch encontró y demostró que un homeomorfismo de esa clase con esa propiedad, es decir, con dilatación mínima, era un map afín bien específico. Veamos ésto más detalladamente.

Supongamos sin pérdida de generalidad que los vértices ordenados de R son {0,a a+ib,ib} y los de R' son {0,a',a'+ib',ib'} (ya que de otro modo por medio de una rotación y una traslación, ambas conformes, podemos llevar los rectángulos originales a unos como los supuestos).

Teorema (Grötzch) Sea $f:R \to R'$ un homeomorfismo mapeando V a V', de clase C^1 y presenvando orientación, entonces

$$D_f \geq (a'/a)/(b'/b)$$

con igualdad si y solamente si f es el map afín dado por

$$f(z)=(a'/a)x+i(b'/b)y,$$

el cual preserva horizontales y verticales.

Es decir, cualquier homeomorfismo con las características requeridas, distinto de éste último, tiene dilatación mayor.

Este mismo problema fue planteado para Superficies de Riemann Compactas de género mayor que uno. La solución a éste la proporciona el Teorema de Teichmüller que enunciaremos después de algunas definiciones que necesitaremos (para todos los detalles de la demostración véase [1] y [6]).

Sean S y S' dos Superficies de Riemann Compactas de género mayor que uno y sea $f:S \to S'$ un homeomorfismo que preserva orientación.

Decimos que f es un map de Teichmüller formal si existen diferenciales cuadráticas meromorfas w y w', no cero, sobre S y S' respectivamente, con a lo más polos simples satisfaciendo las siguientes condiciones: para cada P S

a) el orden de w en P es igual al orden de w' en f(P).

b) si P es un punto regular de w, entonces en términos de parámetros naturales (propiamente elegidos) = +i y = +i en P y f(P), asociados a w y a w' respectivamente, f puede ser escrito en términos de éstos como:

$$(\quad , \quad) \mapsto (K^{1/2} \quad , K^{-1/2} \quad)$$

donde K>1 es una constante que no depende de P.

A esa K la llamaremos la <u>dilatación de f</u>.

Decimos que un map de Teichmüller formal f:S -> S' es un <u>map de Teichmüller</u> si w es holomorfa, $||w||=1$ (véase sección 7.4) y w es real sobre el borde de S (véase sección 5.5), si éste existe.

Enunciemos ahora el Teorema de Teichmüller.

Teorema de Teichmüller. Sean S y S' dos Superficies de Riemann Compactas de género mayor que uno. Sea f:S -> S' un homeomorfismo que preserva orientación, entonces existe un único homeomorfismo en la clase de homotopia de f con dilatación más pequeña. Este es, o bien, un map de Tiechmüller o bien un map conforme.

Bibliografia.

[1] Abikoff, W., The real Analytic Theory of Teichmüller space. Lectures Notes in Mathematics, 820.

[2] Ahlfors, L.V., Complex Analysis.

[3] Ahlfors, L.V. and Sario, L., Riemann Surfaces.

[4] Ahlfors, L.V.,Quasiconformal mappings.

[5] Bers, L., Riemann Surfaces.

[6] Bers,L., Topics in Complex Analysis.

[7] Conway, J.B., Functions of one Complex Variable.

[8] De lyra, C.B., Grupo Fundamental e Revestimentos.

[9] Dugundji, J., Topology.

[10] Farkas, H.M., and Kra I. Riemann Surfaces.

[11] Fathi, A., Laudenbach, F. and Poénaru, V., Travaux de Thurston sur les surfaces.

[12] Ford, L.R., Automorphic Functions.

[13] Hubbard, J., and Masu, H., Quadratic differentials and foliations. Acta Math., 142 (1979), 221-274.

[14] Lima, E.L., Variedades Diferenciaveis.

[15] Marden, A. and Strebel, K., The heigts theorem for quadratic differentials on Riemann Surfaces. Acta Math. 153 (1984) 153-211.

[16] Massey, W.S., Introducción a la Topologia Algebraica.

[17] Porter, R.M., Superficies de Riemann.

[18] Sebastiani, M., El teorema de Jordan.

[19] Spanier, E.H., Algebraic Topology.

[20] Strebel, K., Quadratic Differentials.