

24. 47



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

PARTICULAS DE ESPIN $3/2$ EN ESPACIO CURVO

T E S I S

Que para obtener el título de

F I S I C O

P r e s e n t a n

EDWARD DAVID PORTER HOPE
FERNANDO ANTON MORALES



México, D F.

1987



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Indice.	i
Introducción.	ii
I. El Formalismo Matemático.	1
1. Grupos.	
2. Espinores en el Espacio de Minkowski.	
3. Espinores y Tétradas en un Espacio Curvo.	
4. Los Parámetros de la Curvatura.	
II. Las Ecuaciones de Onda Relativistas para Partículas de Espín 3/2.	16
III. Manipulación de las Ecuaciones para Partículas de Espín 3/2 en Cualquier Espacio Curvo.	25
1. Las Condiciones de Integrabilidad: Restricciones Algebraicas Impuestas por la Curvatura del Espacio sobre las Ecuaciones de Onda.	
2. Simetría de las Ecuaciones y Eliminación del Término que Corresponde a una Partícula de Espín 1/2.	
3. Invariancia de Norma de la Ecuación de Rarita-Schwinger sin Masa en un Espacio Curvo y Vacío.	
IV. La Métrica de Schwarzschild y los Hoyos Negros.	31
1. Construcción de la Métrica.	
2. Los Hoyos Negros:	
i) La Métrica de Schwarzschild en Relación con un Hoyo Negro.	
ii) Los Parámetros de un Hoyo Negro.	
V. Obtención de los Parámetros Espinoriales de Curvatura en un espacio-tiempo con Métrica de Schwarzschild.	42
VI. Soluciones Explícitas de las Ecuaciones para Partículas de Espín 3/2 sin Masa en un Espacio-Tiempo con Métrica de Schwarzschild.	45
1. La Ecuación $\nabla^{AB}\Psi_{ABC}=0$.	
2. La Ecuación de Rarita-Schwinger sin masa.	
VII. Soluciones Explícitas de las Ecuaciones para Partículas de Espín 3/2 con Masa en un Espacio-Tiempo con Métrica de Schwarzschild.	53
VIII. La Evolución Temporal de las Soluciones Asintóticas; Discusión Final.	60
Conclusiones.	64
Referencias Generales.	65
Partículas de Espín 3/2 en Espacio Curvo.	i

INTRODUCCION.

Esta tesis versa sobre las partículas de Espín $3/2$ en espacio curvo. Se generalizan las ecuaciones de onda de un espacio plano a uno curvo arbitrario y se encuentran sus condiciones de integrabilidad. Se generalizan sus restricciones al pasar de un espacio plano a uno curvo.

Se presta especial atención al caso particular de un hoyo negro descrito por la métrica de Schwarzschild. Este caso es de suma importancia, pues existe una conjetura, llamada "conjetura del no pelo o simplemente hipótesis de los pelos" según la cual estos objetos no pueden tener parámetros que no sean masa, carga y momento angular. Nuestro trabajo está encaminado a probar esta conjetura para un parámetro perturbativo de espín $3/2$. Dada la complejidad del problema, se estudiará sólo en primera aproximación.

Atacaremos el problema en dos partes: La primera abarca partículas sin masa y la segunda partículas masivas. Esto está justificado pues los resultados que se obtienen en ambos casos están desconectados entre sí. El caso sin masa es de mayor importancia pues está directamente relacionado con la Supergravedad, una teoría que ha estado muy en boga durante los últimos años. En esta teoría juega un papel fundamental el gravitino: partícula sin masa de espín $3/2$, que es el "compañero supersimétrico" del gravitón, partícula sin masa de espín 2 , responsable de la interacción gravitacional.

El trabajo se divide en 8 secciones. Primero se introduce el formalismo matemático a utilizar, i.e. el formalismo de Newmann-Penrose para espinores y tétradas. Después se hace un resumen histórico de las ecuaciones de onda para partículas de espín $3/2$ mas conocidas, y se discuten brevemente sus características. Se procede después a generalizarlas a un espacio curvo en general, para terminar estudiando el comportamiento de sus soluciones en una métrica de Schwarzschild, previamente discutida con detalle.

Es conveniente hacer un sumario de las convenciones utilizadas:

Los índices latinos en mayúscula representan índices espinoriales y corren de uno a dos. Los espinores con un punto sobre el índice son de la representación adjunta de los sin punto. Los índices latinos minúsculos representan índices tetradiales y corren de uno a cuatro. Como es costumbre, los índices griegos corresponden a índices tensoriales y corren de cero a tres. Cuando no exista posibilidad de confusión con los índices tetradiales, se usarán letras latinas minúsculas para designar índices tensoriales que corren de uno a tres. Se utilizará la convención de Einstein para sumar sobre índices del mismo tipo.

Se usará la notación de Debney-Kerr-Schild, cuya relación con la notación de Newmann-Penrose es⁽¹⁾:

Introducción

N-F	D-K-S	N-F	D-K-S
m_M	e^1_M	ψ_{ABCD}	C_{ABCD}
m^*_M	e^2_M	$\phi_{AB\dot{C}\dot{D}}$	$C_{AB\dot{C}\dot{D}}$
l_M	$-e^3_M$		
η_M	e^4_M		
ρ	Γ_{421}	λ	Γ_{311}
σ	Γ_{422}	μ	Γ_{312}
τ	Γ_{423}	ν	Γ_{313}
κ	Γ_{424}	π	Γ_{314}
α	$-(1/2) (\Gamma_{121} + \Gamma_{341})$	$\bar{\delta}$	∂_1
β	$-(1/2) (\Gamma_{122} + \Gamma_{342})$	δ	∂_2
δ	$-(1/2) (\Gamma_{123} + \Gamma_{343})$	Δ	∂_3
ϵ	$(1/2) (\Gamma_{124} + \Gamma_{344})$	D	∂_4

Donde los índices explícitos son tetradiales.

La signatura a utilizar es $(-+++)$. Se usarán unidades tales que $c=\hbar=G=1$. Además se adoptan las convenciones más utilizadas para conmutadores y anticonmutadores:

$$[A, B] = AB - BA;$$

$$\{A, B\} = AB + BA.$$

REFERENCIA:

1. Hacyan S., Notas Sobre Espinores, notas personales, U.N.A.M., México D.F., pp. 46.

CAPITULO 1

EL FORMALISMO MATEMATICO.

1. Grupos

En una teoría cuántica no relativista, una partícula de espín s está descrita por un objeto simétrico con $2s+1$ componentes llamado espinor de rango $2s$. Matemáticamente, este objeto es una realización de la representación irreducible del grupo de rotaciones espaciales (propias).

Un conjunto G de elementos: a, b, c, \dots , forma un grupo bajo la operación $(*)$ si se satisfacen las siguientes propiedades:

1) Si a y b pertenecen a G , entonces $a*b$ pertenece a G (cerradura).

2) Para toda a, b, c en G $a*(b*c)=(a*b)*c$ (asociatividad).

3) Existe en G un elemento "e", tal que $e*a=a$ para toda a en G (elemento neutro).

4) Para toda a en G (salvo en el caso en que $a=0$), la ecuación $x*a=e$ tiene una solución en G . Esta solución se denota por a^{-1} (inverso multiplicativo).

Una representación de un grupo G es un conjunto de transformaciones lineales T definidas sobre un espacio vectorial V , tales que si e, a, b, c, \dots , son elementos de G , entonces existe un homeomorfismo entre el grupo y el conjunto de transformaciones lineales tales que:

$$T(e)=I; \quad T(a*b)=T(a)T(b), \quad (1.1)$$

donde I es la transformación idéntica.

Se define la dimensión de la representación, como la dimensión de las matrices asociadas a las transformaciones lineales. De ahora en adelante se trabajará exclusivamente con representaciones matriciales.

Sea $[T(a)]$ una representación de G sobre el espacio vectorial V . Un subespacio $W \subset V$ es invariante bajo la representación $[T(a)]$ si $T(W)$ está contenido en W , para cualquier elemento a del grupo. La representación es irreducible si los únicos subespacios invariantes son V y (\emptyset) .

Puede demostrarse que el conjunto de rotaciones en el espacio de tres dimensiones forma un grupo bajo la operación de composición" llamado $O(3)$ o grupo ortogonal (algunos autores incluyen en este grupo a las reflexiones, cosa que no se hará en el presente texto). Una rotación tridimensional por un ángulo θ alrededor del eje j , es de la forma:

$$R_j(\theta) = \exp(\theta A_j), \quad (1.2)$$

donde las A_j son los generadores del grupo en la representación dada. Esta relación los define como:

$$A_j = (d/d\theta)R_j \text{ en } \theta=0. \quad (1.3)$$

1. Formalismo Matemático

Satisfacen la relación:

$$[A_i, A_j] = -\epsilon_{ijk} A_k, \quad (1.4)$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita. En general, para cualquier grupo que depende continuamente de sus parámetros la relación que satisfacen sus generadores es:

$$[P_i, P_j] = C_{ijk} P_k; \quad C_{ijk} = C_{lklj}, \quad (1.5)$$

con C_{ijk} las llamadas constantes de estructura del grupo, que son independientes de la representación. Se puede demostrar que los generadores de un grupo forman una base de un espacio vectorial⁽¹⁾. Este espacio vectorial, junto con la relación 1.5 define lo que se llama el Algebra de Lie del grupo.

En Mecánica Cuántica las tres componentes J_i , $i=1,2,3$ del momento angular satisfacen la relación:

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k, \quad (1.6)$$

y forman entonces un álgebra de Lie. De 1.5 se sigue que el operador J^2 conmuta con cada J_i , y por lo tanto puede construirse un espectro de eigenfunciones comunes para éste y alguna de las J_i . Tradicionalmente se elige J_z . Si $|j, m\rangle$ son las eigenfunciones de J^2 y J_z definidas por:

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle; \quad (1.7)$$

$$J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle,$$

$$\text{de donde:} \quad -j \leq m \leq j, \quad (1.8)$$

por lo que hay $2j+1$ estados para cada j . Los valores posibles de j son $0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$

La representación 1.6 es irreducible para cada valor de j , por lo que es imposible unificar en una misma representación irreducible estados de distinto espín, y las $2j+1$ funciones $|j, m\rangle$ forman las componentes de un espinor simétrico de rango $2j$.

El álgebra de momento angular y el álgebra de Lie del grupo de rotaciones son homeomorfas; basta cambiar J_i por $-iA_i$ en 1.6 para obtener 1.4 y viceversa. Así, construir todas las representaciones irreducibles del álgebra de momento angular equivale a encontrar todas las representaciones irreducibles del álgebra de Lie del grupo de rotaciones. (Estrictamente, las representaciones para j semientero no pueden formar parte de una verdadera rotación pues para estas representaciones: $R_i(\theta + 360^\circ) = -R_i(\theta)$).

Los objetos que son realizaciones de las representaciones irreducibles para j semientero son espinores simétricos de rango $2j$; mientras que los que son realizaciones de las representaciones para j entero son tensores simétricos y sin traza de rango j . De este modo los espinores quedan siempre definidos de rango impar. Para extender el concepto de espinor

1. Formalismo Matemático

de tal forma que se puedan contemplar espinores de rango p (par o impar) se definen los espinores de cualquier rango como objetos cuyas componentes se transforman como el producto de las componentes de p espinores de rango uno.

Los espinores antisimétricos, aunque no son realizaciones matemáticas del grupo de rotaciones, se introducen como objetos del mismo rango y con las mismas propiedades de transformación que los simétricos.

Es útil analizar primero el caso de rango uno: $j=1/2$. En este caso la dimensión de la representación es $2j+1=2$, y así los espinores serán objetos de dos componentes complejas. Los generadores de rotaciones tridimensionales son tres matrices de 2×2 que satisfacen 1.4. El conjunto de las matrices de Pauli, multiplicadas por $(1/2)i$ cumple esta condición. Estas matrices son:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

y por tanto los espinores de rango uno se transforman bajo rotaciones alrededor del eje n como:

$$K' = (BK); \quad (1.10)$$

$$B = \exp[i\theta/2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})] = \cos(\theta/2) + i\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \sin(\theta/2). \quad (1.11)$$

Nótese que la matriz B de esta ecuación es unitaria y su determinante vale uno, además de que $B(\theta+360^\circ) = -B(\theta)$.

Un formalismo equivalente al de tensores para trabajar con espinores, consiste en asignarles índices covariantes y contravariantes a sus componentes. Las componentes contravariantes del espinor, que se transforman con la matriz 1.11, son:

$$K^A \quad (A=1,2),$$

y las covariantes, que se transforman bajo rotaciones con B^{-1} son:

$$K_A \quad (A=1,2).$$

La relación entre ambas componentes es $K_1 = K^2$ y $K_2 = -K^1$. Es decir, la métrica está dada por el objeto antisimétrico:

$$(\epsilon_{AB}) = (\epsilon^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (1.12)$$

$$K_A = \epsilon_{AB} K^B; \quad K^A = K_B \epsilon^{BA}. \quad (1.13)$$

ϵ_{AB} también sube y baja los índices de B . De modo que:

$$(B)_A{}^B = (B^{-1})^A{}_B. \quad (1.14)$$

Las cantidades ϵ_{AB} forman un espinor antisimétrico de

1. Formalismo Matemático

rango 2. Con 1.11 se demuestra que ϵ_{AB} es invariante ante transformaciones de coordenadas, y de 1.12:

$$\begin{aligned}\epsilon^{AB} \epsilon_{BA} &= \delta^A_A, & \epsilon^{AB} \epsilon_{AB} &= -\delta^A_A, \\ \epsilon^{AB} \epsilon_{AB} &= 2, & \epsilon^{AB} \epsilon_{BA} &= -2.\end{aligned}\tag{1.15}$$

La condición para que ϵ_{AB} sea efectivamente una métrica es que el producto escalar entre dos espinores K_A y L_B , definido por:

$$K_A L^A = K^A L^B \epsilon_{BA} = K^2 L^1 - K^1 L^2,\tag{1.16}$$

sea invariante ante rotaciones:

$$\begin{aligned}K^A L^B \epsilon_{AB} &\rightarrow K'^A L'^B \epsilon_{AB} = B^A_M K^M B^N_L L^N \epsilon_{AB} \\ &= \det(B) \epsilon_{MN} K^M L^N \\ &= K^M L^N.\end{aligned}$$

Donde es fundamental el hecho de que $\det(B)=1$.

Al igual que los tensores, un espinor arbitrario de rango 2 puede escribirse como la suma de un espinor simétrico más uno antisimétrico. Este último es proporcional al espinor métrico:

$$K^{AB} = K^{(AB)} + K^{[AB]} = K^{(AB)} + z \epsilon^{AB},$$

$$\text{y contrayendo con } \epsilon_{AB}: \quad z = 1/2 \epsilon_{AB} K^{AB},$$

donde se utilizó la ecuación 1.15, y que la contracción de un espinor simétrico con uno antisimétrico se anula.

Las propiedades de la matriz B tienen profunda relevancia física. El hecho de que sea una matriz unitaria implica que la forma bilineal

$$K^1 K^{*1} + K^2 K^{*2}$$

es un escalar, y debido a que en Mecánica Cuántica no Relativista, la probabilidad de encontrar una partícula de espín 1/2 -descrita por el espinor K^A - en un cierto lugar del espacio está dada por esta forma, se conserva ante rotaciones⁽²⁾.

2. Espinores en el Espacio de Minkowski.

En una teoría relativista, el grupo formado por las rotaciones espaciales es un subgrupo del grupo propio de Lorentz. Por lo tanto es necesario desarrollar la teoría de espinores en cuatro dimensiones, cuya parte simétrica es una realización de las representaciones irreducibles de este grupo. Estos objetos tienen una estructura análoga a los correspondientes espinores en tres dimensiones⁽²⁾.

El grupo de Lorentz propio es el grupo de las rotaciones en

1. Formalismo Matemático

el espacio-tiempo de cuatro dimensiones (excluyendo las reflexiones), y tiene seis parámetros, tres de los cuales corresponden a los tres ángulos de la rotación espacial, y otros tres que corresponden a las tres componentes de la velocidad de un sistema de referencia respecto a otro, necesarias para una transformación de Lorentz. Los vectores en este espacio (tetravectores) son de la forma:

$$X^M = (X^0, X^1, X^2, X^3),$$

y el álgebra de Lie de los generadores de transformaciones de Lorentz es⁽¹⁾:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma},$$

donde $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ es el tensor métrico del espacio. Si además agregamos los generadores p_μ de las traslaciones espaciotemporales, se obtiene el grupo de Poincaré, cuya álgebra de Lie está dada por la relación anterior junto con las relaciones:

$$[M_{\mu\nu}, p_\rho] = g_{\nu\rho} p_\mu - g_{\mu\rho} p_\nu, \quad [p_\mu, p_\nu] = 0.$$

Estas relaciones expresan la no conmutatividad de una rotación y una traslación, y la conmutatividad de dos traslaciones.

La matriz de transformación del grupo propio de Lorentz es de la forma de 1.2:

$$B = \exp(W^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}), \quad (1.18)$$

donde $W^{\alpha\beta} = -W^{\beta\alpha}$ son los seis parámetros de la rotación.

De manera análoga al caso de los espinores en un espacio de tres dimensiones, en la teoría relativista también es útil analizar primero el caso de rango 1, donde los generadores de las transformaciones son matrices de 2×2 , y puede demostrarse que B en 1.18 pertenece al grupo $SL(2, C)$ ⁽²⁾ (grupo de las matrices de 2×2 , complejas, con determinante igual a uno). Entonces, los espinores de rango 1 se transforman como:

$$K'^a = (BK)^a, \quad (1.19)$$

y para una rotación puramente espacial se encuentra que:

$$B = \cos(\theta/2) + i\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \sin(\theta/2), \quad (1.20)$$

y para una transformación de Lorentz entre sistemas con velocidad relativa V :

$$B = \cosh(\theta/2) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \sinh(\theta/2) \quad (1.21)$$

donde $\tanh\theta = V$.

A diferencia de la matriz definida en 1.20, la 1.21 no es unitaria. Esto corresponde a que en Mecánica Cuántica Relativista, la densidad de probabilidad no es un escalar, sino

1. Formalismo Matemático

la componente temporal de un tetravector, lo cual marca una diferencia con el caso no relativista⁽²⁾.

Debido entonces a que la única condición sobre las matrices B es que tengan determinante igual a uno, sus tres componentes complejas independientes corresponden a seis parámetros reales independientes.

Puesto que en general las matrices B no son unitarias, las componentes complejas conjugadas de un espinor se transforman de manera independiente de las no conjugadas, y en una teoría relativista, se distinguen dos tipos de espinores. A los espinores que se transforman con la matriz compleja conjugada de B, se les denota con un punto sobre el índice y se les llama espinores con punto.

Todas las propiedades de subida y bajada de índices, así como la definición de espinores de mayor rango, son las mismas tanto en el espacio de Minkowski como en el espacio de tres dimensiones (incluyendo espinores con y sin punto). Es por esto que pueden existir espinores mixtos de cualquier rango mayor que uno. Puesto que las transformaciones para índices con y sin punto son algebraicamente independientes, no es necesario especificar su secuencia.

Análogamente al caso tensorial, para que una ecuación espinorial sea invariante debe tener los mismos índices libres, con y sin punto, de ambos lados de la ecuación.

El espinor K^{ab} tiene, al igual que un cuadvivector, cuatro componentes independientes. Entonces es claro que son realizaciones irreducibles de la misma representación del grupo propio de Lorentz, y por tanto hay una relación biunívoca entre sus componentes:

$$K^{ab} = x^{\mu} g_{\mu}{}^{ab}, \quad (1.22)$$

donde se define $g_0 = I$, y $(g_{\mu}{}^{ab}) = [g_0, g_1]$. De manera explícita éstas son:

$$(g_{\mu}{}^{ab}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.23)$$

La relación inversa es: $x^{\mu} = (1/2) \text{Tr}(K \cdot g^{\mu})$.

Esto es un caso particular de una regla más general. Un espinor simétrico con n índices con y sin punto es equivalente a un tensor simétrico irreducible de rango n. Además de esta relación de correspondencia, existe otra entre tensores de segundo rango, reales y antisimétricos, y 2 espinores simétricos de rango 2. Así pues, si $F_{\alpha\beta}$ es un tensor real y antisimétrico⁽⁴⁾:

$$F_{\alpha\beta} \longrightarrow F_{ab\dot{c}\dot{d}} = g^{\alpha}{}_{a\dot{c}} g^{\beta}{}_{b\dot{d}} F_{\alpha\beta} = \epsilon_{ab} F_{\dot{c}\dot{d}} + \epsilon_{\dot{c}\dot{d}} F_{ab}.$$

Un espinor totalmente simétrico de n índices puede a su vez ser descompuesto como el producto simetrizado de n espinores de un solo índice (no forzosamente distintos)⁽⁵⁾:

1. Formalismo Matemático

$$K_{a_1 \dots a_n} = L^1(a_1) L^2(a_2) \dots L^n(a_n).$$

A cada matriz B perteneciente a $SL(2, C)$ corresponde una transformación $\Lambda(B)$ del grupo propio de Lorentz en su representación entera. De hecho, una transformación de Lorentz de un espinor de rango 2 (un índice con punto y un índice sin punto) consiste en una doble operación, con B y B^* , de manera que si se cambia B por $-B$, se genera la misma transformación. Esta doble operación genera la misma transformación del grupo propio de Lorentz en el tetravector asociado según 1.23. Entonces, a cada matriz λ perteneciente al grupo propio de Lorentz corresponden ambas matrices $\pm B$ pertenecientes a $SL(2, C)$. Como además

$$\Lambda(AB) = \Lambda(A)\Lambda(B); \quad \Lambda(I) = I,$$

existe un homeomorfismo entre el grupo propio de Lorentz (en representación entera) y $\pm SL(2, C)$. Nótese que en tres dimensiones también existe un homeomorfismo de este tipo, que no debe de confundirse con el mencionado antes, entre el grupo $O(3)$ y $\pm SU(2)$, que liga las rotaciones de un vector con las rotaciones de su imagen espinorial.

3. Espinores y Tétradas en un Espacio Curvo⁽⁴⁾.

En esta sección se expondrá un formalismo adecuado para trabajar con espinores en un espacio curvo. Este formalismo introduce objetos, llamados tétradas, con respecto a los cuales se redefinen numéricamente los objetos relacionados a la curvatura (tensor métrico, matrices de Pauli, ...), en el sentido de que el objeto que absorbe la información de la curvatura es la tétrada misma.

En cualquier variedad Riemanniana (i.e. con métrica $g_{\mu\nu}$) de dimensión n , menor o igual que cuatro, del espacio-tiempo de cuatro dimensiones, puede construirse una base global (en el sentido de que no depende del sistema de coordenadas) de su espacio cotangente. Si e^a_μ son n vectores linealmente independientes ($a=1, \dots, n$) en la variedad, la 1-forma e^a , es:

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu, \quad (1.24)$$

con $[x^\mu]$ algún mapeo local de la variedad (una discusión mas extensa del concepto de forma diferencial puede encontrarse en las citas (5) y (6)).

La variedad que nos concierne es precisamente todo el espacio-tiempo de cuatro dimensiones (i.e. $n=4$). Las e^a_μ conforman una tétrada, por lo que e^a son 1-formas tetradiales. Es conveniente trabajar con tétradas nulas, en cuyo caso se satisface que $e^a = e^{a*}$ y que e^3 y e^4 son reales.

Se definen los objetos e^a_μ de tal forma que se satisfaga la relación:

$$e^a_\mu e^b_\nu = \delta^a_b. \quad (1.25)$$

1. Formalismo Matemático

La tetrada inversa e^{μ} define la derivada direccional global (base del espacio tangente a la variedad):

$$\partial_{\alpha} = e^{\mu}_{\alpha} \partial_{\mu} . \quad (1.26)$$

De donde se sigue que para cualquier escalar T:

$$dT = dx^{\alpha} \partial_{\alpha} T = e^{\mu}_{\alpha} \partial_{\mu} T . \quad (1.27)$$

El cuadrado del elemento de arco ds^2 se define en términos de la tetrada nula como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{ab} e^a e^b , \quad (1.28)$$

$$\text{con:} \quad g_{\mu\nu} = g_{ab} e^{\mu}_a e^{\nu}_b . \quad (1.29)$$

Para que en espacio plano la relación 1.28 sea consistente, puede elegirse la métrica constante g_{ab} como:

$$(g_{ab}) = (g^{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (1.30)$$

y $g_{\mu\nu}$ determina la tetrada salvo por una transformación de Lorentz (de la tetrada). Entonces:

$$ds^2 = 2e^1 e^2 + 2e^3 e^4 . \quad (1.31)$$

Se definen las matrices numéricas de Pauli con respecto a la tetrada nula por medio de la relación:

$$e_a g^{ab} = dx^{\mu} g_{\mu}^{ab} . \quad (1.32)$$

Puesto que las matrices de Pauli g^{ab} y e^a dependen de la métrica, mientras que g^{ab} no, es fácil encontrar estas últimas pasando a un espacio plano, donde las matrices de Pauli son las utilizadas en la sección anterior y las e^a tienen una expresión simple:

$$(g^{ab}) = 2^{1/2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} . \quad (1.33)$$

La contracción $e_a g^{ab}$ es evidentemente un espinor de rango 2.

De la misma manera en que se le asocian componentes espinoriales a un tensor, se le pueden asociar sus componentes tetradiales mediante la relación:

$$T_{\alpha}^{\beta\gamma\delta} = e^{\epsilon}_{\alpha} e^{\delta}_{\gamma} e_{\epsilon}^{\alpha} e_{\beta}^{\delta} T_{\alpha}^{\beta\gamma\delta} , \quad (1.34)$$

y utilizando la relación entre componentes tensoriales y espinoriales, se obtiene la relación entre componentes tetradiales y espinoriales:

1. Formalismo Matemático

$$T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta} \dots := g^{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} \dots T^{\alpha}{}_{\beta} \dots \quad (1.35)$$

Las transformaciones de espinores cambian diferencialmente de punto a punto sobre una variedad. Esto implica la necesidad de construir derivadas covariantes de espinores en el mismo sentido de la derivada covariante tensorial, es decir que se transformen como un objeto mixto con un índice tensorial e índices espinoriales. De la misma manera, es conveniente introducir una derivada tetradial que sea covariante. Construiremos las primeras en términos de las segundas.

La derivada covariante tetradial se obtiene de la tensorial por medio de la ecuación 1.34. De:

$$\nabla_{\mu} T_{\rho}^{\alpha} \dots := T_{\rho}^{\alpha} \dots_{;\mu} = \partial_{\mu} T_{\rho}^{\alpha} \dots + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} T_{\rho}^{\sigma} \dots - \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma} T_{\sigma}^{\alpha} \dots + \dots, \quad (1.36)$$

con $\Gamma_{\rho\sigma}^{\alpha}$ los símbolos de Christoffel del segundo tipo:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = (1/2) g^{\lambda\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}),$$

se obtiene:

$$T_{\beta}{}^{\alpha}{}_{;\gamma} = e_{\alpha}^{\beta} e^{\gamma}{}_{\delta} \dots T_{\rho}^{\alpha} \dots_{;\gamma} e^{\delta}{}_{\beta} = \quad (1.37)$$

$$= T_{\beta}{}^{\alpha}{}_{;\gamma} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} T^{\gamma}{}_{\delta} \dots - \Gamma^{\gamma}{}_{\beta\delta} T^{\alpha}{}_{\gamma} \dots + \dots,$$

$$\text{con } \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = -e^{\mu}{}_{\beta,\nu} e^{\nu}{}_{\gamma} e^{\alpha}{}_{\mu} \quad (1.38)$$

los coeficientes de rotación de Ricci. A partir de éstos se definen las formas de Ricci:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} e^{\gamma}{}_{\delta} \quad (1.39)$$

Los índices de estos coeficientes se manipulan con el tensor métrico constante g_{ab} :

$$\Gamma_{abc} = g_{ab} \Gamma^{\alpha}{}_{bc} \quad (1.40)$$

Como $g_{ab;c} = 0$, se deduce que

$$\Gamma_{abc} = \Gamma_{cab} \quad (1.41)$$

Ahora es conveniente introducir la primera ecuación de estructura, que determina las formas de Ricci en función de las derivadas de las 1-formas básicas e^{α} :

$$de^{\alpha} = d(e^{\alpha}_{\lambda} dx^{\lambda}) = e^{\alpha}_{\mu,\nu} dx^{\nu} \wedge dx^{\mu} = e^{\alpha}_{\mu\nu} dx^{\nu} \wedge dx^{\mu},$$

donde "d" denota la diferencial exterior^{(3),(4)}. Utilizando la ecuación 1.38; antisimetrizándola con respecto todos sus índices se obtiene:

$$de^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} e^{\beta}{}_{\mu} e^{\gamma}{}_{\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = -e^{\alpha}{}_{\lambda} e^{\beta}{}_{\mu} \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} dx^{\lambda} \wedge dx^{\mu},$$

$$\text{y finalmente:} \quad de^{\alpha} = e^{\beta} \wedge \Gamma^{\alpha}{}_{\beta} \quad (1.42)$$

1. Formalismo Matemático

A esta ecuación también se le conoce como la primera ecuación de Cartan. Las ecuaciones 1.41 y 1.42 determinan completamente los coeficientes de rotación de Ricci.

Para definir la derivada covariante espinorial, pediremos que satisfaga los siguientes axiomas naturales:

- i) La operación es universal, y su mecanismo está determinado completamente por la geometría de la variedad.
- ii) Es covariante.
- iii) Es distributiva con respecto a la adición.
- iv) Sigue la regla de Leibnitz para el producto.
- v) Es una operación real.
- vi) Se reduce a una derivada parcial común y corriente cuando opera sobre un escalar.

Así la derivada covariante queda determinada mediante:

$$\nabla_M \Psi^{ab}{}_{cd}:: = \partial_M \Psi^{ab}{}_{cd}:: + \Gamma^a{}_{\rho M} \Psi^{\rho b}{}_{cd}:: - \Gamma^b{}_{\rho M} \Psi^{a\rho}{}_{cd}:: - \Gamma^c{}_{\rho M} \Psi^{ab}{}_{\rho d}:: + \Gamma^d{}_{\rho M} \Psi^{ab}{}_{c\rho}:: - \Gamma^{\rho}{}_{\rho M} \Psi^{ab}{}_{cd}:: + \dots \quad (1.43)$$

Donde las $\Gamma^a{}_{\rho M}$ están relacionadas con los coeficientes de rotación de Ricci por medio de la identidad:

$$(e^a{}_{\alpha} \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}) = \begin{pmatrix} \Gamma_{42a} & (1/2)(\Gamma_{12a} + \Gamma_{34a}) \\ (1/2)(\Gamma_{12a} + \Gamma_{34a}) & \Gamma_{31a} \end{pmatrix}, \quad (1.44)$$

La matriz con puntos se obtiene de ésta por conjugación, lo que según el esquema usual significa:

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4) \xrightarrow{-c.c.} (2 \ 1 \ 3 \ 4)$$

4. Los Parámetros de Curvatura.

La medida de mayor información de la curvatura del espacio-tiempo en un punto es el tensor de Riemann^(*), también llamado tensor de curvatura. Este tensor proporciona toda la información sobre la curvatura; es cero en una región del espacio-tiempo si y sólo si esta región es plana (con métrica de Minkowski). Explícitamente este tensor es:

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho,\nu} + \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}{}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho} \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}. \quad (1.45)$$

Se puede demostrar^(*) que éste es el único tensor que puede construirse con el tensor métrico y sus primeras y segundas derivadas. Cumple las siguientes propiedades algebraicas:

- A) Simetría: $R_{\lambda\mu\nu\rho} = R_{\nu\rho\lambda\mu}$,
- B) Antisimetría: $R_{\lambda\mu\nu\rho} = R_{\rho\lambda\mu\nu} = R_{\nu\rho\lambda\mu}$, (1.46)
- C) Ciclicidad: $R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$.

De estas ecuaciones, vemos que $R_{\lambda\mu\nu\rho}$ tiene 20 componentes independientes en el espacio-tiempo de 4 dimensiones. De las

1. Formalismo Matemático

ecuaciones 1.36 y 1.45 se siguen las llamadas identidades de Bianchi:

$$R_{\lambda\mu\nu\sigma} + R_{\mu\nu\sigma\lambda} + R_{\nu\sigma\lambda\mu} = 0. \quad (1.47)$$

Además, de estas mismas ecuaciones se satisface la siguiente relación de conmutación entre las derivadas covariantes de un tensor:

$$A_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \psi_{\gamma_1 \dots \gamma_q} - A_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \psi_{\gamma_1 \dots \gamma_q} = \\ -R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} A_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \psi_{\gamma_1 \dots \gamma_q} - \dots - R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} A_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \psi_{\gamma_1 \dots \gamma_q} + R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} A_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \psi_{\gamma_1 \dots \gamma_q} + \dots + R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} A_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \psi_{\gamma_1 \dots \gamma_q} \quad (1.48)$$

Dos de los índices del tensor de Riemann pueden contraerse para formar un tensor de segundo rango llamado tensor de Ricci:

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \Gamma_{\mu\nu\kappa}^{\lambda\nu} - \Gamma_{\mu\kappa\nu}^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda\kappa} \Gamma_{\lambda\nu}^{\nu\kappa} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda\nu} \Gamma_{\lambda\nu}^{\nu\kappa}. \quad (1.49)$$

Salvo un signo, este tensor es único, pues de 1.46, vemos que la contracción de los dos primeros o los dos últimos índices es cero.

Análogamente, el único escalar que puede construirse por contracción de sus índices es el escalar de Ricci o de curvatura⁽¹⁾:

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}. \quad (1.50)$$

Las ecuaciones 1.46 implican que el tensor de Ricci es simétrico. La curvatura Gaussiana K está relacionada con el escalar de Ricci mediante la fórmula $K = -1/2 R$, donde el $-1/2$ aparece exclusivamente por razones históricas⁽²⁾.

Se puede descomponer al tensor de Riemann de la siguiente forma. Definiendo el tensor de Ricci sin traza:

$$C_{\mu\kappa}^{\lambda\nu} = R_{\mu\kappa}^{\lambda\nu} - (1/4) \delta_{\mu\kappa}^{\lambda\nu} R, \\ R_{\nu\kappa}^{\lambda\mu} = (1/2) \delta_{\nu\kappa}^{\lambda\mu} C_{\rho}^{\sigma} - (R/12) \delta_{\nu\kappa}^{\lambda\mu} + C_{\nu\kappa}^{\lambda\mu}. \quad (1.51)$$

Donde $C_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$ es el llamado tensor de Weyl o tensor conforme. Este último nombre proviene de que la condición necesaria y suficiente para la existencia de un sistema de coordenadas donde $g_{\mu\nu}$ sea proporcional a una matriz constante en todo el espacio es que $C_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$ sea idénticamente cero⁽³⁾.

Este tensor tiene todas las propiedades del tensor de Riemann, más la propiedad de que $C_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = 0$. De aquí que tiene 10 componentes independientes. Además $C_{\mu\kappa}$ tiene 9 componentes independientes, de tal forma que considerando que R contribuye con una sola componente, la descomposición 1.51 es consistente. De hecho, en el espacio vacío (en donde el tensor de Ricci es idénticamente cero) los tensores de Weyl y de Riemann coinciden⁽⁴⁾.

Cada uno de estos objetos tiene su imagen espinorial⁽⁵⁾:

1. Formalismo Matemático

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha\beta\gamma} &\longrightarrow C_{ABCD} = C_{(ABCD)}, \\
 C_{\alpha\beta} &\longrightarrow C_{AB\dot{C}\dot{D}} = C_{(AB)\dot{C}\dot{D}} = C_{AB}(\dot{C}\dot{D}), \\
 R &\longrightarrow R.
 \end{aligned}
 \tag{1.52}$$

La imagen espinorial de las identidades de Bianchi está dada por (4):

$$\begin{aligned}
 \nabla^{\dot{D}} C_{AB\dot{C}\dot{D}} + \nabla_{(A} \dot{C} C_{BC)\dot{D}\dot{D}} &= 0, \\
 8 \nabla^{\dot{A}\dot{B}} C_{AB\dot{C}\dot{D}} + \nabla_{\dot{A}\dot{B}} R &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.53}$$

Ahora que se introdujo el tensor de Riemann, puede deducirse la segunda ecuación de estructura de Cartan, utilizada para obtener explícitamente las componentes distintas de cero del espinor de Weyl. De la ecuación 1.48, para una tetrada nula ($q=1; p=0$) se obtiene:

$$e^{\alpha}{}_{\rho} \gamma_{\delta} - e^{\alpha}{}_{\rho} \gamma_{\delta} = e^{\alpha}{}_{\rho} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta};$$

contrayendo esta relación con $(1/2)e_b{}^{\rho} dx^{\beta} \wedge dx^{\delta}$, y aplicando la definición de las formas de Ricci $\Gamma^a{}_b$, se obtiene que:

$$R^a{}_b = d\Gamma^a{}_b + \Gamma^a{}_c \wedge \Gamma^c{}_b,$$

$$\text{donde } R^a{}_b \equiv (1/2)R^{\alpha\beta\gamma\delta} e^{\alpha} \wedge e^{\beta}.$$

Esta es la segunda ecuación de Cartan; $R^a{}_b$ es la imagen tetradial del tensor de Ricci y $R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ es la del tensor de Riemann. Esta ecuación en términos de las C's de Weyl, junto con las Γ 's obtenidas de la primera ecuación de estructura, son lo que permiten encontrar el valor de las componentes del espinor de Weyl para una métrica dada.

Es de gran importancia tener la imagen espinorial de la ecuación 1.48, ya que nos dará relaciones algebraicas entre las componentes de los espinores fundamentales que vamos a utilizar en el desarrollo posterior de las cantidades físicas (5):

$$\begin{aligned}
 \nabla^{\dot{N}}{}_{(C} \nabla_{D)\dot{N}} \Psi_{A_1 \dots A_{2p}}^{\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2q}} &= 4q C_{CD\dot{N}}(\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2q}) \dot{N}_{A_1 \dots A_{2p}} + \\
 &+ 4p C^N{}_{CD(A_1 \dots A_{2p})\dot{N}} \dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2q} + \\
 &+ p(R/3) \delta^N{}_{(C} \epsilon_{D)(A_1 \dots A_{2p})\dot{N}} \dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2q}, \\
 \nabla^{\dot{N}}{}_{(C} \nabla^{\dot{D}} \Psi_{A_1 \dots A_{2p}}^{\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2q}} &= -4q C^{\dot{C}\dot{D}}(\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2q}) \dot{N}_{A_1 \dots A_{2p}} - \\
 &- 4p C^N{}_{(A_1 \dots A_{2p})\dot{C}\dot{D}} \dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2q} \dot{N} + \\
 &+ q(R/3) \delta^{\dot{N}}{}_{(C} \epsilon_{D)(\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2q})\dot{N}} A_1 \dots A_{2p}.
 \end{aligned}
 \tag{1.54}$$

Donde $\nabla^{\dot{A}\dot{B}} = g^{\dot{A}\dot{B}} \nabla^{\dot{A}} = g^{\dot{A}\dot{B}} \nabla^{\dot{A}}$ y $(C_{ABCD})^* = C_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$, $(C_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}})^* = C_{ABCD}$ y $R=R^*$, ya que el espacio-tiempo es una variedad real.

1. Formalismo Matemático

Para calcular el valor explícito de la imagen espinorial del tensor de Weyl se puede proceder por dos caminos distintos. El más directo es por medio de la fuerza bruta: calcular directamente las componentes del tensor de Riemann, que en el vacío coinciden con las del tensor de Weyl, y de ahí obtener la imagen espinorial. El segundo camino, que genera una comprensión más profunda de las propiedades del espacio-tiempo, es el de clasificarlo en términos de las propiedades algebraicas del tensor de Weyl en cada espacio, procedimiento formalmente equivalente a clasificar el tensor de Riemann en espacio vacío. La manera más sencilla de hacer esto es según Penrose⁽¹⁰⁾:

La imagen espinorial del tensor de Weyl, por ser totalmente simétrico, se puede descomponer en el producto simetrizado de cuatro espinores de un solo índice:

$$C_{ABCD} = K_{(A} L_B M_C N_{D)}$$

Estos 4 espinores no tienen por que ser distintos entre sí. Su imagen tetravectorial define 4 direcciones en el espacio-tiempo sobre el cono de luz, que quedan determinadas de manera única:

$$K_a \rightarrow K_\mu = g_{\mu\nu} K_a K_b K_c K_d$$

Penrose llama a estas direcciones las direcciones principales gravitacionales nulas "DPGN" ("gravitational principal null directions"). Se puede clasificar el espacio-tiempo en función de las direcciones nulas coincidentes:

$C_{ABCD} =$	G $K_{(A} L_B M_C N_{D)}$		
	D $K_{(A} K_B M_C M_{D)}$	GII $K_{(A} K_B M_C N_{D)}$	
	CF O	N $K_{(A} K_B K_C K_{D)}$	$K_{(A} K_B K_C M_{D)}$
	I	II	III

TABLA I (3) (4) (10)

El espacio conformalmente plano (CF), donde el tensor de Weyl es idénticamente cero, es el único caso en que las DPGN están indeterminadas. Esto corresponde a que aquí una geodésica nula puede seguir cualquier dirección en el espacio, y el cuadrado de su elemento de arco es invariante ante reflexiones en el tiempo. Como veremos más adelante en el capítulo cuarto,

1. Formalismo Matemático

el caso de la métrica de Schwarzschild permite sólo dos direcciones para la tetrada nula, aquella que corresponde a un hoyo negro donde las geodésicas nulas y de tipo tiempo sólo pueden entrar al horizonte y la correspondiente al hoyo blanco, que es el simétrico bajo reflexión temporal, en donde sólo pueden salir de él. De este modo, los espinores del campo gravitacional deben ser iguales dos a dos y la métrica de un hoyo negro corresponde al grupo D de la tabla I.

Aunque no se sabe con certeza a que casos corresponden todos los demás grupos, se sabe que el grupo N representa ondas gravitacionales planas ya que su dirección de propagación define una dirección única y esto se refleja en tener sólo un DGPN. Se especula que todo el grupo II, y el grupo III, también representa este mismo fenómeno.

Originalmente Petrov (1954) utilizó otro método para obtener esta misma clasificación en términos de una matriz de 3×3 llamada de Petrov, catalogando su espectro de eigenvalores. Una discusión elemental de este procedimiento está dada en la referencia (11).

1. Formalismo Matemático

REFERENCIAS.

1. Schweber S. S., Relativistic Quantum Field Theory, Harper & Row, New York, 1964.
2. Lifshitz E.M., et. al., Quantum Electrodynamics, (Landau & Lifshitz Course of Theoretical Physics vol. IV), 2nd edition, Pergamon Press, Oxford, England, 1982, pp. XV-652.
3. Hacyan S., Notas Sobre Espinores, notas personales, U.N.A.M., México D.F.
4. Plebański J.F., Spinors, Tetrads and Forms, Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del I.P.N., México 1974, pp. V-190.
5. Courant R. & John F., Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático vol. 2, Editorial Limusa S.A., México, 1979, pp. 1041.
6. Misner Ch. W., Thorn K. S., Wheeler J. A., Gravitation, W. H. Freeman & Co., U.S.A., 1973, pp. XXVII-1277.
7. Price R.H., "General Relativity Primer", Am. J. Phys 50, 4 1982, 300-329.
8. Weinberg S., Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, Wiley & Sons, New York, 1972, pp. XXIX-657.
9. Hacyan S. & Plebański J.F., "Some Basic Properties of Killing Spinors", J. Math. Phys. 17, 12(1976), pp. 2203-2206.
10. Penrose R., "A Spinor Approach to General Relativity", Ann. of Phys. 10 (1960), pp. 171-201.
11. Kalotas T. M. & Eliezer C. J., "Petrov Classification: An Elementary Approach", Am. J. Phys., 51 1 (Jan, 1983), pp. 24-28.

2. Ecuaciones Relativistas de Espin. 3/2.

CAPITULO II

LAS ECUACIONES DE ONDA RELATIVISTAS PARA PARTICULAS DE ESPIN 3/2.

Al pasar de una Mecánica Cuántica Clásica a una relativista es necesario, además de extender los objetos fundamentales de la teoría al espacio-tiempo de cuatro dimensiones, tomar en cuenta las modificaciones en los conceptos físicos derivadas de que la velocidad máxima de transmisión de información en una interacción es finita⁽¹⁾.

En Mecánica Cuántica Clásica, el principio de incertidumbre (o relación de dispersión) permite en principio medir con precisión arbitraria y en un intervalo de tiempo arbitrariamente corto cualquiera de las variables dinámicas de una partícula, imponiendo restricciones sólo sobre la precisión en la medida de su variable canónica conjugada correspondiente. Este hecho es la justificación epistemológica para asignarle un significado físico a la función de onda mediante el cual su módulo al cuadrado es la probabilidad de encontrar a la partícula en una vecindad de un punto en el espacio; en un instante dado. El concepto de dicha probabilidad requiere entonces que este punto pueda en principio ser medido con cualquier precisión y rapidez.

Además de estas restricciones, en relatividad existe un límite a la velocidad con que se puede realizar cualquier interacción, lo cual impone nuevas limitaciones fundamentales en las mediciones de las variables físicas de un sistema. En particular puede demostrarse⁽²⁾ que en una Mecánica Cuántica Relativista es, en principio, imposible realizar una medición rápida con precisión arbitraria del momento. Una medida exacta requeriría un intervalo de tiempo infinito para realizarla.

La construcción de los espinores fundamentales de una teoría relativista como realizaciones del grupo de Lorentz incorpora estas nuevas limitaciones a la teoría.

El problema de describir partículas de espines mayores que uno, y en particular $s=3/2$, se remonta a P.A.M. Dirac, que en 1936 propuso las siguientes ecuaciones de onda para una partícula de masa m y espín $3/2$ ⁽³⁾:

$$\begin{aligned} m \phi_{c^{ab}} &= p^{ab} \psi_{c^a} = p^{ab} \psi_{c^b}, \\ m \psi_{c^a} &= p_{ab} \phi_{c^{bc}} = p_{ab} \phi_{c^c}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde ψ_{c^a} y $\phi_{c^{ab}}$ son espinores simétricos y p^{ab} es la imagen espinorial del tetra-momento.

Estas ecuaciones describen adecuadamente una partícula libre, sin embargo, como demostraron Fierz y Pauli⁽⁴⁾, implican inconsistencias inmediatas al acoplarlas mínimamente con un campo electromagnético externo. En el mismo artículo, resolvieron estas dificultades introduciendo de manera "ad hoc" componentes subsidiarias dependientes de la intensidad del campo. Sin embargo este nuevo enfoque introdujo dificultades más sutiles.

Subsecuentemente Rarita y Schwinger (RS)⁽⁵⁾ sugirieron

2. Ecuaciones Relativistas de Espín 3/2.

una formulación alternativa al formalismo de Fierz y Pauli, que utiliza como objetos fundamentales de la teoría biespinores vectoriales. Existen intentos más recientes de construir ecuaciones de onda relativistas para partículas de espín 3/2 que no tengan problemas, que sin embargo han resultado infructuosos. Un resumen de estos intentos puede encontrarse en la cita (5).

Un argumento relativamente sencillo para justificar las ecuaciones 2.1, basado en una interpolación al caso clásico es el siguiente:

En el marco de referencia propio, una partícula de espín 3/2 está descrita por un espinor (en tres dimensiones) totalmente simétrico de rango tres que satisface las propiedades de una función de onda, i.e. es continua en las coordenadas espacio-temporales y es normalizable, por lo que tiende a cero por lo menos tan "rápido" como $1/r$ cuando r tiende a infinito. La extensión correcta de esta teoría a cualquier marco de referencia inercial, debe reducirse por tanto a este caso. Los espinores de la forma ϕ^{abc} , ψ_{abc} , ξ_{abc} y χ^{abc} , (en seguida se verá que estos dos últimos espinores no dan más información) que son simétricos en índices con y sin punto y que satisfacen las condiciones:

$$p^{ab}\psi_{abc}=0, \quad p_{ab}\phi^{abc}=0, \quad (2.2)$$

satisfacen este requisito (espinores de rango mayor también podrían servir pero darían lugar a ecuaciones de orden mayor que 2).

Esto es debido a que en el marco de referencia propio, cada una de las condiciones de simetría requeridas entre cualesquiera dos de sus índices puede expresarse como:

$$\delta^{ab}\psi_{abc}=0, \quad \delta^{ab}\phi_{abc}=0,$$

y puesto que en el marco de referencia propio $p^{ab} \rightarrow m\delta^{ab}$, las condiciones 2.2 se reducen a las anteriores en este marco.

El único operador que puede aparecer en la ecuación de onda de una partícula libre es el operador de tetramomento p^{ab} . La invariancia relativista implica las ecuaciones diferenciales:

$$p^{ab}\psi_{abc}=m\phi_{abc}, \quad p_{ab}\phi^{abc}=m\psi_{abc}. \quad (2.3)$$

Donde m es una constante con dimensiones (no tendría caso proponer una constante distinta para cada ecuación, ya que la diferencia se puede absorber en cualquiera de los dos espinores). Eliminando ϕ en función de ψ en las ecuaciones 2.3 se obtiene:

$$(p^2 - m^2)\phi^{abc}=0, \quad (2.4)$$

de donde es evidente que m es la masa en reposo de la partícula. De hecho, cuando Dirac propone por primera vez el equivalente de la ecuación 2.3 para espín 1/2 (6), requería que se satisficiera la ecuación 2.4. Esto implica necesariamente que la ecuación sea cuadrática en el operador p .

2. Ecuaciones Relativistas de Espín.3/2.

En virtud de las ecuaciones 2.3, las 2.2 implican que los espinores ψ y ϕ en 2.3 son simétricos respecto a ambos tipos de índice, ligando C y B en la primera de las ecuaciones 2.3, y D y A en la segunda, utilizando 2.2:

$$m \phi^{\dot{a}\dot{b}} = m \psi_{\dot{a}\dot{b}} = 0.$$

Si la masa no es cero, se sigue que los dos espinores son simétricos respecto a los índices con y sin punto. Si la masa es cero, esto no se implica, pero para que se reduzca el caso masivo a éste, es necesario exigir simetría también en el caso sin masa.

El par de espinores ψ y χ no provee ninguna información adicional, puesto que las ecuaciones que satisfacen son de la forma de 2.3.

Se llama biespinor al objeto que tiene la forma:

$$(\psi^A) = (\psi^1, \psi^2, \phi_i, \phi_{\dot{i}})^T \quad A=1,2,3,4$$

Con este objeto puede escribirse la ecuación de Dirac para partícula de espín 1/2. El objeto equivalente para describir una partícula de espín 3/2 pertenece a una representación mixta y tiene un índice biespinorial (que en general no se escribirá), y un índice tensorial:

$$(\psi_{\mu}^{\dot{a}\dot{b}}) = g_{\mu\nu}^{\dot{a}\dot{b}} (\psi^{\dot{a}\dot{b}}, \psi^{\dot{c}\dot{d}}, \phi_{i\dot{a}\dot{b}}, \phi_{\dot{i}\dot{a}\dot{b}})^T. \quad (2.5)$$

Con este objeto puede escribirse la ecuación 2.3 como:

$$(\gamma^{\nu} p_{\nu} - m) \psi_{\mu}^{\dot{a}\dot{b}} = 0 \quad (2.6)$$

con la condición equivalente a 2.2: $p^{\mu} \psi_{\mu}^{\dot{a}\dot{b}} = 0$. Las γ^{μ} son matrices de 4x4 llamadas de Dirac, que satisfacen un álgebra de Clifford⁽⁷⁾:

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu},$$

donde se sobreentiende que el lado derecho de la ecuación va multiplicado por la identidad de la representación.

Con este formalismo es relativamente sencillo demostrar que la ecuación construida, junto con sus constricciones representa efectivamente una ecuación de onda para una partícula de espín 3/2. Para encontrar el espectro de espín del espinor de la ecuación 2.6, sólo deben encontrarse los generadores de las rotaciones espaciales infinitesimales J_i del campo. Estos operadores forman un álgebra SU(2) en el marco de referencia propio de la partícula, y el espectro de espín es aquel permitido para $J^{(3)}$.

Bajo una transformación de Lorentz, de un sistema con coordenadas x^{μ} , a uno con coordenadas

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

2. Ecuaciones Relativistas de Espín, 3/2.

el campo se transforma como

$$\psi^M(x) \longrightarrow \psi'^M(x') = \Lambda^M_{\nu} S(\Lambda) \psi^\nu(x),$$

donde es preciso notar que $S(\Lambda)$ no es la matriz B introducida en el capítulo I, sino su correspondiente biespinorial de 4x4:

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} B(\Lambda) & 0 \\ 0 & B^*(\Lambda) \end{pmatrix}.$$

Si la transformación es una rotación espacial por un ángulo infinitesimal ϵ alrededor del eje i , se tiene que:

$$\Lambda^M_{\nu} = \delta^M_{\nu} + \epsilon \epsilon_{ijk} \delta^{Mj} \delta^k_{\nu};$$

$$S(\Lambda) = 1 + (1/2) i \epsilon \begin{pmatrix} g_i & 0 \\ 0 & g_i \end{pmatrix},$$

de forma tal que: $\psi'^M(x') = \psi^M(x) + \epsilon (\epsilon_{ijk} \delta^{Mj} \psi^k(x) + (1/2) i \begin{pmatrix} g_i & 0 \\ 0 & g_i \end{pmatrix} \psi^M)$,

y puesto que el generador de las rotaciones espaciales es $-iJ_i$:

$$J_i \psi^M = -i \epsilon_{ijk} \delta^{Mj} \psi^k + (1/2) \begin{pmatrix} g_i & 0 \\ 0 & g_i \end{pmatrix} \psi^M.$$

$$J_i^2 \psi^M = J_i (J_i \psi^M) = -i \epsilon_{ijk} \delta^{Mj} (-i \epsilon_{ilm} \delta^{Ml} \psi^m + (1/2) \begin{pmatrix} g_i & 0 \\ 0 & g_i \end{pmatrix} \psi^M)$$

$$+ (1/2) \begin{pmatrix} g_i & 0 \\ 0 & g_i \end{pmatrix} (-i \epsilon_{ijk} \delta^{Mj} \psi^k + \begin{pmatrix} g_i & 0 \\ 0 & g_i \end{pmatrix} \psi^M)$$

$$= -\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} \delta^{Mj} \delta^{Ml} \psi^m - i \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} g_i & 0 \\ 0 & g_i \end{pmatrix} \delta^{Mj} \psi^k + (3/4) \psi^M$$

$$= (3 \delta^{Mj} - \delta^{Mj} \delta^{00}) \psi^0 + (3/4) \psi^M - i \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} g_i & 0 \\ 0 & g_i \end{pmatrix} \delta^{Mj} \psi^k,$$

donde se usó que $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jm} \delta_{il} - \delta_{jl} \delta_{im}$. Además, como⁽¹⁰⁾:

$$-i \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} g_i & 0 \\ 0 & g_i \end{pmatrix} = (1/2) [\gamma_j, \gamma_k] = \gamma_j \gamma_k - g_{jk},$$

se obtiene finalmente:

$$J_i^2 \psi^M = (3 \delta^{Mj} - \delta^{Mj} \delta^{00}) \psi^0 + \gamma_j \gamma_k \delta^{Mj} \psi^k - g_{jk} \delta^{Mj} \psi^k + (3/4) \psi^M.$$

La ecuación de eigenvalores $J_i^2 \psi^M = a \psi^M$ puede separarse en los casos $\mu = 0$ y $\mu = j$. En el primero de estos casos:

$$J_i^2 \psi^0 = (3/4) \psi^0 = a \psi^0,$$

y puesto que $a = s(s+1)$ con s el espín de la partícula, $s = 1/2$. Como se pretende describir exclusivamente una partícula de espín

2. Ecuaciones Relativistas de Espín 3/2.

3/2, es necesario que en el marco de referencia propio $\psi^0=0$. El segundo caso se reduce a:

$$(a-15/4) \gamma^j \psi^j + \sum_{k=1}^3 \gamma^k \psi^k = 0, \quad \text{para cada } j=1,2,3.$$

Las soluciones para "a" de esta ecuación son $a=3/4, 15/4$, es decir $s=1/2, 3/2$. Es claro que $s=3/2$ si y sólo si:

$$\sum_{k=1}^3 \gamma^k \psi^k = 0. \quad (2.7)$$

Entonces las condiciones sobre la ecuación 2.6, para que en el marco de referencia propio describa exclusivamente partículas de espín 3/2 son 2.7 y $\psi^0=0$. La generalización de estas condiciones a cualquier marco de referencia está dada por:

$$\gamma^\mu \psi_\mu = 0. \quad (2.8)$$

En efecto, multiplicando 2.6 por γ^μ , y utilizando 2.8, se encuentra que:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu p_\nu \psi_\mu = 0,$$

y del álgebra de Clifford para las $\gamma^{(\nu)}$:

$$2g^{\mu\nu} p_\nu \psi_\mu - \gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu \psi_\mu = 2p^\mu \psi_\mu = 0. \quad (2.9)$$

Puesto que en el marco de referencia propio $p^1=0$, $\psi^0=0$ y se satisface 2.7.

Las ecuaciones 2.9 son precisamente las condiciones de simetría requeridas por las ecuaciones 2.2, y eliminan el término de espín 1/2 en la ecuación de onda. Como se verá más adelante, de acuerdo a lo mencionado por Fierz & Pauli, este término corresponde a una partícula de espín 1/2 con dos veces la masa de la partícula de espín 3/2. Campos que contienen tanto partículas de espín 1/2 como 3/2 no pueden ser cuantizadas de manera consistente con el principio de exclusión de Pauli^(*).

Como se mencionó anteriormente las inconsistencias en las ecuaciones de espín 3/2 sólo se manifiestan al acoplarlas con un campo externo. En el caso de partícula libre todos estos formalismos describen adecuadamente partículas de masa m en el sentido de que son representaciones del grupo de Poincaré.

En adelante se estudiarán más específicamente las inconsistencias de cada ecuación y los intentos que se hicieron por solucionarlas.

Fierz y Pauli fueron los primeros en acoplar la ecuación de Dirac para espín 3/2 con un campo electromagnético externo. Demostraron que al cambiar $p_{A\dot{B}}$ por $\pi_{A\dot{B}} = p_{A\dot{B}} - eA_{A\dot{B}}$, donde e es la carga de la partícula (usualmente la magnitud de la carga del electron), y $A_{A\dot{B}}$ es la imagen espinorial del tetravector potencial del campo electromagnético, se obtenía una restricción algebraica que sobredetermina el problema:

$$F^{AB} \psi_{\dot{A}\dot{B}} = 0, \quad (2.10)$$

2. Ecuaciones Relativistas de Espín 3/2.

donde F_{AB} (y $F_{\dot{A}\dot{B}}$) son los espinores simétricos asociados al tensor antisimétrico del campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ que, como se vio en el primer capítulo, se obtienen de la siguiente manera:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{AB\dot{A}\dot{B}} = g^{\lambda\mu} g^{\nu\rho} F_{\lambda\rho} = \epsilon_{AB} F_{\dot{A}\dot{B}} + \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} F_{AB}.$$

La ecuación 2.10 se obtiene de la siguiente forma. De la relación:

$$\pi_{\dot{A}\dot{B}} \pi^{\dot{C}\dot{D}} - \pi^{\dot{C}\dot{D}} \pi_{\dot{A}\dot{B}} = \delta_{\dot{A}\dot{B}}^{\dot{C}\dot{D}} F_{\dot{A}\dot{B}} + \delta_{\dot{C}\dot{D}}^{\dot{A}\dot{B}} F_{\dot{A}\dot{B}},$$

se cumple que $\pi_{\dot{A}\dot{B}} \pi^{\dot{B}\dot{C}} - \pi^{\dot{B}\dot{C}} \pi_{\dot{A}\dot{B}} = 2F_{\dot{A}\dot{C}}$.

Por otro lado, como en el caso de partícula libre, se satisface

$$\pi_{\dot{A}\dot{B}} \pi^{\dot{B}\dot{C}} + \pi^{\dot{B}\dot{C}} \pi_{\dot{A}\dot{B}} = -2 \pi^2 \delta_{\dot{A}\dot{C}},$$

de donde

$$\pi_{\dot{A}\dot{B}} \pi^{\dot{B}\dot{C}} = -\pi^2 \delta_{\dot{A}\dot{C}} + F_{\dot{A}\dot{C}}. \quad (2.11)$$

Cambiando p por π en las ecuaciones 2.1, y eliminando ϕ en función de ψ , se sigue que:

$$\pi_{\dot{A}\dot{B}} \pi^{\dot{B}\dot{C}} \psi_{\dot{C}} = m^2 \psi_{\dot{A}\dot{B}},$$

y con 2.11

$$-\pi^2 \psi_{\dot{A}\dot{B}} + F_{\dot{A}\dot{B}} \psi_{\dot{C}} = m^2 \psi_{\dot{A}\dot{B}}.$$

Puesto que el lado derecho de esta ecuación es simétrico en A y B, se obtiene la condición 2.10.

La primera propuesta que hicieron para vencer esta dificultad fue simetrizar el lado derecho de las ecuaciones 2.1 respecto de A, B y \dot{A}, \dot{B} respectivamente, lo cual es una restricción más débil sobre el sistema. Sin embargo esto los llevó a una ecuación de onda que no era de segundo orden, incluso en el caso de partícula libre. Además encontraron que no se podía definir una carga positiva definida, lo cual impediría realizar una segunda cuantización consistente con el principio de exclusión⁽³⁾. Esta modificación fue entonces desechada y se mantuvieron las 2.1 para el caso de partícula libre. Entonces, cambiaron de estrategia y propusieron, además de cambiar $p^{\dot{A}\dot{B}}$ por $\pi^{\dot{A}\dot{B}}$, agregar a la ecuación 2.1 nuevos términos (llamados de Pauli) dependientes de la intensidad del campo. Esto resulta en una teoría muy complicada que involucra espinores auxiliares que no representan a la partícula de espín 3/2 (sino que están asociados a una partícula con espín 1/2).

Posteriormente en 1941, W. Rarita y J. Schwinger⁽⁴⁾ propusieron un formalismo alternativo equivalente, que no utiliza estos campos auxiliares. Utilizando un biespinor vectorial como objeto fundamental de la teoría, construyeron un Lagrangeano del cual se obtienen tanto la ecuación como sus restricciones de simetría:

2. Ecuaciones Relativistas de Espín. 3/2.

$$L = \bar{\Psi}_M (\gamma^\nu \partial_\nu + m) \Psi^M - (1/3) \bar{\Psi}_M (\gamma^\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \gamma^\mu) \Psi^\nu + (1/3) \bar{\Psi}_M \gamma^\mu (\gamma^\rho \partial_\rho - m) \gamma_\nu \Psi^\nu. \quad (2.12)$$

Donde $\bar{\Psi} = \gamma^0 \Psi^*$ es el llamado conjugado de Dirac de Ψ (").

En ausencia de campos externos, este Lagrangeano no es único. Pero cuando hay un campo electromagnético, es el único que sirve. La ecuación resultante es:

$$(-\gamma^\nu p_\nu + m) \Psi^M + (1/3) (\gamma^\mu p_\nu + p^\mu \gamma_\nu) \Psi^\nu - (1/3) \gamma^\mu (\gamma^\rho p_\rho + m) \gamma_\nu \Psi^\nu = 0. \quad (2.13)$$

La ecuación 2.13, conocida con el nombre de ecuación de Rarita-Schwinger, es la ecuación más conocida dentro de las ecuaciones de espín 3/2. Esta ecuación, aun cuando permite definir una carga positiva definida, conlleva otros problemas recientemente descubiertos^{(10),(11)}. Las soluciones de 2.13 se propagan a velocidades mayores que la velocidad de la luz para un campo externo arbitrariamente débil. Es más, si es suficientemente intenso, el sistema de ecuaciones diferenciales parciales 2.13 pierde la hiperbolicidad, y por lo tanto se vuelve inadecuado para describir fenómenos ondulatorios.

Por otra parte, W. Hurley⁽¹⁰⁾ propuso una ecuación alterna, cuyas soluciones se propagan causalmente, aunque el formalismo requiere de una métrica (producto interno) que no es positiva definida, lo cual impide hacer una segunda cuantización decente.

De este modo, es posible dividir las ecuaciones existentes para partículas de masa m y espín 3/2 en dos familias caracterizadas por distintos defectos. La primera, a la cual pertenece la ecuación RS, tiene soluciones acausales al acoplarla con un campo electromagnético externo y puede perder la hiperbolicidad en presencia de campos lo suficientemente intensos. La segunda, que tiene soluciones que se propagan causalmente, tiene una carga que no es positiva definida incluso si las partículas tienen energía positiva.

Aunque no se han agotado todas las posibilidades, todo el trabajo realizado apunta a que no puede existir una ecuación de espín 3/2 que no sufra de alguno de los anteriores defectos. Sin embargo, estos problemas están íntimamente ligados al acoplamiento con un campo electromagnético externo. En el caso de una partícula libre las ecuaciones son consistentes. Cabe mencionar que, aunque esto está fuera de los alcances del presente trabajo, dentro del marco de la supersimetría, se han obtenido ecuaciones para espín 3/2 sin problemas.

Para concluir este capítulo, se mencionarán las ecuaciones más importantes para partículas de masa cero en el vacío. La primera de éstas, para espín cero, es la famosa ecuación de Klein-Gordon con $m=0$, que en lenguaje espinorial es:

$$p^\mu p_{\mu 5} \Psi = 0. \quad (2.14)$$

La ecuación para el neutrino, derivada de la ecuación de Dirac para espín 1/2, es:

2. Ecuaciones Relativistas de Espín. 3/2.

$$p^{AB}\lambda_{AB}=0. \quad (2.15)$$

Las ecuaciones para partículas de espín uno, las conocidísimas ecuaciones de Maxwell, son:

$$p^{AB}F_{AB}=0, \quad F_{AB}=F_{(AB)}, \quad (2.16)$$

y la correspondiente ecuación con puntos. Las identidades de Bianchi en el vacío son las ecuaciones para partículas de espín dos:

$$p^{AB}C_{ABCD}=0, \quad C_{ABCD}=C_{(ABCD)}. \quad (2.17)$$

Por analogía con las ecuaciones 2.14-2.17, una ecuación para partículas de espín 3/2 sin masa, puede ser de la forma:

$$p^{AB}\psi_{ABC}=0, \quad \psi_{ABC}=\psi_{(ABC)}. \quad (2.18)$$

Esto viene por inspección, del hecho de que el objeto debe tener tres índices espinoriales y sólo tres índices libres.

Ninguna de las ecuaciones anteriores presenta incongruencias. Nótese también que la ecuación 2.1 no se reduce a la 2.18, al fijar $m=0$. Esta última también será resuelta alrededor de un hoyo negro de Schwarzschild en el presente texto.

Finalmente es necesario considerar la invariancia de norma de la función de onda de la ecuación RS para partícula de espín 3/2 sin masa:

$$\psi_{\mu}^{\cdot} = \psi_{\mu} + \partial_{\mu}\psi, \quad \gamma^{\mu\nu}\partial_{\mu}\psi = 0.$$

Puesto que las derivadas conmutan entre sí (en espacio plano), y conmutan con las γ 's:

$$\gamma^{\nu\mu}\partial_{\nu}\psi_{\mu}^{\cdot} = \gamma^{\nu\mu}\partial_{\nu}\psi_{\mu} + \gamma^{\nu\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}\psi = \gamma^{\nu\mu}\partial_{\nu}\psi_{\mu} + \partial_{\mu}(\gamma^{\nu\mu}\partial_{\nu}\psi) = \gamma^{\nu\mu}\partial_{\nu}\psi_{\mu}.$$

Más adelante se generalizará esta demostración para cualquier espacio vacío.

Las soluciones de la ecuación de RS sin masa, de la forma $\partial_{\mu}\psi$, son entonces triviales, y habrá que demostrar que las que obtendremos no lo son.

2. Ecuaciones Relativistas de Espín.3/2.

REFERENCIAS

1. Lifshitz E.M. et. al.: Quantum Electrodynamics (Landau & Lifshitz Course of Theoretical Physics vol. 4), 2nd edition, Pergamon Press, Oxford, U.K., 1982.
2. Dirac P.A.M., Proc. Roy. Soc. (London) **A155**, 447 (1936).
3. Fierz M. & Pauli W., "On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field", Proc. Roy. Soc. (London) **A173**, 211 (1939).
4. Rarita W. & Schwinger J., "On a Theory of Particles with Half-Integral Spin", Phys. Rev. **60**, 61 (1941).
5. Labonté G., "A Relatively Simple Equation for an Antisymmetric Tensor Spinor Field of Spin 3/2", Il Nuovo Cimento **59A**, N.3 (1980).
6. Dirac P.A.M., The Principles of Quantum Mechanics, 4th edition, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1984.
7. Schweber S.S., Relativistic Quantum Field Theory., Harper & Row, New York, 1964.
8. Velo G. & Zwanziger D., "Propagation and Quantization of Rarita-Schwinger Waves in an External Electromagnetic Potential", Phys. Rev. **186**, 1337 (1969).
9. Darkhosh T., "Is there a solution to the Rarita-Schwinger wave equation in the presence of an external electromagnetic field?", Phys. Rev. **D32**, 12 (1985).
10. Hurley W., "Relativistic Wave Equations for Particles with Arbitrary Spin" Phys. Rev. **D12**, 12 (1971).

3. Manipulación de Ecuaciones en Espacio Curvo.

CAPITULO III.

MANIPULACION DE LAS ECUACIONES PARA PARTICULAS DE ESPIN 3/2 EN CUALQUIER ESPACIO CURVO.

1. Condiciones de Integrabilidad: Restricciones Algebraicas Impuestas por la Curvatura del Espacio sobre las Ecuaciones de Onda.

Para resolver en un espacio curvo las ecuaciones de onda para partículas de espín 3/2 que se introdujeron en el capítulo anterior, es necesario cambiar la derivada común por la derivada covariante en las ecuaciones 2.1 siguiendo los lineamientos del primer capítulo. Posteriormente se trabajará sobre las condiciones de simetría, observando que esta misma generalización a un espacio curvo no lleva a situaciones físicamente inconsistentes.

Debido a que en un espacio curvo las derivadas covariantes en general no conmutan, pero satisfacen relaciones de conmutación que dependen de los objetos que describen la curvatura (ecs. 1.54), existen relaciones algebraicas entre las componentes de las funciones de onda dependientes de estos mismos objetos. Estas constricciones, al reducir el número de componentes independientes de la función de onda, limitan las posibilidades de que puedan tener una interpretación física coherente. Evidentemente, la información de la no conmutatividad de las derivadas ya está implícita en la definición de derivada covariante y por lo tanto las soluciones de la ecuación satisfacen trivialmente estas condiciones. Entonces introducirlas de antemano sólo facilita la integración de las ecuaciones, y proporciona la clave sobre el principio fundamental que asocia el comportamiento ulterior de la función de onda a las características del espacio.

Las ecuaciones de onda para partículas libres de espín 3/2 que se expusieron en el capítulo anterior son, la 2.16 para partícula sin masa y las 2.3 para partícula con masa m , junto con sus condiciones de simetría 2.2:

Para partícula sin masa:

$$\nabla^{ab} \psi_{abc} = 0; \quad (3.1)$$

Para partícula masiva:

$$\begin{aligned} \nabla^{bc} \psi^i_{ab} &= m \phi^i_{ab}, & \nabla^{ab} \psi_{abc} &= 0; \\ \nabla_{bc} \phi^i_{ab} &= -m \psi^i_{ab}, & \nabla_{ab} \phi^{abc} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Las ecuaciones fueron escritas en el espacio de posiciones, cambiando p^{ab} por $i\nabla^{ab}$. Se absorbió una i en ψ^i_{ab} .

Ahora se encontrarán estas relaciones algebraicas, llamadas condiciones de integrabilidad, para la ecuación 3.1 que resulta ser la más sencilla.

Operando la ecuación 3.1 con p :

3. Manipulación de Ecuaciones en Espacio Curvo.

$$\nabla_{CA} \nabla^{NA} \Psi_{NAB} = 0, \quad (3.3)$$

que también puede escribirse como:

$$\epsilon^{NB} \nabla_C \nabla^{NA} \Psi_{NAB} = 0. \quad (3.4)$$

Usando la ecuación 1.17, ésta puede separarse en dos partes, parte simétrica y parte antisimétrica:

$$\epsilon^{NB} [\nabla_{(C} \nabla_{N)} \Psi_{NAB} + (1/2) \epsilon_{CR} \nabla^{PN} \nabla_{PN} \Psi_{NAB}] = 0. \quad (3.5)$$

Ahora entra en juego el ingrediente fundamental de este capítulo, la no conmutatividad de las derivadas (ecs. 1.54):

$$\epsilon^{NB} [6C^N_{CR(B} \Psi_{AB)N} + (1/2) R \delta^N_{(C} \epsilon_{R)(B} \Psi_{AB)N} + (1/2) \epsilon_{CR} \nabla^{PN} \nabla_{PN} \Psi_{NAB}] = 0.$$

Definiendo el D'Alembertiano como:

$$\square \equiv \nabla^{MN} \nabla_{MN},$$

tenemos al desarrollar esta expresión:

$$\begin{aligned} & \epsilon^{NB} [2C^N_{CR(B} \Psi_{AB)N} + 2C^N_{CR(B} \Psi_{BAN} + 2C^N_{CRA} \Psi_{BEN} + \\ & + (1/4) R \delta^N_C \epsilon_{R(B} \Psi_{AB)N} + (1/4) R \delta^N_R \epsilon_{C(B} \Psi_{AB)N} + (1/2) \epsilon_{CR} \square \Psi_{NAB}] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \quad & 4C^{NB}_{C(B} \Psi_{A)NB} + \epsilon^{NB} [(1/4) R \epsilon_{R(B} \Psi_{AB)C} + (1/4) R \epsilon_{C(B} \Psi_{AB)R}] - \\ & - (1/2) \delta^B_C \square \Psi_{NAB} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \quad & 4C^{NB}_{C(A} \Psi_{B)NB} + (1/12) R \epsilon^{NB} [\epsilon_{RS} \Psi_{ABC} + \epsilon_{RS} \Psi_{BAC} + \epsilon_{RA} \Psi_{BSC} + \\ & + \epsilon_{CB} \Psi_{ABR} + \epsilon_{CB} \Psi_{BAR} + \epsilon_{CA} \Psi_{BSR}] - (1/2) \square \Psi_{ABC} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \quad & 4C^{NB}_{C(A} \Psi_{B)NB} + (1/12) R [2 \Psi_{ABC} + \delta^B_S \Psi_{BAC} + \delta^B_A \Psi_{BSC} + \\ & + \delta^B_C \Psi_{ABR}] - (1/2) \square \Psi_{ABC} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{y finalmente } 4C^{NB}_{C(A} \Psi_{B)NB} + (5/12) R \Psi_{ABC} - (1/2) \square \Psi_{ABC} = 0. \quad (3.6)$$

Operando con ϵ^{CA} , los términos simétricos en CA se desvanecen, y queda sólo el término:

$$C^{PQR}_A \Psi_{PQR} = 0. \quad (3.7)$$

La ecuación 3.7 junto con la 3.6, determinan totalmente la solución.

Para obtener las condiciones de integrabilidad sobre la Ψ , de las ecuaciones 3.2, operamos con $\nabla_{P\dot{c}}$ la primera de éstas y utilizamos la segunda:

3. Manipulación de Ecuaciones en Espacio Curvo.

$$\nabla_{\rho\dot{c}}\nabla^{\rho\dot{c}}\psi^{\dot{a}\dot{b}}=m\nabla_{\rho\dot{c}}\phi^{\dot{a}\dot{c}}=-m^2\psi^{\dot{a}\dot{b}},$$

y por lo tanto:

$$\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\nabla^{\dot{c}}\nabla_{\dot{c}}\psi^{\dot{a}\dot{b}}=-m^2\psi^{\dot{a}\dot{b}}, \quad (3.8)$$

Separando las partes, simétrica y antisimétrica, y con ayuda de la ecuación 1.54:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\nabla^{\dot{c}}\nabla_{\dot{c}}\psi^{\dot{a}\dot{b}} &= \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}[\nabla^{\dot{c}}(\epsilon_{\dot{c}\dot{d}}\nabla_{\dot{d}}\psi^{\dot{a}\dot{b}}) + (1/2)\epsilon_{\dot{c}\dot{d}}\nabla^{\dot{c}}\nabla_{\dot{d}}\psi^{\dot{a}\dot{b}}] \\ &= \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}[2C_{\dot{c}\dot{d}\dot{e}}\psi^{\dot{a}\dot{b}} + 4C^{\dot{m}\dot{n}}_{\dot{c}\dot{d}}\psi_{\dot{m}\dot{n}} + (R/3)\delta^{\dot{m}\dot{n}}\epsilon_{\dot{c}\dot{d}}\psi_{\dot{m}\dot{n}} + \\ &+ (1/2)\epsilon_{\dot{c}\dot{d}}\square\psi^{\dot{a}\dot{b}}] = \\ &= 2(C_{\dot{c}\dot{d}\dot{e}}\psi^{\dot{a}\dot{b}} + C^{\dot{m}\dot{n}}_{\dot{c}\dot{d}}\psi_{\dot{m}\dot{n}}) - (1/2)\square\psi^{\dot{a}\dot{b}} + \\ &+ (R/12)\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}[\epsilon_{\dot{c}\dot{d}}\psi_{\dot{c}\dot{d}} + \epsilon_{\dot{e}\dot{f}}\psi_{\dot{e}\dot{f}} + \epsilon_{\dot{g}\dot{h}}\psi_{\dot{g}\dot{h}} + \epsilon_{\dot{i}\dot{j}}\psi_{\dot{i}\dot{j}}] = \\ &= -m^2\psi^{\dot{a}\dot{b}}, \end{aligned}$$

El término que multiplica al escalar de Ricci es simplemente un tercio de $\psi_{\dot{a}\dot{b}}$, por lo que el resultado final de esta ecuación es:

$$2C_{\dot{c}\dot{d}\dot{e}}\psi^{\dot{a}\dot{b}} + 2C^{\dot{m}\dot{n}}_{\dot{c}\dot{d}}\psi_{\dot{m}\dot{n}} + (R/3)\psi^{\dot{a}\dot{b}} - (1/2)\square\psi^{\dot{a}\dot{b}} = -m^2\psi^{\dot{a}\dot{b}}. \quad (3.9)$$

Multiplicando por el espinor métrico antisimétrico $\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}$:

$$C^{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}}\psi_{\dot{a}\dot{b}} = 0, \quad (3.10)$$

que junto con la ecuación 3.9 determina totalmente la ψ .

Repetiendo el análisis anterior, pero empezando con la segunda de las ecuaciones 3.2 se obtiene la ecuación adjunta de la 3.10:

$$C^{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}}\phi_{\dot{a}\dot{b}} = 0. \quad (3.11)$$

Esta, junto con la ecuación adjunta de 3.9, determinan totalmente la ϕ .

Dado que $C_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}}$, $C^{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}}$ dependen únicamente de la métrica y no son operadores diferenciales, las relaciones 3.7, 3.10 y 3.11 muestran claramente como la curvatura determina las condiciones algebraicas sobre las funciones de onda. Estas ecuaciones valen en cualquier espacio, y posteriormente se regresará a ellas para estudiar su comportamiento en un espacio-tiempo con métrica de Schwarzschild.

2. Simetría de las Ecuaciones y Partícula de Espín 1/2.

En el segundo capítulo se obtuvo el espectro de espín del espinor de la ecuación 3.2, construyendo el operador $J^{\dot{a}\dot{b}}$ a partir del generador de las rotaciones espaciales en el marco de

3. Manipulación de las Ecuaciones en Espacio Curvo

referencia propio de la partícula. Nótese que no puede hacerse lo equivalente para la ecuación 2.16, pues como se trata de una partícula sin masa no existe este marco de referencia. Sin embargo, es evidente que su espinor fundamental es de la misma representación pues sólo difiere en que los tres índices son sin punto, y por lo tanto representa una partícula de espín 3/2.

En el mismo capítulo se obtuvo que, para eliminar un campo asociado de espín 1/2 en la ecuación RS, es necesario introducir condiciones subsidiarias, que al generalizar a cualquier marco de referencia equivalen a las condiciones de simetría. Se mencionó también el resultado de Fierz y Pauli según el cual, si se ignoran las condiciones de simetría, aparece una partícula asociada de espín 1/2 y con masa del doble de la partícula de espín 3/2. Esto se obtiene utilizando el formalismo de las dos secciones previas.

Eliminar las condiciones de simetría en las primeras ecuaciones de 3.2 es equivalente a separar las ecuaciones en parte simétrica y parte antisimétrica, esta última proporcional al espinor métrico antisimétrico, mientras que ψ y ϕ siguen siendo simétricos:

$$\begin{aligned} \nabla^{\dot{a}\dot{b}} \psi^{\dot{c}}_{\dot{m}\dot{n}} &= \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \lambda_{\dot{a}+m} \phi_{\dot{a}\dot{b}}, & \phi_{\dot{a}\dot{b}} &= \phi_{\dot{a}(\dot{b})}; \\ \nabla_{\dot{a}\dot{b}} \phi_{\dot{c}}^{\dot{d}} &= \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \mu^{\dot{d}-m} \psi^{\dot{d}}_{\dot{a}\dot{b}}, & \psi^{\dot{d}}_{\dot{a}\dot{b}} &= \psi^{\dot{d}}_{(\dot{a}\dot{b})}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Operando la primera de las ecuaciones 3.12 con $\nabla_{\dot{a}\dot{b}}$:

$$\epsilon^{\dot{c}\dot{d}} \nabla_{\dot{a}\dot{b}} \nabla_{\dot{c}\dot{d}} \psi^{\dot{e}}_{\dot{m}\dot{n}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \nabla_{\dot{a}\dot{b}} \lambda_{\dot{a}+m} \nabla_{\dot{b}\dot{d}} \phi_{\dot{a}\dot{b}}, \quad (3.13)$$

y utilizando la segunda se obtiene:

$$-\epsilon^{\dot{c}\dot{d}} \nabla_{\dot{a}\dot{b}} \nabla_{\dot{c}\dot{d}} \psi^{\dot{e}}_{\dot{m}\dot{n}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \nabla_{\dot{a}\dot{b}} \lambda_{\dot{a}+m} \epsilon_{\dot{b}\dot{d}} \mu^{\dot{d}-m} \psi^{\dot{d}}_{\dot{a}\dot{b}}. \quad (3.14)$$

Separando el lado izquierdo de esta expresión en parte simétrica y parte antisimétrica, como siempre con la ecuación 1.17:

$$\epsilon^{\dot{m}\dot{n}} [\nabla^{\dot{a}\dot{b}} \nabla_{\dot{c}\dot{d}} \psi^{\dot{e}}_{\dot{m}\dot{n}} + \epsilon_{\dot{b}\dot{c}} \square \psi^{\dot{e}}_{\dot{m}\dot{n}}],$$

y desarrollando con las ecuaciones 1.54, con $q=1/2$ y $p=1$, se obtiene un resultado similar al obtenido en la sección 3-1:

$$\begin{aligned} 2C^{\dot{m}\dot{n}\dot{a}\dot{b}} \psi^{\dot{c}}_{\dot{m}\dot{n}} + 2C^{\dot{m}\dot{n}\dot{d}\dot{e}} \psi^{\dot{f}}_{\dot{m}\dot{n}} + (R/3) \psi^{\dot{d}\dot{e}}_{\dot{a}\dot{b}} - 1/2 \square \psi^{\dot{d}\dot{e}}_{\dot{a}\dot{b}} &= \\ = -\nabla_{\dot{a}\dot{b}} \lambda_{\dot{a}+m} \epsilon_{\dot{b}\dot{d}} \mu^{\dot{d}+m} \psi^{\dot{d}}_{\dot{a}\dot{b}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

El resultado análogo para la segunda de las ecuaciones 3.12 es:

$$\begin{aligned} 2C^{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} \phi_{\dot{a}\dot{b}} + 2C^{\dot{a}\dot{b}\dot{e}\dot{f}} \phi_{\dot{a}\dot{b}} + (R/3) \phi_{\dot{c}\dot{d}} - 1/2 \square \phi_{\dot{c}\dot{d}} &= \\ = \nabla_{\dot{a}\dot{b}} \mu^{\dot{a}+m} \epsilon^{\dot{b}\dot{d}} \lambda_{\dot{b}+m} \phi_{\dot{c}\dot{d}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Operando la ecuación 3.15 con $\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}$ y la 3.16 con $\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$, se

3. Manipulación de las Ecuaciones en Espacio Curvo

obtienen finalmente las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2C^{\alpha\beta\gamma\delta}\psi_{;\alpha\beta} &= -\nabla^{\alpha\beta}\lambda_{\alpha}-2m\mu^{\beta}, \\ 2C^{\alpha\beta\gamma\delta}\phi_{;\alpha\beta} &= \nabla_{\alpha\beta}\mu^{\alpha}-2m\lambda_{\beta}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Estas ecuaciones son la ecuación de Dirac para partícula de espín 1/2 y masa 2m, con una fuente que depende de la métrica y de la función de onda de la partícula de espín 3/2. Esto es realmente muy importante pues la existencia de fuentes de partículas de espín 1/2 implicaría que si uno exige simetría de la ecuación de s=3/2 a t=0, esta condición puede no conservarse en el tiempo, lo cual genera una situación absurda en la que la métrica y el campo de espín 3/2 están generando partículas de espín 1/2. Como mencionan Fierz y Pauli, estos campos mixtos además implican problemas con el principio de exclusión en la segunda cuantización. Al considerar la simetría, las fuentes desaparecen y por lo tanto si inicialmente no hay partículas de espín 1/2 no las habrá nunca.

Concluimos entonces que la generalización adecuada -en el sentido de que solo describa partículas de espín 3/2- de las ecuaciones 2.3 para una partícula de espín 3/2 a un espacio curvo, implica solamente cambiar las derivadas por derivadas covariantes, incluyendo las ecuaciones 2.2. Ahora es pertinente aclarar que no se está tomando en cuenta el efecto del campo de partículas de espín 3/2 sobre la curvatura del espacio; en este sentido diremos que estamos considerando el problema solo a primer orden.

3. Invariancia de Norma de la Ecuación RS sin Masa en Espacio Curvo y Vacío.

En el segundo capítulo se demostró que existe una transformación de norma que deja invariante la ecuación RS sin masa en espacio plano. Ahora se demostrará esto mismo en un espacio vacío y curvo en general. Se verá que en un espacio no vacío la demostración no es válida, por lo que no existe esta invariancia de norma. Esta demostración se hará en la representación espinorial, como en las secciones previas, utilizando el formalismo introducido en el capítulo I.

La transformación de norma mencionada, en este formalismo es:

$$\psi^{\dot{a}bc} \rightarrow \psi^{\dot{a}bc} = \psi^{\dot{a}bc} + \nabla^{\dot{a}}\lambda_c,$$

con la condición de que λ_c satisfaga la ecuación de Dirac sin masa:

$$\nabla^{\dot{a}}\lambda_c = 0.$$

La ecuación de RS es entonces:

$$\begin{aligned} \nabla^{c\dot{a}}\psi^{\dot{a}bc} &= \nabla^{c\dot{a}}\nabla^{\dot{a}}\lambda_c = \epsilon^{bc}\nabla^{\dot{a}}\nabla_{\dot{a}}\lambda_c = \\ &= \epsilon^{bc}[\nabla^{\dot{a}}\nabla_{\dot{a}} + \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\nabla^{\dot{a}}\nabla^{\dot{b}} + \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\nabla^{\dot{a}}\nabla_{\dot{b}}]\lambda_c. \end{aligned}$$

3. Manipulación de las Ecuaciones en Espacio Curvo

El primer término del lado derecho de esto es cero por la ecuación de Dirac para λ_c . Utilizando las ecuaciones 1.54, con $p=1/2$ y $q=0$, el lado derecho de la igualdad queda:

$$-2C^{\kappa\sigma\alpha}\lambda_{\kappa} + 2\epsilon^{\sigma\alpha}C^{\kappa\sigma}\lambda_{\kappa} + (R/6)\epsilon^{\kappa\sigma}\delta^{\alpha\kappa}g^{\kappa(\sigma)}\lambda_{\kappa}.$$

Por la simetría del espinor de Weyl, el segundo término de esta expresión es cero, y en el caso particular del espacio vacío $C_{\alpha\beta\gamma\delta}=R=0$, por lo que:

$$\nabla^{\sigma\alpha}\psi'_{\sigma c} = \nabla^{\sigma\alpha}\psi_{\sigma c} = 0.$$

El caso que resolveremos explícitamente, la métrica de Schwarzschild, es espacio vacío, por lo que habrá que probar que las soluciones obtenidas no sean triviales, i.e que no sean de la forma:

$$\psi'_{\sigma c} = \nabla'_{\sigma}\lambda_c.$$

CAPITULO IV

LA METRICA DE SCHWARZSCHILD Y LOS HOYOS NEGROS.

1. Construcción de la Métrica.

La métrica de Schwarzschild describe el campo gravitacional en el espacio vacío alrededor de una distribución esféricamente simétrica de masa (esto incluye pulsaciones esféricamente simétricas⁽¹⁾), y como tal debe cumplir con ciertas condiciones generales que incluyen la simetría esférica, proveniente de la simetría de la distribución de masa, y un comportamiento asintótico que tienda al del espacio plano de Minkowski. Puesto que aun bajo pulsaciones esféricamente simétricas la distribución de masa mantiene su simetría, el campo gravitacional descrito por una métrica de Schwarzschild será siempre estático (si tiene momento angular distinto de cero, está descrito por una métrica de Kerr-Newman y es estacionario). Esto es análogo al caso Newtoniano, donde el potencial gravitacional de una distribución esféricamente simétrica de masa M es M/r independientemente de las fluctuaciones radiales que ésta sufra.

Matemáticamente esto es equivalente a que el elemento de arco al cuadrado (ds^2) no dependa de t y dependa de las coordenadas espaciales y sus diferenciales solamente a través de los invariantes ante rotaciones (escalares de $O(3)$): $dx^i dx_i$, $x^i dx_i$, y $x^i x_i$.

La forma más general del elemento de arco en coordenadas esféricas (r, θ, φ) es entonces²:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -F(r) dt^2 + 2rE(r) dt dr + r^2 D(r) dr^2 + C(r) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.1)$$

Para que la expresión anterior quede en su forma estándar, es necesario hacer los cambios de variable:

$$t' = t + @ (r); \quad r'^2 = C(r) r^2,$$

en donde $@$ es una función arbitraria de r . Esto permite eliminar los términos no diagonales de la métrica fijando:

$$d@/dr = -rE(r)/F(r),$$

y la métrica queda:

$$ds^2 = -B(r') dt'^2 + A(r') dr'^2 + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.2)$$

$$\text{donde } B(r') = F(r) \quad \text{y} \quad A(r') = (1 + G/C) [1 + (r/2C) dC/dr]^{-2},$$

$$\text{con } G(r) = r^2 (D + E^2/F).$$

De ahora en adelante omitiremos las primas en r y t , y de este modo las componentes distintas de cero del tensor métrico

4. Métrica de Schwarzschild

son:

$$g_{00} = -B(r), \quad g_{11} = A(r), \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta,$$

donde las funciones $A(r)$ y $B(r)$ están determinadas por las ecuaciones de Einstein para el campo.

Puesto que el espacio debe reducirse asintóticamente al espacio plano de Minkowski (cuando r es muy grande) cuya métrica en coordenadas esféricas es:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.3)$$

$$\text{tendremos} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1. \quad (4.4)$$

Además es necesario considerar el límite Newtoniano de la métrica, que en coordenadas esféricas es:

$$ds^2 = -(1+2\theta)dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.5)$$

donde $\theta = -M/r$ es el potencial Newtoniano. Nótese que en el límite en que $r \gg M$ esto se reduce a la métrica de Minkowski. Puesto que la trayectoria de una partícula en un campo gravitatorio es una geodésica, es decir una trayectoria para la cual el elemento de arco "s" entre dos puntos cualesquiera sea un extremal:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} (-ds^2)^{1/2} = \int_{t_1}^{t_2} (1+2\theta - v^2)^{1/2} dt \approx \int_{t_1}^{t_2} (1+\theta - 1/2v^2) dt,$$

ya que θ y v^2 son mucho menores que $c^2=1$. Hay que aclarar que el signo en el radical del primer integrando proviene de que la partícula se mueve a una velocidad menor que la de la luz y por lo tanto ds^2 es negativa. Al variar esto con respecto a la trayectoria se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes al Lagrangeano por unidad de masa:

$$L/m = -1 + 1/2v^2 - \theta.$$

Salvo por una constante sin importancia, éste es el Lagrangeano correspondiente al movimiento de una partícula en un campo gravitatorio Newtoniano, lo cual justifica la elección de la métrica en esta aproximación. Este resultado es interesante puesto que permite contemplar a la gravitación de Newton como una curvatura del espacio.

Las ecuaciones de Einstein son:

$$R_{\alpha\beta} - (1/2)g_{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (4.6)$$

donde $T_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía momento que contiene todas las fuentes de energía y masa en el espacio. En el vacío este tensor es cero, y tomando la traza de las ecuaciones 4.6 ($\text{Tr}[g_{\alpha\beta}] = g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = 4$) se obtiene que $R=0$, por lo que la ecuación que queda por resolver es:

$$R_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.7)$$

4. Métrica de Schwarzschild

Para resolver explícitamente la métrica, es necesario construir los símbolos de Christoffel de segunda especie (ver definición en el capítulo I) para la métrica 4.2, y con ellos obtener las componentes del tensor de Ricci, que son:

$$R_{11} = B''(r)/2B(r) - 1/4(B'(r)/B(r)) [A'(r)/A(r) + B'(r)/B(r)] - A'(r)/rA(r), \quad (a)$$

$$R_{22} = -1 + (r/2A) [-A'/A + B'/B] + 1/A, \quad (b) \quad (4.8)$$

$$R_{33} = \text{sen}^2\theta R_{22}, \quad (c)$$

$$R_{00} = -B''/2A + 1/4(B'/A) [A'/A + B'/B] - B'/rA, \quad (d)$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{para } \mu \neq \nu. \quad (e)$$

De aquí resulta evidente que en 4.7 solamente es necesario ocuparse de la diagonal de $R_{\mu\nu}$. Sumando 4.8(a) y (d), y usando 4.7 se obtiene:

$$B'/B = -A'/A, \quad \text{o} \quad A(r)B(r) = \text{constante};$$

debido a 4.4 esta constante debe ser uno y por lo tanto:

$$A(r) = B(r)^{-1}. \quad (4.9)$$

Las ecuaciones 4.8 sobrevivientes, junto con 4.9 implican:

$$R_{22} = -1 + rB' + B = 0, \quad (4.10)$$

$$R_{11} = B''/2B + B'/rB = R'_{22}/2rB = 0.$$

Por lo que $R_{22} = 0$ implica que $R_{11} = 0$. La solución de 4.10 es entonces:

$$B(r) = 1 + (\text{constante}/r).$$

Utilizando la ecuación 4.5 para fijar la constante, se obtiene finalmente:

$$B(r) = 1 - 2M/r \quad \text{y} \quad A(r) = (1 - 2M/r)^{-1},$$

por lo que la métrica es:

$$ds^2 = -(1 - 2M/r) dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (4.11)$$

Esta solución fue obtenida por primera vez en 1916 por K. Schwarzschild.

2. Los Hoyos Negros.

2.1) La métrica de Schwarzschild en relación con un hoyo negro.

4. Métrica de Schwarzschild

La expresión 4.11 es singular en $r=2M$, pues en este caso $g_{00}=0$ y g_{11} diverge. Esta singularidad no está asociada necesariamente a alguna singularidad del espacio-tiempo; se debe exclusivamente al sistema de coordenadas utilizado. Un ejemplo de este tipo de patología introducida por la elección del sistema coordenado es el de los desplazamientos azimutales en $\theta=0$ sobre la superficie de una esfera. En esta situación $g_{33}=0$ por lo que el sistema de coordenadas es patológico alrededor de $\theta=0$, lo cual no implica que el espacio lo sea.

Para saber si la singularidad en $r=2M$ es o no real, es necesario saber que sucede desde el marco de referencia de un observador que cae hacia ella. Si el tiempo propio que tarda en llegar a la superficie $r=2M$ y las fuerzas de marea que siente ahí no son infinitos, podremos concluir que la singularidad no es física sino debida al sistema de coordenadas.

Un cálculo tedioso⁽³⁾ lleva a que la trayectoria de este observador en el espacio tiempo está dada por:

$$\tau = -(4M/3) (r/2M)^{3/2} + cte; \quad (4.12)$$

$$t = -(4M/3) (r/2M)^{3/2} - 4M(r/2M)^{1/2} + \ln[(r/2M)^{1/2} + 1] / [(r/2M)^{1/2} - 1] + cte,$$

donde τ es el tiempo propio del observador.

Mientras que el tiempo requerido para llegar a $r=2M$, medido en el marco de referencia del observador, es finito, el mismo tiempo t medido en un sistema de referencia exterior es infinito:

$$r/2M = 1 - (\tau + cte)/2M, \quad r \text{ cerca de } 2M;$$

$$r/2M = 1 + cte(\exp[-t/2M]), \quad t \rightarrow \infty.$$

Desde luego el tiempo relevante es el propio, de manera que sí puede llegarse a la "singularidad" en un tiempo finito. Aun así es curioso que en un marco de referencia externo se mida un tiempo infinito. Esto ya indica que $r=2M$ es una superficie peculiar que como tal requiere de un distintivo: el evento horizonte; también llamado horizonte de eventos, o simplemente horizonte.

En cuanto a las fuerzas de marea, éstas están determinadas por las componentes del tensor de Riemann en el marco de referencia del observador. De la relación entre el tensor de Riemann y el de Weyl, se ve que en el vacío son iguales, y como se verá en el próximo capítulo este último es inversamente proporcional a r^3 , por lo que las fuerzas de marea son finitas sobre el horizonte. Entonces, si la masa del observador es lo suficientemente grande no será despedazado por ellas (en realidad su masa debería ser mayor que mil veces la del hoyo para no resultar destrozado⁽³⁾).

Matemáticamente se observa que el tensor de Riemann, en el marco de referencia del observador que cae, no diverge en el horizonte, mientras que sí lo hace en la singularidad real $r=0$; por lo que la superficie $r=2M$ no es físicamente singular (se dice que la singularidad es sólo aparente). De esta manera,

4. Métrica de Schwarzschild

debe existir una transformación de coordenadas tal que se elimine esta singularidad no física.

Esta transformación existe y no es única; Eddington (1924) y Finkelstein (1958)⁽³⁾ propusieron dos de éstas, avanzada y retardada respectivamente:

$$v=t+r^*; \quad r=r \quad \text{y} \quad w=t-r^*; \quad r=r \quad (4.13)$$

en donde r^* es la coordenada definida por Regge-Wheeler⁽⁴⁾:

$$r^* \equiv \int (1-2M/r)^{-1} dr = r + 2M \ln[r/2M - 1]. \quad (4.14)$$

Donde se ha elegido la constante de integración de manera que r^* tienda a $-\infty$ en $r=2M$. Cuando $r \gg 2M$, $r^* \sim r$.

En la transformación de Eddington y Finkelstein (EF), $v=cte$ y $w=cte$ describen geodésicas nulas entrantes y salientes radialmente de $r=2M$. Con la primera de estas transformaciones (la avanzada), la métrica queda⁽⁴⁾:

$$ds^2 = -(1-2M/r)dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (4.15)$$

Esta es no singular y analítica en la región $0 < r < \infty$, y $r=2M$ es una superficie en la que t es infinito. La métrica presenta la característica de no ser simétrica ante inversiones en el tiempo y es por esto que se introduce la transformación retardada, bajo la cual la métrica se transforma en:

$$ds^2 = -(1-2M/r)dw^2 - 2dwdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (4.16)$$

Estas dos métricas describen el mismo espacio externo (isométrico con el espacio de Schwarzschild), pero diferentes regiones internas (r menor o igual que $2M$). La primera describe un espacio con una membrana unidireccionalmente permeable en $r=2M$ que no permite salir geodésicas nulas o de tipo tiempo y que obliga a que cualquiera que atraviere la membrana desde fuera llegue a la superficie de la distribución de masa. La segunda describe un espacio inverso, es decir una membrana que es permeable en la otra dirección del tiempo: no permite entrar geodésicas nulas o de tipo tiempo, permitiendo salir todas las geodésicas causales. Al primero de estos objetos se le llama hoyo negro y al segundo hoyo blanco. Esto puede verse en las gráficas I y II.

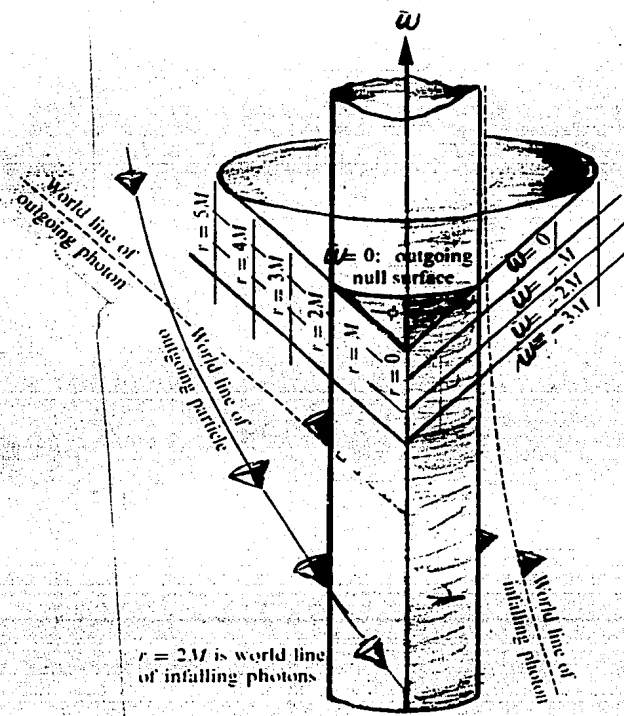
Si se hacen ambas transformaciones simultáneamente la métrica recupera la simetría en el tiempo. A la transformación resultante se le llama de Kruskal-Szekeres⁽⁵⁾, y se construye utilizando las dos coordenadas, adelantadas y retrasadas 4.13. El primer paso es combinarlas directamente:

$$ds^2 = -(1-2M/r)dvdw + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (4.17)$$

donde r está definida implícitamente por:

$$(1/2)(v-w) = r^* = r + 2M \ln[r/2M - 1].$$

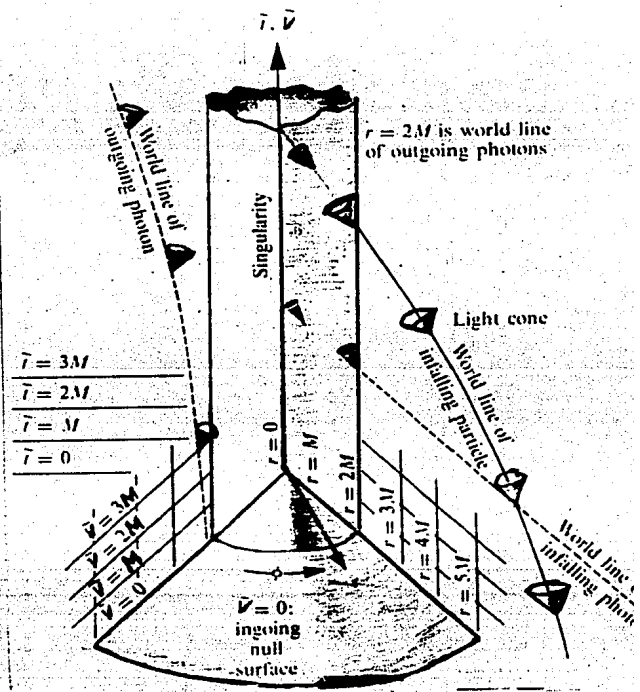
4. Métrica de Schwarzschild



GRAFICA I

Coordenada adelantada de Eddington-Finkelstein ($\theta = \pi/2$). Las superficies de $v=cte$ son superficies nulas entrantes.

Obtenidas de la referencia (3), pp. 829-30.



GRAFICA II

Coordenada atrasada de Eddington-Finkelstein. Las superficies de $w=cte$ son superficies nulas salientes.

4. Métrica de Schwarzschild

A partir de aquí, se pretende llegar a una métrica que tenga la forma de la de Minkowski, para lo que aplicaremos la transformación más general de coordenadas que preserve la forma 4.17:

$$w' = w'(w); \quad v' = v'(v),$$

donde w' y v' son funciones arbitrarias de tipo C^1 . 4.17 queda:

$$ds^2 = -(1 - 2M/r) (dv/dv') (dw/dw') dv' dw' + r^2 d\Omega^2, \quad (4.18)$$

donde $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2$.

Para reducir esto a la forma correspondiente al espacio-tiempo de Minkowski se define:

$$x' = (1/2)(v' - w'); \quad t' = (1/2)(v' + w').$$

La métrica toma la forma:

$$ds^2 = F^2(t', x') (-dt'^2 + dx'^2) + r^2(t', x') d\Omega^2.$$

La elección de las funciones v' y w' presentan un nuevo grado de libertad; para cada una de ellas se tiene una $F(t', x')$ distinta cuya elección deja invariante la métrica. La elección de Kruskal fue⁽⁴⁾:

$$v'(v) = \exp[v/4M]; \quad w'(w) = -\exp[-w/4M],$$

de donde resulta que $F^2 = (32M^2/r) \exp[-r/2M]$, y r está determinada implícitamente por:

$$(t'^2 - x'^2) = -(r/2M - 1) \exp(r/2M). \quad (4.19)$$

Finalmente la métrica de Kruskal-Szekeres queda:

$$ds^2 = (32M^2/r) \exp[-r/2M] (-dt'^2 + dx'^2) + r^2 d\Omega^2. \quad (4.20)$$

En función de r y t , las coordenadas de Kruskal-Szekeres son⁽⁵⁾:

$$\left. \begin{aligned} x' &= (r/2M - 1)^{1/2} \exp[r/4M] \cosh(t/4M), \\ t' &= (r/2M - 1)^{1/2} \exp[r/4M] \sinh(t/4M); \end{aligned} \right\} r \text{ mayor que } 2M$$

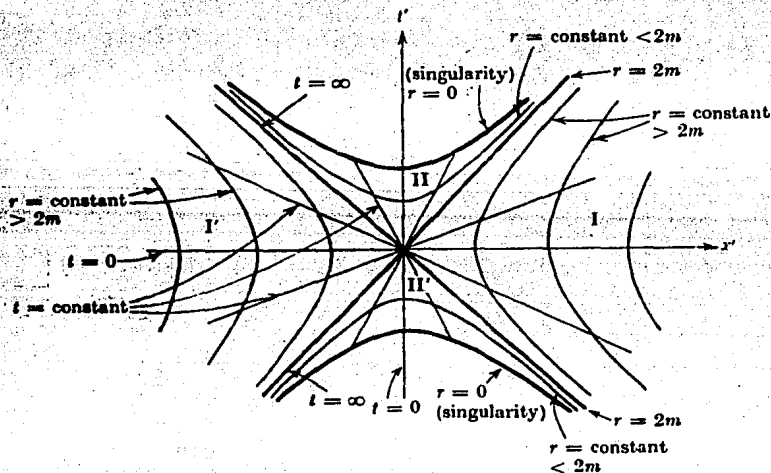
$$\left. \begin{aligned} x' &= (1 - r/2M)^{1/2} \exp[r/4M] \sinh(t/4M), \\ t' &= (1 - 2M/r)^{1/2} \exp[r/4M] \cosh(t/4M). \end{aligned} \right\} r \text{ menor que } 2M$$

La singularidad aparente en la métrica 4.11 en $r=2M$ desaparece en 4.20. Este horizonte se transforma en las rectas $x' = \pm t'$. La región definida por $x' > |t'|$ es isométrica a la región de la solución de Schwarzschild para $r > 2M$ por lo que

4. Métrica de Schwarzschild

describe el mismo espacio. La región definida por $x' > -t'$ es isométrica a la extensión avanzada de Eddington-Finkelstein, mientras que la región definida por $x' > t'$ es isométrica a la extensión retardada. También aparece una región definida por $x' < -|t'|$ que también es isométrica a la solución exterior de Schwarzschild. Esta región, como la de $x' > |t'|$, son espacios asintóticamente planos que están ubicados en lados opuestos del llamado "puente de Einstein-Rosen"³. Esto condujo a que Wheeler propusiera el concepto de "agujero-gusano", que entendía el hoyo negro como una puerta hacia otro universo (i.e., las partículas que siguen geodésicas hacia $r=0$ nunca alcanzan $r < 2M$, sino que cruzan hacia el otro espacio.) A partir de este resultado, Wheeler propuso que la masa fuera solamente una peculiaridad en la topología del espacio. Sin embargo la transformación de Kruskal-Szekeres dió al traste con esta hipótesis⁽⁴⁾.

En el plano (t', x') , la luz emitida radialmente tiene como líneas de universo las rectas $x' = \pm t' + cte$ por lo que la apertura del cono de luz es de 90° en todos los puntos del plano. Además la singularidad real de $r=0$ se transforma en dos singularidades: las hipérbolas $t' = \pm(1+x'^2)^{1/2}$. Las superficies $t=cte$ son rectas de pendiente ± 1 y las superficies $r=cte$ son hipérbolas⁽⁴⁾.



GRAFICA III

Diagrama de Kruskal: muestra las regiones asintóticamente planas I y I', y las regiones II y II' para las cuales $r < 2M$. Obtenido de la referencia (4), p. 154.

4. Métrica de Schwarzschild

En la gráfica III se ve que las líneas de universo que no son de tipo espacio no pueden pasar de la región I a la I', ya que están obligadas a pasar por la singularidad real en $r=0$. Lo mismo sucede en el paso de I' a I. Entonces para pasar de uno a otro universo, una partícula tendría que tener una velocidad mayor que la de la luz. Es matemáticamente claro en la expresión 4.20 que puede existir una geodésica suave que una dos eventos en lados opuestos del horizonte; esto termina por confirmar el argumento anterior pues no ocurre nada extraordinario al cruzar esta superficie.

Resulta entonces que la imagen correcta de las regiones de la gráfica es la siguiente: La región II es el interior del hoyo negro y la II' es el interior del hoyo blanco, mientras que las regiones I y I' están desconectadas.

Reuniendo toda la información anterior, se puede hacer un sumario de las características esenciales que definen un hoyo negro⁽⁷⁾:

"Un hoyo negro es un espacio-tiempo asintóticamente plano y estacionario que satisface las ecuaciones de campo de Einstein para el vacío. Estas dividen al espacio tridimensional en dos regiones separadas: una región exterior y una interior separadas por una superficie bidimensional C' convexa -"horizonte"- de tal forma que ningún punto en el interior se puede comunicar con el espacio exterior."

2.ii) Los parámetros de un hoyo negro.

A la fecha, el proceso que mejor se conoce para la formación de hoyos negros es el colapso gravitacional de una estrella vieja (podría elucubrarse sobre su posible presencia desde el origen del universo, sin embargo esta suposición excluye la posibilidad de atacar el problema con la física conocida pues al ser éste un evento singular, no sabemos como eran las leyes de la naturaleza entonces). Un hoyo blanco no se puede formar por colapso gravitacional pues no puede pasar materia del exterior al interior del horizonte de eventos. Por esto es sumamente improbable que exista un objeto de estas características.

En cuanto a la formación de un hoyo negro, como la superficie $r=2M$ no presenta ninguna singularidad real no hay ningún impedimento para que una estrella rebase, en su contracción gravitacional, este radio. Una vez dentro el colapso es inevitable, ya que las líneas de universo de las partículas que constituyen la estrella no tienen más alternativa que acercarse a la singularidad $r=0$. Nótese que para describir correctamente el colapso gravitacional de una estrella real es necesario tomar en cuenta la contribución de la luz que emite al tensor de energía-momento. Sin embargo la solución de Schwarzschild es una muy buena aproximación⁽⁸⁾.

Ahora, las partículas constituyentes de la estrella en colapso, y la estrella misma, tienen en general los más variados parámetros, i.e. masa, espín, carga, momento angular orbital, etc., por lo que se esperaría que, en función de éstos, un hoyo negro tendría un comportamiento sumamente complejo. En este

4. Métrica de Schwarzschild

contexto, la métrica de Schwarzschild es una situación sumamente simplificada en donde no se consideran ninguno de estos parámetros y se supone además un colapso esféricamente simétrico. Sin embargo Werner Israel demostró en 1967 que la única solución de las ecuaciones de Einstein que corresponden a un agujero negro estático es la de Schwarzschild. En 1968 Israel completó su teorema:

"Cualquier hoyo negro estático y con horizonte de eventos de topología esférica, tiene campos externos determinados de manera única por su masa M y su carga Q ; de hecho esos campos externos son la solución de Schwarzschild cuando $Q=0$, y la solución de Reissner-Nordström si $Q \neq 0$." (3)

Ambas de estas soluciones son casos especiales de la métrica de Kerr-Newmann que además involucra el momento angular S del hoyo:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\varphi]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\varphi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (4.21)$$

$$\text{donde } \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2; \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta; \quad a = S/M.$$

La métrica de Reissner-Nordström se obtiene de ésta haciendo $S=0$, mientras que la de Schwarzschild se obtiene cuando $S=Q=0$.

Recientemente se pudo demostrar (4) que la métrica de Kerr-Newmann es la única solución de las ecuaciones de Einstein que representa un hoyo negro con masa, carga y momento angular. Se conjetura que si una estrella en vías de colapsarse tiene asociado algún parámetro además de los anteriores, éstos deberán de perderse si se ha de formar un hoyo negro. En particular, un campo de espín 3/2 implicaría un parámetro asociado.

De esta conjetura se dice que los hoyos negros "no tienen pelos", entendiéndose por pelo cualquier parámetro distinto de masa, carga y momento angular.

Se ha demostrado que en primera aproximación no pueden existir hoyos negros con parámetros de espín 1/2 (5) ni de espín 0 (6). En esta tesis, se estudiará la posibilidad de que pueda existir un campo de partículas de espín 3/2 alrededor de un hoyo negro de Schwarzschild, caso que tiene incidencia directa sobre la "conjetura de los pelos".

4. Métrica de Schwarzschild

REFERENCIAS

1. Landau L.D. & Lifshitz E.M., The Classical Theory of Fields, (Landau & Lifshitz Course on Theoretical Physics vol.2), 4th ed., Pergamon Press, Oxford U.K., 1979, pp. XI-399.
2. Weinberg S., Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, Wiley & Sons, New York, 1972, pp. XXIX-657.
3. Misner C. Thorn K. S. & Wheeler J.A. et al, Gravitation, W.H. Freeman & Co., U.S.A., 1973, pp. XXVII-1277.
4. Hawking S.W. & Ellis G.F.R., The Large-Scale Structure of Space-Time, Cambridge University Press, Cambridge U.K., 1973, pp. XI-391.
5. Feynman R., Lectures on Gravitation (Nos. 11 y 15), California Institute of Technology, Pasadena, California, 1962-63.
6. Dultzin-Hacyan D. & Hacyan S., Los Agujeros Negros, en AAVV, Temas Selectos de Astrofísica (edición al cuidado de Peimbert M.), Dirección General de Publicaciones U.N.A.M., México D.F., 1984, pp. 333.
7. Chandrasekhar S., The Mathematical Theory of Black Holes, en AAVV, General Relativity and Gravitation (ed. B. Bertotti, F. de Felice y A. Pascolini), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht Holland, 1984, pp XVI-517.
8. Price R.H., "Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse. I. Scalar and Gravitational Perturbations.", Phys. Rev. D5, 10 (May 1972), pp. 2419-2438.
9. Mazur P.O., "Black Hole Uniqueness from a Hidden Symmetry of Einstein's Gravity", Gen. Rel. & Grav. 16, 3 (1984), pp. 211-215.

5. Parámetros de Curvatura Tetradales y Espinoriales

CAPITULO V.

OBTENCION DE LOS PARAMETROS ESPINORIALES DE CURVATURA EN UN ESPACIO TIEMPO CON METRICA DE SCHWARZSCHILD.

Para obtener la solución de cualquier ecuación espinorial en un espacio curvo, es necesario obtener explícitamente las derivadas espinoriales covariantes, que se obtienen a su vez de sus componentes tetradales. Para evaluar específicamente las condiciones de integrabilidad es también necesario obtener las imágenes espinoriales del tensor de Weyl y del de Ricci. Lo más evidente de entrada es que en la métrica de Schwarzschild se tiene que $R_{\alpha\beta} = R = 0$, por lo que su imagen espinorial también, i.e.:

$$C^{abcd} = R = 0. \quad (5.1)$$

En términos generales, el procedimiento a seguir es el siguiente: Primero, a partir de la métrica, se obtiene la tetrada nula -con precisión a una transformación de Lorentz- utilizando la ecuación 1.31. Con ésta y la ecuación 1.27 se construyen las componentes tetradales de las derivadas parciales. Por otro lado, con la primera ecuación de Cartan (1.42) se obtienen las Γ^a_b , para luego obtener las Γ^{ab} con las ecuaciones 1.41 y 1.44. De aquí, con la segunda ecuación de Cartan se obtiene la imagen espinorial del tensor de Weyl.

Para obtener la tetrada nula hay que expresar el cuadrado del elemento de arco en la métrica de Schwarzschild en la forma 1.31, tomando en cuenta que para que ésta sea nula es necesario que e^3 y e^4 sean reales, y que $e^1 = e^2$. Por inspección, de la métrica 4.11:

$$e^1 = (r/\sqrt{2}) (d\theta + i \sin\theta d\varphi); \quad e^2 = e^{1*};$$

$$e^3 = (1/\sqrt{2}) [(1-2M/r)^{-1/2} dr + (1-2M/r)^{1/2} dt];$$

$$e^4 = (1/\sqrt{2}) [(1-2M/r)^{-1/2} dr - (1-2M/r)^{1/2} dt],$$

de donde, derivando exteriormente e igualando con el lado derecho de la primera ecuación de Cartan se obtiene:

$$\begin{aligned} de^1 &= (dr/r) \wedge e^1 + (i/\sqrt{2}) \cos\theta r d\theta \wedge d\varphi = \\ &= (1/r\sqrt{2}) (1-2M/r)^{1/2} [e^3 \wedge e^1 + e^4 \wedge e^1] - \cot\theta (1/r\sqrt{2}) e^1 \wedge e^2 = \\ &= -e^1 \wedge \Gamma_{12} - e^3 \wedge \Gamma_{32} - e^4 \wedge \Gamma_{42}. \end{aligned}$$

Así pues, igualando términos semejantes:

$$\Gamma_{322} = \Gamma_{422} = 0; \quad \Gamma_{324} = \Gamma_{423};$$

$$\Gamma_{123} - \Gamma_{321} = \Gamma_{124} - \Gamma_{421} = (1/r\sqrt{2}) (1-2M/r)^{1/2}.$$

5. Parámetros de Curvatura Tetradales y Espinoriales

e^2 no da ninguna información extra pues es el complejo conjugado de e^1 . Desarrollando análogamente de³ y de⁴ se obtiene:

$$\Gamma_{424} = \Gamma_{414} = 0; \quad \Gamma_{341} + \Gamma_{413} = \Gamma_{342} + \Gamma_{423} = \Gamma_{412} - \Gamma_{421} = 0;$$

$$\Gamma_{343} = -(M/r^2 \sqrt{2}) (1-2M/r)^{-1/2}.$$

Esta información, junto con las propiedades de simetría de las Γ_{abc} las determinan completamente:

$$\Gamma_{321} = \Gamma_{312} \implies \Gamma_{123} \text{ es real} \implies \Gamma_{213} = \Gamma_{123}^* = \Gamma_{123} = -\Gamma_{213}$$

$$\implies \Gamma_{213} = 0 \text{ y } \Gamma_{312} = -(1/r\sqrt{2}) (1-2M/r)^{1/2}.$$

Repetiendo muchas veces este tipo de desarrollo se obtiene finalmente:

$$\Gamma_{42} = -(1/r\sqrt{2}) (1-2M/r)^{1/2} e^1; \quad \Gamma_{31} = -(1/r\sqrt{2}) (1-2M/r)^{1/2} e^2; \quad (5.2)$$

$$\Gamma_{12} + \Gamma_{34} = (1/r\sqrt{2}) [\cot\theta (e^2 - e^1) + (M/r) (1-2M/r)^{-1/2} (e^4 - e^3)].$$

Por otro lado, con la ecuación 1.27:

$$dT = dx^\alpha \partial_\alpha T = e^a \partial_a T.$$

Desarrollando ambos lados de esta ecuación, agrupando los términos por diferenciales se obtiene:

$$\partial_1 = (1/r\sqrt{2}) (\partial_\theta - i/\sin\theta \partial_\varphi); \quad \partial_2 = \partial_3^*;$$

$$\partial_3 = (1/\sqrt{2}) [(1-2M/r)^{1/2} \partial_r + (1-2M/r)^{-1/2} \partial_t]; \quad (5.3)$$

$$\partial_4 = (1/\sqrt{2}) [(1-2M/r)^{1/2} \partial_r - (1-2M/r)^{-1/2} \partial_t].$$

Con la ecuación 1.44 se obtienen todas las Γ_{abc} distintas de cero:

$$\Gamma_{111} = \Gamma_{222} = (1/r\sqrt{2}) (1-2M/r)^{1/2};$$

$$\Gamma_{211} = -\Gamma_{212} = (1/2\sqrt{2}r) \cot\theta; \quad (5.4)$$

$$\Gamma_{124} = -\Gamma_{123} = -(M/2\sqrt{2}r^2) (1-2M/r)^{-1/2}.$$

Ahora se calculará el valor de la imagen espinorial del tensor de Weyl en la métrica de Schwarzschild. Antes de utilizar directamente la segunda ecuación de Cartan, determinaremos cuales son las componentes nulas, utilizando la clasificación de Petrov-Penrose introducida en el capítulo I. Fuesto que la métrica se encuentra en el grupo D:

$$C_{abcd} = K_{ab} K_{cd} M_c M_d.$$

Ya que las componentes e^3 y e^4 de la tetrada nula sólo

5. Parámetros de Curvatura Tetradales y Espinoriales

difieren por el signo de la parte temporal, de acuerdo a la discusión del primer capítulo es natural que éstas determinen por completo las DGN. Su relación con los espinores gravitacionales es entonces:

$$e^3{}_{\mu} = g^{\alpha\beta}{}_{\mu} K_{\alpha} K_{\beta};$$

$$e^0{}_{\mu} = g^{\alpha\beta}{}_{\mu} M_{\alpha} M_{\beta}.$$

Pueden escogerse K_{α} y M_{α} reales y normalizadas como:

$$(K_{\alpha}) = (0, 1); \quad (M_{\alpha}) = (1, 0),$$

de donde la única componente independiente distinta de cero de C_{ABCD} será C_{1122} .

Utilizando esta información en la segunda ecuación de Cartan en forma espinorial, Newman y Penrose obtuvieron:

$$-d\Gamma_{11} + 2\Gamma_{11}\wedge\Gamma_{12} = C_{1122}e^3\wedge e^1,$$

$$-d\Gamma_{12} + \Gamma_{11}\wedge\Gamma_{22} = C_{1122}e^1\wedge e^2,$$

$$-d\Gamma_{22} + 2\Gamma_{12}\wedge\Gamma_{22} = C_{1122}e^2\wedge e^3.$$

Integrando estas ecuaciones obtenemos:

$$C_{1122} = -M/r^3.$$

La información aquí contenida es suficiente para escribir en forma explícita, y en principio integrar, las dos ecuaciones propuestas (con y sin masa) para partícula de espín 3/2.

CAPITULO VI

SOLUCIONES EXPLÍCITAS DE LAS ECUACIONES PARA PARTICULAS DE ESPIN 3/2 SIN MASA EN UN ESPACIO-TIEMPO CON METRICA DE SCHWARZSCHILD.

Debido a la teoría de supergravedad, el caso de un campo de espín 3/2 sin masa en un espacio curvo en general cobra importancia. En esta teoría, el doblete de partículas de espín 3/2 y espín 2 (responsables de la interacción gravitacional, y que están representadas por el espinor de Weyl) forma una representación irreducible del álgebra de sus transformaciones.

La teoría de supergravedad es invariante bajo transformaciones del tipo⁽¹⁾:

$$\psi \longrightarrow \psi' = \psi + p\varphi,$$

de donde la solución trivial que se investigó en el tercer capítulo para la ecuación de RS sin masa puede ser reducida a cero mediante una transformación de supergravedad.

1. Solución de la Ecuación $\nabla^{AB}\psi_{ABC}=0$.

Como se vio en el capítulo II, una ecuación descriptiva de una partícula sin masa en reposo, de espín 3/2 es:

$$\nabla^{AB}\psi_{ABC}=0; \quad \psi_{(ABC)}=\psi_{ABC}. \quad (6.1)$$

Las condiciones de integrabilidad que se obtuvieron para esta ecuación en el capítulo III son:

$$C^{PQR}{}_{A}\psi_{PQR}=0, \quad (6.2)$$

que, considerando la simetría de las ψ 's y la de las C's, en la métrica de Schwarzschild toma la forma:

$$C^{112}{}_{1}\psi_{112}=0 \quad \text{y} \quad C^{221}{}_{2}\psi_{221}=0.$$

De aquí se obtiene que estas dos componentes deben ser cero, por lo que las únicas componentes distintas de cero serán ψ_{111} y ψ_{222} . Las ecuaciones que satisfacen son:

$$\begin{aligned} \nabla^{11}{}_{1}\psi_{111}=0; & \quad \nabla^{12}{}_{1}\psi_{111}=0; \\ \nabla^{21}{}_{2}\psi_{222}=0; & \quad \nabla^{22}{}_{2}\psi_{222}=0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Utilizando la definición de las derivadas covariantes espinoriales en términos de las derivadas covariantes tetradiales, y la expresión explícita de las matrices de Pauli (en representación tetradial), estas ecuaciones equivalen a:

$$\begin{aligned} \nabla_3\psi_{111}=0; & \quad \nabla_1\psi_{111}=0; \\ \nabla_2\psi_{222}=0; & \quad \nabla_4\psi_{222}=0. \end{aligned}$$

6. Soluciones Explicitas sin Masa .

Si definimos: $\Psi \equiv \Psi_{111}$; $\Psi \equiv \Psi_{222}$,

y usamos la definición de las derivadas covariantes tetradales y la ecuación 5.4, esto es:

$$\begin{aligned} (\partial_3 - 3\Gamma_{124} + \Gamma_{111})\Psi &= 0; & (\partial_1 + 3\Gamma_{211})\Psi &= 0; \\ (\partial_4 + \Gamma_{111} - 3\Gamma_{124})\Psi &= 0; & (\partial_2 + 3\Gamma_{211})\Psi &= 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Utilizando las ecuaciones 5.3 y 5.4 para la primera de las componentes (ya que el comportamiento de la segunda es el mismo, pues las ecuaciones solamente varían en el signo de las derivadas temporal y azimutal):

$$\begin{aligned} [(1-2M/r)\partial_r + \partial_t + 1/r - (1/2)M/r^2]\Psi &= 0; \\ [\partial_\theta - (1/\sin\theta)\partial_\varphi + (3/2)\cot\theta]\Psi &= 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Separando Ψ en el producto de funciones que dependen únicamente de cada una de sus variables:

$$\Psi(r, t, \theta, \varphi) = F(r)T(t)G(\theta)H(\varphi),$$

se obtiene:

$$T(t) = e^{iwt}, \quad H(\varphi) = e^{-ik\varphi}.$$

Donde w y k son las constantes de separación. La solución para la parte radial es entonces:

$$\begin{aligned} F(r) &= A \exp\left[\int (r-2M)^{-1}(M/2r - iwr - 1)dr\right] = \\ &= (r/2M)^{-1/4} (r/2M - 1)^{-(3/4 + 2iwr)} e^{-iwr}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

La solución de G es:

$$G(\theta) = B(\csc\theta + \cot\theta)^k \sin^{-3/2}\theta.$$

Nótese que para que $H(\varphi)$ sea monovaluada en cero y 2π , es necesario que k sea entera. Lo cual implica, claro está, una cuantización de las soluciones angulares. La solución completa es:

$$\begin{aligned} \Psi &= [C(\csc\theta + \cot\theta)^k \sin^{-3/2}\theta] \times \\ &[(r/2M)^{-1/4} (r/2M - 1)^{-(3/4 + 2iwr)} e^{-i\omega(r-t) - ik\varphi}]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

$G(\theta)$ es singular en $\theta=0$ y π , sin embargo se debe a la singularidad -trivial- correspondiente al sistema de coordenadas utilizado, singularidad que ya se discutió en el cuarto capítulo.

Puesto que la métrica es esféricamente simétrica, solamente las partes radial y temporal de las soluciones de la ecuación de onda son relevantes en cuanto a su significación física como

6. Soluciones Explícitas sin Masa .

componentes de un campo de espín 3/2. En efecto, como la "singularidad" en la parte angular de las soluciones no es física, la posibilidad de un comportamiento físicamente inaceptable puede provenir únicamente de las partes en r y t .

El comportamiento aparentemente complicado de la parte radial y temporal de la solución 6.7, toma una forma muy sencilla si la expresamos en función de r^* :

$$\Psi(r^*, t) = (r/2M)^{-1/4} (r/2M - 1)^{-3/4} e^{i\omega(t-r^*)}. \quad (6.8)$$

El caso de una solución estacionaria ($\omega=0$) es el más importante, ya que es el caso directamente relacionado con la "hipótesis de los pelos" i.e., la solución estacionaria es la que introduce un parámetro de espín 3/2 entre los del hoyo negro de Schwarzschild. De hecho, ésta es la única forma de introducirlo en los parámetros de cualquier hoyo negro si admitimos que debe ser estático. Esta es:

$$\Psi(r^*, \omega=0) = (r/2M)^{-1/4} (r/2M - 1)^{-3/4}. \quad (6.9)$$

Esta solución evidentemente no es física, pues aunque converge en el infinito, diverge en el horizonte. Esto indica que no hay "pelos" de espín 3/2 sin masa asociados a una métrica de Schwarzschild (Según la ecuación 6.1).

2. Ecuación RS sin Masa.

Ahora nos dispondremos a encontrar las soluciones de las ecuaciones para partícula sin masa 3.2. Dado que $C^{AB\bar{C}\bar{D}}=0$, las condiciones de integrabilidad no proporcionan ninguna información. En este caso, la ϕ satisface la ecuación conjugada de la Ψ , por lo que sólo es necesario resolver esta última:

$$\nabla^{\bar{C}\bar{D}} \Psi_{AB}^{\bar{C}\bar{D}} = 0, \quad \Psi_{AB}^{\bar{C}\bar{D}} = \Psi_{(AB)}^{\bar{C}\bar{D}}. \quad (6.10)$$

Es conveniente definir las nuevas variables:

$$\begin{aligned} \Psi_{11}^{\bar{1}\bar{1}} &= \Psi_1 & \Psi_{21}^{\bar{1}\bar{1}} &= \Psi_2 & \Psi_{12}^{\bar{1}\bar{1}} &= \Psi_{21}^{\bar{1}\bar{1}} &= \Psi_3 \\ \Psi_{22}^{\bar{1}\bar{1}} &= \Psi_4 & \Psi_{12}^{\bar{2}\bar{2}} &= \Psi_5 & \Psi_{21}^{\bar{2}\bar{2}} &= \Psi_{12}^{\bar{2}\bar{2}} &= \Psi_6 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Desarrollando esto de manera idéntica a las ecuaciones de la sección anterior 6.10, las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned} (\partial_2 - \Gamma_{211}) \Psi_3 + (\partial_3 + \Gamma_{111} - \Gamma_{124}) \Psi_1 &= 0; \\ (\partial_1 + \Gamma_{211}) \Psi_2 - (\partial_4 + 2\Gamma_{111} + \Gamma_{124}) \Psi_4 &= 0; \\ (\partial_2 + \Gamma_{211}) \Psi_4 + (\partial_3 + \Gamma_{111} - 3\Gamma_{124}) \Psi_2 + \Gamma_{111} \Psi_3 &= 0; \\ (\partial_1 + 3\Gamma_{211}) \Psi_1 - (\partial_4 + 2\Gamma_{111} - \Gamma_{124}) \Psi_5 - \Gamma_{111} \Psi_2 &= 0; \\ (\partial_1 - \Gamma_{211}) \Psi_4 - (\partial_4 + \Gamma_{111} - \Gamma_{124}) \Psi_6 &= 0; \end{aligned} \quad (6.12)$$

6. Soluciones Explicitas sin Masa

$$\begin{aligned}
 (\partial_2 + \Gamma_{211}) \psi_3 + (\partial_3 + 2\Gamma_{111} + \Gamma_{122}) \psi_5 &= 0; \\
 (\partial_1 + \Gamma_{211}) \psi_3 - (\partial_4 + \Gamma_{111} - 3\Gamma_{122}) \psi_5 - \Gamma_{111} \psi_4 &= 0; \\
 (\partial_2 + 3\Gamma_{211}) \psi_4 + (\partial_3 + 2\Gamma_{111} - \Gamma_{122}) \psi_4 + \Gamma_{111} \psi_5 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Este es un sistema sumamente complicado, por lo que para simplificarlo buscaremos soluciones temporales de la forma $e^{i\omega t}$. Esto no implica pérdida de generalidad ya que como las ecuaciones son lineales en t la solución general temporal es:

$$\int_{D(w)} A(w) e^{i\omega t} dw,$$

donde $D(w)$ es el dominio de validez de las w 's y A una función arbitraria de w . Así, las ecuaciones explícitas quedan:

$$\begin{cases}
 (\partial_0 - (1/2)\cot\theta + (i/\text{sen}\theta)\partial_\varphi)\psi_3 + (1-2M/r)^{-1/2}[(r-2M)\partial_r + i\omega r + 1 - 3M/2r]\psi_1 = 0; \\
 (\partial_0 + (1/2)\cot\theta - (i/\text{sen}\theta)\partial_\varphi)\psi_2 - (1-2M/r)^{-1/2}[(r-2M)\partial_r - i\omega r + 2 - 9M/2r]\psi_4 = 0; \\
 (\partial_0 + (1/2)\cot\theta + (i/\text{sen}\theta)\partial_\varphi)\psi_4 + (1-2M/r)^{-1/2}[(r-2M)\partial_r + i\omega r + 1 - M/2r]\psi_2 + \\
 + (1-2M/r)^{1/2}\psi_5 = 0; \\
 (\partial_0 + (3/2)\cot\theta - (i/\text{sen}\theta)\partial_\varphi)\psi_1 - (1-2M/r)^{-1/2}[(r-2M)\partial_r - i\omega r + 2 - 7M/2r]\psi_3 - \\
 - (1-2M/r)^{1/2}\psi_2 = 0;
 \end{cases} \tag{6.13}$$

$$\begin{cases}
 (\partial_0 - (1/2)\cot\theta - (i/\text{sen}\theta)\partial_\varphi)\psi_4 - (1-2M/r)^{-1/2}[(r-2M)\partial_r - i\omega r + 1 + 3M/2r]\psi_5 = 0; \\
 (\partial_0 + (1/2)\cot\theta + (i/\text{sen}\theta)\partial_\varphi)\psi_5 + (1-2M/r)^{-1/2}[(r-2M)\partial_r + i\omega r + 2 - 9M/2r]\psi_3 = 0; \\
 (\partial_0 + (1/2)\cot\theta - (i/\text{sen}\theta)\partial_\varphi)\psi_3 - (1-2M/r)^{-1/2}[(r-2M)\partial_r - i\omega r + 1 - M/2r]\psi_5 + \\
 + (1-2M/r)^{1/2}\psi_4 = 0; \\
 (\partial_0 + (3/2)\cot\theta + (i/\text{sen}\theta)\partial_\varphi)\psi_5 + (1-2M/r)^{-1/2}[(r-2M)\partial_r + i\omega r + 2 - 7M/2r]\psi_4 - \\
 - (1-2M/r)^{1/2}\psi_3 = 0;
 \end{cases} \tag{6.14}$$

Este sigue siendo un sistema muy complicado, de 16 ecuaciones con 12 incógnitas. Sin embargo existe una simetría que permite obtener las 4 ecuaciones 6.14 de las 4 ecuaciones 6.13, haciendo las identificaciones de la siguiente tabla:

TABLA II

$$\left. \begin{array}{l} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \psi^*_6 \\ -\psi^*_5 \\ -\psi^*_4 \\ \psi^*_3 \\ -\psi^*_2 \\ \psi^*_1 \end{array} \right.$$

6. Soluciones Explicitas sin Masa .

Ahora es útil definir los siguientes operadores:

$$D^{3/2} = (\prime) [(r-2M)\partial_r + i\omega r + 1 - 3M/2r],$$

$$D^{1/2} = (\prime) [(r-2M)\partial_r + i\omega r + 1 - M/2r],$$

$$D^{*9/2} = (\prime) [(r-2M)\partial_r + i\omega r + 2 - 9M/2r],$$

$$D^{*7/2} = (\prime) [(r-2M)\partial_r + i\omega r + 2 - 7M/2r], \quad \text{donde } (\prime) \equiv (1-2M/r)^{-1/2};$$

(6.15)

$$L^{3/2} = \partial_\theta + (3/2)\cot\theta + (i/\sin\theta)\partial_\varphi,$$

$$L^{*1/2} = \partial_\theta + (1/2)\cot\theta + (i/\sin\theta)\partial_\varphi.$$

Puede demostrarse directamente que:

$$D^* [(\prime)^{-1} f(r)] = D^{*x-1} f(r), \quad x=3/2, 9/2,$$

$$\text{y también que: } (1/\sin\theta) L^{*1/2} [\sin\theta g(\theta, \varphi)] = L^{3/2} g(\theta, \varphi).$$

Las ecuaciones 6.13 quedan:

$$a) \quad L^{-1/2} \psi_3 + D^{3/2} \psi_1 = 0;$$

$$b) \quad L^{*1/2} \psi_2 - D^{*9/2} \psi_4 = 0;$$

(6.16)

$$c) \quad L^{*1/2} \psi_4 + D^{3/2} [(\prime)^{-1} \psi_2] + (\prime)^{-1} \psi_3 = 0;$$

$$d) \quad (1/\sin\theta) L^{*1/2} (\sin\theta \psi_1) - D^{*9/2} [(\prime)^{-1} \psi_3] - (\prime)^{-1} \psi_2 = 0.$$

Las ecuaciones 6.14 se obtienen de éstas haciendo las identificaciones de la tabla II. Utilizando 6.16-a y b, se pueden obtener los siguientes potenciales (ya que los operadores radiales conmutan con los angulares):

$$\psi_3 = -D^{3/2} P; \quad \psi_1 = L^{-1/2} P;$$

$$\psi_2 = D^{*9/2} Q; \quad \psi_4 = L^{*1/2} Q,$$

y de las correspondientes ecuaciones 6.14:

$$\psi^*_4 = D^{3/2} R; \quad \psi^*_6 = L^{-1/2} R;$$

$$\psi^*_8 = -D^{*9/2} S; \quad \psi^*_3 = L^{*1/2} S.$$

De estas ocho identidades se obtiene:

$$\psi_3 = -D^{3/2} P = L^{*1/2} S^*, \quad \psi_4 = L^{*1/2} Q = D^{*3/2} R^*.$$

Escribiendo 6.16-c y d, y las correspondientes de 6.14, en términos de estos potenciales:

6. Soluciones Explícitas sin Masa .

$$L^{-1/2}L^{*1/2}Q + D^{3/2}[(\)^{-1}D^{*1/2}Q] - (\)^{-1}D^{3/2}P = 0,$$

$$(1/\text{sen}\theta)L^{*1/2}[\text{sen}\theta L^{-1/2}P] + D^{*1/2}[(\)^{-1}D^{3/2}P] - (\)^{-1}D^{*1/2}Q = 0,$$

(6.17)

$$L^{-1/2}L^{*1/2}S + D^{3/2}[(\)^{-1}D^{*1/2}S] - (\)^{-1}D^{3/2}R = 0,$$

$$(1/\text{sen}\theta)L^{*1/2}[\text{sen}\theta L^{-1/2}R] + D^{*1/2}[(\)^{-1}D^{3/2}R] - (\)^{-1}D^{*1/2}S = 0,$$

$$-D^{3/2}P = L^{*1/2}S^*,$$

$$L^{*1/2}Q = D^{*3/2}R^*.$$

Estas son 6 ecuaciones con cuatro incógnitas, con la propiedad de que la tercera y la cuarta se obtienen de las primeras dos haciendo la identificación $P \rightarrow R$ y $Q \rightarrow S$. Es claro por inspección que de las primeras cuatro ecuaciones no se pueden deducir las últimas dos, por lo que el sistema está en general sobredeterminado. Pueden sin embargo existir soluciones particulares, siendo la más atractiva, hacer P proporcional a R y Q a S con la misma constante de proporcionalidad:

$$P = aR \quad Q = aS.$$

Sustituyendo esto en las dos últimas ecuaciones, se tiene:

$$(1+aa^*)L^{-1/2}Q = 0, \quad \text{por lo que } L^{-1/2}Q = 0 = D^{3/2}P.$$

En términos de ψ , esto implica que $\psi_3 = \psi_4 = 0$. Analizándose detenidamente la tabla II, esto no es totalmente inesperado pues las identificaciones entre estas dos componentes no son monovaluadas. Ahora es pertinente demostrar que las soluciones obtenidas de esta manera no son triviales, en el sentido de que no son de la forma:

$$\psi_{3c} = \nabla^i \epsilon_c,$$

$$\nabla^{3c} \epsilon_c = 0.$$

En este caso:

$$\psi_3 = \nabla^{i2} \epsilon_2 = \nabla^{i1} \epsilon_1 = 0,$$

$$\psi_4 = \nabla^{i2} \epsilon_2 = \nabla^{i1} \epsilon_1 = 0.$$

Explícitamente:

$$[\partial_2 + \Gamma_{211}] \epsilon_2 + \Gamma_{111} \epsilon_1 = 0,$$

$$[\partial_3 - \Gamma_{122}] \epsilon_1 = 0,$$

$$[\partial_1 + \Gamma_{211}] \epsilon_1 - \Gamma_{111} \epsilon_2 = 0,$$

$$[\partial_4 - \Gamma_{122}] \epsilon_2 = 0.$$

Separaremos las variables de ambas componentes:

$$\epsilon_i = Y_i(\theta, \varphi) R_i(r, t), \quad i=1,2.$$

Multiplicándolas por r , los operadores de la primera y la tercera de las ecuaciones sólo dependen de los ángulos, y resulta que:

6. Soluciones Explícitas sin Masa

$$R_2 = -r \int_{111} R_1 \quad \text{y} \quad R_1 = r \int_{111} R_2,$$

de donde $R_2 = -r^2 (\int_{111})^2 R_2$, por lo que $R_2 = R_1 = 0$.

De esta forma, si la solución obtenida con $\Psi_3 = \Psi_4 = 0$ fuera trivial, sería necesario que todas las componentes de Ψ fueran idénticamente cero, cosa que como se verá en la siguiente página no es el caso.

Las ecuaciones para el resto de las Ψ 's quedan desacopladas, por lo que es más fácil resolver aquéllas en lugar de las ecuaciones de los potenciales:

- a) $D^{3/2} \Psi_1 = 0;$
 - b) $L^{*+1/2} \Psi_2 = 0;$
 - c) $D^{1/2} \Psi_2 = 0;$
 - d) $L^{*3/2} \Psi_1 - (/)^{-1} \Psi_2 = 0;$
 - e) $D^{*3/2} \Psi_4 = 0;$
 - f) $L^{*1/2} \Psi_4 = 0;$
 - g) $D^{*1/2} \Psi_4 = 0;$
 - h) $L^{3/2} \Psi_4 + (/)^{-1} \Psi_5 = 0.$
- (6.18)

Dada la similitud, no se resolverán explícitamente las segundas cuatro de estas ecuaciones. De 6.18-b:

$$\Psi_2 = [e^{-ik\varphi} A(\csc\theta + \cot\theta) \text{sen}^{-1/2}\theta] F(r), \quad k=0,1,2,\dots \quad (6.19)$$

donde $F(r)$ satisface $D^{1/2} F(r) = 0$. Esto en 6.18-d implica:

$$\Psi_1 = G(\theta) H(\varphi) (/)^{-1} F(r), \quad (6.20)$$

$$\text{con } L^{*3/2} [G(\theta) H(\varphi)] = e^{-ik\varphi} A(\csc\theta + \cot\theta) \text{sen}^{-1/2}\theta. \quad (6.21)$$

Debido a la relación antes mencionada entre los distintos operadores radiales, 6.19 es consistente con 6.18-a y c. Para resolver 6.21, exigiendo primero que $H(\varphi) = e^{-ik\varphi}$, lo cual no implica pérdida de generalidad, resulta:

$$(d/d\theta)G + G(k \csc\theta + (3/2)\cot\theta) = A(\csc\theta + \cot\theta) \text{csc}^{1/2}\theta,$$

$$\text{lo cual es:} \quad (d/d\theta) [G(\csc\theta + \cot\theta) \text{sen}^{3/2}\theta] = A \text{sen}\theta,$$

$$\text{cuya solución es:} \quad G(\theta) H(\varphi) = -A e^{-ik\varphi} \cos\theta \text{csc}^{3/2}\theta (\csc\theta + \cot\theta)^k.$$

Como en la ecuación de la sección anterior, en este caso k debe ser entera para que el término axial sea monovaluado en 0 y 2π . La ecuación para $F(r)$ es idéntica a la 6.5, que se resolvió en la sección anterior, y por tanto su solución es 6.6 o, en

6. Soluciones Explícitas sin Masa .

términos de r^* , 6.8. En función de esta última variable, las soluciones explícitas son:

$$\Psi_1 = -[Ae^{-ik\psi} \cos\theta \csc^{3/2}\theta (\csc\theta + \cot\theta)^k] \times \\ [(1-2M/r)^{1/2} (r/2M)^{-1/4} (r/2M-1)^{-3/4} e^{i\omega(t-r^*)}], \quad (6.22)$$

$$\Psi_2 = Be^{-ik\psi} \csc^{1/2}\theta (\csc\theta + \cot\theta)^k (r/2M)^{-1/4} (r/2M-1)^{-3/4} e^{i\omega(t-r^*)}.$$

De las ecuaciones para Ψ_2 y Ψ_1 , éstas tienen el mismo comportamiento que Ψ_2 y Ψ_1 , respectivamente. Omitiendo como antes las partes angulares, la solución estacionaria ($\omega=0$) es:

$$\Psi_1(r^*, \omega=0) = -A(1-2M/r)^{1/2} (r/2M)^{-1/4} (r/2M-1)^{-3/4}, \quad (6.23)$$

$$\Psi_2(r^*, \omega=0) = B(r/2M)^{-1/4} (r/2M-1)^{-3/4}.$$

De la misma manera que en 6.9, estas soluciones divergen en el horizonte, por lo que no pueden representar funciones de onda físicamente aceptables. De esta manera, aunque estas expresiones son soluciones particulares -no triviales- de las ecuaciones de onda, implican que dentro de los límites de validez de nuestra solución no hay "pelos" de espín 3/2 sin masa en un espacio-tiempo determinado por la métrica de Schwarzschild (hoyo negro).

Es importante, y esto se discutirá en el capítulo VIII, atacar la evolución temporal de las soluciones. Esto es porque sí tiene sentido hablar de un campo estacionario alrededor de una estrella en vías de colapsarse, y entonces lo importante a investigar es cómo se perturba esta solución en el momento en que la superficie estelar cruza el horizonte. De esta manera se espera, puesto que no existe una solución estacionaria física en todo el espacio, que la solución se desvanezca después de que se forme el hoyo negro.

REFERENCIA.

1. van Nieuwenhuizen P., "Supergravity", Phys. Rep. 68, 4 (Feb, 1981).

7. Soluciones Explícitas con Masa

CAPITULO VII

SOLUCIONES EXPLICITAS DE LAS ECUACIONES PARA PARTICULAS DE ESPIN 3/2 CON MASA EN UN ESPACIO-TIEMPO CON METRICA DE SCHWARZSCHILD.

Ahora nos dispondremos a encontrar las soluciones de las ecuaciones para partícula masiva 3.2:

Como ya se dijo, las ecuaciones de simetría son equivalentes a pedir que los espinores ψ y ϕ sean simétricos con respecto a los índices con y sin punto respectivamente:

$$\nabla_{\alpha\dot{\alpha}} \psi^{\dot{\alpha}\beta} = m \phi^{\dot{\alpha}\beta}; \quad \nabla_{\alpha\dot{\alpha}} \phi^{\dot{\alpha}\beta} = -m \psi^{\dot{\alpha}\beta}; \quad (7.1)$$

Junto con las definiciones del capítulo anterior, es conveniente definir las nuevas variables para su representación adjunta:

$$\begin{aligned} \psi^{\dot{1}1} &= \psi_1 & \psi^{\dot{2}1} &= \psi_2 & \psi^{\dot{1}2} &= \psi^{\dot{2}2} &= \psi_3 \\ \psi^{\dot{2}2} &= \psi_4 & \psi^{\dot{1}2} &= \psi_5 & \psi^{\dot{2}1} &= \psi^{\dot{1}1} &= \psi_6 \\ \phi^{\dot{1}1} &= \phi_1 & \phi^{\dot{1}2} &= \phi_2 & \phi^{\dot{2}1} &= \phi^{\dot{2}2} &= \phi_3 \\ \phi^{\dot{2}2} &= \phi_4 & \phi^{\dot{2}1} &= \phi_5 & \phi^{\dot{1}2} &= \phi^{\dot{1}1} &= \phi_6 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Desarrollando de manera idéntica a las ecuaciones sin masa, del capítulo anterior las ecuaciones 7.1 quedan:

$$\left\{ \begin{aligned} (\partial_2 - \Gamma_{211}) \psi_3 + (\partial_3 + \Gamma_{111} - \Gamma_{124}) \psi_1 &= m \phi_1; \\ (\partial_1 + \Gamma_{211}) \psi_2 - (\partial_4 + 2\Gamma_{111} + \Gamma_{124}) \psi_4 &= m \phi_5; \\ (\partial_2 + \Gamma_{211}) \psi_4 + (\partial_3 + \Gamma_{111} - 3\Gamma_{124}) \psi_2 + \Gamma_{111} \psi_3 &= m \phi_3; \\ (\partial_1 + 3\Gamma_{211}) \psi_1 - (\partial_4 + 2\Gamma_{111} - \Gamma_{124}) \psi_3 - \Gamma_{111} \psi_2 &= m \phi_6; \\ (\partial_1 - \Gamma_{211}) \psi_4 - (\partial_4 + \Gamma_{111} - \Gamma_{124}) \psi_6 &= m \phi_5; \\ (\partial_2 + \Gamma_{211}) \psi_5 + (\partial_3 + 2\Gamma_{111} + \Gamma_{124}) \psi_3 &= m \phi_2; \\ (\partial_1 + \Gamma_{211}) \psi_3 - (\partial_4 + \Gamma_{111} - 3\Gamma_{124}) \psi_5 - \Gamma_{111} \psi_4 &= m \phi_4; \\ (\partial_2 + 3\Gamma_{211}) \psi_6 + (\partial_3 + 2\Gamma_{111} - \Gamma_{124}) \psi_4 + \Gamma_{111} \psi_5 &= m \phi_4. \end{aligned} \right. \quad (7.3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} (\partial_1 - \Gamma_{211}) \phi_3 + (\partial_4 + \Gamma_{111} - \Gamma_{124}) \phi_1 &= m \psi_1; \\ (\partial_2 + \Gamma_{211}) \phi_2 - (\partial_3 + 2\Gamma_{111} + \Gamma_{124}) \phi_4 &= m \psi_5; \\ (\partial_1 + \Gamma_{211}) \phi_4 + (\partial_4 + \Gamma_{111} - 3\Gamma_{124}) \phi_2 + \Gamma_{111} \phi_3 &= m \psi_3; \\ (\partial_2 + 3\Gamma_{211}) \phi_1 - (\partial_3 + 2\Gamma_{111} - \Gamma_{124}) \phi_3 - \Gamma_{111} \phi_2 &= m \psi_6; \end{aligned} \right. \quad (7.4)$$

7. Soluciones Explícitas con Masa .

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_2 - \Gamma_{211}) \phi_4 - (\partial_3 + \Gamma_{111} - \Gamma_{124}) \phi_5 = m \psi_4; \\ (\partial_1 + \Gamma_{211}) \phi_5 + (\partial_4 + 2\Gamma_{111} + \Gamma_{124}) \phi_3 = m \psi_2; \\ (\partial_2 + \Gamma_{211}) \phi_3 - (\partial_3 + \Gamma_{111} - 3\Gamma_{124}) \phi_5 - \Gamma_{111} \phi_4 = m \psi_4; \\ (\partial_1 + 3\Gamma_{211}) \phi_4 + (\partial_4 + 2\Gamma_{111} - \Gamma_{124}) \phi_3 + \Gamma_{111} \phi_5 = m \psi_4. \end{array} \right. \quad (7.4)$$

Como en el capítulo anterior, buscaremos soluciones temporales de la forma $\exp[i\omega t]$. Así, las ecuaciones explícitas quedan:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_\theta - (1/2) \cot\theta + ic \csc\theta \partial_\varphi) \psi_3 + (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r + i\omega r + 1 - 3M/2r] \psi_1 = m r \phi_1; \\ (\partial_\theta + (1/2) \cot\theta - ic \csc\theta \partial_\varphi) \psi_2 - (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r - i\omega r + 2 - 9M/2r] \psi_4 = m r \phi_5; \\ (\partial_\theta + (1/2) \cot\theta + ic \csc\theta \partial_\varphi) \psi_4 + (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r + i\omega r + 1 - M/2r] \psi_2 + \\ + (1-2M/r)^{1/2} \psi_3 = m r \phi_3; \\ (\partial_\theta + (3/2) \cot\theta - ic \csc\theta \partial_\varphi) \psi_1 - (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r - i\omega r + 2 - 7M/2r] \psi_3 - \\ - (1-2M/r)^{1/2} \psi_2 = m r \phi_3. \end{array} \right. \quad (7.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_\theta - (1/2) \cot\theta - ic \csc\theta \partial_\varphi) \psi_4 - (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r - i\omega r + 1 + 3M/2r] \psi_6 = m r \phi_4; \\ (\partial_\theta + (1/2) \cot\theta + ic \csc\theta \partial_\varphi) \psi_5 + (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r + i\omega r + 2 - 9M/2r] \psi_3 = m r \phi_2; \\ (\partial_\theta + (1/2) \cot\theta - ic \csc\theta \partial_\varphi) \psi_3 - (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r - i\omega r + 1 - M/2r] \psi_5 + \\ + (1-2M/r)^{1/2} \psi_4 = m r \phi_4; \\ (\partial_\theta + (3/2) \cot\theta + ic \csc\theta \partial_\varphi) \psi_6 + (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r + i\omega r + 2 - 7M/2r] \psi_4 - \\ - (1-2M/r)^{1/2} \psi_5 = m r \phi_4; \end{array} \right. \quad (7.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_\theta - (1/2) \cot\theta - ic \csc\theta \partial_\varphi) \phi_3 + (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r - i\omega r + 1 - 3M/2r] \phi_1 = m r \psi_1; \\ (\partial_\theta + (1/2) \cot\theta + ic \csc\theta \partial_\varphi) \phi_2 - (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r + i\omega r + 2 - 9M/2r] \phi_4 = m r \psi_5; \\ (\partial_\theta + (1/2) \cot\theta - ic \csc\theta \partial_\varphi) \phi_4 + (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r - i\omega r + 1 - M/2r] \phi_2 + \\ + (1-2M/r)^{1/2} \phi_3 = m r \psi_3; \\ (\partial_\theta + (3/2) \cot\theta + ic \csc\theta \partial_\varphi) \phi_1 - (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r + i\omega r + 2 - 7M/2r] \phi_3 - \\ - (1-2M/r)^{1/2} \phi_2 = m r \psi_3; \end{array} \right. \quad (7.7)$$

7. Soluciones Explícitas con Masa

$$\left. \begin{aligned}
 (\partial_0 - (1/2) \cot\theta + ic \csc\theta \partial_\varphi) \phi_+ - (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r + i\omega r + 1 + 3M/2r] \phi_+ &= m r \psi_+; \\
 (\partial_0 + (1/2) \cot\theta - ic \csc\theta \partial_\varphi) \phi_- + (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r - i\omega r + 2 - 9M/2r] \phi_- &= m r \psi_-; \\
 (\partial_0 + (1/2) \cot\theta + ic \csc\theta \partial_\varphi) \phi_+ - (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r + i\omega r + 1 - M/2r] \phi_+ &+ \\
 + (1-2M/r)^{1/2} \phi_+ &= m r \gamma_+; \\
 (\partial_0 + (3/2) \cot\theta - ic \csc\theta \partial_\varphi) \phi_- + (1-2M/r)^{-1/2} [(r-2M)\partial_r - i\omega r + 2 - 7M/2r] \phi_- &- \\
 - (1-2M/r)^{1/2} \phi_- &= m r \gamma_-.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

La simetría de la que hablamos en el capítulo pasado se extiende aquí a las componentes de ϕ . Las ecuaciones 7.6 y 7.8 se obtienen de las 7.5 y 7.7 respectivamente, si se hacen cualquiera de las identificaciones de las siguientes tablas:

$$\left. \begin{array}{l} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{*0} \\ - \gamma_{*3} \\ - \gamma_{*4} \\ \gamma_{*3} \\ - \gamma_{*2} \\ \gamma_{*1} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_{*0} \\ \phi_{*3} \\ - \phi_{*4} \\ \phi_{*3} \\ \phi_{*2} \\ - \phi_{*1} \end{array} \right.$$

TABLA III

$$\left. \begin{array}{l} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} - \gamma_{*0} \\ \gamma_{*3} \\ - \gamma_{*4} \\ \gamma_{*3} \\ \gamma_{*2} \\ - \gamma_{*1} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_{*0} \\ \phi_{*3} \\ - \phi_{*4} \\ \phi_{*3} \\ \phi_{*2} \\ \phi_{*1} \end{array} \right.$$

TABLA IV

$$\left. \begin{array}{l} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{*0} \\ \gamma_{*3} \\ - \gamma_{*4} \\ \gamma_{*3} \\ \gamma_{*2} \\ - \gamma_{*1} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_{*0} \\ - \phi_{*3} \\ - \phi_{*4} \\ \phi_{*3} \\ - \phi_{*2} \\ \phi_{*1} \end{array} \right.$$

TABLA III'

$$\left. \begin{array}{l} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{*0} \\ - \gamma_{*3} \\ - \gamma_{*4} \\ \gamma_{*3} \\ - \gamma_{*2} \\ \gamma_{*1} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} - \phi_{*0} \\ \phi_{*3} \\ - \phi_{*4} \\ \phi_{*3} \\ \phi_{*2} \\ - \phi_{*1} \end{array} \right.$$

TABLA IV'

7. Soluciones Explícitas con Masa .

Evidentemente en este caso no es posible escribir las ecuaciones en términos de potenciales, como se hizo para la ecuación RS sin masa. Sin embargo, dada la extrema complejidad del sistema de ecuaciones 7.5-8, posiblemente sobredeterminado también, nos limitaremos a encontrar soluciones particulares. Por similitud con el caso $m=0$, debido a que la identificación de las componentes ψ_3 y ψ_4 es la misma, haremos cero estas componentes, junto con las que presenten esta misma relación bivaluada en las tablas anteriores.

La tabla III nos lleva entonces a que $\psi_3 = \psi_4 = 0$ y $\phi_1 = \phi_3 = \phi_4 = 0$, lo cual, sustituyendo en las ecuaciones implica trivialmente que todas las componentes son idénticamente cero.

La tabla IV en cambio, lleva sólo a que $\psi_3 = \psi_4 = 0$ y $\phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0$, lo cual en las ecuaciones da:

- a) $(1/r) D^{3/2} \psi_1 = m \phi_1;$
 - b) $L^{*1/2} \psi_2 = 0;$
 - c) $D^{1/2} \psi_2 = 0;$
 - d) $L^{*3/2} \psi_1 - (/\)^{-1} \psi_2 = 0;$
 - e) $(1/r) D^{*3/2} \phi_1 = m \psi_1;$
 - f) $m \psi_3 = 0;$
 - g) $L^{3/2} \phi_1 = 0,$
- (7.9)

y las correspondientes para ψ_4 y ϕ_4 según la tabla IV.

Aplicando $L^{3/2}$ a la ecuación 7.9-e y utilizando (g) se encuentra:

$$D^{*3/2} (L^{3/2} \phi_1) = m r L^{3/2} \psi_1 = 0. \quad (7.10)$$

Este resultado en 7.9-d implica que $\psi_2 = 0$. Por lo tanto las únicas componentes no nulas son:

$$\psi_1, \psi_4, \phi_1 \text{ y } \phi_4.$$

Nótese que si $m=0$, lo anterior no se implica. Las ecuaciones que satisfacen las componentes ψ_1 y ϕ_1 son:

$$(1/r) D^{3/2} \psi_1 = m \phi_1; \quad (7.11)$$

$$(1/r) D^{*3/2} \phi_1 = m \psi_1;$$

$$L^{*3/2} \psi_1 = L^{3/2} \phi_1 = 0. \quad (7.12)$$

Las ecuaciones asociadas a las tablas III' y IV' son exactamente las mismas que las de las tablas III y IV respectivamente, por lo que no es necesario abundar en ellas.

Las soluciones angulares son una la compleja conjugada de la otra, y la de ψ_1 es la misma que la de la ecuación 6.5 sin

7. Soluciones Explícitas con Masa .

masa que ya se obtuvo:

$$\exp[-ik\varphi](\csc\theta + \cotg\theta) * \csc^{3/2}\theta.$$

La parte radial es evidentemente más compleja. Desacoplando para ϕ_1 , después de una terrible álgebra -cambiando derivadas parciales por derivadas totales- :

$$\begin{aligned} & [(r-2M)^2 d^2/dr^2 + (r-2M)(2-M/r)d/dr + \\ & + (1-3M/2r-iwr)(iwr+M/2r) + (r-2M)(3M/2r^2-iwr-rm^2)] \phi_1 = 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Atendiendo a parte de la la comunidad científica, que asegura que es más conveniente utilizar la coordenada r^* de Regge-Wheeler (4.14) en lugar de r , la ecuación sufre la siguiente metamorfosis:

$$[rd^2/dr^{*2} + (2-3M/r)d/dr^* + w^2r + 2M/r^2 - 15M^2/r^3 - (r-2M)m^2] \phi_1 = 0,$$

donde la r está definida implícitamente. Esta es una expresión complicada que sin embargo es posible simplificar mediante un sutil cambio de variable que elimina el término de la primera derivada. Este cambio de variable es:

$$\phi_1 = (1/r)(1-2M/r)^{-1/4} \mathcal{F}(r^*). \quad (7.14)$$

Esto transforma la ecuación de onda en una forma que tiene un parecido asombroso con la ecuación de Schroedinger para un potencial central:

$$[d^2/dr^{*2} + w^2 - (1-2M/r)m^2] \mathcal{F}(r^*) = 0. \quad (7.15)$$

Esta expresión, aunque más sencilla que la anterior, no puede ser integrada exactamente porque el término que hace las veces de potencial es una función trascendente de r^* (en los trabajos donde se resuelven problemas similares pero para otros espines, se obtienen ecuaciones parecidas y tampoco son integradas exactamente, ver por ejemplo citas (7) y (8) del capítulo cuarto. Sin embargo no podemos asegurar que la solución analítica no exista). Esto no es grave pues los casos de interés son los comportamientos asintóticos de las soluciones (las regiones muy cerca y muy lejos del horizonte). En estos casos la ecuación 7.15 toma una forma integrable:

i) $r \rightarrow \infty$.

En este caso, puesto que $r^* \rightarrow r$, la ecuación 7.15 en primera aproximación es la ecuación de Schroedinger del átomo de hidrógeno correspondiente al estado de simetría esférica ($l=0$) con autovalores de energía $E_n = w_n^2 - m^2$:

$$-[d^2/dr^2 + 2m^2M/r] \mathcal{F}(r) = (w^2 - m^2) \mathcal{F}(r). \quad (7.16)$$

Sus soluciones son en consecuencia las respectivas del átomo de hidrógeno⁽¹⁾ que convergen en infinito:

7. Soluciones Explícitas con Masa

$$\Psi(r \gg 2M) = (2Mm^2n)^{3/2} [(n-1)! / 2n(n!)^3]^{1/2} L_n^3(2Mm^2r/n) \exp[-Mm^2r/n]. \quad (7.17)$$

donde las L 's son los polinomios asociados de Laguerre. La w está cuantizada por:

$$(w^2 - m^2) = -m^4 M^2 / n^2, \text{ es decir } w_n = \pm m(1 - (Mm/n)^2)^{1/2}. \quad (7.18)$$

$n=1, 2, 3, 4, \dots$

Nótese que w_n es un número imaginario puro para todos los valores de n entre 1 y la parte entera de Mm , y real de este valor en adelante.

En la identificación de nuestra ecuación con el átomo de hidrógeno, no están tomados en cuenta los casos en que w^2 sea mayor que o igual a m^2 pues en la ecuación de Schroedinger sólo están contemplados estados ligados, es decir de energía menor que cero. Además de esto, esta identificación sólo permite considerar la solución estacionaria en el caso en que mM sea una cantidad cuantizada entera. No podemos asegurar que esto no sea casual pero no existe ninguna razón de peso para suponer que esto sea una condición de la naturaleza. No obstante, este caso no presenta ninguna singularidad en este límite ($r \gg 2M$). Para contemplar las otras posibilidades haremos la aproximación a orden cero ($M=0, r \rightarrow \infty$) en 7.15:

$$[d^2/dr^2 + w^2 - m^2]\Psi(r) = 0. \quad (7.19)$$

La solución general de esta ecuación es:

$$\Psi(r) = A \exp[i(w^2 - m^2)^{1/2}r] + B \exp[-i(w^2 - m^2)^{1/2}r]. \quad (7.20)$$

De aquí obtenemos la solución completa en r y t :

$$\phi_+(r, t) = (1/r) [A \exp[i(w^2 - m^2)^{1/2}r] + B \exp[-i(w^2 - m^2)^{1/2}r]] \exp[i\omega t]. \quad (7.21)$$

La solución estacionaria convergente es:

$$\phi_+(r, w=0) = (1/r) A \exp[-mr] \quad B=0. \quad (7.22)$$

ii) $r \rightarrow \infty$:

Por simplicidad, en este caso sólo tomaremos en cuenta la aproximación a orden cero ($r \rightarrow \infty$):

$$[d^2/dr^{*2} + w^2]\Psi(r^*) = 0, \quad (7.23)$$

cuya solución general es: $\Psi(r^*) = C \exp[i\omega r^*] + D \exp[-i\omega r^*]$,

de donde:

$$\phi_+(r^*, t) = \exp[i\omega t] / r (1 - 2M/r)^{-1/4} [C \exp[i\omega r^*] + D \exp[-i\omega r^*]]. \quad (7.24)$$

La solución estacionaria general se obtiene de integrar la ecuación 7.23 con $w=0$. Esta elección en 7.24 nos da sólo un caso particular. La ϕ_+ general es:

7. Soluciones Explícitas con Masa .

$$\phi_1(r^*, w=0) = (1/r) (1-2M/r)^{-1/4} (C' + D'r^*). \quad (7.25)$$

Salvo la trivial, no existe una solución convergente de esta ecuación en $r=2M$. De esta manera, aunque hay solución que converge en el infinito, la solución no es física. Como en el caso de partícula sin masa, esto implica que si las ecuaciones descriptivas de una partícula masiva de espín 3/2 son las 7.1, un hoyo negro de Schwarzschild no tiene ningún parámetro que provenga de este valor del espín.

Aunque es altamente improbable, cabría la posibilidad de que la componente ψ_1 sea físicamente aceptable en el caso estacionario, por lo que se analizará su comportamiento general. De la segunda ecuación de 7.11, utilizando las expresiones asintóticas a orden cero del operador $D^{-3/2}$ se obtienen las soluciones:

$r \rightarrow \infty$:

$$\psi_1 = (1/mr) [\phi_1(r \rightarrow \infty) (1-2iwr) + i(w^2 - m^2)^{1/2}] \times \\ (A \exp[i(w^2 - m^2)^{1/2}] - B \exp[-i(w^2 - m^2)^{1/2}]) (1+1/r).$$

$r \rightarrow 2M$:

$$\psi_1 = (1-2M/r)^{-1/2} (1/8M - iw) \phi_1(r \rightarrow 2M).$$

Estas soluciones tienen el mismo comportamiento asintótico que ϕ_1 , por lo que no es necesario abordarlo con profundidad. En particular no hay solución estacionaria convergente en el horizonte.

De este modo, desde la perspectiva de las dos ecuaciones estudiadas, no puede haber un parámetro de espín 3/2 entre los que caracterizan a un hoyo negro de Schwarzschild.

Por las mismas razones discutidas en el capítulo anterior también se discutirá en el próximo la evolución temporal de estas soluciones.

REFERENCIA.

1. Messiah A., Quantum Mechanics, John Wiley & Sons, New York, 2 vol., pp. XXX-1136.

CAPITULO VIII

LA EVOLUCION TEMPORAL DE LAS SOLUCIONES ASINTOTICAS; DISCUSION FINAL.

Como se encontró en capítulos anteriores, no existe una solución estacionaria físicamente aceptable para ninguna de las tres ecuaciones propuestas para partícula de espín 3/2 en métrica de Schwarzschild. Esto está en completo acuerdo con la "hipótesis de los pelos", ya que si existiese este tipo de solución, un hoyo negro de Schwarzschild podría tener un parámetro de espín 3/2 además del de la masa. Este análisis se hizo sólo a primer orden, es decir no se tomó en cuenta la perturbación que las partículas de espín 3/2 ejercen sobre la métrica de fondo. Perturbar la métrica implicaría poner en las ecuaciones de Einstein un tensor de energía-momento con contribuciones del campo de espín. Para la ecuación de RS, esto sería algo de la forma":

$$T_{\mu\nu} = \bar{\Psi}^{\alpha} \Psi_{\alpha}{}_{;\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} \bar{\Psi}^{\rho}{}_{;\sigma} \Psi_{\rho}{}^{;\sigma},$$

y en la métrica aparecerían nuevos términos asociados a este tensor.

En el capítulo IV, se discutió el proceso de formación de un hoyo negro por colapso gravitacional de una estrella. Es desde esta perspectiva que es de interés estudiar la evolución temporal de las soluciones para partícula de espín 3/2. Es posible considerar que la estrella en vías de colapsarse tenga carga de espín 3/2 y que por esto genere un campo de partículas de espín 3/2 en el espacio. En el momento en que la superficie estelar rebasa el horizonte, este campo puede sufrir alteraciones. Estudiar la evolución temporal del campo, después de ocurrido el colapso, es precisamente el objetivo de este capítulo.

Puesto que los términos importantes de este campo son el radial y temporal, omitiremos la expresión de los términos angulares de las soluciones.

Las soluciones exactas de la ecuación 6.5 para partícula sin masa son de la forma:

$$\Psi = (r/2M)^{-1/2} (r/2M-1)^{-3/2} e^{i\omega(t-r)}. \quad (8.1)$$

Esta última expresión no es normalizable en ambas asíntotas simultáneamente para algún valor de w . Cuando w es real, la solución converge en el infinito pero diverge en el horizonte. Para que aquí converja, es entonces necesario que $w = -iq$, con q real y positivo, pero en este caso la solución diverge en el infinito. Evidentemente no existe otra posibilidad de elección de w , por lo que hay que desechar esta solución. Por esto no es posible describir un campo de espín 3/2 sin masa en esta métrica con la ecuación 6.1. Es decir, si se pudiera describir este campo en la vecindad de una estrella que está en proceso de colapsarse, al rebasar la superficie estelar el horizonte de eventos se llegaría a la inconsistencia de que el campo

8. Evolución de las Soluciones; Discusión Final

divergiera, o en su defecto se hiciera automáticamente cero en todo el espacio, cosa que viola la causalidad.

A su vez, las soluciones de la ecuación de RS para partícula sin masa son:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= (1-2M/r)^{1/2} (r/2M-1)^{-3/4} (r/2M)^{-1/4} e^{i\omega(t-r^*)}, \\ \Psi_2 &= (r/2M-1)^{-3/4} (r/2M)^{-1/4} e^{i\omega(t-r^*)}.\end{aligned}\tag{8.2}$$

Debido a las mismas razones que la solución 8.1, esta expresión tampoco es normalizable simultáneamente en el infinito y en el horizonte de eventos.

Richard Price⁽²⁾ plantea al respecto de este campo: "La manera usual de extender teorías de campo de espacio plano a espacio curvo es mediante 'acoplamiento mínimo' (cambiando derivadas parciales por derivadas covariantes). Esto resulta en ecuaciones correctas para campos de neutrino y electromagnéticos -i.e. los casos espín=1/2 y 1-. Sin embargo, las ecuaciones resultantes para campos de espines mayores son inconsistentes. (Una idea tentadora: ¿Acaso la naturaleza, como los físicos, tiene dificultad con campos sin masa de espines mayores?). No se conocen ecuaciones consistentes para campos de espines mayores..."

Price termina indicando que un posible camino a seguir es el de cambiar el acoplamiento mínimo. La inconsistencia de las ecuaciones está en completo acuerdo con el resultado recién obtenido. Ahora, el problema de encontrar una alternativa al "acoplamiento mínimo" excede las expectativas de esta investigación. Sin embargo es posible que ahí se encuentre el problema.

Ahora corresponde ver qué sucede con las soluciones para partícula masiva. Sus soluciones asintóticas son:

$$\begin{aligned}r \rightarrow \infty: \\ \phi_1 = e^{i\omega t} (1/r) (1-2M/r)^{-1/4} (A \exp[i(\omega^2 - m^2)^{1/2} r] \\ + B \exp[-i(\omega^2 - m^2)^{1/2} r]);\end{aligned}\tag{8.3}$$

$$\begin{aligned}r \rightarrow 2M: \\ \phi_1 = e^{i\omega t} (1/r) (1-2M/r)^{-1/4} (C e^{i\omega r^*} + D e^{-i\omega r^*}).\end{aligned}\tag{8.4}$$

La expresión 8.4 diverge en el horizonte si w es real. La única alternativa entonces es que $w=iq$ (la elección $w=-iq$ tendría como resultado soluciones divergentes en el tiempo, lo cual es intuitivamente inaceptable. Sin embargo esta posibilidad se discutirá enseguida). Esto arroja las soluciones convergentes:

$$\begin{aligned}r \rightarrow \infty: \\ \phi_1(r \rightarrow \infty, q) = e^{-q t} (1/r) (1-2M/r)^{-1/4} A \exp[-(q^2 + m^2)^{1/2} r] \quad B=0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r \rightarrow 2M: \\ \phi_1(r \rightarrow 2M, q) = e^{-q t} (1/r) (1-2M/r)^{-1/4} D e^{q r^*} \quad C=0.\end{aligned}$$

De aquí se observa que la exigencia de que las soluciones

8. Evolución de las Soluciones; Discusión Final

para partícula masiva sean físicamente aceptables en ambas asíntotas implica que la solución debe hacerse cero en el tiempo, i.e., el campo radía toda su energía a partir de que se forma el hoyo negro. Existe, como mencionamos, la otra posibilidad, es decir $w=-iq$ que implica que la solución diverja en el tiempo aun cuando tenga como ahora términos convergentes para ambas asíntotas. Esta posibilidad no tiene significado cuando el análisis se hace a primer orden como en el presente trabajo. Si se obtuviera esto como única alternativa lo único que podría decirse es que nuestro enfoque está equivocado. De hecho, Price⁽³⁾ justifica el análisis a primer orden en los siguientes términos:

"...Si por una parte las perturbaciones crecen sin límite, nuestros resultados no tendrán ningún significado, pero podremos concluir que nuestra presente idea de colapso gravitacional es errónea. Si por otra parte, las perturbaciones se mantienen pequeñas, el enfoque está justificado".

Cabe la posibilidad de que las soluciones asintóticas no estén conectadas. Esto no alteraría la "hipótesis de los pelos" pues podría decirse lo mismo de este resultado que del correspondiente para la ecuación sin masa, de tal forma que el comentario de Price acerca de la validez del acoplamiento mínimo, sería aplicable también a campos masivos de espín 3/2. Es decir, ya sea que la existencia de este tipo de campo en la vecindad de una estrella en vías de colapsarse haga que no se forme el hoyo negro, o las ecuaciones del campo (y/o el acoplamiento mínimo) son inadecuadas.

Nuestros resultados sugieren entonces que no existen hoyos negros de Schwarzschild con parámetros de espín 3/2.

Cabría como última pregunta, ¿Que sucedería si se obtuviera una solución física con oscilaciones finitas en el tiempo? En este caso el tensor de energía momento asociado al campo dependería del tiempo, y por tanto la métrica no sería estática, de tal forma que podría obtenerse como resultado final del colapso gravitacional un objeto con horizonte, que no siendo estacionario tenga las demás características de un hoyo negro, claro está, con un parámetro de espín 3/2. Si se obtiene o no este objeto podrá saberse solamente si se resuelven las ecuaciones de Einstein de manera exacta, pero estas posibilidades son meras especulaciones.

8. Evolución de las Soluciones; Discusión Final

REFERENCIAS.

1. Yilmaz H., Introduction to the Theory of Relativity and the Principles of Modern Physics, Blaisdell Publishing Co., New York, 1965, pp. XIV-216.
2. Price R., "Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse. II-Integer-Spin, Zero-Rest-Mass Fields", Phys. Rev. D5, 10 (May 1972), pp 2439-2454.
3. Price R., "Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse. I-Scalar and Gravitational Perturbations", Phys. Rev. D5, 10 (May 1972), pp 2419-2438.

CONCLUSIONES.

A continuación se hará un balance de los resultados obtenidos, las limitaciones encontradas y las implicaciones generales a que nos llevaron.

Se encontró la solución exacta de la ecuación 6.1 en métrica de Schwarzschild, así como una solución no trivial, particular, de la ecuación de RS sin masa. Para el caso masivo se encontraron también las formas asintóticas de una solución particular de la misma.

Separando los casos en con y sin masa, no se encontró para el segundo de ellos que puedan existir soluciones, ni estacionarias ni de ningún otro tipo, que puedan interpretarse consistentemente como funciones de onda. Lo cual implica que no puede haber un campo de espín $3/2$ sin masa alrededor de un hoyo negro de Schwarzschild y en consecuencia éste no puede tener un parámetro (pelo) asociado a este campo. Aunque no se pudo demostrar que la solución para la ecuación de RS sin masa es general, todos los intentos en esta dirección parecían indicar que éste es precisamente el caso. L. F. Urrutia⁽¹⁾ analiza una ecuación muy similar a ésta y obtiene soluciones generales muy parecidas a las nuestras, lo cual apoya la conjetura anterior.

El problema de "los pelos" en un hoyo negro ya ha sido estudiado en el marco de la supergravedad, en donde se obtuvo que sólo la métrica de Reissner-Nordström extrema ($M=Q$) puede soportar un "super pelo" de espín $3/2$ ⁽²⁾.⁽³⁾

Para el caso con masa, puesto que no se obtuvo una solución estacionaria regular, no hay pelos de este espín. Al estudiar la evolución temporal de estas soluciones, se encontró que es posible que las soluciones bien portadas se desvanezcan en el tiempo, lo cual es la única posibilidad físicamente razonable.

REFERENCIAS.

1. Urrutia L. F., "An Example of the No-Hair Conjecture in Supergravity", Phys. Letters 89B, 1 (Dec. 31, 1979), pp. 52-56.
2. Aichelburg P. C. & Güven R., "Can Charged Black Holes Have a 'Superhair'?", Phys. Rev. D24, 8 (Oct. 15, 1981), pp. 2066-2076.
3. Güven R. "Extreme Reissner-Nordström Black Holes can Support a 'Superhair'", Phys. Rev. D25, 12 (Jun. 15, 1982), pp. 3117-3125.

REFERENCIAS GENERALES

Aichelburg P.C. & Güven R., "Can Charged Black Holes Have a 'Superhair'?", Phys. Rev. D24, 8 (Oct. 15, 1981)

Chandrasekhar S., The Mathematical Theory of Black Holes, en AAVV, General Relativity and Gravitation (ed. B. Bertotti et. al.), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht Holland, 1974 pp. 5-26.

Courant R. y John F. Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático, Vol. 2, ed. Limusa S.A. México D.F. 1979, pp. 1041.

Darkhosh T., "Is there a solution to the Rarita-Schwinger wave equation in the presence of an external electromagnetic field?", Phys. Rev. D32, 12 (1985).

Dirac P.A.M., Proc. Roy. Soc. (London) A155, 447 (1936).

Dirac P.A.M., The Principles of Quantum Mechanics, 4th edition, Oxford University Press, Oxford U.K., 1984.

DeWitt B.S., "Quantum Field Theory in Curved Space Time", Phys. Rep. 19, 6 (1975), pp. 295-357.

Dultzin-Hacyan D. y Hacyan S., Los Agujeros Negros, en AAVV, Temas Selectos de Astrofísica (edición al cuidado de M. Peimbert), Dirección General de Publicaciones U.N.A.M., México D.F., 1984, pp. 201-251.

Feynman R.P., Lectures on Gravitation, (1962-63) Caltech, Pasadena U.S.A. 1971.

Fierz M. & Pauli W., "On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field", Proc. Roy. Soc. (London) A173, 211 (1939).

Güven R. "Extreme Reissner-Nordström Black Holes can support a Superhair", Phys. Rev. D25, 12 (Jun. 15, 1982), pp. 3117-3125.

Hacyan S., Notas Sobre Espinores, notas personales, Instituto de Astronomía U.N.A.M., México D.F. pp. 46.

Hacyan S. & Plebański J.F., "Some Basic Properties of Killing Spinors", J. Math. Phys. 17, 12 (Dec. 1976) pp. 2203-2206.

Hawking S.W. & Ellis G.F.R., The Large-Scale Structure of Space-Time, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1973, pp. XI-391.

Hurley W., "Relativistic Wave Equations for Particles with Arbitrary Spin" Phys. Rev. D12, 12 (1971).

Kalotas T.M. & Eliezer C.J., "Petrov Classification: An

- Elementary Approach", Am. J. Phys. **51**, 1 (Jan. 1983), pp.24-28.
- Labonté G., "A Relatively Simple Equation for an Antisymmetric Tensor Spinor Field of Spin $3/2$ ", Il Nuovo Cimento, **59A**, N.3 (1980).
- Landau L.D. & Lifshitz E.M., The Classical Theory of Fields, (Landau & Lifshitz Course on Theoretical Physics Vol. 2), 4th ed., Pergamon Press, Oxford, U.K., 1979, pp. XI-399.
- Landau L.D. & Lifshitz E.M., Quantum Mechanics Non Relativistic Theory) (Landau & Lifshitz Course on Theoretical Physics Vol. 3), 3rd ed., Pergamon Press, Oxford, U.K., 1977, pp. XIV-673.
- Lifshitz E.M. et. al.: Quantum Electrodynamics (Landau & Lifshitz Course of Theoretical Physics vol. 4), 2nd edition, Pergamon Press, 1982.
- Messiah A., Quantum Mechanics, John Wiley & Sons, New York, 2 tomos, pp. XXX-1136.
- Misner Ch.W. Thorn K. & Wheeler J.A., Gravitation, W.H. Freeman & Co., U.S.A. 1973, pp. XXVII-1277.
- Penrose R., "A Spinor Approach to General Relativity", Ann. Phys. **10**, (1960), pp. 171-201.
- Plebański J.F., Spinors, Tetrads and Forms, Centro de Investigacion y de Estudios Avanzados del I.P.N., Mexico D.F., 1974, pp. V-191.
- Price R.H., "General Relativity Primer", Am. J. Phys, **50**(4) 1982, 300-329.
- Price R.H., "Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse. I. Scalar and Gravitational Perturbations.", Phys. Rev. **D5**, 10 (May 1972), pp. 2419-2438.
- Price R.H., "Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse. II. Integer-Spin, Zero-Rest-Mass Fields.", Phys. Rev. **D5**, 10 (May 1972), pp. 2439-2454.
- Rarita W. & Schwinger J., "On a Theory of Particles with Half-Integral Spin", Phys. Rev. **60**, 61 (1941).
- Schleifer N. "Differential Forms as a Basis for Vector Analysis -with Applications to Electrodynamics" Am. Jour. Phys. **51**, 12 (Dec. 1983), pp. 1139-1145.
- Schweber S.S., Relativistic Quantum Field Theory., Harper & Row, New York, 1964.
- Urrutia L.F., "An Example of the No-Hair Conjecture in Supergravity", Phys. Lett. **89B**, 1 (Dec. 31,1979), pp. 52-56.

Referencias Generales

Velo G. & Zwanziger D., "Propagation and Quantization of Rarita-Schwinger Waves in an External Electromagnetic Potential", Phys. Rev. **186**, 1337 (1969).

Yilmaz H., Introduction to the Theory of Relativity and the Principles of Modern Physics, Blaisdell Publishing Co., New York, 1965, pp. XIV-216.

Weinberg S., Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, Wiley & Sons, New York, 1972, pp. XXIX-657.