



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

**APLICACION DEL FILTRO KALMAN AL PROBLEMA
DE DECONVOLUCION EN EXPLORACION
SISMOLOGICA**

T E S I S

**PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO GEOFISICO**

P R E S E N T A :

OSCAR FCO. OLIVERA TORO BERGES

MEXICO, D. F.

1987



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Pag.

INTRODUCCION.....	5
CAPITULO I. INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE VARIABLES DE ESTADO.....	8
I.1 Introducción a los sistemas lineales.....	8
I.2 Conceptos generales de modelos de variables de estado MVE.....	12
I.3 Obtención de los modelos de variables de estado.....	17
I.4 Solución de la ecuación de estado para sistemas invariantes en el tiempo	22
I.5 Estabilidad en los MVE	24
CAPITULO II CONSTRUCCION DE SISMOGRAMAS BASADOS EN EL MODELO DE VARIABLES DE ESTADO Y SU EQUIVALENCIA CON EL MODELO CONVOLUCIONAL...26	
II.1 Representación matemática de sismogramas de reflexión.....	26
II.2 Suposiciones estadísticas del MVE	30
II.3 Representación de ondiculas fuente en MVE.....	33
II.4 Generación de secuencias de reflexión.....	37
II.5 Obtención de sismogramas sintéticos por MVE	40
II.6 Generación de ruido aleatorio y relación señal a ruido.....	44
CAPITULO III DECONVOLUCION DE VARIANZA MINIMA UTILIZANDO EL FILTRO KALMAN.....49	
III.1 Estimación de varianza mínima	50

III.2 Propiedades de los estimadores	54
III.3 Estimadores	55
III .3.1 Predicción óptima	56
III .3.2 Filtrado óptimo	57
III .3.3 Suavizador óptimo	63
III.4 Estimación de la secuencia de entrada	64
CAPITULO IV APLICACION DE LA DECONVOLUCION DE VARI- ANZA MINIMA A SISMOGRAMAS SINTETICOS CON RUIDO.....	69
IV.1 Presentación de datos sintéticos y aplicación del operador de Deconvo- lución.....	70
IV.1.1 Sismograma sintético a partir de una secuencia aleatoria	70
IV.1.2 Sismograma sintético impulsivo	80
IV.1.3 Sismograma sintético con mál- tiples.....	93
CONCLUSIONES.....	103
Apéndice II.A Colección de ondículas.....	105
Apéndice II.B Obtención de la matriz de transición A y el vector distribución b.....	106
Apéndice II.C Rutinas utilizadas en la construcción de sismogramas sintéticos por variables de estado.....	109
Apéndice III.A Obtención del estimador de predicción.....	110
Apéndice III.B Proceso innovador.....	111
Apéndice III.C Matrices de covarianza y crosscova- rianza.....	112
Apéndice III.D Varianza del error del filtro Kalman.....	113
PROGRAMAS.....	114
BIBLIOGRAFIA.....	122

INTRODUCCION.

El método sísmico de reflexión se inicia con la generación de una perturbación local y de corta duración muy cercana a la superficie. La energía liberada durante la perturbación, mediante algún dispositivo mecánico o químico, se propaga en el medio en forma de ondas, tanto superficiales como de cuerpo, experimentando fenómenos de reflexión, refracción, absorción y divergencia esférica.

Después de cierto tiempo, parte de la energía, regresa a la superficie y excita a un conjunto de sismodetectores que reciben la respuesta a la perturbación inicial, la señal recibida en los sismodetectores es filtrada, amplificada y registrada adecuadamente en forma de sismograma.

En exploración sísmológica de reflexión son de particular interés los eventos de ondas P, procedentes de interfases de velocidades del subsuelo, ya que éstos permiten deducir características litológicas, estratigráficas y estructurales. Existen varios factores que dificultan esta tarea, algunos de ellos son: La duración de la función de perturbación u ondícula, los eventos de reflexiones múltiples y el ruido ambiental aleatorio.

Con la idea de eliminar o minimizar los efectos indeseables en los sismogramas de reflexión producidos por los factores antes mencionados, se aplica el proceso conocido

como DECONVOLUCION. Desde su origen hasta la actualidad se han propuesto diversos esquemas , entre los que se pueden citar : Deconvolución predictiva, impulsiva, homomórfica, de máxima entropía, de mínima entropía , norma L_1 , etc.

Un enfoque distinto , pero no menos versátil es el basado en ecuaciones de variables de estado y teoría de estimación, conocido como deconvolución de varianza mínima , en la que el filtro Kalman juega el papel central . Es el objetivo principal de esta tesis presentar los aspectos teóricos de este nuevo enfoque , así como mostrar la eficiencia y bondad de la técnica ante un conjunto de modelos sintéticos afectados por ruido aleatorio en distinto grado.

En el capítulo I se plantean brevemente los conceptos de ecuaciones de variables de estado , que serán de utilidad para el desarrollo de los capítulos subsiguientes.

En el capítulo II se presenta el modelo convolucional y su representación en ecuaciones de variables de estado. En ese mismo capítulo, se plantea la técnica de construcción de siseogramas sintéticos a partir de ecuaciones de estado.

En el capítulo III se da una breve introducción a la teoría de estimación , aplicando algunos de sus conceptos a la obtención de los coeficientes de reflexión .

Finalmente en el capítulo IV se presentan tres ejemplos con datos de modelos sintéticos , en los cuales se aplica la deconvolución de varianza mínima vía filtro Kalman , se

discuten los resultados obtenidos y surgen algunas conclusiones respecto al uso y bondad de la técnica de deconvolución.

CAPITULO I

INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE VARIABLES DE ESTADO.

I.1 INTRODUCCION A LOS SISTEMAS LINEALES.

Muchos de los fenómenos físicos a los que cotidianamente nos enfrentamos pueden ser representados mediante sistemas dinámicos. Un sistema dinámico es simplemente una relación preescrita entre un grupo de funciones de entrada o fuentes y un grupo de funciones de salida. El caso más simple de un sistema dinámico, es aquel asociado con una sola entrada $S(t)$ y una sola salida $X(t)$. La notación más común para representar un sistema dinámico es la siguiente

$$S(t) \longrightarrow X(t)$$

En donde \longrightarrow significa "da lugar".

Características importantes de un sistema lineal dinámico son: Su linealidad, su invarianza en el tiempo y su estado.

Se dice que un sistema es lineal, si cumple con las dos siguientes propiedades:

a) Propiedad de adición (o principio de superposición)

$$\text{Si } \underset{1}{S(t)} \longrightarrow \underset{1}{X(t)} \quad \text{y} \quad \underset{2}{S(t)} \longrightarrow \underset{2}{X(t)}$$

$$\text{Entonces: } \underset{1}{S(t)} + \underset{2}{S(t)} \longrightarrow \underset{1}{X(t)} + \underset{2}{X(t)}$$

b) Propiedad multiplicativa (o principio de homogeneidad)

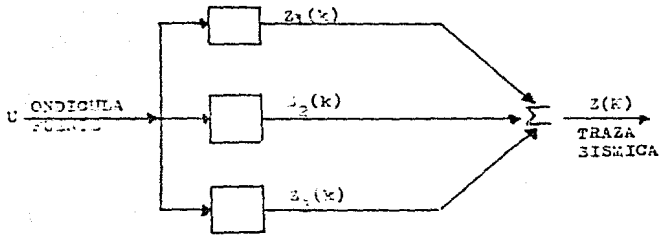


Fig. 1.2 Modelo de variables de estado (MV)

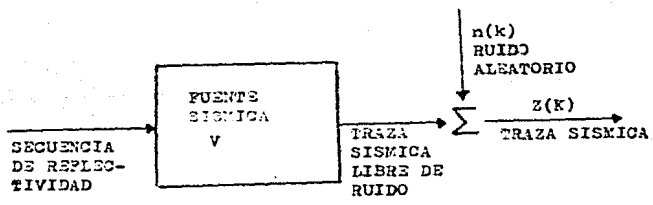


Fig. 1.1 Modelo convolucional

Si $S(t) \rightarrow X(t)$ entonces $kS(t) \rightarrow kX(t)$

En donde k es en general una constante compleja.

Por otra parte se dice que un sistema dinámico es invariante en el tiempo al cumplirse lo siguiente :

Si $S(t) \rightarrow X(t)$

Entonces : $S(t + T) \rightarrow X(t + T)$

En donde T es un valor arbitrario en el tiempo.

Finalmente el estado de un sistema al tiempo $t=t_0$ es la cantidad de información dentro de el sistema , que junto con las funciones de entrada determina el comportamiento de el sistema al tiempo $t \geq 0$.

En teoría de sistemas lineales la operación matemática que relaciona la entrada y la salida con las características internas del sistema es la convolución .

Si representamos a esas características internas del sistema mediante una función $h(t)$, conocida también como respuesta al impulso unitario , la relación preescrita entre la entrada y la salida se puede representar de la siguiente manera:

$$S(t) * h(t) = X(t)$$

En donde el simbolo $*$ significa convolución .

El fenómeno de propagación ondulatoria en medios estratificados puede representarse como un sistema dinámico lineal e invariante en el tiempo , donde la función o señal de entrada está dada por la ondícula fuente generada durante la libera-

ción inicial de energía , la respuesta al impulso unitario por una secuencia de reflectividad y la señal de la salida por el sismograma de reflexión . A esta representación se le conoce como modelo convolucional (Robinson , 1967) . En la figura (1.1) se muestra la representación diagramática de la operación de convolución.

Aquí se ha incluido una función de ruido $r(t)$ que representa los efectos presentes en el sismograma no debidos a los eventos de reflexión.

Una forma poco usual, pero válida (Mendel, 1978) de representar el método sismológico de reflexión, es intercambiar las funciones de entrada y la respuesta al impulso unitario, lo cual, como se menciona posteriormente es de gran utilidad al trabajar con modelos de variables de estado.

Diagramáticamente la representación anterior se muestra en la figura (fig 1.2)

La representación y manipulación de sistemas dinámicos lineales, entre ellos , el fenómeno de propagación ondulatoria en medios estratificados , no solamente es posible mediante el modelo convolucional , ya que existen otras representaciones , una de ellas y con la que se laborará a lo largo de este trabajo es el modelo de variables de estado (MVE).

En un modelo sísmico o en algún otro modelo lineal , puede ser necesario examinar el comportamiento de la entrada y la salida , así como de las variables internas del sistema , con la finalidad de investigar su estabilidad y determinar si

permanecen dentro de los límites en que son válidas las aproximaciones lineales. Mediante una caracterización de entrada - salida del sistema, como es el modelo convolucional, dicha tarea resulta bastante difícil.

Por otro lado, una descripción del sistema para analizar diversas entradas y salidas, teniendo M entradas y N salidas, empleando el método convolucional se requiere la evaluación de $M \times N$ sumas o integrales de convolución, ignorándose lo que sucede dentro del sistema.

Por último, si el sistema llega a ser complicado, se necesita una descripción compacta. La descripción de matrices, que se emplea en las representaciones de variables de estado de los sistemas lineales es independiente de lo complicado que éstos sean.

1.2 CONCEPTOS GENERALES DE MODELOS DE VARIABLES DE ESTADO.

El estado de un sistema puede estar representado por un vector $X(T)$, al cual se le llama vector de estado, de dimensión $n \times 1$.

Por modelo de variable de estado se entiende a un conjunto de ecuaciones que describen las relaciones únicas, entre la entrada, la salida y el estado. El modelo está compuesto por una ecuación de estado y otra de salida. Un modelo continuo de variables de estado es:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \quad (1.1.1)$$

$$Z(t) = CX(t) + Du(t) \quad (1.1.2)$$

La ecuación de estado (1.1.1) gobierna el comportamiento de el vector de estado $X(t)$, ésta es una ecuación diferencial vectorial de primer orden. La ecuación de salida (1.1.2) relaciona las salidas con el vector de estado y las entradas. En el modelo de ecuaciones de estado $X(t)$ es un vector de estado de dimensión $n \times 1$. $u(t)$ es un vector de entrada controlada de dimensión $r \times 1$, y $Z(t)$ es un vector de observación de dimensión $m \times 1$, A es una matriz de transición de estado de dimensión $n \times n$, B y D son matrices de distribución de entrada de $n \times r$ y $m \times r$ respectivamente y C es una matriz de observación del sistema de $m \times n$.

A continuación se tratará de ejemplificar lo anterior, mediante un sistema dinámico lineal correspondiente a un sismodetector o geofono, constituido a su vez por varios elementos internos (amortiguador, masa y resorte), excitados por una función de entrada $W(t)$, que produce como función de salida un desplazamiento x de la masa m (ver figura 3).

De la segunda ley de Newton, se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden para el desplazamiento $x(t)$:

$$m\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + kx(t) = mW(t) \quad (1.2)$$

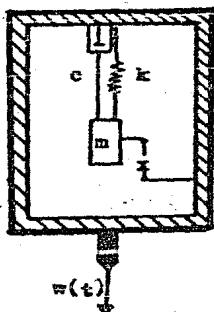


Fig. 1.3 Representación esquemática de un sismodetector, en donde m es la masa, k es la constante del resorte, c la constante del amortiguador y x el desplazamiento.

Para la solución clásica se requieren de dos condiciones iniciales y la función de entrada $W(t)$ para $t > 0$ y así determinar la ecuación de salida.

Normalizando la ecuación anterior para transformarla a un formato de variables de estado, se tiene:

$$\ddot{X}(t) + 2S\omega_n \dot{X}(t) + \omega_n^2 X(t) = W(t) \quad (1.3)$$

Para lo cual $w = (k/m)^{1/2}$ y $S = (c/m)(m/k)^{1/2}$; si se toma $X_1 = X(t)$ y $X_2(t) = \dot{X}(t)$, como las variables de estado, se observarán las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= \dot{X} = X_2 \\ \dot{X}_2(t) &= \ddot{X}(t) = -2S\omega_n \dot{X}_1 - \omega_n^2 X_1 + W \\ &= -2S\omega_n X_2 - \omega_n^2 X_1 + W \end{aligned} \quad (1.4)$$

Estas ecuaciones se pueden representar en la siguiente forma matricial, la cual es la ecuación de estado.

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2S\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} W(t)$$

En esta ecuación, las matrices A y B están dadas por:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Para completar el modelo del geofono en MVE se necesita también la ecuación de salida, la cual está dada por:

a) $Z_1 = X(t)$ es decir, se registra el desplazamiento, lo cual será expresado en términos de variables de estado como: $X = X_1$

$$Z_1(t) = (1, 0) X(t) \quad (1.5.a)$$

b) Cuando se registra la velocidad como salida, entonces se tendrá: $Z_2(t) = \dot{X}(t)$ o $X_2(t) = \dot{X}(t)$

$$Z_2(t) = (0, 1) X(t) \quad (1.5.b)$$

c) El caso en que se registra la aceleración, de tal forma que:

$$Z_3(t) = \ddot{X}(t) = \left(-\omega_n^2, -2\zeta\omega_n\right) X(t) + W(t) \quad (1.5.c)$$

d) Si se tienen más de dos señales registradas simultáneamente, éstas serán recolectadas en el vector de mediciones:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} Z(t) \\ 2 \\ \\ Z(t) \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \\ -w & -2sw \\ n & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ 1 \\ \\ X(t) \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix} \quad W(t) \quad (1.5.d)$$

1.3 OBTENCION DE LOS MODELOS DE VARIABLES DE ESTADO.

En la sección anterior se partió de una ecuación diferencial de segundo orden, para ejemplificar la manera de obtener el MVE. Ahora se verá que existen otros puntos de partida para representar a un sistema, mediante un MVE.

En general un MVE puede ser construido partiendo de los siguientes casos:

- a) De un conjunto de ecuaciones diferenciales o en diferencias, que están relacionadas con algún principio físico.
- b) De una función de transferencia.
- c) De una función impulsiva.
- d) O bien, de una respuesta impulsiva.

En este trabajo se utilizará el caso b, para construir un MVE.

El MVE para sistemas invariantes en el tiempo de una entrada - una salida, para el caso discreto, está dado por las siguientes ecuaciones:

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k) \quad (1.6.a)$$

$$Y(k) = CX(k) + Du(k) \quad (1.6.b)$$

Ahora $u(k)$ juega el papel de la señal de entrada.

Conociéndose ya las ecuaciones de un MVE para el caso discreto, se tratará de construir a partir de una ecuación de transferencia un MVE, por lo que el problema principal es la forma en que hay que especificar los elementos de las matrices que aparecen en el MVE, en términos de los parámetros de alguna función de transferencia.

Las funciones de transferencia que serán utilizadas para este tipo de modelos corresponden a procesos estocásticos de tres tipos :

- a) De medias móviles o de ceros (Ma).
- b) Autorregresivo o de polos (AR).
- c) Autorregresivo de medias móviles o de polos y ceros (ARMA).

El proceso de medias móviles (MA) esta dado por la ecuación:

$$Z(k) = B_0 u(k) + B_1 u(k-1) + \dots + B_n u(k-n) \quad (1.7)$$

El cual puede convertirse a un MVE de orden n utilizando las transformaciones :

$$\begin{aligned} X_1(k) &= u(k-1) \\ X_2(k) &= u(k-2) \\ &\vdots \\ X_n(k) &= u(k-n) \end{aligned} \quad (1.7.a)$$

La ecuación de la salida en términos de estas variables será:

$$Z(k) = B_0 u(k) + B_1 X_1(k) + B_2 X_2(k) + \dots + B_n X_n(k) \quad (1.7.b)$$

$$Z(k) = B_0 u(k) + B_1 X_1(k) + B_2 X_2(k) + \dots + B_n X_n(k) \quad (1.7.b)$$

Para obtener la ecuación de estado asociada, se observa que :

$$\begin{aligned} X_1(k+1) &= u(k) \\ X_2(k+1) &= X_1(k) \\ &\vdots \\ X_n(k+1) &= X_{n-1}(k) \end{aligned} \quad (1.7.c)$$

Agrupando las ecuaciones quedará :

$$\begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \\ \vdots \\ X_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ \vdots \\ X_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.7.d)$$

Y la ecuación de salida será :

$$(B_0 + B_1 Z + B_2 Z^2 + \dots + B_n Z^n) X(k) + B_0 u(k) \quad (1.7.e)$$

El proceso autoregresivo o de polos, está dado por la función de transferencia :

$$H(Z) = B / (Z^n + a_1 Z^{n-1} + \dots + a_{n-1} Z + a_n) \quad (1.6)$$

Asociada a la ecuación en diferencias :

$$Z(k+n) + a_1 Z(k+n-1) + \dots + a_n Z(k) = B u(k) \quad (1.8.a)$$

Esta ecuación será convertida a un MVE realizando transformaciones similares al caso de medias móviles.

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= Z(k) \\
 x_2(k) &= Z(k+1) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 x_n(k) &= Z(k+n-1)
 \end{aligned}
 \tag{1.8.b}$$

Se hace un desplazamiento en el tiempo para obtener la ecuación de estado.

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= Z(k+1) = x_2(k) \\
 x_2(k+1) &= Z(k+2) = x_3(k) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 x_n(k+1) &= Z(k+n) = -a_1 Z(k+n-1) - a_2 Z(k+n-2) \dots - a_n Z(k) \\
 &= -a_1 x_n(k) - a_2 x_{n-1}(k) \dots - a_n x_1(k) = Bu(k)
 \end{aligned}
 \tag{1.8.c}$$

La ecuación de estado queda expresada como:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ B \end{bmatrix} u(k)
 \tag{1.8.d}$$

La ecuación de salida de este modelo será :

$$Z(k) = (1, 0, 0, \dots, 0) x(k) \tag{1.8.e}$$

Por último el proceso ARMA representado por medio de la siguiente ecuación de transferencia :

$$H(z) = \frac{B_1 z^{n-1} + B_2 z^{n-2} + \dots + B_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n} \quad (1.9)$$

Para obtener su representación en MVE, se realizan los pasos siguientes:

- La ecuación anterior se expande en fracciones parciales, esto es:

$$H(z) = \frac{e_1}{z-L_1} + \frac{e_2}{z-L_2} + \dots + \frac{e_n}{z-L_n}$$

Los polos de H(z) son L_1, L_2, \dots, L_n ; es decir, son las raíces de la ecuación característica:

En este trabajo se supone que los polos son reales y diferentes entre sí.

En este caso se puede ver a la ecuación de salida $Z(k)$ como la suma de las salidas de n sistemas en paralelo. Bajo esta consideración cada una de las ecuaciones de entrada salida, se puede expresar como:

$$Z_i(k+1) = L_i(k)Z_i(k) + u(k) \quad (1.9.a)$$

Haciendo cambio de variable $X_i(k) = Z_i(k)$, la ecuación de estado toma la forma:

$$\begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \\ \vdots \\ X_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & L_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ \vdots \\ X_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.9.b)$$

Para completar el MVE solo falta la ecuación de salida la cual es:

$$Z(k) = (e_1, e_2, \dots, e_n) X(k) \quad (1.9.c)$$

La representación de la ecuación de estado, en la cual la matriz es diagonal, se conoce como forma canónica o de Jordán.

I.4 SOLUCION DE LA ECUACION DE ESTADO PARA SISTEMAS INVARIANTES EN EL TIEMPO.

En la sección anterior se mostró la manera de construir un MVE, sin atender a la solución. En esta sección se muestra un procedimiento para hallarla.

La ecuación (1.7.a) es recursiva y como pronto se mostrará podrá ser resuelta para $X(k)$ como una función explícita de $X(0)$ y $u(k)$, conociendo $X(k)$ y aplicando la ecuación (1.7.b) se puede obtener $Z(k)$.

Para resolver la ecuación de estado se procede como sigue:

Para $k=0$

$$X(1) = AX(0) + Bu(0)$$

Para $k=1$

$$\begin{aligned} X(2) &= AX(1) + Bu(1) = A(AX(0) + Bu(0)) + Bu(1) \\ &= A^2 X(0) + ABu(0) + Bu(1) \end{aligned}$$

Para $k=2$

$$X(3) = AX(2) + Bu(2) = A(A^2 X(0) + ABu(0) + Bu(1)) + Bu(2)$$

$$= A^3 X(0) + A^2 Bu(0) + ABu(1) + ABu(2)$$

Y De manera general:

$$X(k) = A^k X(0) + \sum_{i=1}^k A^{k-i} Bu(i-1) \quad (1.10)$$

Asumiendo que la ecuación (1.1.2) se puede representar como:

$$Z(k) = CX(k) \quad (1.11)$$

La solución de un MVE en términos de las ecuaciones (1.10) y (1.11) será:

$$Z(k) = C^k A^k X(0) + \sum_{i=1}^k C^k A^{k-i} Bu(i-1) \quad (1.12)$$

En forma general la ecuación (1.10) se puede representar como:

$$X(k) = A^{k-j} X(j) + \sum_{i=j+1}^k A^{k-i} Bu(i-1) \quad k > j+1 \quad (1.13)$$

La matriz A^{k-j} es llamada matriz de transición de estado y es el producto de orden $k-j$ de la matriz A .

El término $A^{k-j} X(j)$ se denomina fuente libre de estado, y el segundo término de la ecuación (1.13) corresponde a una respuesta forzada de estado y es semejante a una convolución, de lo cual se hablará posteriormente.

En la ecuación (1.12) el primer término representa la respuesta transitoria (homógena) y es debida a la condición inicial, el segundo término se debe a la función generadora $u(k)$. se observa también la convolución.

La matriz A^{k-j} posee las siguientes importantes propie-

dades :

A^{k-j} se puede denotar como $A(k,j)$

a) $A(k,j)$ es la matriz identidad , para cuando $k=j$, es decir :

$$A^{0} \\ A = A(j,j) = I$$

b) Propiedad de semigrupo.

El producto $A^{k-j} A^{j-i} = A^{k-i}$ para $k > j > i$

c) Propiedad de inversión .

$$A^{-1} \\ A(k,j) = A(i,j)$$

I.5 ESTABILIDAD .

Fisicamente la estabilidad de un sistema queda garantizada cuando al graficar la trayectoria (Figs. 1.4.a,b) que sigue el sistema en el plano fase (espacio n-dimensional, en el cual se grafican las variables de estado), asociando un vector de posición a cada tiempo, la diferencia entre dos vectores subsecuentes es cada vez más pequeña hasta llegar a cero o a una cantidad constante.

En otras palabras cuando $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x(t)|_e$ es constante o cero el sistema es estable.

Cuando el sistema es de dimensión mayor que tres , trazar la trayectoria resulta muy complicado , por lo que la estabilidad podrá mostrarse a través de la transformada Z, esto es :

La estabilidad de un MVE estará garantizada, si todos los

polos de la ecuación de transferencia $H(Z)$ están dentro del círculo unitario .

Si $H(Z)$ está definido como $H(Z)=N(Z)/D(Z)$, se dice que los polos de $H(Z)$ son las raíces de $D(Z)$.La ecuación que relaciona a la ecuación de estado y la función de transferencia es:

$$H(Z)=C^*B/(I-Z^{-1}A)Z^{-1}=C^*B/(ZI-A)^{-1}=C^*Q(Z)/\text{DET}(ZI-A) \quad (1.14)$$

$Q(Z)$ es una matriz de orden $n \times n$ y sus elementos son polinomios de Z con grado no mayor a $n-1$. El $\text{DET}(ZI-A)$ es el polinomio característico de A , el cual es un polinomio de grado m . De tal manera que los polos de $H(Z)$ son las raíces del polinomio característico.

Sistema inestable

Sistema estable

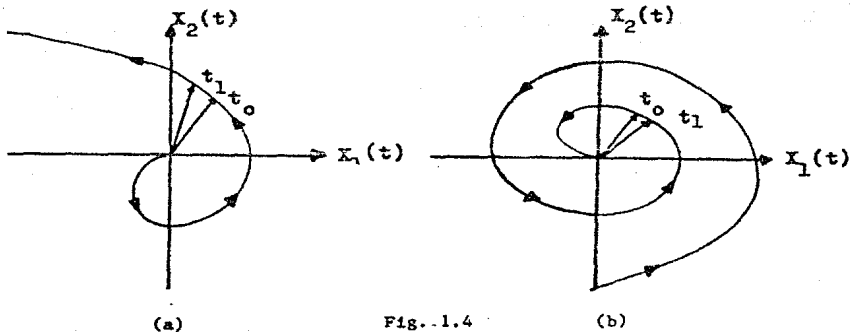


Fig.-1.4

Representación del plano fase. trayectorias descritas por las variables de estado con respecto al tiempo.

LAS COSAS PERFECCIONADAS POR LA
NATURALEZA SON MEJORES QUE LAS
TERMINADAS POR LOS ARTIFICES.
CICERON

EL QUE TRABAJA CON LAS MANOS ES UN
ARTESANO, EL QUE EMPLEA EN SU OBRA
MANOS Y CEREBRO UN ARTIFICE, QUIEN
LABORA CON MANOS, CEREBRO Y CORAZON
UN ARTISTA.

LOUIS NIZER

CAPITULO II

CONSTRUCCION DE SISMOGRAMAS BASADOS EN EL MODELO DE VARIABLES DE ESTADO Y SU EQUIVALENCIA CON EL MODELO CONVOLUCIONAL .

En este capítulo se plantea una forma para representar a la onda sísmica en el formato de un MVE. Se verá la forma de construir secuencias de reflectividad con características estadísticas específicas, para finalmente generar sismogramas sintéticos y mostrar la equivalencia del modelo convolucional con el MVE.

II.1 REPRESENTACION MATEMATICA DE SISMOGRAMAS DE REFLEXION.

La forma más común de representar matemáticamente a un sismograma de reflexión, es mediante el modelo convolucional, dado por la siguiente expresión :

$$Z(k) = \sum_{j=1}^N u(j)V(k-j) + n(k) \quad (2.1)$$

El cual a su vez, está asociado con un sistema dinámico lineal e invariante en el tiempo.

Donde:.

$V(i)$ $i=0,1,\dots,I$ Secuencia asociada a la fuente
 sísmica .
 $u(j)$ $j=1,2,\dots,K$ Secuencia de reflectividad.
 $n(k)$ $k=1,2,\dots,N$ Secuencia de ruido fortuito.
 $Z(k)$ $k=1,2,\dots,N$ Señal registrada.

Existen también otras formas de representar matemáticamente un sismograma, y precisamente el modelo de variables de estado, es una de ellas.

Un modelo de Variables de Estado discreto, para un solo canal, se puede escribir :

$$X(k+1) = AX(k) + bu(k) \quad (2.2.a)$$

$$Z(k) = h^T X(k) + n(k) \quad (2.2.b)$$

En donde :

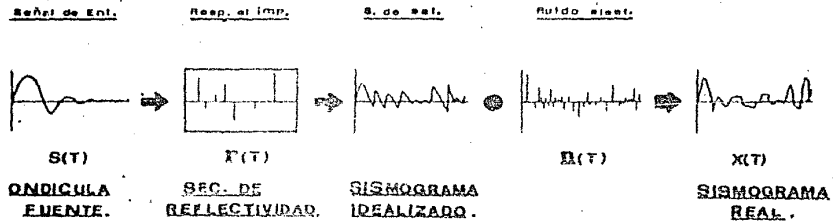
$X(k)$ Vector de estado del sistema .
 A Matriz de transición.
 b Vector de distribución.
 h Vector de observación.
 $u(k)$ Es la secuencia de entrada , y
 $Z(k)$ La secuencia registrada o de salida.

En la aplicación del MVE , para representar un sismograma, se utiliza una idea contraituitiva, esto es, se supone que la entrada del sistema es la secuencia de reflectividad $u(k)$ la cual excita a la ondícula fuente , caracterizada por la matriz A y los vectores b y h .

Las ideas anteriores se muestran en las figuras 2.1 y 2.2.

Se puede demostrar (Mendel , 1983) , que la ecuación (2.1) del modelo convolucional y la ecuación (2.2.a) del MVE son

REPRESENTACION DEL MODELO CONVOLUCIONAL



$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) X(t-\tau) \tau + n(t)$$

$$X(k) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j \cdot X_{k-j} + \Omega_k \quad k=1,2,\dots$$

Fig. 2.1
Representación esquemática del modelo convolucional.

REPRESENTACION DEL MODELO DE VARIABLES DE ESTADO.

(Versión Contraintuitiva)

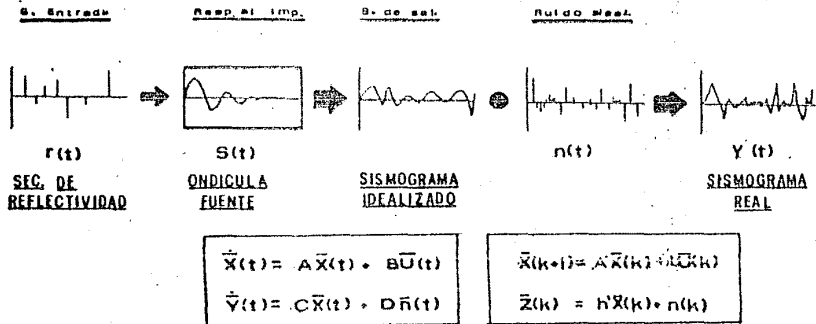


Fig. 2.2
Representación esquemática del modelo de variables de estado.

equivalentes , cuando se cumplen las condiciones siguientes :

$$X(0)=0 \quad , \quad u(0)=0 \quad , \quad Z(0)=0 \quad \text{y} \quad V(1)=h \begin{matrix} I-1 \\ A \end{matrix} b$$

En donde :

$X(0)$ Vector de estado inicial.

$u(0)$ Condición inicial de la secuencia de entrada.

$Z(0)$ Condición inicial de la señal. , y

$V(1)$ Secuencia asociada a la fuente.

Con posterioridad, dentro de este capítulo , se tendrá la oportunidad de observar el principio de equivalencia, mediante ejemplos simples; mientras tanto, conviene examinar las suposiciones estadísticas que caracterizan a los componentes del MVE.

II.2 SUPOSICIONES ESTADÍSTICAS DEL MVE.

A) Cuando $X(0)$ y $u(k)$ son secuencias conjuntamente Gaussianas , $x(k)$ será también una secuencia Gaussiana , para todo K mayor o igual a uno.

B) Si $X(0)$, $u(k)$ y $n(k)$ son conjuntamente Gaussianas, entonces $Z(k)$ es a su vez una secuencia Gaussiana.

C) El vector de estado $X(k)$ es una secuencia Markov . Se dice que una secuencia es Markov , cuando cada valor del secuencia depende exclusivamente del valor inmediato ante-

rior, de dicha secuencia.

El vector $X(k)$ de estado es un vector aleatorio y como tal, tendrá un valor esperado $E[X(k)]$ y una matriz de covarianza $P(k)$ (Papoulis, 1965)

Si $X(k)$ satisface la ecuación de estado y $u(k)$ es una secuencia gaussiana con media cero, se tendrá:

$$E[X(k)] = m(k)$$

En donde $m(k)$ representa la media del vector de estado $x(k)$, se obtiene al aplicar el operador de valor esperado a ambos miembros de la ecuación (2.2.a). Asumiendo que el operador de valor esperado es una operación lineal, de tal forma que la media será expresada como:

$$m(k+1) = AX(k+1) + bd(k) \quad (2.3)$$

La matriz de covarianza $P(k)$ se hallará al aplicarle a la ecuación anterior el operador $E\{[X(k)-m(k)][X(k)-m(k)]^T\}$ o segundo momento, quedando la matriz de covarianza:

$$P(k+1) = AP(k)A^T + bqb^T \quad (2.4)$$

En esta última expresión aparece el término q , que es la varianza de la secuencia de entrada, la cual queda definida como:

$$q(k)d = E[u(i)u(j)] \quad (2.5)$$

ij

En donde :

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Otro elemento estadístico importante a considerar en el MVE, es la varianza del ruido, la cual está dada por la expresión :

$$r(k) d_{ij} = E[n(i)n(j)] \quad (2.6)$$

Se supone, además, que la secuencia de ruido $n(i)$ es Gaussiana y de media cero $E[n(i)] = 0$, así como también que la secuencia de entrada y la secuencia de ruido no son correlacionables entre sí, de aquí que su croskovarianza sea igual a cero: $E[u(i)n(j)] = 0$.

El valor esperado de la secuencia de salida, puede ser encontrado a partir del valor esperado del vector de estado, esto es :

$$E[Z(k)] = h^* m(k) \quad (2.7)$$

Y la covarianza de $Z(k)$ será :

$$\text{COV}Z(k) = h^* P(k+1) h + r \quad (2.8)$$

De esta forma, se conoce como encontrar los primeros y

segundos momentos de cada uno de los elementos del MVE .

II.3 REPRESENTACION DE ONDICULAS FUENTE A MVE.

Para representar la ondicula fuente mediante un MVE , se supondrá conocida su expresión analítica . En el caso más general, ésta se podrá obtener por métodos de estimación .

Existe una basta colección de expresiones de ondiculas, en este trabajo se va a utilizar la ondicula fuente de Kramer, cuya expresión analítica es :

$$V(k) = -1360Ke^{-500k} + 0.5e^{-15.5k} \operatorname{sen}[(2\pi/0.06)k] \quad (2.9)$$

Y su expresión gráfica se muestra en la figura 2.3 .

En el apéndice A de este capítulo se muestran otras expresiones que también podrán ser utilizadas.

La ondicula de Kramer fue elegida para poder comparar los resultados obtenidos en este trabajo, con los obtenidos por Mendel y Kormylo, 1978 .

Para transformar la forma analítica de la ondicula a un MVE se podrá usar la siguiente metodología :

- a) Se obtiene la transformada de Laplace $V(s)$ de la expresión 2.9 .

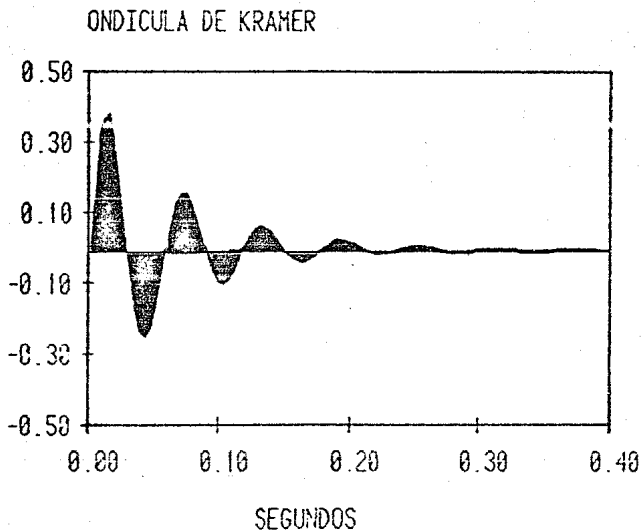


Fig. 2.3
Representación de la ondicula de krame muestreada
cada 4 milifsegundos.

b) Se obtiene la ecuación diferencial asociada a $V(s)$.

c) Se eligen las variables de estado (de la misma forma como se hizo en los ejemplos del capítulo anterior).

d) A partir de las variables de estado, se construye el modelo de variables de estado (ecuación de estado y ecuación de salida).

EJEMPLO

$$\text{Sea } V(k) = \frac{-500k}{-1360kz} + 0.5z \frac{-15.5k}{\text{sen}(2\pi/0.06)k}$$

Obtener su representación en modelos de variables de estado.

Para mayor agilidad se partirá la función $V(k)$, para así obtener un modelo de variables de estado en cascada, esto es:

$$V_1(k) = \frac{-500k}{-1360z} = -1360F(k)$$

$$V_2(k) = 0.05z \frac{-15.5k}{\text{sen}(2\pi/0.06)k} = 0.05G(k)$$

Se obtiene la transformada de Laplace

$$V_1(s) = \frac{-1360}{(s+500)^2} = \frac{-1360}{s^2+1000s+250000}$$

$$V_2(s) = \frac{0.5(2\pi/0.06)}{(s+15.3)^2 + (2\pi/0.06)^2}$$

Es donde $V_1(s)$ y $V_2(s)$ son dos ecuaciones de transferencia, que cumplen con: $V(s) = -1360F(s) + 0.05G(s)$.

Primeramente se trabajará con la función de transferencia $F(s)$, que es de segundo orden, asociada con una ecuación en diferencias de segundo orden.

$$f(k+2) + 1000f(k+1) + 250000f(k) = d(k)$$

En donde $d(k)$ es una función impulsiva.

La ecuación anterior es del tipo de proceso autorregresivo. A partir de ella se seleccionan las variables de estado adecuadamente, quedando:

$$f(k) = x_1 \quad f(k+1) = \dot{x} = \begin{matrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{matrix} = x_2 \quad y$$

$$f(k+2) = -1000x_2 - 25000x_1 + d(k)$$

De tal forma, que la ecuación de estado y la ecuación de salida están dadas por:

$$\begin{matrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 1 \\ -25 \times 10^4 & -10^3 \end{matrix} \begin{matrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{matrix} + \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} d(k)$$

$$V(k) = -1360F(k) \quad F(k) = x_1$$

$$\begin{matrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{matrix} = \begin{pmatrix} -1360 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix}$$

De manera similar se opera con la función de transferencia $G(s)$, obteniéndose la ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} X_3(k+1) \\ X_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.3 & 104.67 \\ -104.67 & -15.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_3(k) \\ X_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d(k)$$

Agrupando ambas ecuaciones , que estan en cascada.

$$\begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \\ X_3(k+1) \\ X_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -25 \times 10^4 & -10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15.3 & 104.67 \\ 0 & 0 & -104.67 & -15.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \\ X_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d(k)$$

M N

Y la ecuación de salida será :

$$Z(k) = (-1360, 0, 0.5, 0) \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \\ X_4(k) \end{bmatrix}$$

h

Siendo M y N la matriz y el vector que caracterizan a la ondícula fuente, del tal forma que definen un modelo del tipo:

$$X(k+1) = MX(k) + N d(k)$$

$$Z(k) = h X(k)$$

Se puede hacer notar que el MVE requiere de la matriz A y de los vectores b y h, por lo que hasta este momento no se han encontrado . Su obtención se verá en la sección II.5 .

II.4 GENERACION DE LA SECUENCIA DE REFLECTIVIDAD

En este inciso se verá la forma de construir la secuencia de entrada , la cual es requerida para la obtención de

sismogramas sintéticos a través del MVE .

La secuencia de reflectividad , debe de ser Gaussiana y de ruido blanco (Robinson , 1967) , cumpliendo con las características siguientes :

- Ser aleatoria y no correlacionable .
- De media cero .
- Las amplitudes de los coeficientes deben de ser menores o iguales al valor absoluto de la unidad .

La secuencia tendrá una distribución en el tiempo de tipo Poisson y una distribución Gaussiana en sus amplitudes .

Recordando que la distribución Poisson tiene una función de densidad de probabilidad

$$P(k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k! \quad \text{para } k=0,1,2,\dots$$

En donde la media y la varianza están dadas por el parámetro lambda (λ) .

Y la función de probabilidad de la distribución Normal o Gaussiana es :

$$f(k) = e^{-k^2 / 2\sigma^2} / \sigma \sqrt{2\pi}$$

En donde σ es la varianza de dicha distribución .

Para construir la secuencia de reflectividad se siguió el

algoritmo dado por Box y Muller. Para generar una distribución uniforme con distribución en el tiempo tipo Poisson y en donde las amplitudes siguen una distribución Normal.

El algoritmo tiene la secuencia siguiente :

a) Se genera un número pseudoaleatorio en algún equipo de computo, dicho número estará entre [-1 y 1] .

b) Se compara el número aleatorio con el parámetro lambda de la distribución Poisson .

- Si lambda es menor que dicho número aleatorio , éste último se descarta .

- Si lambda es mayor que el número aleatorio , será incorporado el número aleatorio para continuar con el algoritmo.

c) Se forman dos distribuciones a partir de los números aleatorios conocidos (V_1 , V_2) .

d) Se complementan las distribuciones anteriores de la siguiente forma :

$$V_1 = 2V_1 - 1 \quad \text{y} \quad V_2 = 2V_2 - 1$$

Garantizando que las distribuciones están entre [-1 y 1]

e) Se forma con V_1 y V_2 la función $S = V_1^2 + V_2^2$, de tal manera que si :

S es mayor que uno se descartan los valores de V_1 y V_2 y se regresa al paso c) .

S es menor o igual a la unidad , existirá un número aleatorio en el círculo unitario.

f) Se forma la relación :

$$X = \sqrt{1 - 2\text{Ln}(S)/S}^{1/2}$$

Siendo X una distribución uniforme, la cual hasta este momento no cumple con la condición de Gaussianidad, para que ésta se cumpla :

g) Se considera la desviación estandar y la media (se debe recordar que es cero) , teniéndose :

$$X = \sum_{i=1}^n u_i + u \quad (u = 0)$$

Siendo X una distribución Poisson - Normal .

Una secuencia de reflectividad con las características mencionadas fue construida y se muestra en la figura 2.4

Las rutinas elaboradas para tal fin, se muestra en el final de este trabajo .

II.5 OBTENCIÓN DE SISMOGRAMAS SINTÉTICOS POR MVE

La solución del MVE, quedó expresada, en el capítulo anterior por las expresiones :

$$X(k) = A X(0) + \sum_{i=1}^k A^{k-i} b u(i-1) \quad (2.10)$$

$$Z(k) = h'A X(0) + \sum_{i=1}^k h'A^{k-i} b u(i-1) \quad (2.11)$$

En donde Z(k) será la salida deseada, es decir, el sismo-grama sintético.

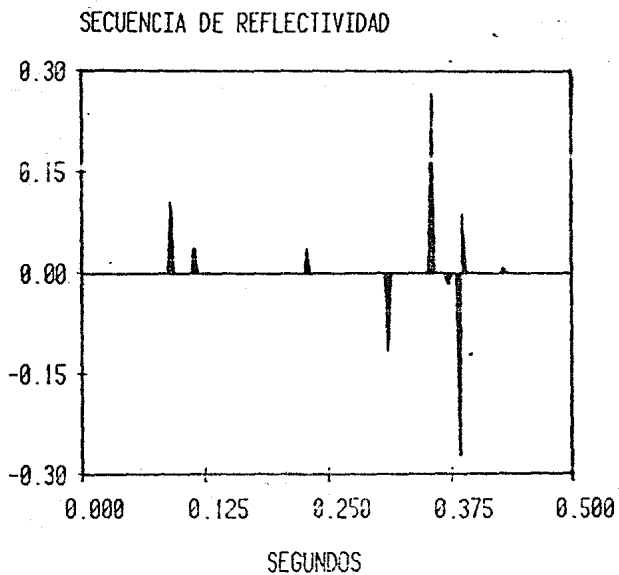


Fig. 2.4 Secuencia de reflectividad con una distribución Poisson-Normal. Construida a partir de números pseudoaleatorios.

En esta ecuación aparecen los parámetros A , b y h . En donde A es la matriz de transición de orden $n \times n$; la cual se podrá obtener a partir de la matriz exponencial $A = e^{Mt}$ (Gabel C., 1978). El vector de entrada b de orden $n \times 1$, obteniéndose a partir de:

$$b = \left(\int_0^t e^{M(\tau)} d\tau \right) N$$

En el apéndice B de este capítulo se muestra la manera de obtener, tanto la matriz de transición como el vector de entrada b .

Como ya se sabe M , N y h son obtenidas a partir de la representación en ecuaciones de estado una ondicula fuente.

En la ecuación (2.11) aparece, además, la secuencia de reflectividad, que representa la entrada del sistema, que es una secuencia Gaussiana, aleatoria, no correlacionable y media cero con varianza constante (sección 2.4).

Una vez que se cuenta con la solución del modelo de variables de estado, así como, la manera de obtener los parámetros de dicha solución, sólo resta aplicarla. De esta manera se puede obtener algún sismograma sintético.

Un ejemplo se muestra en la figura 2.5. En dicha figura se puede observar, de una forma pictórica, la equivalencia que existe con el modelo convolucional. De tal forma que a partir de las gráficas elaboradas, la similitud hace evidente la equivalencia buscada.

EQUIVALENCIA DEL MVE. CON EL M.C.

SISMOGRAMA SINTETICO (VAR. ESTADO)

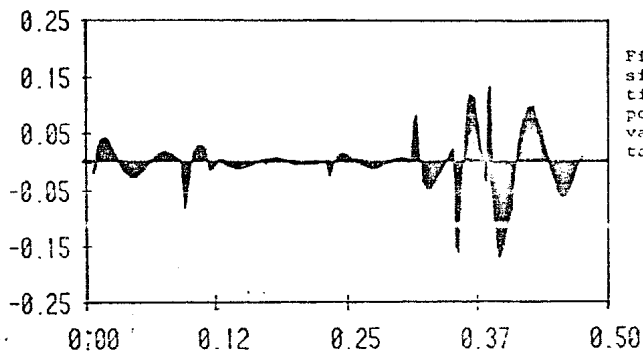


Fig. 2.5.a
sismograma sinté-
tico realizado
por el método de
variables de es-
tado.

SISMOGRAMA SINTETICO (CONVOLUTION)

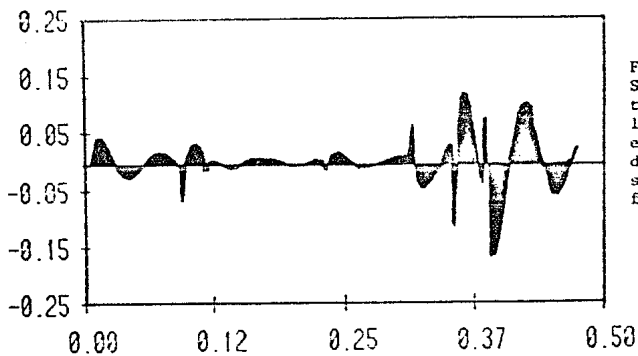


Fig. 2.5.b
Sismograma sinté-
tico utilizando
la convolución
entre la ondícula
de kramer y la
secuencia de la
fig. 2.4

SEGUNDOS

Para construir el sismograma , aplicando el modelo de variables de estado se elaborò un programa de computadora.

En el apendice C , de este capítulo se explica , cuáles son y cómo se utilizaron las rutinas elaboradas para tal fin .

Para observar la equivalencia , también se programò la expresión (2.1) y así obtener un sismograma sintético por el conocido método.

En ambos casos se utilizò como secuencia de reflectividad la representada en la figura 2.4 .

Al final de esta tesis , el lector podrá encontrar los programas utilizados .

II.6 GENERACION DE RUIDO ALEATORIO Y RELACION SENAL A RUIDO

Para obtener un sismograma sintético más apegado a la realidad, se necesita agregar ruido , para así de esta forma, tener la salida $Z(k)$ en los términos que aparece en la expresión (2,2,b). El ruido ambiental $n(k)$ que será agregado , debe ser :

- Gaussiano y de ruido blanco .
- Aleatorio .
- No correlacionable con la secuencia de entrada .

Tendrá una varianza dada (r) , ligada directamente con la relación señal a ruido. Se conoce que la relación señal a ruido, no es más, que una medida de calidad de las mediciones

$Z(k)$; y esta relación se define como :

$$SNR = \frac{\sigma_s^2(k)}{\sigma_r^2(k)} \quad (2.12)$$

La razón de la varianza de la señal (ecuación 2.8) con la varianza del ruido σ_r^2

En la generación de la secuencia de ruido se utilizó la misma rutina empleada para la secuencia de reflectividad.

El valor de la varianza del ruido fue obtenido a partir de suponer conocida la varianza de $u(k)$ y una SNR dada .

Para hallar la varianza de la señal se utiliza la ecuación (2.9).

$$COV(Z(k+1)) = h'P(k+1)h$$

En donde $P(k+1)$ es la matriz de covarianza del vector de estado $X(k)$ (ecuación 2.5) . De tal forma que :

$$\sigma_s^2 = h' [AP(k)A' + bqb'] h \quad (2.13)$$

En donde las comillas indican matrices y vectores transpuestos.

La varianza de la secuencia de reflectividad está representada por el parámetro (q) , definida como $q = \lambda \sigma_g^2$, siendo $\lambda \sigma_g^2$ varianza de la distribución de amplitudes (distribución Gaussiana) , y λ el parámetro de la distribución Poisson .

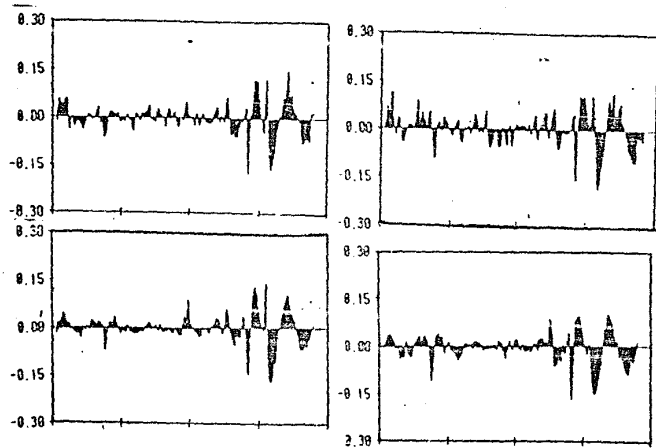


Fig. 2.6
Sismogramas con efecto de ondícula y ruido aleatorio en didntos grados.

Sustituyendo la ecuación (2.13) en (2.12) se podrá obtener la varianza del ruido, esto es :

$$\sigma_r^2 = r = h' [AP(k)A' + bqb'] h / \text{SNR} \quad (2.14)$$

En esta última ecuación se presenta el problema del cálculo de la matriz de covarianza $P(k)$, la cual es recursiva (ec. 2.5) y es necesario, partir de un valor inicial para su cálculo ; por ejemplo $P(0) = 0$, iterándola hasta que la matriz converga .

Por qué $P(k)$ debe de ser convergente ?.

Si a la matriz A se le asocia a un sistema estable (Apendice B) en el cual todos sus valores característicos coinciden en el círculo unitario , entonces la matriz $P(k)$ tendrá un límite \bar{P} :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} P(k) = \bar{P}$$

Cuando, la relación señal a ruido es especificada a priori , para experimentos simulados , se debe de calcular la matriz \bar{P} , y así calcular la varianza del ruido (r) de la última ecuación .

Finalmente , se observa que la matriz P es la solución de la ecuación (2.5) , (Anderson y Moore, 1980)

$$\bar{P} = AP(k)A' + bqb'$$

En donde P recibe el nombre de matriz de Covarianza Esta-

cionaria. Esta matriz podrá ser utilizada , también en teoría de estimación (Cap. III).

Una vez obtenida la varianza del ruido , se genera una secuencia de ruido Gaussiana y blanca con el algoritmo de Box y Muller .

Un ejemplo de sismogramas contaminados , para varias SNR , se muestra en la figuras 2.6 .

Así de esta manera, se tendrá un sismograma más apegado a la realidad, y al cual , ahora se le va aplicar el operador de DECONVOLUCION de Varianza Minima , que es la finalidad principal de este trabajo.

YA SE HA PENSADO EN TODO, LO
DIFICIL ES PENSAR EN ALGO
POR SEGUNDA VEZ.

GOETHE

LA MENTE TARDA EN OLVIDAR LO
QUE LE HA LLEVADO MUCHO EN
APRENDER.

SENECA

CAPITULO III

DECONVOLUCION DE VARIANZA MINIMA UTILIZANDO EL FILTRO KALMAN

En este capítulo se repasarán los conceptos de teoría de estimación que constituyen las bases de la Deconvolución de varianza mínima via filtro Kalman .

Se trata de "estimar" , mediante el proceso de Deconvolución y a partir de la señal de salida $Z(k)$, la secuencia de reflectividad $u(k)$ (a esa estimación se lo denota $\hat{u}(k)$) .

Se debe aclarar que la señal de salida $Z(k)$ contiene a la secuencia de reflectividad $u(k)$ contaminada con ruido aleatorio $n(k)$ y el efecto de la ondícula fuente .

Para lograr lo anterior , son necesarias ciertas suposiciones básicas, a saber :

- 1) La expresión analítica de la ondícula fuente es conocida .
- 2) La secuencia de reflectividad sigue una distribución Gaussiana .
- 3) La secuencia de ruido aleatorio es Gaussiana y de ruido blanco .
- 4) La secuencia de ruido aleatorio y la secuencia de reflectividad no son correlacionables .
- 5) El valor de la relación señal a ruido (SNR) de la de la secuencia de salida $Z(k)$ es conocido .

El problema de determinar $u(k)$ no es muy común en teoría de estimación, y esto trae algunas dificultades para la deconvolución. Ya que el interés es obtener estimadores de la

secuencia de entrada y debido a esto , se hará necesario obtener primeramente estimadores del vector de estado $X(k)$, relacionado con la salida $Z(k)$.

Un punto de partida, para la deconvolución será el modelo de variables de estado, representado por las ecuaciones ya conocidas:

$$X(k+1) = AX(k) + bu(k)$$

$$Z(k) = \hat{A}X(k) + n(k)$$

En este trabajo se verá el problema de estimación, tratando el caso de un solo canal. Para el caso multicanal se recomienda ver el trabajo de Mendel y Kormylo, 1983 .

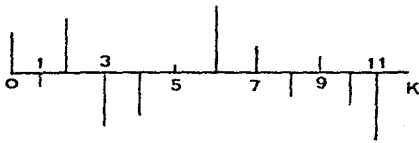
III.1 ESTIMACION DE VARIANZA MINIMA

Un estimador es un procedimiento, mediante el cual, el valor de una variable en un momento determinado se obtiene . El estimador puede hacer uso de información de diversa índole, al valor obtenido se le conoce como estimación .

Una forma de denotar un estimador es: $\hat{X}(k/j)$. Bajo esta notación \hat{X} significa que se trata un estimador de la variable X en el tiempo k basado en j observaciones .

Lo anterior puede ser más objetivo mediante un ejemplo .

Supongamos que $X(k)$, para $k=0,1,2,\dots$ tiene la siguiente expresión gráfica :



Y que se desea estimar o predecir el valor de $X(k)$ para un valor específico de k , digamos $k=6$, basado en j observaciones, supongamos $j=4$.

Entonces $\hat{X}(6/4)$ es un estimador de $X(6)$, basado en las primeras 4 observaciones.

Dependiendo de la información utilizada, se puede ver que existen tres tipos de estimadores de $X(k)$, ellos son:

- a) Estimador de predicción óptima.
- b) Estimador de filtrado óptimo.
- c) Estimador de suavizamiento óptimo.

Un estimador de predicción óptima de $X(k)$, es aquel en el cual k es mayor que j ($k > j$). Un estimador de filtrado óptimo, es aquel que se cumple que $k=j$. Y un estimador de suavizamiento óptimo, es cuando el tiempo k es menor que el tiempo j . En teoría de estimación es importante seleccionar $X(k/j)$, de tal manera que alguna medida de error de estimación, denotada por $\bar{X}(k/j) = X(k) - \hat{X}(k/j)$, sea minimizada. La medida más comúnmente empleada es el error por mínimos cuadrados.

La información que se requiere, para las estimaciones de $X(k)$ es $Z(j)$, es decir:

$$\hat{X}(k/j) = f_k \{Z(j)\} \quad (3.1)$$

De tal forma que el error por mínimos cuadrados es :

$$J(X(k/j)) = E[\bar{X}(k/j) \cdot \bar{X}(k/j)] \quad (3.2)$$

En la ecuación (3.1) se observa que $X(k)$, depende de las medidas de $Z(j)$.

La meta primeramente es : obtener estimadores de varianza mínima de $X(k)$. Una vez obtenidos dichos estimadores, se podrá obtener un estimador de varianza mínima de alguna señal que este relacionada linealmente a $X(k)$: como puede ser $u(k)$ o secuencia de reflectividad .

Un estimador de varianza mínima de $u(k)$, va a depender de un estimador de suavizamiento, el cual a su vez va a depender de un estimador de filtrado, y éste por último de uno de predicción .

La solución al problema de estimación por mínimos cuadrados, está dada por el teorema fundamental de teoría de estimación. Este teorema dice : "El estimador que minimiza el error por mínimos cuadrados será":

$$\hat{X}(k/j) = E[X(k)/Z(j)] \quad (3.3)$$

Para comprobarlo, se parte de que el error por mínimos cuadrados esta dado por:

$$J[\bar{X}(k/j)] = E[\bar{X}'(k/j)\bar{X}(k/j)Z(j)] \quad (3.4)$$

Se omitirá la dependencia funcional de k y j, para mayor simplicidad .

$$\begin{aligned} J &= E[(X-\hat{X})'(X-\hat{X})/z(j)] \\ &= E[X'X - \hat{X}'X + \hat{X}'X/Z] \\ &= E[X'X/Z - E[X'/Z]\hat{X} - \hat{X}'E[X/Z] - \hat{X}'\hat{X}] \\ &= E[X'X/Z + [\hat{X} - E[X/Z]]'[\hat{X} - E[X/Z]]] - E[X'/Z]E[X/Z] \end{aligned} \quad (3.5)$$

De aquí el término entre corchetes es igual a cero.

De tal manera que \hat{X} es el estimador que minimiza el error medio cuadrático.

Ahora si $X(k)$ y $Z(k)$ son procesos Gaussianos, el estimador que minimiza el error por mínimos cuadrados es (Papoulis, 1965) :

$$X(k/j) = E[X(k)] + P_{xz}(k,j)P_{zz}^{-1}(j,j)[Z(j) - E[Z(j)]] \quad (3.6)$$

En donde P_{xz} y P_{zz} están dadas por :

$$P_{xz} = E\{[X(k) - E[X(k)]] [Z(j) - E[Z(j)]]'\}$$

$$P_{zz} = E\{[Z(j) - E[Z(j)]] [Z(j) - E[Z(j)]]'\}$$

III.2 PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES.

A) Ortogonalidad: El error de estimación por mínimos cuadrados es ortogonal a $f_k(Z(j))$, es decir :

$$E[X(k) - \hat{X}(k)] f_k(z(j)) = 0$$

Esto se puede ver si $X(k)$ y $Z(j)$ son vectores aleatorios distribuidos uniformemente y $f_k(Z(j))$ es una función escalar.

Un caso especial, de esta propiedad es cuando :
 $f_k(Z(j)) = \hat{X}(k/j)$, entonces se puede escribir como :

$$E[\hat{X}(k/j)] \hat{X}(k/j) = 0$$

B) Insesgamiento : Un estimador debe ser insesgado, es decir, debe cumplir que :

$$E[\hat{X}(k/j)] = E[X(k)] , \text{ para todo } k$$

Puede ser también escrito como :

$$E[\bar{X}(k/j)] = 0 , \text{ para todo } k$$

C) Varianza mínima: La medida de dispersión, en torno a la media de $X(k/j)$ es la varianza del error :

$$\sigma_x^2(k/j) = E[\bar{X}(k/j)^2] - E[\bar{X}(k/j)]^2$$

Se dice que, un estimador que tiene la varianza más pequeña

en el error es un ESTIMADOR DE VARIANZA MINIMA'.

Se tiene, de la definición de varianza del error que :

$$\sigma_x^2(k/j) = E[\bar{x}_1^2(k/j)]$$

Y el error por mínimos cuadrados se podrá escribir como :

$$J[\bar{X}(k/j)] = \sum_{i=1}^n \sigma_x^2(k/j)$$

Expresa que. las varianzas son siempre positivas y que el valor mínimo de $J[\bar{X}(k/j)]$, será alcanzado cuando cada una de las n varianzas son minimizadas. De tal manera que, el estimador por mínimos cuadrados, será equivalente a un estimador de varianza mínima.

D) Linealidad: Observando el estimador representado por la ecuación (3.6) se tiene que. éste es una transformación lineal de las mediciones, por lo que se dice que, dicho estimador tiene un comportamiento lineal.

Cuando $\hat{X}(k/j)$ no es una estimador lineal y $X(k)$ y $Z(k)$ no son Gaussianos, se podrá construir a través de la ecuación (3.6) un estimador equivalente lineal por medio de sus dos momentos.

III.3 ESTIMADORES

Como ya se vió la ecuación (3.6) que es la forma más general para el cálculo del estimador de $X(k)$, presenta algunos

problemas, ya que hay matrices de covarianza y croskovarianza inversa. Por lo que se recurre a algunos otros algoritmos utilizando los tres tipos de estimadores para el cálculo de $X(k/j)$ y posteriormente para $u(k)$.

III.3.1 PREDICCIÓN OPTIMA.

Se desea conocer cual es el estimador de predicción y la matriz de covarianza del error asociada a éste, asumiendo de antemano que se conoce el estimador de filtrado y su matriz de covarianza de error respectiva ($\hat{X}(k/k)$ y $P(k/k)$).

El estimador de predicción $\hat{X}(k/j)$ para $k > j$ es :

$$\hat{X}(k+1/k) = A \hat{X}(k/k) \quad (3.7)$$

Y el error del estimador de predicción Gaussiano, Markov y con media cero, tiene como matriz de covarianza :

$$P(k+1/k) = AP(k/k)A' + BqB' \quad (3.8)$$

A estas ecuaciones se les conoce como ECUACIONES DE PREDICCIÓN.

La comprobación de la ecuación (3.7) se da en el apéndice A de este capítulo, y la ecuación (3.8) se comprueba al ser el error Markov y Gaussiano, ya que satisface a la ecuación de estado y la obtención de la matriz de covarianza se hallará de manera similar a la matriz de covarianza del vector de

estado ($X(k)$) .Ecuación (2.4) .

En la siguiente sección se muestra como obtener el estimador de predicción basado en el estimador de filtrado .

III.3.2 FILTRADO OPTIMO.

El estimador de filtrado $X(k+1/k+1)$, está íntimamente ligado con el filtro Kalman .Siendo este un filtro recursivo y de varianza mínima (Kalman, 1960) .

Del teorema fundamental de estimación, se sabe que un estimador de varianza mínima , está dado por :

$$\hat{X}(k+1/k+1) = E[X(k+1)/Z(k+1)]$$

Y que alternativamente se puede escribir :

$$\hat{X}(k+1/k+1) = \hat{X}(k+1/k) + K(k+1)Z(k+1/k+1) \quad (3.9)$$

En donde, $Z(k+1/k)$ es llamado proceso innovador (se desarrolla en el Apéndice B) . $K(k+1)$ es un vector (para el caso multicanal es una matriz) llamado vector de Ganancia de Kalman . El cual queda especificado por

$$K(k+1) = P(k+1/k)h' [h'P(k+1/k)h + r]^{-1} \quad (3.10)$$

En donde :

$$P(k+1/k) = AP(k/k)A' + bqb'$$

$$P(k+1/k+1) = [I - K(k+1)h] P(k+1/k) \quad (3.11)$$

A las ecuaciones (3.9) y (3.11) se les conoce como ECUACIONES DE CORRECCION. Siendo I la matriz de identidad y $P(k+1/k+1)$, la matriz de covarianza asociado al error del estimador de filtrado.

El vector Kalman es recursivo, ya que utiliza la varianza del error de filtrado. En este proceso de PREDICCIÓN -CORRECCION, el paso corrector esta dado por $K(k+1)\bar{z}(k+1/k)$ y el predictor utiliza información de las ecuaciones de estado $[X(k+1/k) = AX(k/k)]$.

El paso corrector utiliza mediciones nuevas en el tiempo $k+1$; siendo la corrección proporcional a la diferencia entre las mediciones y su valor mejorado de predicción $\bar{z}(k+1/k) = Z(k+1) - \hat{z}(k+1/k)$ (ver apéndice B).

En general el estimador de filtrado óptimo recibe el nombre de FILTRO KALMAN.

En el diagrama de bloques siguiente (Figura 3.1) se presenta la forma de implementar el proceso de PREDICCIÓN -CORRECCION utilizando tanto el estimador de predicción y el estimador de filtrado o filtro Kalman, y sus respectivas matrices de covarianza:

Para inicializar este proceso se utiliza $X(0/0)=0$ y $P(0/0)=0$

El desarrollo de las ecuaciones anteriores, se tratará a continuación, con el auxilio de los apendices A y B.

Kalman ideó este algoritmo, de una manera bastante ingeniosa. Su punto de partida fue separar al conjunto de mediciones $\bar{Z}(k+1)$ en $Z(k)$ y $Z(k+1)$, por lo que el estimador de filtrado, puede expresarse como:

$$\hat{X}(k+1/k+1) = \hat{X}(k+1/k) + E\{X(k+1)\bar{Z}^{-1}(k+1/k) - E\{X(k+1)\}} \quad (3.12)$$

En donde $\bar{Z}(k+1/k) = Z(k+1) - Z(k+1/k)$ es el proceso innovador, el cual es invertible con $Z(k+1)$, siendo Gaussiano y de ruido blanco, en donde al ser invertible se tiene que:

$$E\{X(k+1)\bar{Z}^{-1}(k+1/k)\} = E\{X(k+1)\} + P_{k+1, k+1}^{-1} E\{X(k+1)\} E\{Z(k+1/k)\} \quad (3.13)$$

Esta ecuación es similar a la ecuación (3.6), en donde se define a la Ganancia de Kalman como:

$$K(k+1) = P_{k+1, k+1}^{-1} E\{X(k+1)\} E\{Z(k+1/k)\} \quad (3.14)$$

Si se sustituye (3.13) y (3.14) en (3.12) se tendrá la ecuación (3.9), que es la ecuación del filtro Kalman, esta ecuación habrá que inicializarla con $X(0/0)$.

ECUACIONES DE PREDICCIÓN:

$$\hat{X}(k+1/k) = A \hat{X}(k/k)$$

$$P(k+1/k) = AP(k/k)A' + bq b'$$

ECUACIONES DE CORRECCION:

$$\hat{X}(k+1/k+1) = \hat{X}(k+1/k) + K(k+1) \{ Z(k+1) - \hat{h} \hat{X}(k+1/k) \}$$

$$K(k+1) = P(k+1/k) \hat{h} \{ \hat{h} P(k+1/k) \hat{h} + r \}^{-1}$$

$$P(k+1/k+1) = [I - K(k+1) \hat{h}] P(k+1/k)$$

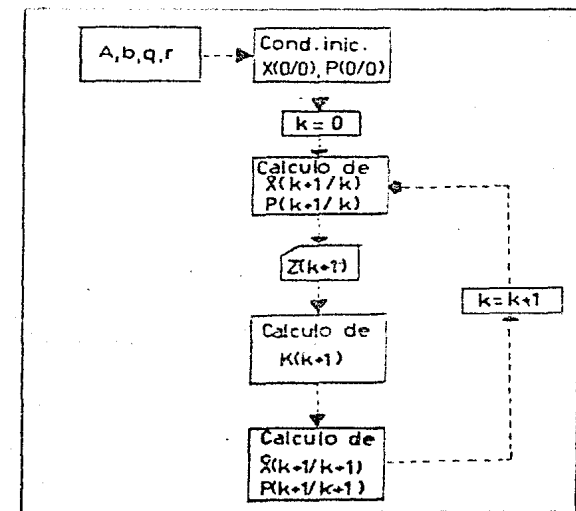


Fig. 3.1 diagrama de bloques mostrando el uso del proceso de PREDICCIÓN - CORRECCION.

Para calcular $K(k+1)$ se debe evaluar P_{xz} y P_{zz}^{-1} , en donde P_{zz} es la covarianza del proceso innovador y P_{xz} será la croskovarianza entre el estimador y el proceso innovador, dadas por :

$$P_{zz} = E[z(k+1/k)z'(k+1/k)] \\ = hP(k+1/k)h' + r = N(k+1/k) \quad (3.15)$$

$$P_{xz} = P(k+1/k)h' \quad (3.16)$$

Su desarrollo se muestra en el apendice C de este capítulo. Sustituyendo las ecuaciones (3.15 y 3.16) en la ecuación (3.14), se obtiene la ecuación de Ganancia de Kalman (ecuación 3.10) .

Se hará énfasis , en que las ecuaciones de PREDICCIÓN (3.7 y 3.8) usan sólo información de las ecuaciones de estado , y que las ecuaciones de CORRECCION (3.9 y 3.11) usan información solo de las mediciones.

La ecuación de ganancia de Kalman es variante en el tiempo, aún si el sistema dinámico que se está trabajando es invariante en el tiempo y estacionario. Si la Ganancia de Kalman tiende a un límite, los coeficientes se reducen a constantes, esto lleva al caso de ESTADO ESTABLE, el cual ya se había planteado en el capítulo anterior .

La combinación de las ecuaciones (3.10 y 3.7) dará como resultado :

$$\hat{X}(k+1/k+1) = [I - K(k+1)HA] \hat{X}(k/k) + K(k+1)Z(k+1) \quad (3.17)$$

Así mismo, la combinación de las ecuaciones (3.12 y 3.8), dará otra ecuación, que recibe el nombre de ecuación de Ricatti.

$$P(k+1/k) = AP(k/k)[I - h^*(hP(k/k+1)h^* + r)]^{-1} hP(k/k+1)A^* \quad (3.18)$$

Esta ecuación es recursiva y equivalente al proceso de CORRECCION - PREDICCIÓN.

III.3.2.1 FILTRO KALMAN DE ESTADO ESTACIONARIO.

Para sistemas estacionarios e invariantes en el tiempo, si el límite de $P(k+1/k)$ existe cuando k tiende a infinito, y es igual a \bar{P} , entonces también existe el límite de $K(k+1)$, igual a \bar{K} y el filtro Kalman será un filtro de coeficientes constantes.

Como $P(k+1/k)$ y $P(k/k)$ están relacionados íntimamente, entonces: $\lim_{k \rightarrow \infty} P(k/k) = \bar{P}_1$ también existe (Anderson y Moore, 1979).

Este algoritmo de CORRECCION - PREDICCIÓN, se realiza en este trabajo por medio de la subrutina Kalman.

En la sección siguiente se verá el estimador de suaviza-

miento óptimo, que es el último de los estimadores, que hace falta ver, ligado directamente con el estimador de $u(k)$ o secuencia de reflectividad.

III.3.3 SUAVIZADOR OPTIMO.

Ya se ha obtenido el algoritmo recursivo, para los estimadores de predicción y filtrado óptimo. Ahora, se desea conocer el algoritmo para el suavizador óptimo, recordando que éste tendrá la siguiente estructura :

$$\hat{X}(k/l) = E\{X(k)/Z(l)\}$$

Este estimador es más complicado que el de filtrado, ya que se utilizan mediciones futuras. Según la forma en que se desea esa mediciones futuras, habrá tres formas de estimadores de suavizamiento :

- a) De intervalo fijo.
- b) De punto fijo.
- c) De corrimiento fijo.

Un estimador de punto fijo de $u(k)$ es $\hat{u}(l/k+1)$ donde k se fija y l es variable. Los estimadores de punto fijo realizan las estimaciones en algún punto específico.

Un estimador de corrimiento de $u(k)$ es $\hat{u}(k/k+1)$, en donde l se fija y k varia. De tal forma que $u(k/k+1)$ utiliza una ventana de valores futuros de las mediciones ($Z(k+1)$,

$Z(k+2), \dots, Z(k+1) \}$

Un estimador de intervalo fijo de $u(k)$ usa solo valores de mediciones $Z(k+1), Z(k+2), Z(L)$.

III.4 ESTIMACION DE LA SECUENCIA DE ENTRADA.

Para la estimación de la secuencia de entrada, a partir de $Z(k)$ se utilizará la estimación de suavizamiento de $X(k)$, empleando, un algoritmo de punto fijo.

El proceso de estimación de $u(k)$, a partir de $Z(k)$ es implícitamente una DECONVOLUCION.

El estimador de punto fijo de $u(k)$ será denotado por $u(k/k+1)$, en donde k es fijo y l es variable. Los estimadores de punto fijo realizan las estimaciones en valores de tiempos específicos. Si se supone, que se tiene un valor estimado preliminarmente $u(k_1)$, obtenido por alguna otra técnica de deconvolución, y si se examinan visualmente los datos y se detectan tiempos en los cuales, los valores de $u(k)$ parecen ocurrir, entonces la señal se puede realizar para los valores estimados de $u(k_1)$ previamente, por medio de un estimador de punto fijo; así se van a obtener valores estimados para :

$$\hat{u}(k/k+1), \hat{u}(k/k+1), \dots, \hat{u}(k/k+1)$$

$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 2 & & 1 & 1 & k \end{matrix}$

En donde, se espera que $\hat{u}(k_1/k_1+1_k)$, pueda tener mejor resolución que $u(k_1)$.

Estos procedimientos se pueden aplicar a todos los valores de tiempo, para los cuales $u(k)$, puedan tener valores picos.

Primeramente, se verán las ecuaciones para estimadores de $\hat{u}(k_1/k_1+1)$, es decir para un solo paso $(k+1)$ y posteriormente para l pasos $(k+l)$, que establecerán las ecuaciones finales, y a su vez se logrará llegar a la meta final, que es precisamente el cálculo de $u(k)$.

El sistema de ecuaciones para el suavizador de punto fijo, de un sólo paso de $u(k)$ y su varianza de error asociada a dicho estimador, están dadas por :

$$\hat{u}(k/k+1) = qbP^{-1}(k+1/k)K(k+1)\bar{z}(k+1/k) \quad (3.18)$$

$$C_u^2(k/k+1) = q - qb^2h^T[h(k+1/k)h^T + r]^{-1} \quad (3.19)$$

La comprobación de estas ecuaciones, surge a partir de aplicar el operador $E[\#/Z(k+1)]$ a las ecuaciones de estado, utilizando y combinando las ecuaciones de filtrado y suavizamiento para $X(k)$.

Se puede observar que $\hat{u}(k/k+1)$, queda expresada en cantidades que son generadas por el filtro Kalman, como $K(k+1)$, $P(k+1/k)$ y $\bar{z}(k+1/k)$. Si $\bar{z}(k+1/k)$ es una secuencia de ruido blanco, entonces el estimador de la secuencia de entrada $u(k)$, es también de ruido blanco.

En donde, se espera que $\hat{u}(k_1/k_1+1_k)$, pueda tener mejor resolución que $u(k_1)$.

Estos procedimientos se pueden aplicar a todos los valores de tiempo, para los cuales $u(k_1)$, puedan tener valores picos.

Primeramente, se verán las ecuaciones para estimadores de $\hat{u}(k_1/k_1+1)$, es decir para un solo paso $(k+1)$ y posteriormente para 1 pasos $(k+1)$, que establecerán las ecuaciones finales, y a su vez se logrará llegar a la meta final, que es precisamente el cálculo de $u(k)$.

El sistema de ecuaciones para el suavizador de punto fijo, de un sólo paso de $u(k)$ y su varianza de error asociada a dicho estimador, están dadas por :

$$\hat{u}(k/k+1) = qbP^{-1}(k+1/k)K(k+1)\bar{z}(k+1/k) \quad (3.18)$$

$$\sigma_u^2(k/k+1) = q - qb'h'[h(k+1/k)h' + r]^{-1} \quad (3.19)$$

La comprobación de estas ecuaciones, surge a partir de aplicar el operador $E[\#/Z(k+1)]$ a las ecuaciones de estado, utilizando y combinando las ecuaciones de filtrado y suavizamiento para $X(k)$.

Se puede observar que $\hat{u}(k/k+1)$, queda expresada en cantidades que son generadas por el filtro Kalman, como $K(k+1)$, $P(k+1/k)$ y $\bar{z}(k+1/k)$. Si $\bar{z}(k+1/k)$ es una secuencia de ruido blanco, entonces el estimador de la secuencia de entrada $u(k)$, es también de ruido blanco.

El estimador de la secuencia de entrada $\hat{u}(k/k)$, se basa en el conjunto de mediciones $Z(k+1)=[Z(1), Z(2), \dots, Z(n-1)]$, en relación al tiempo $k+1$. Y como en sismología el registro está disponible a priori, se podrán utilizar las ecuaciones (3.18 y 3.19) .

Para estimar $u(k)$ con varios pasos adelante, se pueden generalizar los resultados anteriores; y se obtendrá $\hat{u}(k/k+1)$ y $\sigma_u^2(k/k+1)$. En donde $\hat{u}(k/k+1)$, es un estimador de suavizamiento de 1 pasos de $u(k)$ y σ_u^2 es la variancia de error asociada, definidos como :

$$\hat{u}(k/k+1) = \hat{u}(k/k+1-1) + N(k/k+1)z(k+1/k+1-1) \quad (3.20)$$

$$l=1,2,\dots \text{ y } \hat{u}(k/k) = 0$$

$$N_u(k/k+1) = qb^*P^{-1}(k+1/k)K(k+1) \quad (3.21.a)$$

$$N_u(k/k+1) = qb^*P^{-1}(k+1/k) \left[\prod_{j=k+1}^{k+L-1} K(j) \right] \quad (3.21.b)$$

$$\sigma_u^2(k/k+1) = \sigma_u^2(k/k+1-1) - N_u(k/k+1) \cdot [hP(k+1/k+1-1)h' + r]N_u(k/k+1) \quad (3.22.a)$$

$$\sigma_u^2(k/k) = q \quad (3.22.b)$$

La ecuación (3.20) es obtenida de manera similar a la ecuación (3.18), es decir se le aplica a la ecuación de estado el operador $E[\#/Z(k+1)]$, en ambos miembros. La ecuación

ción (3.21) es poco atractiva para programar, por lo que se busca un proceso que involucre menos multiplicaciones de matrices. Una ecuación equivalente para el cálculo es (Mendel y Kormylo, 1983) :

$$N_u(k/k+1) = qb'h' [hP(k+1/k)h' + r]^{-1} \quad (3.23.a)$$

$$N_u(k/k+1) = D(k,1)h' [hP(k+1/k+1-1)h' + r]^{-1} \quad (3.23.b)$$

$$D(k,1) = qb' \quad (3.24.a)$$

$$D(k,1) = D(k,1-1) [I - K(k+1-1)h]^{-1} A' \quad (3.24.b)$$

Se observa que $D(k,1)$ es una matriz de orden $n \times 1$ y en el cálculo de ella no se requiere de la inversa de $P(k+1/k)$.

En el diagrama siguiente se abreviará (Fig. 3.2) el algoritmo para obtener el estimador de $u(k)$, con las condiciones iniciales $\hat{u}(k/k) = 0$ y $\hat{C}_u^2(k/k) = q$.

El cálculo de la estimación de $U(k)$ se realiza en éste, por medio de la subrutina ESTIMA, mostrada en el final de este trabajo.

ESTIMACION DE $u(k)$

$$\hat{Q}(k/k+1) = q b^T P(k+1/k) K(k+1) \hat{Z}(k+1/k)$$

$$\sigma_{\hat{Z}}^2(k/k+1) = q - q b^T h [h^T P(k+1/k) h + \sigma^2]^{-1} h$$

$$\hat{Z}(k+1/k) = z(k+1) - h \hat{X}(k+1/k)$$

$$\hat{Q}(k/k+1) = \hat{Q}(k/k+1-1) + N_j(k/k+1) \hat{Z}(k+1/k+1-1)$$

$$N_j(k/k+1) = D(k,1) h [h^T P(k+1/k+1-1) h + \sigma^2]^{-1}$$

$$D(k,1) = D(k,1-1) [1 - K(k+1-1) h]^2$$

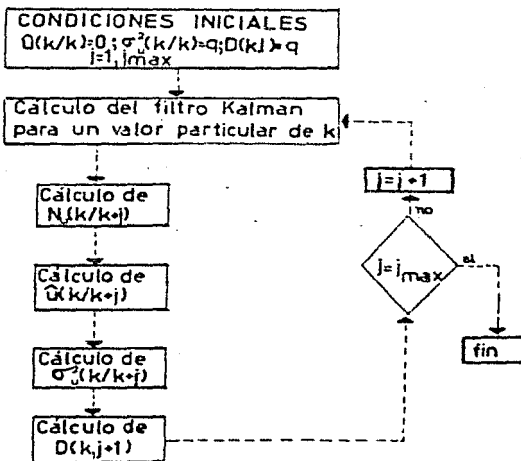


Fig. 3.2 diagrama de bloques mostrando el uso del estimador de punto fijo para $u(k)$, utilizando L pasos.

A LOS OJOS DEL HOMBRE DE IMA-
GINACION, LA NATURALEZA ES LA
IMAGINACION MISMA.

WILLIAM BLAKE

EL IMPULSO PERMANENTE DEL SER
HUMANO ES BUSCAR EL ORDEN Y
LA ARMONIA, OCULTOS EN LO
HETEROGENEO Y CAMBIANTE DEL
MUNDO VISIBLE.

NIELS BOHR

CAPITULO IV

APLICACION DE LA DECONVOLUCION DE VARIANZA MINIMA A SISMOGRAMAS SINTETICOS CON RUIDO .

En el capítulo anterior se mostró al operador de deconvolución de varianza mínima vía filtro Kalman , para el caso de un solo canal .Se presentaron también los algoritmos y parámetros para su aplicación , así como las condiciones estadísticas que debe cumplir la señal $Z(k)$.

En este capítulo se muestran tres ejemplos, cada uno con características distintas , con lo cual se podrá observar las bondades y limitaciones del método.

Los sismogramas que se elaboraron para aplicarles el operación de Deconvolución de varianza mínima , tienen como principales características :

- a) Sismograma elaborado a partir de una secuencia aleatoria y que cumple con el modelo estadístico de Robinson .
- b) Sismograma elaborado a partir de datos de un registro sónico de porosidad, el cual es impulsivo y contempla pérdidas por transmisión .
- c) Sismograma construido a partir de datos de un registro sónico de porosidad , ahora con múltiples y pérdidas por transmisión .

Para los ejemplos b) y c), además, se utilizaron datos con patrones de velocidades diferentes. Serán designados como ejemplos #1 y #2. Las gráficas de velocidades se muestran en las figuras 4.7.a y 4.12.a, respectivamente .

Los sismogramas y el proceso de deconvolución fueron programados en lenguaje Fortran IV y ejecutados en el sistema VAX 11/780, de tiempo compartido . Los programas se presentan al final del trabajo. El cálculo de los sismogramas impulsivos y con la presencia de múltiples, no será discutidos, ya que simplemente son auxiliares de este trabajo .

IV.1 PRESENTACION DE DATOS SINTETICOS Y APLICACION DEL OPERADOR DE DECONVOLUCION DE VARIANZA MINIMA .

IV.1.1 SISMOGRAMA SINTETICO A PARTIR DE UNA SECUENCIA ALEATORIA.

Este ejemplo, es el que se utilizó en el capítulo II, de tal manera que se hará un resumen breve de su construcción.

- Elaboración de una secuencia de reflectividad con distribución Normal-Poisson, a partir de números pseudoaleatorios, con media igual a cero , desviación estandar igual a 0.15 y lambda (parámetro de la distribución Poisson) igual a 0.05 . Con la finalidad de tener coeficientes de reflexión menores que el valor absoluto de .3, y así darle un toque más realista . La secuencia de reflectividad se muestra en la figura 2.4 .

- Realización de sismogramas sintéticos libres de ruido por modelo de variables de estado (Fig. 2.5.b) utilizando la ondicula fuente de Kramer (Fig. 2.3).

- Construcción de la secuencia de ruido aleatorio Gaussiano media cero. Para ello se propone una relación señal a ruido deseada y la varianza de la señal de entrada (q).

- Suma de la secuencia de ruido al sismograma con relaciones señal a ruido de 20,10,8,4,y 2 .

Mostradas en las figuras 4.1.a, 4.2.a, 4.3.a, 4.4.a y 4.5.a, respectivamente.

Una vez que se construyeron los sismogramas sintéticos contaminados, se procede a realizar la estimación de $u(k)$ o deconvolución

Como se sabe, el algoritmo utilizado para la deconvolución es el de suavizamiento de punto fijo de 1-pasos, de tal manera que surge la siguiente pregunta :

Cuántos pasos son necesarios para estimar la señal de entrada $u(k)$?

La respuesta se encontrará analizando la varianza del error, para ello se realizaron las siguientes pruebas:

a) Se seleccionó al azar uno de los sismogramas , en este caso fue el que contenía una $SNR=0$, y procedió a estimar la secuencia de entrada para 1,3,5,8,10 y 20 pasos, obteniéndose

SEÑAL DE ENTRADA SNR=20

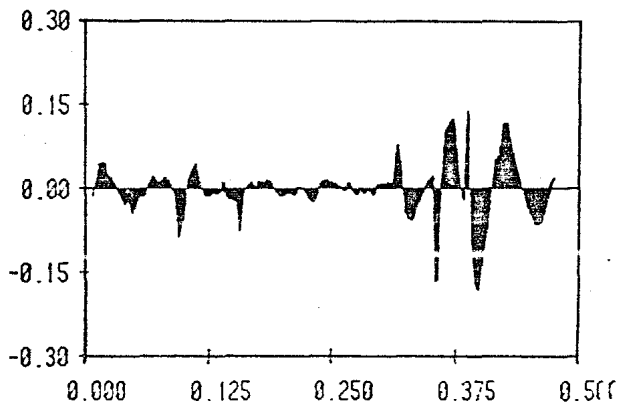


Fig. 4.1.a
Sismograma sintético
con relación señal-
ruido de 20.

SEÑAL DE SALIDA SNR=20 L=10

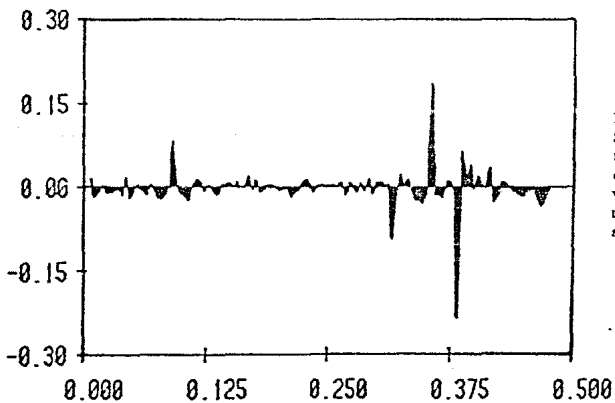


Fig. 4.1.b
Secuencia de reflecti-
vidad estimada con
el operador de deconv
olución de varianza
mínima para diez pas-
sos.

SEGUNDOS

SEÑAL DE ENTRADA SNR=10

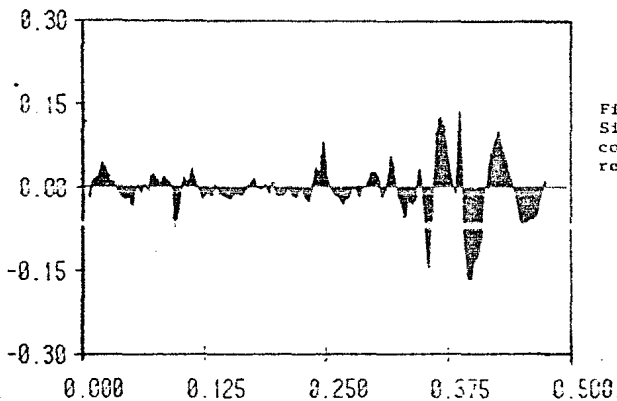


Fig. 4.2.a
Sismograma sintético
contaminado con una
relación de 10.

SEÑAL DE SALIDA SNR=10 L=5

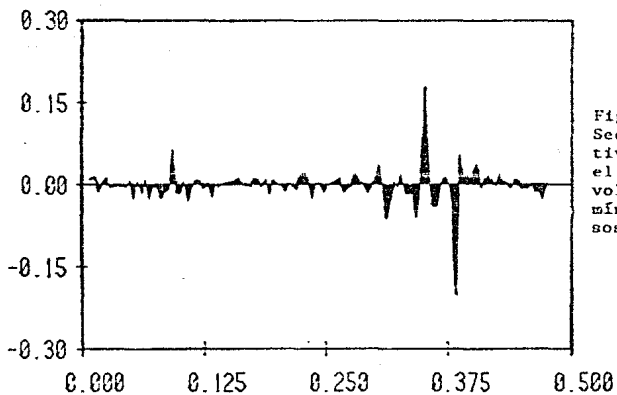


Fig. 4.2.b
Secuencia de reflec-
tividad estimada con
el operador de decon-
volución de varianza
mínima para diez pa-
sos.

SEGUNDOS

SEÑAL DE ENTRADA SNR=8

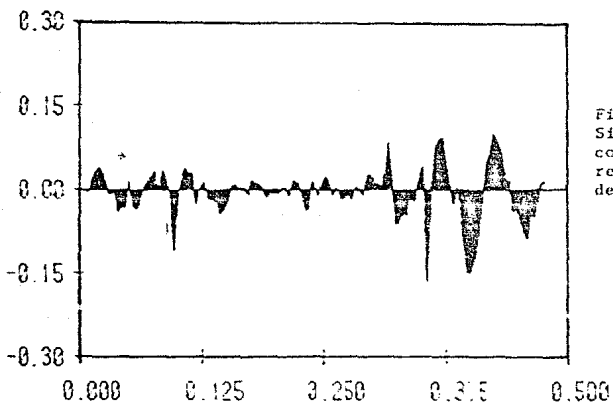


Fig. 4.3.a
Sismograma sintético
contaminado con una
relación señal-ruido
de 8.

SEÑAL DE SALIDA SNR=8 L=10

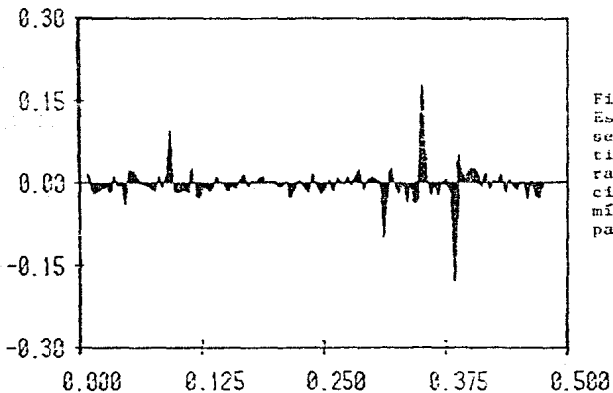


Fig. 4.3.b
Estimación de la
secuencia de reflexión
por el operador de deconvolu-
ción de varianza
mínima para diez
pasos.

SEGUNDOS

SEÑAL DE ENTRADA SNR=4

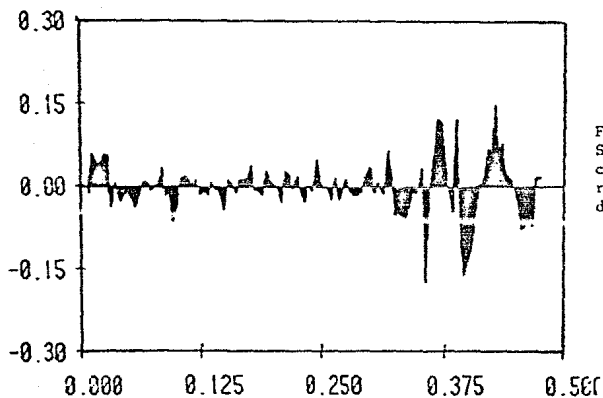


Fig. 4.4.a
Sismograma sintético
contaminado con una
relación señal-ruido
de 4.

SEÑAL DE SALIDA SNR=4 L=18

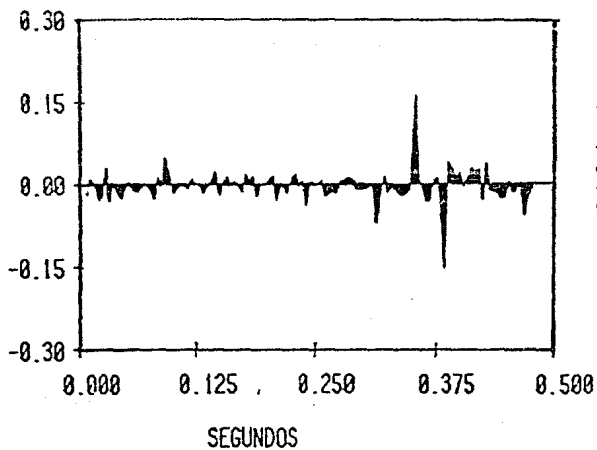


Fig. 4.4.b
Secuencia de reflecti-
vidad estimada con el
operador de deconvolu-
ción V.M. utilizando
diez pasos.

SEÑAL DE ENTRADA SNR=2

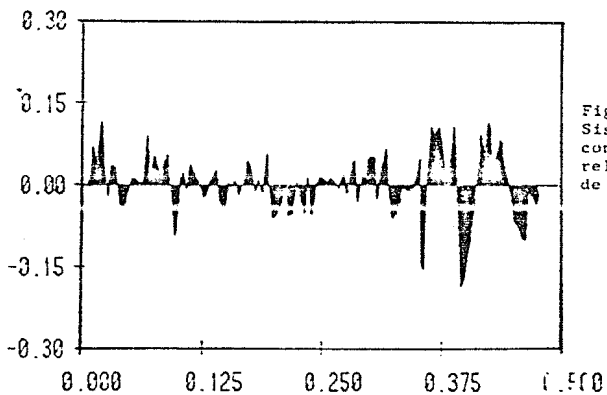


Fig. 4.5.a
Sismograma sintético
contaminado con una
relación señal-ruido
de 2.

SEÑAL DE SALIDA SNR=2 L=10

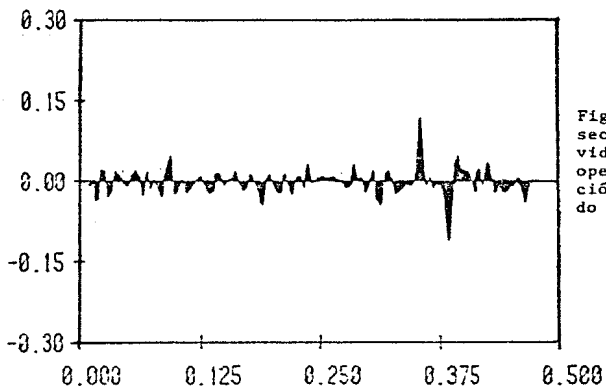


Fig. 4.5.b
secuencia de reflecti-
vidad estimada con el
operador de deconvolu-
ción de V.M. utilizan-
do diez pasos.

SEGUNDOS

VARIANZA DEL ERROR

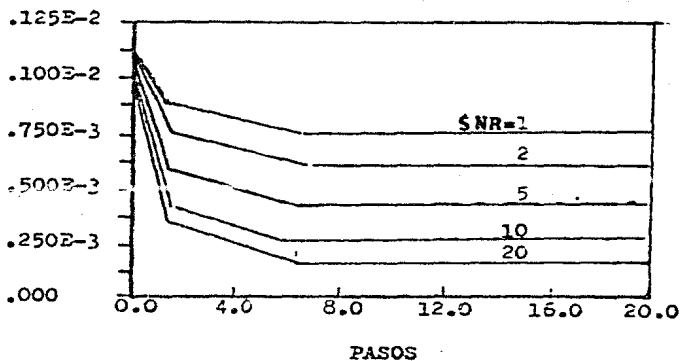


Fig. 4.6.a
Prueba realizada para determinar la varianza del error para sismogramas con diferente grado de contaminación.

VARIANZA DEL ERROR (SNR=8)

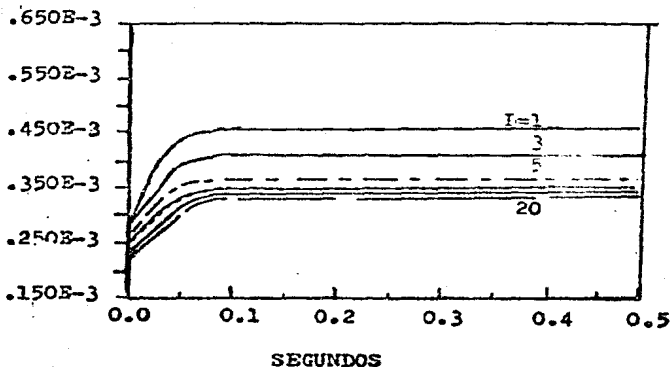


Fig. 4.6.b
Prueba realizada para determinar el número de pasos (L) óptimos, utilizando el criterio de la varianza del error.

los resultados de la gráfica (4.6.b) , en la cual se tiene tiempo contra varianza del error.

Los resultados que se observaron fueron los siguientes :

- La estimación mejora al aumentar el número de pasos .
- La varianza del error se estabiliza para estimaciones mayores de 5 pasos .
- La varianza del error se estabiliza para un tiempo corto (para cualquier número de pasos).
- La varianza del error entre 1 y 5 pasos tiene un incremento mayor que entre 5 y 10 pasos (0.12×10^{-3} y 0.03×10^{-3} , respectivamente)
- Por lo que el número de pasos más apropiada, se puede considerar entre 5 y 10 .

Una vez que se realizó esta prueba , se planteó la pregunta:

Cómo es la estimación al aumentar o disminuir el valor de la señal a ruido ?

b) Para responder tal cuestión , se tomaron los sismogramas sintéticos para las relaciones de señal a ruido conocidas y estimarlas para 1,3,5,8,10 y 20 pasos .

Los resultados se muestran en la gráfica (4.6.a). En ella se tiene como eje horizontal el número de pasos y como eje vertical la varianza del error.

De los resultados de la gráfica se destacan los puntos siguientes :

- Se generaliza que para cualquier sismograma con diferente valor de SNR, la estimación se considera buena cuando se utilizan de 5 a 10 pasos.

- La estimación desmejora cuando la relación señal a ruido es pequeña.

- Para sismogramas con SNR grandes (poco contaminados) el número de pasos requeridos, puede ser menor que el rango establecido (entre 5 y 10 pasos). Hasta con un solo paso puede ser suficiente. Esto se debe a que el filtro Kalman se estabiliza rápidamente.

Finalmente, con los resultados anteriores se estimaron las secuencias $Z(k)$ para valores de SNR diferente. Se utilizaron 10 pasos (los registros de este ejemplo son cortos, por lo que no fue desperdiciado tiempo de CPU). Para los casos b) y c) se utilizaron solamente 5 pasos.

Las secuencias de entrada estimadas (Figs 4.1.b -4.5.b), muestran resultados satisfactorios si se compara con la señal de entrada original (Fig. 2.4), que se muestra nuevamente en este capítulo.

Es evidente una depuración de los sismogramas contaminados con diferente señal a ruido, como se puede observar en las gráficas. Por ejemplo el sismograma con $SNR=20$, recupera la totalidad de los eventos primarios, eliminando el efecto de ondícula y casi la totalidad del ruido aleatorio añadido. Observando sismogramas con una contaminación más fuerte ($SNR=10$ y 8 . Figs 4.2.a y 4.3.a) se recuperan todos los coeficientes de reflexión un poco atenuados (Figs 4.2.b y 4.3.b). Para sismogramas aún más contaminados ($SNR=2$), en la

estimación siguen apareciendo los principales picos, aunque con la aparición en estos registros algo de ruido (Fig 4.5.b)

Por supuesto, en este primer ejemplo no hay que olvidar que la secuencia $Z(k)$ cumple con todas las características adecuadas para realizar la Deconvolución de varianza mínima en forma óptima, es decir, Gaussiana, Markov, no correlacionable y de ruido blanco .

IV.1.2 SISMOGRAMA SINTETICO IMPULSIVO

En este ejemplo se contempla un sismograma impulsivo con pérdidas por transmisión ; generado a partir de datos de un registro sísmico de porosidad. La elaboración de este tipo de sismograma consistió en :

- Dados los datos del registro, como son velocidad y profundidad (Figs 4.7.a y 4.12.a)
- Se obtuvo la secuencia de reflectividad asociada (Figs. 4.7.b y 4.12b)
- Generación de una secuencia impulsiva con pérdidas por transmisión a partir de los coeficientes de reflexión (Figs. 4.8.a y 4.13.a) .
- Construcción de histogramas a partir de los datos de la secuencia impulsiva, obteniéndose, la media, la varianza y la desviación estandar .

Este punto es importante, ya que dará la pauta, para

determinar si se cumple con las características de Gaussianidad y media cero , ya que como se sabe, la estimación depende del comportamiento estadístico de la secuencia. Los histogramas se presentan en las figuras 4.9 y 4.14 .

- Doblamiento de la secuencia, esto se llevó a cabo, ya que se realizaron pruebas con la traza a tiempo sencillo y las estimaciones resultaron con pérdidas de eventos importantes .

- Convolución de la secuencia impulsiva doblada con la ondícula, para obtener sismogramas sintéticos impulsivos libres de ruido (Figs. 4.8.b y 4.13.b) .

- Adición de ruido aleatorio Gaussiano y de media cero , para valores de SNR=2,5 y 10 . Para los ejemplos 1 y 2, se obtuvieron los sismogramas de las figuras 4.10.a,b y c y 4.15.a,b y c , respectivamente .

Una vez construidos los sismogramas, se procedió a aplicar el operador de Deconvolución. Los resultados de los ejemplos #1 y #2 se verán por separados.

EJEMPLO # 1

En este primer ejemplo del caso b, se pueden observar algunas características, primeramente de la gráficas de velocidades (Fig. 4.7.a), en la cual existe una gran variabilidad, trayendo consigo un gran número de coeficientes de reflexión, menores en valor absoluto a .3 (Fig. 4.7,b).

VELOCIDADES (CM/SEG) EJ#1

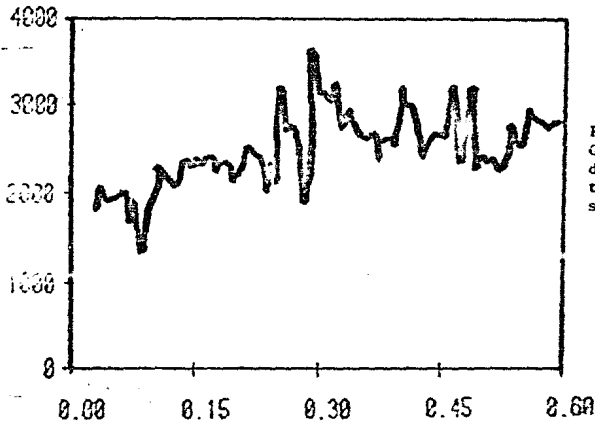


Fig. 4.7.a
Gráfica de velocidades obtenidas a partir de un registro sónico de porosidad.

COEFICIENTES DE REFLEXION

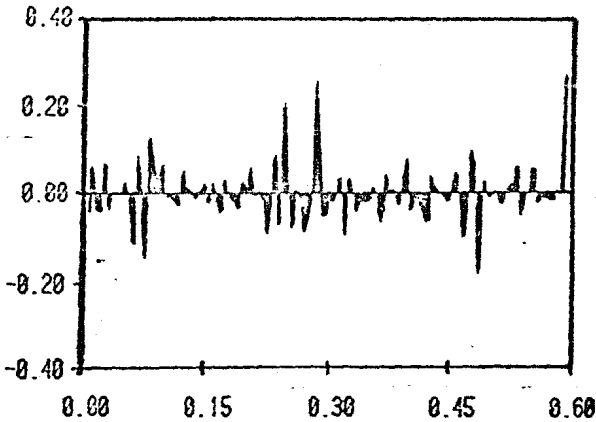


Fig. 4.7.b
Secuencia de reflectividad obtenida a partir de la secuencia de velocidad de la fig. 4.7.a

SEGUNDOS

SECUENCIA IMPULSIVA EJ#1

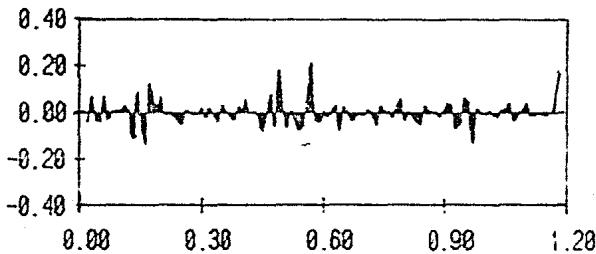


Fig. 4.8.a
Secuencia impulsiva
con pérdidas por --
transmisión obtenida
a partir de la secuen-
cia de reflectividad
de la fig. 4.7.b

SISMOGRAMA SINTETICO

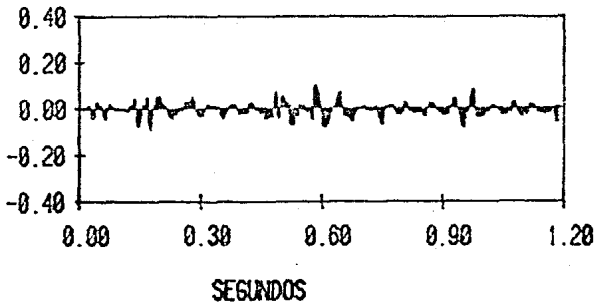


Fig. 4.8.b
Sismograma sintético
impulsivo con pérdi-
das por transmisión
y libre de ruido.

TABLA DE FRECUENCIAS E HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS RELATIVAS

CLASE	LIM. DE CLASE -	L. CLASE	FREC.	FREC. REL.	FREC. R. AC.
1	--.07553 - --.06307	--.06930	2	0.0168	0.0168
2	--.06307 - --.05061	--.05634	0	0.0000	0.0168
3	--.05061 - --.03815	--.04438	1	0.0080	0.0248
4	--.03815 - --.02569	--.03192	2	0.0168	0.0416
5	--.02569 - --.01323	--.01946	13	0.1092	0.1508
6	--.01223 - --.00077	--.00700	32	0.2689	0.4197
7	--.00077 - 0.01169	0.00546	47	0.3950	0.8147
8	0.01169 - 0.02415	0.01792	15	0.1261	0.9408
9	0.02415 - 0.03661	0.03038	4	0.0336	0.9744
10	0.03661 - 0.04902	0.04282	3	0.0256	1.0000

MEDIA = 0.00294

VARIANZA = 0.002610

FRECUENCIA
RELATIVA

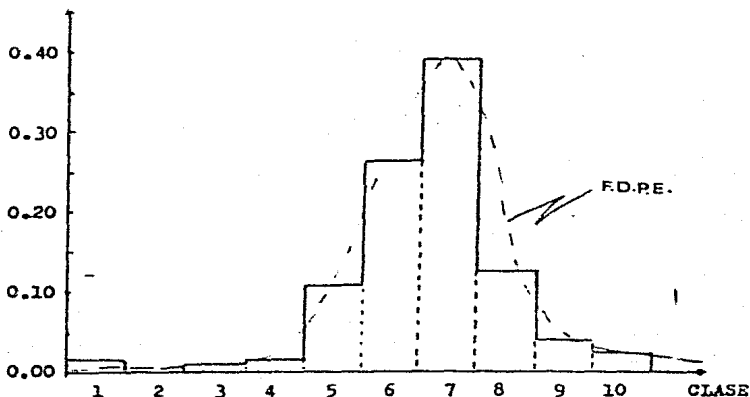


Fig. 4.9.

Histograma obtenido a partir de los datos de la secuencia impulsiva con pérdidas por transmisión de la fig. 4.8.a

SISM. SINT. SNR=10

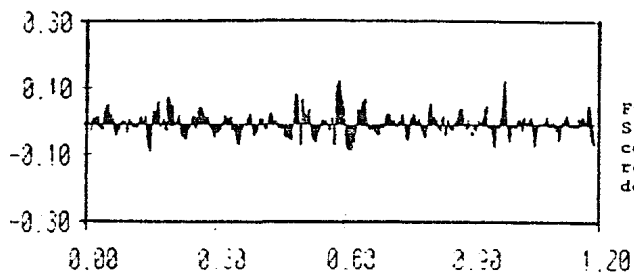


Fig. 4.10.a
Sismograma sintético
contaminado con una
relación señal-ruído
de 10.

SISM. SINT. SNR=5

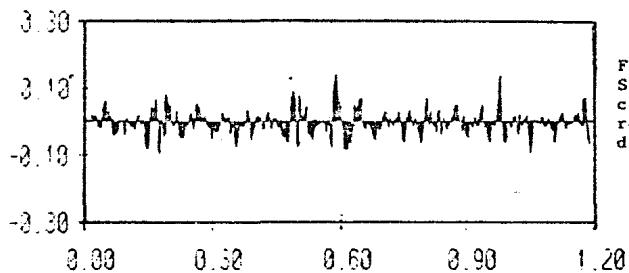


Fig. 4.10.b
Sismograma sintético
contaminado con una
relación señal-ruído
de 5.

SISM. SINT. SNR=2

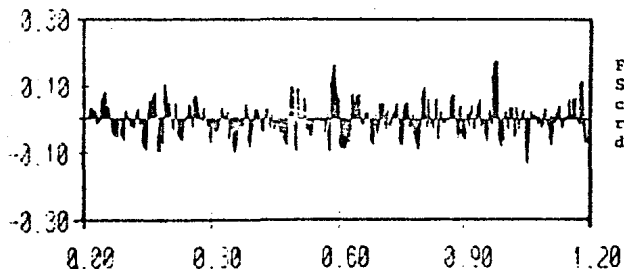


Fig. 4.10.c
Sismograma sintético
contaminado con una
relación señal-ruído
de 2.

SEGUNDOS

SEÑAL DE SALIDA SNR=13 L=5

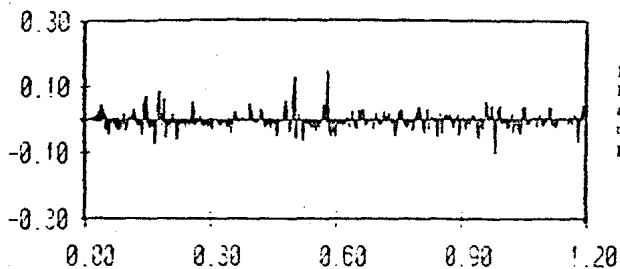


Fig. 4.11.a
Estimación realizada
a partir del sismograma
de la fig. 4.10.a
para cinco pasos (L=5)

SEÑAL DE SALIDA SNR=5 L=5

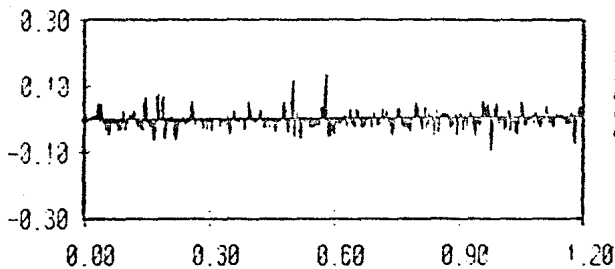


Fig. 4.11.b
Estimación realizada
a partir del sismograma
de la fig. 4.10.b para
cinco pasos.

SEÑAL DE SALIDA SNR=2 L=5

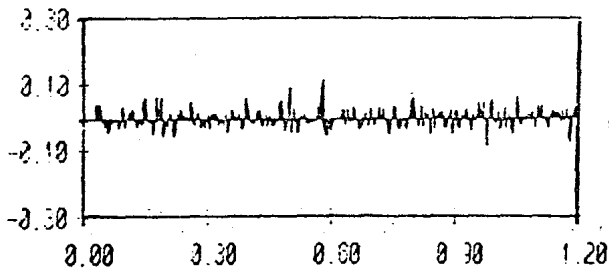


Fig. 4.11.c
Estimación realizada
a partir del sismograma
de la fig. 4.10.c
para cinco pasos.

SEGUNDOS

Obteniendo la función de distribución de probabilidad empírica de la secuencia impulsiva (Fig. 4.9) se ve que tiene un comportamiento Gaussiano leptocúrtico (con valores más concentrados hacia la media), la media es casi cero por lo que cumple con las características preestablecidas.

Al aplicar la deconvolucion a los sismogramas de las figuras 4.10.a,b y c; para 5 pasos (Figs 4.11.a,b y c) se tiene que efectivamente las estimaciones corresponden a los picos de la secuencia impulsiva (Fig. 4.8.a) además se tienen las siguientes características :

- Las estimaciones de los picos mayores , se recuperan en tres casos presentados.

- Se pierden los picos situados entre dos picos mayores. Posiblemente por haber una concentración grande de picos.

- Son buenas las estimaciones para sismogramas con SNR grandes. Para sismogramas con SNR pequeñas la recuperación de los coeficientes es satisfactorio.

- Siendo la función de distribución de probabilidad empírica una aproximación a la Gaussianidad, se mantiene una estimación bastante aceptable.

- La variabilidad no afecta en gran medida en la recuperación de los picos importantes.

EJEMPLO # 2

En este ejemplo se observa de la gráfica de velocidades (4.12.a) muy poca variabilidad, lo cual se manifiesta en la gráfica de los coeficientes de reflexión (Fig. 4.12.b).

VELOCIDADES (M/SEG) EJ#2

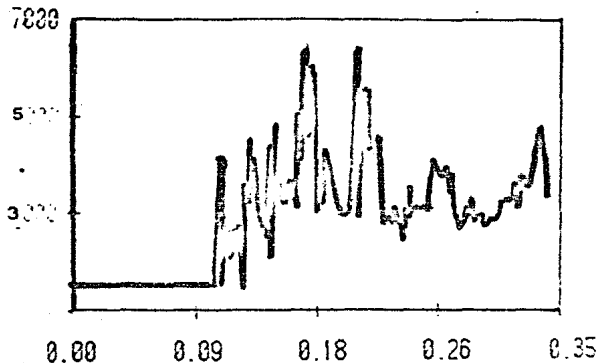


Fig. 4.12.a
Gráfica de velocidades
obtenidas a partir de
un registro sónico de
porosidad.

COEFICIENTES DE REFLEXION

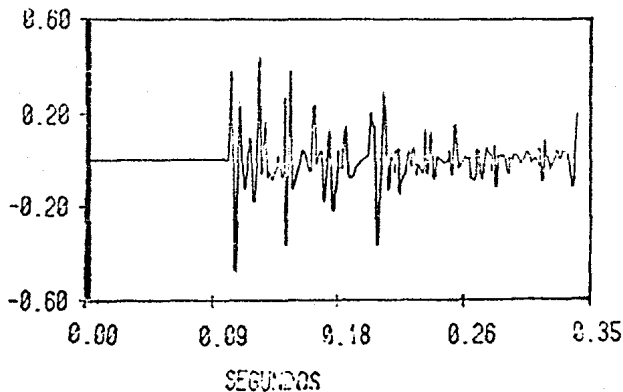


Fig. 4.12.b
Secuencia de reflexión
obtenida a
partir de la secuencia
de velocidades
de la fig. 4.12.a.

SECUENCIA IMPULSIVA EJ#2

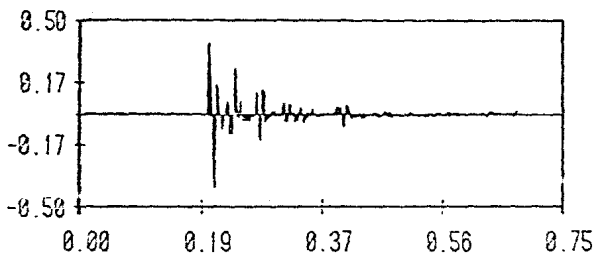


FIG. 4.13.a
Secuencia impulsiva _
con pérdidas por trans-
misión obtenida a par-
tir de la secuencia de
reflectividad de la fig.
4.12.b

SISM SINTETICO IMPULSIVO

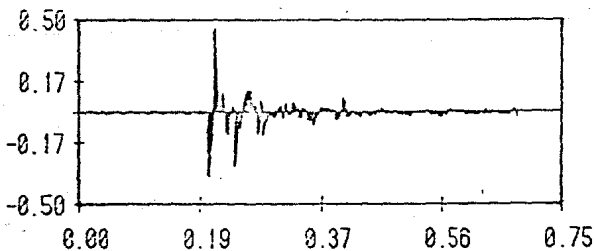


Fig. 4.13.b
Sismograma sintético _
impulsivo con pérdidas
por transmisión sin _
contaminar.

SEGUNDOS

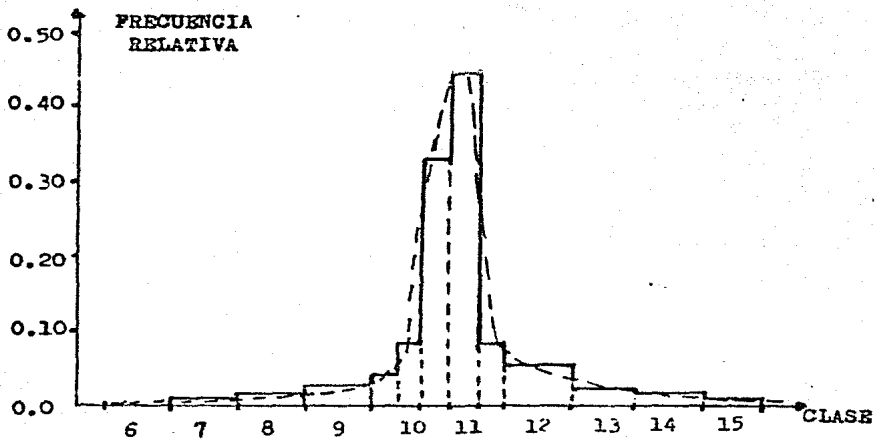


Fig. 4.14.
 Histograma obtenido a partir de los datos de la secuencia
 impulsiva de la fig. 4.13.a

SISM. SINT. SNR=10 EJ#2

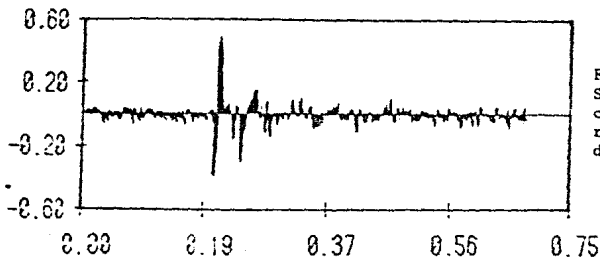


Fig. 4.15.a
Sismograma sintético
contaminado con una
relación señal-ruído
de 10.

SISM. SINT. SNR=5

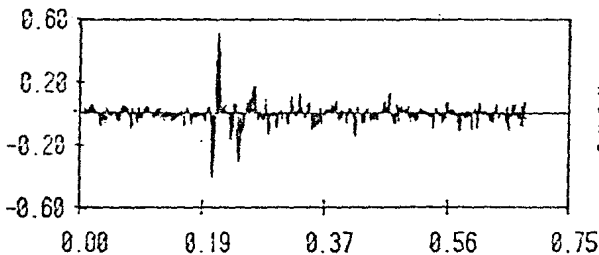


Fig. 4.15.b
Sismograma sintético
contaminado con una
relación señal-ruído
de 5.

SISM. SINT. SNR=2

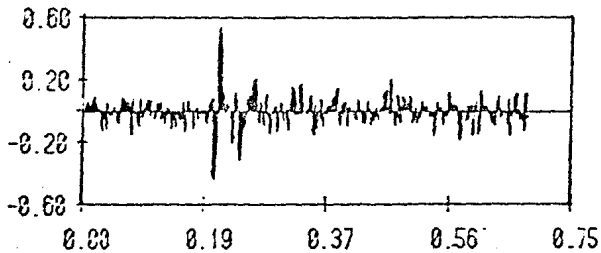


Fig. 4.15.c
Sismograma sintético
contaminado con una
relación señal-ruído
de 2.

SEGUNDOS

S. DE SALIDA SNR=10 L=5 EJ#2

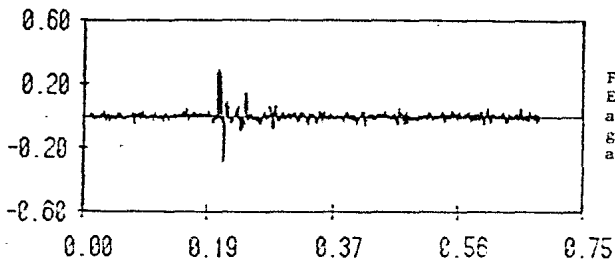


Fig. 4.16.a
Estimación realizada
a partir del sismo-
grama de la fig. 4.15.
a. para cinco pasos.

S. DE SALIDA SNR=5 L=5

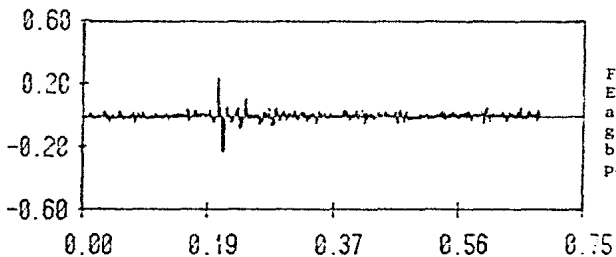


Fig. 4.16.b
Estimación realizada
a partir del sismo-
grama de la fig. 4.15.
b. utilizando cinco
pasos.

S. DE SALIDA SNR=2 L=5

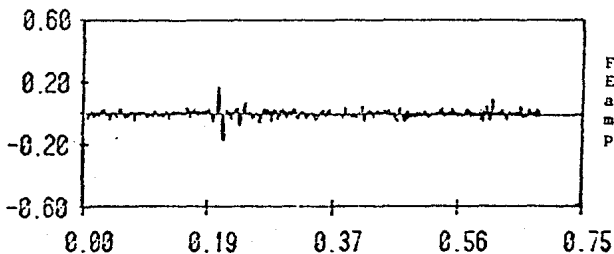


Fig. 4.16.c
Estimación realizada
a partir del sismo-
grama de la fig. 4.15.
c para cinco pasos.

SEGUNDOS

La función de distribución de probabilidad de la secuencia impulsiva (fig. 4.14), conserva la forma de la distribución Gaussiana, con valores bastante concentrados hacia la media, provocado por la poca variabilidad, trayendo como consecuencia que :

- El proceso de Deconvolución (Figs. 4.16.a,b y c) recupera la totalidad de los eventos de la secuencia impulsiva (Fig. 4.13.a).

- Al final de la traza, aparecen algunos picos fantasmas, tal vez esto sea consecuencia de la poca variabilidad o la concentración de valores hacia la media.

- Hay una disminución aparente en la magnitud de los picos estimados.

- La deconvolución en los tres sismogramas con diferentes valores de SNR da como resultado estimaciones muy semejantes, difícilmente se podría decir que exista una diferencia en los grados de contaminación.

IV.1.3 SISMOGRAMAS SINTETICOS CON MULTIPLES

A los ejemplos 1 y 2 se les añadió, la contribución de los múltiples. Para observar ahora cual es el comportamiento del operador de Deconvolución en la presencia de múltiples, los cuales como se sabe son correlacionables entre sí.

La secuencia que siguió para la construcción de los sismogramas con múltiples y pérdidas por transmisión, fue:

- A partir de la secuencias de reflectividad se elaboró

una traza con primarios y múltiples que también contemplan pérdidas por transmisión (Figs. 4.17.a y 4.20.a).

- Convolución entre la ondícula fuente Kramer y la secuencia de primarios y múltiples doblada (Figs. 4.17.b y 4.20.b).

- Suma de ruido aleatorio Gaussiano para relaciones de señal a ruido de 2,5 y 10 (Figs. 2.18.a,b y c y 2.21.a,b y c).

- La estadística es la misma de el caso anterior , ya que la meta es estimar los primarios y ver si son eliminados los múltiples, de los cuales no se ha hablado nada en toda la teoría por ser eventos correlacionables y la teoría se basa en eliminar eventos aleatorios y no correlacionables como el ruido.

En seguida se va a proceder a discutir los resultados obtenidos de las estimaciones hechas para los sismogramas de los ejemplos 1 y 2 ; siguiendo el orden establecido.

EJEMPLO # 1

La secuencia de primarios y múltiples se muestra en la figura 4.17.a , su convolución con la ondícula Kramer en la figura 4.17.b y su contaminación con ruido aleatorio , en distintas proporciones (SNR=2,5 y 10) en las figuras 4.18.a,b y c .

SEC. DE PRIMARIOS Y MULTIPLES EJ#1

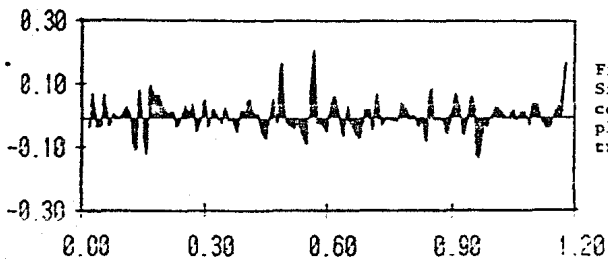


Fig. 4.17.a
Sismograma sintético
con primarios y múlti-
ples con pérdidas por
transmisión.

SISM. SINTETICO (MULTIPLES)

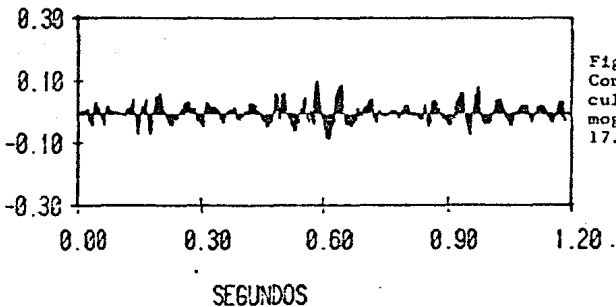


Fig. 4.17.b
Convulsión de la onda
cula kramer con el sis-
mograma de la fig. 4.
17.a. libre de ruido.

SEGUNDOS

S. S. C/MULTIPLES SNR=10

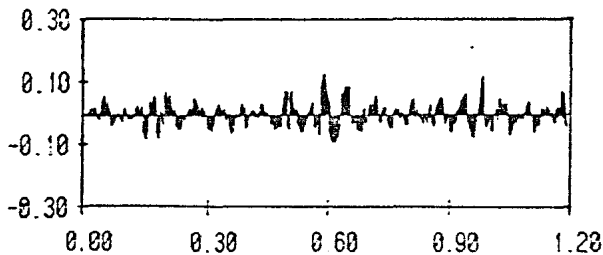


Fig. 4.18.a
Sismograma con un contenido de SNR de 10 de la fig. 4.17.b

S. S. C/MULTIPLES SNR=5

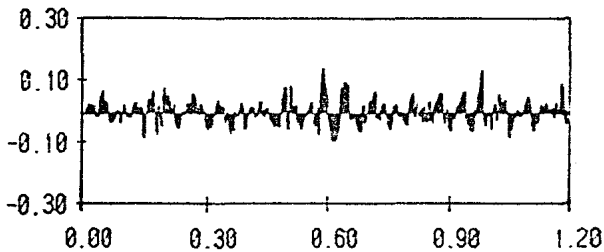


Fig. 4.18.b
Sismograma sintético con una relación señal-ruido de cinco.

S. S. C/MULTIPLES SNR=2

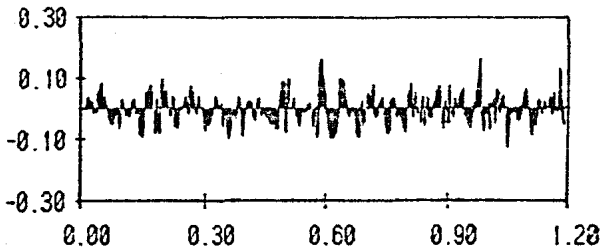


Fig. 4.18.c
Sismograma sintético con una relación señal-ruido de 2.

SEGUNDOS

S. DE SALIDA(MULT) SNR=10 L=5

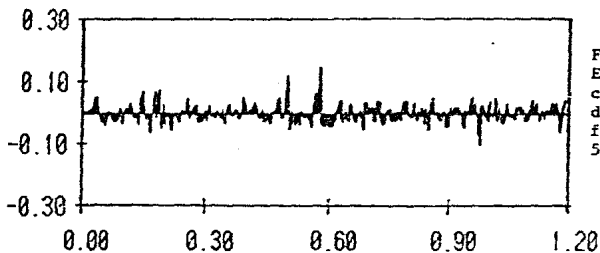


Fig. 4.19.a
Estimación de la secuen
cia impulsiva a partir
del sismograma de la
fig. 4.18.a utilizando
5 pasos.

S. DE SALIDA(MULT) SNR=5 L=5

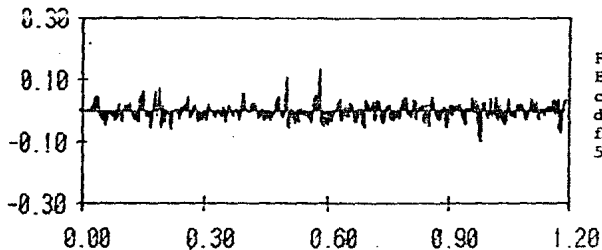


Fig. 4.19.b
Estimación de la secuen
cia impulsiva a partir
del sismograma de la
fig. 4.18.b utilizando
5 pasos.

S. DE SALIDA(MULT) SNR=2 L=5

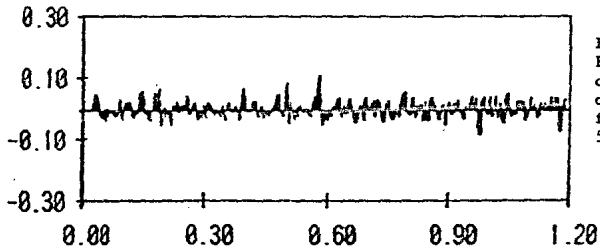


Fig. 4.19.c
Estimación de la secuen
cia impulsiva a partir
del sismograma de la
fig. 4.18.c utilizando
5 pasos.

SEGUNDOS

La intención es, utilizar la Deconvolución de varianza mínima para tratar la secuencia impulsiva mostrada en la figura 4.8.a ; y juzgar la bondad de la Deconvolución en presencia de múltiples y ruido aleatorio.

Al aplicar la deconvolución de varianza mínima a los sismogramas de las figuras 4.18.a,b y c, se observa , que se han recuperado todos los eventos primarios , los múltiples fueron mínimamente atenuados y tanto el efecto de ondícula y como el ruido aleatorio han sido parcialmente eliminados, para los tres casos.

Recordando que en este ejemplo, existe una gran variabilidad de las velocidades, que se manifiesta en el número de coeficientes de reflexión . De tal forma , que los múltiples se llegan a confundir con los eventos primarios .Sin duda la dificultad de eliminar los eventos múltiples es consecuencia de que la secuencia por deconvolucionar no cumple con la propiedad de no correlacionabilidad.

EJEMPLO # 2

En el segundo ejemplo, con poca variabilidad de velocidades, como ya se había visto , la presencia de múltiples será más clara, que en el ejemplo # 1, (vease las figuras 4.20.a y b).

En este ejemplo los resultados que se obtuvieron , al aplicar la deconvolución a sismogramas contaminados (Figs.

SEC. DE PRIMARIOS Y MULTIPLES EJ#2

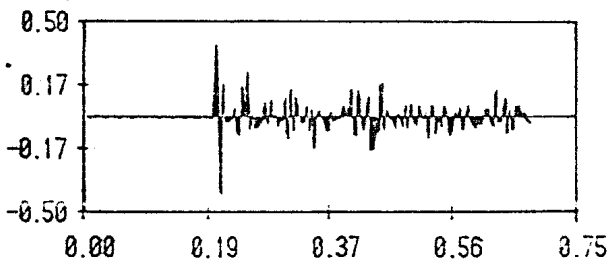


Fig. 4.20.a
Secuencia de primarios
y multiples con pérdi-
das por transmisión.

SISM. SINTETICO (MULTIPLES)

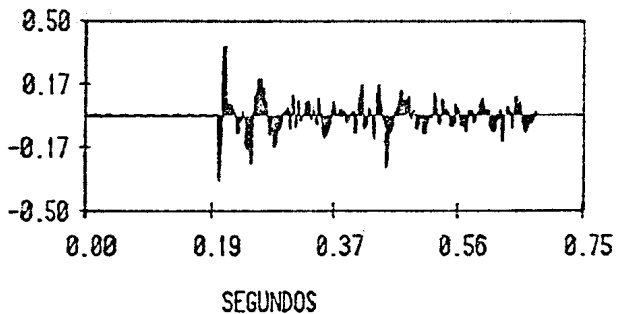


Fig. 4.20.b
Sismograma sintético
resultado de la convo-
lución de la ondícula
kramer y la secuencia
de la fig. anterior.

SISM. SINT(MULT) SNR=10 E412

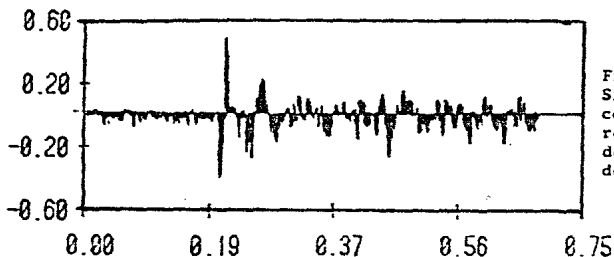


Fig. 4.21.a
Sismograma sintético
contaminado con una
relación señal-ruído
de 10 del sismograma
de la fig. 4.20.b

SISM. SINT(MULT) SNR=5

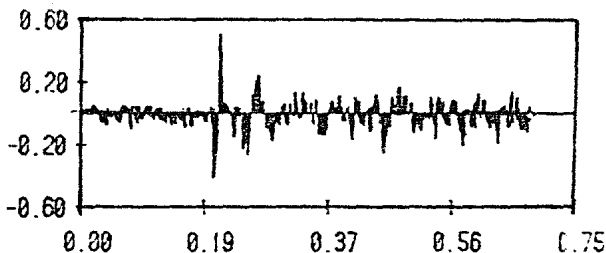


Fig. 4.21.b
Contaminación del sig-
nograma de la fig. 4.
20.b con una SNR de 5.

SISM. SINT(MULT) SNR=2

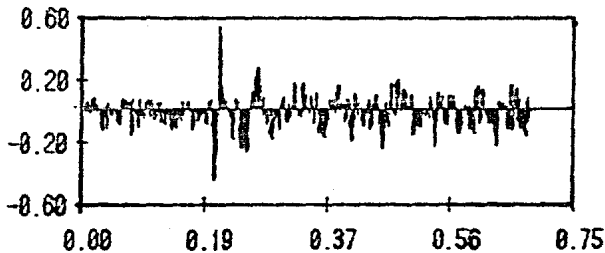


Fig. 4.21.c
Contaminación del
sismograma de la fig.
4.20.b con una SNR de
2.

SEGUNDOS

S. DE SALIDA(MULT) SNR=10 L=5 EL#2

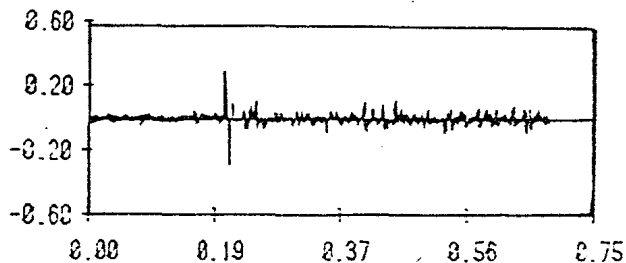


Fig. 4.22.a
Estimación de la se-
cuencia impulsiva de
la fig. 4.13.a

S. DE SALIDA(MULT) SNR=5 L=5

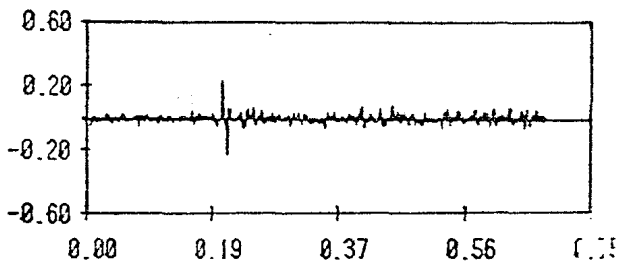


Fig. 4.22.b
Estimación de la
secuencia impulsiva
de la fig. 4.13.a

S. DE SALIDA(MULT) SNR=2 L=5

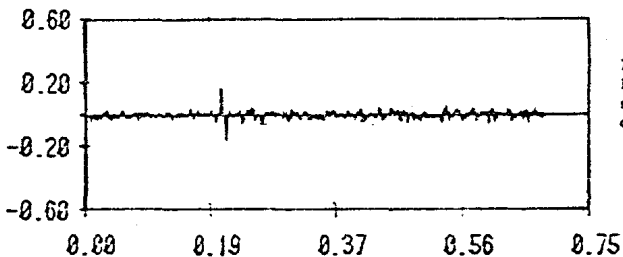


Fig. 4.22.c
Estimación de la
secuencia impulsiva
de la fig. 4.13.a

SEGUNDOS

4.21.a,b y c) se observan en las figuras 4.22.a,b y c.

Se puede ver claramente, que se recuperaron todos los eventos primarios y que los múltiples aparecen un poco atenuados. Se puede afirmar, con este ejemplo, que en el proceso de Deconvolución los múltiples no han sido tomados en cuenta, al ser eventos correlacionables.. Solamente han sido disminuidos sensiblemente en magnitud.

CONCLUSIONES

El método presentado, es otra alternativa del conocido problema de DECONVOLUCION, basado en las ideas de modelos de variables de estado y teoría de estimación, el cual para casos aún complejos ofrece resultados bastante aceptables .

Al haber aplicado el operador de deconvolución de varianza mínima, vía filtro Kalman, a sismogramas con diferentes características que tienden a apegarse a la realidad, se puede concluir lo siguiente:

- LA RECUPERACION DE LOS COEFICIENTES DE REFLEXION, INMERSOS EN SECUENCIAS DOMINADOS POR RUIDO ALEATORIO EN DIFERENTES CANTIDADES Y POR EL EFECTO DE ONDICULA, ES BASTANTE ACEPTABLE.

- LAS ESTIMACIONES DE LOS COEFICIENTES DE REFLEXION MEJORAN AL AUMENTAR EL NUMERO DE PASOS.

- LA VARIANZA DEL ERROR SE ESTABILIZA PARA ESTIMACIONES QUE EMPLEAN MAS DE CINCO PASOS ($L \leq 5$)

- LAS ESTIMACIONES DESMEJORAN CUANDO LA RELACION SENAL A RUIDO ES PEQUENA.

- LAS ESTIMACIONES REALIZADAS EN SISMOGRAMAS CON GRAN VARIABILIDAD, ELIMINAN EVENTOS ENTRE DOS EVENTOS DE MAYOR MAGNITUD.

- LA DECONVOLUCION REALIZADA EN SISMOGRAMAS CON POCA

VARIABILIDAD, CREA PICOS FANTASMAS, ES DECIR, CUANDO SE TIENE UNA DISTRIBUCION GAUSSIANA TIPO LEPTOCURTICO, AL REALIZARSE LA ESTIMACION SE OBTIENEN ALGUNOS PEQUEÑOS PICOS SIN RELACION ALGUNA CON LOS COEFICIENTES DE REFLEXION VERDADEROS.

- LA DECONVOLUCION DE VARIANZA MINIMA NO ELIMINAN LOS EVENTOS QUE SON CORRELACIONABLES, COMO SON LOS MULTIPLES, LOS MANTIENE DURANTE TODO EL PROCESO DE ESTIMACION.

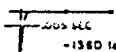
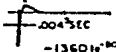
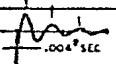
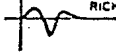
Para la aplicación de la Deconvolución de varianza mínima, en este trabajo se supuso conocida la ondícula fuente, la varianza de la señal y la relación señal a ruido; las cuales en la práctica no serán conocidas.

Estas pueden ser obtenidas a partir de los sismogramas de campo en base a esquemas de estimación similares a los aquí planteados.

Los resultados obtenidos en este trabajo, como todo conocimiento, están sujetos a ser mejorados. La aplicación del método a datos reales es todo un reto y constituye el siguiente paso que podría ser dado por otros estudiantes, que deseen aplicar los conceptos de variables de estado y teoría de estimación, al problema de Deconvolución.

APENDICE II.A

COLECCION DE ONDICULAS EN EME

$v''(t)$	Δ^*	R^*	L
 .003 SEC -1360 kg^{-1000} (Kramer et al. 1962)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -89 \times 10^6 & -10^3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1360 \\ 0 \end{pmatrix}$
 .004 SEC $-1360 \text{ kg}^{-1000} \times 54.4 \text{ kg}^{-1000}$ (Kramer et al. 1962)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -25 \times 10^6 & -10^3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1360 \\ 0 \\ 54.4 \\ 0 \end{pmatrix}$
 .004 SEC $-1360 \text{ kg}^{-1000} \times 0.5e^{-15.3t} \sin\left(\frac{2\pi}{.06} t\right)$ (Kramer et al. 1962)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -25 \times 10^6 & -10^3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1360 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$
 RICKER WAVELET (Ricker, 1940) ^b	$\begin{pmatrix} -.205 & 787 \\ -787 & -.205 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -268 \\ 0 \\ 0.54 \\ 0 \\ -269 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tomado de Mendel y Kormylo, 1978.

APENDICE II.B

OBTENCION DE LA MATRIZ DE TRANSICION A Y EL VECTOR DE ENTRADA B

Para la obtención de A y de b se utilizaron los siguientes cálculos :

$$A = e^{Mt}$$

$$b = \left(\int_0^t M e^{dr} \right) N$$

El calculo de estos dos parámetros no es directo , ya que la matriz M y el vector N , que representan a alguna ondícula fuente, representan algunas complicaciones en cuanto a la naturaleza de los coeficientes ; ya que éstos se presentan con valores absclutos muy grandes o muy pequeños . de tal forma que una matriz exponencial al expanderse en series de potencias (Gabel C. 1978) podria no converger .

Por ejemplo, la expansión de la matriz A es :

$$A = e^{Mt} = I + Mt + \frac{M^2 t^2}{2!} + \dots$$

Al observar la expresión , se dará uno cuenta , que si los coeficientes son muy grandes o pequeños , la expansión será lenta y costosa .

Una forma de evitarlo , es utilizando la técnica de "cuadratura", que consiste en encontrar un número n tal que:

$$\left| M t / 2^n \right| < 1 \quad (B.1)$$

En donde n es el número de términos, dentro de la expansión que permite representar confiablemente a la expresión Mt .

La N buscada se obtiene de la relación :

$$\left| M t / 2^n \right|_p < 1 \quad (B.2)$$

En donde $\| \cdot \|_p$ es la norma de Froebinius, la cual se obtiene como :

$$M_p = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}^2 \right]^{1/2} \quad (B.3)$$

En donde M_{ij} son los elementos de la matriz M , además la norma cumple que : $M_p > \lambda_{\max} > 0$ (REID G., 1983).

Siendo λ_{\max} el valor característico con mayor valor absoluto, de la matriz M .

El algoritmo que se sigue para hallar A y b es :

a) Dada M , N y T se halla la n que cumpla con la ecuación (B.2).

b) Se calcula una matriz auxiliar E , en series de potencias, definida como :

$$E = I (t/2^n) + M (t/2^n)^2 / 2 + \dots$$

Casi siempre son requeridos de 10 a 12 terminos , para la convergencia de E_0 .

c) Se forma una segunda matriz auxiliar F

$$F_0 = I + ME_0$$

La cual es igual a :

$$f_0 = e^{Mt/n} / 2$$

d) Se forma otro par de matrices , para $m=1,2,\dots,n$

Las matrices son :

$$E_m = E_{m-1} + E_{m-1} E_{m-1}$$

$$F_m = F_{m-1} - F_{m-1}$$

e) A partir de las matrices auxiliares, se forma :

$$A = e^{Mt/n} = F_m$$

$$b = \left(\int_0^t e^{M(t-\tau)} d\tau \right) N = E_m$$

APENDICE II. C

RUTINAS UTILIZADAS EN LA CONSTRUCCION DE SISMOGRAMAS
SINTETICOS POR VARIABLES DE ESTADO.

Las rutinas que se presentan , están en el orden que se ha seguido en el capítulo , para poder obtener sismogramas sintéticos libres de ruido y/o con ruido ambiental.

En éstas se proporcionan : el dato de entrada requerido , la salida deseada , así como la figuras , en las cuales se muestra el resultado gráfico de cada rutina.

RUTINA	ENTRADA	SALIDA	FIGURA
ALEA	Semilla	Generación de num. aleatorios.	
REF	Media y desv. Estandar.	Secuencia de reflectividad .	2.4
FROEB	M , N y t	Num. de iteraciones necesarias para la cuadratura.	
TRAN	M, N , t y n	Obtención de A y b.	
CONVO	$u(k)$, A , b, h y t .	Sismograma libre de ruido $Z(k)$	2.5
VAR	SNR, A, b , h y q	Varianza del ruido, matriz de cov. estacionaria.	
BRUIDO	r y $Z_1(k)$	Secuencia de ruido Sismograma contaminado.	2.6

APENDICE III.A : OBTENCION DEL ESTIMADOR DE PREDICION

Se aplica el teorema fundamental de teoría de estimación a la ecuación de la solución de estado, de tal manera que queda:

$$\hat{X}(k/j) = E[X(k)/Z(j)] = AE[X(k)/Z(j)] + \sum_{i=1}^k AE(u(i-1)/Z(j)) = A\hat{X}(k/k) \quad (3.a.1)$$

En este resultado, se establece que, $E[u(i-1)/Z(j)] = 0$, esto es, debido a que $Z(j)$ depende de $X(k)$, y este a su vez depende de $u(i-1)$, de tal forma que:

$$E[u(i-1)/Z(j)] = E[u(i-1)/u(1), u(2), \dots, u(j-1)]$$

Y esto es igual a $E[u(i)] = 0$, ya que $u(j)$, es de media cero.

APENDICE III.B : PROCESO INNOVADOR

El proceso innovador , esta expresado por la ecuación :

$$\bar{z}(k+1/k) = z(k+1) - \hat{z}(k+1/k) \quad (3.b.1)$$

Esta ecuación, se puede expresar de varias formas que son muy útiles para el desarrollo del filtrado óptimo, por ejemplo, si se sustituye la ecuación de estado y se le aplica el operador $E[\# / Z(k)]$, se podrá obtener $\hat{z}(k+1/k)$, la cual queda expresada, como :

$$E[z(k+1) / Z(k)] = E[hx(k+1) / Z(k)] + E[v(k+1) / Z(k)]$$

$$\hat{z}(k+1/k) = h\hat{x}(k+1/k)$$

No aparece $E[v(k+1) / Z(k)]$, ya que es igual a cero , debido a que $z(k+1)$ depende de $v(k+1)$, y como este último es de media cero $E[v(k+1) / Z(k)] = 0$.

Si se sustituye la ecuación anterior en (3.b.1) , se tendrá:

$$\bar{z}(k+1/k) = z(k+1) - hx(k+1/k) \quad (3.b.2)$$

Si ahora se sustituye la ecuación de estado, en esta última, se tendrá :

$$\bar{z}(k+1/k) = h\hat{x}(k+1/k) + v(k+1) \quad (3.b.3)$$

$\bar{z}(k+1/k)$ es Gaussiana y de media cero .

APENDICE III.C : MATRICES DE COVARIANZA Y CROSCOVARIANZA.

La matriz P_{xz} , se halla al obtener la covarianza de la ecuación (3.b.3), es decir :

$$E\{\bar{X}(k+1/k)\bar{X}'(k+1/k)\} = E\{h\bar{X}(k+1/k) + n(k)\}[\text{igual }] \\ = hP(k+1/k)h' + r$$

La matriz de croskovarianza se obtiene :

$$P_{xz} = E\{X(k+1) - E\{X(k+1)\}\bar{X}'(k+1/k)\} \quad (3.c.1)$$

Sustituyendo la ecuación (3.b.3)

$$P_{xz} = E\{X(k+1)\bar{X}'(k+1/k)\}h' \quad (3.c.2)$$

Si $X(k+1) = \bar{X}(k+1/k) + \hat{X}(k+1/k)$ y se aplica el principio de ortogonalidad , se tiene :

$$P_{xz} = P(k+1/k)h' \quad (3.c.3)$$

APENDICE III.D : VARIANZA DEL ERROR DEL FILTRO KALMAN.

La varianza del error , esta dada por la ecuación :

$$P(k+1/k+1) = [I - K(k+1)h] P(k+1/k) \quad (3.d.1)$$

Se sabe que la ecuación del filtro Kalman , está dada por :

$$\hat{X}(k+1/k+1) = \hat{X}(k+1/k) + K(k+1)\bar{Z}(k+1/k) \quad (3.d.2)$$

Si se sustituye la ecuación (3.b.3), en esa última ecuación, y a la ecuación resultante se le sustrae $X(k+1)$, queda :

$$\bar{X}(k+1/k+1) = [I - K(k+1)h] \bar{X}(k+1/k) - K(k+1) \quad (3.d.3)$$

Si se aplica el operador $P(k+1/k+1) = E[\bar{X}(k+1/k)\bar{X}'(k+1/k)]$, se obtendrá la ecuación (3.d.1) .


```

211 WRITE(6,212)I,CU(I)
PRINT*, 'DESEAS ALGUN OTRO VALOR DE SNR SI=1 NO=2'
READ(3,*)NSR
PRINT*,NSM
IF(NSM.EQ.1) GO TO 208
400 FORMAT(//,14X,'DATOS DE ENTRADA :NT,LAY,ALAMB,SA,NGM,T'//)
401 FORMAT(12X,13,3X,13,3X,5,3X,FB,3,3X,12,3X,FB,3,//)
402 FORMAT(20X,' MATRIZ DE LA FUENTE',//)
333 FORMAT(20X,' VECTOR B DE LA FUENTE',//)
334 FORMAT(20X,' VECTOR H DE LA FUENTE',//)
304 FORMAT(//,17X,' MATRIZ DE TRANSICION FIT(1,J)',//)
206 FORMAT(4X,4(E14.5,2X),)
300 FORMAT(//,19X,' VECTOR GAMMA DE ENTRADA',//)
301 FORMAT(23X,E14.7,/)
144 FORMAT(20X,' QUE VALOR DESEAS PARA SNR',//)
FORMAT(23X,'SEÑAL-RUIDO='F4.1)
500 FORMAT(//,15X,' VARIANZA DE LA SEÑAL='2X,E14.9,/)
533 FORMAT(//,17X,' VARIANZA DEL RUIDO',E14.7,/)
307 FORMAT(//,17X,' NUMERO DE PASOS PARA ESTIMAR',//)
611 FORMAT(20X,' PASOS',12,/)
235 FORMAT(//,15X,' SECUENCIA ALEATORIA DE REFLECTIVIDAD',//)
236 FORMAT(//,15X,' SISMOGRAMA SINTEICO CONTAMINADO',//)
210 FORMAT(//,15X,' SECUENCIA DECONVOLUCIONADA UK',//)
212 FORMAT(3X,'GU',13,')='2X,E12.5)
STOP
END

```

```

C-----
SUBROUTINE REF(NT,R)
DIMENSION R(400)
COMMON ALAMB,LAY,SA
DO 202 I=1,NT
R(I)=0.0
DO 203 J=1,NT
TJ=J*ALAMB
IF(TJ.GT.ALAMB) GO TO 203
CALL ALEA(LAY,O.O,SA,X2)
R(I)=X2
CONTINUE
RETURN
END

```

```

C-----
C GENERACION DE UNA SECUENCIA AL AZAR
10 SUBROUTINE ALEA(LAY,AMEDIA,SIGMA,X1)
U1=JAN(LAY)
U2=JAN(LAY)
B1=2*U1-1.
B2=2*U2-1.0
S=B1**2+B2**2
IF(S.GT.1.) GO TO 10
X1=B1*SQR(-2.0*ALOG(S)/S)
X1=X1*SIGMA+AMEDIA
RETURN
END

```

```

C-----
C SOBROUTINA PARA OBTENER LA MATRIZ DE ESTADO
SUBROUTINE TRAN(A,BC,T,NGM,N,X,BT)
DIMENSION A(4,4),A(4,4),X(4,4),Y(4,4),Z(4,4)
DIMENSION X(4,4),BG(4,4),BT(4,4),ZZ(4,4)
CALL FROED(A,T,NGM,N)
DO 10 I=1,NGM
BC(I)=BC(I)/T
DO 10 J=1,NGM
IF(I.EQ.J) GO TO 20

```

```

AI(I,J)=0.0
GO TO 10
20 AI(I,J)=1.0
10 CONTINUE
REL=1/FLOAT(Z**N)
DO 40 I=1,NGM
DO 40 J=1,NGM
AI(I,J)=AI(I,J)*REL
X(I,J)=AI(I,J)
40 Y(I,J)=0.5*X(I,J)*(REL+Z)
NFACT=Z
DO 50 I=1,N-C
NFACT=NFACT*(K+Z)
CALL MATMA(X,A,NGM,Z)
DO 50 I=1,NGM
DO 50 J=1,NGM
ZZ(I,J)=Z(I,J)*REL***(K-Z)/NFACT
Y(I,J)=Y(I,J)+ZZ(I,J)
Z(I,J)=0.0
ZZ(I,J)=0.0
50 CONTINUE
DO 70 I=1,NGM
DO 70 J=1,NGM
Y(I,J)=Y(I,J)+AI(I,J)
AI(I,J)=AI(I,J)/REL
X(I,J)=0.0
70 CONTINUE
CALL MATMA(A,Y,NGM,X)
DO 80 I=1,NGM
DO 80 J=1,NGM
X(I,J)=X(I,J)+AI(I,J)
80 CONTINUE
DO 90 I=1,N
CALL MATMA(X,Y,NGM,Z)
CALL MATMA(X,A,NGM,XX)
DO 90 I=1,NGM
DO 90 J=1,NGM
Y(I,J)=Z(I,J)+Y(I,J)
X(I,J)=XX(I,J)
Z(I,J)=0.0
XX(I,J)=0.0
90 CONTINUE
CALL MATVE(Y,BC,NGM,BT)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE GENJOB (CHGN,RTPE,FI,GAMM,H,P,Z)
DIMENSION A(4),X(10),X1(4),GAMM(4),H(4),FIT(4),ZP(400),R(400)
DO 202 I=1,NGM
204 X(I)=0.0
DO 202 K=2,NI
CALL MATVE(FIT,X,NGM,XI)
DO 203 I=1,NGM
X1(I)=0.0
X1(I)=X(I)+GAMM(I)*R(K-1)
203 X(I)=X(I)+X1(I)
ZP(K)=0.0
DO 202 I=1,NGM
ZP(K)=ZP(K)+H(I)*X(I)
RETURN
END

```



```

C          SUBROUTINE FROEDINIUS
SUBROUTINE FROED(A,T,NC,N)
DIMENSION A(4,4)
SUM=0.0
S=0.0
DO 1 I=1,NC
DO 1 J=1,NC
1 SUM=SUM+A(I,J)**2
ANORM=SQRT(SUM)
R=ANORM**T
3 S=S+1.0
R1=2**S
R2=R/R1
IF (R2 LE 1) GO TO 2
GO TO 3
2 N=S+1.0
WRITE(6,99)N
66 FORMAT(//,'10X, ' NÚMERO DE ITERACIONES (FROESINIUS) SERA: ',I2,//)
RETURN
END

```

```

C          SUBROUTINE VAR(F,G,H,I,SN,N,ND)
SUBROUTINE VAR(F(4,4),A(4,4),B(4,4),C(4,4),CC(4,3),FT(4,4),A1(4,4),
*G(4),H(4),I(4),FN(4,4))
CALL VEVET(G,G,N,CC)
SA=0.0
DO 10 I=1,N
DO 10 J=1,N
10 B(I,J)=G*CC(I,J)
A1(I,J)=F(I,J)
DO 20 ITER=1,30
CALL TRADMA(A,N,FN)
CALL MATMA(B,F,N,N,C)
CALL MATMA(A,C,N,A)
CALL SUMA(A,S,N,1,C,C)
CALL MATMA(A,A,N,A1)
S=0.0
DO 20 I=1,N
DO 20 J=1,N
A(I,J)=A1(I,J)
B(I,J)=C(I,J)
20 S=S+B(I,J)
IF (ITER LE 1) GO TO 30
IF (ABS(1-ABS(S/SA))) LE 1.E-8) GO TO 40
30 SA=S
WRITE(6,*) ' NO CONVERGE EL CALCULO DE LA MATRIZ '
RETURN
40 WRITE(6,32)
DO 30 I=1,N
30 WRITE(6,33) (B(I,J),J=1,N)
CALL TRADMA(F,N,FT)
CALL MATMA(B,F,N,N,C)
CALL MATMA(F,A,N,C)
CALL SUMA(C,G,N,G,D)
CALL VEVET(H,D,N,I)
CALL VEVET(I,H,N,G)
RD=H/EN
34 FORMAT(10X, 'MATRIZ DE COVARIANZIA ESTACIONARIA',//)
35 FORMAT(10X, '(E14.7,2X), //)
RETURN
END

```

```

C          AGREGA RUIDO ALEATORIO A UNA TRAZA DADA

```

```

SUBROUTINE GRUIDO(T,NT,RD,SEM,AL,T)
DIMENSION T(400),T1(400),AL(400)
DR=SGRT(HD)
DO 6 I=1,NT
AL(I)=S.O
T1(I)=O.O
CALL ALEA(SEM,O.O,DR,ALE)
AL(I)=ALE
T1(I)=T(I)+ALE
6 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ESTIMACION DE LA SECUENCIA DE ENTRADA
ESTIMU (F,G,H,G,RD,N,Z,NT,LMAX,AK,U,CU)
DIMENSION G(4),H(4),X(1),XP(4),XP1(4),AK(4),D(4),S1(4),PROV(4)
DIMENSION F(4,4),FT(2,4),P(4,4),PP(4,4),A1(4,4),A2(4,4),
*PROV(4,4),D1(4),Z(400),UK(400),PR(4,4),CU(400)
DO 1 I=1,N
DO 1 J=1,N
X(I)=O.O
1 P(I,J)=O.O
CALL TRASMA (F,N,FT)
IA=O
13 IB=IA
DO 3 I=1,L
DO 3 D(I)=G*G(I)
UK=O.O
DO 4 L=1,LMAX
IK=JA+L
CALL KALLMA (N,IK,F,G,H,G,RD,P,X,XP,XP1,PR,PP,Z,AK)
CALL VTRAT (S1,PR,N,S1)
CALL VETVE (S1,H,N,S2)
CALL VETVE (D,H,N,S3)
S2=S2+RD
FNU=S3/S2
CALL VETVE (H,XP,N,S4)
UKK=UK+FNU*(Z(IA+L)-S4)
GUM2=GUM+(FNU**2)*S2
IF (ABS(UKK-UK),LE 1 E-10) GO TO 66
CALL VETV (AK,H,N,A1)
CALL DAIDE (A1,N,A2)
CALL TRASMA (AD,N,A1)
CALL MATMA (A1,FT,N,A2)
CALL VTRAT (D,A2,N,D1)
IF (IA.NE.IB) GO TO 5
DO 6 I=1,N
DO 6 J=1,N
PROV(I)=XP1(I)
6 PPROV(I,J)=PP(I,J)
5 II=IB+1
DO 7 I=1,N
DO 7 J=1,N
D(I)=D1(I)
X(I)=XP1(I)
P(I,J)=PP(I,J)
7 A1(I,J)=O.O
A2(I,J)=O.O
UK=UKK
GUM=GUM2
CONTINUE
66 UC(IA+1)=UKK

```

```

CU(IA+1)=CUM
DO B I=1,N
DO B J=1,N
X(I)=PROV(I)
P(I,J)=PPROV(I,J)
IA=IA+1
IF (IA.GT.NT) GO TO 9
GO TO 13
RETURN
END

```

```

C-----C
SUBROUTINE OBTENCION DEL FILTRO KALLMAN
DIMENSION K(4,4), F(4,4), FI(4,4), FII(4,4), PF(4,4), PSI(4,4), SO(4,4)
*, FZ(4,4), G(4,4), H(4,4), X(4,4), XP(4,4), AK(4,4), H1(4,4), H2(4,4), Z(400)
*, A(4,4), E(4,4), PS(4,4), PR(4,4)
CALL TRASHA (F,N,FT)
CALL VEVEI (O,O,N,G)
CALL MATVE (F,O,N,XP)
CALL MATRA (O,P,N,PS)
CALL MATRA (FI,FT,N,FS)
CALL RIMA (FP,G,N,G,PR)
CALL VEVEI (H,AP,N,HD)
CALL MATVE (PR,H,N,H1)
CALL VTRAT (H,PR,N,H2)
CALL VEVEI (H2,H,N,HS)
S=Z(IK)=HO
H4=HC+KD
DO 20 I=1,N
AK(I)=H1(I)/H4
XP(I)=XP(I)+AK(I)*S
CALL VEVEI (AK,H,N,PS)
CALL DAICE (PS,N,PS1)
CALL MATRA (PS1,PR,N,PP)
RETURN
END

```

```

C-----T
SUBROUTINE RESTA DE LA MATRIZ IDENTIDAD
DIMENSION A(4,4), AI(4,4), A1(4,4)
DO 1 I=1,N
DO 1 J=1,N
IF (I.EQ.J) GO TO 2
AI(I,J)=O
GO TO 1
2 AI(I,J)=1
1 AI(I,J)=AI(I,J)-A(I,J)
RETURN
END

```

```

C-----B
SUBROUTINE PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN VECTOR
DIMENSION A(4,4), B(4,4), D(4)
DO 21 I=1,N
D(I)=O
DO 21 J=1,N
21 D(I)=D(I)+A(I,J)*B(J)
RETURN
END

```

```

C-----O
SUBROUTINE PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR OTRA MATRIZ
DIMENSION A(4,4), B(4,4), D(4,4)

```

```

DO 20 I=1, N
  DO 20 J=1, N
    D(I, J)=0
    DO 20 K=1, N
      D(I, J)=D(I, J)+A(I, K)*B(K, J)
20 RETURN
END

```

C ~~MATRIZ TRANSPUESTA~~ O

```

SUBROUTINE TRASMA(A, N, D)
DIMENSION A(4, 4), B(4, 4)
DO 30 I=1, N
DO 30 J=1, N
30 B(I, J)=A(J, I)
RETURN
END

```

C ~~PRODUCTO DE UN VECTOR POR OTRO TRANSPUESTO~~ T

```

SUBROUTINE VEVE(A, B, N, D)
DIMENSION A(4), B(4), D(4)
DO 50 I=1, N
DO 50 J=1, N
50 D(I, J)=0
D(I, J)=D(I, J)+A(I)*B(J)
RETURN
END

```

C ~~PRODUCTO DE UN VECTOR TRANSPUESTO POR OTRO VECTOR~~ B

```

SUBROUTINE VEVE(A, B, N, D)
DIMENSION A(4), B(4)
D=0.0
DO 60 I=1, N
60 D=0.0
D(I)=D(I)+B(I)
RETURN
END

```

C ~~PRODUCTO DE UN VECTOR TRANSPUESTO POR UNA MATRIZ~~ O

```

SUBROUTINE VMAT(A, B, N, L)
DIMENSION A(4), B(4, 4), D(4)
DO 80 I=1, N
D(I)=0.0
DO 80 J=1, N
80 D(I)=D(I)+A(J)*B(J, I)
RETURN
END

```

C ~~SUBROUTINA DE SUMA~~ O

```

SUBROUTINE SUMA(A, B, N, C, D)
DIMENSION A(4, 4), B(4, 4), D(4, 4)
DO 10 I=1, N
DO 10 J=1, N
10 D(I, J)=A(I, J)+B(I, J)
RETURN
END

```

C ~~SUBROUTINA DE GRAFICACION~~ T

```

SUBROUTINE PLOTN (I, LI, DELT)
I(LI)=TRAZA A GRAFICAR
LI=LONGITUD DE LA TRAZA
DIMENSION T(400), LINE (51)
DATA NMAX/40/
DATA IBLNC1, IBLNC2, IAST, IBLNC, ICENTR /'>', '<', '*', ' ', ' ', ' /
10 WRITE (6, 15)
15 FORMAT(' ', 10('-----'))

```

```

IST=0
TMAX=0
DO 20 I=1,LT
  IF (IST.EQ.0.AND.T(I).NE.0.)IST=1
  TMAX=MAX1(T(I),TMAX)
20 CONTINUE
IF (TMAX)40,40,50
40 WRITE(6,43)
45 FORMAT(/20X,'CUIDADO---LA TRAZA ES NULA. '//)
GO TO 200
50 DO 100 I=IST,LT
  DO 60 J=1,11
  LINE(J)=18LNC
  CONTINUE
  J=IFIX(25.*T(I)/TMAX+SIGN(.5,T(I)))+26
  J=MAXO(MINO(J,5),1)
  KM=MINO(J,26)
  KP=MAXO(J,26)
  DO 70 K=KM,KP
  LINE(K)=I*AST
  CONTINUE
70 LINE(26)=ICENTR
  TP=T(I)
  IF (I.GT.1)TP=T(I)-T(I-1)
  TP=T(I)
  IF (I.LT.LT)TP=T(I)+T(I+1)
  IF (I.EQ.1)TP=T(I)
  IF (I.EQ.LT)TP=T(I)
  IF (TP.GT.0.)LINE(J)=IBLNC2
  GO TO 90
85 IF (TP.GT.0.)LINE(J)=IBLNC1
90 WRITE(6,95)(LINE(J),J=1,5),I,1*DELT,T(I)
95 FORMAT(' ',31A1,14,2X,F7.5,2X,F12.7)
100 CONTINUE
200 WRITE(6,210)TMAX
210 FORMAT('+',10('---+'))//,15X,'MAXIMA DEFLEXION=',F15.7,/)
RETURN
END

```

BIBLIOGRAFIA

Anderson Brian and Moore J.B.
Optimal Filtering
Prentice Hall Inc., 1979

Box George and Jenkins Gwilym M.
Time Series Analysis: Forecasting and Control
Holden Day, 1976

Dekker Marcel
Recursive techniques of parameter estimation. The equation
error formulation.
Prentice Hall Inc New York, 1978

Gabel C. Roberts.
Señales y sistemas lineales
Limusa, 1978.

Kalman R.E
A new approach to linear filtering and prediction problems.
Geophysics Vol 25, 1960.

Mendel Jerry
Optimal Seismic Deconvolution
Academic Press, 1983

Mendel Jerry and Kormylo John
Single Channel white noise estimator for Deconvolution
Geophysics Vol. 43, 1978

Mendel Jerry and Nahi N.E.
A time domain approach to seismograms synthetic for layered
media .
Geophysics Vol 43, 1978

Mendel , Kormylo Sung, farroukh and Habibi
A novel approach to seismic signal processing and modeling.
Geophysics Vol 46 N.10 , 1981

Papoulis
Probability random variables and stochastic process
Mac. Graw Hill, 1965.

Reid J. Gary
Linear system fundamentals. Continuous and Discrete , Classic
and modern.
International Studen Edition ,1983

Robinson Enders and Silvia T. Manuel
Deconvolution of Geophysical time series in the exploration
for oil and natural gas.
Elsevier Scientific Publishing Company, 1979

Robinson Enders and Treitel Sven
Principles of digital Wiener filtering.
Geophysical Prospecting Vol XV ,1963

Torres Fontanes J. y Castro Veronica
Métodos para la solución de problemas de computadora
digital.
P.S.I.,Meico, 1980

Treitel Sven and Peacock
Predictive Deconvolution :Theory and Practice
Geophysics Vol 34 , 1969