

6  
2ej.



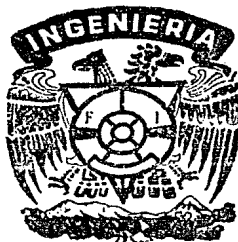
**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**CONTINUACION ANALITICA ASCENDENTE A  
TRAVES DE LA INTEGRAL DE NEUMAN.**

**Tesis Profesional**  
Que para obtener el título de  
**INGENIERO GEOFISICO**  
p r e s e n t a

**HECTOR CHAVEZ CASTELLANOS**



Director: M.C. JUAN M. BRANDI PURATA

México, D. F

1987



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

I. INTRODUCCION.....	1
II. FUNDAMENTOS MATEMATICOS.....	2
II.1. Problema de Dirichlet.....	2
II.2. Problema de Neuman.....	5
II.3. Problemas de contorno para la esfera.....	8
II.3.1. Problema de Dirichlet.....	8
II.3.2. Problema de Neuman.....	9
II.4. Problemas de contorno para el plano infinito.....	10
II.4.1. Problema de Dirichlet.....	10
II.4.2. Problema de Neuman.....	11
II.5. Problemas de contorno para el semiplano.....	13
II.5.1. Problema de Dirichlet.....	14
II.5.2. Problema de Neuman.....	14
III. CONTINUACION ANALITICA ASCENDENTE USANDO LA INTEGRAL DE DIRICHLET.....	17
III.1. Mapas.....	18
III.2. Perfiles.....	20
IV. CONTINUACION ANALITICA ASCENDENTE USANDO LA INTEGRAL DE NEUMAN.....	23
IV.1. Modalidades.....	23
IV.2. Mapas.....	25
IV.2.1. Primera derivada.....	25
IV.2.2. Comparación de resultados.....	27
IV.2.3. Función potencial.....	44
IV.2.4. Comparación de resultados.....	46

IV.3. Perfiles.....	56
IV.3.1. Función potencial.....	65
IV.3.2. Comparación de resultados.....	67
CONCLUSIONES.....	81
BIBLIOGRAFIA.....	83

CAPITULO I  
INTRODUCCION

La continuación analítica ascendente es una de las herramientas más comunes en el procesado de campos potenciales en Geofísica. Los algoritmos numéricos que se han usado para llevar a cabo esta operación en forma práctica, generalmente usan como fundamento teórico las integrales de Dirichlet para el plano y el semiplano y sólomente hay una referencia a que esta operación también se puede realizar usando las integrales de Neuman para esas mismas geometrías (Henderson, 1970).

En este trabajo se investiga la posibilidad de llevar a cabo la continuación analítica ascendente usando las integrales de Neuman en sus diferentes modalidades, y se hace una comparación numérica de los resultados obtenidos con ellas y los resultados arrojados por los procesos convencionales, basados en las integrales de Dirichlet.

CAPITULO II  
FUNDAMENTOS MATEMATICOS

A fin de entender la teoría de la continuación analítica se presentan los problemas de Dirichlet y Neuman, así como la solución de dichos problemas para ciertas geometrías de interés en el procesado de campos potenciales.

II.1. PROBLEMA DE DIRICHLET.

Este problema se conoce también como Primer Problema de contorno de la Teoría del Potencial y se puede enunciar de un modo sencillo de la siguiente manera:

Conociendo el valor que toma una función armónica  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  sobre una superficie cerrada  $S$ , de forma arbitraria, determinar el valor que toma esa función  $\varphi$  en el interior de dicha superficie (figura II.1).

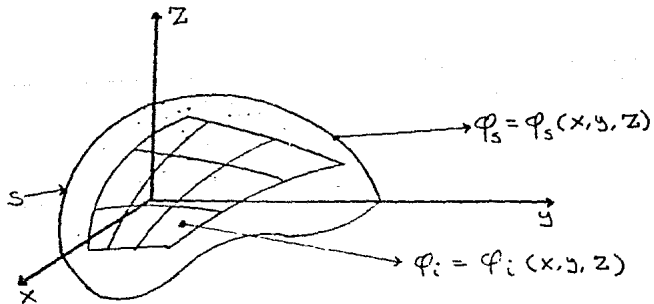


Figura II.1

Para llegar a la solución general de este problema se parte

del segundo teorema de Green (Tijonov y Samarsky, 1933)

$$-\oint_{\Sigma} \frac{1}{r} \nabla^2 \varphi d\omega + \oint_{\Sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \oint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} dS = \begin{cases} 4\pi \varphi(P) & \text{a)} \\ 2\pi \varphi(P) & \text{b)} \\ 0 & \text{c)} \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

en donde

$r$  es la distancia entre dos puntos,

$\eta$  es la dirección normal a la superficie  $S$  en cualquier punto, y

$\nabla^2 \varphi$  es el laplaciano de la función  $\varphi$ .

La ecuación II.1 presenta tres soluciones que están relacionadas con la posición del punto donde se quiere conocer el valor de la función  $\varphi$ .

a).- Es la solución que se obtiene para puntos en el interior de la frontera  $S$ .

b).- Este caso es cuando el punto de interés está sobre la frontera de  $S$ .

c).- Es cuando el punto de estudio está fuera de la frontera en cuestión.

Según la definición dada previamente del problema de Dirichlet, se va a trabajar con la solución para puntos internos a la superficie, y como dentro de la frontera no hay fuentes de potencial, la función  $\varphi$  es armónica y se cumple que

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

por lo cual la ecuación de Green se reduce a

$$\oint_{\Sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \oint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} dS = 4\pi \varphi(P) \quad (\text{II.2})$$

Esta ecuación consta de dos integrales, la primera depende de la derivada de  $\varphi$  en la dirección normal, mientras que la segunda depende de la función  $\varphi$  en su forma original.

Ya que el problema de Dirichlet está definido en base a la función  $\varphi$  y no a su derivada, se debe eliminar de la ecuación II.2 la primera integral (Mirónov, 1977). Para esto se introduce una función  $Q = Q(x, y, z)$  armónica dentro de la región de estudio. Ambas funciones,  $\varphi$  y  $Q$ , se pueden relacionar mediante el teorema de Green (Sternberg and Smith, 1964)

$$\int_{V'} (\varphi \nabla^2 Q - Q \nabla^2 \varphi) dV = \int_S (\varphi \frac{\partial Q}{\partial n} - Q \frac{\partial \varphi}{\partial n}) dS \quad (II.3)$$

Como dentro de la región de interés las funciones  $\varphi$  y  $Q$  son armónicas, se cumple que

$$\nabla^2 \varphi = \nabla^2 Q = 0$$

quedando la ecuación II.3 reducida a

$$-\int_S Q \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \int_S \varphi \frac{\partial Q}{\partial n} dS = 0 \quad (II.4)$$

Sumando las expresiones II.2 y II.4 se obtiene

$$\int_S (\frac{1}{r} - Q) \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \int_S \varphi \frac{\partial (\frac{1}{r} - Q)}{\partial n} dS = 4\pi \varphi(P) \quad (II.5)$$

La función  $\frac{1}{r} - Q$  se conoce como función de Green y se denominará con la letra G. Esta función se anula en la superficie S, pero no así su derivada normal y entonces la ecuación II.5 toma la siguiente forma

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial G}{\partial n} \varphi dS \quad (II.6)$$

que es la solución general del problema de Dirichlet. La función



G forma parte de esta solución y su complejidad está ligada directamente a la forma geométrica de la superficie en estudio.

## II.2. PROBLEMA DE NEUMAN.

Se puede definir como sigue:

Consiste en determinar una función armónica  $\varphi$  en el interior de una superficie cerrada  $S$  a partir de los valores de su derivada normal  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  sobre la frontera de la superficie (figura II.2).

También se conoce como Segundo Problema de Contorno de la -

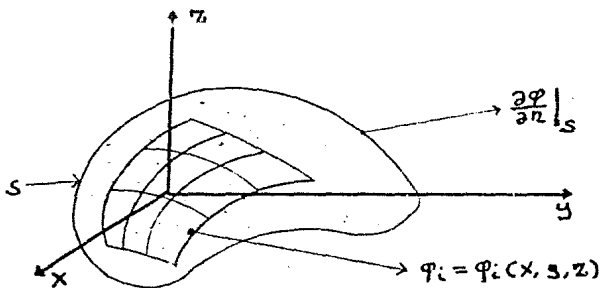


Figura II.2

Teoría del Potencial y para que tenga una solución única debe incluir una constante aditiva, ya que conocer la derivada sobre el contorno deja a la función  $\varphi$  indeterminada por una constante (Levi, 1980).

Para resolver el problema de Dirichlet se eliminó de la ecuación II.2 la integral que depende de la derivada normal de la función  $\varphi$ . Ahora, para llegar a la solución de este problema hay que usar esa misma ecuación, pero eliminando la integral que no depende de la derivada normal de la función  $\varphi$ , pues el pro--

blema se basa en ella. Repitiendo la ecuación II.2

$$\oint_S \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \oint_S \varphi \frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial n} ds = 4\pi \varphi(P) \quad (\text{II.7})$$

Para hacer tal eliminación hay que auxiliarse de una función  $Q=Q(x, y, z)$  que ayude a evaluar la segunda integral de la ecuación II.7. Esta función deberá ser armónica en la misma región en que lo es  $\varphi$ , lo cual garantiza que su laplaciano sea nulo

$$\nabla^2 Q = 0$$

Relacionando mediante el teorema de Green a las funciones  $Q$  y  $\varphi$ , como en la ecuación II.4

$$-\oint_S Q \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \oint_S \varphi \frac{\partial Q}{\partial n} ds = 0 \quad (\text{II.8})$$

y sumando las expresiones II.7 y II.8

$$\oint_S (\frac{1}{r} - Q) \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \oint_S \varphi \frac{\partial (\frac{1}{r} - Q)}{\partial n} ds = 4\pi \varphi(P) \quad (\text{II.9})$$

Si se denomina  $N = \frac{1}{r} - Q$ , función característica de Neuman, la ecuación anterior se transforma en

$$\oint_S N \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \oint_S \varphi \frac{\partial N}{\partial n} ds = 4\pi \varphi(P) \quad (\text{II.10})$$

Para que la expresión anterior quede únicamente en términos de la derivada normal de  $\varphi$  la función  $Q$  debe tener la misma derivada normal que  $\frac{1}{r}$  (Kellogg, 1953), pero es imposible, pues si  $Q$  es armónica en la región de estudio la integral de su derivada normal es cero. Lo que se busca entonces es que la diferencia de la derivada normal de  $\frac{1}{r}$  y la de  $Q$  sea una constante. Así pues

$$\frac{\partial N}{\partial n} = \frac{\partial (\frac{1}{r} - Q)}{\partial n} = c \quad (\text{II.11})$$

y la ecuación II.10 se convierte en

$$\oint_S N \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \oint_S \varphi ds = 4\pi \varphi(F) \quad (\text{II.12})$$

La segunda integral de la función anterior está directamente relacionada con la función promedio de  $\varphi$  en la superficie de estudio, y cualesquiera que sean los valores de la función  $\varphi$  sobre dicha superficie la segunda integral será una constante (Mirónov, 1977), entonces

$$\varphi(F) = \frac{1}{4\pi} \oint_S N \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + A \quad (\text{II.13})$$

donde A es la constante a que se hace referencia en la descripción del problema de Neuman.

### II.3. PROBLEMAS DE CONTOORNO PARA LA ESFERA.

Estos problemas han sido resueltos por varios autores (Kelløe, 1955; Sternberg and Smith, 1964; Mirónov, 1977; Levi, 1980; etc.), por lo que aquí no se desarrollarán con gran detalle.

#### II.3.1. PROBLEMA DE DIRICHLET.

Para llegar a la solución de este problema hay que conocer la función de Green para la esfera y su derivada normal. Para ello se toma una esfera de radio "R" y centro en "O" (fig. II.3).

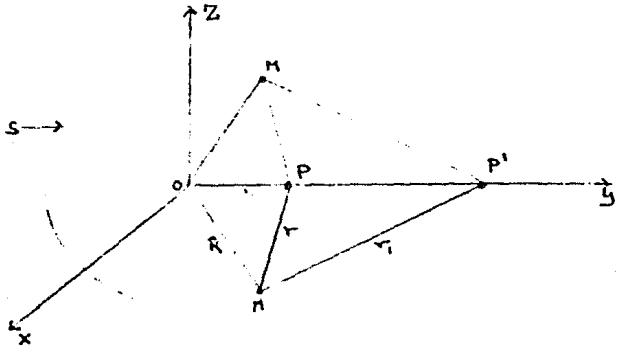


Figura II.3

El punto P corresponde al punto P' en la inversión por radios vectores recíprocos, y dicha transformación relaciona los puntos interiores de la esfera con los puntos exteriores a ella.

La función de Green para la esfera es

$$G = \frac{1}{r} - \frac{R}{a} \frac{1}{r'} \quad (\text{II.15})$$

Esta función cumple con la condición de que en la superficie

de la esfera es nula, pues en ella  $R = a$ .

La derivada normal de la función  $G$  es

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{a^2 - R^2}{R r^3} \quad (\text{II.16})$$

y la solución formal del problema de Dirichlet para la esfera, según las ecuaciones II.6 y II.7, es

$$\varphi(P) = \frac{R^2 - a^2}{4\pi R} \int_{\Sigma} \frac{\Phi}{r^3} dS \quad (\text{II.17})$$

### II.3.2. PROBLEMA DE NEUMAN.

De la misma figura II.3, la función de Neuman para la esfera es (Brandi y Chávez, 1985)

$$N = \frac{1}{r} + \frac{R}{ar} \quad (\text{II.18})$$

Con lo que la solución del problema de Neuman para la esfera, de las ecuaciones II.13 y II.18, es

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left( \frac{1}{r} + \frac{R}{ar} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial n} + A \quad (\text{II.19})$$

#### II.4. PROBLEMAS DE CONFORMO PARA EL PLANO INFINITO.

Una forma sencilla de obtener las soluciones de ambos problemas de contorno para el plano es aumentar indefinidamente el radio de la esfera, y cuando en el límite el radio tiende a infinito se tiene un plano que divide al espacio en dos partes (Mirónov, 1977) (fig. II.4).

Para este caso

$$\left. \begin{array}{l} R \rightarrow \infty \\ a \rightarrow R \end{array} \right\} \quad (II.20)$$

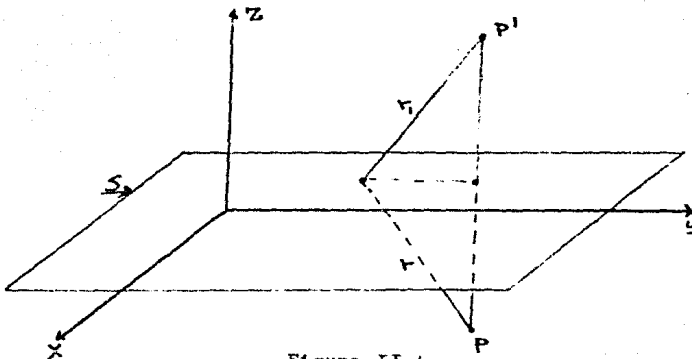


Figura II.4

##### II.4.1. PROBLEMA DE DIRICHLET.

Para las condiciones descritas por las expresiones II.20 la función de Green para la esfera cambia y toma la forma

$$G = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \quad (II.21)$$

que cumple con la condición de ser nula en la frontera estudiada.

La derivada normal de dicha función es

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{-2}{r^2} \cos(\gamma, n) \quad (\text{II.22})$$

Si el eje Z coincide con la dirección normal al plano

$$\cos(\gamma, n) = \frac{Z}{r} \quad (\text{II.23})$$

y entonces, de las ecuaciones II.6, II.22 y II.23

$$\varphi(P) = \frac{Z}{2\pi} \oint_C \varphi \frac{ds}{r^3}$$

que es la solución al primer problema de contorno para el plano - infinito. Poniendo la ecuación anterior en función de las coordenadas del punto P queda la forma más usual de esta expresión

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (\text{II.24})$$

#### II.4.2. PROBLEMA DE NEUMAN.

Debido a las condiciones descritas por II.20, la función de Neuman para la esfera también va a cambiar, tomando la forma

$$N = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \quad (\text{II.25})$$

De la figura (II.4) se deduce que  $r = r'$  y entonces la función de Neuman se reduce a

$$N = \frac{2}{r} \quad (\text{II.26})$$

La constante A de la ecuación II.13 se anula en el infinito cuando se trata de un plano, y de esta consideración y de las ecuaciones II.13 y II.26 la solución al segundo problema de contorno para el plano infinito es

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{d\sigma}{r}$$

De la figura II.1, se advierte que la dirección normal al plano y el eje  $Z$  coinciden, con lo cual y poniendo las coordenadas del punto  $P$  en la ecuación anterior se llega a la forma más usual de la solución al problema de Neuman para el plano infinito

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial n} d\gamma_0 d\gamma_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (\text{II.27})$$



### II.5. PROBLEMAS DE CONTORNO PARA EL SEMIPLANO.

Si la función  $\varphi$  es causada por un cuerpo del que una de las dimensiones es infinita (figura II.5), entonces, conocer la función  $\varphi$  sobre un perfil perpendicular a esa dirección es cono-

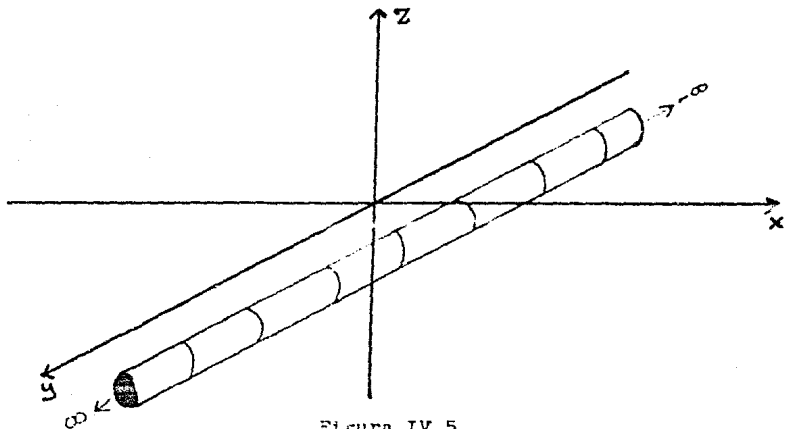


Figura IV.5

cer la función  $\varphi$  sobre todo el plano. A este tipo de estructuras se les conoce como bidimensionales, y al plano que las contiene se le llama semiplano. De lo anterior se desprende que la función  $\varphi$  no depende de la dirección en que es infinito el cuerpo y sólo dependerá de las otras dos (figura II.6).

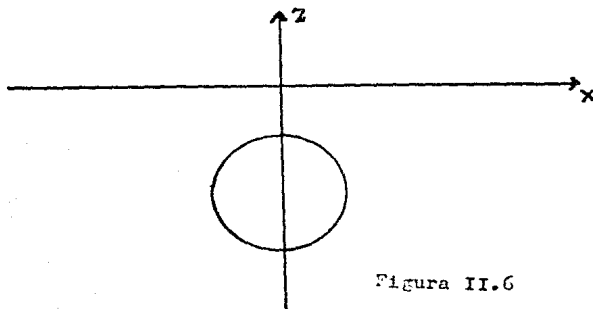


Figura II.6

### II.5.1. PROBLEMA DE DIRICHLET.

El camino más sencillo para encontrar la ecuación que representa la solución de este problema de contorno es integrar la ecuación del problema de Dirichlet para el plano infinito en la dirección en que  $\varphi$  no depende.

La ecuación del problema de Dirichlet para el plano es

$$\varphi(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x_0, y_0, 0) dx_0 dy_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{3/2}}$$

Si  $\varphi$  no depende de la dirección  $Y$ , esta expresión toma la siguiente forma

$$\varphi(x, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x_0, 0) dx_0 dy_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{3/2}}$$

Integrando sobre la dirección  $Y$

$$\varphi(x, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_0, 0) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{3/2}} \right] dx_0$$

cuya solución es

$$\varphi(x, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_0, 0) \frac{2}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0$$

o bien

$$\varphi(x, z) = \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x_0, 0) dx_0}{(x-x_0)^2 + z^2} \quad (\text{II.28})$$

que representa la solución al problema de Dirichlet para el semiplano.

### II.5.2. PROBLEMA DE NEUMAN.

En este caso no se puede integrar en una dirección la expresión del problema de Neuman para el plano, haciendo la derivada normal independiente a ella, pues se llega a una integral diver-

gente (Tijonov y Samarsky, 1953).

Para resolver este problema hay que auxiliarse del siguiente postulado de la Teoría del Potencial: "Un problema de Neuman se puede plantear en términos de un problema de Dirichlet apropiadamente enunciado" (Spiegel, 1976).

Entonces, partiendo de la integral de Dirichlet para el semi plano, ecuación II.28,

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z \varphi(x_0, 0)}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0$$

se puede llegar a la solución del problema de Neuman.

La función

$$\omega = \frac{-\partial \varphi}{\partial z} \quad (\text{II.29})$$

cumple la ecuación II.28 por ser armónica en la región de estudio

$$\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z \omega(x_0, 0)}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (\text{II.30})$$

Esta integral representa la solución del problema de Dirichlet para la función  $\omega$ . Si en el lado izquierdo de esta expresión se cambia el valor de  $\omega$  por el de la derivada normal, ecuación II.29, la expresión II.30 se transforma en

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z \omega(x_0, 0)}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (\text{II.31})$$

Las condiciones del problema permiten cambiar la derivada parcial de II.31 por una derivada ordinaria

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z \omega(x_0, 0)}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0$$

Resolviendo para  $\varphi$

$$\int d\varphi = \int \left[ \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z \omega(x_0, 0)}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0 \right] dz$$

o bien, intercambiando las integrales

$$\varphi = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x_0, 0) \left[ \int \frac{z \, dZ}{(x-x_0)^2 + Z^2} \right] dx_0 \quad (\text{II.32})$$

Aislando la integral sobre Z

$$\int \frac{z \, dZ}{(x-x_0)^2 + Z^2} = \frac{1}{2} \ln |(x-x_0)^2 + Z^2| + A \quad (\text{II.33})$$

y con este resultado en II.32

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |(x-x_0)^2 + Z^2| \omega(x_0, 0) dx_0 \\ &\quad + \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x_0, 0) dx_0 \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Pero una de las condiciones de de Teoría del Potencial es - que la integral de la derivada normal de una función armónica a lo largo de la superficie de integración sea nula (Sternberg and Smith, 1964), por lo que la segunda integral de la expresión -- II.34 vale cero.

$$\varphi(x, z) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |(x-x_0)^2 + z^2| \omega(x_0, 0) dx_0 \quad (\text{II.35})$$

Y esta última ecuación es la solución formal del problema de Neuman para el semiplano (Churchill, 1960).

## CAPITULO III

## CONTINUACION ANALITICA ASCENDENTE USANDO LA INTEGRAL DE DIRICHLET.

La continuación analítica ascendente a través de la integral de Dirichlet ha sido usada en la interpretación de datos de campos potenciales desde hace muchos años, y sus características espaciales y frecuenciales han sido estudiadas a fondo (Peters, -- 1949; Dean, 1958; Henderson, 1960; Fuller, 1967; etc.), por lo que aquí no se tratará en forma minuciosa.

Ya que en este trabajo se busca introducir la continuación analítica ascendente usando la integral de Neuman como opción en el procesado de datos potenciales, se hablará sólo un poco de lo que es el procesado por las integrales de Dirichlet y de algunas de sus características que son necesarias para hacer una comparación con las integrales de Neuman. Dicha comparación se hará en el capítulo siguiente usando datos sintéticos de gravedad generados en la computadora.

El método que se escogió para resolver numéricamente las ecuaciones que rigen la continuación analítica ascendente para mapas, expresiones II.24 y II.27, es usando la transformada doble de Fourier, y el modelo usado para generar los datos del mapa es una esfera enterrada.

Para comparar los resultados que se obtienen al procesar perfiles, caso del semiplano, ecuaciones II.23 y II.35, se siguió, en el caso de la integral de Dirichlet, el algoritmo propuesto por Tsay (Tsay, 1978), mientras que para el caso de la integral de Neuman se siguió un procedimiento paralelo al del mismo Tsay. El modelo que se usó para generar los datos en la computadora y llevar a cabo los cálculos y comparaciones fue un cilindro hori--

zontal infinito.

### III.1. MAPAS.

La ecuación de Dirichlet para la continuación analítica de mapas es la misma con que se resuelve el primer problema de contorno para el plano infinito

$$\varphi(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x_0, y_0, 0) dx_0 dy_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (\text{III.1})$$

donde  $\varphi$  representa la función armónica medida sobre el mapa. Esta función puede ser la componente vertical de la gravedad producida por algún cuerpo, y el resultado de III.1 es el mapa de componente vertical a la altura  $z$ .

Como se mencionó en la introducción a este capítulo, el método elegido para resolver numéricamente esta integral es usando la transformada doble de Fourier.

Desde el punto de vista de los sistemas lineales la función de entrada es la función  $\varphi$ , en este caso la componente vertical de la gravedad producida por una esfera (Mettleton, 1976)

$$\varphi(x, y, 0) = g_2(x, y, 0)$$

$$g_2(x, y, 0) = \frac{4}{3} \pi \rho K R^3 \frac{d}{r^3} \quad (\text{III.2})$$

donde  $\rho$  es el contraste de densidad de la esfera al medio,

$d$  es la profundidad del centro de la esfera,

$K$  es la constante universal de gravedad,

$R$  es el radio de la esfera y

$r$  es la distancia del centro de la esfera a un punto del plano (figura III.1).

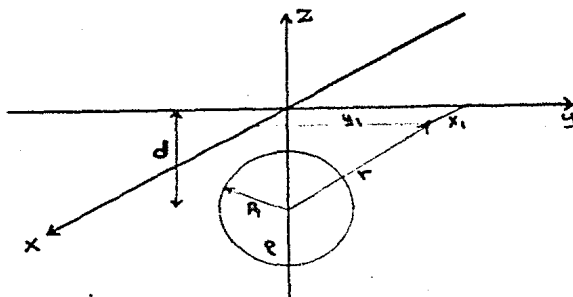


Figura III.1

El filtro es la función

$$F(x, y, Z) = \frac{Z / 2\pi}{(x^2 + y^2 + Z^2)^{3/2}} \quad (\text{III.3})$$

y el resultado de la convolución entre ambas funciones, función de salida, es el mapa continuado a la altura  $z$ .

$$g_Z(x, y, Z) = g_Z(x, y, 0) * F(x, y, Z) \quad (\text{III.4})$$

Para realizar esta operación en el dominio del número de onda se calcula la transformada de Fourier de III.2 y III.3

$$G(u, v, 0) = \mathcal{F}\{g_Z(x, y, 0)\} \quad (\text{III.5})$$

$$D(u, v, Z) = \mathcal{F}\{F(x, y, Z)\} \quad (\text{III.6})$$

Con estas dos expresiones anteriores III.4 se transforma en

$$G(u, v, Z) = G(u, v, 0) D(u, v, Z) \quad (\text{III.7})$$

pero

$$G(u, v, z) = \mathcal{F}\{g_z(x, y, z)\} \quad (\text{III.8})$$

y de la relación inversa de III.3

$$g_z(x, y, z) = \mathcal{F}^{-1}\{G(u, v, z)\} \quad (\text{III.9})$$

Para realizar esta secuencia de operaciones fue hecho un programa de computadora que calcula la función  $g_z(x, y, 0)$  y el filtro  $F(x, y, z)$  para la altura deseada, y se obtiene la transformada de Fourier de ambas funciones usando la subrutina de transformada rápida de Fourier de Brigham (Brigham, 1974). Ya con estas funciones transformadas se realiza la multiplicación de ambas funciones, ecuación III.3, y finalmente la antitransformada del resultado, - expresión III.9.

Como se dijo en la introducción a este capítulo, se hace una comparación numérica de los resultados arrojados por este programa y los arrojados por uno similar que trabaja con la integral de Neuman en el capítulo siguiente.

### III.2. PERFILES.

La expresión que se usa para realizar la continuación analítica ascendente para perfiles en la solución al primer problema - de contorno para el semiplano, ecuación II.21, que se repite por claridad

$$\varphi(x, z) = \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x_0, 0) dx_0}{(x-x_0)^2 + z^2} \quad (\text{III.10})$$

donde la función armónica  $\varphi$  puede representar a la componente vertical de la gravedad producida por un cuerpo bidimensional.

Un modo sencillo para resolver en forma numérica la ecuación III.10 es el propuesto por Tsay (Tsay, 1973), en que dicha ecua--



ción cambia a la siguiente forma

$$\varphi(j\Delta x, z) = \sum_K F_K \varphi(j\Delta x - K\Delta x) \quad (\text{III.11})$$

donde

$$F_K = \frac{z'/\pi}{z'^2 + K^2}, \quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

y

$$z' = z/\Delta x$$

La expresión III.11 es equivalente a la III.10 en forma discreta,  $F_K$  representa el filtro de Dirichlet para la continuación analítica de perfiles muestreados y  $\varphi$  es el conjunto de puntos del perfil.

La función  $\varphi$  puede ser la componente vertical del efecto gravimétrico producido por un cilindro horizontal infinito ( Nettleton, 1976)

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \varepsilon_z(x, 0) \\ \varepsilon_z(x, 0) &= 2\pi K \rho R^2 \frac{d}{x^2 + d^2} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

donde  $\rho$  es el contraste de densidad del cilindro al medio,

$d$  es la profundidad del centro del cilindro,

$K$  es la constante universal de gravedad y

$R$  es el radio del cilindro (figura III.2).

Para realizar la continuación analítica ascendente de un perfil producido por este cuerpo se hizo un programa de computadora y sus resultados numéricos están en las tablas comparativas del capítulo siguiente.

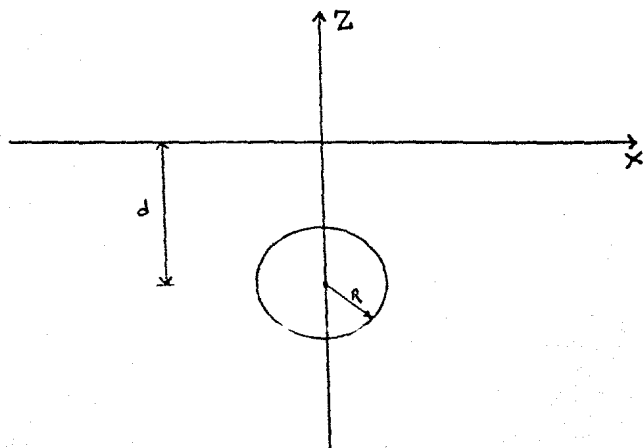


Figura III.2

## CAPITULO IV

## CONTINUACION ANALITICA ASCENDENTE USANDO LA INTEGRAL DE NEUMAN

En este capítulo se desarrollan dos modos diferentes de llevar a cabo la continuación analítica ascendente con las integrales de Neuman y se hace la comparación numérica con los resultados arrojados por ellas y las integrales de Dirichlet.

## IV.1. MODALIDADES.

En las expresiones de Neuman para el plano infinito y el semiplano aparecen tanto la función  $\varphi$  como su derivada normal. Este hecho da la pauta para poder realizar la continuación analítica ascendente en dos modalidades diferentes:

a).- Primera derivada vertical.- En este caso hay que calcular la primera derivada vertical de la función  $\varphi$  para poder realizar la continuación analítica (figura IV.1). El inconveniente -

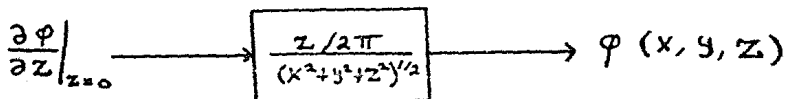


Figura IV.1

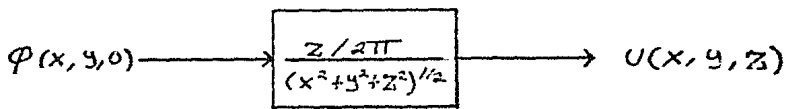
de este camino es que el filtro de primera derivada vertical es divergente y causa una amplificación del ruido de alta frecuencia que contenga la señal, por lo que el cálculo de la primera derivada lleva implícito un error que se reflejará en los resultados finales. Pero siendo común el análisis de primera derivada en el procesamiento de campos potenciales se presenta como una opción a seguir.

b).- Función potencial.- Para este caso se tiene que si la función de entrada es la función  $\varphi$ , la función de salida será una función armónica  $U$  cuya derivada normal es la misma función  $\varphi$ , pues ésta proviene de una función potencial

$$\varphi = - \frac{\partial U}{\partial z} \quad (\text{IV.1})$$

Esta función potencial  $U$  estará continuada a la altura  $z$ .

En esta modalidad de cálculo no existe ningún proceso divergente pero hay que derivar la función potencial  $U$  para obtener la función  $\varphi$  continuada a la altura  $z$  (figura IV.2).



$$- \frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) = \varphi(x, y, z)$$

Figura IV.2

## IV.2. MAPAS.

Para llevar a cabo la continuación analítica ascendente de mapas a través de la integral de Neuman se usa la solución al segundo problema de contorno para una frontera plana, ecuación -- II.27

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{3/2}} dx_0 dy_0 \quad (\text{IV.2})$$

Para hacer una comparación justa con los resultados proporcionados por la integral de Dirichlet hay que usar el mismo algoritmo de solución numérica que se utilizó con la integral de Dirichlet.

La esfera, cuyo efecto gravimétrico se usó para comparar las dos integrales, tiene las siguientes características:

contraste de densidad 1.5 g/cm<sup>3</sup>,

profundidad del centro 20 m y

radio 10 m.

## IV.2.1. PRIMERA DERIVADA.

La primera derivada del efecto producido por la esfera es -- (figura IV.3)

$$\frac{\partial g_z}{\partial z} = \frac{4}{3} \pi \rho K R^3 \left[ \frac{3d^2}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{5/2}} \right] \quad (\text{IV.3})$$

Esta derivada vertical no se calculó por medio de un filtro pues se quería verificar cuál era el mejor resultado que se puede obtener por este camino. Así pues, se usó la expresión IV.3 como función de entrada para la ecuación IV.2.

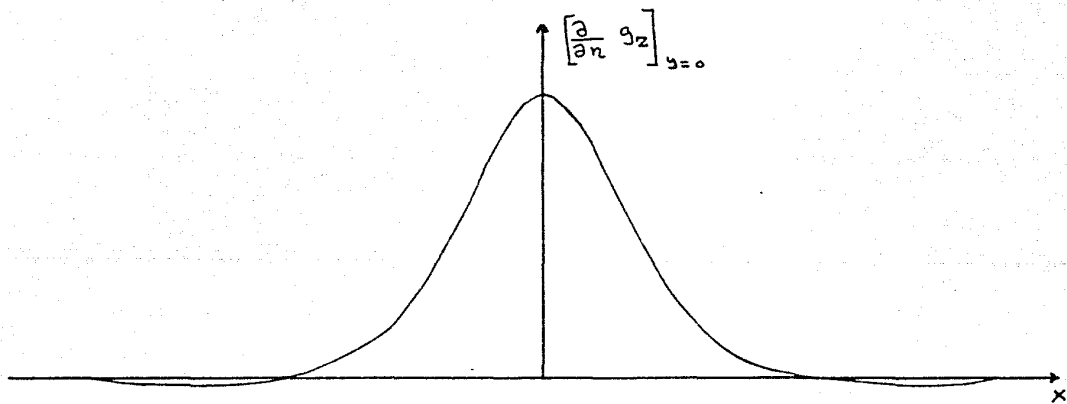


Figura IV.3

#### IV.2.2. COMPARACION DE RESULTADOS.

Con la expresión IV.3 se hicieron continuaciones analíticas a 2, 4 y 15 unidades reticulares, y los resultados de la comparación con aquellos arrojados por la integral de Dirichlet se muestran a continuación en las figuras IV.4 a IV.16 y en las tablas IV.1, IV.2 y IV.3 se hace un análisis del error para el perfil principal de dichas continuaciones analíticas.

En las figuras IV.8, IV.9 y IV.16 se muestran las gráficas del comportamiento de la continuación analítica con ambas integrales. De estas tres gráficas se observan dos características importantes:

a).- Cuando la altura de continuación aumenta el procedimiento de Neuman, a partir de la primera derivada, es más exacto que el de Dirichlet.

b).- Cualitativamente el resultado mediante la integral de Dirichlet es más parecido a la forma de la curva teórica que el resultado de la integral de Neuman.

X INICIAL (MTS) -15.0000  
 X FINAL (MTS) 15.0000  
 INCREMENTO (MTS) 1.0000

Y INICIAL (MTS) -15.0000  
 Y FINAL (MTS) 15.0000

ESFERA	RADIO (MTS)	DENSIDAD (GR/CM <sup>3</sup> )	COORD. DEL CENTRO (MTS)
1	10 000	1.500	0 0000 0 0000 20.0000

COMPONENTE VERTICAL EN MILIGALES

A	VA	DE	0.4281E-01	A	0.4091E-01
+	VA	DE	0.4071E-01	A	0.4800E-01
2	VA	DE	0.4800E-01	A	0.5505E-01
*	VA	DE	0.5505E-01	A	0.6218E-01
C	VA	DE	0.6218E-01	A	0.6727E-01
=	VA	DE	0.6727E-01	A	0.7437E-01
D	VA	DE	0.7437E-01	A	0.8146E-01
-	VA	DE	0.8146E-01	A	0.8746E-01
E	VA	DE	0.8746E-01	A	0.9246E-01
:	VA	DE	0.9246E-01	A	0.1007E+00

	10	20	30
1	AAAA+++++B	BBBBBBBBBB	+++++AAAA
2	AAA+++++BBB	*****BBBB	+++AAA
3	AA+++++BBBB	*****BBBB	++AA
4	A+++++BBBB	*****BBBB	+AA
5	+++++BBBB	*****BBBB	A
6	+++++BBB	*****BBB	+
7	+++++BB	*****BB	
8	+++++B	*****B	
9	+++++	*****	
10	++++	*****	
11	+++	*****	
12	+++	*****	
13	++	*****	
14	++	*****	
15	+	*****	
16	+	*****	
17		*****	
18		*****	
19		*****	
20		*****	
21		*****	
22		*****	
23		*****	
24		*****	
25		*****	
26		*****	
27		*****	
28		*****	
29		*****	
30		*****	
31		*****	

Figura IV.4



## CONT. ANALITICA REAL A Z = 2.00 U.R.

A	VA	DE	0.3229E-01	A	0.3229E-01
+	VA	DE	0.3772E-01	A	0.4110E-01
B	VA	DE	0.4315E-01	A	0.4653E-01
*	VA	DE	0.4857E-01	A	0.5196E-01
C	VA	DE	0.5400E-01	A	0.5739E-01
=	VA	DE	0.5942E-01	A	0.6282E-01
D	VA	DE	0.6485E-01	A	0.6825E-01
-	VA	DE	0.7027E-01	A	0.7368E-01
E	VA	DE	0.7570E-01	A	0.7911E-01
:	VA	DE	0.8112E-01	A	0.8454E-01

	10	20	30
	+	+	+
1	AAAA+++	BBBBD	BBBBD+++
2	AAAA+++	BBBBD	BBBBD+++
3	AA+++	BBB	BBB
4	A+++	BB	BB
5	+++	B	B
6	++	B	B
7	+	B	B
8		B	B
9		B	B
10	B	B	B
11	B	B	B
12	B	B	B
13	B	B	B
14	B	B	B
15	B	B	B
16	B	B	B
17	B	B	B
18	B	B	B
19	B	B	B
20	B	B	B
21	B	B	B
22	B	B	B
23	B	B	B
24	B	B	B
25	B	B	B
26	B	B	B
27	B	B	B
28	B	B	B
29	B	B	B
30	B	B	B
31	AAAA+++	BBBBD	BBBBD+++

Figure IV.5

CONT. ANALITICA - METODO TE DIRICHLET Z= 2 00 U.R.

```

A VA DE 0.1222E-01 A 0.2006E-01
+ VA DE 0.2036E-01 A 0.2744E-01
B VA DE 0.2750E-01 A 0.3464E-01
* VA DE 0.3464E-01 A 0.4178E-01
C VA DE 0.4178E-01 A 0.4892E-01
- VA DE 0.4892E-01 A 0.5606E-01
D VA DE 0.5606E-01 A 0.6320E-01
E VA DE 0.6320E-01 A 0.7034E-01
: VA DE 0.7034E-01 A 0.7748E-01

```

```

          10          20          30
          +          +          +
1 AAA+++++BBBBBBBBBBBBBBB++++AAA
2 A+++BBBB*****+DIBB++A
3 A+BBB***CCCCCCCCCCCC**+BBB+A
4 ++BB**CC CCC=====CCCC**BB+
5 ++BB**CC CCC=====DDD**CC**B+
6 +B**CCC=====DDDD**CC**B+
7 +B**CC=DDDD-----DDDD**CC**B+
8 +B**CC=DDD-----DDD**CC**B+
9 B**C=DDD-----EEEE-----DD**C**B
10 B**C=DD-----EEEEEEEE-----D**CC**B
11 B**C=DD-----EEEEEEEE-----D**CC**B
12 B**C=DD-----EEEEEEEE-----D**CC**B
13 B**C=DD-----EEEEEEEE-----D**CC**B
14 B**C=DD-----EEEEEEEE-----D**CC**B
15 B**C=DD-----EEEEEEEE-----D**CC**B
16 B**C=DD-----EEEEEEEE-----D**CC**B
17 B**C=DD-----EEEEEEEE-----D**CC**B
18 B**C=DD-----EEEEEEEE-----D**CC**B
19 B**C=DD-----EEEEEEEE-----D**CC**B
20 B**C=DD-----EEEEEEEE-----D**CC**B
21 B**C=DD-----EEEEEEEE-----D**CC**B
22 B**C=DD-----EEEEEEEE-----D**CC**B
23 B**C=DDD-----EEEE-----DD**C**B
24 +B**C=DDD-----DDD**CC**B+
25 +B**CC=DDDD-----DDDD**CC**B+
26 +B**CCC=====DDDDDDDDDD**CC**B+
27 +BB**CCC=====DDD**CC**B+
28 ++BB**CC CCC=====CCCC**BB+
29 A+BBB***CCCCCCCCCCCC**+BBB+A
30 A+++BBBB*****+DIBB++A
31 AAA+++++BBBBBBBBBBBBBBB++++AAA

```

Figura IV.6

CONT. ANALITICA - METODO DE NEUMAN Z= 2.00 U. R.

A	VA	DE	0.1804E-01	A	0.2143E-01
+	VA	DE	0.2094E-01	A	0.2089E-01
B	VA	DE	0.2995E-01	A	0.3751E-01
*	VA	DE	0.3731E-01	A	0.4473E-01
C	VA	DE	0.4473E-01	A	0.5210E-01
V	VA	DE	0.5210E-01	A	0.5987E-01
I	VA	DE	0.5987E-01	A	0.6740E-01
E	VA	DE	0.6740E-01	A	0.7440E-01
.	VA	DE	0.7440E-01	A	0.8104E-01

	10	20	30
1	AAAA++++	BBBBBBBB	BBBBBB++++AAAA
2	AAA++++	BBBBBB**	BBBBBB++++AAA
3	AA++++	BBBBBB***	BBBBBB++++AA
4	A+++	BBBBBB****	BBBBBB++++A
5	++	BBBBBB*****	BBBBBB++++
6	+	BBBBBB*****	BBBBBB++++
7		BBBBBB*****	BBBBBB++++
8		BBBBBB*****	BBBBBB++++
9		BBBBBB*****	BBBBBB++++
10		BBBBBB*****	BBBBBB++++
11		BBBBBB*****	BBBBBB++++
12		BBBBBB*****	BBBBBB++++
13		BBBBBB*****	BBBBBB++++
14		BBBBBB*****	BBBBBB++++
15		BBBBBB*****	BBBBBB++++
16		BBBBBB*****	BBBBBB++++
17		BBBBBB*****	BBBBBB++++
18		BBBBBB*****	BBBBBB++++
19		BBBBBB*****	BBBBBB++++
20		BBBBBB*****	BBBBBB++++
21		BBBBBB*****	BBBBBB++++
22		BBBBBB*****	BBBBBB++++
23		BBBBBB*****	BBBBBB++++
24		BBBBBB*****	BBBBBB++++
25		BBBBBB*****	BBBBBB++++
26		BBBBBB*****	BBBBBB++++
27		BBBBBB*****	BBBBBB++++
28		BBBBBB*****	BBBBBB++++
29		BBBBBB*****	BBBBBB++++
30		BBBBBB*****	BBBBBB++++
31		BBBBBB*****	BBBBBB++++

Figura IV.7

Tabla IV.1

RENGLON		16				
REAL	DIRICHLET	ERROR %		NEUMAN	ERROR %	
0.4882E-01	0.3149E-01	25	50	0.3494E-01	25	43
0.5198E-01	0.4015E-01	22	76	0.3982E-01	23	40
0.3524E-01	0.5070E-01	10	33	0.4111E-01	13	33
0.3837E-01	0.5212E-01	11	00	0.4458E-01	15	18
0.6194E-01	0.5675E-01	8	37	0.5456E-01	11	92
0.6531E-01	0.6096E-01	6	66	0.5924E-01	9	15
0.6853E-01	0.6397E-01	39	49	0.6397E-01	6	80
0.7183E-01	0.6831E-01	4	65	0.6837E-01	4	82
0.7490E-01	0.7187E-01	4	02	0.7234E-01	3	15
0.7773E-01	0.7497E-01	3	35	0.7636E-01	1	76
0.8026E-01	0.7771E-01	3	19	0.7979E-01	0	59
0.8244E-01	0.8005E-01	2	90	0.8276E-01	-0	34
0.8420E-01	0.8195E-01	2	68	0.8323E-01	-1	23
0.8530E-01	0.8337E-01	2	50	0.8713E-01	-1	93
0.8629E-01	0.8426E-01	2	35	0.8849E-01	-2	35
0.8656E-01	0.8463E-01	2	24	0.8924E-01	-3	09
0.8689E-01	0.8426E-01	2	36	0.8949E-01	-2	35
0.8530E-01	0.8337E-01	2	50	0.8713E-01	-1	93
0.8420E-01	0.8195E-01	2	68	0.8323E-01	-1	23
0.8244E-01	0.8005E-01	2	70	0.8276E-01	-0	39
0.8026E-01	0.7771E-01	3	19	0.7979E-01	0	59
0.7773E-01	0.7497E-01	3	55	0.7636E-01	1	76
0.7490E-01	0.7187E-01	4	02	0.7234E-01	3	15
0.7183E-01	0.6831E-01	4	65	0.6837E-01	4	82
0.6853E-01	0.6397E-01	3	49	0.6397E-01	6	80
0.6531E-01	0.6096E-01	6	66	0.5924E-01	9	15
0.6194E-01	0.5675E-01	8	37	0.5456E-01	11	92
0.3837E-01	0.5212E-01	11	00	0.4458E-01	13	18
0.3524E-01	0.4678E-01	15	30	0.4473E-01	18	99
0.5198E-01	0.4015E-01	22	76	0.3982E-01	23	40
0.4882E-01	0.3149E-01	25	50	0.3494E-01	25	43

CONTINUACION ANALITICA

A  $z = 2$  U. R.

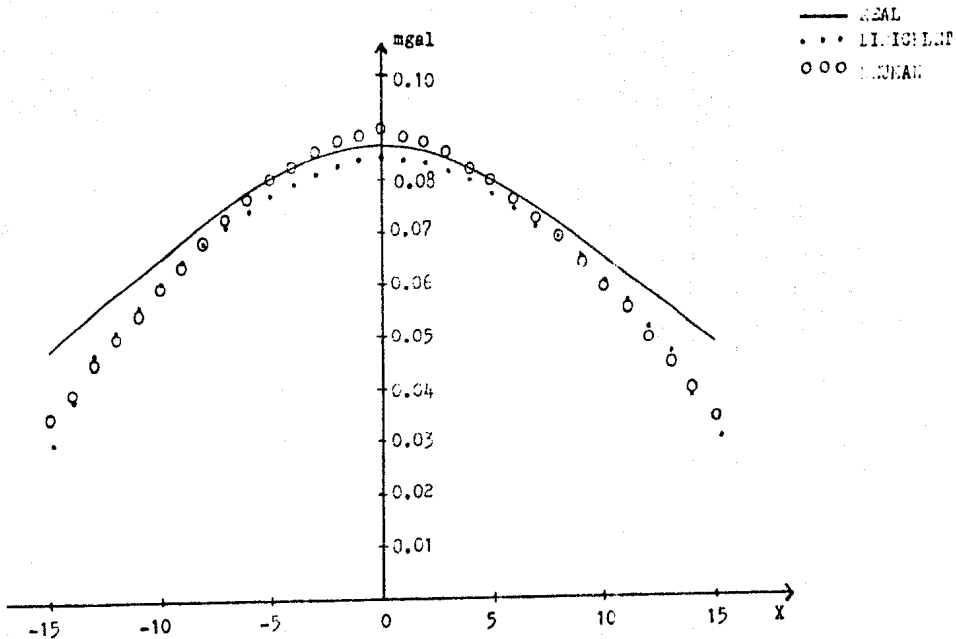


Figura IV.2

CONTINUACION ANALITICA

A  $z = 2$  U. R.

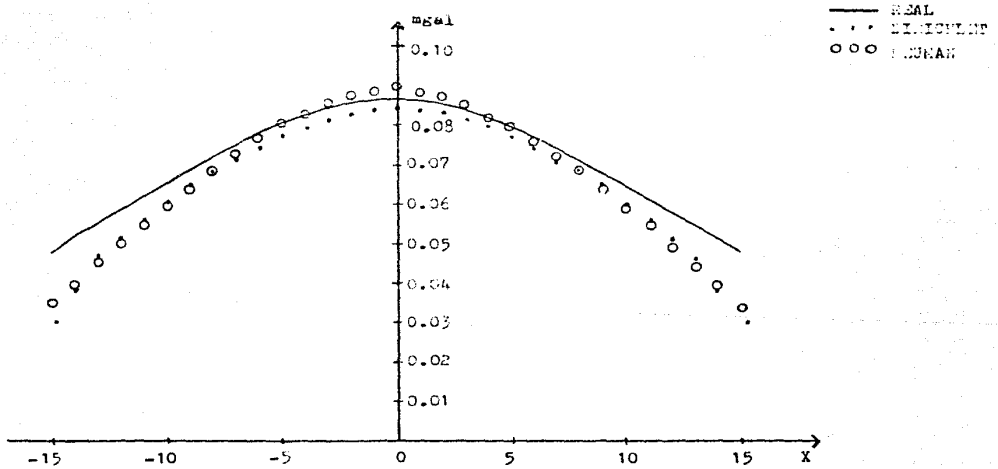


Figura IV.4)

CONT. ANALITICA REAL A Z= 4.00 U.R.

A	VA	DE	0.3040E-01	A	0.3481E-01
+	VA	DE	0.3481E-01	A	0.3792E-01
B	VA	DE	0.3900E-01	A	0.4103E-01
*	VA	DE	0.4324E-01	A	0.4414E-01
C	VA	DE	0.4745E-01	A	0.5167E-01
=	VA	DE	0.5167E-01	A	0.5688E-01
D	VA	DE	0.5589E-01	A	0.6007E-01
-	VA	DE	0.6009E-01	A	0.6421E-01
E	VA	DE	0.6431E-01	A	0.6832E-01
:	VA	DE	0.6852E-01	A	0.7274E-01

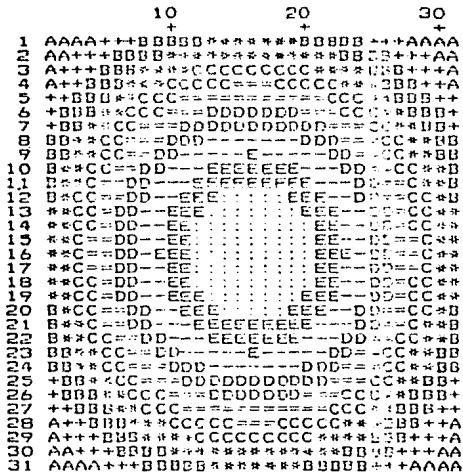


Figura IV. 9

## CONT. ANALITICA - METODO DE DIRICHLET. Z= 4.00 U.R.

```

A VA DE 0.1146E-01 A 0.1721E-01
+ VA DE 0.1721E-01 A 0.2397E-01
B VA DE 0.2397E-01 A 0.3072E-01
* VA DE 0.3072E-01 A 0.3747E-01
C VA DE 0.3747E-01 A 0.4423E-01
- VA DE 0.4423E-01 A 0.5098E-01
D VA DE 0.5098E-01 A 0.5773E-01
- VA DE 0.5773E-01 A 0.6448E-01
E VA DE 0.6448E-01 A 0.7123E-01
: VA DE 0.7123E-01 A 0.7798E-01

          10          20          30
          +          +          +
1 AAA+++++BBBBBBBBBBBDDDDDD++++AAA
2 AA+++BBBBB*****BDDDD++++AA
3 A+BBBBB****CCCCCCCC**BDDDD+A
4 ++BB**CCCC=====CCCC**BB++
5 ++B**CCC=====CC**B++
6 +B**CC=====DDDDDDDD**C*BD+
7 +B**CC=====DDDDDDDD**C*BD+
8 +B**CC=====DDDDDDDD**C*BD+
9 BB**CC=====DDDDDDDD**C*BD+
10 B**C=====DDDDDDDD**C*BD+
11 B**C=====DDDDDDDD**C*BD+
12 B**C=====DDDDDDDD**C*BD+
13 B**C=====DDDDDDDD**C*BD+
14 B**C=====DDDDDDDD**C*BD+
15 B**C=====DDDDDDDD**C*BD+
16 B**C=====DDDDDDDD**C*BD+
17 B**C=====DDDDDDDD**C*BD+
18 B**C=====DDDDDDDD**C*BD+
19 B**C=====DDDDDDDD**C*BD+
20 B**C=====DDDDDDDD**C*BD+
21 B**C=====DDDDDDDD**C*BD+
22 B**C=====DDDDDDDD**C*BD+
23 BB**CC=====DDDDDDDD**C*BD+
24 +B**CC=====DDDDDDDD**C*BD+
25 +B**CC=====DDDDDDDD**C*BD+
26 ++B**CCC=====CC**B++
27 ++B**CCC=====CC**B++
28 ++B**CCC=====CC**B++
29 A+BBBB**CCCCCCCC**BDDDD+A
30 AA+++BBBB*****BDDDD++++AA
31 AAA+++++BBBBBBBBBBBDDDD++++AAA

```

Figura IV.10



CONT. ANALITICA - METODO DE NEUMAN. Z= 4.00 U. R.

A	VA	DE	0.1409E-01	A	0.2002E-01
+	VA	DE	0.2023E-01	A	0.2537E-01
B	VA	DE	0.2637E-01	A	0.3231E-01
*	VA	DE	0.3231E-01	A	0.3925E-01
C	VA	DE	0.3865E-01	A	0.4619E-01
=	VA	DE	0.4479E-01	A	0.5313E-01
D	VA	DE	0.5077E-01	A	0.6007E-01
-	VA	DE	0.5709E-01	A	0.6701E-01
E	VA	DE	0.6322E-01	A	0.7395E-01
.	VA	DE	0.6934E-01	A	0.8089E-01

	10	20	30
1	AAAA+++	BBBBBBBBBBBBBB	++++AAAA
2	AAA++	BBB*?*?*?*?*?*?	BBB*?++AAA
3	AA++	BB*?*?*?*?CCCC	*?*?*?*?*?AA
4	A++	BB*?*?*?*?CCCC	CCCC*?*?*?*?A
5	++	BB*?*?*?*?CCCC	CCCC*?*?*?*?++
6	+*	BB*?*?*?*?CCCC	CCCC*?*?*?*?++
7	+BB*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
8	+BB*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
9	+B*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
10	BB*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
11	BB*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
12	B*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
13	B*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
14	B*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
15	B*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
16	B*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
17	B*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
18	B*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
19	B*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
20	B*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
21	BB*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
22	BB*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
23	+BB*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
24	+BB*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
25	+BB*	*?CC==DDDDDDDD	==CC*?*?*?++
26	++	BB*?*?*?*?CCCC	==CC*?*?*?++
27	+++	BB*?*?*?*?CCCC	==CC*?*?*?++
28	A++	BB*?*?*?*?CCCC	CCCC*?*?*?++
29	AA+	BB*?*?*?*?CCCC	CCCC*?*?*?++
30	AAA+	BB*?*?*?*?CCCC	CCCC*?*?*?++
31	AAAA+++	BBBBBBBBBBBBBB	++++AAAA

Figura IV.11

Tabla IV.2

REGLON	16				
REAL	DIRICHLET	ERROR %	NEUMAN	ERROR %	
0.4435E-01	0.3700E-01	17.02	0.3157E-01	28.82	
0.4688E-01	0.3230E-01	31.04	0.3500E-01	24.16	
0.4945E-01	0.3727E-01	24.62	0.3960E-01	19.92	
0.5205E-01	0.4176E-01	19.76	0.4360E-01	16.12	
0.5464E-01	0.4581E-01	14.16	0.4760E-01	12.70	
0.5721E-01	0.4949E-01	13.50	0.5150E-01	9.87	
0.5971E-01	0.5284E-01	11.50	0.5530E-01	7.35	
0.6210E-01	0.5591E-01	9.98	0.5880E-01	5.80	
0.6435E-01	0.5869E-01	8.80	0.6210E-01	4.36	
0.6641E-01	0.6110E-01	7.88	0.6520E-01	3.80	
0.6823E-01	0.6337E-01	7.14	0.6790E-01	3.47	
0.6981E-01	0.6527E-01	6.56	0.7020E-01	3.25	
0.7106E-01	0.6574E-01	6.09	0.7210E-01	3.11	
0.7199E-01	0.6580E-01	6.70	0.7374E-01	2.94	
0.7255E-01	0.6560E-01	6.40	0.7460E-01	2.86	
0.7274E-01	0.6529E-01	5.13	0.7500E-01	2.80	
0.7255E-01	0.6500E-01	5.40	0.7420E-01	2.86	
0.7199E-01	0.6480E-01	5.70	0.7374E-01	2.94	
0.7106E-01	0.6470E-01	6.07	0.7230E-01	3.11	
0.6981E-01	0.6420E-01	6.56	0.7020E-01	3.25	
0.6823E-01	0.6337E-01	7.14	0.6790E-01	3.47	
0.6641E-01	0.6110E-01	7.88	0.6520E-01	3.80	
0.6435E-01	0.5869E-01	8.80	0.6210E-01	4.36	
0.6210E-01	0.5591E-01	9.98	0.5880E-01	5.80	
0.5971E-01	0.5284E-01	11.50	0.5530E-01	7.35	
0.5721E-01	0.4949E-01	13.50	0.5150E-01	9.87	
0.5464E-01	0.4581E-01	16.16	0.4760E-01	12.70	
0.5205E-01	0.4176E-01	19.76	0.4360E-01	16.12	
0.4945E-01	0.3727E-01	24.62	0.3960E-01	19.92	
0.4688E-01	0.3230E-01	31.04	0.3500E-01	24.16	
0.4435E-01	0.2700E-01	39.02	0.3157E-01	28.82	

CONTINUACION ANALITICA

$\Delta z = 4$  U. R.

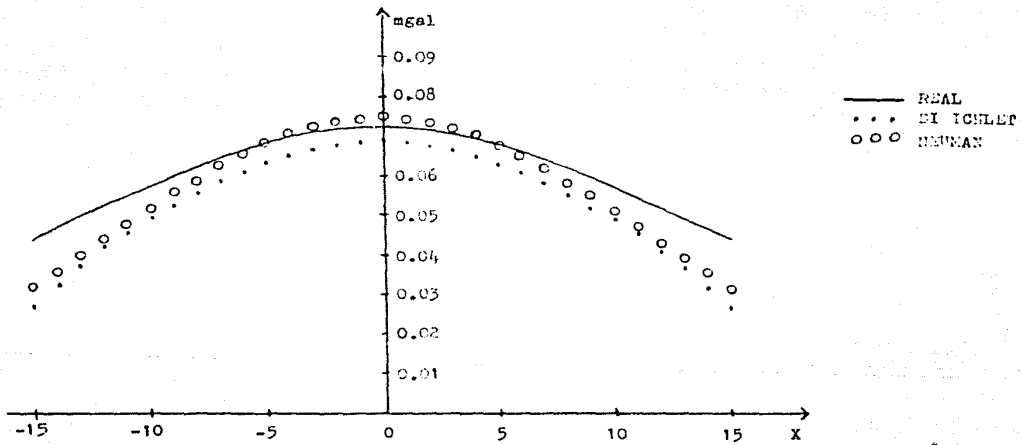


Figura IV.12



. CONT. ANALITICA - METODO DE DIRICHLET. Z= 15.00 U.R.

A	VA	DE	0.5805E-02	A	0.7612E-02
+	VA	DE	0.7802E-02	A	0.9779E-02
B	VA	DE	0.9779E-02	A	0.1177E-01
+	VA	DE	0.1176E-01	A	0.1373E-01
C	VA	DE	0.1373E-01	A	0.1571E-01
=	VA	DE	0.1571E-01	A	0.1769E-01
D	VA	DE	0.1769E-01	A	0.1966E-01
-	VA	DE	0.1966E-01	A	0.2164E-01
E	VA	DE	0.2164E-01	A	0.2362E-01
:	VA	DE	0.2362E-01	A	0.2559E-01

	10	20	30
1	AAAA+++	BBB	BBB+++AAAA
2	AAA++	BBB	BBB+++AAA
3	AA++	BBB	BBB+++AA
4	A++	BBB	BBB+++A
5	++	BBB	BBB+++
6	+	BBB	BBB+++
7		BBB	BBB+++
8		BBB	BBB+++
9		BBB	BBB+++
10		BBB	BBB+++
11		BBB	BBB+++
12		BBB	BBB+++
13		BBB	BBB+++
14		BBB	BBB+++
15		BBB	BBB+++
16		BBB	BBB+++
17		BBB	BBB+++
18		BBB	BBB+++
19		BBB	BBB+++
20		BBB	BBB+++
21		BBB	BBB+++
22		BBB	BBB+++
23		BBB	BBB+++
24		BBB	BBB+++
25		BBB	BBB+++
26		BBB	BBB+++
27		BBB	BBB+++
28		BBB	BBB+++
29		BBB	BBB+++
30		BBB	BBB+++
31	AAAA+++	BBB	BBB+++AAAA

Figura IV.14

## CONT. ANALITICA - METODO DE NEUMAN Z= 15.00 U. R.

```

A VA DE 0.9142E-02 A 0.1202E-01
+ VA DE 0.1202E-01 A 0.1489E-01
B VA DE 0.1489E-01 A 0.1777E-01
* VA DE 0.1777E-01 A 0.2064E-01
C VA DE 0.2064E-01 A 0.2352E-01
= VA DE 0.2352E-01 A 0.2639E-01
D VA DE 0.2639E-01 A 0.2927E-01
- VA DE 0.2927E-01 A 0.3215E-01
E VA DE 0.3215E-01 A 0.3503E-01
: VA DE 0.3503E-01 A 0.3791E-01

```

```

          10          20          30
          +          +          +
1 AAAA+++BBBBB*****BBBBBBB+++AAAA
2 AA+++BBBB*****BBBBBBB+++AA
3 A+++BBBB*****CCCCCCCC**B+++A
4 A+BBBB*CCCCC=====CCCC*BB+++A
5 +BB**CC=====DDDDDD=CC*BB+
6 +BB**CC=====DDDDDD=CC*BB+
7 +BB**CC=====DDDDDD=CC*BB+
8 BB**CC=====DDDDDD=CC*BB
9 BB**CC=====DDDDDD=CC*BB
10 B**CC=DD-----EEEEEE---DD=CC*BB
11 B**CC=DD-----EEEEEE---DD=CC*BB
12 B**CC=DD-----EEEE:::EEEE---DD=CC*BB
13 B**CC=DD-----EEEE:::EEEE---DD=CC*BB
14 **C=DD-----EEEE:::EEEE---DD=CC*BB
15 **C=DD-----EE:::EEEE---DD=CC*BB
16 **C=DD-----EE:::EEEE---DD=CC*BB
17 **C=DD-----EE:::EEEE---DD=CC*BB
18 **C=DD-----EE:::EEEE---DD=CC*BB
19 B**CC=DD-----EEEE:::EEEE---DD=CC*BB
20 B**CC=DD-----EEEE:::EEEE---DD=CC*BB
21 B**CC=DD-----EEEEEE---DD=CC*BB
22 B**CC=DD-----EEEEEE---DD=CC*BB
23 BB**CC=DD-----DDDDDD=CC*BB
24 BB**CC=DDDDDDDDDD=CC*BB+
25 +BB**CC=====DDDDDD=CC*BB+
26 +BB**CC=====DDDDDD=CC*BB+
27 +BB**CC=====DDDDDD=CC*BB+
28 A+BBBB*CCCCC=====CCCC*BB+++A
29 A+++BBB*CCCCCCCC**B+++A
30 AA+++BBBB*****BBBBBBB+++AA
31 AAAA+++BBBBB*****BBBBBBB+++AAAA

```

Figura IV.15

Tabla IV.3

RANGLON 16

REAL	DIRICHLET	ERROR %	NEUMAN	ERROR %
0.2656E-01	0.1214E-01	44.39	0.1305E-01	50.22
0.2777E-01	0.1357E-01	51.16	0.0104E-01	33.39
0.2917E-01	0.1499E-01	53.18	0.0223E-01	30.32
0.3059E-01	0.1650E-01	49.36	0.0241E-01	16.56
0.3202E-01	0.1701E-01	42.71	0.0239E-01	12.63
0.3345E-01	0.1852E-01	40.24	0.0276E-01	9.84
0.3487E-01	0.1993E-01	37.96	0.0292E-01	3.80
0.3629E-01	0.2134E-01	35.87	0.0307E-01	2.90
0.3771E-01	0.2275E-01	33.96	0.0314E-01	0.30
0.3913E-01	0.2416E-01	32.24	0.0339E-01	-1.96
0.4055E-01	0.2557E-01	30.69	0.0354E-01	-3.96
0.4197E-01	0.2698E-01	29.21	0.0366E-01	-5.71
0.4339E-01	0.2839E-01	27.80	0.0380E-01	-7.28
0.4481E-01	0.2980E-01	26.46	0.0377E-01	-8.96
0.4623E-01	0.3121E-01	25.16	0.0379E-01	-9.76
0.4765E-01	0.3262E-01	23.91	0.0375E-01	-6.28
0.4907E-01	0.3403E-01	22.71	0.0362E-01	-7.24
0.5049E-01	0.3544E-01	21.51	0.0356E-01	-5.71
0.5191E-01	0.3685E-01	20.39	0.0355E-01	-3.96
0.5333E-01	0.3826E-01	19.24	0.0339E-01	-1.96
0.5475E-01	0.3967E-01	18.16	0.0314E-01	0.32
0.5617E-01	0.4108E-01	17.11	0.0307E-01	2.90
0.5759E-01	0.4249E-01	16.07	0.0292E-01	3.80
0.5901E-01	0.4390E-01	15.07	0.0276E-01	9.84
0.6043E-01	0.4531E-01	14.11	0.0260E-01	12.63
0.6185E-01	0.4672E-01	13.18	0.0241E-01	16.56
0.6327E-01	0.4813E-01	12.29	0.0223E-01	20.32
0.6469E-01	0.4954E-01	11.44	0.0204E-01	24.16
0.6611E-01	0.5095E-01	10.61	0.0185E-01	28.00
0.6753E-01	0.5236E-01	9.80	0.0166E-01	31.84
0.6895E-01	0.5377E-01	9.01	0.0147E-01	35.68
0.7037E-01	0.5518E-01	8.24	0.0128E-01	39.52
0.7179E-01	0.5659E-01	7.49	0.0109E-01	43.36
0.7321E-01	0.5800E-01	6.76	0.0090E-01	47.20
0.7463E-01	0.5941E-01	6.05	0.0071E-01	51.04
0.7605E-01	0.6082E-01	5.36	0.0052E-01	54.88
0.7747E-01	0.6223E-01	4.69	0.0033E-01	58.72
0.7889E-01	0.6364E-01	4.04	0.0014E-01	62.56
0.8031E-01	0.6505E-01	3.41	0.0005E-01	66.40
0.8173E-01	0.6646E-01	2.80	0.0006E-01	70.24
0.8315E-01	0.6787E-01	2.21	0.0007E-01	74.08
0.8457E-01	0.6928E-01	1.64	0.0008E-01	77.92
0.8599E-01	0.7069E-01	1.09	0.0009E-01	81.76
0.8741E-01	0.7210E-01	0.56	0.0010E-01	85.60
0.8883E-01	0.7351E-01	0.04	0.0011E-01	89.44
0.9025E-01	0.7492E-01	-0.47	0.0012E-01	93.28
0.9167E-01	0.7633E-01	-0.98	0.0013E-01	97.12
0.9309E-01	0.7774E-01	-1.49	0.0014E-01	100.96
0.9451E-01	0.7915E-01	-2.00	0.0015E-01	104.80
0.9593E-01	0.8056E-01	-2.51	0.0016E-01	108.64
0.9735E-01	0.8197E-01	-3.02	0.0017E-01	112.48
0.9877E-01	0.8338E-01	-3.53	0.0018E-01	116.32
1.0019E-01	0.8479E-01	-4.04	0.0019E-01	120.16
1.0161E-01	0.8620E-01	-4.55	0.0020E-01	124.00
1.0303E-01	0.8761E-01	-5.06	0.0021E-01	127.84
1.0445E-01	0.8902E-01	-5.57	0.0022E-01	131.68
1.0587E-01	0.9043E-01	-6.08	0.0023E-01	135.52
1.0729E-01	0.9184E-01	-6.59	0.0024E-01	139.36
1.0871E-01	0.9325E-01	-7.10	0.0025E-01	143.20
1.1013E-01	0.9466E-01	-7.61	0.0026E-01	147.04
1.1155E-01	0.9607E-01	-8.12	0.0027E-01	150.88
1.1297E-01	0.9748E-01	-8.63	0.0028E-01	154.72
1.1439E-01	0.9889E-01	-9.14	0.0029E-01	158.56
1.1581E-01	1.0030E-01	-9.65	0.0030E-01	162.40
1.1723E-01	1.0171E-01	-10.16	0.0031E-01	166.24
1.1865E-01	1.0312E-01	-10.67	0.0032E-01	170.08
1.2007E-01	1.0453E-01	-11.18	0.0033E-01	173.92
1.2149E-01	1.0594E-01	-11.69	0.0034E-01	177.76
1.2291E-01	1.0735E-01	-12.20	0.0035E-01	181.60
1.2433E-01	1.0876E-01	-12.71	0.0036E-01	185.44
1.2575E-01	1.1017E-01	-13.22	0.0037E-01	189.28
1.2717E-01	1.1158E-01	-13.73	0.0038E-01	193.12
1.2859E-01	1.1299E-01	-14.24	0.0039E-01	196.96
1.3001E-01	1.1440E-01	-14.75	0.0040E-01	200.80
1.3143E-01	1.1581E-01	-15.26	0.0041E-01	204.64
1.3285E-01	1.1722E-01	-15.77	0.0042E-01	208.48
1.3427E-01	1.1863E-01	-16.28	0.0043E-01	212.32
1.3569E-01	1.2004E-01	-16.79	0.0044E-01	216.16
1.3711E-01	1.2145E-01	-17.30	0.0045E-01	220.00
1.3853E-01	1.2286E-01	-17.81	0.0046E-01	223.84
1.3995E-01	1.2427E-01	-18.32	0.0047E-01	227.68
1.4137E-01	1.2568E-01	-18.83	0.0048E-01	231.52
1.4279E-01	1.2709E-01	-19.34	0.0049E-01	235.36
1.4421E-01	1.2850E-01	-19.85	0.0050E-01	239.20
1.4563E-01	1.2991E-01	-20.36	0.0051E-01	243.04
1.4705E-01	1.3132E-01	-20.87	0.0052E-01	246.88
1.4847E-01	1.3273E-01	-21.38	0.0053E-01	250.72
1.4989E-01	1.3414E-01	-21.89	0.0054E-01	254.56
1.5131E-01	1.3555E-01	-22.40	0.0055E-01	258.40
1.5273E-01	1.3696E-01	-22.91	0.0056E-01	262.24
1.5415E-01	1.3837E-01	-23.42	0.0057E-01	266.08
1.5557E-01	1.3978E-01	-23.93	0.0058E-01	269.92
1.5699E-01	1.4119E-01	-24.44	0.0059E-01	273.76
1.5841E-01	1.4260E-01	-24.95	0.0060E-01	277.60
1.5983E-01	1.4401E-01	-25.46	0.0061E-01	281.44
1.6125E-01	1.4542E-01	-25.97	0.0062E-01	285.28
1.6267E-01	1.4683E-01	-26.48	0.0063E-01	289.12
1.6409E-01	1.4824E-01	-26.99	0.0064E-01	292.96
1.6551E-01	1.4965E-01	-27.50	0.0065E-01	296.80
1.6693E-01	1.5106E-01	-28.01	0.0066E-01	300.64
1.6835E-01	1.5247E-01	-28.52	0.0067E-01	304.48
1.6977E-01	1.5388E-01	-29.03	0.0068E-01	308.32
1.7119E-01	1.5529E-01	-29.54	0.0069E-01	312.16
1.7261E-01	1.5670E-01	-30.05	0.0070E-01	316.00
1.7403E-01	1.5811E-01	-30.56	0.0071E-01	319.84
1.7545E-01	1.5952E-01	-31.07	0.0072E-01	323.68
1.7687E-01	1.6093E-01	-31.58	0.0073E-01	327.52
1.7829E-01	1.6234E-01	-32.09	0.0074E-01	331.36
1.7971E-01	1.6375E-01	-32.60	0.0075E-01	335.20
1.8113E-01	1.6516E-01	-33.11	0.0076E-01	339.04
1.8255E-01	1.6657E-01	-33.62	0.0077E-01	342.88
1.8397E-01	1.6798E-01	-34.13	0.0078E-01	346.72
1.8539E-01	1.6939E-01	-34.64	0.0079E-01	350.56
1.8681E-01	1.7080E-01	-35.15	0.0080E-01	354.40
1.8823E-01	1.7221E-01	-35.66	0.0081E-01	358.24
1.8965E-01	1.7362E-01	-36.17	0.0082E-01	362.08
1.9107E-01	1.7503E-01	-36.68	0.0083E-01	365.92
1.9249E-01	1.7644E-01	-37.19	0.0084E-01	369.76
1.9391E-01	1.7785E-01	-37.70	0.0085E-01	373.60
1.9533E-01	1.7926E-01	-38.21	0.0086E-01	377.44
1.9675E-01	1.8067E-01	-38.72	0.0087E-01	381.28
1.9817E-01	1.8208E-01	-39.23	0.0088E-01	385.12
1.9959E-01	1.8349E-01	-39.74	0.0089E-01	388.96
2.0101E-01	1.8490E-01	-40.25	0.0090E-01	392.80
2.0243E-01	1.8631E-01	-40.76	0.0091E-01	396.64
2.0385E-01	1.8772E-01	-41.27	0.0092E-01	400.48
2.0527E-01	1.8913E-01	-41.78	0.0093E-01	404.32
2.0669E-01	1.9054E-01	-42.29	0.0094E-01	408.16
2.0811E-01	1.9195E-01	-42.80	0.0095E-01	412.00
2.0953E-01	1.9336E-01	-43.31	0.0096E-01	415.84
2.1095E-01	1.9477E-01	-43.82	0.0097E-01	419.68
2.1237E-01	1.9618E-01	-44.33	0.0098E-01	423.52
2.1379E-01	1.9759E-01	-44.84	0.0099E-01	427.36
2.1521E-01	1.9900E-01	-45.35	0.0100E-01	431.20
2.1663E-01	2.0041E-01	-45.86	0.0101E-01	435.04
2.1805E-01	2.0182E-01	-46.37	0.0102E-01	438.88
2.1947E-01	2.0323E-01	-46.88	0.0103E-01	442.72
2.2089E-01	2.0464E-01	-47.39	0.0104E-01	446.56
2.2231E-01	2.0605E-01	-47.90	0.0105E-01	450.40
2.2373E-01	2.0746E-01	-48.41	0.0106E-01	454.24
2.2515E-01	2.0887E-01	-48.92	0.0107E-01	458.08
2.2657E-01	2.1028E-01	-49.43	0.0108E-01	461.92
2.2799E-01	2.1169E-01	-49.94	0.0109E-01	465.76
2.2941E-01	2.1310E-01	-50.45	0.0110E-01	469.60
2.3083E-01	2.1451E-01	-50.96	0.0111E-01	473.44
2.3225E-01	2.1592E-01	-51.47	0.0112E-01	477.28
2.3367E-01	2.1733E-01	-51.98	0.0113E-01	481.12
2.3509E-01	2.1874E-01	-52.49	0.0114E-01	484.96
2.3651E-01	2.2015E-01	-53.00	0.0115E-01	488.80
2.3793E-01	2.2156E-01	-53.51	0.0116E-01	492.64
2.3935E-01	2.2297E-01	-54.02	0.0117E-01	496.48
2.4077E-01	2.2438E-01	-54.53	0.0118E-01	500.32
2.4219E-01	2.2579E-01	-55.04	0.0119E-01	504.16
2.4361E-01	2.2720E-01	-55.55	0.0120E-01	508.00
2.4503E-01	2.2861E-01	-56.06	0.0121E-01	511.84
2.4645E-01	2.3002E-01	-56.57	0.0122E-01	515.68
2.4787E-01	2.3143E-01	-57.08	0.0123E-01	519.52
2.4929E-01	2.3284E-01	-57.59	0.0124E-01	523.36
2.5071E-01	2.3425E-01	-58.10	0.0125E-01	527.20
2.5213E-01	2.3566E-01	-58.61	0.0126E-01	531.04
2.5355E-01	2.3707E-01	-59.12	0.0127E-01	534.88
2.5497E-01	2.3848E-01	-59.63	0.0128E-01	538.72
2.5639E-01	2.3989E-01	-60.14	0.0129E-01	542.56
2.5781E-01	2.4130E-01	-60.65	0.0130E-01	546.40
2.5923E-01	2.4271E-01	-61.16	0.0131E-01	550.24
2.6065E-01	2.4412E-01	-61.67	0.0132E-01	554.08
2.6207E-01	2.4553E-01	-62.18	0.0133E-01	557.92
2.6349E-01	2.4694E-01	-62.69	0.0134E-01	561.76
2.6491E-01	2.4835E-01	-63.20	0.0135E-01	565.60
2.6633E-01	2.4976E-01	-63.71	0.0136E-01	569.44
2.6775E-01	2.5117E-01	-64.22	0.0137E-01	573.28
2.6917E-01	2.5258E-01	-64.73	0.0138E-01	577.12
2.7059E-01	2.5399E-01	-65.24	0.0139E-01	580.96
2				

CONTINUACION ANALITICA  
 $\lambda = 15$  U. R.

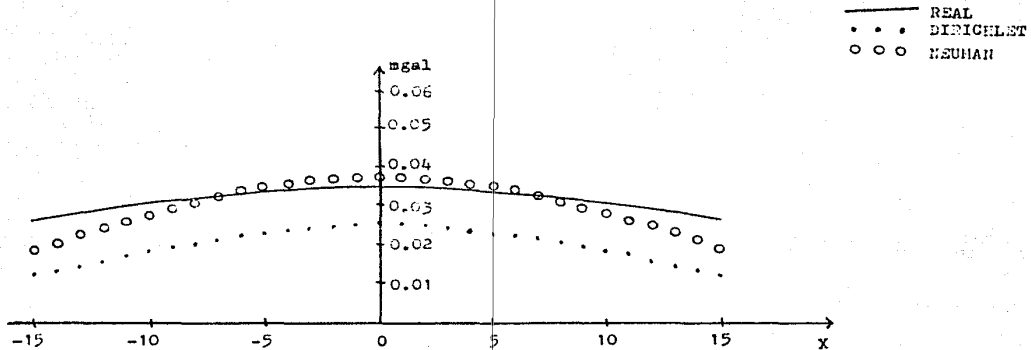


Figura IV.16



## IV.2.3. FUNCION POTENCIAL.

Para esta modalidad de cálculo de la continuación analítica - se utiliza como función de entrada la componente vertical del efecto gravitacional de la esfera

$$g_z = \frac{4}{3} \pi K \rho R^3 \frac{d}{r^3} \quad (\text{IV.4})$$

y, como ya se dijo previamente, se obtiene una función potencial  $U$  continuada a la altura  $z$ .

Como el cuerpo que produce esta función potencial es de dimensiones finitas, el potencial deberá ser newtoniano, de la forma

$$U = K \frac{M}{r} \quad (\text{IV.5})$$

En las figuras IV.17 y IV.18 se muestra el perfil principal de la función potencial obtenida procesando el efecto de la esfera ucada a las alturas  $z=1$  y  $z=2$  unidades reticulares. Ambas gráficas tienen un comportamiento acorde a la expresión IV.5.

Para derivar el potencial y obtener la función  $g_z$  continuada a la altura deseada

$$g_z = - \frac{\partial U}{\partial z}$$

se hace otra continuación analítica a una altura ligeramente mayor,  $z+\Delta z$ , en este caso se usó 1.01z, y así se tienen dos mapas de potencial.

La derivada se obtiene punto a punto siguiendo un esquema de diferencias a la derecha.

Cabe mencionar que entre más pequeña sea la diferencia entre ambas alturas de continuación, más exacto será el efecto continuado calculado.

FUNCIÓN POTENCIAL CONTINUADA  
A  $z=1$  U. R.

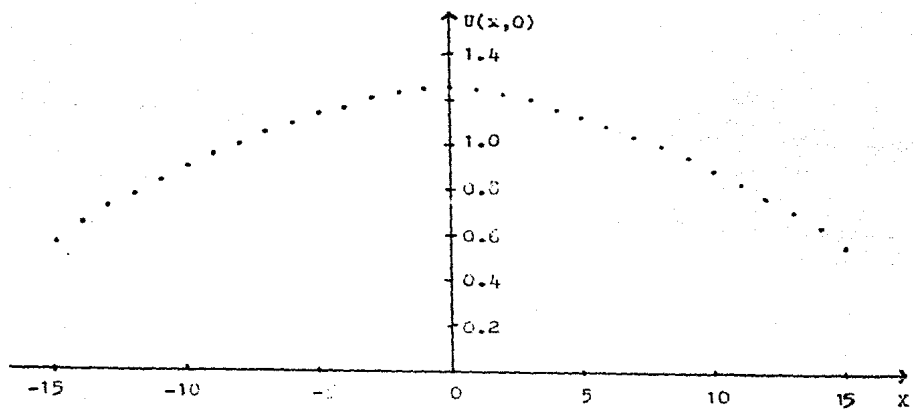


Figura IV.17

FUNCIÓN POTENCIAL CONTINUADA  
A  $z=2$  U. R.

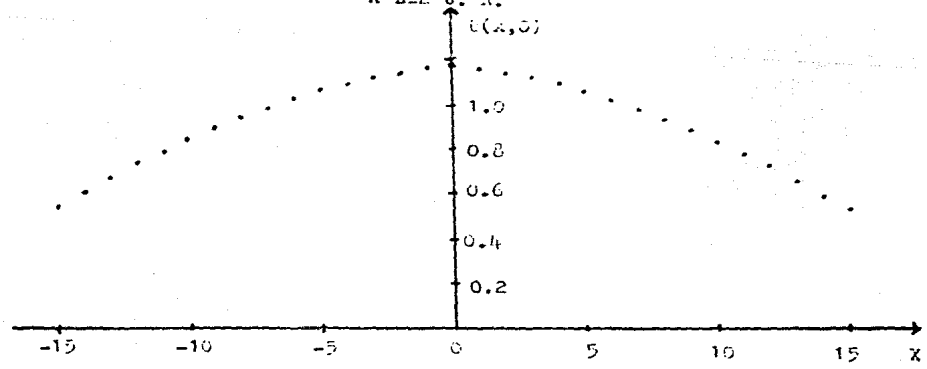


Figura IV.18

#### IV.2.4. COMPARACION DE RESULTADOS.

El algoritmo de solución en esta sección también es basado - en la transformada doble de Fourier, idéntico al ya descrito anteriormente.

Con el efecto gravimétrico de la esfera, ecuación IV.4, usada como función de entrada en la ecuación IV.2 se hicieron continuaciones analíticas a 2 y 4 unidades reticulares, según el modelo esférico ya descrito. La comparación de los resultados obtenidos con los arrojados por el proceso hecho con la integral de Dirichlet se muestran en las figuras IV.19 a IV.25, y en las tablas - IV.4 y IV.5 se muestra un análisis del error de ambos procesos.-- De estas dos tablas resalta que:

a).- Los resultados basados en el proceso de Dirichlet son más exactos que los obtenidos bajo el proceso de Neuman usando la función potencial.

b).- Las formas de las curvas son ambas parecidas a la curva teórica.

X INICIAL (MTS) -15.0000  
 X FINAL (MTS) 15.0000  
 INCREMENTO (MTS) 1.0000

Y INICIAL (MTS) -15.0000  
 Y FINAL (MTS) 15.0000

ESFERA	RADIO (MTE)	DENSIDAD (GR/CM**3)	COORD. DEL CENTRO (MTS)		
1	10 000	1.500	0.0000	0.0000	20.0000

COMPONENTE VERTICAL EN MILIGALES

	10	20	30
A	VA DE 0.3331E-01	A 0.4091E-01	
+	VA DE 0.4091E-01	A 0.4800E-01	
B	VA DE 0.4800E-01	A 0.5509E-01	
*	VA DE 0.5509E-01	A 0.6218E-01	
C	VA DE 0.6218E-01	A 0.6928E-01	
=	VA DE 0.6928E-01	A 0.7637E-01	
D	VA DE 0.7637E-01	A 0.8346E-01	
-	VA DE 0.8346E-01	A 0.9056E-01	
E	VA DE 0.9056E-01	A 0.9765E-01	
:	VA DE 0.9765E-01	A 0.1047E+00	

	10	20	30
1	AAAA+++++BBEEDDEEBBEBE+++++AAAA		
2	AAA+++++EBB**+*****BEEB+++++AAA		
3	AA+++++BBBB**+*****+*BBB+++++AA		
4	A+++++BBBB**+CCCCCCCC**+*BBB+++++A		
5	+++++BBB**+CCCC**=====CCCC**+BBB+++		
6	+*BBB**+CCC**=====CCC**+BBB+++		
7	+*BB**+CCC**=====DDDDDD**=CCC**+BB+++		
8	+*BB**+CCC**=====DDDD**=CCC**+BB+++		
9	+*BB**+CC**=DD-----DD**=CC**+BB+++		
10	BB**+CC**=DD-----EEEE**=DD**=CC**+BB		
11	BB**+CC**=DD-----EEEE**=DD**=CC**+BB		
12	B**+CC**=DD-----EE**=EE**=DD**=CC**+BB		
13	B**+CC**=DD-----EE**=EE**=DD**=CC**+BB		
14	B**+CC**=DD-----EE**=EE**=DD**=CC**+BB		
15	B**+CC**=DD-----EE**=EE**=DD**=CC**+BB		
16	B**+CC**=DD-----EE**=EE**=DD**=CC**+BB		
17	B**+CC**=DD-----EE**=EE**=DD**=CC**+BB		
18	B**+CC**=DD-----EE**=EE**=DD**=CC**+BB		
19	B**+CC**=DD-----EE**=EE**=DD**=CC**+BB		
20	B**+CC**=DD-----EE**=EE**=DD**=CC**+BB		
21	BB**+CC**=DD-----EEEE**=DD**=CC**+BB		
22	BB**+CC**=DD-----EEEE**=DD**=CC**+BB		
23	+*BB**+CC**=DD-----DD**=DD**=CC**+BB+++		
24	+*BB**+CC**=DDDD**=DDDD**=CC**+BB+++		
25	+*BBB**+CCC**=====CCC**+BBB+++		
26	+*BBB**+CCC**=====CCC**+BBB+++		
27	+*BBB**+CCCC**=====CCCC**+*BBB+++++A		
28	A+++++BBBB**+CCCCCCCC**+*BBB+++++AA		
29	AAA+++++BBBB**+*****BEEB+++++AAA		
30	AAAA+++++BBBB**+*****BEEB+++++AAA		
31	AAAA+++++BBBEEEBBEBEBE+++++AAAA		

Figura IV.19

CONT. ANALITICA REAL A Z= 2.00 U.R.

A VA DE 0.3229E-01 A 0.3772E-01  
 + VA DE 0.3772E-01 A 0.4315E-01  
 B VA DE 0.4315E-01 A 0.4857E-01  
 \* VA DE 0.4857E-01 A 0.5400E-01  
 C VA DE 0.5400E-01 A 0.5943E-01  
 = VA DE 0.5943E-01 A 0.6485E-01  
 D VA DE 0.6485E-01 A 0.7028E-01  
 - VA DE 0.7028E-01 A 0.7571E-01  
 E VA DE 0.7571E-01 A 0.8114E-01  
 : VA DE 0.8114E-01 A 0.8656E-01

	10	20	30		
	+	+	+		
1	AAAA++	BBBBEE	***BBBEBB	+++AAAA	
2	AAA++	BBBB*	***BBB	BBB++AAA	
3	AA++	BBB**	CCCC	CCCC**BBB++AA	
4	A++	BB***	CCCCCCCC	CCCC**BB++A	
5	++	BB***	CCCC	CCCC**BB++	
6	+	BB***	CC	CCCC**BB++	
7		BB***	CC	CCCC**BB+	
8		BB**	CC	CCCC**BB+	
9		BB**	CC	CCCC**BB	
10		BB**	CC	CCCC**BB	
11		B**	CC	CCCC**BB	
12		B**	CC	CCCC**BB	
13		B**	CC	CCCC**BB	
14		B**	CC	CCCC**BB	
15		B**	CC	CCCC**BB	
16		B**	CC	CCCC**BB	
17		B**	CC	CCCC**BB	
18		B**	CC	CCCC**BB	
19		B**	CC	CCCC**BB	
20		B**	CC	CCCC**BB	
21		B**	CC	CCCC**BB	
22		BB**	CC	CCCC**BB	
23		BB**	CC	CCCC**BB	
24		BB**	CC	CCCC**BB	
25		++	BB***	CCCC	CCCC**BB++
26		+	BB***	CC	CCCC**BB++
27		+	BB**	CC	CCCC**BB++
28		+	BB**	CC	CCCC**BB++
29		AA++	BBB**	CCCC	CCCC**BBB++AA
30		AAA++	BBBB*	***BBB	BBB++AAA
31		AAAA++	BBBBEE	***BBBEBB	+++AAAA

Figura IV.20

## CONT. ANALITICA - METODO DE DIRICHLET. Z= 2.00 U.R.

```

A VA DE 0.1322E-01 A 0.2036E-01
+ VA DE 0.2036E-01 A 0.2750E-01
B VA DE 0.2750E-01 A 0.3464E-01
* VA DE 0.3464E-01 A 0.4178E-01
C VA DE 0.4178E-01 A 0.4892E-01
= VA DE 0.4892E-01 A 0.5606E-01
D VA DE 0.5606E-01 A 0.6320E-01
- VA DE 0.6320E-01 A 0.7034E-01
E VA DE 0.7034E-01 A 0.7748E-01
: VA DE 0.7748E-01 A 0.8462E-01

```

```

                10          20          30
                +          +          +
1 AAA+++++BBBEEEEEEEEEEEEBBB+++++AAA
2 A+++BBBB*****+*****BBBB++A
3 A+BBB***CCCCCCCCCCCC**+BB+A
4 ++BB**CCCC=====DDDD==CCCC*BB+
5 +BB**CCC=====DDDD==CCCC*BB+
6 +B**CCC=====DDDDDDDDDD==CCC*BB+
7 +B**CC=DDDD-----DDDD=CCC*BB+
8 +B*CC=DDD-----DD=CC*BB+
9 B**C=DD-----EEEE---DD=C*BB
10 B*CC=DD-----EEEEEEEE---DD=CC*BB
11 B*CC=DD-----EEEE:EEEE---DD=CC*BB
12 B*C=DD---EEE:.....:EEE---DD=C*BB
13 B*C=DD---EEE:.....:EEE---DD=C*BB
14 B*C=DD---EEE:.....:EEE---DD=C*BB
15 B*C=DD---EEE:.....:EEE---DD=C*BB
16 B*C=DD---EEE:.....:EEE---DD=C*BB
17 B*C=DD---EEE:.....:EEE---DD=C*BB
18 B*C=DD---EEE:.....:EEE---DD=C*BB
19 B*C=DD---EEE:.....:EEE---DD=C*BB
20 B*C=DD---EEE:.....:EEE---DD=C*BB
21 B*CC=DD---EEEE:EEEE---DD=CC*BB
22 B*CC=DD---EEEEEEEE---DD=CC*BB
23 B**C=DDD-----EEEE---DD=C*BB
24 +B**C=DDD-----DD=CC*BB+
25 +B**CCC=DDDD-----DDDD=CCC*BB+
26 +B**CCC=====DDDDDDDDDD==CCC*BB+
27 +BB**CCC=====DDD=====CCC*BB+
28 ++BB**CCCC=====CCCC**+BB+A
29 A+BBB***CCCCCCCCCCCC**+BB+A
30 A+++BBBB*****+*****+BBB++A
31 AAA+++++BBBBEEEEEEEEEEEEBBB+++++AAA

```

Figura IV.21

CONT. ANALITICA - METODO DE NEUMAN. Z= 2.00 U. R.

A	VA	DE	O.	1314E-01	A	O.	2025E-01
+	VA	DE	O.	2023E-01	A	O.	2735E-01
B	VA	DE	O.	2733E-01	A	O.	3443E-01
+	VA	DE	O.	3445E-01	A	O.	4156E-01
C	VA	DE	O.	4156E-01	A	O.	4866E-01
=	VA	DE	O.	4866E-01	A	O.	5576E-01
D	VA	DE	O.	5576E-01	A	O.	6287E-01
-	VA	DE	O.	6287E-01	A	O.	6997E-01
E	VA	DE	O.	6997E-01	A	O.	7708E-01
:	VA	DE	O.	7708E-01	A	O.	8418E-01

		10		20		30								
		+		+		+								
1	AAA	++++	BBBB	BBBB	BBBB	BBBB	++++AAA							
2	A	+++	BBBB	*****	*****	BBBB	+++A							
3	A	BBB	***	CCCC	CCCC	CCCC	***BB+A							
4	+	BB	**	CCCC	====	====	CCCC**BB+							
5	+	BB	**	CCC	===	DDD	====	CCC**BB+						
6	+	B	**	CC	==	DDD	DDDD	====	CCC**B+					
7	+	B	**	CC	==	DDD	DD	DD	==	CC**B+				
8	+	B	**	CC	==	DDD	---	---	---	DDD	==	CC**B+		
9	B	**	CC	==	DDD	---	-----	EEEE	---	DDD	==	CC**B		
10	B	**	CC	==	DD	---	-----	EEEE	EEEE	---	DD	==	CC**B	
11	B	**	CC	==	DD	---	-----	EEEE	EEEE	---	DD	==	CC**B	
12	B	*	C	==	DD	---	-----	EEE	.....	EE	---	DD	==	C**B
13	B	*	C	==	DD	---	-----	EE	.....	EE	---	DD	==	C**B
14	B	*	C	==	D	---	-----	EE	.....	EE	---	D	==	C**B
15	B	*	C	==	DD	---	-----	EE	.....	EE	---	DD	==	C**B
16	B	*	C	==	DD	---	-----	EE	.....	EE	---	DD	==	C**B
17	B	*	C	==	D	---	-----	EE	.....	EE	---	D	==	C**B
18	B	*	C	==	D	---	-----	EE	.....	EE	---	D	==	C**B
19	B	*	C	==	DD	---	-----	EE	.....	EE	---	DD	==	C**B
20	B	*	C	==	DD	---	-----	EE	.....	EE	---	DD	==	C**B
21	B	**	CC	==	DD	---	-----	EEEE	EEEE	---	DD	==	CC**B	
22	B	**	CC	==	DD	---	-----	EEEE	EEEE	---	DD	==	CC**B	
23	B	**	C	==	DDD	---	-----	EEEE	---	DDD	==	C**B		
24	+	B	**	CC	==	DDD	---	-----	---	---	DDD	==	CC**B+	
25	+	B	**	CC	==	DDDD	---	-----	DDDD	==	CC**B+			
26	+	B	**	CCC	==	DDDD	DDDD	==	CCC**B+					
27	+	B	**	CCC	==	DD	==	CCC**B+						
28	+	BB	**	CCC	==	CCC	==	CCC**B+						
29	A	+++	BBB	***	CCCC	CCCC	CCCC	***BBB	+++A					
30	A	+++	BBB	*****	*****	BBB	+++A							
31	AAA	++++	BBBB	BBBB	BBBB	BBBB	++++AAA							

Figura IV.22

Tabla IV.4

REGLON	16						
REAL	DIRICHLET	ERROR %	NEUMAN	ERROR %			
0.4882E-01	0.3149E-01	33.50	0.3135E-01	35.79			
0.3198E-01	0.4015E-01	22.76	0.3988E-01	23.27			
0.5524E-01	0.4678E-01	19.30	0.4649E-01	15.84			
0.5857E-01	0.3212E-01	11.00	0.5182E-01	11.52			
0.6194E-01	0.5673E-01	8.37	0.5644E-01	8.87			
0.6531E-01	0.6096E-01	6.66	0.6064E-01	7.15			
0.6863E-01	0.6487E-01	5.49	0.6453E-01	5.97			
0.7185E-01	0.6851E-01	4.65	0.6816E-01	5.13			
0.7490E-01	0.7189E-01	4.02	0.7132E-01	4.51			
0.7773E-01	0.7497E-01	3.53	0.7459E-01	4.04			
0.8026E-01	0.7771E-01	3.19	0.7730E-01	3.69			
0.8244E-01	0.8005E-01	2.90	0.7964E-01	3.40			
0.8420E-01	0.8195E-01	2.68	0.8152E-01	3.18			
0.8550E-01	0.8337E-01	2.50	0.8293E-01	2.90			
0.8629E-01	0.8426E-01	2.36	0.8382E-01	2.87			
0.8656E-01	0.8462E-01	2.24	0.8418E-01	2.75			
0.8629E-01	0.8426E-01	2.36	0.8382E-01	2.86			
0.8550E-01	0.8337E-01	2.50	0.8293E-01	2.90			
0.8420E-01	0.8195E-01	2.68	0.8153E-01	3.18			
0.8244E-01	0.8005E-01	2.90	0.7964E-01	3.40			
0.8026E-01	0.7771E-01	3.19	0.7731E-01	3.69			
0.7773E-01	0.7497E-01	3.53	0.7459E-01	4.04			
0.7490E-01	0.7189E-01	4.02	0.7132E-01	4.51			
0.7185E-01	0.6851E-01	4.65	0.6816E-01	5.13			
0.6863E-01	0.6487E-01	5.49	0.6453E-01	5.97			
0.6531E-01	0.6096E-01	6.66	0.6064E-01	7.15			
0.6194E-01	0.5673E-01	8.37	0.5644E-01	8.87			
0.5857E-01	0.3212E-01	11.00	0.5182E-01	11.52			
0.5524E-01	0.4678E-01	19.30	0.4649E-01	15.84			
0.3198E-01	0.4015E-01	22.76	0.3988E-01	23.27			
0.4882E-01	0.3149E-01	33.50	0.3135E-01	35.79			



CONT. ANALITICA REAL A Z= 4.00 U. R.

```

A VA DE O. 3060E-01 A O 3481E-01
+ VA DE O. 3481E-01 A O. 3902E-01
B VA DE O. 3902E-01 A O. 4324E-01
* VA DE O. 4324E-01 A O. 4745E-01
C VA DE O. 4745E-01 A O. 5167E-01
= VA DE O. 5167E-01 A O. 5588E-01
D VA DE O. 5588E-01 A O. 6009E-01
- VA DE O. 6009E-01 A O. 6431E-01
E VA DE O. 6431E-01 A O. 6852E-01
: VA DE O. 6852E-01 A O. 7274E-01

          10          20          30
          +          +          +
1 AAAA++BBBBB*****BBBBB++AAAA
2 AA++BBBBB*****BBBBB++AA
3 A++BBBB**CCCCCCCC**BBBB++A
4 A++BBBB**CCCC==CCCC**BBB++A
5 ++BBB**CC==DDDDDD==CC**BBB++
6 +BB**CC==DDDDDDDD==CC**BBB+
7 BB**CC==DD-----DD==CC**BB
8 BB**CC==DD-----E-----DD==CC**BB
9 BB**CC==DD-----EEEEEE---DD==CC**B
10 B**CC==DD-----EEEEEE---DD==CC**B
11 B**CC==DD-----EEEEEE---DD==CC**B
12 B**CC==DD-----EEE: : : : EEE---DD==CC**B
13 **CC==DD-----EEE: : : : EEE---DD==CC**
14 **CC==DD-----EE: : : : EEE---DD==CC**
15 **CC==DD-----EE: : : : EEE---DD==CC**
16 **CC==DD-----EE: : : : EEE---DD==CC**
17 **CC==DD-----EE: : : : EEE---DD==CC**
18 **CC==DD-----EE: : : : EEE---DD==CC**
19 **CC==DD-----EEE: : : : EEE---DD==CC**
20 B**CC==DD-----EEE: : : : EEE---DD==CC**B
21 B**CC==DD-----EEEEEE---DD==CC**B
22 B**CC==DD-----EEEEEE---DD==CC**B
23 BB**CC==DD-----E-----DD==CC**BB
24 BB**CC==DD-----DD==CC**BB
25 +BB**CC==DDDDDDDDDD==CC**BB+
26 +BBB**CC==DDDDDD==CC**BB+
27 ++BBB**CC==DDDD==CC**BBB++
28 A++BBBB**CCCC==CCCC**BBB++A
29 A++BBBB**CCCCCCCC**BBBB++A
30 AA++BBBBB*****BBBBB++AA
31 AAAA++BBBBB*****BBBBB++AAAA

```

Figura IV.25

CONT. ANALITICA - METODO DE DIRICHLET. Z= 4.00 U. R.

```

A VA DE 0.1144E-01 A 0.1721E-01
+ VA DE 0.1721E-01 A 0.2297E-01
B VA DE 0.2297E-01 A 0.2872E-01
* VA DE 0.2872E-01 A 0.3447E-01
C VA DE 0.3447E-01 A 0.4022E-01
= VA DE 0.4022E-01 A 0.4598E-01
D VA DE 0.4598E-01 A 0.5173E-01
- VA DE 0.5173E-01 A 0.5748E-01
E VA DE 0.5748E-01 A 0.6323E-01
: VA DE 0.6323E-01 A 0.6899E-01

```

```

                10          20          30
                +          +          +
1 AAA+++++BBBBBBBBBBBBBBBB+++++AAA
2 AA++BBBB*****BBBB++AA
3 A++BBB***CCCCCCCCCCCC***BBB++A
4 ++BB**CCCC=====CCCC**BB++
5 ++B***CCC=====CCC**B++
6 +BB*CC==DDDDDDDD==CC**BB+
7 +B**CC==DDDD--DDDD==CC**B+
8 +B*CC==DDD-----DDD==CC*B+
9 BB*CC==DD---EEEE---DD==CC*BB
10 B*CC==DD--EEEEEEEE---DD=C*BB
11 B*CC==DD--EEEE:EEEE---DD=CC*B
12 B*CC=DD--EEE:::EEE---DD=CC*B
13 B*CC=DD--EEE:::EEE---DD=C*B
14 B*CC=D--EEE:::EEE---D=C*B
15 B*CC=D--EEE:::EEE---D=C*B
16 B*CC=D--EEE:::EEE---D=C*B
17 B*CC=D--EEE:::EEE---D=C*B
18 B*CC=D--EEE:::EEE---D=C*B
19 B*CC=DD--EEE:::EEE---DD=C*B
20 B*CC=DD--EEEE:EEEE---DD=CC*B
21 B*CC=DD--EEEE:EEEE---DD=CC*B
22 B*CC=DD--EEEEEEEE---DD=C*BB
23 BB*CC==DD---EEEE---DD==CC*BB
24 +B*CC==DDD-----DDD==CC*B+
25 +B*CC==DDDD-----DDDD==CC**B+
26 +BB*CC==DDDDDDDD==CC**BB+
27 ++B***CCC=====CCC**B++
28 ++BB**CCCC=====CCCC**BB++
29 A++BBB***CCCCCCCCCCCC***BBB++A
30 AAA++BBBB*****BBBB+++++AAA
31 AAA+++++BBBBBBBBBBBBBBBB+++++AAA

```

Figura IV.24

CONT. ANALITICA - METODO DE NEUMAN. Z= 4.00 U. R.

A	VA	DE	O.	1140E-01	A	O.	1709E-01
+	VA	DE	O.	1709E-01	A	O.	2278E-01
B	VA	DE	O.	2278E-01	A	O.	2847E-01
*	VA	DE	O.	2847E-01	A	O.	3416E-01
=	VA	DE	O.	3416E-01	A	O.	3985E-01
C	VA	DE	O.	3985E-01	A	O.	4554E-01
D	VA	DE	O.	4554E-01	A	O.	5123E-01
E	VA	DE	O.	5123E-01	A	O.	5692E-01
.	VA	DE	O.	5692E-01	A	O.	6261E-01
:	VA	DE	O.	6261E-01	A	O.	6830E-01

		10		20		30	
		+		+		+	
1	AAA	+++		BBBBBBBBBBBB		BBBB+++	AAA
2	AA	++		BBB**CCCC**		BBB**	AA
3	A	+		BBB**CCCCCCCC		BBB**	A
4	+	BB	**	CCCC		CCCC**	BB
5	+	BB	**	CCC		CCC**	BB
6	+	BB	**	CC		CC**	BB
7	+	B	**	CC		CC**	B
8	+	B	**	C		C**	B
9	BB	**		CC		CC**	BB
10	B	**		C		C**	B
11	B	**		C		C**	B
12	B	**		C		C**	B
13	B	**		C		C**	B
14	B	**		C		C**	B
15	B	**		C		C**	B
16	B	**		C		C**	B
17	B	**		C		C**	B
18	B	**		C		C**	B
19	B	**		C		C**	B
20	B	**		C		C**	B
21	B	**		C		C**	B
22	B	**		C		C**	B
23	BB	**		CC		CC**	BB
24	+	B	**	CC		CC**	B
25	+	B	**	C		C**	B
26	+	BB	**	CC		CC**	BB
27	+	BB	**	C		C**	BB
28	+	BB	**	C		C**	BB
29	A	+	BB	**	CCCCCCCC	**	BBB
30	AAA	+	BB	**	CCCCCCCC	**	BBB
31	AAA	+++		BBBBBBBBBBBB		BBBB+++	AAA

Figura IV.25

Tabla IV.5

RENGLON		16			
REAL	DIRICHLET	ERROR %	NEUMAN	ERROR %	
0.4435E-01	0.2705E-01	39.02	0.2686E-01	39.44	
0.4688E-01	0.3233E-01	31.04	0.3203E-01	31.67	
0.4943E-01	0.3727E-01	24.62	0.3690E-01	24.38	
0.5205E-01	0.4176E-01	19.76	0.4133E-01	19.59	
0.5464E-01	0.4581E-01	16.16	0.4534E-01	17.03	
0.5721E-01	0.4949E-01	13.30	0.4898E-01	14.38	
0.5971E-01	0.5284E-01	11.30	0.5231E-01	12.39	
0.6210E-01	0.5591E-01	9.98	0.5535E-01	10.88	
0.6435E-01	0.5869E-01	8.80	0.5810E-01	9.71	
0.6641E-01	0.6118E-01	7.88	0.6057E-01	8.80	
0.6825E-01	0.6337E-01	7.14	0.6274E-01	8.07	
0.6981E-01	0.6523E-01	6.36	0.6458E-01	7.49	
0.7106E-01	0.6674E-01	6.09	0.6607E-01	7.03	
0.7199E-01	0.6788E-01	5.70	0.6720E-01	6.65	
0.7255E-01	0.6863E-01	5.40	0.6795E-01	6.34	
0.7274E-01	0.6899E-01	5.13	0.6830E-01	6.10	
0.7255E-01	0.6863E-01	5.40	0.6795E-01	6.34	
0.7199E-01	0.6788E-01	5.70	0.6720E-01	6.65	
0.7106E-01	0.6674E-01	6.09	0.6607E-01	7.03	
0.6981E-01	0.6523E-01	6.36	0.6458E-01	7.49	
0.6825E-01	0.6337E-01	7.14	0.6274E-01	8.07	
0.6641E-01	0.6118E-01	7.88	0.6057E-01	8.80	
0.6435E-01	0.5869E-01	8.80	0.5810E-01	9.71	
0.6210E-01	0.5591E-01	9.98	0.5535E-01	10.88	
0.5971E-01	0.5284E-01	11.30	0.5231E-01	12.39	
0.5721E-01	0.4949E-01	13.30	0.4898E-01	14.38	
0.5464E-01	0.4581E-01	16.16	0.4534E-01	17.03	
0.5205E-01	0.4176E-01	19.76	0.4133E-01	20.39	
0.4943E-01	0.3727E-01	24.62	0.3690E-01	23.38	
0.4688E-01	0.3233E-01	31.04	0.3203E-01	31.67	
0.4435E-01	0.2705E-01	39.02	0.2686E-01	39.44	

## IV.3. PERFILES.

Para hacer la continuación analítica ascendente del efecto producido por un cuerpo bidimensional a través del segundo problema de contorno se usará la expresión II.35

$$\varphi(x, z) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(x_0, 0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + z^2}} dx_0 \quad (IV.6)$$

donde

$$\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Para los fines perseguidos en el procesamiento de funciones potenciales en Geofísica, la expresión IV.6 debe ser llevada a una forma más sencilla. Para hacer esta simplificación, IV.6 se resuelve por partes

$$\begin{aligned} \varphi(x, z) &= \frac{-1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(x_0, 0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + z^2}} dx_0 \right]_{-\infty}^{\infty} + \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(x_0, 0) (x-x_0)}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0 \end{aligned} \quad (IV.7)$$

donde

$$\omega(x_0) = \int \omega(x_0, 0) dx_0 \quad (IV.8)$$

Es fácilmente demostrable que el primer sumando de IV.7 es igual a cero, por tanto

$$\varphi(x, z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(x_0) (x-x_0)}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (IV.9)$$

El par de ecuaciones IV.9-IV.8 es el camino a seguir para realizar la continuación analítica ascendente usando la integral de Neuman.

Hay que resaltar que la función de entrada para la expresión IV.9 es la integral horizontal de la derivada vertical del efecto que se desea continuar analíticamente.

Entonces, el filtro de Neuman para la continuación analítica ascendente de perfiles es

$$N(x, z) = \frac{-x/\pi}{x^2 + z^2} \quad (\text{IV.10})$$

En la figura IV.26 se presenta la forma gráfica de este filtro para diferentes alturas de continuación. Es conveniente hacer notar que tiene una forma de convergencia completamente diferente a la del filtro de Dirichlet equivalente.

Para demostrar la veracidad del par de ecuaciones IV.8-IV.9 se desarrollan a continuación las expresiones teóricas de la continuación analítica ascendente del efecto de gravedad producido por un cilindro horizontal infinito, usando la integral de Dirichlet, ecuación II.22, y también la integral de Neuman, ecuaciones IV.8 y IV.9.

Según Nettleton (Nettleton, 1976), la componente vertical del efecto gravitacional de un cilindro horizontal infinito es

$$g_z(x, 0) = 2\pi G \rho R^2 \frac{d}{d^2 + x^2} \quad (\text{IV.11})$$

donde  $\rho$  es el contraste de densidad del cilindro al medio,  $d$  es la profundidad del centro del cilindro,  $G$  es la constante universal de gravitación,  $R$  es el radio del cilindro y  $x$  es la distancia horizontal de un punto al centro del cilindro (figura IV.27).

Haciendo  $K = 2\pi G \rho R^2$  la expresión IV.11 queda como

$$g_z(x, 0) = K \frac{d}{x^2 + d^2} \quad (\text{IV.12})$$

Introduciendo esta ecuación en II.27, la continuación analítica

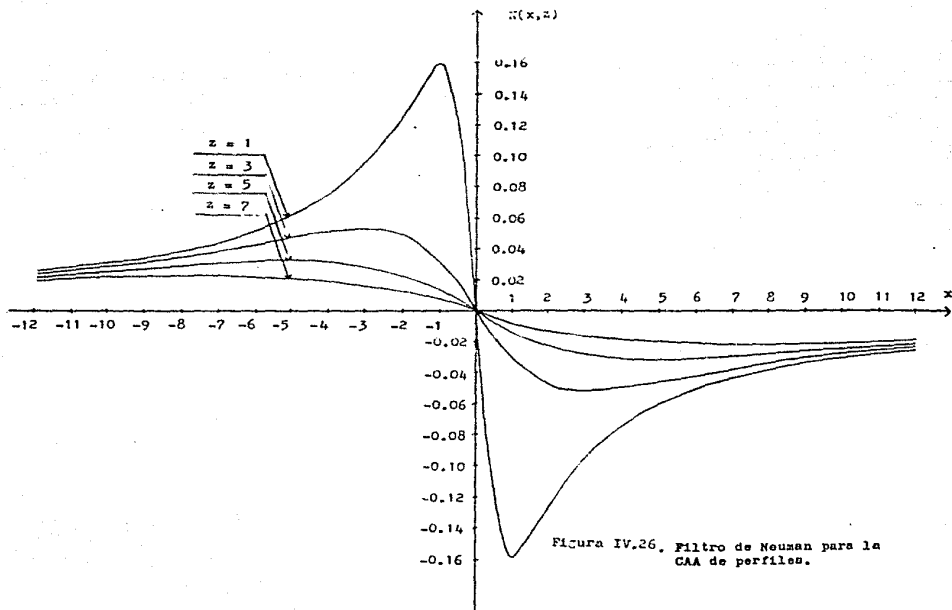


Figura IV.26. Filtro de Neuman para la CAA de perfiles.

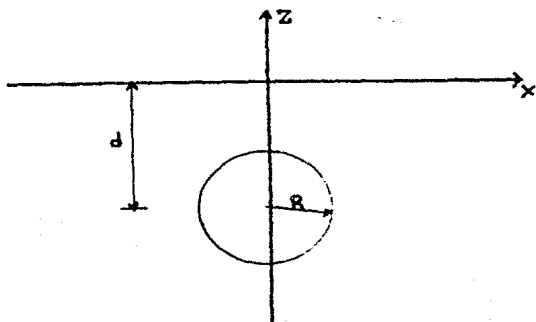


Figura IV.27

tica por la integral de Dirichlet de este efecto es

$$g_z(x, z) = \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K \frac{d}{z^2 + x^2}}{(x-x_0)^2 + z^2} dx \quad (\text{IV.13})$$

cuya solución es

$$g_z(x, z) = K [Bz + d(Cx + D)] \quad (\text{IV.14})$$

donde

$$B = \frac{z^2 + x^2 - d^2}{(z^2 + x^2)^2 + d^2(z^2 + 2x^2 - 2z^2)} \quad (\text{IV.15})$$

$$C = \left[ \frac{-2x}{z^2 + x^2 - d^2} \right] B \quad (\text{IV.16})$$

$$D = \left[ \frac{d^2 + 3x^2 - z^2}{z^2 + x^2 - d^2} \right] B \quad (\text{IV.17})$$

$d$ ,  $K$ ,  $x$  y  $z$  son las mismas variables definidas previamente.

Las ecuaciones IV.14 a IV.17 representan la continuación analítica, a través de la integral de Dirichlet, del efecto producido por el cilindro en cuestión.



La continuación analítica del mismo efecto pero usando la integral de Neuman, ecuaciones IV.8 y IV.9 es

$$g_z(x, z) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left( \frac{K \cdot z_0}{z_0^2 - x^2} \right) (x - x_0)}{(x - x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (\text{IV.18})$$

cuya solución es

$$g_z(x, z) = K \left[ \frac{B' - B''x}{d} + \frac{C'x - C''x^2 + D' - D''x}{z} \right] \quad (\text{IV.19})$$

donde

$$B' = \frac{-d^2(x^2 + z^2 - d^2)}{4x^2d^2 + (x^2 + z^2 - d^2)^2} \quad (\text{IV.20})$$

$$C' = \left[ \frac{-2x}{x^2 + z^2 - d^2} \right] B' \quad (\text{IV.21})$$

$$D' = \left[ \frac{-(x^2 + z^2)}{d^2} \right] B' \quad (\text{IV.22})$$

$$B'' = \frac{-2x d^2}{4x^2 d^2 + (d^2 - x^2 - z^2)^2} \quad (\text{IV.23})$$

$$C'' = \frac{d^2 - x^2 - z^2}{4x^2 d^2 + (d^2 - x^2 - z^2)^2} \quad (\text{IV.24})$$

$$D'' = \left[ \frac{-(x^2 + z^2)}{d^2} \right] B'' \quad (\text{IV.25})$$

Las expresiones IV.19 a IV.25 representan el efecto continuo del cilindro a través de la integral de Neuman.

En las tablas IV.C a IV.8 se hace una comparación numérica -

Tabla IV.6

d= 5, z= 1			
$\pm x$	REAL	DIRICHLET	NEUMAN
0	0.1667 K	0.1667 K	0.1667 K
1	0.1622 K	0.1622 K	0.1622 K
2	0.1500 K	0.1500 K	0.1500 K
3	0.1333 K	0.1333 K	0.1333 K
4	0.1154 K	0.1154 K	0.1154 K
5	0.0984 K	0.0984 K	0.0984 K
6	0.0833 K	0.0833 K	0.0833 K
7	0.0706 K	0.0706 K	0.0706 K
8	0.0600 K	0.0600 K	0.0600 K
9	0.0513 K	0.0513 K	0.0513 K
10	0.0441 K	0.0441 K	0.0441 K

Tabla IV.7

d= 5, z= 2.5			
$\pm x$	REAL	DIRICHLET	NEUMAN
0	0.1333 K	0.1333 K	0.1333 K
1	0.1310 K	0.1310 K	0.1310 K
2	0.1245 K	0.1245 K	0.1245 K
3	0.1149 K	0.1149 K	0.1149 K
4	0.1038 K	0.1038 K	0.1038 K
5	0.0923 K	0.0923 K	0.0923 K
6	0.0813 K	0.0813 K	0.0813 K
7	0.0713 K	0.0713 K	0.0713 K
8	0.0624 K	0.0624 K	0.0624 K
9	0.0546 K	0.0546 K	0.0546 K
10	0.0480 K	0.0480 K	0.0480 K

Tabla IV.8

d= 5, z= 4			
$\frac{z}{x}$	REAL	DIRICHLET	NUMER
0	0.1111 K	0.1111 K	0.1111 K
1	0.1098 K	0.1098 K	0.1098 K
2	0.1059 K	0.1059 K	0.1059 K
3	0.1000 K	0.1000 K	0.1000 K
4	0.0928 K	0.0928 K	0.0928 K
5	0.0849 K	0.0849 K	0.0849 K
6	0.0769 K	0.0769 K	0.0769 K
7	0.0692 K	0.0692 K	0.0692 K
8	0.0621 K	0.0621 K	0.0621 K
9	0.0556 K	0.0556 K	0.0556 K
10	0.0497 K	0.0497 K	0.0497 K

de los resultados de la continuación analítica usando ambas integrales y el valor real. La exactitud de todos los valores refuerza la validez del par de ecuaciones IV.5-IV.9.

El primer problema a que hay que enfrentarse para hacer una continuación analítica por este camino es encontrar la función

$$v(x) = \int \omega(x,0) dx$$

pues se trata de una función de  $x$  y no un número, caso que se tendría si la integral anterior tuviera límites de integración.

Para resolver este problema se siguió la siguiente secuencia de pasos:

a).- Se hizo un ajuste polinomial de la función  $\omega(x,0)$

$$\omega(x,0) \doteq a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (IV.26)$$

b).- Usando un método similar al de Horner para derivar polinomios (Burton, Fairer and Reynolds, 1971), se hizo la integral - sobre x

$$\int \omega(x,0) dx = \dots + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \dots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \quad (IV.27)$$

Esta integral es válida pues no tiene una constante arbitraria de integración.

Para hacer el ajuste polinomial de la función  $\omega(x,0)$  se modificó el programa de ajuste por mínimos cuadrados publicado por Gangi y Shapiro (Gangi and Shapiro, 1977).

Se dijo previamente que para comparar numéricamente los procesos de continuación analítica de perfiles usando las integrales de Dirichlet y Neuman se usará el efecto de un cilindro horizontal infinito. En las figuras IV.28 y IV.29 se presenta la forma - gráfica de la componente vertical de la gravedad producida por el cilindro y su derivada vertical respectivamente.

De estas dos figuras se desprende que para hacer un ajuste - polinomial de la derivada vertical del cilindro se necesitará un polinomio de mayor grado que el que se usa para hacer el ajuste - de la componente vertical. Este polinomio tendrá un carácter oscilatorio muy marcado y su integral horizontal reflejará un error - mayor que el que presente la integral de la componente vertical, - además del error que presente el proceso numérico seguido para - calcular la derivada vertical. Es por estas razones que en este - trabajo sólo se hará la continuación analítica de perfiles con la integral de Neuman bajo la modalidad de la función potencial, es decir, que la función de entrada para el par de ecuaciones IV.8 - IV.9 será la componente vertical del efecto producido por el cilindro.

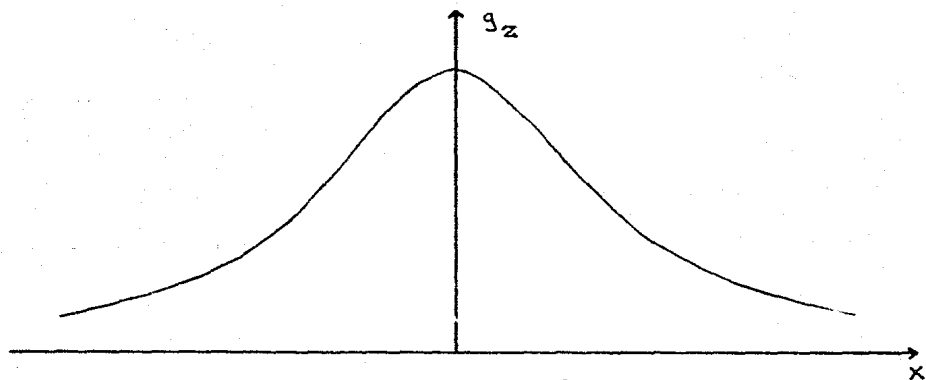


Figura IV.28

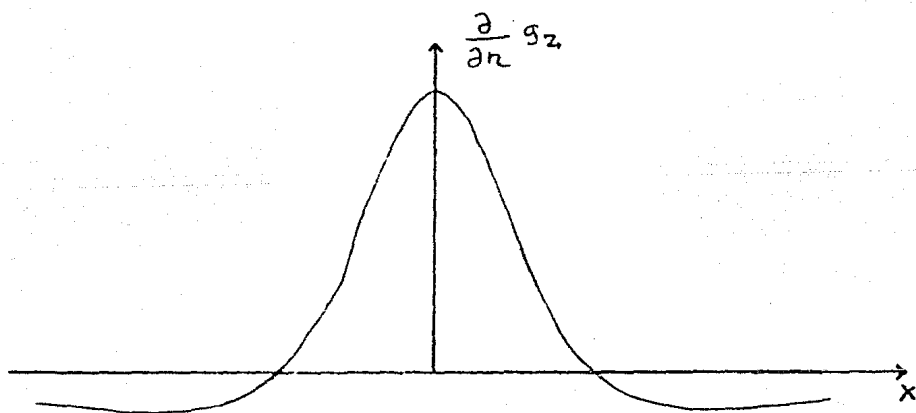


Figura IV.29

Para resolver numéricamente la integral IV.29

$$\varphi(x, z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x_0) (x-x_0)}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0$$

se siguió un camino paralelo al propuesto por Tsey para la integral de Dirichlet (Tsey, 1979).

Si el filtro de Neuman es

$$N(x, z) = \frac{-x/\pi}{x^2 + z^2}$$

en su forma discreta se presenta como

$$N(m \Delta x, z) = \frac{-m/\pi}{m^2 + z^2} \quad (\text{IV.28})$$

donde  $z' = z/\Delta x$ , y la forma discreta de la integral es

$$\varphi(j \Delta x, z) = \sum_m N_m v(j \Delta x - m \Delta x) \quad (\text{IV.29})$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

#### IV.3.1. FUNCION POTENCIAL.

Las características físicas del cilindro usado para comparar numéricamente la continuación analítica de perfiles con las integrales de Dirichlet y Neuman son:

contraste de densidad  $2.5 \text{ g/cm}^3$ ,

profundidad del centro 8 m y

radio 2 m.

En la figura IV.30 se muestra el resultado del ajuste por mí nimos cuadrados del efecto.

La expresión de la integral sobre  $x$  del efecto del cilindro

es

$$v(x) = 2\pi \rho^2 \operatorname{angtn} \left( \frac{x}{z} \right) \quad (\text{IV.30})$$

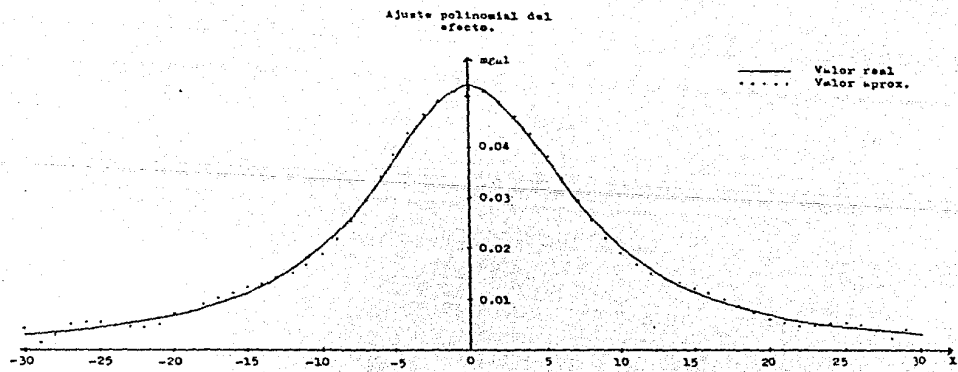


Figura IV.30

En la figura IV.31 se muestra una comparación del valor real de dicha integral y de los valores calculados numéricamente.

Como ya se explicó, si la entrada a la integral de Neuman es una función  $\phi$ , la salida es una función potencial  $U$ . En este caso la función de entrada es  $g_z$  del cilindro infinito, entonces la salida deberá ser una función potencial  $U$  continuada  $z$  unidades hacia arriba.

Esta función potencial es producida por un cuerpo que tiene una dimensión infinita, por lo que no será un potencial newtoniano, será un potencial logarítmico de la forma (Sternberg and Smith, 1964)

$$U = -c \ln \frac{1}{r} \quad (\text{IV.31})$$

potencial que no se anula en el infinito (Tijonov y Samarsky, 1985).

Las figuras IV.32 y IV.33 presentan la función potencial continuada a  $z=1$  y  $z=2$  unidades. Su comportamiento es acorde a la expresión IV.31.

#### IV.3.2. COMPARACION DE RESULTADOS.

Para el modelo cilíndrico ya explicado se hicieron continuaciones analíticas a 2, 3 y 4 unidades hacia arriba y los resultados de la comparación entre las integrales de Dirichlet y Neuman con el valor real se presentan en las tablas IV.9 a IV.11.

En las figuras IV.34 a IV.36 se muestra el resultado de la continuación analítica por Neuman y el valor real.

De estas tablas y figuras se observan los siguientes hechos:  
a).- Los resultados arrojados por el proceso de Dirichlet -



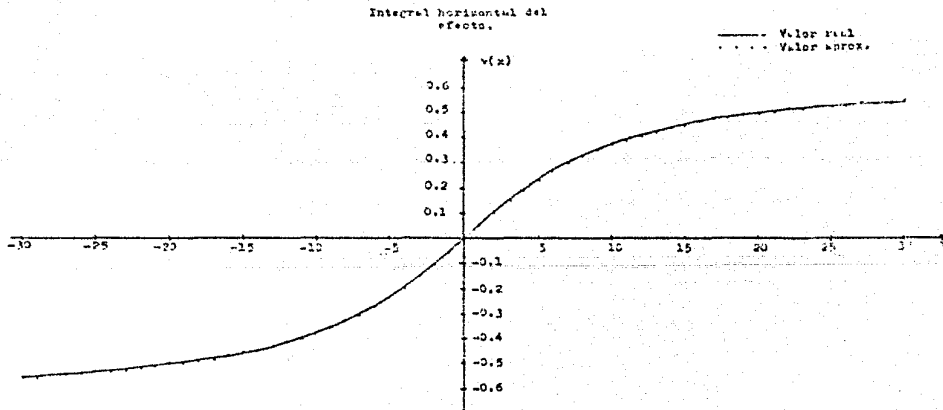


Figura IV.31

FUNCION POTENCIAL CONTINUADA  
A  $z=1$

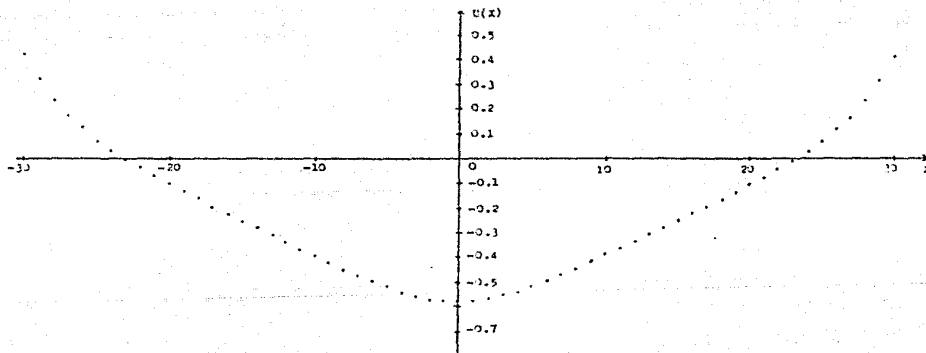


Figura IV.32

FUNCIÓN POTENCIAL CONTINUADA  
A  $z=1$

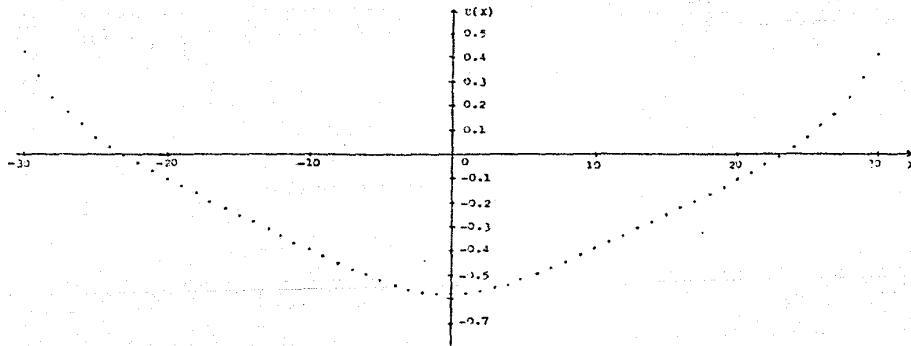


Figura IV.32

FUNCIÓN POTENCIAL CONTINUADA  
A  $z=2$

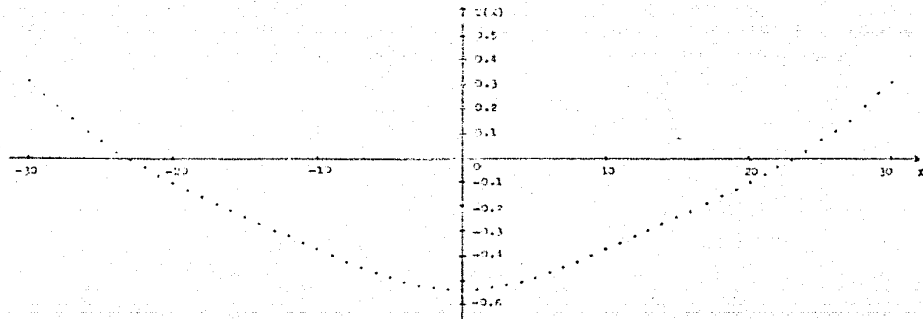


Figura IV.33

son mucho más exactos que los que se obtienen usando el proceso - de Neuman.

b).- El perfil continuado por Neuman no es exactamente simétrico, debiéndose esto al ajuste polinomial.

c).- El error tan grande que se presenta en los extremos de los perfiles continuados por Neuman se debe a que la función  $V(x)$ , definida por la expresión IV.30, no converge a cero sino a  $\frac{\pi^2}{24}R^2$ .

d).- El error en los extremos de los perfiles obtenidos con el proceso de Neuman disminuye a medida que la altura de continuación aumenta. Este comportamiento se atribuye a que para alturas mayores de continuación, el filtro de Neuman converge más rápidamente (figura IV.26).

Tabla IV.9

CONTINUACION ANALITICA A 2 UNIDADES

REAL	DIRICHLET	ERR(%)	NEUMAN	ERR(%)
4.1890E-03	3.0485E-03	27.22	-7.9025E-02	1986.48
4.4516E-03	3.6863E-03	17.19	-5.1910E-02	1266.09
4.7387E-03	4.2053E-03	11.25	-2.9928E-02	731.57
5.0531E-03	4.6593E-03	7.79	-1.6908E-02	434.60
5.3982E-03	5.0928E-03	5.65	-9.3280E-03	272.79
5.7779E-03	5.5318E-03	4.25	-4.7487E-03	182.18
6.1967E-03	5.9925E-03	3.29	-1.8247E-03	129.44
6.6525E-03	6.4862E-03	2.60	2.2776E-04	96.58
7.1729E-03	7.0227E-03	2.09	1.8678E-03	73.96
7.7431E-03	7.6109E-03	1.70	3.3527E-03	56.69
8.3780E-03	8.2603E-03	1.40	4.7979E-03	42.73
9.0868E-03	8.9807E-03	1.16	6.2390E-03	31.40
9.8697E-03	9.7832E-03	0.97	7.6402E-03	22.66
1.0769E-02	1.0680E-02	0.82	8.9977E-03	16.44
1.1767E-02	1.1685E-02	0.69	1.0292E-02	12.52
1.2889E-02	1.2813E-02	0.59	1.1547E-02	10.41
1.4152E-02	1.4081E-02	0.50	1.2811E-02	9.47
1.5573E-02	1.5505E-02	0.43	1.4155E-02	9.09
1.7168E-02	1.7104E-02	0.37	1.5659E-02	8.78
1.8955E-02	1.8894E-02	0.32	1.7394E-02	8.23
2.0945E-02	2.0887E-02	0.27	1.9414E-02	7.30
2.3144E-02	2.3088E-02	0.24	2.1731E-02	6.10
2.5543E-02	2.5489E-02	0.21	2.4316E-02	4.80
2.8114E-02	2.8062E-02	0.18	2.7099E-02	3.60
3.0801E-02	3.0750E-02	0.16	2.9939E-02	2.70
3.3512E-02	3.3462E-02	0.14	3.2782E-02	2.17
3.6112E-02	3.6063E-02	0.13	3.5375E-02	2.04
3.8431E-02	3.8383E-02	0.12	3.7599E-02	2.16
4.0279E-02	4.0231E-02	0.11	3.9297E-02	2.43
4.1475E-02	4.1428E-02	0.11	4.0358E-02	2.69
4.1890E-02	4.1842E-02	0.11	4.0718E-02	2.79
4.1475E-02	4.1428E-02	0.11	4.0339E-02	2.73
4.0279E-02	4.0231E-02	0.11	3.9262E-02	2.52
3.8431E-02	3.8383E-02	0.12	3.7557E-02	2.27
3.6112E-02	3.6063E-02	0.13	3.5340E-02	2.13
3.3512E-02	3.3462E-02	0.14	3.2759E-02	2.24
3.0801E-02	3.0750E-02	0.16	2.9971E-02	2.69
2.8114E-02	2.8062E-02	0.18	2.7126E-02	3.51
2.5543E-02	2.5489E-02	0.21	2.4367E-02	4.59
2.3144E-02	2.3088E-02	0.24	2.1799E-02	5.80
2.0945E-02	2.0887E-02	0.27	1.9488E-02	6.95
1.8955E-02	1.8894E-02	0.32	1.7457E-02	7.89
1.7168E-02	1.7104E-02	0.37	1.5694E-02	8.58
1.5573E-02	1.5505E-02	0.43	1.4153E-02	9.11

Table IV.3  
(Continued)

REAL	DIRICHLET	ERROR	NEUMAN	EFF (%)
1.4152E-02	1.4081E-02	0.50	1.2786E-02	9.79
1.2889E-02	1.2813E-02	0.59	1.1462E-02	11.06
1.1767E-02	1.1685E-02	0.69	1.0183E-02	13.45
1.0769E-02	1.0680E-02	0.82	8.8672E-03	17.47
9.8797E-03	9.7832E-03	0.97	7.5608E-03	22.47
9.0868E-03	8.9877E-03	1.16	6.2096E-03	31.66
8.3780E-03	8.2603E-03	1.40	4.8480E-03	42.13
7.7431E-03	7.6109E-03	1.70	3.4727E-03	55.15
7.1729E-03	7.0227E-03	2.09	2.0295E-03	71.70
6.6598E-03	6.4862E-03	2.60	3.8156E-04	94.27
6.1967E-03	5.9925E-03	3.29	-1.7385E-03	128.02
5.7779E-03	5.5318E-03	4.25	-4.7626E-03	182.42
5.3982E-03	5.0928E-03	5.68	-9.4152E-03	274.41
5.0531E-03	4.6593E-03	7.79	-1.8452E-02	435.49
4.7387E-03	4.2053E-03	11.25	-2.9771E-02	728.26
4.4516E-03	3.6863E-03	17.19	-5.1575E-02	1258.57
4.1890E-03	3.0485E-03	27.22	-7.8924E-02	1964.09

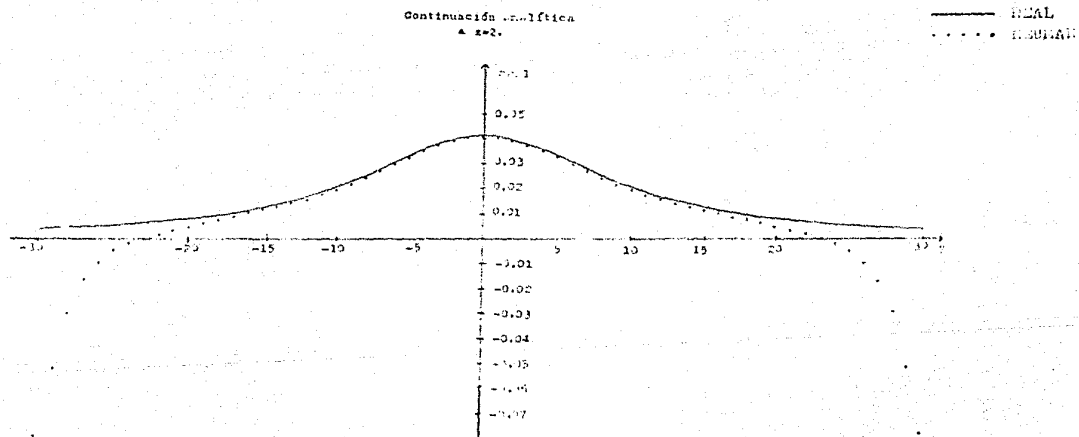


Figura IV.34



Table IV.10

CONTINUACION ANALITICA A 3 UNIDADES

REAL	DIRICHLET	ERR(%)	NEUMAN	ERR(%)
4.5131E-03	3.3706E-03	25.31	-5.2767E-02	1269.19
4.7899E-03	3.9133E-03	18.30	-4.2378E-02	984.73
5.0916E-03	4.4200E-03	13.19	-2.9924E-02	687.72
5.4211E-03	4.8958E-03	9.68	-1.9865E-02	486.82
5.7816E-03	5.3597E-03	7.29	-1.2736E-02	320.29
6.1768E-03	5.8293E-03	5.62	-7.7691E-03	225.77
6.6111E-03	6.3183E-03	4.42	-4.6492E-03	164.27
7.0891E-03	6.8379E-03	3.54	-1.6312E-03	125.01
7.6144E-03	7.3973E-03	2.87	4.5744E-04	93.99
8.1991E-03	8.0054E-03	2.36	2.2513E-05	72.04
8.8443E-03	8.6711E-03	1.95	3.6354E-03	56.06
9.5600E-03	9.4033E-03	1.63	5.4254E-03	43.24
1.0355E-02	1.0212E-02	1.37	6.8961E-03	33.40
1.1239E-02	1.1107E-02	1.16	8.3096E-03	26.06
1.2223E-02	1.2101E-02	0.99	9.6764E-03	20.83
1.3318E-02	1.3204E-02	0.85	1.1020E-02	17.24
1.4536E-02	1.4427E-02	0.73	1.2380E-02	14.83
1.5889E-02	1.5789E-02	0.63	1.3803E-02	13.12
1.7388E-02	1.7293E-02	0.54	1.5340E-02	11.77
1.9041E-02	1.8950E-02	0.47	1.7038E-02	10.51
2.0850E-02	2.0763E-02	0.41	1.8934E-02	9.23
2.2811E-02	2.2727E-02	0.36	2.0999E-02	7.94
2.4908E-02	2.4826E-02	0.32	2.3239E-02	6.69
2.7105E-02	2.7026E-02	0.29	2.5684E-02	5.61
2.9350E-02	2.9273E-02	0.26	2.7951E-02	4.76
3.1561E-02	3.1486E-02	0.23	3.0225E-02	4.19
3.3634E-02	3.3560E-02	0.21	3.2319E-02	3.91
3.5445E-02	3.5372E-02	0.20	3.4095E-02	3.63
3.6863E-02	3.6791E-02	0.19	3.5430E-02	3.38
3.7770E-02	3.7698E-02	0.19	3.6271E-02	3.16
3.8082E-02	3.8010E-02	0.18	3.6552E-02	4.01
3.7770E-02	3.7698E-02	0.19	3.6256E-02	4.00
3.6863E-02	3.6791E-02	0.19	3.5411E-02	3.93
3.5445E-02	3.5372E-02	0.20	3.4063E-02	3.89
3.3634E-02	3.3560E-02	0.21	3.2299E-02	3.76
3.1561E-02	3.1486E-02	0.23	3.0225E-02	4.23
2.9350E-02	2.9273E-02	0.26	2.7958E-02	4.74
2.7105E-02	2.7026E-02	0.29	2.5605E-02	5.53
2.4908E-02	2.4826E-02	0.32	2.3275E-02	6.55
2.2811E-02	2.2727E-02	0.36	2.1044E-02	7.74
2.0850E-02	2.0763E-02	0.41	1.8971E-02	9.01
1.9041E-02	1.8950E-02	0.47	1.7077E-02	10.31
1.7388E-02	1.7293E-02	0.54	1.5362E-02	11.65
1.5889E-02	1.5789E-02	0.63	1.3799E-02	13.15

Tabla IV.10  
(Continuación)

REAL	DIRICHLET	ERR(%)	NEUMAN	ERR(%)
1.4536E-02	1.4429E-02	0.73	1.2349E-02	15.04
1.3318E-02	1.3204E-02	0.85	1.0967E-02	17.64
1.2223E-02	1.2101E-02	0.99	9.6107E-03	21.36
1.1239E-02	1.1107E-02	1.16	8.2471E-03	26.61
1.0355E-02	1.0212E-02	1.37	6.8547E-03	33.80
9.5600E-03	9.4033E-03	1.63	5.4167E-03	43.31
8.8443E-03	8.6711E-03	1.95	3.9223E-03	55.65
8.1771E-03	8.0054E-03	2.36	2.3268E-03	71.62
7.6164E-03	7.3973E-03	2.87	5.5432E-04	92.72
7.0891E-03	6.8379E-03	3.54	-1.5392E-03	121.71
6.6111E-03	6.3183E-03	4.42	-4.1687E-03	163.35
6.1766E-03	5.8293E-03	5.62	-7.7500E-03	225.47
5.7816E-03	5.3597E-03	7.29	-1.2740E-02	320.36
5.4211E-03	4.8956E-03	9.68	-1.9863E-02	466.41
5.0916E-03	4.4200E-03	13.19	-2.9835E-02	685.97
4.7899E-03	3.9133E-03	18.30	-4.2258E-02	982.24
4.5131E-03	3.3706E-03	25.31	-5.2719E-02	1268.14

Continuación analítica  
 $n=3$ .

— REAL  
..... NEUMAN

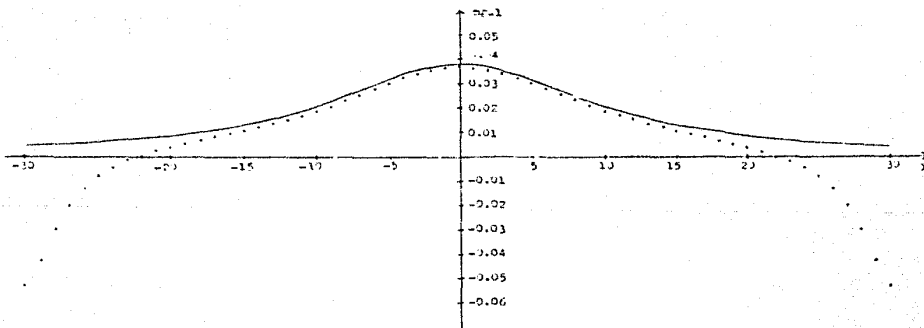


Figura IV-35

Table IV.11

CONTINUATION ANALYTICA 4 UNIDADES

REAL	DIRICHLET	ERR(%)	NEUMAN	ERR(%)
4.8149E-03	2.6989E-03	23.17	-3.8305E-02	905.94
5.1034E-03	4.1644E-03	12.00	-3.3795E-02	762.22
5.4168E-03	4.6673E-03	13.83	-2.6661E-02	592.19
5.7581E-03	5.1437E-03	10.66	-1.9692E-02	441.99
6.1302E-03	5.6203E-03	3.31	-1.3372E-02	326.29
6.5368E-03	6.1068E-03	6.57	-9.3034E-03	242.32
6.9817E-03	6.6100E-03	3.21	-5.7587E-03	182.48
7.4692E-03	7.1496E-03	4.27	-2.9581E-03	139.60
8.0045E-03	7.7222E-03	3.51	-6.8187E-04	108.26
8.5928E-03	8.3425E-03	2.91	1.3063E-03	84.79
9.2404E-03	9.0154E-03	2.43	3.0652E-03	66.82
9.9541E-03	9.7498E-03	2.05	4.6868E-03	52.91
1.0741E-02	1.0554E-02	1.73	6.2137E-03	42.14
1.1609E-02	1.1437E-02	1.48	7.6726E-03	33.90
1.2567E-02	1.2407E-02	1.27	9.0662E-03	27.69
1.3623E-02	1.3473E-02	1.09	1.0478E-02	23.07
1.4785E-02	1.4644E-02	0.95	1.1882E-02	19.63
1.6060E-02	1.5927E-02	0.82	1.3328E-02	17.01
1.7454E-02	1.7328E-02	0.72	1.4852E-02	14.90
1.8969E-02	1.8849E-02	0.63	1.6481E-02	13.11
2.0602E-02	2.0486E-02	0.56	1.8228E-02	11.52
2.2341E-02	2.2230E-02	0.49	2.0090E-02	10.07
2.4167E-02	2.4060E-02	0.44	2.2044E-02	8.78
2.6046E-02	2.5941E-02	0.40	2.4041E-02	7.69
2.7927E-02	2.7825E-02	0.36	2.6018E-02	6.83
2.9744E-02	2.9645E-02	0.33	2.7899E-02	6.20
3.1418E-02	3.1319E-02	0.31	2.9563E-02	5.80
3.2855E-02	3.2758E-02	0.29	3.1018E-02	5.58
3.3965E-02	3.3869E-02	0.28	3.2097E-02	5.49
3.4668E-02	3.4572E-02	0.27	3.2769E-02	5.47
3.4908E-02	3.4813E-02	0.27	3.2995E-02	5.47
3.4666E-02	3.4572E-02	0.27	3.2763E-02	5.49
3.3965E-02	3.3869E-02	0.28	3.2086E-02	5.52
3.2855E-02	3.2758E-02	0.29	3.1006E-02	5.62
3.1418E-02	3.1319E-02	0.31	2.9583E-02	5.83
2.9744E-02	2.9645E-02	0.33	2.7895E-02	6.21
2.7927E-02	2.7825E-02	0.36	2.6024E-02	6.81
2.6046E-02	2.5941E-02	0.40	2.4056E-02	7.63
2.4167E-02	2.4060E-02	0.44	2.2067E-02	8.68
2.2341E-02	2.2230E-02	0.49	2.0120E-02	9.94
2.0602E-02	2.0486E-02	0.56	1.8257E-02	11.37
1.8969E-02	1.8849E-02	0.63	1.6504E-02	12.99
1.7454E-02	1.7328E-02	0.72	1.4864E-02	14.83
1.6060E-02	1.5927E-02	0.82	1.3324E-02	17.03

Table IV.11  
(Continued)

REAL	DIRICHLET	ERR(%)	NEUMAN	ERR(%)
1.4785E-02	1.4644E-02	0.95	1.1862E-02	19.76
1.3623E-02	1.3473E-02	1.02	1.0446E-02	23.31
1.2567E-02	1.2407E-02	1.27	9.0477E-03	28.00
1.1609E-02	1.1437E-02	1.48	7.6380E-03	34.20
1.0741E-02	1.0554E-02	1.73	6.1931E-03	42.34
9.9541E-03	9.7498E-03	2.05	4.6880E-03	52.90
9.2404E-03	9.0154E-03	2.48	3.0921E-03	66.53
8.5629E-03	8.3425E-03	2.91	1.3558E-03	84.22
8.0045E-03	7.7232E-03	3.51	-8.0023E-04	107.47
7.4692E-03	7.1496E-03	4.27	-2.6973E-03	139.79
6.9817E-03	6.6136E-03	5.27	-5.7117E-03	181.81
6.5368E-03	6.1068E-03	6.57	-9.2731E-03	241.86
6.1302E-03	5.6202E-03	8.31	-1.3249E-02	325.92
5.7581E-03	5.1437E-03	10.66	-1.9659E-02	441.42
5.4168E-03	4.6673E-03	13.93	-2.6609E-02	591.24
5.1034E-03	4.1844E-03	18.00	-3.3741E-02	761.16
4.8149E-03	3.6989E-03	22.17	-3.8781E-02	905.44

Continuación analítica  
a  $z=4$ .

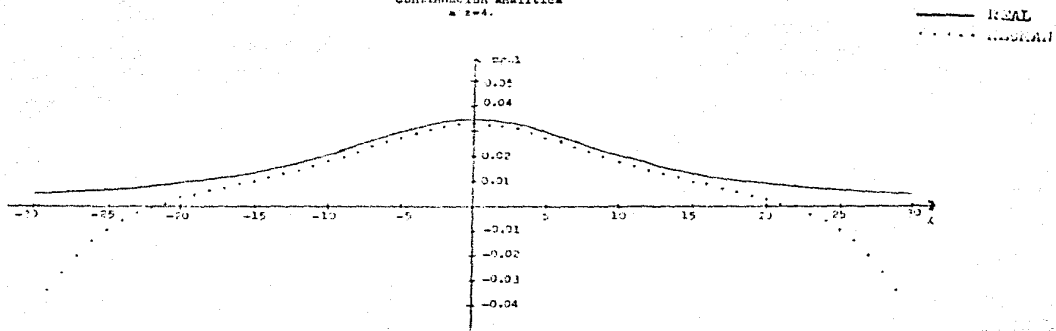


Figura IV.36

## CONCLUSIONES

A partir de las tablas comparativas y gráficas presentadas a lo largo de este trabajo, se puede concluir que:

a).- Es posible realizar la continuación analítica ascendente usando las integrales de Neuman para el plano infinito y el semiplano.

b).- Con la integral de Neuman siempre hay que realizar al menos dos procesos numéricos para llegar a resultados finales.

c).- Existen al menos dos caminos para hacer la continuación analítica siguiendo las integrales de Neuman, a partir de la primera derivada vertical y con la función potencial.

d).- Ya que cuando se hace una continuación analítica para un mapa a partir de la primera derivada vertical se obtienen mejores resultados que con el proceso convencional, método de Dirichlet, se abre una nueva opción de cálculo, siempre y cuando se cuente con un buen filtro de primera derivada vertical.

e).- Es conveniente estudiar a fondo la función potencial continuada que se obtiene con las integrales de Neuman, pues en este trabajo sólo se delineó y no se exploraron todas sus posibilidades, una de las cuales puede ser en la interpretación de datos magnéticos encontrar el potencial del cual proviene el efecto, que sería una operación equivalente a la Reducción al Polo, tanto para mapas como para perfiles.

f).- Si se desarrollan métodos de interpretación en base a la función potencial se evitaría tener que realizar un segundo proceso, disminuyendo así el error final.

g).- Para mejorar los resultados obtenidos en el cálculo de la continuación analítica para perfiles por la integral de Neuman, hay que cambiar el método de ajuste polinomial por uno que no pre

sente un comportamiento oscilatorio tan marcado, por ejemplo funciones Spline.

h).- En general, para reducir el error en todos los resultados numéricos que se presentaron a lo largo de este trabajo, se propone el uso de funciones ventada en los procesos de muestreo, para que con ello el espectro de Fourier de las funciones muestreadas se vea lo menos distorsionado posible, lo que redundará en una exactitud más grande.



## BIBLIOGRAFIA

- BRANDI PURATA, JUAN, y CHAVEZ CASTELLANCO, FECTOR. 1955.  
 "COMPARACION DEL PROCESO DE CORRELACION ANALITICA POR MEDIO DE LAS INTEGRALES DE DIRICHLET Y NEUMAN"  
 BOLETIN DE LA A. M. G. S., 25, 1-32.
- BRIGHAN, E. GRAN. 1974.  
 "THE FAST FOURIER TRANSFORM"  
 PRENTICE-HALL, NEW JERSEY, 252 pp.
- BURDEN, RICHARD L., FAIRLES, J. DOUGLAS, and REYNOLDS, ALBERT C.  
 1978.  
 "NUMERICAL ANALYSIS"  
 BOSTON, PRINDLE, WEBER and SMITH, 598 pp.
- CHURCHILL, RUEL V. 1960.  
 "COMPLEX VARIABLES AND APPLICATIONS"  
 TOKYO, MCGRAW-HILL, 297 pp.
- DEAN, WILLIAM C. 1958.  
 "FREQUENCY ANALYSIS FOR GRAVITY AND MAGNETIC INTERFERETATION"  
 GEOPHYSICS, 23, 97-127.
- FULLER, B. D. 1967.  
 "TWO-DIMENSIONAL FREQUENCY ANALYSIS AND DESIGN OF GRID OPERATORS"  
 MINING GEOPHYSICS, 2, 658-708.
- GANGI, ANTHONY F. , and SHAPIRO, JAMES N. 1977.  
 "A PROPAGATING ALGORITHM FOR DETERMINING NTH-ORDER POLYNOMIAL,  
 LEAST-SQUARES FITS"  
 GEOPHYSICS, 42, 1265-1276.
- HENDERSON, ROLAND G. 1960.  
 "A COMPREHENSIVE SYSTEM OF AUTOMATIC COMPUTATION IN MAGNETIC  
 AND GRAVITY INTERFERETATION"  
 GEOPHYSICS, 25, 569-585.

- HENDERSON, ROLAND G. 1970.  
"ON THE VALIDITY OF THE USE OF THE UPWARD CONTINUATION INTEGRAL  
FOR TOTAL MAGNETIC INTENSITY DATA"  
GEOPHYSICS, 35, 916-919.
- KELLOGG, OLIVER DIMON. 1955.  
"FOUNDATIONS OF POTENTIAL THEORY"  
NEW YORK, DOVER, 304 pp.
- LEVI, ENZO. 1980.  
"TEORIAS Y METODOS DE LAS MATEMATICAS APLICADAS"  
MEXICO, U. N. A. M., 228 pp.
- MIRONOV, V. S. 1977.  
"CURSO DE PROSPECCION GRAVIMETRICA"  
BARCELONA, REVERTE, 525 pp.
- NEPPELTON, L. L. 1975.  
"GRAVITY AND MAGNETICS IN OIL PROSPECTING"  
McGRAW-HILL, 464 pp.
- SPIEGEL, MURRAY R. 1971.  
"VARIABLE COMPLEJA"  
MEXICO, McGRAW-HILL, 318 pp.
- STERNBERG, WOLFGANG, and SMITH, TURNER L. 1964.  
"THE THEORY OF POTENTIAL AND SPHERICAL HARMONICS"  
TORONTO, UNIVERSITY OF TORONTO PRESS, 312 pp.
- TIJONOV, A. N., y SAMARSKY, A. A. 1985.  
"ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA"  
MOSCU, MIR, 768 pp.
- TSAY, L. J. 1973.  
"A SPATIAL ANALYSIS OF UPWARD CONTINUATION OF POTENTIAL FIELD  
DATA"  
GEOPHYSICS, 26, 822-840.