2ej
27

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"ACERCA DEL FORMALISMO EN MATEMATICAS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE MATEMATICO

P R E S E N T A

JUAN TAMAYO ZARAGOZA

MEXICO D.F. 1987

CONTENIDO

I N T R O D U C C I O N .

Este trabajo está orientado a esclarecer algunos es-- pectos sobre el tema del rigor matemático que consideramos importante en el proceso de enseñanza-aprendisaje enfocado desde el punto de vista del papel que juega el "forma-- lismo" en la enseñansa y desarrollo de las matemáticas. - Para ello describimos brevemente, en parrafos posteriores, tres momentos históricos que han sido críticos en el proceso y desarrollo de las matemáticas.

La razón de hacerlo de ese modo estriba en las si---- guientes consideraciones: primera, tener una idea general de que los resultados de la matemática no se dan de manera espontánea y mucho menos se presentan en forma acabada, antes bien, cada avance tiene como antecedente, en sus resultados, un sin número de tropiezos y esfuerzos realizados a veces por generaciones enteras de matemáticos.

La segunda, tiene como finalidad mostrar que lo que - conocemos como "formalismo" es una de las escuelas que surge a raíz de la tercera crísis de las matemáticas y que -- en la actualidad juega un papel muy importante no solo en- la formación y desarrollo de las matemáticas sino además,- podríamos decir, en otros campos importantes del pensamiento, razón por la cual existe un gran número de adeptos a - este campo.

La primera crísis se remontaría a la matemática griega en el siglo VI, A.C., con Thales de Mileto (640 o 629), Pitágoras y sus descípulos. Así, en el siglo V a.c aparecen dos hechos que originaron esta primera crísis. El primero, trata de los inconmensurables, por ejemplo que en un cuadrado su diagonal no puede ser medida por cualquier parte alícuota del lado del cuadrado (de donde refiere Platón en su diálogo "Teetetos" que Teodoro probó la irracionalidad de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}, \ldots, \sqrt{17}$). El segundo es referente a las paradojas de Zenón de Elea (495-435 a.c.), como ejemplo de estas paradojas se puede citar la de Aquiles y la tortuga.

La segunda crísis en los fundamentos de las matemáticas es originada a raíz del uso de los infinitesimales, la cual fué resuelta por A. Cauchy en las décadas de los años 20-30 del siglo XIX al sustituirlos por el método de límites introduciendo un concepto más preciso de límite, en el que establece que;

> "...Los valores sucesivos atribuídos a una variable que se aproxima indefinidamente a un valor fijo tanto como se quiera, éste último es llamado el límite de todos los otros" (3).

Ya antes muchos matemáticos consideraban un infinitesimal como un número fijo muy pequeño, Cauchy lo define claramente como una variable dependiente:

> "Uno dice que una cantidad variable llega a ser infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de tal manera que converja hacia el

límite cero".

Por ese tiempo Weierstrass no enterado de los trabajos de Bolzano, encontró la teoría de funciones sobre los procesos de límite en conexión con una teoría aritmética de irracionales junto con Dedekind, Méray y Cantor. Con esto parecía que el conjunto de las matemáticas quedaba establecido sobre bases sólidas. Esta étapa se reconoce en el proceso de desarrollo de las matemáticas como la rigorización del análisis. (1).

A raíz de las contradicciones (óparadojas) que surgieron en la teoría general de conjuntos de Cantor (1880) se originó la tercera crísis de las matemáticas la cual vino a culminar en los primeros lustros del presente siglo manifestándose en tres corrientes que pugnaban por una fundamentación sólida de las matemáticas pero con una cancepción muy propia acerca de ellas. Tales corrientes son: La ligicista representada por Whithehead y Russell, la intuicionista conducida por Brower, Weyl y Heyting y la formalista representada y comandada por Hilbert.

Siendo de interés en este trabajo, tratar en forma suscinta los aspectos y rasgos principales sobre el formalismo, su actitud de proporcionar elementos para una fundamentación de la matemática, establecer axiomas y enunciados precisos; demostraciones explícitas no obstante la claridad que algunos resultados pudieran tener desde un punto de vista intuitivo y cuya finalidad era establecer bases para lograr la consistencia de las matemáticas (una exposi ción más detallada se presenta en el Cap. I).

Con el movimiento desarrollado por la escuela formalista conducida por el gran matemático David Hilbert, durante algún tiempo pareció que con el tratamiento y desarrollo axiomático de las matemáticas, habría de darse fin a las disputas sobre los fundamentos. Pero desafortunadamente, tal tratamiento no culminó a consecuencia del sorprendente resultado obtenido por otro gran matemático - Kurt Gödel en su ya famoso trabajo "Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de los principia matemática y sistemas conexos" (1931), cuyo resultado clave establece que no toda proposición verdadera en la aritmética clásica es demostrable dentro de un sistema formal. (secc. - I.5)

En torno al tema del rigor, nuestra atención se centra en el papel que este juega, como ya se dijo, en el -- proceso de enseñanza-aprendisaje. Mucho se ha escrito --- acerca de los elementos de Euclides como un modelo de rigor matemático que incluso se mantuvo durante casi dos - milenios y aún perdura en nuestros días en los programas- de enseñanza elemental y media.

Sin embargo, la idea del rigor ha ido evolucionando a la par del desarrollo de las matemáticas tomando un sello característico en función de la época y en los momentos importantes de esta ciencia, no obstante es una cuestión que al mensionarse en los libros de texto queda en - forma demasiado implícita y tan poco clara que más bien - tiende a provocar una actitud de desaliento hacia el estudio de las matemáticas en parte no poco importante de estudiantes y esto en el mejor de los casos.

Otra actitud es la de crear una idea de que eso que se llama rigor es asunto que compete o se da solo en los profesionales de las matemáticas, pero queda en el aire la cuestión.

Esta idea empezó a preocupar a los matemáticos de distintas épocas al especular sobre el quinto postulado de Eudes de la geometría euclideana y como resultado de tales especulaciones se originaron las geometrías no-euclideanas de Lobachevski, Riemann y Bolyai. Todo en razón de que no parecía ser muy evidente el enunciado de tal postulado, siendo quizá la semilla para que en adelante se planteara la necesidad de ser más rigurosos en la postulación de proposiciones, así como, en la deducción de resultados obligandose de esta manera a buscar un mayor grado de claridad y precisión ya no solo en la geometría sino en todas las ramas de la matemática, como sucedió precisamente en la segunda crísis en la que a partir de esta preocupación establecida ya como una necesidad capital se originó un movimiento en el que al buscar una mejor fundamentación de los conceptos matemáticos se llegó a culminar en la ya mencionada rigorización del análisis .

Finalmente al aparecer la tercera crísis, se revela con el surgimiento de las paradojas la necesidad de un mayor grado de rigor la cual trasciende a todas las ramas de las matemáticas hasta nuestros días (véase sección I.3).

I.-F O R M A L I S M O.

I.1.-BOSQUEJO HISTORICO.

Podría decirse que el método axiomático tiene su origen en los antiguos griegos en cuyos trabajos encontramos el modo de como una proposición puede expresarse como conclusión de una prueba lógica.

Por ejemplo, en la geometría clásica, como la presenta Euclides (365?-275? a.c.) en sus elementos y que durante muchos siglos perduró como un modelo insuperable de teoría deductiva, podemos encontrar una impecable sistematización en cuanto a la selección de teoremas y problemas considerados como fundamentales al incluir solo aquellos capaces de funcionar como elementos, no obstante que todo lo que afirma es empíricamente verdadero no se recurre a la experiencia como justificación, de manera que el geómetra, solo procede por vía demostrativa basando sus pruebas sobre lo dado anteriormente ateniéndose únicamente a las leyes de la lógica. De esta manera, los teoremas estan vinculados mediante relaciones necesarias a las proposiciones de las cuales son deducidas, formando un todo en el cual todas las proposiciones se relacionan entre sí directa o indirectamente. En el sistema así formado no es posible modificarlo parcialmente sin que se afecte. De lo anterior se deriva la importancia pedagógica de los elementos de Euclides.

Esto da una idea de la profundidad científica a que se remontaron los griegos y en particular la obra de Euclides alcanzando un grado de rigor por encima de los matemáticos de siglos posteriores y superado a finales del siglo pasado y principios del presente, período en que se da la tercera crísis en el desarrollo del pensamiento matemático -- con el surgimiento de la teoría de conjuntos y que los matemáticos más brillantes se avocaron por completo al pro-- blema de dar una fundamentación de las matemáticas con un- inusitado afán de rigor lógico. Así, bajo este nuevo afán- de rigor lógico, la deducción geométrica clásica se mostraba defectuosa en algunos puntos y el esfuerzo de una rectificación de ellos originó como resultado una nueva repre-- sentación axiomática de la teoría.

En, 1882 Moritz Pach (1843-1931), maestro de Hilbert, planteó claramente por primera vez el problema de una co-- rrección de la axiomatización de la geometría de Euclides, pues ésta presenta muchas imperfecciones, para ello esta-- bleció las siguientes reglas a través de las cuales una exposición resulta realmente rigurosa. (16) p. 24-25.

1.-Que sean enunciados explícitamente los términos -- primeros con ayuda delos cuales se propone definir todos los otros.

2.-Que sean enunciadas explícitamente las proposiciones primeras con ayuda de las cuales se propone uno demostrar las otras.

3.-Que las relaciones enunciadas entre los términos -

primeros sean pures relaçiones lógicas, y permanez can independientes del sentido concreto que se pue de dar a los términos.

4.-Que solo éstas relaciones intervengan en las demos traciones independientemente del sentido de los -- términos (lo que prohibe en particular, tomar pres tado algo a la consideración de las figuras).

Pero es David Hilbert (1862-1943) quien inaugura un - nuevo género de investigaciones, cuando en 1899 con la pu blicación de su monumental obra "Fundamentos de la Geome-- tría" aparece como el máximo representante de la corriente axiomática. En esta obra da un tratamiento riguroso al tra dicional método de Euclides transformandolo en un método - más aplicable a problemas de todo tipo.

Planteándose sistemáticamente la consistencia de su. - sistema de axiomas y la independencia mutua de sus elemen- tos. Para fundamentar la consistencia, elabora una inter-- pretación aritmética del sistema, de tal manera que toda - contradicción que se originara en las consecuencias de sus axiomas habría de repercutir en ellas. De este modo Hil-- bert consideraba que la consistencia de la aritmética ga-- rantizaría la de sus sistema de axiomas. (16) P. 35. Es-- tableciendo así la independencia de un postulado al cons-- truir un sistema compatible que no lo considerara; aunque- no era ese el proposito, se demostró la independencia del- Quinto postulado de Euclides, al surgir las geometrías no euclideanas; de igual forma Hilbert demuestra la independencia de los axiomas de continuidad al construir una geometría no-arquimediana.

Puede decirse que al abordar el problema de la fundamentación lógica de las teorías matemáticas, particularmente el de la aritmética y el de la no contradicción de estas teorías estuvieron orientadas al mismo tiempo a contrarrestar la tendencia de los matemáticos intuicionistas - quienes trataron de evitar los problemas lógicos planteados por las paradojas de la teoría de conjuntos de Cantor- pretendiendo sacrificar no solamente esta teoría sino una buena parte de la matemática clásica. (9).

Hilbert contribuyó enormemente a esclarecer el agudo problema de fundamentación de las matemáticas y el de la naturaleza del razonamiento lógico en particular, mostrar que un pensamiento más claro se da bajo la posibilidad de expresarlo totalmente mediante símbolos en número finito y no obstante esa restricción el matemático puede razonar correctamente sobre el infinito.

I.2.-AXIOMATICA. FORMALISMO. EJEMPLOS.

En el siglo XIX se realiza una extraordinaria e intensa labor de investigación matemática. Se les dió solución a bastantes problemas fundamentales que habían resistido a los esfuerzos de los pensadores por largo tiempo. Fueron creadas nuevas ramas de estudio en la matemática y se construyeron nuevas bases en las diversas ramas de la disciplina matemática. Como ejemplo se puede dar el siguiente. Los tres problemas clásicos griegos de construcción geométrica, que consisten en: únicamente con regla y compáz, trisectar el ángulo, Duplicación del cubo y Cuadrar el círculo. Los esfuerzos fueron inútiles por más de dos mil años para dar solución a estos problemas y sucedió que hasta el siglo XIX fué cuando se demostró la imposibilidad lógica de realizar tales construcciones. Además de esos trabajos se obtuvo un resultado muy valioso. Dado que la solución de los problemas anteriores depende básicamente de la obtención de las raíces de ciertas ecuaciones, el inerés que apareció por los problemas planteados en la antigüedad estimuló el trabajo para que se realizaran estudios muy profundos acerca de la naturaleza de los números y sobre la estructura del continuo numérico. Se definió con rigurosa precisión a los números negativos, complejos e irracionales; se construyó una base lógica para el sistema de los números reales y se estableció una nueva rama de las matemáticas: La teoría de los números transfinitos (6).

Por otro lado el progreso más importante por su repercución en la evolución de la matemática, fué el que Gauss, Bolyai, Lovachevsky y Riemann demostraron la imposibilidad de deducir de los otros axiomas el axioma de las paralelas, originando con este resultado la creación de las geometrías no-euclideanas. Finalmente estas revisiones de la geometría euclideana provocaron un reexamen y perfeccionamiento no sólo de esa geometría sino de muchos otros sistemas matemáticos.

En esta dirección decimos que estas revisiones principian con los escritos de geometría moderna de M. Pach en los que expone un sistema completo de axiomas suficientes para hacer una presentación rigurosa de la geometría proyectiva (11). R. Dedekind en sus trabajos de 1888 siguiendo esta misma dirección, dió un sistema completo de axiomas como base para fundamentar la aritmética. Por el mismo tiempo 1889 y 1891 Peano en sus disertaciones, expone lógicamente los principios de la geometría utilizando un nuevo método, los principios de la aritmética natural. Su exposición axiomática de la aritmética se basa en nueve postulados que definen implícitamente la igualdad y tres conceptos primitivos. Cero(o uno), número y sucesor. El último postulado en símbolos de Peano, es el principio de inducción completa el cual se toma como axioma. Un discípulo de Peano es Mario Pieri (1860-1904) quien en 1897 publicó un nuevo tratado de geometría euclideana en el que introdujo el movimiento como un concepto intuitivo.

Cambiando un poco decimos que la finalidad que se persigue al colocar bajo forma axiomática una teoría deductiva, es despojarla de las significaciones concretas e intui tiva sobre los que en primer lugar haya sido construido de manera que aparezca claramente el esquema lógico abstracto como es el caso de la axiomática de Hilbert a quien no le inquieta tal ausencia de correspondencia y por consiguiente de utilidad (16) p. 43. Hilbert considera que la matemática pura debe articularse del siguiente modo: si tomamos un conjunto de conceptos no definidos, es posible, agrupándolos, construir un postulado y mediante este procedimiento un conjunto de postulados; después las definiciones nos permitirán obtener, en función de los postulados, nuevos conceptos y dado este nivel, las reglas de operaciones, generarán los teoremas como consecuencia. Ante esto se imponen exigencias (4) P. 117 internas en la elección de los postulados, no obstante la aparente arbitrariedad en ciertas consideraciones la elección de los postulados en que se basa una axiomática no es azar, es necesario que satisfaga los puntos que se dan:

-CONSISTENCIA. Fundada sobre el principio de no contradicción, esto es, que al hacer uso de un conjunto de axiomas no se puede concluir una proposición P y su negación $\neg P$: Una definición equivalente a la anterior es: un sistema formal es consistente si existe un enunciado dentro del sistema que no se pueda probar. Para establecer la consistencia absoluta de un sistema se puede proceder de dos formas distintas:

1) La primera de ellas consiste en encontrar un enunciado que no sea teorema dentro del sistema formal.

2) En este caso, la consistencia de un sistema o teoría en cuestión, se establece mediante un descenso

a lo concreto, es decir la construcción de un modelo físico que satisfaga el conjunto de axiomas, y como todo lo real es necesario (a fortiori) posible, así la existencia de tal modelo garantiza la consistencia de la axiomática correspondiente.

Al referirnos a la consistencia relativa de un sistema decimos que ésta se obtiene al suponer la consistencia de un sistema anterior que se toma como base para que de ésta forma la consistencia del segundo se herede de la consistencia estipulada del primero.

Por ejemplo, la consistencia absoluta de la geometría plana de Riemann la cual se establece a través de la construcción de un modelo físico en el que se satisfagan los axiomas. Esto es, si interpretamos:

	Geometría euclideana	Geometría Riemanniana
	"Plano"	esfera plana
expresión significativa.	"punto"	punto en la esfera
	"línea recta"	arco de círculo máximo en la esfera.
	.	.
	.	.
	.	.

Así el postulado riemanniano de las paralelas tiene--

el siguiente enunciado. "por un punto de la superficie de una esfera no puede trazarse ningún arco de círculo máximo paralelo a un arco dado de círculo máximo" (6) P. 32-34. (fig. 1).

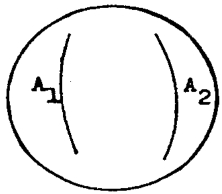


Fig. 1.

Ya que si prolongamos los círculos máximos A_1 y A_2 éstos se cortan en un punto.

-<u>COMPLETEZ</u>. En una forma categórica, se dice que un sistema axiomático es completo si al construirse correctamente en los términos del sistema dos proposiciones que sean contrarias, al menos una de las dos puede ser demostrada. Si el sistema es consistente se demuestra solamente una de las dos proposiciones.

-<u>LA INDEPENDENCIA</u>. De un sistema axiomático se tiene cuando un axioma no se puede deducir a partir de los otros, o si se modifica alguno de los axiomas, el sistema no pierde su consistencia. Por ejemplo, en los intentos de demostrar por reducción al absurdo -

el postulado de las paralelas, originó la construcción de las primeras geometrías no-euclideanas, probando así por la construcción de estas, la independencia del postulado.- (16) P. 40 y 41.

La independencia de los postulados de una axiomática no se consideran como lógicamente indispensables para su validez, solamente por cuestiones de economía es preferible reducir su número al mínimo en el caso que existan en abundancia.

EJEMPLOS DE AXIOMATICAS.

I.-Supongamos que K y L son clases puramente abstractas, con relación a estas se dan los siguientes postulados:

1.-Dos miembros cualesquiera de K se encuentran contenidos en un sólo miembro de L.

2.-Ningún miembro de K se encuentra contenido en más de dos miembros de L.

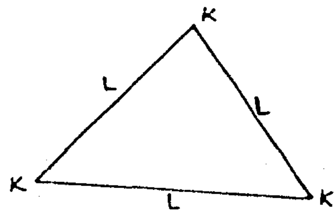
3.-Los miembros de K no se encuentran contenidos todos en un único miembro de L.

4.-Dos miembros cualesquiera de L contienen solamente a un miembro de K.

5.-Ningún miembro de L contiene a más de dos miembros de K.

El utilizar este pequeño número de postulados y las reglas ordinarias de inferencia, se pueden derivar ciertos teoremas. Por ejemplo, que K contiene solamente tres miembros. Pero ¿Será este conjunto de postulados consistente?. Esta pregunta se puede contestar al utilizar el modelo que se da.

Supongamos que la clase K está formada por los puntos que forman los vértices de un triángulo, y L la clase formada por los lados del triángulo. Luego el modelo es el triángulo:



En él se puede verificar que se cumplen los cinco postulados, concluyendo con esto que el conjunto de axiomas que se dió sí es consistente. (6) P. 31, 32.

II.-Como segundo ejemplo consideramos la axiomática que Hilbert dió a la geometría euclideana (en los fundamentos de la geometría de 1899). (15).

El total de axiomas son veinte y Hilbert los separó en cinco grupos:

-El grupo uno contiene ocho axiomas de incidencia o de enlace:

1.-Cualesquiera que sean los puntos A,B, existe- una recta que pasa por cada uno de los puntos A,B.

2.-Cualesquiera que sean los puntos diferentes - A,B, existe a lo sumo una recta que pasa por- cada uno de los puntos A,B.

3.-En cada recta hay al menos dos puntos. Exis-- ten al menos tres puntos que no pertenecen a una misma recta.

4.-Cualesquiera que sean tres puntos A,B,C que - no pertenecen a una misma línea recta, exis- te un plano α que pasa por cada uno de los - tres puntos A,B,C. En cada plano hay al menos un punto.

5.-Sean cualesfueran tres puntos A,B,C que no per tenecen a una misma recta, existe a lo sumo - un plano que pasa por cada uno de los tres -- puntos A,B,C.

6.-Si dos puntos diferentes A,B de la recta a per tenecen al plano α, cada punto de la recta a pertenecen al plano α.

7.-Si dos planos α y β tienen un punto común A, - tienen al menos otro punto común B.

8.-Existen al menos cuatro puntos que no pertene cen al mismo plano.

-El grupo dos está formado por cuatro axiomas de or-- den

9.-Si el punto B se encuentra entre el punto A y el C, entonces A,B,C son puntos diferentes - de una misma recta, y B se encuentra, asimismo, entre C y A.

10.-Cualesquiera que sean los puntos A y C, existe al menos un punto B sobre la recta AC tal- que C está entre A y B.

11.-Entre tres puntos cualesquiera de una recta,- a lo sumo uno de ellos puede encontrarse en-- tre los otros dos.

12.-(Axioma de Pasch) Sean A,B,C tres puntos que- no pertenecen a una misma recta, y a, una recta en el plano ABC, que no contiene ninguno - de los puntos A,B,C. Entonces, si la recta a pasa por algún punto de segmento AB, también- pasará o bien por algún punto del segmento - AC, o bien por alguno del segmento BC.

-Cinco son los axiomas de congruencia y que forman el tercer grupo, definen el concepto de congruencia o - de igualdades geométricas.

13.-Si A,B son dos puntos sobre la recta a, y A'- es un punto de la misma recta, o bien de otra recta a', siempre se puede encontrar, a un lado prefijado de A' sobre la recta a', un punto B', y sólo uno, tal que el segmento AB es congruente al A'B'.

14.-Si los segmentos A'B' y A''B'' son congruentes al mismo segmento AB, entonces A'B'es congruen al segmento A''B''; es decir, si

A'B'≡AB y A''B''≡AB entonces A'B'≡A''B''.

15.-Sean AB y BC dos segmentos sobre la recta a, sin puntos interiores comunes y sean, además, A'B' y B'C' dos segmentos sobre la misma recta, o bien sobre otra a', que tampoco poseen puntos interiores comunes. Si

AB≡A'B' y BC≡B'C' entonces AC≡A'C'.

Definición.-Un par de semirectas h,k que tienen el mismo origen O y no pertenecen a una misma recta se llama ángulo. Y se denota por ∠(h,k) y ∠(k,h).

16.-Sean dados ∠(h,k) en el plano α, una recta a' en este mismo plano, o bien en otro, α', y supongamos fijado un lado determinado del plano α' con respecto a la recta a'.

Sea h' una semirecta de la recta a', con origen en el punto O'. Entonces en el plano α' existe una semirecta k', y sólo una, tal que ∠(h,k) es congruente con ∠(h',k')y, además, todos los puntos interiores de ∠(h',k') se encuentran en el lado prefijado con respecto a a'. Para denotar la congruencia de ángulos se utiliza la notación

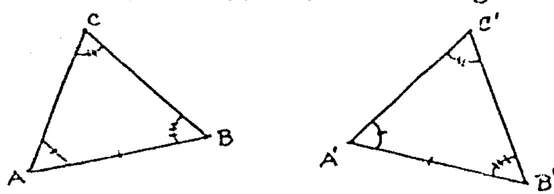
$$\angle(h,k)\equiv\angle(h',k')$$

17.-Sean los tres puntos A,B,C no pertenecientes a una misma recta y A',B',C' otros tres, tampoco pertenecientes a una misma recta. Si

$AB\equiv A'B'$, $AC\equiv A'C'$ y $\angle BAC\equiv\angle B'A'C'$ entonces

$\angle ABC\equiv\angle A'B'C'$ y $\angle ACB\equiv\angle A'C'B'$

Este axioma se ilustra en la figura siguiente:



-El cuarto grupo está formado solamente por un axioma, el de paralelismo que equivale al Quinto postulado de Euclides.

18.-Sea a una recta arbitraria, y A, un punto exterior a ella; entonces en el plano determinado por A y la recta a, se puede trazar a lo sumo una recta que pasa por A y no intersecta a la recta a.

-Y finalmente el quinto grupo está formado por dos axiomas de continuidad.

19.-(Axioma de Arquímedes). Sean AB y CD segmentos arbitrarios. Entonces sobre la recta AB existe un número finito de puntos $A_1, A_2, \ldots$ A_n, situados de manera que A_1 está entre A y A_1, A_2 está entre A_1 y A_3, etc., tales que los segmentos AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ son congruentes al segmento CD y B está entre A y A_n (fig. 1).

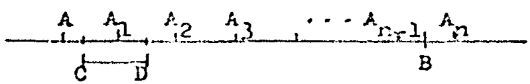


Fig. 1.

20.-(Axioma de Cantor)Supongamos que en una recta arbitraria a se da una sucesión infinita de segmentos A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$, de los cuales cada uno está en el interior del precedente; supongamos, además, cualquiera que sea un segmento prefijado, existe un índice n para el cual A_nB_n es menor que este segmento. Entonces existe sobre la recta a un punto X, que está en el interior de todos los segmentos A_1B_1, A_2B_2, etc. (fig. 2).

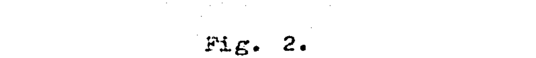


Fig. 2.

I.3.-EL FORMALISMO COMO CORRIENTE DE PENSAMIENTO MATEMATICO.

El formalismo tiene sus bases en los fundamentos de - Hilbert, que han proporcionado el modelo de una disciplina matemática edificada según el método axiomático, método -- que además de ser apropiado perfectamente al papel formal- de las matemáticas, anulaba a la intuición de los fundamentos matemáticos. (11) P. 60.

Además como dijimos en la introducción, el formalismo surge al aparecer la tercera crísis en los fundamentos de la matemática, crísis provocada por las contradicciones -- que nacieron en la teoría de conjuntos de Cantor, es por - esto que uno de los trabajos en los que primeramente se empeñaron los formalistas fué axiomatizar la tería de conjuntos. En la axiomatización de la teoría de conjuntos como - en cualquier axiomática formal los elementos primitivos -- (símbolos, términos o piezas) no tienen ningún contenido - esencial explícito y su contenido esencial es el implícitamente dado por los axiomas, ante una axiomática, podemos- encontrarnos en la situación de dos compañeros que no fijaron de ante mano las reglas del juego, eso les impide que puedan jugar juntos una partida: pero si desde el inicio- establecen las reglas del juego, podrán jugar partidas sucesivas sin tener que acusarse uno con el otro de trampas. En un sistema axiomático formal los elementos primitivos,- carecen absolutamente de contenido escencial explícito y se convierten en piezas de un juego sin sentido material - en sí mismo, así su manejo formal está definido implícitamente por las reglas del juego constituidas por los axio-mas y las reglas de inferencia. Es por esto que el forma-lismo concibe a la matemática como un juego variado de símbolos, de carácter formal y haciendo a un lado su contenido empírico. Estas "formas vacías" obedecen a un conjunto de reglas de extructura y de deducción, que en último análisis, tienen su base en un conjunto de axiomas.

Luego, en un sistema formal se tendrán términos, fórmulas, demostraciones, teoremas que se obtienen al efectuar variadas combinaciones de los elementos primitivos haciendo uso de ciertas reglas fijas, pero hablar de verdad o falsedad no tiene sentido. Como ejemplo se puede mencionar el juego del ajedrez, nos podemos preguntar si cierta situación dada es alcanzable (demostrable), pero como es claro no tiene sentido hablar de verdad o falsedad en sí misma.

Es por esto que un sistema así concebido depende única y exclusivamente de su validez lógica de tal suerte que el problema principal al que se avoca el formalismo es probar la consistencia del conjunto de axiomas básicos de cada sistema formal. Tal es la labor a la que se sometieron Hilbert y su escuela creando una disciplina: La "metamatemática", que abarca una "teoría de la demostración", (2) P. 78-79, lo que se trata en el programa de Hilbert sección I.4.

Por otro lado es importante tener en cuenta que las matemáticas tratan de identidades existentes y que los teo remas son fundamentales. De donde si un sistema formal proporciona una fundamentación de la matemática entonces sus elementos y axiomas deben tener un carácter existencial, esto, en oposición a otros sistemas de carácter material o genético pues en ellos los axiomas son generados por propiedades de objetos preconcebidos ya como existentes, es decir se conciben los objetos antes de formular los axiomas. Por el contrario, al considerar un sistema formal, los objetos reciben su existencia exactamente de la formulación y constitución del sistema (en el papel). El formalismo de Hilbert contiene un sistema axiomático existencial o formal, así tal formalización se lleva a cabo en cuatro étapas:

Primera.-Se da un conjunto completo de signos que se han de utilizar en el cálculo.

Segunda.-Se establecen las reglas de formación. En estas se dan las combinaciones de los signos que puedan ser considerados como "fórmulas" (más realmente, como proposiciones), las reglas pueden considerarse como la "gramática" del sistema.

Tercera.-Se dan las "reglas de transformación", que hacen una descripción detallada de las fórmulas de las cuales posiblemente se deriven otras fórmulas de estructura determinada. Estas son de hecho, las reglas de deducción y finalmente

Cuarta.-Se eligen ciertas fórmulas como axiomas o también llamadas "fórmulas primitivas". (6) P.65 66. Estas dan el fundamento para todo el sistema.

Se empleará la palabra " teorema del sistema" para indicar a cualquier fórmula que se obtenga a partir de los axiomas al aplicar sucesivamente las reglas de transformación. Por demostración formal se designará una sucesión finita de fórmulas cada una de las cuales es un axioma o un resultado que anteriormente se haya derivado mediante las reglas de transformación. Un sistema con estas características se encuentra casi hecho en los "Principia Mathematical" pero aquí las matemáticas fluyen genéticamente del sistema formal (material). Esa justificación material que pretende darse en los Principia involucra el empleo del infinito real (entendido este como el conjunto de los números reales completo, es decir aquel en el cual no se pueden hacer agregados finitos) lo que hace que la fundamentación de las matemáticas así ofrecida sea deficiente. (2).

En esto consisten los rasgos principales del formalismo como corriente de pensamiento matemático. En el siguiente apartado exponemos lo que se llama el programa de Hilbert de la escuela formalista en el cual se resume con toda claridad lo que constituyó una de las metas más ambiciosas de Hilbert al intentar dar bases de una fundamentación absoluta de las matemáticas. La imposibilidad de lograr tales objetivos vino a ser demostrado posteriormente por K. Gödel lo cual tratamos en la sección subsiguiente con -

lo que se termina la exposición en el terreno del formalismo como corriente de pensamiento matemático.

I.4.-EL PROGRAMA DE HILBERT.

Como Hilbert no abandona la matemática transfinita de Cantor, una de las tareas que se propuso fué la de adaptar la matemática transfinita a una matemática que se supone dedicada a objetos concretos. Esta tarea consiste en probar la congruencia de un sistema que comprende matemática finita y matemática transfinita (He aquí su programa). Hilbert para demostrar la consistencia de un sistema sin que fuera necesario suponer la consistencia de otro anterior (prueba relativa), trató de construir pruebas "absolutas".

El primer paso para lograr la construcción de una prueba absoluta, fué obtener una <u>completa formalización</u> de un sistema deductivo. Esto trae como consecuencia la abstracción de todo significado de las proposiciones que existen en el sistema: se las debe considerar, simplemente como signos vacíos. Cuando un sistema se ha formalizado, saltan a la vista las relaciones lógicas que existen entre las proposiciones matemáticas.(6) Cap. III y (2) P. 83.

Es conveniente mencionar que las declaraciones significativas con respecto a un sistema matemático sín ningún significado (o formalizado) no pertenecen totalmente al sistema. Pertenecen a lo que Hilbert denominó "Metamatemática"[1], al lenguaje que se formula con respecto de las matemáticas. Así la metamatemática es considerada como una ciencia que estudia desde fuera los sistemas formales, que son por consiguiente la materia y objeto de aquella. (6) P. 45.

A continuación se dan unos ejemplos mediante los cuales se ilustra la diferencia entre matemáticas (es decir, un sistema de signos carentes de significado) y metamatemática (declaraciones significativas con respecto a las matemáticas). (6) cap. III.

Si consideramos la expresión aritmética

$$4+5=9$$

Esta expresión pertenece a las matemáticas y se construye totalmente de signos aritméticos elementales. Ahora la expresión

"4+5=9" es una fórmula aritmética

La afirmación no expresa un hecho aritmético; pertenece a la metamatemática, porque caracteriza como fórmula a una determinada hilera de signos aritméticos. De igual manera la expresión

$$x=x$$

1.-Hilbert dió el impulso a este nuevo orden de investigación, que en 1917 comenzaron a desarrollarse en Gotinga bajo su dirección. (16) P. 49.

pertenece a las matemáticas, pero la afirmación

"x" es una variable

pertenece a la metamatemática. De la misma forma pertenece a las metamatemáticas la siguiente afirmación:

La fórmula "0=0" puede derivarse de la fórmula "x=x"- sustituyendo por la cifra "0" la variable "x". Esta afirmación especifica de qué manera se puede obtener una fórmula aritmética a partir de otra fórmula y además describe cómo las dos fórmulas se relacionan una con la otra. Finalmente la proposición

"0≠0" no es un teorema

pertenece a la metamatemática, afirma que la fórmula en - cuestión no es posible derivarla a partir de los axiomas - de la aritmética.

Considerando como base, la separación de las descripciones metamatemáticas de la matemática misma. Más específicamente Hilbert trató de llevar a cabo su teoría de la demostración cuyo objeto básico para ésta era demostrar la consistencia del sistema formal y para ello la idea de Hilbert era emplear razonamientos evidentes y por tanto finitarios[2] para que de esta forma se demostrara teóricamente-

2.-Nota, Cita por Nagel Newman. Hilbert no dió una explicación precisa de que procedimientos matemáticos deben - considerarse finitarios.

que los métodos de las matemáticas son métodos válidos dado que conducen a teoremas verdaderos. (2) p. 51.

En su primera concepción trataba de demostrar la consistencia de un sistema en donde se utilizaran procedimientos que no recurrieran ni a un número infinito de fórmulas ni a un número infinito de operaciones con fórmulas. A este tipo de procedimientos se les llama finitistas y una prueba de consistencia bajo estos lineamientos se le llama absoluta.

Hilbert con su teoría de la demostración trataba de probar con los métodos finitistas la imposibilidad de derivar fórmulas contradictorias en un cálculo matemático dado. Estima que si se demuestra la consistencia de un sistema formal y en dicho sistema formal se demuestran formalmente fórmulas formales que correspondan a una rama de las matemáticas serán verdaderos y en consecuencia la demostración del sistema formal constituya la clase de fundamentación de las matemáticas. (2) P. 82.

Hilbert se formó una idea muy optimista con respecto a su teoría de la demostración porque tenía absoluta confianza de que tales demostraciones de consistencia serían posibles para la matemática formalizada y con esto pretendía demostrar la absoluta veracidad de las matemáticas, o sea, una teoría de la fundamentación de la matemática. En la actualidad es evidente que esa idea optimista no tenía ningún fundamento. (2) P. 82.

Se crítica de que la teoría de la demostración de Hilbert, ha contribuido a quitar importancia a la propiedad de consistencia de un sistema formal. Ya desde su principio se negó que la demostración de consistencia de un sistema que formalizara parte de las matemáticas fuera parte suficiente para garantizar la validez absoluta de éstas. Sobre todo y desafortunadamente después de los resultados de Kurt Gödel (17) p. 207, en donde se demuestra la insuficiencia de un formalismo axiomático comandado por Hilbert para servir de una fundamentación de toda la matemática.- Pues una de las implicaciones de este teorema es que ningún sistema de axiomas es adecuado para encuadrar la matemática toda sino igualmente cualquier rama significativa de las matemáticas porque cualquier sistema de axiomas así es incompleto, esta nueva adecuación del método axiomático no es una contradicción en sí misma, pero causó desconcierto entre los matemáticos. Pues ello indudablemente le restó importancia a la propiedad de consistencia de un sistema formal.

I.5.-INCOMPLETITUD. TEOREMA DE GÜDEL.

Como un ejemplo en donde se cumplen los sueños de Hilbert, se puede dar el Cálculo proposicional. Pero en este ejemplo se codifica solamente una parte de la lógica formal. Por tanto la pregunta sigue en pié: ¿Se podrá demostrar la consistencia de un sistema formalizado que incluya a toda la aritmética en el sentido del programa de Hilbert.? Güdel dió respuesta a ésta pregunta en su artículo de 1931 titulado "Sobre proposiciones formalmente indecidi bles de Principia Matemática y sistemas relacionados" --- (conocido como el teorema de Gödel).

En éste artículo Gödel mostró que no es posible demostrar en forma absoluta que la aritmética está exenta de -- contradicciones. Sus resultados más importantes fueron dos. En primer lugar, mostró que es imposible establecer la consistencia lógica de cualquier sistema deductivo complejo - (en particular la aritmética) excepto suponiendo principios de razonamiento cuya consistencia interna propia es tan -- cuestionable como aquella del mismo sistema. (17) P. 248, 255.

La segunda conclusión es más sorprendente y revolucionaria, en ésta se muestra que los Principia, o cualquier otro sistema dentro del cual se pueda desarrollar la aritmética, es esencialmente incompleta. (como un ejemplo se podría citar la conjetura de Goldbach, que dice: todo número par positivo se puede expresar como el producto de dos números primos, si se tuviera la veracidad de ésta y si no - fuera posible demostrarse).

Los resultados de Gödel no excluyen la posibilidad de construir una prueba absoluta y finitista de consistencia- para la aritmética. Dado que tales demostraciones ya se -- han construido, principalmente por Gentzent que fué un integrante de la escuela de Hilbert. Pero Gentzent en sus demostraciones hace uso de reglas de inferencia, cuya consistencia es tan dudosa como la consistencia formal de la a-- ritmética misma, es por esto que estas demostraciones no - son significativas o carecen de sentido. Gentzent emplea - una regla de inferencia que permite derivar una fórmula a partir de una clase infinita de premisas. Y el empleo de -

estas nociones metamatemáticas contradicen la idea original de Hilbert. (17) P. 76.

En base a estos resultados se desprende de manera evidente las limitaciones del método axiomático. Contrariamente a lo que antes se pensaba, no se puede especificar un conjunto recursivo de axiomas; ésto significa que para cualquier proposición se puede decidir de forma efectiva si es axioma o no, a partir de los cuales sea posible derivar formalmente todas las afirmaciones aritméticas verdaderas.

El descubrimiento de que existen verdades aritméticas que no pueden ser demostradas formalmente no significa que existan verdades que nunca se vayan a conocer ni que una intuición mística debe reemplazar a la prueba convincente. Significa que la fuerza del intelecto humano no ha sido, ni puede ser, totalmente formalizada, y que subsiste la posibilidad de descubrir nuevos principios de demostración. (17) P. 258.

II.-FORMALISMO EN EL QUEHACER MATEMATICO.

II.1.-Papel del formalismo en el quehacer matemático.

Empezaremos por exponer en este punto para qué ha sido útil la formalización en la que a partir de los últimos cien años se han venido ocupando los matemáticos, así como considerar principalmente el papel que juega la formalización en relación a las prácticas del pensamiento matemático.

Desde un punto de vista diríamos que uno de los grandes logros del formalismo en las matemáticas puede compararse en lo que la gramática es para el lenguaje usual, - frecuentemente considerado así por algunos matemáticos. - Pero ha sido un medio para ahondar más rigurosamente en - cuestiones tales como el tratamiento de los procedimientos del razonamiento matemático sin desconocer que tal utilidad considerada de esta manera, es un poco secundaria si - la comparamos con los propósitos esenciales del pensamiento matemático, incluso puede ser que la estructura de formalización esté ausente de tratados puramente matemáticos- de la matemática moderna (5) P. 166.

Sin embargo subyace el fruto esencial de disciplina - que la formalización ha conformado para el pensamiento del matemático. Solamente que este fruto no representa en sí y directamente una mayor eficacia demostrativa, aunque tal - vez se soñaba encontrar una cosa de ese género.

Para la reflexión del matemático, las ventajas del método axiomático saltan a la vista. Podemos decir que es en primer lugar, un precioso instrumento de abstracción y análisis. El paso de una teoría concreta a la misma teoría axiomatizada, posteriormente formalizada, renueva prolongando el trabajo de abstracción que conduce, por ejemplo, del número concreto, montón de peras o de plátanos, al número aritmético, después de la aritmética al álgebra, al sustituir a los términos individuales por variables de las que únicamente las relaciones están determinadas. (16) P. 59 y 60.

Un avance en la abstracción va siempre a la par con un progreso en la generalidad. Como dice Russell, generalizar es transformar una constante en variable. Es éste precisamente el trabajo del axiomático cuando sustituye a la recta, la congruencia, etc., por x, y, etc., que cumplen las relaciones enunciadas por los postulados. Así como una función proposicional es, un modelo de teorías concretas. De esta manera se obtiene con la axiomática, una importante economía de pensamiento. Se agrupan varias teorías en una sola, se piensa lo múltiple en lo uno. (16) P. 60.

Sin embargo cuando con la ayuda de la axiomática, se descubren las analogías formales, mediante procedimientos axiomáticos, entre los diferentes dominios de una misma ciencia y obtener parentescos entre ciencias que parecían extrañas, conduce a su fecundidad para el descubrimiento provocado por el rigor del método de exposición. (16) P. 61, 62.

Nadie ha impugnado seriamente el papel que conserva la intuición en el descubrimiento. Cualquiera que sea la fecundidad de un método, su oficio es sobre la consolidación y, se requiere, el prolongamiento, pero sobre un terreno previamente fijado. El pone en orden lo adquirido y, al hacer esto, llena las lagunas y explota los trazos, pero no inaugura nada esencialmente nuevo. Los descubrimientos revolucionarios son la obra del genio que transforma los métodos. Encontrar, probar: lo uno no le es menos indispensable que lo otro a la ciencia, que requiere el espíritu de aventura tanto como el espíritu de rigor. Desde este punto de vista aún, intuición y formalismo se completan según la diversidad de los espíritus y las occilaciones de la historia.

A estas ventajas que ofrecen ya las primeras axiomáticas, en cualquier grado, vienen como es de esperarse a combinarse en las axiomáticas formalizadas, las de todo cálculo simbólico: seguridad, objetividad, esto último se entiende como la capacidad de interpretar los hechos matemáticos mediante el lenguaje formal que sin referirse directamente al objeto puede trascenderlo. Además no es de su menor interés el carácter ciego y cuasi-mecánico de sus procesos: le da oportunidad a una máquina para su ejecución, y conservar así el espíritu para las operaciones de nivel superior. Por la simbolización y la formalización de las teorías y por medio de los isomorfismos de esta manera revelados, las grandes calculadoras están llegando a ser auxiliares científicos cuyas aptitudes superan muy ampliamente, la ejecución de las operaciones o problemas puramente numéricos. Y entre los problemas no numéricos para los que las máquinas son aptas para darles solución, se pueden dar como ejemplo los problemas de decisión acerca de las axiomáticas formalizadas. Tales usos son aún nuevos y sus desarrollos imprevisibles, pero se concibe que, ya sin la ayuda de la máquina y para el espíritu reducido a sus solos recursos, la simbolización y la formalización lleven la abstracción, a un segundo nivel. (16) P. 61, 62.

Por ejemplo, la rama de la topología moderna sería tarea casi imposible de llevar a cabo haciendo a un lado las caracterizaciones formales de las entidades de que se ocupa. Pero es cierto también que las matemáticas modernas estando lejos de agotar sus temas presentes no habrían podido ni siquiera darles forma, al haber carecido del modo de pensar dado por la formalización. (16) P. 64. De este modo la propia orientación de los desarrollos matemáticos de una teoría "en el sentido moderno del término" se destaca la importancia de la formalización en la práctica del pensamiento matemático.

"Si en el lenguaje formalizado se expresan axiomas y las reglas de deducción, son dos momentos del pensamiento que difieren esencialmente", para esto; sabemos que al formalizar una teoría demostrativa se procede en base a las proposiciones de la teoría, expresando en primer lugar en términos formales un número de axiomas y en segundo, varias reglas mediante las cuales puedan derivarse tésis ulteriores partiendo de los axiomas primitivos. De este modo tales reglas se constituyen en principio, como características de simplificación interior del sistema de proposiciones válidas que atañen a lo que conforma el objeto de la teoría. Así al enunciar axiomas en lenguaje formal y establecer las reglas que a partir de los axiomas, permiten deducir nuevas tésis, vienen a ser los dos momentos esencialmente diferentes del pensamiento. (5) P 173 y 174.

Un resultado de la formalización para el matemático no consiste en la mecanización lógico-matemático del asunto, sino en la construcción de un medio adecuado para un pensamiento que considerando de algún modo las objetividades de su funcionamiento pretende resolver el secreto de pensamiento que su objeto le impone.

Por otro lado lo que la formalización proporciona al pensamiento matemático no solo es un simple esclarecimiento gramatical o el de una transformación primordial para el establecimiento de la verdad, antes bien, representa una nueva étapa en la abstracción matemática que la formalización permite realizar. (5) P. 179.

Así podemos concluir diciendo que la formalización ha sido el medio de abordar matemáticamente lo que podemos llamar los problemas globales del pensamiento teórico.

II.2.- ¿QUE SE ENTIENDE POR UNA PRUEBA MATEMATICA?

Para iniciar con este punto damos a continuación un procedimiento convincente del teorema de Euler sobre los poliedros simples. Este teorema dice: Supongamos que V denote el número de vértices, A el número de aristas y C el- número de caras del poliedro simple; entonces, invariable- mente (10)

$$V-A+C=2$$

Por poliedro entendemos un sólido cuya superficie -- conste de un número de caras poligonales, y un poliedro - simple es un poliedro sin cavidades, de tal forma que su superficie puede ser deformada continuamente en la superfi cie de una esfera. La prueba del teorema es la siguiente:

Imaginemos un poliedro simple que esté hueco y cuya - superficie esté hecha de goma (fig. 1), de tal forma que - si recortamos una de las caras del polígono hueco, se pue- de deformar la superficie restante hasta llegar a extender la lisa sobre un plano (fig. 2). Desde luego, en este pro- ceso las áreas de las caras y los ángulos que forman las a ristas del poliedro habrán cambiado. Pero la red de vérti- ces y aristas en el plano contendrá el mismo número de vér tices y aristas que el poliedro original, mientras que el-

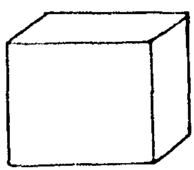


Fig. 1.

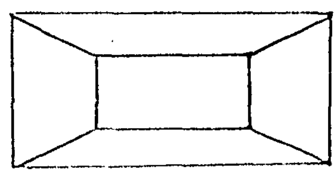


Fig. 2.

número de polígonos será uno menos que en el poliedro ori ginal, ya que se ha eliminado una cara. Ahora se mostrará- que para la red plana, $V-A+C=1$, de tal forma que, si se -- contara la cara eliminada, el resultado sería $V-A+C=2$ para el poliedro original.

"Triangulamos" la red plana de la siguiente manera: en algún polígono de la red que no sea ya un triángulo, trazamos una diagonal. El objeto de esta operación es incrementar en 1 tanto A como C, conservándose así el valor de -- V-A+C. Se continúa trazando diagonales que unan pares de - puntos hasta que la figura conste completamente de triángulos (fig. 3). En la red triangulada, V-A+C tiene el valor- que tenía antes de la división en triángulos, puesto que - el trazado de diagonales no lo ha cambiado. Ahora se eliminan las aristas que formen parte únicamente de un triángulo, esto es, se eliminan las aristas AC, AG, GH y CH (Fig. 4). La eliminación de las aristas ya mensionadas hace dis-

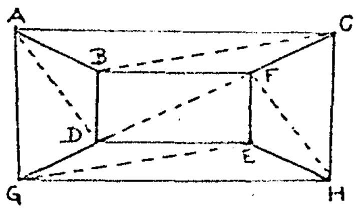


Fig. 3.

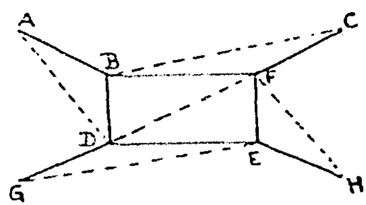


Fig. 4.

minuir en la misma cantidad A y C, mientras que V no se ve afectado, de tal forma que V-A+C continúa teniendo el mismo valor. Al eliminar el triángulo DGE se disminuye V en 1, A en 2 y C en 1 de modo que V-A+C continúa teniendo el mismo valor. Mediante una secuencia convenientemente elegida- de estas operaciones, se puede eliminar triángulos con a-- ristas en el límite (que cambiará con cada eliminación) -- hasta que finalmente quede un solo triángulo, con sus tres aristas, tres vértices y una cara. Para esta red simple, - V-A+C=3-3+1=1. Pero se ha visto que borrando constante--- mente triángulos no se alteraba el valor de V-A+C. Por tan to, en la red plana original, V-A+C debe ser también igual a 1, y de la misma forma debe ser igual a 1 para el poliedro con una cara suprimida. Finalmente concluimos que V-A+C=2 para el poliedro completo.

Al analizar un poco lo anterior podemos observar que es un procedimiento bastante convincente, es posible que a una gran cantidad de matemáticos los convenza, pero ¿Será en realidad confiable un desarrollo de este tipo?. Nuestra respuesta es que con un procedimiento de este tipo, hemos probado nada. No existen postulados, ni una lógica subyacente bien definida; tampoco parece ningún modo posible de formalizar este razonamiento. Lo que se hizo con este procedimiento es mostrar de manera intuitiva que el teorema es verdadero. Como dice Lakatos se trata de un experimento mental para establecer hechos matemáticos. Por estas razones no podemos decir que el procedimiento anterior sea una prueba, luego en el desarrollo anterior no podemos confiar porque, se pueden indicar algunas posibilidades que no se hubieran considerado hasta el presente. Por ejemplo, si se nos hubiera olvidado especificar que el poliedro sea simple. Podríamos no haber reparado en la posibilidad de que el poliedro tuviera una cavidad (en cuyo caso el teorema sería objeto de muchas contradicciones; uno de éstos contraejemplos es el "Marco de cuadro") (10).

A continuación se da otro ejemplo de un experimento mental en donde aparece una falsación. El problema dice: encontrar los dos puntos P y Q que se encuentren tan distantes como sea posible en la superficie o límite de cualquier triángulo (10). Podemos darnos cuenta inmediatamente que la respuesta es; P y Q son los extremos del lado más - largo. Esta respuesta puede verificarse con un experimento mental del tipo anterior: sin utilizar axiomas, ni reglas, pero con un gran esfuerzo de convicción. Este procedimiento es el siguiente:

Si uno de los puntos, por ejemplo P, se encuentra en el interior del triángulo, entonces es obvio que PQ no tiene su longitud máxima. Dado que en la prolongación de la linea PQ existe un punto P' que está más lejos de Q que P, y tal punto se encuentra todavía dentro del triángulo. Si ambos puntos P y Q se encuentran en el límite del triángulo, pero uno de ellos, por ejemplo P, no es un vértice, entonces es obvio que podemos encontrar un punto contiguo P' en el límite que se encuentre más lejos de Q que la distancia PQ. Por tanto, la distancia PQ es máxima únicamente si ambos puntos P Y Q son vértices; en otro caso, ciertamente, dicha distancia no es la distancia máxima. Así pues, PQ es un lado del triángulo y ha de ser obviamente el lado más - largo (fig. 5).

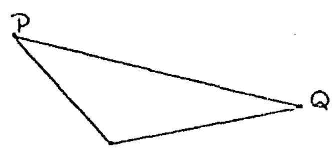


Fig. 5.

Nos parece obvio que puede realizarse el mismo experimento mental al referirnos a polígonos para "probar" el -- teorema siguiente: para que dos puntos de la superficie de un polígono sean máximamente distantes, dichos puntos han-de ser los de los vértices que sean máximamente distantes.

Nos parece que lo anterior debería ser totalmente convincente. Sin embargo, existe una posibilidad no tomada en cuenta que hecha por tierra el resultado. Si aplicamos el mismo proceso de experimentación mental a la figura 6:-

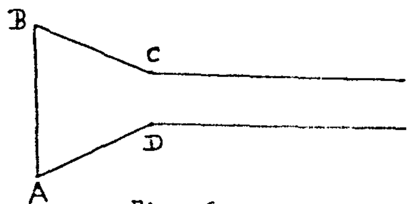
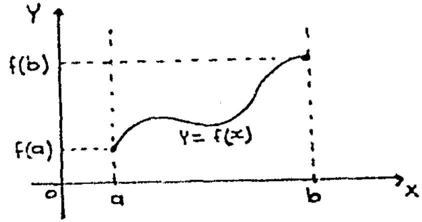


Fig. 6.

Supongamos que P y Q se encuentran en cualquier lugar, dentro o en el límite de la figura, incluyendo la posibilidad de que se encuentren en cualquiera de los cuatro vértices, A, B, C, D. (A no ser que PQ sea precisamente el lado AB, puede encontrarse un punto contiguo P' dentro de la figura, tal que la distancia P'Q sea mayor que la distancia PQ.) De forma que en los casos anteriores, para cada par de puntos P,Q podemos encontrar un par contiguo que sean en cada caso más distantes, excepto cuando el par en cuestión es A, B. Ningún otro par que no sea A, B puede darnos la distancia máxima. Al proseguir ahora estrictamente el argumento anterior se concluye que AB es la distancia máxima.

La Falsación del argumento anterior procede según las mismas líneas que en el caso del teorema de Euler para todos los poliedros.

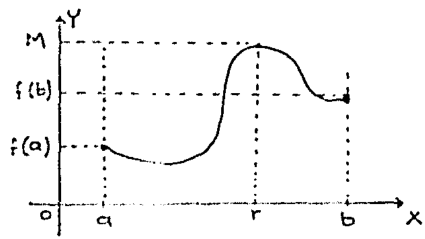
Intuitivamente se dice que una función y=f(x) es continua en un intervalo cerrado [a,b] , si su gráfica se pue de dibujar sin levantar el lápiz en todo el intervalo. - Un ejemplo de esta función puede ser:



Con esta misma idea de continuidad intuitiva, se puede dar el resultado:

1.- Toda función continua f sobre un intervalo cerrado [a, b] es acotada.

La ilustración del resultado anterior se puede ver en la figura que se da, donde f es la curva continua que inicia en el punto (a,f(a)) y que termina en el punto (b,f(b))



en la gráfica de f se observa que en r alcanza su máximo — que es M, de donde se deduce que para cualquier valor de -

Pensamos que habíamos mostrado más de lo que en realidad se mostró. En el segundo ejemplo, sólo se mostró que la máxima ha de ser tal y tal si es que existe la máxima en absoluto. Para el caso del teorema de Euler, sólo se mostró la veracidad del teorema para el caso en que la lamina de goma podía desplegarse de hecho sobre el plano sin ninguna cavidad.

Al analizar los procedimientos anteriores nos damos cuenta que, es necesario hacer uso de otra herramienta que nos ayude a confiar más en las pruebas que se den y ésta herramienta es la formalización porque si formalizamos una prueba de nuestro teorema dentro de un sistema formal, sabemos que nunca habrá un contraejemplo del teorema que pueda ser formalizado dentro del sistema, siempre que este sea consistente.

Ahora observamos que si la formalización se ajusta a ciertos requisitos informales, tales como que los contraejemplos suficientemente intuitivos esten formalizados en ella, etc., aumentan muchísimo el valor de las pruebas.

Resumiendo podemos decir que las pruebas en donde se utiliza la formalización son absolutamente fiables y esta es una de las razones por las cuales el matemático utiliza la formalización en su trabajo cotidiano.

II.3.-VENTAJAS DIDACTICAS DE LA FORMALIZACION.

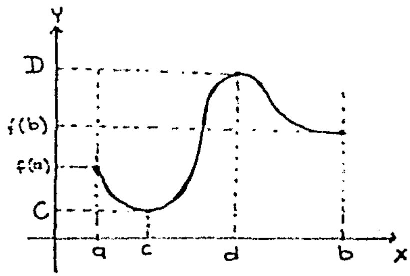
-Continuidad(intuitiva) y sus temas centrales.

x elemento del intervalo $[a,b]$, se tiene que $f(x) < N$, cuando $N=M+C$ (para $C>0$).

Otro resultado que se deduce haciendo uso de la con-tinuidad intuitiva es:

2.-Toda función continua f sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ tiene un máximo y un mínimo en ese intervalo.

Una descripción geométrica es la siguiente:



donde podemos ver que en c la función f alcanza su mínimo que es C, es decir $f(c)=C$ y en d alcanza su valor máximo D, esto es $f(d)=D$.

Como tercer ejemplo se da el teorema del valor intermedio.

3.-Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y si $f(a)\neq f(b)$, entonces f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ en el intervalo cerrado $[a,b]$. (8).

Este teorema afirma que si w es cualquier número en--

tre f(a) y f(b), entonces existe un número c entre a y b tal que f(c)=w. Si consideramos la gráfica de la función continua f como una curva que sin romperse une al punto (a, f(a)) con el punto (b,f(b)) como se ilustra en la fig. 1.

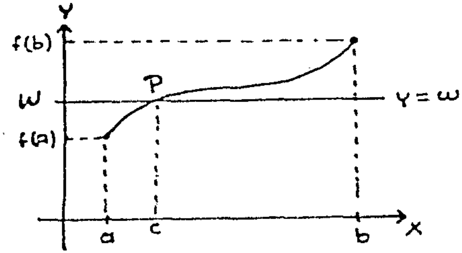


Fig. 1.

entonces para cualquier número w entre f(a) y f(b) se ve que la recta horizontal y=w corta a la gráfica por lo menos en un punto P. La abscisa c de P es un número tal que f(c)=w.

De manera análoga un cuarto resultado que se deduce haciendo uso de la intuición es que:

4.-Toda función continua es derivable; es decir en todo punto de su gráfica hay rectas tangentes.

Como podemos darnos cuenta este resultado es erróneo y este mismo error lo cometieron grandes matemáticos como Cauchy, pero es lo que se obtiene al utilizar la intuición, es por esto que no debemos confiar en absoluto en resultados que aparentemente sean muy claros pero que el analizarlos más a fondo se concluyen resultados falsos.

Una de las razones por las cuales se deducen intuitivamente resultados como el dado anteriormente, es porque nuestra mente está acostumbrada a pensar en curvas continuas como curvas suaves que no tienen picos, que es lo que en el ejemplo 4 provocó el error.

Por estas razones consideramos aceptable didácticamente el método adaptado por algunos libros de texto, los cuales presentan en principio un esquema intuitivo de la idea general para pasar luego a los detalles expuestos en orden formal.

La manipulación formal de las reglas de la lógica y fórmulas del álgebra pueden llegar mucho más lejos que la intuición, casi todos podemos constatar de inmediato que 3 rectas, tomadas arbitrariamente, dividen al plano en 7 partes (considerando al triángulo la sóla parte finita formada por 3 rectas). Pero casi nadie puede ver, incluso concentrándose, que 5 planos tomados arbitrariamente, dividen al espacio en 26 partes. Sin embargo se puede demostrar con todo rigor que el número es en efecto 26.

LLevando a cabo el plan, verificamos cada paso. Para ello nos podemos basar ya sea en la intuición o en las reglas formales. A veces es la intuición la que lleva la dedelantera, otras, el razonamiento formal. Es un ejercicio interesante y útil emplear los dos medios. Tratar de demostrar formalmente lo que se ha visto intuitivamente y de ver intuitivamente lo que se ha demostrado formalmente es un exelente ejercicio intelectual. Desgraciadamente es raro que se disponga en clases del tiempo suficiente para poder practicarlo (19).

Finalmente terminamos esta sección diciendo que sin- una formalización de los conceptos de límite y de conti-- nuidad, Weiertrass jámas hubiera construido una función - continua derivable en ningún punto.

III.-FORMALISMO Y RIGOR EN MATEMATICAS.

III.1.-EL RIGOR EN LAS MATEMATICAS.

Desde un punto de vista del desarrollo histórico de las metemáticas, en la época de los griegos (S. V a.c.) al descubrirse la inconmensurabilidad de algunas magnitudes geométricas, por ejemplo, que la diagonal de un cuadrado no es conmensurable por una parte alícota del lado del cuadrado. Además el decaimiento que se daba en la escuela pitagórica en particular, podemos decir que se presenta la primera crisis de las matemáticas.

Posteriormente a principios del siglo XIX, cuando Weiertrass independientemente de Bolzano, encontró la teoría de límites en relación a una teoría aritmética de irracionales, concebida por él mismo y por Dedekind, Méray y Cantor, tiempo que se considera como de la segunda crísis en los fundamentos de las matemáticas la cual llegó a superarse a través de A. Cauchy, al reemplazar los infinitesimales por el método de límites allá por los años de 1860-70. Se pensó entonces que las matemáticas habrían quedado así establecidas sobre bases totalmente sólidas.

Aproximadamente en 1800 comienzan a surgir serias preocupaciones a consecuencia de la falta de más claridad en algunos conceptos fundamentales como el de función, límites, derivada, integral, etc.

Así, en 1826 en una carta que Abel dirigió al profesor Christoffer Hanstein se quejaba de ..."La tremenda obscuridad que uno encuentra incuestionablemente en el análisis" (14).

Independientemente de la polémica sucitada entre --- Newton yLeibnits por el descurbimiento del cálculo de fluxiones, ellos mismos estaban insatisfechos con su explicación de los conceptos fundamentales del cálculo, por ejemplo la promesa que alguna vez leibnitz hizo a Hygens de -- volver a empezar haciendo todo como es debido, aunque nunca lo hizo. (7) P. 295. Sin embargo ambos empezaron a recibir críticas como la formulada por el físico-geométra ho-- landez Niev Wentijt (1654-1718) contra la falta de clari-- dad en los trabajos de Newton y la existencia dudosa de - las diferenciales de orden superior de Leibinitz. Critica- la inexactitud de despreciar las cantidas infinitesimales, en Newton, Barrow y Leibnitz y juzga oscuros y peligrosas- sus métodos del cálculo.(11).

El francés Michel Rolle (1652-1719) quien en su crítica sostenía que los nuevos métodos conducían a paralogis-- mos, y que el cálculo estaba lleno de ellos.

El filósofo G. Berkley (1685-1753) observaba una concepción vaga de las fluxiones como proporcionales a los - crecimientos evanescentes, la existencia misma de éstas -- cantidades infinitamente pequeñas. Así, en 1734 en su obra el Analyst, sostenía que al sustituir x+O en lugar de x en x^n y hacer que en el paso final d apareciera O, para obtener la fluxión de x^n, es un cambio en la hipótesis "...porque cuando se dice que los incrementos no valen nada o que no hay incrementos, la suposición anterior de que los elementos valían algo, o que había incrementos, queda destruida y sin embargo, se retiene una consecuencia de aquella - suposición, es decir, una expresión obtenida en virtud de la misma" (7). Si tales críticas no fueran tan fructíferas al menos sí obligaron a los autores a ser más atentos a las bases lógicas.

C. Maclaurin (1698-1746) con su tratado de fluxiones publicado en 1742 marcó el mayor grado de precisión lógica alcanzado en Inglaterra en el siglo XVIII. A su muerte (1746) y la de Johan Bernoulli en (1748) terminaron los que fueron los últimos discípulos directos de Newton y Leibnitz (11). La siguiente época estuvo dominada por L. Euler quien fuera discípulo de J. Bernoulli y por el matemático francés D'Alambert.

L. Euler (1707-1783) en quien primeramente realizó esfuerzos por establecer el conepto de función, este concepto de función comienza con las primeras relaciones entre dos variables y según nos narra E.T. Bell se remontaría hasta el comienzo mismo de las matemáticas entre los Babilonios y los Egipcios. Al inicio de su Introductio Euler define la función de una cantidad variable como una "expresión analítica" formada de cualquier manera con esta con esta cantidad variable, partiendo de este concepto y através de un estudio sistemático de todas las funciones elementales realizó contribuciones a la teoría de curvas planas. Por ejemplo, al estudiar las cónicas de una manera minuciosa la realiza haciendo uso de las coordenadas rectangulares y oblícuas y quizá por primera vez en él se encuentra una exposición analítica de los cambios de coordenadas. Después presenta un estudio general de las propiedades de las curvas como son; su forma, singularidades y curvatura (12).

Con referencia a las bases lógicas del cálculo, sus- ideas eran muy elementales, fundamentalmente descansan en una concepción formal y operativa para la obtención de re- sultados, quizá es la razón por la que pretendió suprimir las sospechas que pesaban sobre el cálculo al considerar - que nociones como "infinitamente grande" o "infinitamente- pequeño" carecían del misterio que se les atribuía.

En las obras principales de Euler culmina la intui--- ción y el formalismo, por ejemplo en la Introductio ya men sionada y en las Instituciones(   ) obra en la cual relega la geometría y presenta miniciosos y detallados desarro--- llos de las partes formales del cálculo diferencial e inte gral.

Siguiendo con E.T. Bell es Lagrange(1765-1843) el -- primero que reconoció que el cálculo se encontraba en una- situación nada satisfactoria. En sus obras Théorie des -- fonctions analytiques(1797-1813) y Calcul des fonctions - (1799-1806) intentó liberarse del conepto de función de Eu ler sin lograrlo, quedando en un mismo terreno de formali- zación. A diferencia de Euler, rechazó los infinitesimales y límites por considerarlos muy escabrosos para los princi piantes.

A.L. Cauchy (1789-1857) en sus trabajos sobre análi-- sis desarrolló el cálculo diferencial e integral basados - en el concepto de límite en sus lecciones sobre el Cálculo Infinitesimal(1823). En el prefacio de esa obra señala co- mo principal objetivo conciliar el rigor con la simplici--

dad que resulta de la consideración de los infinitesimales. Su concepto de límite "cuando los valores sucesivamente atribuídos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que llegan a diferir tan poco como se quiera de él, este último se llama límite de todos los demás" (12). Como puede observarse, tal concepto - es aritmético más que geométrico, además, la definición, - siendo más precisa e intuitiva, es verbal más que numérica. No obstante hay ambigüedad en su definición de continuidad por el uso de frases como "suficientemente pequeña", "llega ser","sigue siendo" las cuales más tarde habrán de ser- precisadas con un criterio existencial al introducir los términos ε, δ por Weiertras (1861) (12).

Sin embargo a Cauchy no le fué posible distinguir con claridad la relación entre función continua y función diferenciable pues él creyó toda su vida que toda función continua era diferenciable, cuestión que vino a clarificar - Bolzano al establecer definiciones más rigurosas de fun--- ción continua y el de derivada de una función al precisar- más claramente las relaciones que unen la diferenciabili-- dad y la continuidad de una función. Por la misma época - N.H. Abel (1802-1829) preocupada por la falta de claridad- como mencionamos al principio de este capítulo e inspirado en el rigor de Cauchy, llegó a corregir un error del mismo Cauchy sobre la continuidad de la suma de una serie convergente de funciones continuas haciendo uso de la idea de - convergencia uniforme.

J.L. D'Alembert (1717-1783). En algunas de sus memo--

rias en la que recoge sus investigaciones sobre la propagación del calor, presentada en 1807 a la academia de ciencias, Lagrange, Laplace y Legendre le criticaron su ensayo no sin cierta aspereza por la falta de una mayor, precisión, señalando que partes vitales de su análisis carecían de bases más sólidas.

Volviendo a presentar su memoria una vez revisado y con algunas correcciones se hizo acreedor al premio, pero ese mismo jurado por segunda vez volvieron a criticarle su falta de rigor. La contribución principal es que cualquier función f(x) se puede expresar mediante una serie de Fourier, como lo entrevió un poco antes Daniel Bernoulli (1700-1782). Aunque en el tratado de Fourier no se encontraba una deducción completa del enunciado.

Carl Weiertrass (1815-1897) que según expresa E.T. Bell en su Historia de las Matemáticas (P. 296-97), al morir (1897) había resumido los progresos de los cien años anteriores através de un tratado minucioso en el cual intentó fundamentar el análisis al tratar de darle el mayor grado de rigor posible relegando la intuición. En 1861, precisó más la definición de límite al introducir los símbolos ε y δ, contribuyendo así a esclarecer expresiones ambiguas como "llega a ser", "sigue siendo", "tan pequeño como cualquier cantidad dada" como sucedía en las definiciones de Cauchy y Bolzano. De la misma manera dió más precisión a la definición de continuidad a partir de la simplificación de un teorema ya demostrado por Dirichlet, la cual era equivalente a la de Bolzano y Cauchy. Posterior--

mente entre 1861 y 1874 al construir una función continua y sin derivada en ningún punto, dió origen a un replanteamiento en los fundamentos del análisis, propiciándose con ello la construcción del sistema de los números reales(12). Con este ejemplo se puso punto final a la excesiva confianza que tenía en la intuición.

En resumen, los matemáticos del S. XIX se conformaban con una comprensión intuitiva de los números reales operando sobre una base más concreta que lógica, lo cual no deja de ser una prueba de que el progreso de las matemáticas es algo más que su desarrollo lógico. Al introducirse el rigor en el análisis resaltaba la falta de claridad y la imprecisión de los números reales. Un estudio más minucioso de los límites puso de manifiesto la necesidad de llegar a una mejor comprensión de los números reales desde un punto de vista lógico.

Al principio de este siglo (1900) H. Poincaré (1854--1912) entusiasmado expresaba que "si nos tomamos el trabajo de ser rigurosos, lo único que nos puede engañar son silogismos o los llamamientos a la intuición del número puro. Hoy día (1900) podemos decir que se ha alcanzado el rigor absoluto" (7) P. 308. Cuestión que distaba enormemente de la idea que tenemos hoy en día. Pués ya en esa época el problema del rigor sobre los fundamentos de la matemática empezaba a ser trabajado a partir de tres concepciones diferentes acerca de los fundamentos de las matemáticas y que llegaron a constituirse en lo que hoy conocemos como la escuela Logicista, la Formalista y la Intuicionista.

III.2.-EL RIGOR MATEMATICO

El bosquejo histórico dado en la sección anterior tiene como finalidad mostrar en forma aproximada y breve que el desarrollo de las matemáticas no ha sido un resultado espontáneo en el que las definiciones y conceptos aparezcan de manera clara y acabada, antes bien son resultados de la entrega y dedicación esforzada de generaciones de matemáticos que con su ímpetu y capacidad de realización han ido aclarando y precisando las dificultades que han surgido en el desarrollo de esta ciencia al procurar ser cada vez más rigurosos.

La cuestión del rigor en matemáticas es difícil por lo indefinible, abordarla significa desde cierto punto de vista, tratar con un razgo que se da en el propio desarrollo de esta ciencia, el cual podemos caracterizar por un afán de claridad, precisión y minuciosidad de los objetos y resultados matemáticos que se establecen, y que es inherente a la actividad del matemático; tal vez sea esa una razón por la que no encontramos que los matemáticos propiamente le hayan abordado como una cuestión explícita salvo contadas excepciones y entonces ésta sea tratada en un ámbito histórico y de la filosofía de las matemáticas. Sin embargo ya desde fines del siglo pasado y principios del presente algunos matemáticos como Brower, Weyl, Heyting, Hilbert, Russell, etc., en sus intentos por establecer una fundamentación absoluta de las matemáticas aunque sin lograr sus objetivos, nos han proporcionado a través de sus trabajos modelos de rigor más refinados a partir de los cuales puede afirmarse, constituyen en nuestra época elementos esenciales para el avance en el desarrollo de las matemáticas con lo que significa que podamos siquiera imaginar cuáles pueden ser los patrones de rigor que rijan 150 años después. Recuérdese que la geometría euclideana se consideró por más de dos mil años como un modelo de rigor lógico.

Uno de los pocos matemáticos en este siglo, que se ha referido de manera explícita sobre el rigor es R. Thom (13) P. 120. Al señalar al respecto tres actitudes posibles a seguir:

a) CONCEPCION FORMALISTA.-Una proposición (P) es verdadera en un sistema formalizado (S) si puede ser deducida apartir de los axiomas de (S) mediante un número finito de operaciones válidas en (S).

b) CONCEPCION REALISTA O PLATONICA.-Los entes matemáticos en tanto que ideas platónicas, existen independientemente de nuestra mente. Una proposición (P) es verdadera cuando expresa una relación existente entre las ideas, es decir una idea jerárquicamente superior que estructura un conjunto de ideas subordinadas a ella.

c) CONCEPCION EMPIRISTA O SOCIOLOGICA.-Una demostración (D) es considerada como rigurosa si los mejores especialistas en la materia no tienen nada que objetar.

Según R. Thom en la obra citada expresa que es necesario que se adopte una actitud definida ante el concepto del rogor, dado que no existe "ninguna definición rigurosa del rigor" pues considera que "es rigurosa toda demostración capaz de sucitar en cualquier lector suficientemente preparado un estado de ánimo que le lleve a mostrarse de acuerdo. De ser así, es porque tenemos una idea suficientemente clara de los sómbolos utilizados como para que su combinatoria implique la conclución deseada". Agregando enseguida que desde un punto de vista el rigor (o su contrario) la imprecisión es una propiedad local del razonamiento matemático.

Del análisis histórico anterior y el apartado referente al rigor matemático observamos que el rigor constituye un razgo en el quehacer -como proceso histórico- que realizan los matemáticos en su actividad como tal, el cual cambia y en el que se avanza según las épocas y las condiciones históricas en que se realiza la actividad matemática.- Hablar de un nivel de rigor más elevado, es hablar de resultados que son producto de una práctica permanente de trabajo, en cierto sentido una meta y un medio. Una meta como culminación de trabajos realizados, un medio en cuanto esos trabajos se constituyan como punto de partida, y en este proceso el afán de establecer bases lógicas sólidas.

III.3.-EL RIGOR MATEMATICO EN EL FORMALISMO.

El rigor en el formalismo alcanza un pleno grado de expresión en los trabajos de Hilbert, al intentar dar una fundamentación rigurosa de las matemáticas haciendo uso de las pruebas absolutas de consistencia. El que esto no sea posible a partir de los resultados de Gödel no hace menos riguroso el desarrollo de la matemática formal ni parece que en su actividad profesional sufran demasiado los matemáticos a causa de esta situación. Porque, en la práctica, de hecho el pensamiento del matemático no es y ni será un pensamiento formalizado.

Sin embargo dada la naturaleza deductiva de los sistemas formales podemos concluir con la afirmación que hace Robert Blnché en su obra ya citada, que el rigor matemático en el formalismo se alcanza bajo las condiciones fundamentales que se dan:

1.-Que sean enunciados explícitamente los términos primeros, con ayuda de los cuales se propone uno definir todos los otros.

2.-Que sean enunciadas explícitamente las proposiciones primeras, con ayuda de las cuales se propone uno demostrar todas las otras.

3.-Que las relaciones enunciadas entre los términos primeros sean puras relaciones lógicas, y permanezcan independientes del sentido concreto que se pueda dar a los términos.

4.-Que sólo estas relaciones intervengan en las demostraciones, independientemente del sentido de los términos (lo que prohibe, en particular, tomar prestado algo a la consideración de las figuras).

CONCLUSIONES.

1.-Un modo de organizar un cuerpo conocido de material de un tema matemático es por medio de la axiomatización. Los axiomas se inventan no para crear la teoría sino para reproducirla.

2.-Se puede decir que uno de los problemas del formalismo es que no tiene ninguna semejanza con las matemáticas como en realidad se viven.

3.-Podemos decir que el matemático formalista en su trabajo cotidiano no se queda únicamente con los símbolos sin significado, sino que los símbolos son usados como auxiliares para pensar y para representar ideas, porque su trabajo es un trabajo con ideas.

4.-Acerca del rigor decimos que es algo indefinible pero que va a la par con el trabajo y desarrollo de las matemáticas.

BIBLIOGRAFIA BASICA.

(1).Abraham Fraenkel. Art. Selección Scientific American.- Matemáticas en el Mundo Moderno. Versión Española. Miguel Guzman Ozamiz. Ed. Blume. Rosario, 17.-Madrid-5.

(2).-A. Dou S.J. Fundamentos de la Matemática. Nueva Colección Labor. Ed. Labor, S.A. Barcelona 1970.

(3).-Carl B. Boyer. A History of Mathematics. John Wiley Y Sons. Inc.

(4).-Cesar N. Molina Flores. Matemática y Filosafía (Reflexiones para de delimitación del terrotorio filosófico) México, 1954.

(5).-D. Dubarle. Art. La Utilidad Matemática de la Formalización. Suplemento del seminario de problemas científicos. UNAM 2a. Serie No. 7 (1958).

(6).-Ernest Nagel y James R. Newman. El Teorema de Gödel.- Conacyt. Méx. 1981.

(7).-E.T. Bell. Historia de las Matemáticas. Traducción de R. Ortiz. 2a. Ed. en Español. F.C.E. Méx. 1985.

(8).-Earl W. Swokowsky. Cálculo con geometría Analítica. - Traducido por José Luis Abreu y Helga Fetter. Ed. W.-I. Iberoamérica. P. 82.

(9).-F. Le Lionnais y Colaboradores. Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático. Traducción de Nestor-Míguez. Buenos Aires 1976.

(10).-Irme Lakatos. Matemáticas, Ciencia y Epistemología-- Alianza Universitaria. Versión Española de Diego Robles Nicolás.

(11).-José Babini. Historia de las Ideas Modernas en Matemáticas. Universidad de Buenos Aires.

(12).-Jean-Paul Collete. Historia de las Matemáticas. Traducción Pilar González Gayoso. T. II. S. XXI. "a. Ed. en español 1986. Méx. D.F.

(13).-J. Piaget G. Choquet J. Diedoné R. Thom y otros. La- Enseñanza de las Matemáticas Modernas. Selección y prólogo de Jesús Hernández. Alianza Editorial S.A. - Madrid 1978.

(14).-Morris Kline. Mathematical Thought From Ancient to - Moder Times. Cap 40. Nuw York. Oxford University. - Press 1972.

(15).-N. V. Efímov. Geometría Superior. Traducido del ruso por J.J. Tolosa y Yu. P. Murzín. Ed. Mir 1984. P. 36 37, 39, 47-50, 62 y 74.

(16).-Robert Blanché. La Axiomática. Centro de Estudio Filosófico. UNAM. 1965.

(17).-Selección de Scientific American. Matematicas en el- Mundo Moderno. Quine. "Los Fundamentos de la Matemática". Cap. IV. Versión Española de Miguel de Guzmán Ed. Blume. Rosario, 17.-Madrid-5. Primera Ed. española 1974 de la edición americana.

(18).-Stephan Körner. Introducción a la Filosofía de la Matemática. Traducción de Carlos Gerhard. Ed. Siglo - XXI.

(19).-G. Polya. Cómo plantear y resolver problemas. Serie de Matemáticas. Ed. Trillas. Méx. 1974.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA.

(20).-Abraham A. Fraenkel. Teoría de los conjuntos y Lógica. Traducción de Roberto Caso Berch. UNAM. Instituto de investigación Filosófica 1976. Sec. 4 y 5.

(21).-Colectivo de autores. Metodología del Conocimiento - Científico. Academia de Ciencias de Cuba. Edición al cuidado de Roberto Rozsa Burman. Diseño Roberto Casanueva Ayala. Corrección Lázaro Rodríguez Olivera. - Presencia Latinoamericana, S.A. Méx. D.F. 1981.

(22).-David Hilbert. Foundations of Geometry. Second Edition. 1971 by the Open Court. Publishing Company. La Salle, Illinois. Cap. I y II.

(23).-Dirk J. Struik. Historia Concisa de las Matemáticas. Consejo Editorial del I.P.N. México, D.F. 1980. Cap. VII y VIII.

(24).-Henri Poincaré. Filosofía de la Ciencia. Selección e introducción Eli de Gortari. UNAM. Méx. 1978.

(25).-Irme Lakatos. Proofs and Refutations. The Logic of-- Mathematics Discovery. Edited by John Worralland E-- lie Zahar. Cambridge University Press 1976. Cap. 5.

(26).-James R. Newman. El mundo de las matemáticas. Colección Sigma # 5. Presentación de la edición española, por Manuel Sachistan. Ediciones Grijalbo, S.A. Barcelona-México D.F. 1969. Cap I.

(27).-José Babini. Historia Suscinta de la Matemática. Tercera Ed. Esp. Calpe Madrid 1969. Cap. IX.

(28).-La Ciencia y la Hipótesis. Traducción A. Banfi y José Banfi. Tercera Ed. 1963 Esp. Calpe S.A. Madrid.

(29).-Morris Kline. El Fracaso de la Matemática Moderna. - Siglo XXI Editores, S.A. Cap. 4,5 y 6.

(30).-Nicolas Bourbaki. Elementos de Historia de las Matemáticas. Versión española de Jesús Hernández. Alianza- Editorial, S.A. Madrid 1972. Pag. 11-70.

(31).-R. Courant y H. Robbins. ¿Qué es la Matemática?. Traducción del ingles Luis Bravo Gala. Cuarta Ed. 1964. Editorial Aguilar.

(32).-S.C. Kleene. Logic Mathematic. John Wiley and Sons - Inc. 1967. Parte II. Cap IV.

(33).-Yu I. Manin. Lo Demostrable e Indemostrable. Trad. - del ruso por E.M. Kotenko. Ed. Mir Moscú 1979. Pag. 237-256.

Artículos.

(34).-Abraham Robinson. Formalism 64. University of Calif. Los Angeles, California, U.S.A.

(35).-Abraham A. Fraenkel. On the Crisis of the Principle of the Excluded Middle. Scripta Maths. 17(1957).

(36).-Abraham A. Fraenkel. The Recent Controversies About the Foundation of Mathematics. Scripta Math 13-14 - (1947-48).

(37).-Hilary Putman. Mathematics, Matter and Method. Philosophical Paper, Volume I. Cambridge University Press. Cambridge London. New York. Melbourne.

(38).-José Alfredo Amor M. y Rafael Rojas B. Sistemas Formales. Comunicación Interna No. 1. 1981. Dep. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. UNAM.

(39).-Jack J. Bulloff. Thomas C. Holyoke S.W. Hahn. Foundations of mathematics. Symposium Papers Commemorating the sixtieth Birthday of Kurt Gödel. Springer-Verlay New York Inc. 1969.

(40).-Haskell B. Curry. The Purposes of Logical Formalization. Logique et Analyse 11(#43) (1968).

(41).-Ruben Hersh. Algunas Sugerencias para revivir la filosofía de las Matemáticas. Comunicación interna N. 3. 1981. Dep. de Matematicas. Fac. de Ciencias. UNAM. - Traducción y prólogo José Alfredo Amor Montaño.