2 ej.
42

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS CARACTERIZACIONES HOMOLOGICAS DE ANILLOS REGULARES

TESIS

Que para recibir el titulo de

MATEMATICO

presenta

GUSTAVO TAPIA SANCHEZ

MEXICO, D.F.

1986

I N D I C E

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo está basado principalmente en el artículo de Ahsan J. e Ibrahim A. "Some Homological Characterizations of Regular Rings", aunque para su mejor elaboración fué necesario consultar otros artículos, los cuales se mencionan en la bibliografía.

El trabajo está integrado en tres partes:

i) Los capítulos I y II que son más bien introductorios. En el primero, se prueban varios resultados conocidos, principalmente diversas caracterizaciones de módulos planos y anillos coherentes; en el segundo, se expone una breve introducción de anillos regulares, y ejemplos de éstos.

ii) Los capítulos III - VI, que forman propiamente el desarrollo de la tesis.

En cada uno de estos capítulos se comienza definiendo un concepto (módulo coplano, módulo casi plano, anillos QI - generalizados, etc.) y se dan algunos ejemplos y caracterizaciones de dicho concepto. Posteriormente se establece la relación que guardan con los anillos regulares.

iii) Al final, se incluye una serie de contraejemplos a implicaciones inversas de algunas proposiciones probadas a lo largo del trabajo.

Durante el desarrollo de la tesis, se usan varios resultados, algunos conocidos y otros no. La mayoría de éstos se prueban en los primeros capítulos y de otros solo se da la referencia, ya que su prueba se sale del objetivo central del trabajo, el cual se sugiere por sí solo en el título.

CAPITULO

I

PRELIMINARES

En ésta sección, probaremos varios resultados que nos servirán posteriormente.

Recordemos que un módulo M_R es plano si y solo si para cada monomorfismo $f: K \to N$ de R-módulos izquierdos, el morfismo inducido

$$1_M \otimes f : M \otimes_R K \longrightarrow M \otimes_R N$$

es inyectivo.

Proposición 1.1.- Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos derechos. Entonces $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es plano si y solo si M_i es plano $\forall i \in I$.

Demostración.- Sea $f: K \to N$ un monomorfismo de R-módulos izquierdos. Tenemos entonces un diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_R K & \longrightarrow & (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_R N \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ \bigoplus_{i\in I} (M_i \otimes_R K) & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in I} (M_i \otimes_R N) \end{array}$$

conmutativo. De aquí se sigue claramente que $1_{\oplus M_i} \otimes f$ es monomorfismo $\Longleftrightarrow$ $1_{M_i} \otimes f$ lo es, $\forall i \in I$.

Corolario 1.2.- Cada módulo proyectivo es plano.

Demostración.- Es claro que R_R es plano, ya que $\forall N \in R\text{-Mod}$, $R \otimes_R N \simeq N$. Así, si P_R es proyectivo entonces P es sumando directo de un libre, el cual es plano, por ser suma directa de copias de R. Por lo tanto, P_R es plano.

Definición.- Sea M_R un módulo. El módulo carácter de M es $M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, en donde

se define para cada $r\in R$ y $f\in M^*$, $r\cdot f\in M^*$ tal que
$$(r\cdot f)(m)=f(m\cdot r).$$
En el lema 3.34 [10] se prueba que la sucesión
$$0\longrightarrow M'_R \xrightarrow{\alpha} M_R \xrightarrow{\beta} M''_R \longrightarrow 0$$
es exacta si y solo si la sucesión
$$0\longrightarrow (M'')^* \xrightarrow{\beta^*} M^* \xrightarrow{\alpha^*} (M')^* \longrightarrow 0$$
es exacta.

Veamos otra forma de ver si un módulo M_R es plano o no.

Teorema 1.3.- Un módulo M_R es plano $\Leftrightarrow$ M^* es inyectivo como R-módulo izquierdo.

Demostración.- "$\Rightarrow$" Sup. que M_R es plano y sea
$$0\longrightarrow {}_RN' \longrightarrow {}_RN$$
sucesión exacta. Entonces la sucesión
$$0\longrightarrow M\otimes_R N' \longrightarrow M\otimes_R N$$
es exacta. Se sigue que $(M\otimes_R N)^*\rightarrow (M\otimes_R N')^*\rightarrow 0$ es exacta y por lo tanto, el siguiente diagrama es conmutativo.
$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M\otimes_R N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M\otimes_R N', \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0\\
\wr\mathrm{l} & & \wr\mathrm{l} & & \\
\mathrm{Hom}_R(N, M^*) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(N', M^*) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$
Por tanto, el último renglón es exacto, i.e., ${}_RM^*$ es inyectivo.

"$\Leftarrow$" Sup. que ${}_RM^*$ es inyectivo y $0\longrightarrow N'\longrightarrow N$ es sucesión exacta de R-módulos izquierdos.

Así, el diagrama anterior es conmutativo con el renglón inferior exacto. Por tanto, el renglón superior también lo es, y por lo tanto, la sucesión

$$0 \longrightarrow M\otimes_R N' \longrightarrow M\otimes_R N$$

es exacta, i.e., M_R es plano.

Teorema 1.4.- Sea M_R un módulo. Son equivalentes:

i) M_R es plano.

ii) M_R es plano relativo a $_RR$.

iii) $\forall\, _RI \leq R$, el $\mathbb{Z}$-epimorfismo

$\alpha: M\otimes_R I \longrightarrow MI \quad \ni.\ \alpha(m\otimes i) = m\cdot i$

es monomorfismo.

Demostración.- i) $\Rightarrow$ ii) Obvio.

ii) $\Leftrightarrow$ iii) Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M\otimes_R I \arrow[r, "1_M\otimes i"] \arrow[d, "\alpha"'] & M\otimes_R R \arrow[d, "\wr|"] \\ MI \arrow[r, hook, "i"'] & M \end{tikzcd}$$

Así, tenemos que $1_M\otimes i$ es monomorfismo si y solo si α lo es.

ii) $\Rightarrow$ i) Probemos que $_RM^*$ es inyectivo. Sea $_RI \leq R$ entonces $0 \to M\otimes_R I \to M\otimes_R R$ es exacta.

$$\therefore\ (M\otimes_R R)^* \longrightarrow (M\otimes_R I)^* \longrightarrow 0$$

es exacta, de donde,

$$\mathrm{Hom}_R(R, M^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(I, M^*) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Observación.- En el inciso (iii) del teorema anterior podemos suponer solo que $_RI$ es f.g., pues si $_RI \leq R$ es cualquier ideal y $\alpha(\sum_{i=1}^n m_i\otimes r_i) = 0$ entonces $\sum_{i=1}^n m_i\cdot r_i = 0$

Así, si $J = Rr_1 + \ldots + Rr_n$ entonces $\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes r_i = 0$ como un elemento de $M \otimes_R J$. De aquí, es claro que también lo es como un elemento de $M \otimes_R I$.

El siguiente teorema resuelve la cuestión de cuándo un cociente de un módulo plano es plano. (En general, esto no siempre sucede; por ejemplo, si $R = \mathbb{Z}$ es bien sabido que un grupo abeliano es plano $\Leftrightarrow$ es libre de torsión. Así, el grupo $\mathbb{Z}$ es plano, pero el cociente $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$ no lo es).

Teorema 1.5.- Sea M_R un módulo plano y sup. que la sucesión

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$$

es exacta. Entonces M'_R es plano $\Leftrightarrow$ $\forall_R I \leq R$, $KI = K \cap MI$.

Demostración.- Tenemos el siguiente diag. conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
K \otimes_R I \arrow[r, "i \otimes 1_I"] \arrow[d, "\beta"] & M \otimes_R I \arrow[r, "f \otimes 1_I"] \arrow[dd, "\alpha"', "\simeq"] & M' \otimes_R I \arrow[r] \arrow[dd, "\alpha'"'] & 0 \\
KI \arrow[d, phantom, "\cap"] & & & \\
0 \arrow[r] & K \cap MI \arrow[r, "j"'] & MI \arrow[r, "f|_{MI}"'] & M'I
\end{tikzcd}$$

donde j es la inclusión, β, α y α' son los morfismos canónicos y además, los renglones son exactos. (α es isomorfismo pues por hipótesis, M_R es plano). Pero entonces es claro que α' es monomorfismo $\Leftrightarrow$ β es epimorfismo $\Leftrightarrow$ $KI = K \cap MI$.

En otras palabras, M'_R es plano $\Leftrightarrow$ $KI = K \cap MI$.

Observación.- Como en el teorema anterior, tenemos que si $KI = K \cap MI$, $\forall_R I \leq R$ f.g. entonces M'_R es plano.

Lema 1.6.- Supongamos que

$$0 \longrightarrow K_R \longrightarrow F_R \longrightarrow M_R \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, donde F es libre con base $\{x_i\}_{i\in I}$. Entonces M_R es plano $\Leftrightarrow \forall v \in K$, $v \in K\cdot I_v$ donde $I_v = Rr_1 + \ldots + Rr_n$ si $v = \sum_{j=1}^{n} x_{i_j} r_j$.

Demostración.- "$\Rightarrow$" Sea $v \in K$ entonces

$$v \in K \cap F\cdot I_v = K\cdot I_v$$

pues por hipótesis, M_R es plano.

"$\Leftarrow$" Sea ${}_R I \leq R$ ideal y sea $v \in K \cap F\cdot I$. Entonces tenemos que $v \in K\cdot I_v$ y además $I_v \subset I$

$$\therefore \quad v \in KI_v \subset K\cdot I$$

$$\therefore \quad KI = K \cap F\cdot I \quad , \forall\, {}_R I \leq R$$

Por el teorema anterior, M_R es plano.

Teorema 1.7.- Consideremos la sucesión exacta del lema anterior. Son equivalentes:

i) M_R es plano.

ii) $\forall v \in K, \exists\, \theta: F \to K \ \text{ t.q. } \ \theta(v) = v$.

iii) $\forall v_1, \ldots, v_n \in K, \exists\, \theta: F \to K \ \text{ t.q. } \ \theta(v_i) = v_i, \ \forall i = 1, \ldots, n$.

Demostración.- i) $\Rightarrow$ ii) Sea $v \in K$ y sup. que $v = \sum_{i=1}^{n} x_{j_i} r_i$. Entonces $v \in K\cdot I_v$, i.e., $v = \sum_{j=1}^{s} k_j \cdot \alpha_j$ con $k_j \in K$ y $\alpha_j \in I_v$.

Pero $\alpha_j = s_{j_1} r_1 + \ldots + s_{j_t} r_t$, de donde

$$v = \sum_i k_i' \cdot r_i \qquad \text{donde} \qquad k_i' = \sum_j k_j \cdot s_{j_i} \in K.$$

Así, definimos $\theta: F \longrightarrow K$ t.q. $\theta(x_{j_i}) = k_i'$ y $\theta(x_\alpha) = 0$ si $\alpha \neq j_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Es claro que θ es el morfismo requerido.

ii) $\Rightarrow$ i) Sea ${}_R I \leq R$ y $v \in K \cap FI$. Entonces $\exists\, \theta: F \to K$ tal que $\theta(v) = v$. Así, si $v = \sum_{i=1}^{n} x_{j_i} r_i$ entonces

$$v = \theta(v) = \sum_{i=1}^{n} \theta(x_{j_i}) \cdot r_i \in K\cdot I$$

$$\therefore M_R \text{ es plano.}$$

ii) $\Rightarrow$ iii) Por inducción sobre n.

Si $n=1$, es la hipótesis de (ii). Así, sup. válido para $n-1$, $n\geq 2$, y sean $v_1,\dots,v_n \in K$.

Por (ii) $\exists\, \theta_n : F \to K \;\ni.\; \theta_n(v_n) = v_n$. Definimos $v_i' \in K$ como $v_i' = v_i - \theta_n(v_i)$, $\forall i = 1,2,\dots,n-1$.

Por hipótesis de inducción, $\exists\, \theta' : F \to K$ tal que $\theta'(v_i') = v_i'$, $\forall i = 1,2,\dots,n-1$.

Así, definimos $\theta : F \to K$ como sigue:

$$\theta(x) = \theta'(x) + \theta_n(x) - \theta'(\theta_n(x)).$$

Entonces tenemos que:

$$\theta(v_i) = \theta'(v_i) - \theta'(\theta_n(v_i)) + \theta_n(v_i) = \theta'(v_i') + \theta_n(v_i) =$$
$$= v_i' + \theta_n(v_i) = v_i \quad , \quad \forall i = 1,\dots,n-1.$$

y $$\theta(v_n) = \theta'(v_n) + \theta_n(v_n) - \theta'(\theta_n(v_n)) = \theta'(v_n) + v_n - \theta'(v_n) =$$
$$= v_n.$$

iii) $\Rightarrow$ ii) Es obvio.

Proposición 1.8.- Un módulo M_R es plano si y solo si satisface:

Si $\sum_{j=1} m_j a_j = 0$ con $m_j \in M$, $a_j \in R$ entonces $\exists\, u_1,\dots,u_m \in M$ y $c_{ij} \in R$ $\forall i = 1,\dots,m$, $\forall j = 1,\dots,n$ tales que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_j = 0 \quad , \quad \forall i = 1,\dots,m. \qquad \text{y}$$
$$\sum_{i=1}^{m} u_i c_{ij} = m_j \quad , \quad \forall j = 1,\dots,n.$$

Demostración.- "$\Rightarrow$" Sup. que $\sum_{j=1}^{n} m_j a_j = 0$ y sea $I = Ra_1 + \dots + Ra_n$. Consideremos el R-módulo izq. libre $F = \bigoplus_{j=1}^{n} Rx_j$ y la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\;i\;} F \xrightarrow{\;f\;} I \longrightarrow 0$$

donde $f(x_j) = a_j$, $\forall j = 1,\dots,n$. Por el teorema 1.4, tenemos que $0 = \sum m_j \otimes a_j = \sum m_j \otimes f(x_j)$, i.e., $\sum m_j \otimes x_j \in \mathrm{Ker}(1_M \otimes f) =$

$= \mathrm{Im}(1_M \otimes i)$. Por tanto, existen $\mu_1,\dots,\mu_m \in M$, $K_1,\dots,K_m \in K$ tales que

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \otimes x_j = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \otimes K_i$$

Pero cada $K_i \in F$, de donde $K_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j$, $\forall i$.

$$\therefore \sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_j = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} f(x_j) = f(K_i) = 0 \quad , \forall i = 1,\dots,m.$$

Además, tenemos que:

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \otimes x_j = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \otimes K_i = \sum_{i=1}^{m} (\mu_i \otimes \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} \mu_i c_{ij} \otimes x_j)$$

Pero ambos miembros pertenecen a $M \otimes_R F \simeq \bigoplus_{j=1}^{n} (M \otimes_R R x_j)$. Así, tenemos que $\forall j = 1,\dots,n$,

$$m_j \otimes x_j = \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_{ij} \otimes x_j$$
$$\therefore \quad 0 = (\sum_{i=1}^{m} \mu_i c_{ij} - m_j) \otimes x_j$$

Ahora bien, como M_R es plano y $R x_j \simeq R$ entonces $M \otimes R x_j \simeq M \otimes R \simeq M$ y de hecho el isomorfismo α es tal que $\alpha(m) = m \otimes x_j$.

$$\therefore 0 = \alpha (\sum_{i=1}^{m} \mu_i c_{ij} - m_j), \text{ de donde }, 0 = \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_{ij} - m_j$$
$$\therefore \quad m_j = \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_{ij} \ , \ \forall j = 1,2,\dots,n.$$

"$\Leftarrow$" Sea ${}_R I \leq R$ y sup. que $a_j \in I$, $m_j \in M$ son tales que

$$0 = \sum_j m_j . a_j .$$

Por hipótesis, $\exists\ \mu_i \in M$ y $c_{ij} \in R$ tales que

$$\sum_j c_{ij} a_j = 0 \quad y \quad \sum_i \mu_i c_{ij} = m_j .$$

$$\therefore \sum_j m_j \otimes a_j = \sum_j (\sum_i \mu_i c_{ij}) \otimes a_j = \sum_i (\mu_i \otimes \sum_j c_{ij} a_j) = \sum_i \mu_i \otimes 0 =$$
$$= 0$$

Por el teorema 1.4, M_R es plano.

Definición.- Un anillo R es coherente derecho (izq.) si cada ideal derecho (izq.) f.g. es finitamente presentado, i.e., para cada suc. exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

con F libre y f.g., entonces K es f.g.

Ejemplos.- i) Si R es neteriano izquierdo entonces R es coherente izq. Esto es claro, pues cada submódulo de un módulo f.g. es f.g.

ii) Si R es semihereditario izq. entonces R es coherente izq. Para ver esto, sea ${}_RI \leq R$ f.g. y

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

sucesión exacta, con F libre y f.g.

Ya que I es proyectivo, la sucesión se escinde.

$\therefore F = K \oplus I'$ con $I' \simeq I$.

$\therefore K \simeq F/I'$, i.e., K es f.g.

$\therefore I$ es fin. presentado.

Teorema 1.9 .- Sea R un anillo. Son equivalentes:

i) Cada producto directo de módulos derechos planos es plano.

ii) $(R^A)_R$ es plano, para cada conjunto A.

iii) R es coherente izquierdo.

Demostración.- i) $\Rightarrow$ ii) Esto es obvio, pues R_R es plano.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea ${}_RI \leq R$ ideal f.g. y supongamos que tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \xrightarrow{f} I \longrightarrow 0$$

con F libre con base $x_1, \ldots, x_n$.

Sea $a_j = f(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$. y $k \in K$, entonces

$$k = r_{k_1} x_1 + \ldots + r_{k_n} x_n$$

y definimos $v_1, \ldots, v_n \in R^K$ $\ni$. $v_j = (r_{k_j})_{k \in K}$. Así, tenemos que

$$0 = f(\kappa) = \sum_{j=1}^{n} r_{\kappa j} a_j \text{ , de donde, } \sum_{j=1}^{n} v_j a_j = \left(\sum_{j=1}^{n} r_{\kappa j} a_j\right)_{\kappa\in K} = \bar{0}$$

Pero por hipótesis, R^K es plano y por la proposición anterior, tenemos que $\exists\, \mu_1,\ldots,\mu_m \in R^K$, $c_{ij}\in R$ ∍.

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_j = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_{ij} = v_j .$$

Así, definimos $K_1,\ldots,K_m$ como sigue:

$$K_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \in F \qquad \forall i=1,2,\ldots,m.$$

Entonces $f(K_i) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_j = 0$, i.e., $K_i \in K$, $\forall i$. Veamos que $K = \langle K_1,\ldots,K_m\rangle$. Si $\kappa\in K$ entonces

$$\kappa = \sum_{j=1}^{n} r_{\kappa j} x_j = \sum_{j=1}^{n} \pi_\kappa\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i c_{ij}\right)\cdot x_j = \sum_{i=1}^{m} \pi_\kappa(\mu_i)\cdot \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \pi_\kappa(\mu_i)\cdot K_i .$$

iii) ⇒ i) Sup. que R es coherente izq. y sup. que $\{M_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una familia de R-módulos derechos planos. Para cada $\alpha\in J$, consideremos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K_\alpha \longrightarrow F_\alpha \longrightarrow M_\alpha \longrightarrow 0$$

con F_α libre. Así, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \prod_{\alpha\in J} K_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha\in J} F_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha\in J} M_\alpha \longrightarrow 0$$

y si ${}_R I \leq R$ es ideal f.g. entonces $(\prod_{\alpha\in J} K_\alpha)\cdot I = \prod_{\alpha\in J} K_\alpha\cdot I$.

Si probamos que $\prod_{\alpha\in J} F_\alpha$ es plano tendremos que

$$\left(\prod_{\alpha\in J} K_\alpha\right)\cdot I = \prod_{\alpha\in J} K_\alpha I = \prod_{\alpha\in J}(K_\alpha \cap F_\alpha I) = \left(\prod_{\alpha\in J} K_\alpha\right) \cap \prod_{\alpha\in J}(F_\alpha I) =$$
$$= \left(\prod_{\alpha\in J} K_\alpha\right) \cap \left(\prod_{\alpha\in J} F_\alpha\right)\cdot I$$

y por el teorema 1.5, tendremos que $\prod_{\alpha\in J} M_\alpha$ es plano.

Podemos suponer que $\exists$ un conjunto X tal que $F_\alpha \simeq R^{(X)}$ $\forall \alpha\in J$, de donde, $\prod_{\alpha\in J} F_\alpha \simeq (R^{(X)})^J$. Así, veamos que $(R^{(X)})^Y$ es plano $\forall X, \forall Y$.

Sup. que $v_j \in (R^{(X)})^Y$ y $a_j\in R$ ∍. $\sum_{j=1}^{n} v_j a_j = \bar{0}$

Sea F el R-módulo libre con base $x_1, \ldots, x_n$ y consideremos el epimorfismo $f : F \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} Ra_j$ .t. $f(x_j) = a_j$, $\forall j$.

Como R es coherente entonces $\operatorname{Ker} f$ es f.g., digamos que $\operatorname{Ker} f = \langle K_1, \ldots, K_m \rangle$.

Pero como $K_i \in F$ entonces $K_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j$, $\forall i = 1, \ldots, m$ y por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_j = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} f(x_j) = f(K_i) = 0 .$$

Ahora bien, si $\alpha \in \mathbb{Y}$ y $\beta \in \mathbb{X}$ entonces $\sum_{j=1}^{n} v_j(\alpha) \cdot a_j = 0$ de donde, $\sum_{j=1}^{n} v_j(\alpha)(\beta) a_j = 0$, i.e., $\sum_{j=1}^{n} v_j(\alpha)(\beta) x_j \in \operatorname{Ker} f$.

$$\therefore \sum_{j=1}^{n} v_j(\alpha)(\beta) x_j = x_{1\alpha\beta} K_1 + \ldots + x_{m\alpha\beta} K_m$$

y además, podemos tomar $x_{i\alpha\beta} = 0$ para casi toda β, dada la α, ya que para casi toda β, $v_j(\alpha)(\beta) = 0$.

Definimos entonces $\mu_1, \ldots, \mu_m \in (R^{(\mathbb{X})})^{\mathbb{Y}}$ como sigue:

$$\mu_i(\alpha)(\beta) = x_{i\alpha\beta} .$$

Así, fácilmente se checan las siguientes igualdades:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j(\alpha)(\beta) x_j = \sum_{i=1}^{m} x_{i\alpha\beta} K_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\alpha)(\beta) K_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\alpha)(\beta) \Big(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} \mu_i(\alpha)(\beta) c_{ij} \Big) \cdot x_j$$

$$\therefore v_j(\alpha)(\beta) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\alpha)(\beta) c_{ij} \quad , \forall j = 1, \ldots, n, \forall \alpha \in \mathbb{X}, \forall \beta \in \mathbb{X}$$

$$\therefore v_j = \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_{ij} \quad , \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

Por la proposición 1.8, tenemos que $(R^{(\mathbb{X})})^{\mathbb{Y}}$ es plano.

Otra proposición, que usaremos posteriormente es:

Proposición 1.10.- Sup. que R es coherente izq. (derecho). Si ${}_R I$, $J_R \leq R$ (I_R, $J_R \leq R$) son f.g. entonces $I \cap J$ es f.g.

Demostración.- Sup. que $I = Rx_1 + \ldots + Rx_n$ y $J = Ry_1 + \ldots + Ry_m$.

Sea $f: R^{n+m} \to I + J$ tal que:

$$f((r_1,\ldots,r_n,r_1',\ldots,r_m')) = r_1x_1+\ldots+r_nx_n - r_1'y_1-\ldots-r_m'y_m.$$

Como R es coherente izquierdo, se sigue que $\operatorname{Ker} f$ es f.g. Ahora definimos $\alpha: \operatorname{Ker} f \to I \cap J$ como:

$$\alpha((r_1,\ldots,r_n,r_1',\ldots,r_m')) = r_1x_1+\ldots+r_nx_n.$$

Vemos que α está bien definida, pues

$$\bar{x} = (r_1,\ldots,r_n,r_1',\ldots,r_m') \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow r_1x_1+\ldots+r_nx_n - r_1'y_1-\ldots-r_m'y_m = 0$$
$$\Rightarrow r_1x_1+\ldots+r_nx_n = r_1'y_1+\ldots+r_m'y_m$$
$$\Rightarrow \alpha(\bar{x}) \in I \cap J.$$

Además, α es epimorfismo, pues

$$y \in I \cap J \Rightarrow y = r_1x_1+\ldots+r_nx_n = r_1'y_1+\ldots+r_m'y_m$$
$$\Rightarrow r_1x_1+\ldots+r_nx_n - r_1'y_1-\ldots-r_m'y_m = 0$$
$$\Rightarrow (r_1,\ldots,r_n,r_1',\ldots,r_m') \in \operatorname{Ker} f.$$

Así, si $\bar{x} = (r_1,\ldots,r_n,r_1',\ldots,r_m')$ entonces $\alpha(\bar{x}) = y$.

$\therefore$ $I \cap J$ es f.g.

La prueba para R-coherente derecho es análoga.

Definición.- Un módulo M_R tiene dimensión plana $fd(M) \leq n$ si hay una sucesión exacta

$$0 \to F_n \to P_{n-1} \to \dots \to P_0 \to M \to 0$$

donde cada P_i es proyectivo y F_n es plano. Decimos que $fd(M) = n$ si $fd(M) \leq n$ y no hay sucesión exacta de longitud más corta de la forma anterior. Finalmente, $fd(M) = \infty$ si $\nexists n \ni . \ fd(M) \leq n$.

Definición.- La dimensión global débil de un anillo R se define como:

$$w g\ell(R) = \sup\{ fd(M) \,/\, M_R \text{ es módulo}\}$$

Observación.- Estrictamente hablando, la dimensión anterior es la dimensión global débil derecha. De manera análoga, se define la izquierda, pero se prueba (ver teorema 9.16 [10]) que ambas coinciden.

Proposición 1.11.- Sea R un anillo. Entonces:
$w g\ell(R) \leq 1 \iff$ cada submódulo de un módulo plano es plano.

Demostración.- "$\Rightarrow$" Afirmo que $\forall K_R, {}_RU$ - módulos se tiene que $Tor_2^R(K,U) = 0$.

Como $fd(K) \leq 1$ entonces $\exists$ una suc. exacta

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

donde P es proyectivo y F plano.

Esta induce una sucesión exacta larga:

$$\dots \to Tor_2^R(F,U) \to Tor_2^R(P,U) \to Tor_2^R(K,U) \to Tor_1^R(F,U) \to$$
$$\to Tor_1^R(P,U) \to \dots \to K \otimes_R U \to 0 .$$

Pero $Tor_2^R(P,U) = 0 = Tor_1^R(F,U)$ ya que F y P son planos. Por lo tanto, $Tor_2^R(K,U)=0$.

Ahora sup. que $N \leq M$ con M_R plano. Para ver que N es plano, bastará probar que $\forall_R U$- módulo,

$$Tor_1^R(N,U) = 0$$

(ver teorema 8.8 [10]). Consideremos la suc. exacta:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

Otra vez, tenemos una sucesión exacta larga:

$$\cdots \to Tor_2^R(M/N, U) \to Tor_1^R(N,U) \to Tor_1^R(M,U) \to \cdots$$

Pero $Tor_2^R(M/N, U) = 0$ por lo probado anteriormente y $Tor_1^R(M,U) = 0$, pues M es plano.

$$\therefore Tor_1^R(N,U) = 0.$$

"$\Leftarrow$" Sea M_R un módulo. Sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con F libre (y por lo tanto plano). Así, K también es plano, de donde, $fd(M) \leq 1$, $\forall M_R$.

$$\therefore wgl(R) \leq 1$$

Proposición 1.12.- Para un anillo R son equivalentes:

i) R es semihereditario izquierdo.

ii) $wgl(R) \leq 1$ y R es coherente izquierdo.

iii) Cada R-módulo derecho sin torsión es plano. (Un módulo M_R es sin torsión si $M \hookrightarrow R^X$ para algún conjunto X).

Demostración.- i) $\Rightarrow$ ii) Sea $_RM$ un módulo. Sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con F libre. Además, sabemos que $K = \varinjlim K_\alpha$ con $K_\alpha \leq K$ f.g. Como R es semihereditario izquierdo entonces cada K_α es proyectivo (por ser submódulo f.g. de un libre) y por lo tanto, plano.

$\therefore$ K es plano, i.e., $fd(M) \leq 1$, $\forall_R M$.

$\therefore$ $w gl(R) \leq 1$.

Además ya sabíamos que cada anillo semihereditario izq. es coherente izquierdo.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sup. que M_R es sin torsión, i.e., $M \hookrightarrow R^X$ para algún conjunto X. Pero $(R^X)_R$ es plano (por la prop. 1.9) y por tanto, M lo es, pues $w gl(R) \leq 1$.

iii) $\Rightarrow$ ii) Que $(R^X)_R$ es plano, $\forall X$, es obvio y de aquí que R es coherente izq.

Ahora sea M_R un módulo, y sea

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

sucesión exacta con F libre

$\therefore$ K es sin torsión, de donde, K es plano

$\therefore$ $fd(M) \leq 1$, $\forall M_R$.

$\therefore$ $w gl(R) \leq 1$

ii) $\Rightarrow$ i) Sea ${}_R I \leq R$ f.g., como R es coherente izq. entonces I es finitamente presentado.

Como $I \leq R$ y $w gl(R) \leq 1$ entonces I es plano; así, tenemos que I es plano y fin. presentado.

$\therefore$ I es proyectivo

$\therefore$ R es semihereditario izquierdo.

Otro resultado que usamos es la siguiente

Proposición 1.13.- Sea R un anillo conmutativo tal que $\forall I \leq R$ ideal principal, I es plano. Entonces R es semiprimo, i.e., R no tiene ideales nilpotentes distintos de cero.

Demostración.- Como R es semiprimo si no tiene elementos nilpotentes no cero, probemos esto último.

Supongamos que $\exists\ x \in R \ \ni.\ x^n = 0$ y podemos tomar n-mínimo. Si $n > 1$ entonces $x^{n-1} \neq 0$.

Considerando la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow an_\ell(x^{n-1}) \longrightarrow R \longrightarrow Rx^{n-1} \longrightarrow 0$$

y que por hipótesis Rx^{n-1} es plano, tenemos por la prop. , que $\forall\ I \leq R$, $an_\ell(x^{n-1}) \cdot I = an_\ell(x^{n-1}) \cap RI = an_\ell(x^{n-1}) \cap I$.

En particular, si $I = Rx$ entonces

$$an_\ell(x^{n-1}) \cap Rx = an_\ell(x^{n-1}) \cdot R \cdot x$$

y como $x \in an_\ell(x^{n-1}) \cap Rx$, se sigue que $x = \sum_{i=1}^{k} r_i \cdot y_i$ con $r_i \in an_\ell(x^{n-1})$, $y_i \in Rx$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$. Si $y_i = r_i' x$ entonces

$$x^{n-1} = x\,(x^{n-2}) = \sum_{i=1}^{k} r_i r_i' x \cdot x^{n-2} = \sum_{i=1}^{k} (r_i x^{n-1}) r_i' = 0 \ \text{!}$$

$\therefore\ n = 1$, i.e., $x = 0$.

CAPITULO

II

ANILLOS REGULARES.

INTRODUCCIÓN.

Definición.- Un anillo R es regular si para cada $a \in R$ $\exists$ $x \in R$ $\ni$. $a = axa$.

Veamos algunos ejemplos de anillos regulares:

1) Si R es Booleano entonces R es regular.
Esto es claro, pues $\forall a \in R$, $a = a^2 = a \cdot 1 \cdot a$.

2) Si R es semisimple entonces R es regular.
Sea $a \in R$, como R es semisimple entonces $\exists$ $I_R \leq R$ $\ni$. $aR \oplus I = R$

$\therefore$ $1 = ar + x$ con $r \in R$, $x \in I$.

$\therefore$ $a = ara + xa$, i.e., $a - ara = xa$

Pero $a - ara \in aR$ y $xa \in I$, de donde
$a - ara \in aR \cap I = \{0\}$

$\therefore$ $a = ara$.

3) Sea M_R un módulo semisimple. Entonces el anillo $\mathrm{End}_R(M)$ es regular.
Sea $\alpha \in \mathrm{End}_R(M)$. Como M es semisimple entonces $\exists$ $K, N \leq M$ tales que:

$$M = \mathrm{Ker}\,\alpha \oplus K = \mathrm{Im}\,\alpha \oplus N$$

Afirmo que $\alpha|_K : K \longrightarrow \mathrm{Im}\,\alpha$ es isomorfismo.
En efecto, sup. que $x \in K$ y $\alpha(x) = 0$.

$\therefore$ $x \in K \cap \mathrm{Ker}\,\alpha = \{0\}$.

Además, si $y \in \mathrm{Im}\,\alpha$ entonces $y = \alpha(a)$ con $a \in M$.
Pero, $a = z + x$, con $z \in \mathrm{Ker}\,\alpha$, $x \in K$.

$\therefore$ $y = \alpha(a) = \alpha(z + x) = \alpha(x)$

Así, $\exists$ $\beta : \mathrm{Im}\,\alpha \to K$ $\ni$. $\beta \cdot \alpha|_K = 1_K$ y $\alpha|_K \cdot \beta = 1_{\mathrm{Im}\,\alpha}$.

Entonces, extendemos β a $\theta: M \longrightarrow M$, así:

$$\theta(x) = \beta(z)$$

si $x = z + y$ con $z \in \operatorname{Im}\alpha$, $y \in N$.

Así, si $x \in M$ entonces $x = a + b$ con $a \in \operatorname{Ker}\alpha$, $b \in K$.

$$\therefore\ \alpha\theta\alpha(x) = \alpha\theta\alpha(b) = \alpha\beta\alpha(b) = \alpha(b) = \alpha(x)$$

es decir, $\alpha \circ \theta \circ \alpha = \alpha$, que era lo que queríamos.

A continuación, damos algunas caracterizaciones de anillos regulares, que usaremos posteriormente.

Teorema 2.1.- Sea R un anillo. Son equivalentes:

i) R es regular.

ii) Cada ideal derecho (izq.) principal está generado por un idempotente.

iii) Cada ideal derecho (izq.) f.g. está generado por un idempotente.

iv) Cada R-módulo izq. (der.) es plano.

Demostración.- i) $\Rightarrow$ ii) Sea $I_R \leq R$ ideal principal, digamos que $I = aR$. Como R es regular entonces

$$\exists\ x \in R \ \ni\ a = axa$$

Es claro que $aR = axR$ y $(ax)^2 = axax = ax$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sup. que $I = x_1R + \ldots + x_nR$; por inducción, será suficiente probar que si e y f son idempotentes entonces $eR + fR$ es principal.

Es fácil checar que $eR + fR = eR + (f - ef)R$. Además, por hipótesis $\exists\ g \in R$ idempotente tal que $(f - ef)R = gR$.

Afirmo que $\exists x \in R \ni (f-ef)\cdot x \cdot (f-ef) = f - ef$. Tenemos que $\exists\ r \in R \ni f - ef = gr = g^2 \cdot r = g\cdot(f-ef)$ y a su vez, $\exists\ x \in R \ni g = (f-ef)\cdot x$.

$$\therefore\ f - ef = (f-ef)\cdot x \cdot (f-ef).$$

Así, $h = (f - ef)\cdot x$ es idempotente tal que
$$hR = (f - ef)\cdot R$$
y además, $eh = e(f - ef)\cdot x = (ef - e^2 f)\cdot x = 0$.

Ahora afirmo que $eR + hR = (e + h - he)\cdot R$. Que $e + h - he \in eR + hR$ es obvio pues $e + h - he = e + h\cdot(1 - e)$.

Además, $e \in (e + h - he)\cdot R$ pues $e = (e + h - he)\cdot e$ y $h \in (e + h - he)\cdot R$ ya que $(e + h - he)\cdot h = eh + h^2 - heh = h$.

$\therefore eR + fR = eR + (f - ef)\cdot R = eR + hR = (e + h - he)\cdot R$

y por lo tanto, $\exists\, \alpha \in R$ idempotente $\ni$. $eR + fR = \alpha R$.

iii) $\Rightarrow$ iv) Sea ${}_R M$ un módulo. Para probar que M es plano, bastará ver que para cada $I_R \leq R$ f.g., el morfismo canónico
$$\alpha : I \otimes_R M \longrightarrow M$$
es monomorfismo.

Pero si I_R es f.g. entonces $I = eR$ para algún e-idempotente, de donde $\exists\, J_R \leq R \ni$. $I \oplus J = R$
$$\therefore M \simeq R \otimes_R M = (I \oplus J) \otimes_R M \simeq (I \otimes_R M) \oplus (J \otimes_R M)$$
y $(I \otimes_R M) \hookrightarrow M$ coincide con α.

iv) $\Rightarrow$ i) Sea $a \in R$ entonces el R-módulo izquierdo R/Ra es plano, y considerando la sucesión exacta
$$0 \longrightarrow Ra \longrightarrow R \longrightarrow R/Ra \longrightarrow 0$$
se sigue que $\forall\, I_R \leq R$, $I \cdot Ra = IR \cap Ra = I \cap Ra$.

En particular, si $I = aR$ tendremos que $aRa = aR \cap Ra$ y como $a \in aR \cap Ra$ entonces
$$\exists\, x \in R \ni. \quad a = axa.$$

Corolario 2.2.- Todo anillo regular es semihereditario derecho e izquierdo.

Demostración.- Sea $I_R \leq R$ f.g. entonces $I = eR$ con e-idempotente y por lo tanto, I es sumando directo de R, de donde, I es proyectivo.

Teorema 2.3.- Sea R un anillo. Son equivalentes:

i) R es regular.

ii) Cada R-módulo cíclico der. (izq.) es plano.

iii) $\forall\, I_R \leq R$ y $\forall\, {}_RJ \leq R$, $IJ = I \cap J$.

Demostración.- i) ⇒ ii) Es obvio, por la prop. anterior.

ii) ⇒ iii) Sean $I_R \leq R$ y ${}_RJ \leq R$. Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

Como R/I es cíclico entonces es plano y por la prop. 1.5 se sigue que:

$$I \cap R \cdot J = I \cdot J \quad , \text{ i.e., } \quad I \cap J = I \cdot J$$

iii) ⇒ i) Sea $a \in R$ entonces $aR \cap Ra = aR \cdot Ra = aRa$.

$$\therefore \quad a = axa \quad \text{para alguna } x \in R$$

En el caso en que R es conmutativo, tenemos el siguiente teorema importante.

Teorema 2.4.- Sea R un anillo conmutativo. Son equivalentes:

i) R es regular.

ii) $\forall\, I \leq R$, $I = I^2$.

iii) Cada anillo cociente de R es semi-primitivo.

iv) Cada anillo cociente de R es semi-primo.

v) R es V-anillo (i.e. cada R-módulo simple es inyectivo).

Demostración.- i) ⇒ ii) Sea $I \leq R$, por el teorema anterior, tenemos que $I^2 = I \cap I = I$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea $I \leq R$ y $\bar{a} \in J(R/I)$. Tenemos que

$$a \in aR = (aR)^2 = aRaR = aRa$$

$$\therefore \quad \bar{a} = \overline{axa}\,.$$

Pero $\overline{ax} \in J(R/I)$ y $\overline{ax}$ es idempotente, de donde $\overline{ax} = \bar{0}$.

$$\therefore \quad \bar{a} = \overline{axa} = \bar{0}, \text{ i.e., } J(R/I) = \bar{0}\,.$$

iii) $\Rightarrow$ iv) Esto es obvio pues $N(R/I) \subset J(R/I) = \bar{0}$.

iv) $\Rightarrow$ i) Sea $a \in R$ y podemos suponer $a \neq 0$, y sea $I = a^2R$; entonces R/I es semiprimo.

Pero $(a+I)^2 = a^2 + I = \bar{0}$, de donde $a + I = \bar{0}$, i.e., $a \in I$.

$$\therefore \quad a = a^2 \cdot x = axa\,.$$

ii) $\Rightarrow$ v) Sea $I \leq R$ ideal máximo y sup. que $f: J \to R/I$ es R-homomorfismo. Queremos extender f a R (esto probará que R/I es inyectivo. Por lo tanto, podemos suponer que $f \neq 0$, ya que si $f = 0$, es obvio.

Ahora bien, como R es regular, entonces $I \cap J = I \cdot J$, de donde, $I \cap J \subset \operatorname{Ker} f$ ya que

$$x \in I \cap J = IJ \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{n} i_k j_k \Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(j_k)\, i_k = \bar{0}$$

$\therefore\ J \not\subset I$ (pues si $J \subset I$ ent. $J = J \cap I \subset \operatorname{Ker} f$ ∇).

y como I es máximo entonces $I + J = R$

$$\therefore \quad 1 = i + j \quad , \quad i \in I \text{ y } j \in J$$

Así, si $x \in J$ entonces

$$f(x) = f(ix) + f(jx) = f(j) \cdot x$$

$\therefore\ f': R \to R/I$ $\ni$. $f'(r) = f(j) \cdot r$ extiende a f.

$\therefore\ R$ es V-anillo.

v) $\Rightarrow$ ii) Sup. que R es V-anillo derecho. Probemos primero que $\forall\, M_R$ módulo, $J(M) = 0$.

Sea $0 \neq x \in M$. Veamos que $x \notin J(M)$, i.e., probemos que $\exists N \leq M$ submódulo máximo $\ni$. $x \notin N$.

Consideremos la familia $\Sigma = \{N \leq M \mid x \notin N\}$. Como $x \neq 0$ entonces $0 \in \Sigma$, i.e., $\Sigma \neq \phi$, y si

$$N_1 \subset N_2 \subset \ldots \quad \text{con} \quad N_i \in \Sigma, \forall i \in \mathbb{N}$$

entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \in \Sigma$ y $N_i \leq \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$, $\forall i$.

Por el lema de Zorn, $\exists N \in \Sigma$ elemento máximo. Afirmo que M/N es módulo uniforme (i.e., $\forall \bar{0} \neq \bar{K}_1 \leq M/N$ y $\forall \bar{0} \neq \bar{K}_2 \leq M/N$, $\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2 \neq \bar{0}$)

Sup. que $\bar{0} \neq K/N \leq M/N$, i.e., $N \subsetneq K \subset M$. Por la elección de N, $x \in K$, de donde

$$\bar{0} \neq \frac{xR+N}{N} \subset \frac{K}{N}, \quad \forall \bar{0} \neq K/N \leq M/N.$$

De aquí, se sigue claramente la afirmación.

Ahora afirmo que $(xR+N)/N$ es simple. Esto es claro, ya que si $\bar{0} \neq N'/N \leq (xR+N)/N$, por lo anterior, tendremos que $(xR+N)/N \subset N'/N$, i.e., $N'/N = (xR+N)/N$.

Así, $(xR+N)/N$ es inyectivo (pues R es V-anillo), de donde, $(xR+N)/N$ es sumando directo de M/N y como éste último es uniforme entonces

$$(xR+N)/N = M/N$$

$$\therefore M/N \text{ es simple, i.e., } N \leq M \text{ es máximo.}$$

Además, $x \notin N$ que es lo que queríamos.

En particular, si $I_R \leq R$ entonces $J(R/I) = 0$, de donde, $I = \bigcap_{\substack{I \subset L \\ L\text{-máximo}}} L$.

Es decir, hemos probado que si R es V-anillo derecho entonces cada ideal derecho es la intersección de todos los ideales máximos que lo contienen.

Ahora bien, si $I \leq R$ entonces $I^2 \subseteq I$. Sup. que $I \not\subset I^2 = \bigcap_{\substack{I^2 \subset L \\ L\text{-máximo}}} L$, de donde, $\exists I^2 \subset L$, L-máximo $\ni$. $I \not\subset L$.

Como L es máximo, entonces $I+L=R$

$$\therefore\ 1=i+\ell \quad \text{con } i\in I,\ \ell\in L$$

$$\therefore\ i=i^2+\ell i\ \in\ I^2+L=L$$

$$\therefore\ 1=i+\ell\ \in L\ \text{!`}$$

$$\therefore\ I\subset I^2\ ,\ i.e.,\ I=I^2 .$$

ii) $\Rightarrow$ i) Por el teorema 2.3, bastará ver que $\forall\, I,J\leq R$, $I\cap J=I\cdot J$. Pero $IJ\subset I\cap J$ pues R es conmutativo, y además, $I\cap J=(I\cap J)(I\cap J)\subset I\cdot J$.

$$\therefore\ I\cap J=I\cdot J \quad \forall\, I,J\leq R .$$

CAPITULO

III

ANILLOS REGULARES Y MÓDULOS COPLANOS

Sea M_R un módulo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$. Podemos definir un $\mathbb{Z}$-homomorfismo $f_A : M^m \longrightarrow M^n$, como sigue:

$$f_A(\underline{X}) = \underline{X}\cdot A$$

Así, si $r = (r_1, \ldots, r_n) \in R^n$, tenemos definidos dos $\mathbb{Z}$-homomorfismos:

$$f_r : M \longrightarrow M^n \quad \text{t.q.} \quad f_r(m) = m\cdot r = (mr_1, \ldots, mr_n)$$

$$f_{r^t} : M^n \longrightarrow M \quad \text{t.q.} \quad f_{r^t}(\underline{X}) = \underline{X}\cdot r^t = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i$$

donde r^t denota la matriz transpuesta de r.

Observación:

Con la notación anterior, la prop. 1.8, se lee como sigue:

"Un módulo M_R es plano $\Longleftrightarrow$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $r \in R^n$, el núcleo

$$\mathrm{Ker}(f_{r^t}) \leq M^n$$

está generado como un conjunto por el conjunto:

$$\{(M^m, f_A) \mid A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R) \text{ t.q. } A\cdot r^t = 0,\ m \in \mathbb{N}\}"$$

Si dualizamos esta proposición, obtenemos la definición de módulo coplano:

Definición.- Un módulo M_R es coplano si para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $r \in R^m$, el conúcleo:

$$\mathrm{coKer}(f_r) = M^m / \mathrm{Im}(f_r)$$

esta cogenerado como un conjunto por:

$$\{(M^n, f_A) \mid A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R) \text{ t.q. } r\cdot A = 0,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Observaciones:

1) Analizando la definición anterior, tenemos que un módulo M_R es coplano si para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $r \in R^m$,

$$\underline{X} \in M^m - M \cdot r \Rightarrow \exists\ A \in \mathcal{M}_{m \times n}(R) \ \text{t.q.}\ \underline{X} \cdot A \neq 0 \ \text{ y } \ r \cdot A = 0$$

2) Si en (1) denotamos $A = (a_{ij})$ y $\underline{X} = (x_1, \ldots, x_m)$, el hecho de que $\underline{X} \cdot A \neq 0$, quiere decir que

$$\exists\ j \in \{1, \ldots, n\} \ \text{t.q.}\ \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \neq 0$$

y como $r \cdot A = 0$, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{m} r_i a_{ij} = 0$$

Así, si denotamos a $c = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ entonces tenemos que un módulo M_R es coplano si y solo si para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $r \in R^m$

$$\underline{X} \in M^m - M \cdot r \Rightarrow \exists\ c \in R^m \ \text{t.q.}\ \underline{X} \cdot c^t \neq 0 \ \text{ y } \ r \cdot c^t = 0$$

Definición.- Como el nombre lo sugiere, diremos que un módulo M_R es $\aleph_0$-inyectivo si M_R es I-inyectivo para cada $I_R \leq R$ f.g.

Proposición 3.1 - M_R es coplano $\Leftrightarrow$ M_R es $\aleph_0$-inyectivo.

Demostración.- "$\Rightarrow$" Sup. que M_R es coplano y sea

$$I = a_1 R + \ldots + a_n R \leq R$$

Además, supongamos que tenemos $f : I \to M$. Sea $r = (a_1, \ldots, a_n) \in R^n$ y $\underline{X} = (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in M^n$.

Afirmo que

$$\underline{X} = m \cdot r \quad \text{para alguna } m \in M$$

Supongamos que $\underline{X} \notin M \cdot r$. Como M_R es coplano entonces $\exists\, c \in R^n$ tal que

$$r \cdot c^t = 0 \ \text{ y } \ \underline{X} \cdot c^t \neq 0$$

Pero entonces

$$0 = f(r \cdot c^t) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\cdot c_i = \mathbb{X}\cdot c^t \ \nabla$$

$\therefore \exists\, m \in M \ \ni\ \mathbb{X} = m \cdot r = (ma_1, \ldots, ma_n)$, es decir,

$$f(a_i) = m \cdot a_i \ , \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n .$$

Así, si definimos $f' : R \longrightarrow M$ como $f'(\alpha) = m \cdot \alpha$, es claro que f' extiende a f.

$\therefore M_R$ es $\aleph_0$-inyectivo.

"$\Leftarrow$" Sup. que M_R es $\aleph_0$-inyectivo, pero no es coplano. Se sigue que

$$\exists\, r \in R^n \ \text{y} \ m \in M^n \ \ni\ m \notin M \cdot r \ \text{y}$$
$$\forall c \in R^n \left(r \cdot c^t = 0 \Rightarrow m \cdot c^t = 0 \right)$$

Sea $I = a_1 R + \ldots + a_n R$ y $f : I \longrightarrow M$ tal que

$$f(a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n) = m_1 r_1 + \ldots + m_n r_n$$

donde $r = (a_1, \ldots, a_n)$ y $m = (m_1, \ldots, m_n)$.

Tenemos que f está bien definida pues

$$a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n = 0 \Rightarrow r \cdot c^t = 0 \quad \text{donde } c = (r_1, \ldots, r_n)$$
$$\therefore m \cdot c^t = 0 \ , \ \text{i.e.,} \ m_1 r_1 + \ldots + m_n r_n = 0 .$$

Ahora bien, como M_R es $\aleph_0$-inyectivo, entonces

$$\exists\, f' : R \longrightarrow M \ \ni\ f'|_I = f$$

Así, si $m' = f'(1)$ entonces $f(a_i) = m' \cdot a_i \ , \ \forall i = 1, \ldots, n$

$$\therefore m = (m_1, \ldots, m_n) = (f(a_1), \ldots, f(a_n)) = m' \cdot r \in M \cdot r \ \nabla$$

$\therefore M_R$ es coplano.

Como un corolario inmediato, tenemos que cada R-módulo inyectivo es coplano. El inverso no es cierto como muestra el ejemplo 1.

La pregunta es:

¿Qué características debe tener el anillo R, para que cada R-módulo coplano sea inyectivo?

Obviamente, si R_R es neteriano entonces se cumple la afirmación, pues todo ideal $I_R \leq R$ es f.g.

En realidad, el recíproco también es cierto. Para ver esto, necesitamos un lema.

Lema 3.2.- Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de R-módulos derechos. Entonces:

i) $\prod_{\alpha\in I} M_\alpha$ es coplano $\Leftrightarrow$ cada M_α lo es.

ii) $\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ es coplano $\Leftrightarrow$ cada M_α lo es.

Demostración.- i) "$\Rightarrow$" Sea $J_R \leq R$ ideal f.g., $f: J \to M_\alpha$ y consideremos la inclusión canónica $i_\alpha : M_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} M_\alpha$

Como $\prod_{\alpha\in I} M_\alpha$ es coplano, entonces

$$\exists\ g: R \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} M_\alpha \ \ \text{∋.}\ \ g\circ i = i_\alpha \circ f .$$

$$\therefore\ (p_\alpha \circ g)\circ i = p_\alpha \circ i_\alpha \circ f = f, \text{ i.e., } M_\alpha \text{ es coplano.}$$

"$\Leftarrow$" Ahora supongamos que M_α es coplano $\forall \alpha\in I$ y sea $f: J \to \prod_{\alpha\in I} M_\alpha$. Considerando las proyecciones canónicas, tendremos que para cada $\alpha \in I$, $\exists\, g_\alpha : R \to M_\alpha$ tal que $g_\alpha \circ i = p_\alpha \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\alpha\in I} M_\alpha \arrow[r, "p_\alpha"] & M_\alpha \\
J \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook, "i"'] & R \arrow[ul, dashed, "\exists! g"'] \arrow[u, dashed, "\exists g_\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Así, por la propiedad universal del producto directo tenemos que

$$\exists!\ g: R \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} M_\alpha \ \ \text{∋.}\ \ p_\alpha \circ g = g_\alpha \ ,\ \forall \alpha\in I.$$

$$\therefore\ p_\alpha \circ g \circ i = g_\alpha \circ i = p_\alpha \circ f,\ \forall \alpha\in I,\ \text{de donde},\ g\circ i = f.$$

$$\therefore\ \prod_{\alpha\in I} M_\alpha \text{ es coplano.}$$

ii) "$\Rightarrow$" La prueba es análoga a (i).
"$\Leftarrow$" Hasta aquí, no hemos usado el carácter de finitud del ideal derecho J.

En realidad, en esta parte es en la única donde se usa dicho carácter.

Así, sup. que $f: J \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ con $J = a_1R + \dots + a_nR$
Entonces

$$f(a_j) \in \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha \quad , \quad \forall j = 1,2,\dots,n$$

$$\therefore \exists\, L \subset I \text{ finito } \ni . \ \operatorname{Im} f \hookrightarrow \bigoplus_{\beta\in L} M_\beta \ .$$

Por (i) tenemos que $\bigoplus_{\beta\in L} M_\beta$ es coplano.

$$\therefore \exists\, g: R \longrightarrow \bigoplus_{\beta\in L} M_\beta \ \ni . \ g(x) = f(x), \ \forall x \in J \ .$$

Así, claramente existe $h: R \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ que extiende a f, i.e., $\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ es coplano.

Proposición 3.3 .- Un anillo R es neteriano derecho si y solo si cada R-módulo derecho coplano es inyectivo.

Demostración.- "$\Rightarrow$" Esta es obvia.
"$\Leftarrow$" Para ver que R es neteriano, bastará ver que suma directa de inyectivos es inyectivo.

Supongamos que $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de inyectivos. Así, cada M_α es coplano y por el lema anterior, $\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ es coplano, y por la hipótesis, es inyectivo.

A continuación, damos algunas caracterizaciones de anillos regulares, utilizando la noción de módulos coplanos.

Lema 3.4 .- Sea R un anillo. Son equivalentes:

i) R es regular.

ii) Cada R-módulo derecho (izq.) es coplano.

Demostración.- i) $\Rightarrow$ ii) Sup. que R es regular, M un R-módulo derecho, $I_R \leq R$ ideal f.g. y $f: I \longrightarrow M$ es un R-homomorfismo.

Como I es f.g. y R es regular, se sigue que

$$\exists\ J_R \leq R \text{ ideal } \ni.\ I \oplus J = R$$

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& M & \\
I \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[u, dashed, "\exists! g"'] & J \arrow[ul, "0"'] \arrow[l, "j"]
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de la suma directa,

$$\exists!\ g: R \longrightarrow M \ \ni.\ g \circ i = f \ \text{ y } \ g \circ j = 0$$

$\therefore M_R$ es coplano.

ii) $\Rightarrow$ i) Sea $I_R \leq R$ f.g.; hay que probar que I es sumando directo de R.

Por hipótesis, I es coplano de donde

$$\exists\ g: R \longrightarrow I \ \ni.\ g \circ i = 1_I .$$

Teorema 3.5 .- Sea R un anillo. Son equivalentes:

i) R es regular.

ii) R es semihereditario derecho (izq.) y R_R (${}_RR$) es coplano.

iii) Cada R-módulo cíclico derecho (izq.) es coplano.

Demostración.- i) $\Rightarrow$ ii) R es semihereditario por el corolario 2.2, y es coplano por el lema anterior.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea M_R un módulo cíclico, i.e.,

$$M \simeq R/I \quad \text{para algún } I_R \leq R$$

Veamos que R/I es coplano. Así, sea $J_R \leq R$ f.g. y $f: J \to R/I$ R-homomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
R & J \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, dashed, "\exists g"] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[l] \\
R \arrow[from=1-1, "\alpha"] \arrow[r, "\pi"] & R/I \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como J_R es f.g. y R_R es semihereditario entonces J es proyectivo, de donde

$$\exists\, g: J \to R \ \ni.\ \pi \circ g = f$$

y como R_R es coplano, se sigue que

$$\exists\, \alpha: R \to R \ \ni.\ \alpha \circ i = g.$$

$\therefore (\pi \circ \alpha) \circ i = \pi \circ g = f$, i.e., R/I es coplano.

iii) $\Rightarrow$ i) Sea $I_R \leq R$ ideal principal. Para ver que R es regular, bastará ver que I es sumando directo de R.

Pero I es R-módulo cíclico y por la hipótesis, es coplano, de donde

$$\exists\, g: R \to I \ \ni.\ g \circ i = 1_I.$$

En la proposición 1.12, vimos que un anillo R es semihereditario izquierdo si y solo si cada R-módulo derecho sin torsión es plano.

El siguiente teorema, caracteriza a los anillos R tales que cada R-módulo derecho sin torsión es coplano. Para ello, necesitamos un lema.

Lema 3.6.- Un anillo R es regular $\Leftrightarrow \forall I_R \leq R$, I es coplano.

Demostración.- "$\Rightarrow$" Es obvia, por la prop. 3.4.

"$\Leftarrow$" Para ver que R es regular, bastará ver que para cada $I_R \leq R$, R/I es plano.

Sea $I_R \leq R$ y consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

Por el lema 1.7, para ver que R/I es plano, bastará ver que para cada $x \in I$ $\exists\, g: R \longrightarrow I$ tal que $g(x) = x$. Pero si $x \in I$ entonces $xR \subset I$ y como

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & xR \arrow[u, "i'"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[ul, dashed, "\exists g"'] \end{tikzcd}$$

I es coplano, se sigue que $\exists\, g: R \to I$ $\ni.$ $g \cdot i = i'$, donde i e i' son las inclusiones.

$$\therefore\ g(x) = g\, i(x) = i'(x) = x\,.$$

Teorema 3.7.- Un anillo R es regular $\Longleftrightarrow$ cada R-módulo derecho (izq.) sin torsión es coplano.

Demostración.- "$\Rightarrow$" Obvio, por la prop. 3.4

"$\Leftarrow$" Sea $I_R \leq R$ ideal. Entonces I es R-módulo derecho sin torsión y por lo tanto, es coplano.

Por el lema anterior, tenemos R regular.

El siguiente teorema caracteriza a los anillos regulares dentro de los anillos autoinyectivos. Antes, probamos un lema.

Lema 3.8.- Supongamos que R es anillo autoinyectivo derecho y que para cada ideal $I_R \subsetneq R$, R/I es coplano. Entonces cada

R-módulo cíclico derecho es la suma directa de un R-módulo proyectivo y un R-módulo coplano.

Demostración.- Sea $I_R \leq R$. Hay que probar que $\exists$ P-proyectivo y Q-coplano $\ni$. $R/I = P \oplus Q$.

Ya que $I_R \hookrightarrow R$ y R es autoinyectivo, se sigue que $E(I)$ es sumando directo de R.

$\therefore \exists e \in R$ idempotente $\ni$. $E(I) = eR$

Sea $M = (1-e)R \oplus I$; afirmo que

$$R/I = M/I \oplus eR/I$$

Es claro que $R/I = M/I + eR/I$, ya que $R = (1-e)R \oplus eR$.

Veamos que la suma es directa:

Si $\bar{x} \in M/I \cap eR/I$ entonces $\bar{x} = m + I = er + I$ con $m \in M$ y $r \in R$; además, como $m = (1-e)\cdot r' + i'$ entonces

$$\bar{x} = (1-e)\cdot r' + I$$

$$\therefore (1-e)\cdot r' - er \in I \subset eR \quad \text{de donde}$$

$$(1-e)\cdot r' \in eR \cap (1-e)R = \{0\}$$

$$\therefore \bar{x} = I = \bar{0} .$$

Ahora bien, como $M/I \simeq (1-e)R$ entonces M/I es proyectivo, pues $(1-e)R$ lo es, por ser sumando directo de R. Así, solo nos falta probar que eR/I es coplano. Pero,

$$eR/I \simeq (R/I)/(M/I) \simeq R/M = R/(1-e)R \oplus I$$

y sabemos que

$$I \subseteq_e eR \quad \text{y} \quad (1-e)R \subseteq_e (1-e)R$$

Por lo tanto, $(1-e)R \oplus I \subseteq_e (1-e)R \oplus eR = R$, y así, por nuestra hipótesis, tenemos que

$$R/(1-e)R \oplus I \quad \text{es coplano.}$$

Ahora sí, tenemos el siguiente

Teorema 3.9.- Sea R un anillo autoinyectivo. Entonces R es regular si y sólo si $\forall I_R \subsetneq R$, R/I es coplano.

Demostración.- "$\Rightarrow$" Obvio por la prop. 3.4.

"$\Leftarrow$" Por el lema 3.5, bastará ver que

$\forall I_R \leq R$ ideal, R/I es coplano.

Sea $I_R \leq R$, por el lema anterior,

$R/I = P \oplus Q$ con P-proyectivo y Q-coplano.

Como P es sumando directo de un R-módulo cíclico entonces P es cíclico, i.e., $P \simeq R/J$ con $J_R \leq R$.

Pero como P es proyectivo, se sigue que P es sumando directo de R (pues el epimorfismo canónico $R \longrightarrow R/J$ se escinde).

$\therefore$ P_R es inyectivo (pues R_R lo es)

$\therefore$ R/I es coplano (por ser suma directa de coplanos).

CAPITULO

IV

ANILLOS REGULARES
Y
ANILLOS QI-GENERALIZADOS

Como sabemos, un anillo R se llama QI derecho si cada R-módulo derecho casi inyectivo es inyectivo. Podemos generalizar este concepto como sigue:

Definición.- Un anillo R se llama QI-generalizado derecho si cada R-módulo derecho casi inyectivo es coplano.

De la definición, es obvio que todo anillo QI es QI-generalizado. El inverso no es cierto.

Para ver esto, sea R un anillo regular, conmutativo y autoinyectivo. Es obvio que R es QI-generalizado (pues cada R-módulo es coplano).

Veamos que R no necesariamente es QI:

Sea $I \leq R$ ideal. Afirmo que I es casi inyectivo. Para ello, bastará ver que I es un submódulo invariante de su cápsula inyectiva $E(I)$.

Como R es autoinyectivo entonces $E(I) = eR$ para algún $e \in R$ idempotente.

Así, sea $g \in \mathrm{Hom}_R(eR, eR)$ y sea $x = er \in I$. Tenemos que:

$g(x) = g(er) = g(e^2 r) = g(e) \cdot er \in I$, pues R es conmutativo

$\therefore$ I es casi inyectivo.

Pero no todo ideal de R es inyectivo, de donde R no es QI. Un ejemplo de un anillo tal, es el ejemplo 2.

Observación:

Si R es neteriano, es claro que

$$R \text{ es QI} \iff R \text{ es QI-generalizado}$$

En el ejemplo anterior, observamos que si un anillo R es regular entonces es QI-generalizado derecho (e izquierdo). A continuación, veremos que en el caso conmutativo, ambos conceptos coinciden.

Antes, probamos unos lemas.

Lema 4.1.- R QI-generalizado $\Rightarrow J(R) = 0$

Demostración.- Sup. que $\exists\ 0 \neq x \in J(R)$. Entonces $r(x) \subsetneq R$ y por lo tanto

$$\exists\ I_R \leq R \text{ ideal máximo } \ni.\ r(x) \subset I$$

Como I es máximo, R/I es R-módulo simple y por lo tanto, casi inyectivo. Se sigue entonces que R/I es coplano.

Sea $f: xR \longrightarrow R/I \ni.\ f(xr) = r + I$.

$$\begin{tikzcd} & R/I & \\ 0 \arrow[r] & xR \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"] & R \arrow[ul, dashed, "\exists g"'] \end{tikzcd}$$

f está bien definida pues:

$xr = xr' \Rightarrow r - r' \in r(x) \subset I \Rightarrow r + I = r' + I$.

Como R/I es coplano, $\exists\ g: R \rightarrow R/I \ni.\ g|_{xR} = f$. Así, denotemos $g(1) = r + I$ con $r \in R$. Entonces

$$f(x) = g(x) = g(1)\cdot x = rx + I$$

y por otro lado:

$$f(x) = f(x \cdot 1) = 1 + I$$

Así pues, se sigue que:

$rx + I = 1 + I$, de donde $1 - rx \in I$.

Pero $x \in J(R)$ de donde $rx \in J(R)$ (pues $J(R)$ es ideal bilateral).

$\therefore rx \in J(R) \subset I$

$\therefore 1 \in I$, i.e., $I = R$ ¡! $\qquad \therefore J(R) = 0$.

Lema 4.2.- Supongamos que R es conmutativo e $I \leq R$ un ideal. Entonces R/I es QI-generalizado si R lo es.

Demostración.- Sup. que M es R/I-módulo casi inyectivo. De aquí se sigue claramente que M es R-módulo casi inyectivo y por lo tanto, M es R-módulo coplano.

Probemos que M es R/I-módulo coplano:

Sup. que $f: J/I \to M$ es R/I-homomorfismo con $J/I \leq R/I$ f.g., digamos que $J/I = \langle \bar{j}_1, \ldots, \bar{j}_n \rangle$.

Sea $A = j_1R + \ldots + j_nR$ y $f': A \to M$ tal que

$$f'(j_1r_1 + \ldots + j_nr_n) = f(\bar{j}_1\bar{r}_1 + \ldots + \bar{j}_n\bar{r}_n).$$

Vemos que f está bien definida pues si $j_1r_1 + \ldots + j_nr_n = 0$ entonces $\bar{j}_1\bar{r}_1 + \ldots + \bar{j}_n\bar{r}_n = \bar{0}$, de donde

$$f'\left(\sum_{i=1}^{n} j_ir_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{j}_i\bar{r}_i\right) = 0$$

Además, f' es R-homomorfismo, pues si $r \in R$ entonces $f'\left(\left(\sum_{i=1}^{n} j_ir_i\right)\cdot r\right) = f'\left(\sum_{i=1}^{n} j_ir_ir\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{j}_i\overline{r_ir}\right) =$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{j}_i\bar{r}_i\right)\cdot\bar{r} = f'\left(\sum_{i=1}^{n} j_ir_i\right)\cdot r.$$

Como M es R-módulo coplano entonces

$$\exists\, g': R \to M \ \ni\ g'|_A = f'.$$

Así, sea $g: R/I \to M$ tal que $g(\bar{r}) = g'(r)$.

Vemos que g está bien definida, pues si $i \in I$ entonces $g(\bar{i}) = g'(i) = g'(1)\cdot(i) = g'(1)\cdot\bar{i} = 0$.

Además, g es R/I-homomorfismo, pues si $r, r' \in R$ entonces

$$g(\bar{r}\cdot\bar{r'}) = g(\overline{r.r'}) = g'(r\cdot r') = g'(r)\cdot r' = g(\bar{r})\cdot\bar{r'}$$

Finalmente, veamos que $g|_{J/I} = f$. Sea $\bar{x} \in J/I$, digamos que $\bar{x} = \bar{j}_1\bar{r}_1 + \ldots + \bar{j}_n\bar{r}_n$; entonces

$$g(\bar{x}) = g(\bar{j}_1\bar{r}_1 + \ldots + \bar{j}_n\bar{r}_n) = g'(j_1r_1 + \ldots + j_nr_n) = f'(j_1r_1 + \ldots + j_nr_n) =$$
$$= f(\bar{j}_1\bar{r}_1 + \ldots + \bar{j}_n\bar{r}_n) = f(\bar{x})$$

$\therefore$ M es R/I-módulo coplano.

$\therefore$ R/I es anillo QI-generalizado.

Teorema 4.3 .- Sea R un anillo conmutativo. Entonces R es regular $\Longleftrightarrow$ R es QI-generalizado.

Demostración.- "$\Rightarrow$" Esta implicación ya la habíamos mencionado anteriormente.

"$\Leftarrow$" Como R es conmutativo, para ver que R es regular, bastará ver que $\forall\, I \leq R$, R/I es semiprimitivo, es decir, $J(R/I) = 0$ (ver prop. 2.4)

Por el lema anterior, R/I es QI-generalizado, y por el lema 4.1, $J(R/I) = 0$.

El ejemplo 3, muestra que el teorema anterior no es cierto en el caso no conmutativo.

De hecho, tenemos un ejemplo de un anillo QI (y por lo tanto QI-generalizado) que no es regular.

CAPITULO

V

ANILLOS REGULARES Y MÓDULOS CASI PLANOS

En este capítulo, D denotará un grupo abeliano divisible y si M es un R-módulo derecho entonces M_D^* denotará al $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,D)$ con la estructura de R-módulo izquierdo acostumbrada. Además, si $D=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ entonces $M^*_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} = M^*$.

Definición.- Un módulo M_R es casi plano si es plano relativo a M_D^*, $\forall D$. Es decir, M_R es casi plano si y solo si para cada D y cada R-submódulo izquierdo $K \leq M_D^*$, el morfismo natural:

$$K \otimes_R M \longrightarrow M_D^* \otimes_R M$$

es monomorfismo.

Observaciones:

i) De la definición, es claro que todo módulo plano es casi plano.

ii) El inverso no es cierto, como se muestra en el ejemplo 4.

Antes de dar algunas caracterizaciones de anillos regulares, utilizando el concepto de módulos casi planos, damos algunos resultados sobre estos últimos.

Proposición 5.1.- Sea R un anillo y M_R un módulo. Denotemos por $\overline{R} = R/\mathrm{an}(M)$. Son equivalentes:

i) M_R es casi plano.

ii) $\forall D$, M^*_D es casi inyectivo.
iii) $(M^*)^{\mathbb{X}}$ es casi inyectivo, $\forall$ $\mathbb{X}$-conjunto.
iv) M es $\bar{R}$-módulo plano.
v) M es plano relativo a $(M^*)^A$ para cada conjunto A.

Demostración.- i) $\Rightarrow$ ii) Sea D fijo y supongamos que

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M^*_D$$

es sucesión exacta de R-módulos izquierdos.

Como M_R es casi plano entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow K \otimes_R M \longrightarrow M^*_D \otimes_R M$$

es exacta. Pero como D es divisible (y por lo tanto inyectivo) se sigue que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M^*_D \otimes_R M, D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K \otimes_R M, D) \longrightarrow 0$$

es sucesión exacta.

Ahora bien, sabemos que:

i) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M^*_D \otimes_R M, D) \simeq \mathrm{Hom}_R(M^*_D, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, D))$

ii) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K \otimes_R M, D) \simeq \mathrm{Hom}_R(K, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, D))$

y además, los isomorfismos son naturales.

Por lo tanto, la sucesión

$$\mathrm{Hom}_R(M^*_D, M^*_D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(K, M^*_D) \longrightarrow 0$$

es exacta, i.e., M^*_D es casi inyectivo.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea $\mathbb{X}$ un conjunto cualquiera. Tenemos que:

$$(M^*)^{\mathbb{X}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathbb{X}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathbb{X}}) = M^*_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathbb{X}}}$$

Así, si M^*_D es casi inyectivo $\forall D$, en particular si $D = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathbb{X}}$.

$\therefore$ $(M^*)^{\mathbb{X}}$ es casi inyectivo.

iii) $\Rightarrow$ iv) Supongamos que $(M^*)^{\mathfrak{X}}$ es casi inyectivo, $\forall \mathfrak{X}$. Veamos que lo sigue siendo como $\bar{R}$-módulo izquierdo.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} (M^*)^{\mathfrak{X}} & \\ K \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook, "i"] & (M^*)^{\mathfrak{X}} \arrow[ul, dashed, "\exists g"'] \end{tikzcd}$$

donde f es $\bar{R}$-homomorfismo. Entonces f es R-homomorfismo, pues

$$f(r\cdot x) = f(\bar{r}\cdot x) = \bar{r}\cdot f(x) = r\cdot f(x)$$

$$\therefore\ \exists\, g : (M^*)^{\mathfrak{X}} \longrightarrow (M^*)^{\mathfrak{X}} \ \ni.\ \ g|_K = f$$

Pero facilmente se checa que $g \in End_{\bar{R}}((M^*)^{\mathfrak{X}})$ y por lo tanto, $(M^*)^{\mathfrak{X}}$ es $\bar{R}$-módulo casi inyectivo.

Ahora bien, como M^* es fiel sobre $\bar{R}$ entonces existe un conjunto $\mathfrak{X}$ tal que

$$0 \longrightarrow \bar{R} \xrightarrow{\alpha} (M^*)^{\mathfrak{X}}$$

es exacta, para alguna α apropiada.

De aquí, se sigue claramente que $(M^*)^{\mathfrak{X}}$ es inyectivo como $\bar{R}$-módulo.

$\therefore$ M^* es inyectivo como $\bar{R}$-módulo.

$\therefore$ M es plano sobre $\bar{R}$ (prop. 1.3).

iv) $\Rightarrow$ v) Sabemos que M y $(M^*)^A$ son $\bar{R}$-módulos izquierdos de forma natural y de aquí que si

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} (M^*)^A$$

es sucesión exacta de R-módulos izquierdos, también lo es de $\bar{R}$-módulos izquierdos.

Así, como M es plano sobre $\bar{R}$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow K \otimes_{\bar{R}} M & \xrightarrow{f \otimes_{\bar{R}} 1_M} & (M^*)^A \otimes_{\bar{R}} M \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ K \otimes_R M & \xrightarrow{f \otimes_R 1_M} & (M^*)^A \otimes_R M \end{array}$$

Por lo tanto, $f \otimes_R 1_M$ es monomorfismo, que es lo que queríamos.

v) $\Rightarrow$ i) Sea D fijo. Ya que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo para $\mathbb{Z}$-Mod, existe un conjunto A y un monomorfismo

$$0 \longrightarrow D \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^A$$

Además, dicho monomorfismo se escinde, ya que D es inyectivo. Por lo tanto, hay un monomorfismo que también se escinde

$$0 \longrightarrow M_D^* \longrightarrow (M^*)^A$$

Así, si M es plano relativo a $(M^*)^A$ entonces es plano relativo al sumando directo M_D^*, i.e., M_R es casi plano.

Corolario 5.2.- Sea M un R-módulo fiel. Entonces
M_R es plano $\Leftrightarrow$ M_R es casi plano.

Demostración.- "$\Rightarrow$" Esta es obvia.
"$\Leftarrow$" Si M_R es casi plano entonces M es plano sobre $\bar{R} = R/\mathrm{an}(M) = R$.

La siguiente proposición, nos da una caracterización de anillos regulares, usando la noción de R-módulo casi plano.

Proposición 5.3.- Un anillo R es regular $\Leftrightarrow$ cada R-módulo derecho (izq.) es casi plano.

Demostración.- "$\Rightarrow$" Esta es obvia pues

R regular $\Rightarrow M_R$ es plano, $\forall M_R \Rightarrow M_R$ es casi plano, $\forall M_R$

"$\Leftarrow$" Sea M_R un módulo. Probemos que M_R es plano.

Por la hipótesis, $M \oplus R$ es casi plano; pero $M \oplus R$ es fiel y por el corolario anterior, se sigue que $M \oplus R$ es plano. Por lo tanto, M_R es plano.

$\therefore$ R es regular.

La siguiente proposición nos da una caracterización de anillos regulares, en el caso conmutativo.

Para ello, necesitamos un lema.

Lema 5.4.- Sea R un anillo y $\bar{R}$ un anillo cociente de R. Si cada R-submódulo de un R-módulo casi plano es casi plano entonces cada $\bar{R}$-submódulo de un $\bar{R}$-módulo casi plano es casi plano.

Demostración.- Sea $M_{\bar{R}}$ un módulo casi plano y $N \leq M$ $\bar{R}$-submódulo.

Sabemos que M es R-módulo de manera natural, definiendo

$$m \cdot r = m \cdot \bar{r} \qquad r \in R,\ m \in M.$$

Veamos que M_R es casi plano. Supongamos que $\bar{R} = R/I$; entonces:

$$an_{\bar{R}}(M) = \{\bar{r} \in \bar{R} \mid m \cdot \bar{r} = 0,\ \forall m \in M\}$$

$$an_R(M) = \{r \in R \mid m \cdot r = 0,\ \forall m \in M\} = \{r \in R \mid m \cdot \bar{r} = 0, \forall m \in M\}$$

Observamos primero, que $I \subset an_R(M)$ pues si $i \in I$ entonces $\bar{i} = \bar{0}$ y como M es $\bar{R}$-módulo entonces $m \cdot \bar{i} = m \cdot \bar{0} = 0$, $\forall m \in M$.

Ahora, probemos que $an_{\bar{R}}(M) = an_R(M)/I$. Esto es claro, pues

$m \cdot \bar{r} = 0 \iff m \cdot r = 0 \iff r \in an_R(M)$

Usando que $M_{\bar{R}}$ es casi plano y la prop. 5.1. se sigue que M es plano sobre

$$\bar{R}/an_{\bar{R}}(M) \simeq (R/I)/(an_R(M)/I) \simeq R/an_R(M)$$

(además, el isomorfismo es de anillos).

$\therefore$ M es plano sobre $R/an_R(M)$

$\therefore$ M es R-módulo casi plano.

Así, se sigue que $N \leq M$ es R-submódulo casi plano, i.e., N es plano sobre $R/an_R(N)$

$\therefore$ N es plano sobre $\bar{R}/an_{\bar{R}}(N)$

$\therefore$ N es $\bar{R}$-módulo casi plano.

Teorema 5.5.- Sea R un anillo conmutativo. Son equivalentes:

i) R es regular

ii) Cada submódulo de un R-módulo casi plano es casi plano.

Demostración.- i) $\Rightarrow$ ii) Obvio por la prop. 5.3.

ii) $\Rightarrow$ i) Como R es conmutativo, bastará ver que cada anillo cociente de R es semiprimo.

Probemos primero que R mismo es semiprimo. Por la prop. 1.13, bastará ver que cada ideal principal es plano. Así, sea $I \leq R$ ideal principal.

Sabemos que $I \oplus R \leq R \oplus R$ es R-submódulo y $R \oplus R$ es plano (y por lo tanto casi plano)

Por (ii) se sigue que $I \oplus R$ es casi plano; pero sabemos que $I \oplus R$ es fiel, de donde $I \oplus R$ es plano.

$\therefore$ I es plano.

Lo que hemos probado es que si un anillo R

tiene la propiedad (ii) entonces es semiprimo (anillo conmutativo).

Pero si R tiene la propiedad (ii) entonces cada anillo cociente también la tiene (por el lema anterior). Por lo tanto, cada anillo cociente de R es semiprimo.

Teorema 5.6.- Sea R un anillo neteriano. Entonces cada submódulo de un R-módulo derecho casi plano y f.g. es casi plano $\Longleftrightarrow$ cada anillo cociente de R es hereditario.

Demostración.- "$\Rightarrow$" Veamos primero que R es hereditario. Así, sea $I_R \leq R$ ideal, entonces $I \oplus R \leq R \oplus R$ es submódulo y $R \oplus R$ es casi plano y f.g.

$$\therefore I \oplus R \text{ es casi plano.}$$

Como $I \oplus R$ es fiel, se sigue que $I \oplus R$ es plano y por tanto I_R también.

Como R es neteriano entonces I_R es f.g y plano, y por lo tanto proyectivo

$$\therefore R \text{ es hereditario derecho.}$$

Ahora, sea $\bar{R}$ un anillo cociente de R. Para ver que $\bar{R}$ es hereditario, bastará probar que cada $\bar{R}$-submódulo de un $\bar{R}$-módulo derecho casi plano y f.g. es casi plano.

Así, sea $M_{\bar{R}}$ un módulo casi plano y f.g., y sea $N \leq M$ un $\bar{R}$-submódulo. Tenemos que M es R-módulo casi plano y f.g.

$\therefore N$ es R-módulo casi plano

$\therefore N$ es $\bar{R}$-módulo casi plano (pues ya vimos que $\bar{R}/an_{\bar{R}}(N) \simeq R/an_R(N)$).

"$\Leftarrow$" Sea M_R un módulo casi plano y f.g. ; además, supongamos que $N \leq M$ es R-submódulo.

Si hacemos $\overline{R} = R/an_R(M)$ entonces M es plano sobre $\overline{R}$ y f.g. Como $\overline{R}$ es neteriano (pues R lo es) entonces $M_{\overline{R}}$ es proyectivo.

Y como $\overline{R}$ es hereditario y $N_{\overline{R}} \leq M_{\overline{R}}$ entonces $N_{\overline{R}}$ es proyectivo ; así, $N_{\overline{R}}$ es plano.

$\therefore$ N_R es casi plano.

CAPITULO

VI

ANILLOS REGULARES Y ANILLOS QIF

Definición.- Un anillo R se llama IF derecho (izq.) si cada R-módulo derecho (izq.) inyectivo es plano.

Generalizando, tenemos la siguiente

Definición.- Un anillo R se llama QIF derecho (izq.) si cada R-módulo derecho (izq.) casi inyectivo es casi plano.

Observaciones:

i) Es claro que cada anillo regular es IF (pues cada R-módulo es plano) y QIF (pues cada R-módulo es casi plano).

ii) Cada anillo QIF derecho (izq.) es IF derecho (respectivamente izq.).

Para ver esto, supongamos que M_R es inyectivo, de donde $M \oplus E(R)$ es inyectivo.

Como R es QIF se sigue que $M \oplus E(R)$ es casi plano; ya que además es fiel, entonces es plano.

$\therefore M_R$ es plano.

Teorema 6.1.- Sea R un anillo perfecto derecho. Entonces R es QIF $\Leftrightarrow$ R es uniserial, i.e., cada anillo cociente de R es QF.

Demostración.- "$\Rightarrow$" Supongamos que R es QIF. Por la observación (ii), R es IF.

Afirmo que R es QF. Para ello, bastará con ver que cada módulo inyectivo es proyectivo.

Pero si M_R es inyectivo entonces es plano y como R es perfecto, M_R es proyectivo.

Así hemos probado que:

R es QIF y perfecto $\Rightarrow$ R es QF.

Para ver que R es uniserial, hay que probar que cada anillo cociente de R es QF.

Sea $\bar{R}$ un anillo cociente de R. Tenemos que:

i) R perfecto $\Rightarrow$ $\bar{R}$ perfecto (ver [ ], pag.

ii) R QIF $\Rightarrow$ $\bar{R}$ QIF.

Para ver (ii), sup. que $M_{\bar{R}}$ es casi inyectivo; entonces es claro que M_R es casi inyectivo y por lo tanto, casi plano.

Así, M es $R/an_R(M)$-módulo plano, de donde M es $\bar{R}/an_{\bar{R}}(M)$-módulo plano.

$\therefore$ $M_{\bar{R}}$ es casi plano.

Por lo tanto, $\bar{R}$ es QIF y perfecto, y por lo demostrado anteriormente, $\bar{R}$ es QF.

"$\Leftarrow$" Sup. que M_R es casi inyectivo y sea $\bar{R} = R/an_R(M)$.

Afirmo que $M_{\bar{R}}$ es casi inyectivo. Sup. que $N \leq M$ es $\bar{R}$-submódulo y $f: N \to M$ es $\bar{R}$-homomorfismo.

Entonces f es R-homomorfismo y por tanto

$$\exists\, f': M_R \to M_R \ \ \text{.·.} \ \ f'|_N = f$$

Pero es claro que $f' \in End_{\bar{R}}(M)$, y así tenemos lo que afirmábamos. Además, es claro que $M_{\bar{R}}$ es fiel; pero por hipótesis, $\bar{R}$ es QF y en particular, es artiniano. Se sigue por el teorema 19.16 A [8], que $M_{\bar{R}}$ es inyectivo.

Usando nuevamente el hecho de que $\bar{R}$ es QF, te-

nemos que $M_{\bar{R}}$ es proyectivo, y por lo tanto plano.
$\therefore M_R$ es casi plano, i.e., R es QIF.

La siguiente proposición nos da una caracterización de anillos regulares, usando el concepto de anillos QIF, y el de dimensión débil.

Proposición 6.2.- Sea R un anillo. Son equivalentes:

i) R es regular.

ii) R es QIF y $w g\ell(R) \leq 1$.

Demostración.- i) $\Rightarrow$ ii) Es obvio, pues si R es regular entonces cada R-módulo es plano.
$\therefore R$ es QIF y $w g\ell(R) = 0$.

ii) $\Rightarrow$ i) Probemos que cada R-módulo es plano.

Sea M_R un módulo, como R es QIF entonces R es IF, de donde, $E(M)$ es plano.

Pero por la prop. 1.11, tenemos que si $w g\ell(R) \leq 1$ entonces cada submódulo de un módulo plano es plano. Por lo tanto, $M_R \hookrightarrow E(M)$ es plano.

Definición.- Un anillo R se llama FC derecho (izq.) si R es coherente derecho (izq.) y R_R (${}_R R$) es coplano.

R se llama FC si es FC derecho e izquierdo.

Veamos algunos resultados sobre anillos FC.

Proposición 6.3.- Si R es coherente derecho e ${}_R I \leq R$ es ideal f.g. entonces $an_R(I)$ es f.g.

Analogamente, si R es coherente izq. e $I_R \leq R$ es f.g. entonces $an_\ell(I)$ es f.g.

Demostración.- Sup. que R es coherente derecho y sea
$$I = Rx_1 + \dots + Rx_n \quad , \quad x_i \in R .$$
La prueba será por inducción sobre n:

i) Si $n=1$, consideremos la sucesión exacta:
$$0 \longrightarrow an_r(Rx_1) \longrightarrow R \xrightarrow{f} x_1R \longrightarrow 0$$
donde $f(r) = x_1 r$. Así, como R es coherente derecho entonces x_1R es finitamente presentado, de donde, $an_r(Rx_1)$ es f.g.

ii) Supongamos que vale la proposición para $n-1$, $n \geq 2$ y sea ${}_RI \leq R$ como antes. Por hipótesis de inducción, $an_r(Rx_1 + \dots + Rx_{n-1})$ es f.g. y por el caso (i), $an_r(Rx_n)$ es f.g. Así, por la proposición 1.10, tenemos que
$$an_r(I) = an_r(Rx_1 + \dots + Rx_{n-1}) \cap an_r(Rx_1) \quad \text{es f.g.}$$
Si R es coherente izquierdo, es análogo.

Proposición 6.4.- Sup. que ${}_RR$ es coplano. Entonces:

i) $an_r(I_1 \cap I_2) = an_r(I_1) + an_r(I_2)$ si I_1 e I_2 son ideales izquierdos f.g.

ii) $an_r an_\ell(I) = I$ si $I_R \leq R$ es principal.

Demostración.- i) Sabemos que la contención
$$an_r(I_1) + an_r(I_2) \subset an_r(I_1 \cap I_2)$$
es válida siempre. Ahora sea $b \in an_r(I_1 \cap I_2)$. Definimos el morfismo
$$\theta : I_1 + I_2 \longrightarrow R \quad \therefore \quad \theta(x_1 + x_2) = x_1 + x_2(1+b)$$
θ está bien definida, pues si $x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ entonces $x_1 - x_1' = x_2' - x_2 \in I_1 \cap I_2$, y como $b \in an_r(I_1 \cap I_2)$ entonces $(x_2' - x_2)b = 0$, o bien $x_2'b = x_2 b$
$$\therefore \quad x_1 + x_2(1+b) = x_1 + x_2 + x_2 b = x_1' + x_2' + x_2' b =$$
$$= x_1' + x_2'(1+b).$$

Ahora bien, como ${}_R R$ es coplano entonces

$$\exists\, \alpha : R \to R \ \ \ni.\ \ \alpha|_{I_1+I_2} = \theta .$$

Sea $a = \alpha(1)$. Afirmo que $1-a \in an_r(I_1)$ y $1+b-a \in an_r(I_2)$. Si $x_1 \in I_1$ entonces

$$x_1 = \theta(x_1) = \alpha(x_1) = x_1 \cdot \alpha(1) = x_1 \cdot a$$

$$\therefore \ \ x_1(1-a) = 0$$

Si $x_2 \in I_2$ entonces $x_2(1+b) = \theta(x_2) = \alpha(x_2) = {}$ $= x_2 \cdot \alpha(1) = x_2 \cdot a$, de donde $x_2(1+b-a) = 0$.

Pero entonces tenemos que

$$b = (1+b-a) - (1-a) \in an_r(I_1) + an_r(I_2)$$

ii) Sea $a \in R$. Sabemos que la contención

$$aR \subset an_r\, an_\ell\,(aR)$$

es válida siempre. Ahora sea $b \in an_r an_\ell(aR)$; definimos el morfismo

$$f : Ra \to R \ \ \ni.\ \ f(ra) = r \cdot b .$$

f está bien definida, pues si $ra = r'a$ entonces $(r-r')\cdot a = 0$, i.e., $r - r' \in an_\ell(aR)$ y como supusimos que $b \in an_r an_\ell(aR)$ entonces

$$(r-r')\cdot b = 0 \ , \ i.e., \ rb = r'b$$

Ahora bien, como ${}_R R$ es coplano entonces

$$\exists\, g : R \to R \ \ \ni.\ \ g|_{Ra} = f .$$

$$\therefore b = f(1\cdot a) = g(a) = a \cdot g(1) \in aR$$

Análogamente se prueba que si R_R es coplano entonces

i) $an_\ell(I_1 \cap I_2) = an_\ell(I_1) + an_\ell(I_2)$ si $I_1, I_2 \leq R$ son ideales derechos f.g.

ii) $an_\ell\, an_r\,(I) = I$ si ${}_R I \leq R$ es ideal principal.

Corolario 6.5 .- Si R es FC entonces R satisface la propiedad del doble anulador para ideales izq. y derechos f.g., esto es, si

$\mathcal{L} = \{ {}_R I \leq R \mid I \text{ es f.g.} \}$ y

$\mathcal{R} = \{ J_R \leq R \mid J \text{ es f.g.} \}$

entonces

i) $an_\ell(I) \in \mathcal{L}$ y $an_r an_\ell(I) = I$, $\forall I \in \mathcal{R}$.

ii) $an_r(I) \in \mathcal{R}$ y $an_\ell an_r(I) = I$, $\forall I \in \mathcal{L}$.

Demostración.- i) Sea $I \in \mathcal{R}$. Como R es coherente izquierdo, se sigue de la prop. 6.3, que $an_\ell(I) \in \mathcal{L}$.

Supongamos que $I = x_1R + \ldots + x_nR$ y probemos la segunda afirmación por inducción sobre n:

a) Si $n=1$ entonces I es principal y como ${}_RR$ es coplano, la afirmación se sigue de la prop. 6.4.

b) Sup. válido para $n-1$, $n \geq 2$. Como R es coherente izq. entonces $an_\ell(x_1R + \ldots + x_{n-1}R)$ es f.g. y como ${}_RR$ es coplano entonces

$$an_r(an_\ell(x_1R + \ldots + x_{n-1}R) + an_\ell(x_nR)) = an_r an_\ell(x_1R + \ldots + x_{n-1}R) + \\ + an_r an_\ell(x_nR).$$

Por hipótesis de inducción, tenemos que

$$an_r an_\ell(x_1R + \ldots + x_{n-1}R) = x_1R + \ldots + x_{n-1}R$$

y por la prop. 6.4., $an_r an_\ell(R) = x_nR$. .

$$\therefore an_r an_\ell(I) = an_r an_\ell(x_1R + \ldots + x_nR) = an_r(an_\ell(x_1R + \ldots + x_{n-1}R) \cap an_\ell(x_nR) = \\ = x_1R + \ldots + x_nR = I.$$

ii) La prueba es análoga a (i).

Proposición 6.6.- Si R es un anillo FC sin elementos nilpotentes distintos de cero entonces R es regular.

Demostración.- Sea $a \in R$. Afirmo que

$$Ra \cap an_\ell(aR) = 0$$

Sup. que $ra \in an_\ell(aR) = an_\ell(a)$, i.e., $ra^2 = 0$.

$\therefore\ (ara)^2 = (ara)(ara) = ara^2ra = 0$

$\therefore\ ara = 0$, por nuestra hipótesis.

$\therefore\ (ra)^2 = rara = 0$, de donde , $ra = 0$.

Como R es FC entonces $an_\ell(aR)$ es f.g. y por las proposiciones anteriores, tenemos que

$$R = an_r(0) = an_r(Ra \cap an_\ell(aR)) = an_r(Ra) + an_r an_\ell(aR) =$$
$$= an_r(Ra) + aR .$$

$\therefore\ \exists\ x \in an_r(Ra)\ , r \in R\ \ .\dashv.\ \ 1 = x + a\cdot r$

$\therefore\ a = xa + ara$.

Pero $(xa)^2 = xaxa = 0$, pues $xax = 0$. Por lo tanto, $xa = 0$, de donde, $a = ara$.

Corolario. 6.7 .- Si R es un anillo FC conmutativo y $J(R) = 0$ entonces R es regular.

Demostración.- Como R es conmutativo entonces

$$N(R) = \{ x \in R \mid x \text{ es nilpotente} \}$$

y sabemos que : $N(R) \subset J(R) = 0$

Por la prop. anterior se sigue que R es regular.

En la prueba del siguiente teorema, usaremos una proposición cuya prueba se encuentra en [4] (Teorema 2):

Proposición 6.8.- Para cualquier anillo R, R es IF si y solo si R es coherente izq. y derecho y ${}_RR$, R_R son coplanos.

Nuestro teorema es:

Teorema 6.9 .- Sup. que R es un anillo conmutativo y es QIF. Entonces

$$R \text{ es regular} \iff J(R) = 0 .$$

Demostración.- "$\Rightarrow$" Obvio por el teorema 2.4.

"$\Leftarrow$" Supongamos ahora que $J(R)=0$.

Por hipótesis, tenemos que R es QIF y por lo tanto es anillo IF.

Por la proposición 6.8, R es FC

$\therefore$ R es anillo FC conmutativo con $J(R)=0$, y así, por el corolario 6.7, R es regular.

Ejemplo 1.- Este es un ejemplo de un R-módulo coplano que no es inyectivo.

Sea R el anillo $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$. Es claro que R es anillo Booleano y por lo tanto regular.

Así, sabemos entonces que cada R-módulo es coplano. En particular, el módulo $M = \mathbb{Z}_2^{(\mathbb{N})}$.

Veamos que M no puede ser inyectivo. Para ello, bastará ver que M es esencial en R.

Pero si $I \leq R$ es ideal distinto de cero entonces $\exists$ $\bar{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\bar{x} \in I - \{\bar{0}\}$.

Sup. que $x_{n_0} = 1$ y sea $\bar{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R$ tal que:

$$y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = n_0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$\therefore$ $\bar{y}\cdot\bar{x} \in I$ (por ser I ideal)

Pero $\bar{y}\cdot\bar{x} = (0, \ldots, 1_{n_0}, 0, \ldots) \in M$

$\therefore$ $I \cap M \neq \{\bar{0}\}$, i.e., $M \subseteq_e R$

Ejemplo 2.- Este es un ejemplo de un anillo QI-generalizado que no es QI.

Por la teoría realizada anteriormente, necesitábamos un anillo regular, conmutativo, autoinyectivo y el cual contenga un ideal que no sea inyectivo. Nuevamente, sea $R = \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ e $I = \mathbb{Z}_2^{(\mathbb{N})}$.

Ya sabemos que R es regular, conmutativo (y por lo tanto V-anillo) y que I no es inyectivo. Así, solo nos falta probar que R es autoinyectivo.

Como R es V-anillo entonces cada R-módulo simple es inyectivo.

En particular, cada factor

$$\{\bar{0}\} \times \dots \times \mathbb{Z}_2 \times \{\bar{0}\} \times \dots$$

es R-módulo inyectivo. Como producto directo de inyectivos es inyectivo entonces R es inyectivo.

Ejemplo 3.- Este es el ejemplo de Cozzens del anillo de los polinomios diferenciales, el cual nos servirá para demostrar que existen anillos QI-generalizados que no son regulares.

Definición.- Sea R un anillo. Una derivación de R es una función $D: R \longrightarrow R$ tal que:

i) $D(a+b) = D(a) + D(b)$

ii) $D(ab) = aD(b) + D(a)\cdot b$, $\forall a, b \in R$

Por ejemplo, si $r \in R$ es fijo entonces $D_r : R \to R$ tal que $D_r(a) = ar - ra$, es una derivación de R.

Ahora bien, si D es una derivación de R entonces el anillo de polinomios $R[x]$ es también un anillo bajo la suma usual de polinomios y el producto definido por:

$$x \cdot a = ax + D(a) \quad \text{si } a \in R.$$

Definición.- El anillo de polinomios diferenciales sobre R en la derivación D, denotado por $R[x, D]$ es el anillo definido arriba.

Al igual que en el anillo usual $R[x]$, definimos el grado de $f \in R[x, D]$ como

$$\partial(f) = n \quad \text{si} \quad f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \ a_n \neq 0.$$

Observaciones.-

i) Es fácil probar que $\forall\, n > 0$ se tiene que:

$$x^n \cdot \alpha = D^n(\alpha) + \dots + \frac{n \cdots (n-k+1)}{k!} D^{n-k}(\alpha) x^k + \dots + \alpha x^n$$

ii) Si $R=K$ es un campo entonces:

a) $\partial(f\cdot g) = \partial(f) + \partial(g) \quad \forall f, g \in K[x,D]$

b) Para cada $f, g \in K[x,D]$ $\exists$ $q, r \in K[x,D]$ tales que $f = gq + r$ con $r=0$ ó $\partial(r) < \partial(g)$

La prueba es la misma que la del caso de anillos de polinomios usual. Además, también se tiene que:

b') Para cada $f, g \in K[x,D]$ $\exists$ $q, r \in K[x,D]$ tales que $f = q\cdot g + r$ con $r=0$ ó $\partial(r) < \partial(g)$.

Como consecuencia de (ii) tenemos:

iii) $K[x,D]$ es un dominio de ideales principales izquierdo y derecho. En particular, es neteriano izq. y derecho.

Definición.- Una ecuación diferencial lineal homogenea en D sobre K es una ecuación de la forma:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i(x) = 0 \qquad a_i \in K, 0 \le i \le n \text{ y } n > 0$$

Proposición 7.1.- Sup. que cada ec. dif. lineal homogenea en D sobre K tiene una solución no trivial en K y sup. que

$$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m, \quad a_m \neq 0$$

Entonces $\exists$ $a \in K$ y $g \in K[x,D]$ tal que:

$$a\cdot f = (x+1)\cdot g \quad \text{y} \quad \partial(g) = m-1.$$

Demostración.- Sea $g = b_0 + b_1 x + \dots + b_{m-1} x^{m-1}$. Tratamos de encontrar dichas $b_i \in K$ y $a \in K$ tales que:

$$a\cdot f + (x+1)\cdot g = 0$$

O bien, haciendo las operaciones,

$$0 = aa_0 + aa_1 x + \dots + aa_m x^m + x b_0 + x b_1 x + \dots + x b_{m-1} x^{m-1} + g = 0$$

$$= (aa_0 + D(b_0) + b_0) + (aa_1 + b_0 + D(b_1) + b_1)x + \dots +$$
$$+ (aa_{m-1} + b_{m-2} + D(b_{m-1}) + b_{m-1})x^{m-1} + (aa_m + b_{m-1})x^m$$

Así, tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{aligned} aa_0 + D(b_0) + b_0 &= 0 \\ aa_1 + b_0 + D(b_1) + b_1 &= 0 \\ &\vdots \\ aa_{m-1} + b_{m-2} + D(b_{m-1}) + b_{m-1} &= 0 \\ aa_m + b_{m-1} &= 0 \end{aligned}$$

Despejando b_{m-1} en la última igualdad y sustituyendola en la penúltima, etc., obtenemos una ecuación diferencial equivalente

$$\sum_{i=0}^{m} c_i D^i(a) = 0 \qquad c_i \in K, \ 0 \leq i \leq m.$$

Por hipótesis, ésta tiene solución no trivial en K, y de aquí se sigue el resultado.

Corolario 7.2.- Si cada ec. dif. lineal homogenea en D sobre K tiene solución no trivial en K entonces los únicos elementos irreducibles en $K[x,D]$ son los de grado 1. Por lo tanto, cada $K[x,D]$-módulo derecho simple es de la forma $K[x,D]/(x-\alpha)K[x,D]$.

Demostración.- Es obvio, por lo demostrado anteriormente.

Definición.- Sea K un campo y D una derivación en K. Decimos que K es un campo diferencial universal si $\forall n \geq 0$ y $\forall\, p(X) \in K[X_1,\dots,X_{n+1}] - K$, la ecuación $p(x, D(x), \dots, D^n(x)) = 0$ tiene una solución en K y cada ec. dif. lineal homogenea en D sobre K tiene sol. no trivial en K.

De aquí en adelante, supondremos que K es un campo diferencial universal (tales campos existen, por ejemplo, por un resultado de Kolchin, si K es un campo de característica cero y $D: K \to K$ es una derivación entonces existe un campo U que contiene a K y $D': U \to U$ derivación que extiende a D tal que U es un campo diferencial universal).

Proposición 7.3.- Sea $R = K[x, D]$ y $V_\alpha = R/(x-\alpha)R$, $\alpha \in K$. Entonces V_α es R-módulo divisible.

Demostración.- Hay que ver que $\forall\, f \in R - \{0\}$

$$V_\alpha \subset V_\alpha \cdot f.$$

Si $f \in K - \{0\}$ es obvio. Sup. que $f = x - \beta$, $\beta \in K$ y sea $g \in R - \{0\}$. Hay que probar que $\exists\, h, \theta \in R$ $\ni$

$$g = h \cdot (x-\beta) + (x-\alpha) \cdot \theta$$

i) Si $\partial(g) = 0$ entonces $g \in K$ y consideremos el polinomio

$$p(x, D(x)) = -g + (\beta - \alpha) \cdot x + D(x).$$

Como K es un campo diferencial universal entonces $\exists\, b \in K$ $\ni$ $p(b, D(b)) = 0$, *i.e.*,

$$g = (\beta-\alpha) b + D(b) = -bx + bx + D(b) + \beta b - \alpha b =$$
$$= -b \cdot x + x \cdot b + b\beta - \alpha b = -b(x-\beta) + (x-\alpha) \cdot b.$$

ii) Si $\partial(g) > 0$ entonces $\exists\, q, r \in R$ $\ni$

$$g = (x-\alpha) \cdot q + r \quad \text{con } r \in K.$$

Por el caso (i) tenemos que:

$$r = -b(x-\beta) + (x-\alpha) \cdot b \quad \text{para alguna } b \in K.$$

$$\therefore\; g = -b(x-\beta) + (x-\alpha) \cdot (q+b).$$

$\therefore$ $V_\alpha \subset V_\alpha \cdot f$, que es lo que queríamos.

El caso cuando $\partial(f) > 1$ es consecuencia inmediata de que $f = a(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ y del caso $\partial(f)=1$.

Corolario 7.4.- $R=K[x,D]$ es V-anillo derecho.

Demostración.- Es obvio, ya que cada R-módulo simple es divisible y como R es de ideales principales entonces cada R-módulo simple es inyectivo.

Así, por la prop. de Byrd [3] se sigue que R es un anillo QI (dicha prop. nos garantiza que cada V-anillo derecho, dominio de ideales principales derecho y que satisfaga ACC sobre ideales principales izquierdos es anillo QI)

Finalmente, R no es regular pues si $f = x \in R$ y $\exists\, g \in R \ni.\ f = fgf$ entonces $1 = gf$, de donde,

$$0 = \partial(1) = \partial(g) + \partial(f)\ \text{!}$$

Ejemplo 4.- Este es un ejemplo de un módulo que es casi plano pero no es plano.

Sea $R = \mathbb{Z}$ y consideremos el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_p$ con p-primo. Entonces $R/an_R(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_p$.

Así, como $\mathbb{Z}_p$ es plano como $\mathbb{Z}_p$-módulo entonces por la prop. 5.1, $\mathbb{Z}_p$ es $\mathbb{Z}$-módulo casi plano.

Pero $\mathbb{Z}_p$ no es $\mathbb{Z}$-módulo plano ya que no es libre de torsión.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Ahsan J. and Ibrahim A.
Some Homological Characterizations of Regular Rings.
Comunications in Algebra, 10(9) (1982) 887-912.

[2] Anderson W.F. and Fuller R.K.
Rings and categories of modules.
Springer - Verlag (1973).

[3] Byrd K.A.
¿When are quasi-inyectives inyective?
Canad. Math. Bull. 15 (4), 1972. 599-600.

[4] Colby R.R.
Rings which have flat inyective Modules.
J. Algebra, 35 (1975), 239-252.

[5] Cozzens, J.H.
"Homological properties of the ring of differential polynomials"
Bull. Amer. Math. Soc. 76, (1970) 75-79.

[6] Damiano R.F.
Coflat Rings and Modules
Pacific. J. Math., 81 (2), (1979), 349-369.

[7] Faith Carl
Algebra: Rings, Modules and Categories I
Springer Verlag (190), 1973.

[8] Faith Carl
Algebra II: Ring Theory. Springer Verlag (1976).

[9] Hill A. David
Restricted Homological Properties of Modules.
J. Australian Math. Soc., 18 (2) (1974), 170-181.

[10] Rotman Joseph J.
"Notes on Homological Algebra"
Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies.

[11] Stenström Bo .
Rings of Quotients
Springer Verlag (217).