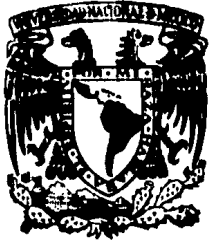


25 Jan.



**Universidad Nacional Autónoma de México**  
Facultad de Ingeniería

**MODELO DE PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA  
PARA OPTIMIZAR LA OPERACION DE PRESAS**

**T E S I S**  
**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE**  
**INGENIERO CIVIL**  
**PRESENTA**  
**RAUL LARIOS MALANCHE**

México, D F. 1985



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **INDICE**

<b>I - MOTIVACION . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>II - MODELO DE PROGRAMACION DINAMICA . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>II.1 - Caso Deterministico . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>II.1.1 - Forma General . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>II.1.2 - Algoritmo de Programación Dinámica . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>II.2 - Caso Aleatorio Independiente . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>II.3 - Caso Aleatorio Condicional . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>III - DESARROLLO DEL METODO . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>III.1 - Distribución de Probabilidad Condicional . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>III.1.1 - Cálculo Teórico . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>III.1.1.1 - Distribución Normal Bidimensional . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>III.1.2 - Simulación de Registros . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>III.1.2.1 - Clasificación Simple . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>III.1.2.3 - Otros Desarrollos . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>III.2 - Variables de Estado . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>IV - APLICACION A UN EJEMPLO REAL . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>IV.1 - Datos Generales de la Presa . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>IV.2 - Datos para el Modelo . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>IV.2.1 - Etapas . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>IV.2.2 - Ingreso Real en el Periodo Anterior . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>IV.2.3 - Estados . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>IV.2.4 - Volúmenes de Extracción . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>IV.2.5 - Función Objetivo . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>IV.3 - Función de Probabilidad Condicional . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>IV.4 - Programa de Cómputo . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>IV.4.1 - Algoritmo de Cómputo . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>IV.4.2 - Descripción del Programa . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>IV.5 - Resultados . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>V - CONCLUSIONES . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>REFERENCIAS . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>ANEXO A - Programa para generar registros sintéticos . . . . .</b>	<b>75</b>
<b>ANEXO B - Tablas con los valores esperados de la     Función Objetivo Acumulada . . . . .</b>	<b>78</b>

## INDICE DE FIGURAS

11.1 - Representación de un Problema de Decisión Secuencial . . . . .	5
11.2 - Esquema de una Presa . . . . .	7
11.3 - Modelo Determinístico . . . . .	8
11.4 - Problema $j$ . . . . .	12
11.5 - Problema $N-1$ . . . . .	15
11.6 - Problema $N-2$ . . . . .	17
11.7 - Modelo Aleatorio Independiente . . . . .	20
11.8 - Modelo Aleatorio Condicional . . . . .	23
111.1 - Diagrama de Dispersión . . . . .	26
111.2 - Función de Distribución Conjunta . . . . .	28
111.3 - Densidad Conjunta como una Superficie en el Espacio . . . . .	29
111.4 - Función de Densidad Conjunta . . . . .	36
111.5 - Variables de Estado . . . . .	38
111.6 - Función de Densidad de Probabilidad . . . . .	39
114.1 - Localización de la Presa El Intierrillo . . . . .	41
114.2 - Diagrama de Bloques del Modelo . . . . .	52
114.3 - Listado del Programa . . . . .	55
114.4 - Decisión Óptima (Ingreso Chico) . . . . .	69
114.5 - Decisión Óptima (Ingreso Mediano) . . . . .	70
114.6 - Decisión Óptima (Ingreso Grande) . . . . .	71

## INDICE DE TABLAS

III.1 - Frecuencias Cruzadas para dos Meses Consecutivos . . . . .	34
III.2 - Frecuencias Relativas para dos Meses Consecutivos . . . . .	34
IV.1 - Escurrimientos Mensuales Promedio en la Presa El Infiernillo . . . . .	43
IV.2 - Volúmenes y Elevaciones de los Estados Propuestos . . . . .	45
IV.3 - Promedio de los Ingresos por Etapa . . . . .	47
IV.4 - Número de Observaciones, Promedio y Desviación Estándar para cada Grupo de Ingresos . . . . .	48
IV.5 - Probabilidades para Ingresos Agrupados por Rangos . . . . .	61
IV.6 - Beneficios Netos para cada Combinación de Niveles, dado un Volumen de Extracción . . . . .	63
IV.7 - Extracciones Óptimas en Función del Ingreso en la Etapa Anterior y el Nivel en la Presa . . . . .	66

## I.- MOTIVACION

El proyecto y la construcción de una presa requieren de una enorme inversión por lo que se debe tratar de obtener los máximos beneficios posibles, es decir, se deben satisfacer ampliamente los objetivos para los que fué construida. Esto puede lograrse estableciendo las cantidades de extracción mas adecuadas (políticas de operación) para cada período, procurando evitar derrames y satisfacer al máximo las demandas.

Al tratar de establecer las políticas de operación se encuentra que si se procura evitar los derrames, utilizando de inmediato el volumen disponible, puede presentarse una sequía y, por no tener agua almacenada, no se logre satisfacer la demanda en este período. Por otro lado, si se pretende mantener almacenado un gran volumen para cubrir las futuras demandas, puede suceder que escorra mucha agua, y no se tenga capacidad para almacenarla.

Para poder encontrar el punto óptimo entre ambos criterios obteniendo a largo plazo los máximos beneficios, se han desarrollado múltiples métodos en los cuales, por simplificación, usualmente se supone que entre períodos bien definidos (meses, semestres, años o épocas estacionales) no existe una dependencia entre los escurrimientos, lo cual normalmente es falso, siendo mas realista suponer que el escurrimiento de un período depende del volumen escurrido en

el período anterior.

En este trabajo se desarrolla un modelo de Programación Dinámica para optimizar las políticas de operación de una presa en el cual se incluye la condición de dependencia entre los escurrimientos de dos períodos consecutivos.

En el capítulo dos se exponen las bases de la Programación Dinámica iniciándose por el caso mas simple en el que las variables son determinísticas. Después se expone el caso en que se tiene una variable aleatoria como entrada (ingresos al vaso) considerando independencia estocástica. Finalmente se plantea la dependencia entre los escurrimientos de dos períodos consecutivos en el caso aleatorio condicional, que es el que nos interesa.

En el capítulo tres se desarrolla el método, planteando las dificultades para la obtención de las matrices de Probabilidad Condicional y diferentes formas de calcularlas. También se discute la forma de obtener la matriz de Beneficios Netos Esperados asociados a las variables de estado y decisión.

Un ejemplo con datos de la Presa El Infiernillo, ubicada sobre el Río Balsas en los límites de los Estados de Guerrero y Michoacán, se presenta en el capítulo cuatro, en donde puede verse la información necesaria para la aplicación del Modelo, el algoritmo desarrollado, el programa de cómputo

utilizado y los resultados que se obtienen.

Finalmente, en el capítulo cinco se exponen las conclusiones derivadas de este trabajo.

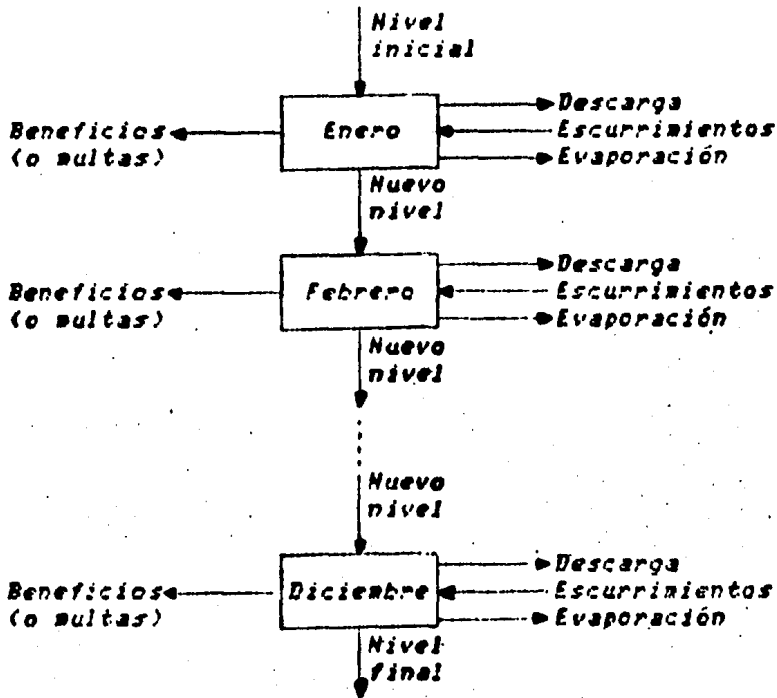


## II. - MODELO DE PROGRAMACION DINAMICA

Para plantear el modelo se empezará por definir las bases de la Programación Dinámica para el caso determinístico, después se harán las modificaciones necesarias para el caso aleatorio considerando independencia en los escurrimientos y finalmente se desarrollará el caso aleatorio condicional.

### II.1. - CASO DETERMINISTICO

Frecuentemente los problemas de planeación y administración de los recursos hidráulicos tienen una estructura compleja, ya que las decisiones que se toman repercuten directamente en la situación futura del sistema. Por ejemplo, en una presa al principio de enero existe un cierto nivel de almacenamiento; la decisión que se tome en relación con el volumen que se extrae durante ese mes, combinada con los escurrimientos que lleguen y las pérdidas (evaporación, infiltración, fugas) darán el nuevo nivel de almacenamiento al final de enero y principio de febrero. Durante enero se obtienen ciertos beneficios, los cuales están íntimamente relacionados con la extracción que se decida realizar y el almacenamiento promedio en el mes. Con el nuevo almacenamiento de febrero, debe tomarse una nueva decisión de extracción y así para cada mes. Aunque cada decisión se toma en cierto momento, no es independiente de la de los demás meses. Esto se presenta esquemáticamente en la figura II.1



**Figura 11.1 - Representación de un problema de decisión secuencial.**

La Programación Dinámica es una técnica matemática de optimización especialmente aplicable a resolver este tipo de problemas de decisiones secuenciales.

### **11.1.1. - Forma General**

La mejor forma de aplicar la Programación Dinámica es definiendo una forma General, mediante la cual se pueden atacar mas fácilmente los problemas. Tratar de resolver un problema de Programación Dinámica sin identificar esta estructura es usualmente mucho más difícil (Ref. 1).

El primer paso es definir el problema en etapas secuenciales. Para un problema de operación de almacenamientos hidráulicos las etapas son los períodos en el horizonte de operación (meses, épocas, etc.). Para un plan de operación anual, si los períodos son iguales a un mes, el total será de 12.

El segundo paso es separar las variables del problema en VARIABLES DE ESTADO Y VARIABLES DE DECISION O CONTROL. Las variables de decisión son independientes y pueden designarse como  $U_i$ , que representa a la variable de decisión en la etapa  $i$ . Las variables de estado,  $X_i$ , son variables dependientes, ya que su valor queda determinado por la variable de estado en el período anterior y la decisión que se tome.

Veamos como se relaciona esto con la operación de una presa. Esquemáticamente podemos representar el problema como se muestra en la figura 11.2. La ecuación básica de continuidad se puede escribir así:

$$X_{i+1} = X_i - U_i - E_i(X_i, X_{i+1}) + C_i \quad \text{--- (11.1)}$$

En este primer caso, los ingresos  $C_i$  se están considerando como una variable determinística conocida. La evaporación  $E_i$  es función del almacenamiento promedio en el período  $i$ . El almacenamiento  $X_i$  es la variable de estado, ya que DEPENDE del almacenamiento en la etapa anterior y de la variable de decisión  $U_i$  que es la extracción realizada durante

el mes  $i$  (VARIABLE INDEPENDIENTE).

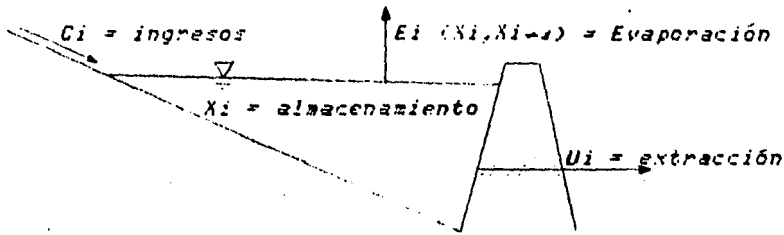
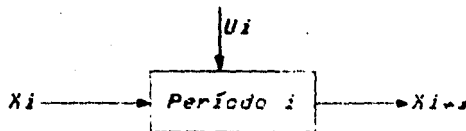


Figura 11.2 - Esquema de una presa.

El tercer paso está íntimamente relacionado con el primero; esto es, se debe definir un sistema de ECUACIONES DE ESTADO para relacionar las variables del período  $i+1$ , con las del período anterior ( $i$ ). Básicamente, esta ecuación transforma el estado  $X_i$ , que es afectado por la variable de decisión  $U_i$ , en un estado  $X_{i+1}$ . Considerando que todos los demás parámetros son constantes y determinísticos tenemos:

$$X_{i+1} = G_i (X_i, X_{i-1}, U_i) \text{ --- (11.2)}$$

Se puede notar en el problema de operación de una presa que no siempre es posible representar explícitamente  $X_{i+1}$  como una función de  $X_i$  y  $U_i$ . Sin embargo, esta situación puede cambiarse si la función  $G$  es INVERTIBLE. Esto es, debe ser posible expresar la variable de decisión  $U_i$  como una función explícita de  $X_i$  y  $X_{i-1}$ .

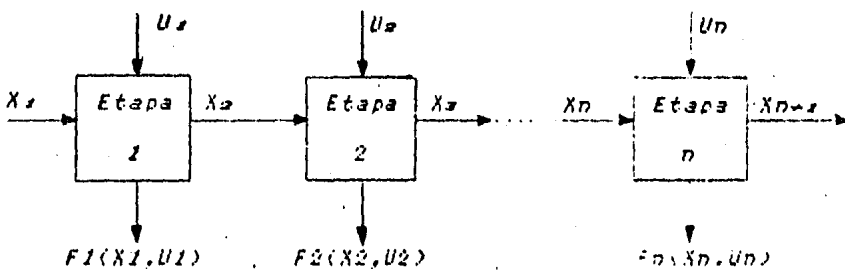


Ecuación de estados  $X_{i+1} = G_i (X_i, X_{i-1}, U_i)$   
 ó:  $U_i = G^*i (X_i, X_{i-1})$  suponiendo que es invertible

Normalmente la ecuación de estado simplemente expresa el balance de masa o energía del sistema que se está analizando. En una presa el balance de masa representa la ecuación de estado. Notese también que, al aparecer en ambos lados de la ecuación el almacenamiento en la etapa  $i+1$ , no es posible plantear explícitamente la ecuación como una función de  $X_i$  y  $U_i$ . Sin embargo, al ser invertible la función, se puede expresar la extracción como una función explícita de  $X_i$  y  $X_{i+1}$ .

$$U_i = X_i - X_{i+1} - E_i(X_i, X_{i+1}) + C_i \quad \text{--- (II.3)}$$

El cuarto requisito para la Forma General es tener una función objetivo que sea SEPARABLE. La función objetivo debe estar compuesta por funciones objetivo individuales  $F_i$  para cada etapa, las cuales son función de las variables de estado y/o de las variables de decisión para esa etapa en particular, como se muestra en la figura II.3



$$\text{FUNCION OBJETIVO: Max (o Min) } \sum_{i=1}^n F_i(X_i, U_i)$$

Figura II.3 - Modelo Determinístico

No hay restricciones en la estructura de estas funciones objetivo individuales. Pueden ser no lineales y aún discontinuas. En general se puede decir que la función objetivo es separable si se cumple una o ambas de las siguientes condiciones:

(1)  $X_{i+1}$  es una función explícita de  $X_i$  y  $U_i$  en la ecuación de estado

$$X_{i+1} = G_i (X_i, U_i)$$

(2) La ecuación de estado es invertible

$$U_i = G_{*i} (X_i, X_{i+1})$$

En este caso, las funciones objetivo individuales no solo pueden ser expresadas en términos de  $X_i$  y  $U_i$ , sino también en función del estado  $X_{i-1}$  al final de la etapa  $i$  (o principio de la etapa  $i+1$ )

El objetivo en un problema de operación de una presa se puede plantear, por ejemplo, en los siguientes términos: Maximizar los beneficios que se obtienen al generar energía eléctrica por medio de una extracción programada. La función de castigo puede considerar multas por los daños ocasionados aguas abajo cuando se tienen grandes derrames.

El requisito final para la forma General es que todas las restricciones adicionales deben ser también separables; esto es, cada restricción debe estar asociada a una sola etapa; por esto se llaman **RESTRICCIONES INDIVIDUALES**. Ejemplo de estas restricciones pueden ser:

$$X_i \leq S_i$$

$$X_{i+1} \leq S_{i+1}$$

$$U_i \in D$$

$$H_i (X_i, X_{i-1}, U_i) \leq 0$$

en donde  $S_i$  representa todos los valores posibles de la variable de estado  $X_i$  al principio de la etapa  $i$ ,  $S_{i+1}$  representa todos los valores posibles de la variable de estado  $X_{i+1}$  al final de la etapa  $i$ ,  $D$  representa todos los valores factibles de la variable de decisión  $U_i$ , y  $H$  representa la o las funciones de restricción en  $X_i$  y  $U_i$ ; nótese que puede haber más de una función de restricción. Si la ecuación de estado es invertible, las funciones  $H$  pueden expresarse como funciones de  $X_i$  y  $X_{i+1}$ .

En la operación de una presa se tiene que los valores de  $D$  para la etapa  $i$  son todos los valores de la variable de decisión  $U_i$  entre la extracción mínima  $U_{min}$  y la máxima  $U_{max}$ . En forma similar  $S$  estará definida entre los límites de almacenamiento  $X_{min}$  y  $X_{max}$ .

Las funciones de restricción  $H$  pueden representar, por ejemplo, restricciones en la producción de energía

$$H_i (X_i, X_{i-1}, U_i) = \begin{cases} P_i (X_i, X_{i-1}, U_i) - P_{max} \leq 0 \\ P_{min} - P_i (X_i, X_{i-1}, U_i) \leq 0 \end{cases}$$

Resumiendo se tiene:

FORMA GENERAL (suponiendo invertibilidad).

$$\text{Max (o Min)} \sum_{i=1}^n F_i (X_i, X_{i-1}, U_i) \quad \text{--- (II.4)}$$

sujeto a:

$$X_{i+1} = G_i (X_i, X_{i-1}, U_i)$$

$$X_{i+1} \in S_{i+1}$$

$$U_i \in D_i$$

$$H_i (X_i, X_{i-1}, U_i) \leq 0$$

y (para el caso determinístico)

$$X_1 = C \text{ (dado) } \delta \quad X_1 \in S_1$$

### 11.1.2 - Algoritmo de Programación Dinámica

Se inicia planteando  $M$  problemas individuales asociados con la forma General, correspondientes al total de etapas. Cada problema  $j$  queda expresado como sigue: Maximizar (o Minimizar) la suma de las funciones  $F_j$  a  $F_n$  en relación con las variables  $X_i$ ,  $U_i$  y  $X_{i+1}$  definidas para las etapas  $i=j, j+1, \dots, n$ ; sujetas a las ecuaciones de estado y las restricciones individuales de cada etapa. Si temporalmente se supone que  $X_j$  es conocida, esto es, se sabe el valor de la variable de estado al principio de la etapa  $j$ , cada problema queda planteado en la siguiente forma:

Problema  $j$ :

$$\text{Max (o Min)} \sum_{i=j}^n F_i (X_i, X_{i-1}, U_i)$$

sujeto a:

$$X_{i+1} = G_i (X_i, X_{i-1}, U_i)$$

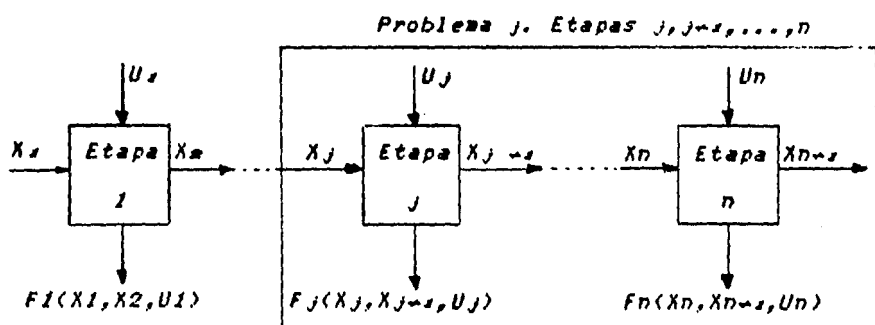
$$X_{i+1} \in S_{i+1}$$

$$U_i \in D_i ; X_j \text{ conocido}$$

$$H_i (X_i, X_{i-1}, U_i) \leq 0 \quad (i=j, j+1, \dots, n)$$



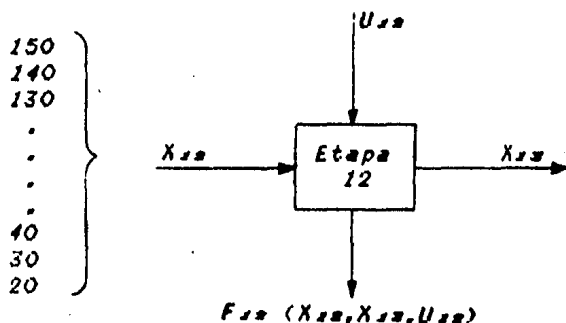
En otras palabras, se define un problema de optimización que, en lugar de iniciar en el primer período (período 1), inicia en algún período  $j$ , con  $X_j$  conocido. Si  $j$  toma valores de 1 a  $N$ , entonces quedan definidos  $N$  problemas individuales de optimización, como se muestra en la figura 11.4. Obviamente el problema que realmente interesa resolver es el correspondiente a  $j=1$ .



Si se inicia resolviendo para  $j=n$  se tiene un problema definido para la última etapa solamente. Se supuso anteriormente que  $X_n$  es conocido, pero como no se sabe de antemano cual es el valor óptimo de  $X_n$ , se resolverá el problema para todos los valores posibles, discretizando en un número razonable de valores de acuerdo con la precisión que se quiera.

En el problema de operación de una presa,  $X_n$  corresponde al almacenamiento al principio del último período, por ejemplo el mes 12. Si se tiene  $X_{\min}$  igual a 20 millones

de metros cúbicos y  $X_{\max}$  igual a 150 millones, es razonable definir  $X_{12}$  en incrementos de 10 millones de metros cúbicos.



Para cada valor discreto de  $X_n$  resolveremos el problema:

$$\text{Max (o Min)} F_n (X_n, X_{n-1}, U_n) \\ U_n$$

sujeto a:

$$X_{n-1} = G_n (X_n, X_{n-1}, U_n)$$

$$X_{n-1} \in S_{n-1}$$

$$U_n \in D_n$$

$$H_n (X_n, X_{n-1}, U_n) \leq 0$$

Con estos valores se tendrá que resolver 14 veces el problema; primero para  $X$  igual a 20 millones, después para 30 millones y así hasta llegar a 150 millones. Esto puede ser latoso, ya que se requiere un proceso iterativo para determinar  $X_{n+1}$  para cada valor de  $U_n$ . Sin embargo, si la ecuación de estado es invertible, se puede replantear el problema en la siguiente forma:

$$\text{Max (o Min)} F_n (X_n, X_{n+1}, U_n) \\ X_{n+1}$$

sujeto a:

$$U_n = G_n(X_n, X_{n-1})$$

$$U_n \in D_n$$

$$H_n(X_n, X_{n-1}, U_n) \leq 0$$

Observese que se está optimizando INDIRECTAMENTE sobre  $U_n$  al optimizar directamente sobre  $X_{n+1}$ . La invertibilidad permite determinar  $U_n$  una vez que  $X_n$  y  $X_{n+1}$  están especificados.

Los resultados de esta optimización se resumen definiendo un VALOR OPTIMO DE LA FUNCION  $F_n$  para la etapa  $N$ . Esto representa el máximo beneficio neto (o mínimo costo, dependiendo del problema) para la última etapa solamente, como una función del estado  $X_n$ .

#### VALOR OPTIMO DE LA FUNCION

$$F_n(X_n) = \left. \begin{array}{l} \text{Max (o Min) } F_n(X_n, X_{n+1}, U_n) \\ X_{n+1} \\ \text{sujeto a} \\ U_n = G_n(X_n, X_{n+1}) \\ \text{y las restricciones individuales.} \end{array} \right\} \text{--- (II.5)}$$

Después de resolver ese problema se conoce el valor óptimo de  $X_{n+1}$  para cada valor dado de  $X_n$ . Por lo tanto se puede calcular la decisión óptima  $U_n$  para cada valor de  $X_n$ . Por ahora, sin embargo, se tiene el valor óptimo de  $X_{n+1}$  como una función de  $X_n$ . En el problema de operación de una presa, la función óptima de retorno da el mayor beneficio de

operación (en términos de generación de energía, por ejemplo) en la última etapa para cada nivel posible de almacenamiento discreto al principio del último período (mes 12). Adicionalmente se tiene el almacenamiento óptimo al final de la última etapa en función del almacenamiento inicial.

$FO_{12}(X_{12})$  = mayor beneficio por generación de energía en la etapa 12, iniciando con un nivel  $X_{12}$  (discreto).

$X^*_{12}(X_{12})$  = nivel óptimo de almacenamiento al final del período 12, iniciando con un nivel  $X_{12}$ .

Con esta información se resuelve el problema N-1. Esto es, el problema para los dos últimos períodos (meses 11 y 12), como una función de valores discretos de  $X_{N-1}$ . Notese que el problema N queda incluido dentro del problema N-1, como se muestra en la figura II.5.

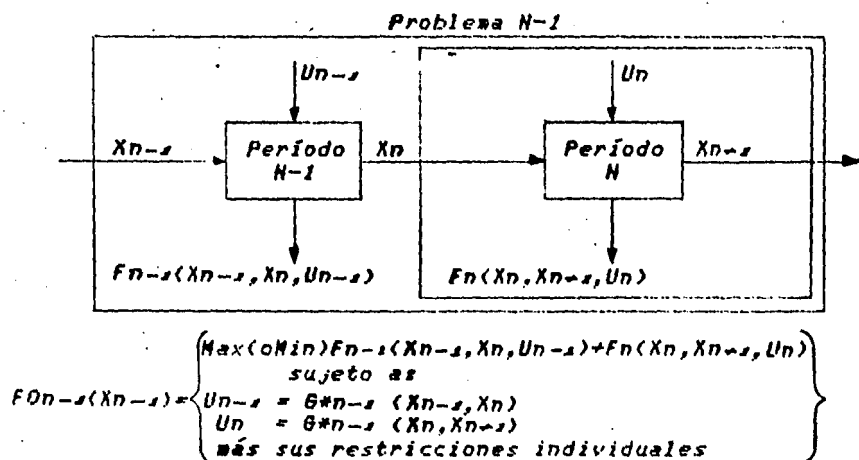


Figura II.5 - Problema N-1

Como en el problema de la última etapa, se define un valor óptimo de la función en base a  $X_{n-1}$ . Este representa el mejor valor de la función objetivo total, para los dos últimos períodos, iniciándose con cualquier valor discreto de  $X_{n-1}$ . El problema  $N-1$  puede escribirse como sigue, en donde el problema  $N$  queda incluido:

$$F_{0n-1}(X_{n-1}) = \underset{X_n}{\text{Max(o Min)}} [F_{n-1}(X_{n-1}, X_n, U_{n-1}) + \underset{X_{n-1}}{\text{Max(o Min)}} F_n(X_n, X_{n-1}, U_n)]$$

sujeto a:

$$U_{n-1} = G_{n-1}(X_{n-1}, X_n)$$

$$U_n = G_n(X_n, X_{n-1})$$

más las restricciones individuales de cada etapa

Para el problema  $N$  ya se ha calculado el valor óptimo de la función para cada valor discreto de  $X_n$ . Por lo tanto, el problema  $N-1$  puede escribirse como sigue:

$$F_{0n-1}(X_{n-1}) = \underset{X_n}{\text{Max(o Min)}} [F_{n-1}(X_{n-1}, X_n, U_{n-1}) + F_{0n}(X_n)]$$

sujeto a:

$$U_{n-1} = G_{n-1}(X_{n-1}, X_n)$$

más sus restricciones individuales.

Ahora este problema es fácil de resolver, dado que solo se optimiza sobre la variable  $X_n$ .

Retrocediendo un poco más, se resuelve sobre las

últimas tres etapas, después cuatro y así sucesivamente, como se muestra en la figura 11.6.

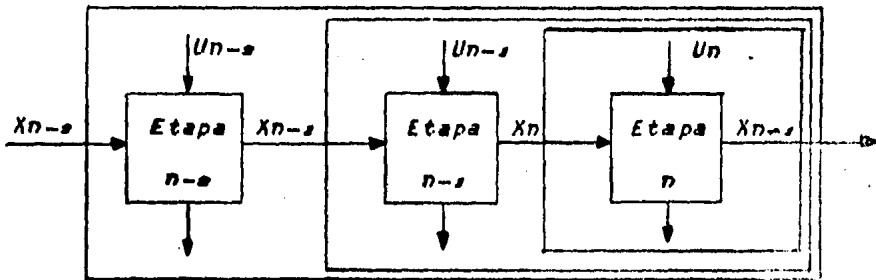


Figura 11.6 - Problema N-2

Notese que en cada problema se tiene que optimizar una sola variable. El valor óptimo de la función, en cada etapa, tiene la siguiente forma general, excepto en la última (mes 12). Esto se llama la RELACION RECURSIVA de la Programación Dinámica.

$$FOI(X_i) = \underset{X_{i-1}}{\text{Max(oMin)}} [F_i(X_i, X_{i-1}, U_i) + FOI_{i-1}(X_{i-1})] \quad \text{--- (11.6)}$$

sujeto a:

$$U_i = G_i(X_i, X_{i-1})$$

más sus restricciones individuales

Esta ecuación es la expresión matemática del PRINCIPIO DE OPTINIDAD de Bellman:

"Una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que sea el estado inicial y la decisión que se tome, las decisiones subsecuentes deben constituir una política óptima que incluya el estado resultante de esa primer decisión" (Ref. 2)

Eventualmente se llega al problema 1, que es el problema original que se quiere resolver. Si el valor inicial de la variable de estado  $X_1$  es conocido, entonces solo se tiene que resolver este problema una vez.

$$F_0(X_1) = \text{Max (o Min)} [F_1(X_1, X_2, U_1) + F_0(X_2)]$$

sujeto a:

$$U_1 = G_1(X_1, X_2)$$

más sus restricciones individuales.

Al calcular el valor óptimo de  $X_2$  por medio de un  $X_1$  conocido, se puede avanzar al siguiente período y encontrar el valor óptimo de las demás variables de decisión. Con el óptimo  $X_2$  se encuentra el óptimo  $X_3$  dado que ya se tienen calculados previamente los valores óptimos de  $X_3$  para todos los valores discretos de  $X_2$ . Después se puede calcular el valor óptimo de  $U_2$  usando la ecuación de estado inversa y proceder en esta misma forma para los demás períodos.

Período 1

$X_1$  conocido

$X_2^*$  calculado

$$U_1^* = G_1(X_1, X_2^*)$$

Período 2

$$X_3^* = X_3(X_2^*)$$

$$U_2^* = G_2(X_2^*, X_3^*)$$

.

.

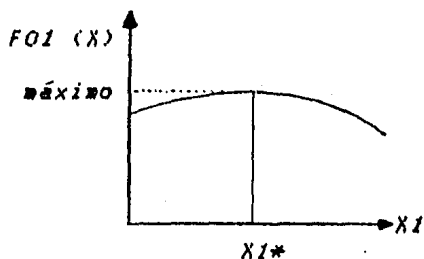
.

Período n

$$X_{n-1}^* = X_{n-1}(X_n^*)$$

$$U_n^* = G_n(X_n^*, X_{n-1}^*)$$

Si  $X_1$  no es conocido, se puede resolver el problema para cada valor (discreto) de  $X_1$  y determinar una función óptima final  $F_01$ . Esto determina cual es el mejor valor inicial de  $X_1$ .



En cada etapa intermedia  $i$ , se tiene una familia completa de soluciones, para cada valor discreto de  $X_i$ .

En el problema de una presa, una vez que se calcule el nivel óptimo de almacenamiento  $X_{i+1}$  al final de cada etapa, como función del nivel de almacenamiento inicial  $X_i$ , se puede encontrar rápidamente la regla de operación para cada nivel de almacenamiento inicial (discreto), partiendo de cualquier mes, siempre y cuando los ingresos sean conocidos.

Como en la práctica los ingresos no son conocidos, sino aleatorios, se tendrá el siguiente caso.

## II.2 - CASO ALEATORIO INDEPENDIENTE

Los procesos hidrológicos, por ejemplo los escurrimientos, son procesos estocásticos y deben ser



simulados usando modelos probabilísticos o estocásticos para obtener mejores resultados. Dado que esto es una tarea difícil y algunas veces casi imposible para modelos complejos, se usa frecuentemente aproximaciones determinísticas a problemas reales.

Un proceso estocástico de decisión con  $N$  etapas se puede representar por medio de la figura 11.7. En este caso, además de las variables definidas en el caso determinístico, se tiene una variable aleatoria como entrada para cada etapa  $i$  (en una presa se tiene,  $I_i$  = ingreso al vaso). Además, la función de retorno  $F_i$  y la función de transformación de estado  $G_i$  son ahora también funciones de esta variable aleatoria:

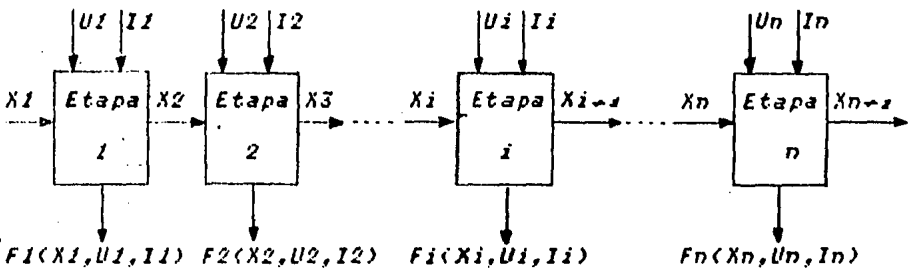
$$X_{i+1} = G_i(X_i, U_i, I_i) \text{ --- (11.7)}$$


Figura 11.7 - Modelo Aleatorio Independiente

Si se considera una versión discreta de las variables, la variable aleatoria en la etapa  $i$  puede tener  $K$  posibles valores,  $I_{i1}, I_{i2}, \dots, I_{ik}$  que pueden ocurrir con probabilidades  $P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{ik}$  respectivamente.

Suponiendo que las probabilidades en un período son

independientes del ingreso en el período anterior, se puede desarrollar una función objetivo para este sistema, dado que se quiere maximizar el valor esperado de la suma de beneficios en cada etapa.

$$\text{Max } Z = E \left[ \sum_{i=1}^n f_i(x_i, u_i, I_i) \right] \text{ --- (II.8)}$$

El operador E denota el valor esperado de todas las variables aleatorias ( $I_i, i=1,2,\dots,N$ )

Aceptando que esta forma de la función objetivo puede también descomponerse usando el principio de optimidad, como se hizo para el caso determinístico, la ecuación recursiva que se obtiene con esta consideración es similar a la del caso determinísticos:

$$F_0^n(x_n) = \text{Max}_{U_n} E[F_n(x_n, U_n, I_n)] \text{ --- (II.9)}$$

y en general:

$$F_0^i(x_i) = \text{Max}_{U_i} E[F_i(x_i, U_i, I_i) + F_0^{i-1}(x_{i-1})] \text{ --- (II.10)}$$

en donde ahora el valor esperado del operador E es solo sobre una variable aleatoria  $I_n$  ó  $I_i$  respectivamente. Reemplazando la expresión del valor esperado para el caso discreto tenemos:

$$F_0^n(x_n) = \text{Max}_{U_n} \left( \sum_{k=1}^K [F_n(x_n, U_n, I_{nk})] * P_{nk} \right) \text{ --- (II.11)}$$

y:

$$F_0^i(x_i) = \text{Max}_{U_i} \left( \sum_{k=1}^K [F_i(x_i, U_i, I_{ik}) + F_0^{i-1}(x_{i-1}, k)] * P_{ik} \right) \text{ --- (II.12)}$$

Estas ecuaciones están sujetas a la ecuación de transformación de estado (11.7), que en términos discretos se define como:

$$X_{i+1,k} = G_i (X_i, U_i, I_{ik}) \quad \text{--- -- --} \quad (11.13)$$

La solución de esta ecuación recursiva requiere mas tiempo de cálculo, dado que ahora el valor óptimo de la función  $F_{0i} (X_i)$  requiere para cada  $X_i$  una maximización sobre todas las posibles decisiones  $U_i$ . Para cada decisión existen  $k$  posibles beneficios, en lugar de uno solo como en el modelo determinístico. La principal diferencia entre los resultados del modelo determinístico y el estocástico es que al resolver la  $N$ ésima ecuación recursiva no se puede trazar la política óptima en los siguientes períodos, ya que los escurrimientos (variable aleatoria) son desconocidos. Sin embargo, dado que la distribución de probabilidad de la variable aleatoria es periódica (se tiene la misma probabilidad de escurrimiento mensual cada año) se puede obtener una política de operación estacionaria,  $U^*_i (X_i)$ , para aplicarse cada año sobre el horizonte de planeación completo. En la práctica, estas políticas de operación se obtienen después de resolver las ecuaciones recursivas para algunos años (generalmente 2 son suficientes). Estas políticas pueden ser usadas para simular la operación con cualquier secuencia de los ingresos y en particular con datos históricos.

**11.3 - CASO ALEATORIO  
CONDICIONAL**

En los problemas de operación de presas, la condición de independencia en la distribución de probabilidad generalmente no se da. Esto es, existe una fuerte interrelación entre los ingresos por escurrimiento de un mes y los del siguiente. Esto implica que la distribución de probabilidad de los ingresos en una etapa cualquiera depende de los ingresos registrados en la etapa anterior. En un modelo matemático esto significa que los ingresos en el período  $i$  son  $I_{ij1}, I_{ij2}, I_{ij3}, \dots, I_{ijk}$ , y tienen una distribución de probabilidad  $P_{ij1}, P_{ij2}, \dots, P_{ijk}$ , condicionada al ingreso real en el período anterior ( $Q_j$ ). Para poder resolver este problema por medio de la Programación Dinámica se introduce una segunda variable de estado, llamada "Ingreso real en el período anterior". El problema de decisión múltiple se puede representar ahora por medio de la figura 11.8

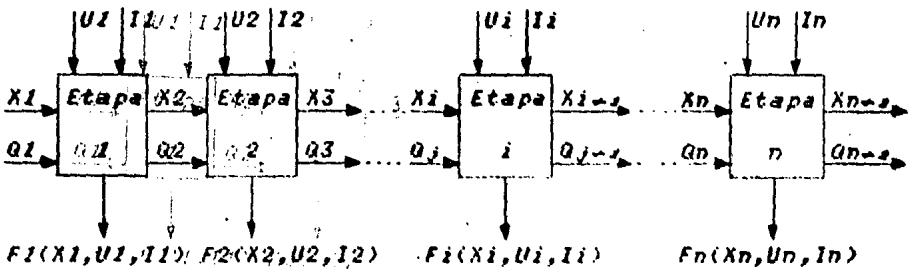


Figura 11.8 - Modelo Aleatorio Condicional

La ecuación recursiva para este problema es:

$$F_{0i}(X_i, Q_j) = \max_{U_i} \left( \sum_{k=1}^K [F_i(X_i, U_i, I_{ijk}) + F_{0i+s}(X_{i+s, k}, Q_{j+s, k})] * P_{ijk} \right) \quad (II.14)$$

en donde las funciones de transformación de estado son:

$$X_{i+s, k} = X_i + I_{ijk} - U_i \quad (II.15)$$

$$Q_{j+s, k} = I_{ijk} \quad (II.16)$$

### III - DESARROLLO DEL METODO

Como se observa en el planteamiento del Modelo de Programación Dinámica para el caso aleatorio condicional, una parte muy importante es la definición de la distribución de probabilidad de los ingresos en una etapa cualquiera, dependiendo de los ingresos registrados en la etapa anterior.

#### III.1 - DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Básicamente existen dos caminos para calcular las matrices de probabilidad condicional. El primero se puede denominar Teórico, ya que a través de planteamientos matemáticos se definen ecuaciones que permiten obtener las matrices. El segundo es por medio de la generación de escurrimientos simulados, que después se clasifican en forma discreta para obtener la frecuencia de ocurrencia. Estos enfoques no son excluyentes entre sí y pueden complementarse para mejorar el cálculo de las probabilidades.

##### III.1.1 - Cálculo Teórico

Al tratar de encontrar la forma en que se interrelacionan dos variables se define un problema de correlación.

La investigación de la relación entre dos variables comienza generalmente con un intento por descubrir la forma

aproximada de la relación, trazando los datos como puntos de un plano X,Y. Esta gráfica recibe el nombre de "Diagrama de Dispersión" (Ref 3). Al observar este diagrama se puede determinar si existe alguna propensión de los puntos a agruparse sobre alguna curva simple, o bien a ambos lados de una línea recta (figura III.1)

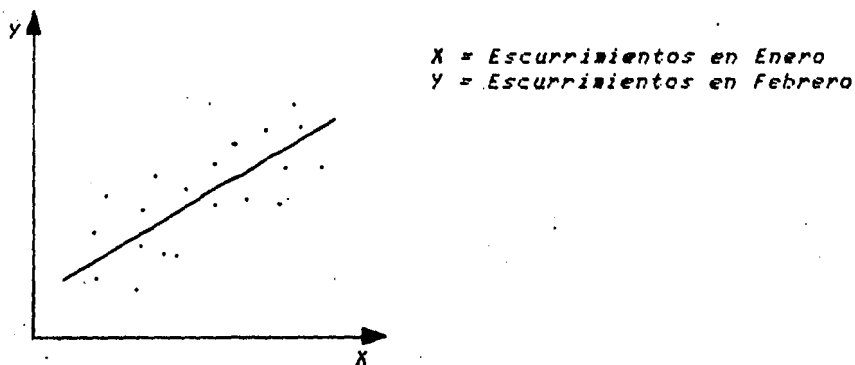


Figura III.1 - Diagrama de Dispersión

El indicador que mide la relación entre las variables se llama "Coeficiente de Correlación". Este índice es independiente del origen y la magnitud de las variables. Cuando los puntos se agrupan alrededor de una recta se define como:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{X_i - \bar{X}}{S_x} * \frac{Y_i - \bar{Y}}{S_y}}{\sqrt{(N-1)}} \quad \text{--- (III.1)}$$

en donde:

$X_i$  son las observaciones de la primer variable

$Y_i$  son las observaciones de la segunda variable

$\bar{X}$  es el promedio de las  $X_i$

$\bar{Y}$  es el promedio de las  $Y_i$

$S_x$  es la desviación estándar de las  $X_i$

$S_y$  es la desviación estándar de las  $Y_i$

$N$  es el número de observaciones

Aunque puede calcularse directamente el valor de  $r$  a partir de su definición (ecuación III.1), para fines de cálculo se utiliza la forma simplificada:

$$r = \frac{N \sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{[N \sum X^2 - (\sum X)^2][N \sum Y^2 - (\sum Y)^2]}} \quad \text{--- (III.2)}$$

El valor de  $r$  puede ser positivo o negativo, con límites entre cero y uno. Los valores cercanos a cero indican que no hay relación entre las variables, mientras que los valores cercanos a uno indican una fuerte relación.

Al trazar el diagrama de dispersión de los datos de escurrimiento de dos períodos consecutivos, se puede suponer que para cada punto en el eje de las ordenadas existe un conjunto de valores en el eje de las abscisas, el cual tiene una función de distribución  $F$ . Aceptando este planteamiento se tiene que la función de distribución conjunta queda definida por los parámetros de la función de distribución del período  $i$  para el valor del período  $i-1$ , como se muestra en la figura III.2



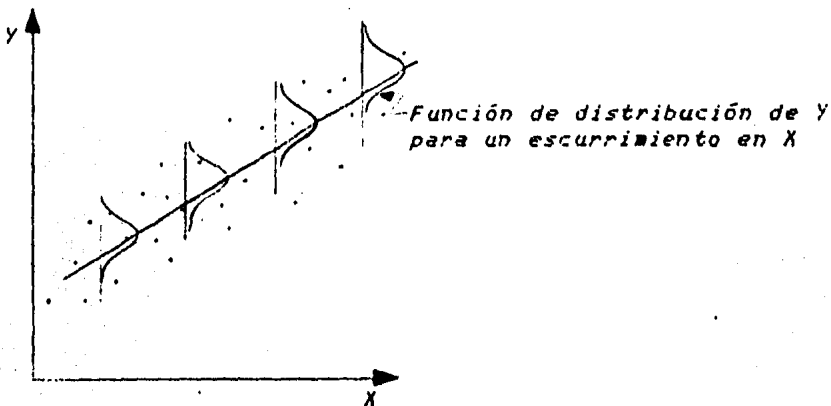


Figura III.2 - Función de Distribución Conjunta

### III.1.1.1 - Distribución Normal Bidimensional

Un planteamiento mas completo se tiene al definir la Distribución Normal Bidimensional.

Para determinar la ecuación general de esta distribución se hará el siguiente desarrollo: Se inicia por suponer dos variables  $U$  y  $V$  aleatorias, normales e independientes entre sí, con media 0 y variancia 1.

La distribución normal para una variable continua es de la forma (Ref 4):

$$f(u) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{u-\mu}{\sigma} \right)^2} \quad (\sigma > 0) \quad \text{--- (III.3)}$$

Dos variables aleatorias independientes tienen una función de distribución:

$$F(u,v) = F_1(u) F_2(v) \text{ - - - - - (III.4)}$$

para toda pareja  $(u,v)$ .  $F_1$  y  $F_2$  son las funciones de distribución de las distribuciones marginales de  $U$  y  $V$  respectivamente.

Si las variables son independientes, su distribución conjunta tiene la densidad

$$f(u,v) = \frac{1}{2\pi} e^{-(u^2+v^2)/2} \text{ - - - - - (III.5)}$$

que puede representarse en forma gráfica como una superficie en el espacio, según se muestra en la figura III.3. Las curvas de nivel  $f=\text{constante}$  se llaman curvas de igual probabilidad. La intersección de esta superficie con cualquier plano que pase por el eje de revolución resulta ser una curva Normal o Gaussiana.

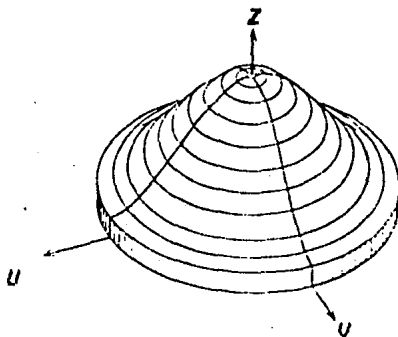


Figura III.3 - Densidad Conjunta como una Superficie en el Espacio

Ahora se introducirán nuevas variables aleatorias  $X$  y  $Y$  por medio de las transformaciones:

$$U = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \quad \text{--- --- --- (III.6)}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{Y - \mu_y}{\sigma_y} - \rho \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \quad \text{--- --- --- (III.7)}$$

Aquí se supondrá que  $\rho^2 < 1$  y  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son positivas. Las fórmulas III.6 y III.7 representan una transformación lineal de las variables. Se escriben en esa forma tan complicada porque la transformación inversa tiene una forma sencilla

$$X = \mu_x + \sigma_x U \quad \text{--- --- --- (III.8)}$$

$$Y = \mu_y + \rho \sigma_y U + \sqrt{1-\rho^2} \sigma_y U \quad \text{--- --- --- (III.9)}$$

$X$  y  $Y$  son normales con media  $\mu_x$  y  $\mu_y$  y desviación estándar  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  respectivamente. Se puede probar que estas nuevas variables mantiene un coeficiente de correlación  $\rho$  (Ref 4).

Ahora se determinará la densidad  $f(x,y)$  de la variable bidimensional  $(X,Y)$ . Se sabe que la función de distribución de la variable original  $(U,V)$  es una integral doble con integrando  $f(u,v)$ . En la transición a las nuevas variables se tiene que transformar esta doble integral por medio de la regla general para transformar dobles integrales. De acuerdo con esta regla, el integrando de la integral transformada es igual al producto de  $f$ , expresado como función de  $x$  y  $y$ , por el Jacobiano  $D$  de la transformación (ec. III.6 y III.7), esto es:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_x} & 0 \\ \rho & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \quad \text{--- (III.10)}$$

*f* se puede expresar en términos de las nuevas variables por medio de la transformación (ec. III.6 y III.7), escrita con *u, v, x* y *y* en lugar de *U, V, X* y *Y* respectivamente. El resultado de este cálculo es:

$$f(u(x,y), v(x,y)) = \frac{1}{2\pi} e^{-h(x,y)/2} \quad \text{--- (III.11)}$$

en donde se ha empleado la notación abreviada:

$$h(x,y) = \frac{1}{1-\rho^2} \left[ \left( \frac{x-M_x}{\sigma_x} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{x-M_x}{\sigma_x} \right) \left( \frac{y-M_y}{\sigma_y} \right) + \left( \frac{y-M_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] \quad \text{(III.12)}$$

Se encuentra que la densidad de (*X, Y*) tiene la forma

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} e^{-h(x,y)/2} \quad \text{--- (III.13)}$$

con *h* definida anteriormente (ec. III.12). Esta es la forma general de la densidad de la distribución normal bidimensional. Observese que esta distribución incluye a los cinco parámetros  $M_x, M_y, \sigma_x, \sigma_y$  y  $\rho$ .

Las curvas de equiprobabilidades,  $f(x,y)=\text{constante}$ , son elipses homotéticas con centro común ( $M_x, M_y$ ).

Con esta distribución (ec. III.13) se puede encontrar la probabilidad integrando el volumen bajo la superficie. La principal limitante de este método es que se está presuponiendo

que las variables tiene una distribución Normal. Para otras distribuciones este desarrollo se vuelve muy complejo.

### III.1.2 - Simulación de Registros

Es difícil contar con suficientes datos históricos por lo que, como alternativa, se pueden generar registros hidrológicos simulados, llamados también sintéticos, los cuales tienen las mismas características estadísticas que los históricos y por lo tanto la misma probabilidad de ocurrir, con la ventaja que de estos últimos se pueden generar tantos como sean necesarios para lograr una simulación adecuada.

Existen varios modelos para generar registros sintéticos, siendo el más utilizado el propuesto por Thomas y Fiering (Ref 5) para generar datos mensuales, con la siguiente expresión:

$$X_{i,j} = \bar{X}_j + \frac{r_j S_j}{S_{j-1}} (X_{i,j-1} - \bar{X}_{j-1}) + f_{i,j} S_j (1 - r_j^2)^{1/2} \quad (III.14)$$

en donde

$X_{i,j}$  es el dato sintético correspondiente al año  $i$  en el mes  $j$

$\bar{X}_j$  es la media de los datos históricos del mes  $j$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} \quad (III.15)$$

$S_j$  es la desviación estándar de los datos históricos del mes  $j$

$$S = \left[ \frac{\sum X_i^2 - n \bar{X}^2}{n-1} \right]^{1/2} \quad (III.16)$$

$r_j$  es el coeficiente de correlación cruzado de orden  $j$  entre los datos históricos del mes  $j$  y los

del mes  $j-1$  (ec. III.2)

$f_{i,j}$  es un número aleatorio con distribución Normal, media cero y desviación estándar uno.

En el anexo A se muestra un ejemplo de generación de registros mensuales con las expresiones descritas.

### III.1.2.1 - Clasificación Simple

Con los registros generados se puede obtener, en forma simple, las matrices de probabilidad de que en un período se tenga un volumen de ingreso, dado que se conoce el escurrimiento en el período anterior. Para esto se agrupan los datos, que son variables continuas, en un número limitado de intervalos, manejándolos como variables discretas. Así, para cada rango de valores en el período anterior se obtiene una tabla de frecuencias de escurrimientos en este período.

Para ejemplificar esto supóngase que se tienen los datos de escurrimiento de dos meses consecutivos (o períodos). Con estos datos se forma una tabla cruzada agrupando por rangos, los cuales pueden o no ser iguales de un mes a otro, como se muestra en la tabla III.1

De esta tabla se obtienen los porcentajes relativos para cada renglón, o sea el porcentaje de veces que el ingreso del segundo mes quedó dentro de un cierto rango, para cada rango del primer mes (Tabla III.2).

Tabla III.1 - Frecuencias cruzadas para dos meses consecutivos

Primer Mes	Segundo Mes							Total
	000 a 050	050 a 100	100 a 150	150 a 200	200 a 250	250 a 300	300 o más	
0 a 100	48	13	7	4	0	0	0	72
100 a 200	42	65	38	17	7	1	0	170
200 a 300	13	36	73	77	31	15	3	248
300 a 400	0	0	11	52	45	18	5	131
400 o más	0	0	1	5	9	12	7	33

Tabla III.2 - Frecuencias relativas para dos meses consecutivos

Primer Mes	Segundo Mes							Total
	000 a 050	050 a 100	100 a 150	150 a 200	200 a 250	250 a 300	300 o más	
0 a 100	0.67	0.18	0.10	0.06	0.00	0.00	0.00	1.00
100 a 200	0.25	0.38	0.22	0.10	0.04	0.01	0.00	1.00
200 a 300	0.05	0.15	0.29	0.31	0.13	0.06	0.01	1.00
300 a 400	0.00	0.00	0.08	0.40	0.34	0.14	0.04	1.00
400 o más	0.00	0.00	0.03	0.15	0.24	0.36	0.21	1.00

Si se tiene un número suficientemente grande de datos y estos son representativos, se puede decir que los porcentajes son iguales a la probabilidad de ocurrencia de un ingreso en función del ingreso observado en el mes anterior.

Esta estimación se puede mejorar ajustando las frecuencias de cada renglón a una función de distribución particular, como puede ser Normal, LogNormal o Gamma según convenga. Con esto obtenemos una función de distribución para

cada rango de ingresos del mes anterior.

### III.1.3 - Otros Desarrollos

Como ejemplo de técnicas en que se combina la simulación con los planteamientos matemáticos se presenta el desarrollo de Clainos (Ref 6) basado en una técnica sintética de ingresos estocásticos. Para cada período  $t$  el valor continuo del ingreso  $I_t$  se discretiza en un número finito de intervalos iguales. Cada intervalo es representado por el valor de su punto medio. Este esquema de discretización permite una forma conveniente de indexar varios valores de  $I_t$ .

Usando la definición de probabilidad condicional se tiene:

$$P(A/B) = P(A, B) / P(B) \quad - - - - - \quad (III.18)$$

Expresado en función de los ingresos:

$$P(qoi < Qo < qos / qsi < Qs < qss) = \frac{P(qoi < Qo < qos, qsi < Qs < qss)}{P(qsi < Qs < qss)} \quad (III.19)$$

en donde  $qoi$  es el límite inferior del intervalo de ingresos en octubre;  $qos$  es el límite superior de ingresos en octubre;  $qsi$  es el límite inferior de los ingresos en septiembre y  $qss$  es el límite superior de los ingresos en septiembre.

El proceso para determinar la probabilidad no condicional es el siguiente:

- 1) Tomar el logaritmo común de cada ingreso.

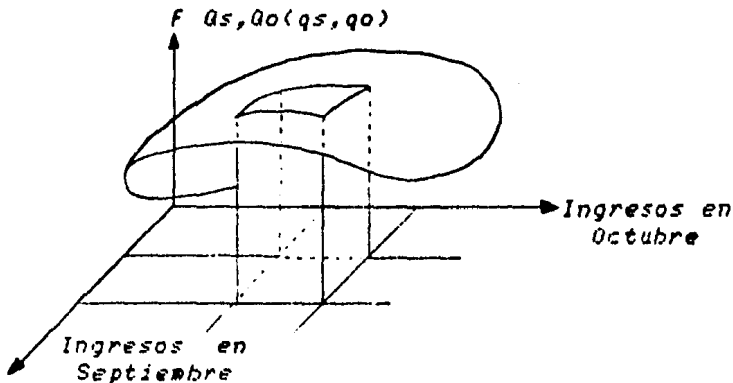


2) Calcular la desviación gamma estandarizada del paso 1.

3) Transformar la distribución gamma estandarizada del paso 2 en una desviación normal estandarizada.

4) Finalmente, usando integración numérica, determinar la probabilidad no condicional de cada ingreso.

La probabilidad conjunta queda expresada por medio de la distribución bivariada. Gráficamente la probabilidad conjunta queda representada por el volumen bajo la curva de la figura III.4. Una forma posible de cálculo de esta probabilidad es por medio de una doble integración numérica. Sin embargo, para problemas prácticos el tiempo de cómputo requerido para este cálculo es muy caro. Roefs y Clainos (Ref 6) demostraron que si el intervalo de ingreso en el período anterior es suficientemente pequeño, puede ser representado por un solo punto, con lo que el cálculo se reduce sustancialmente.



$$\text{Volumen} = P(q_s, q_o) = \iint F(q_s, q_o(q_s, q_o)) dq_s dq_o$$

Figura III.4 - Función de Densidad Conjunta

### III.2 - VARIABLES DE ESTADO

Otro punto importante en el modelo está relacionado con las variables de estado, las cuales son el "Nivel en la presa" y el "Ingreso real en el período anterior".

De acuerdo con la ecuación de continuidad el nivel final es igual al nivel inicial más los ingresos menos las extracciones y pérdidas. Se está considerando que los ingresos en un período cualquiera son dependientes del ingreso real en el período anterior y a su vez este escurrimiento está definiendo un estado en el siguiente período.

Para ejemplificar esto supóngase las siguientes condiciones:

- Los ingresos del período anterior se agrupan en Chicos, Medianos y Grandes.
- La presa se encuentra en un nivel cualquiera S, en el período N.
- El ingreso en el período anterior fué Mediano.
- Para simplificar el ejemplo se considerará que al final del período la presa tiene el mismo nivel inicial (de hecho al resolver un problema por medio de la Programación Dinámica se tendrán que calcular todas las combinaciones de niveles factibles).

Con estas condiciones, la extracción deberá ser igual al ingreso en el período, o lo que es lo mismo, para cada volumen de extracción (que es la variable de decisión) se deberá tener el mismo volumen de ingreso. Como este volumen es

una variable aleatoria se tendrá que utilizar la probabilidad de tener dicho ingreso. Pero cada ingreso está definiendo a su vez un estado en el siguiente período, como se muestra esquemáticamente en la figura III.5

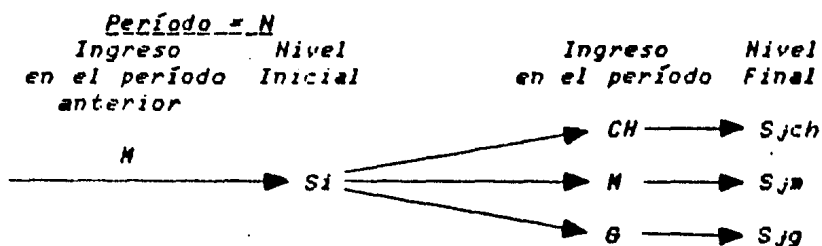


Figura III.5 - Variables de Estado

Dado que las decisiones no forzosamente corresponden con los límites de clasificación de los ingresos (los cuales a su vez varían de un período a otro) se tendrá que calcular la probabilidad de tener un ingreso  $I$  y a su vez este sea Chico, Mediano o Grande.

La probabilidad de tener un ingreso  $I_1$  depende de la función de densidad de probabilidad de los ingresos, como se muestra en la figura III.6. Dado que en este ejemplo el total de la probabilidad  $P_1$  queda dentro de la zona de ingresos Chicos la probabilidad de tener un ingreso  $I_1$  y a su vez que este sea Chico es igual a  $P_1$ ; la probabilidad de tener un ingreso  $I_1$  y a su vez este sea Mediano es cero; y la probabilidad de tener un ingreso  $I_1$  y a su vez este sea Grande es también cero.

Para el ingreso  $I_3$ , parte de la probabilidad  $P_3$  de

que se presente ese ingreso queda en la zona de ingreso Chico y parte queda en la zona de ingreso mediano, por lo que la probabilidad de tener un ingreso  $I_3$  y que este sea Chico es la intersección de ambas zonas.

El algoritmo desarrollado en este trabajo considera todas las posibilidades, esto es:

a) Que el total de la probabilidad quede en una sola zona de ingresos, ya sea Chico, Mediano o Grande.

b) Que una parte de la probabilidad quede en una zona y otra en la siguiente, o sea ingresos Chico y Mediano o Mediano y Grande.

c) Que la probabilidad se reparta entre las tres zonas.

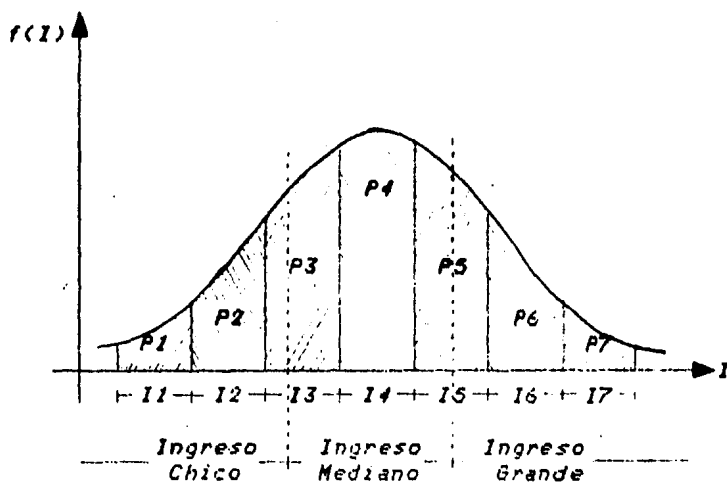


Figura III.6 - Función de Densidad de Probabilidad

## IV - APLICACION A UN EJEMPLO REAL

Como un ejemplo ilustrativo de la aplicación del Modelo se determinaron las políticas de operación de la Presa El Infiernillo, en función del volumen almacenado y el ingreso registrado en la etapa anterior, para obtener a largo plazo los máximos beneficios por generación de energía eléctrica. Se desarrolló únicamente en forma simplificada, para poder utilizar una minicomputadora, pero con las mismas bases se puede ampliar para hacerlo tan preciso como se requiera.

### IV.1 - DATOS GENERALES DE LA PRESA

La presa El Infiernillo se encuentra localizada sobre el río Balsas, en los límites de los Estados de Guerrero y Michoacán, aproximadamente a 70 kilómetros de su desembocadura al Océano Pacífico (Figura IV.1).

Dado el gran potencial hidroeléctrico del río Balsas y sus afluentes y como parte de un extenso plan para aprovechar esta corriente, durante los años de 1961 a 1963 la Comisión Federal de Electricidad construyó esta presa con la finalidad de generar energía eléctrica y controlar avenidas.

La cortina, de 148.50 metros de altura, es de tipo enrocamiento, con núcleo delgado de arcilla y en la época de su terminación ocupó el 5o lugar entre las presas mas altas de su tipo en el mundo, así como de las primeras proyectadas con un

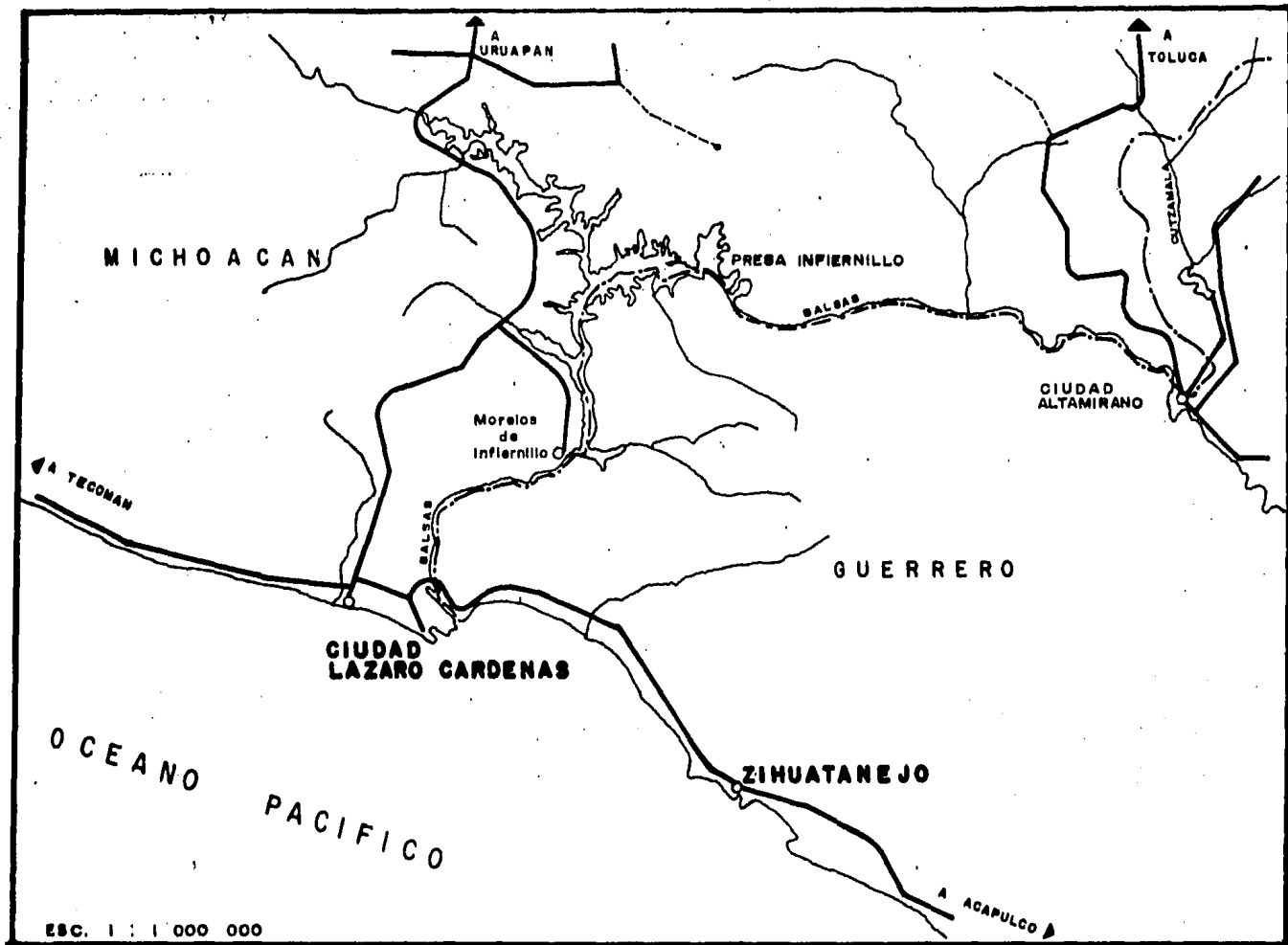


FIGURA IV.1. CROQUIS DE LOCALIZACION PRESA "EL INFIERNILLO"

núcleo impermeable vertical muy angosto.

Las principales características del embalse son las siguientes:

Capacidad total al NAME	12,000 x 10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup>
Capacidad útil	7,090 x 10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup>
Capacidad control avenidas	2,660 x 10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup>
Area máxima de embalse	40,000 ha
Nivel máximo de embalse	176.40 m
Nivel normal (NAME)	169.00 m
Nivel mínimo (NAMEmín)	140.00 m

La planta hidroeléctrica, de tipo subterráneo, se construyó en dos etapas. En la primera se instalaron cuatro unidades de 168 MW cada una; la segunda etapa comprendió dos unidades más con características semejantes. La potencia total instalada es de 1075 MW y la generación media anual es de 3,000 GWh.

El volumen anual que ingresa al vaso es del orden de 15 mil millones de metros cúbicos, con una marcada diferencia entre la época de estiaje, que comprende los meses de febrero a mayo, en los cuales el ingreso mensual promedio es de aproximadamente 300 millones de metros cúbicos y la época de avenidas, en los meses de agosto a octubre, en los que se tiene un escurrimiento mensual diez veces mayor (Tabla IV.1).

**Tabla IV.1 - Esgurrimientos mensuales promedio en la presa El Infiernillo**

	Promedio	Desviación Estándar	Correlación con mes ant
Enero	487.84	197.17	0.253
Febrero	368.83	93.77	0.627
Marzo	330.46	93.85	0.888
Abril	285.65	89.28	0.782
Mayo	363.18	121.82	0.606
Junio	1031.81	439.47	0.336
Julio	2267.16	774.99	0.679
Agosto	2443.83	1058.39	0.489
Septiembre	3819.18	1286.58	0.396
Octubre	2402.25	996.82	0.419
Noviembre	810.04	373.03	0.609
Diciembre	562.75	155.49	0.814

*Volúmenes en millones de metros cúbicos.*

#### IV.2 - DATOS PARA EL MODELO

Para el modelo de Programación Dinámica es necesario definir las etapas, la clasificación de los ingresos reales en el período anterior, los estados, los volúmenes de extracción para cada etapa y la función objetivo.

##### IV.2.1 - ETAPAS

Dada la gran diferencia entre los escurrimientos durante la época de avenidas y la época de estiaje, para este ejemplo se establecerán 6 etapas, de distinta duración, para tener aproximadamente el mismo ingreso en cada etapa.



<u>Etapa</u>	<u>Mes(es)</u>
1	Agosto
2	Septiembre
3	Octubre
4	Noviembre, Diciembre y Enero
5	Febrero, Marzo, Abril y Mayo
6	Junio y Julio

#### IV.2.2 - Ingreso Real en el Período Anterior

Se considerarán únicamente tres grupos de ingresos en el período anterior, siendo los límites de estos función del promedio y la desviación estándar.

- 1 = Chico      menor que  $\bar{M} - 0.44 \sigma$
- 2 = Mediano    entre  $\bar{M} - 0.44 \sigma$  y  $\bar{M} + 0.44 \sigma$
- 3 = Grande     mayor que  $\bar{M} + 0.44 \sigma$

#### IV.2.3 - Estados

Para facilitar los cálculos se propone una división uniforme independiente de la etapa, con 7 estados útiles y dos estados de falla, uno por déficit y el otro por derrame. Los límites de estos estados se muestran en la tabla IV.2.

La ventaja de esta división uniforme, junto con los volúmenes de extracción que se proponen a continuación, se explica en el desarrollo del algoritmo de cómputo.

**Tabla IV.2 - Volúmenes y Elevaciones  
de los Estados Propuestos**

Estados	Volúmenes		Elevaciones		
	min	max	min	max	prom
0=déficit	0.00	0.00	140.00	140.00	140.00
1	0.00	879.32	140.00	146.97	143.84
2	879.32	1758.64	146.97	152.10	149.68
3	1758.64	2637.96	152.10	156.35	154.31
4	2637.96	3517.28	156.35	160.07	158.28
5	3517.28	4396.60	160.07	163.41	161.78
6	4396.60	5275.92	163.41	166.47	164.97
7	5275.92	6155.24	166.47	169.32	167.92
8=derrame	6155.24	6375.00	169.32	170.00	170.00

Volúmenes en millones de metros cúbicos.

Elevaciones en metros sobre el nivel del mar.

#### IV.2.4 - Volúmenes de Extracción

Se fijarán 7 decisiones iguales para todas las etapas y del mismo tamaño que el incremento de volumen en cada estado.

Decisión número	Volumen de extracción
0	0.00
1	879.32
2	1758.64
3	2637.96
4	3517.28
5	4396.60
6	5275.92

#### IV.2.5 - Función Objetivo

El beneficio que se obtiene por la generación de energía eléctrica se considera igual al total de energía generada por un precio unitario

$$B = P * E \text{ --- (IV.1)}$$

La energía generada es a su vez función del volumen turbinado, la carga y la eficiencia con que operan las turbinas

$$E = C * Ef * U * (H - Hdes) \text{ --- (IV.2)}$$

en donde:

C = Constante

Ef = Eficiencia

U = Volumen Turbinado

H = (Nivel Inicial + Nivel Final) / 2

Hdes = 59.00 M.S.N.M.

Considerando constante el precio unitario y la eficiencia se tiene que

$$B = C * U * (H - 59) \text{ --- (IV.3)}$$

En forma similar, la multa por déficit será función de una constante multiplicada por el volumen no entregado

$$Mdf = Cdf * Udf \text{ --- (IV.4)}$$

Por último, la multa por derrame será función geométrica del volumen, ya que entre mayor sea el derrame, mayores serán los daños

$$Mdr = Cdr * Udr^2 \text{ --- (IV.5)}$$

### IV.3 - FUNCIONES DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Existen datos de escurrimiento en la zona de Infiernillo desde 1925, los cuales permiten hacer una buena

simulación de registros sintéticos. Con las expresiones propuestas por Thomas y Fiering (Ref 5) se generaron datos mensuales para 500 años por medio del programa de cómputo que se incluye en el Anexo A. Estos datos se agruparon de acuerdo con las 6 etapas definidas anteriormente. Después se clasificaron los ingresos en función de los límites mostrados en la tabla IV.3, siendo los chicos los menores al límite 1, los medianos los comprendidos entre ambos límites y los grandes los mayores al límite 2.

Tabla IV.3 - Promedio de los Ingresos por Etapa

Etapa	Ingreso Promedio	Desviación Estándar	Correlación con etapa ant.	Límites para Clasif.	
				1	2
1	7.734	0.422	0.616	7.548	7.920
2	8.210	0.333	0.542	8.063	8.357
3	7.714	0.409	0.518	7.534	7.894
4	7.507	0.240	0.612	7.401	7.613
5	7.174	0.249	0.243	7.064	7.284
6	8.055	0.315	-0.216	7.916	8.194

Nota: Estadísticas calculadas con el Log Natural de los Ingresos, en millones de metros cúbicos.

Una vez determinados estos grupos se analizaron los datos de cada uno y se ajustaron a una curva LogNormal, por ser la más conveniente en este caso. Las principales características de estos grupos se muestran en la tabla IV.4

Tabla IV.4 - Número de Observaciones, Promedio y Desviación Estándar para cada grupo de Ingresos

Ingreso en Etapa Ant.		E t a p a					
		1	2	3	4	5	6
Chico	No. de datos	175	161	167	164	175	165
	Promedio	7.479	7.989	7.458	7.340	7.093	7.987
	Desviación	0.362	0.280	0.361	0.197	0.255	0.264
Mediano	No. de datos	165	179	160	171	156	172
	Promedio	7.693	8.227	7.748	7.508	7.208	8.023
	Desviación	0.330	0.286	0.351	0.192	0.223	0.343
Grande	No. de datos	160	160	173	165	169	163
	Promedio	8.055	8.414	7.931	7.673	7.227	8.157
	Desviación	0.353	0.290	0.363	0.207	0.244	0.304

#### IV.4 - PROGRAMA DE COMPUTO

El modelo propuesto, por ser de tipo iterativo, involucra una gran cantidad de cálculos, por lo que se empleó una computadora. Aún así, fué necesario desarrollar un algoritmo eficiente, para minimizar el uso de memoria y tiempo de proceso.

##### IV.4.1 - Algoritmo de cómputo

Al incluir en el modelo a la variable aleatoria "ingreso", no se tendrá un valor para esta variable, sino que se deberá calcular la probabilidad de ocurrencia de este valor.

De la ecuación de continuidad:

$$S_j = S_i - K + I \text{ --- (IV.6)}$$

$S_j$  = Nivel Final

$S_i$  = Nivel Inicial

$K$  = Extracción

$I$  = Ingreso

se observa que definiendo los niveles y el volumen de extracción en forma conveniente, se facilita el cálculo de la probabilidad de tener un ingreso  $I$  en el período (Ref. 7). Esto es, si la subdivisión de estados se hace con un volumen uniforme e igual para todas las etapas y los volúmenes de extracción tienen el mismo incremento que los estados, los ingresos quedan también definidos con ese rango de incremento.

Adicionalmente, la probabilidad de tener un ingreso dado es función del ingreso real en el período anterior y de la etapa. También, como se discutió en el capítulo III, se tiene que clasificar el ingreso dentro de los grupos para el siguiente período.

Resumiendo, la matriz de probabilidad de transición será función de las siguientes variables:

- Etapa
- Nivel inicial
- Ingreso real en el período anterior
- Extracción (Variable de decisión)
- Nivel final
- Clasificación del ingreso en este período

Esta matriz tendrá muchos elementos repetidos, ya que

se necesita el mismo ingreso para diferentes combinaciones de Nivel inicial, Nivel final y Extracción, por lo que se ahorrará tiempo de cálculo y área de memoria si se calcula una matriz base  $P^*$  en función de:

- Etapa
- Ingreso real en el período anterior
- Clasificación del ingreso en este período
- Ingreso base

$$P(N, S_i, Q_i, K, S_j, Q_j) = P^*(N, Q_i, Q_j, I_b) \text{ --- (IV.7)}$$

en donde:

$$I_b = S_j - S_i + K \text{ --- (IV.8)}$$

válida para  $0 < I_b < I_{\max}$ ;  $I_{\max}$  = Ingreso máximo

Nótese que no se puede tener un ingreso menor que cero ya que en este ejemplo no se está considerando pérdidas por evaporación, infiltración o fugas, por ser poco significativas; por lo tanto  $I_b < 0$  tiene una probabilidad igual a cero.

La probabilidad de falla por déficit o por derrame son casos particulares de los niveles o estados extremos. Esto es, para el caso de déficit, si se tiene un ingreso menor a aquel que lleva el nivel del vaso al mínimo, se tendrá un déficit; por el otro lado, si ingresa un volumen mayor a aquel que lleva el nivel del vaso al máximo, se tendrá que derramar el excedente.

Observese que al definir el ingreso base se ahorra

área de memoria y tiempo de computadora en el cálculo de las probabilidades al suprimir cálculos repetidos. Por ejemplo, si se tiene un problema con 6 etapas, 8 estados, 6 variables de decisión y 3 categorías para clasificar los ingresos en la etapa anterior, la matriz de probabilidad de transición requerirá:

$$P(N, S_i, Q_i, K, S_j, Q_j) = 6 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 3 = 20,736 \text{ elementos}$$

mientras que la matriz con ingresos base tendrá:

$$P^*(N, Q_i, Q_j, I_b) = 6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8 = 432 \text{ elementos}$$

en el primer caso se calcula la probabilidad de 20,736 elementos, mientras que en el segundo caso solo se calculan 432. El remanente ( $20,736 - 432 = 20,004$ ) se deduce por medio de la ecuación de continuidad, que es una suma simple.

En forma similar, los beneficios netos que se obtienen en una etapa cualquiera son función únicamente de la extracción y de la carga promedio en la presa, que a su vez es función del nivel inicial y final, por lo que se puede calcular una matriz de beneficios

$$B(S_i, S_j, K)$$

Con estas consideraciones, el algoritmo de cómputo desarrollado para optimizar la operación de presas utilizando Programación Dinámica se muestra por medio del diagrama de bloques de la figura 14.2



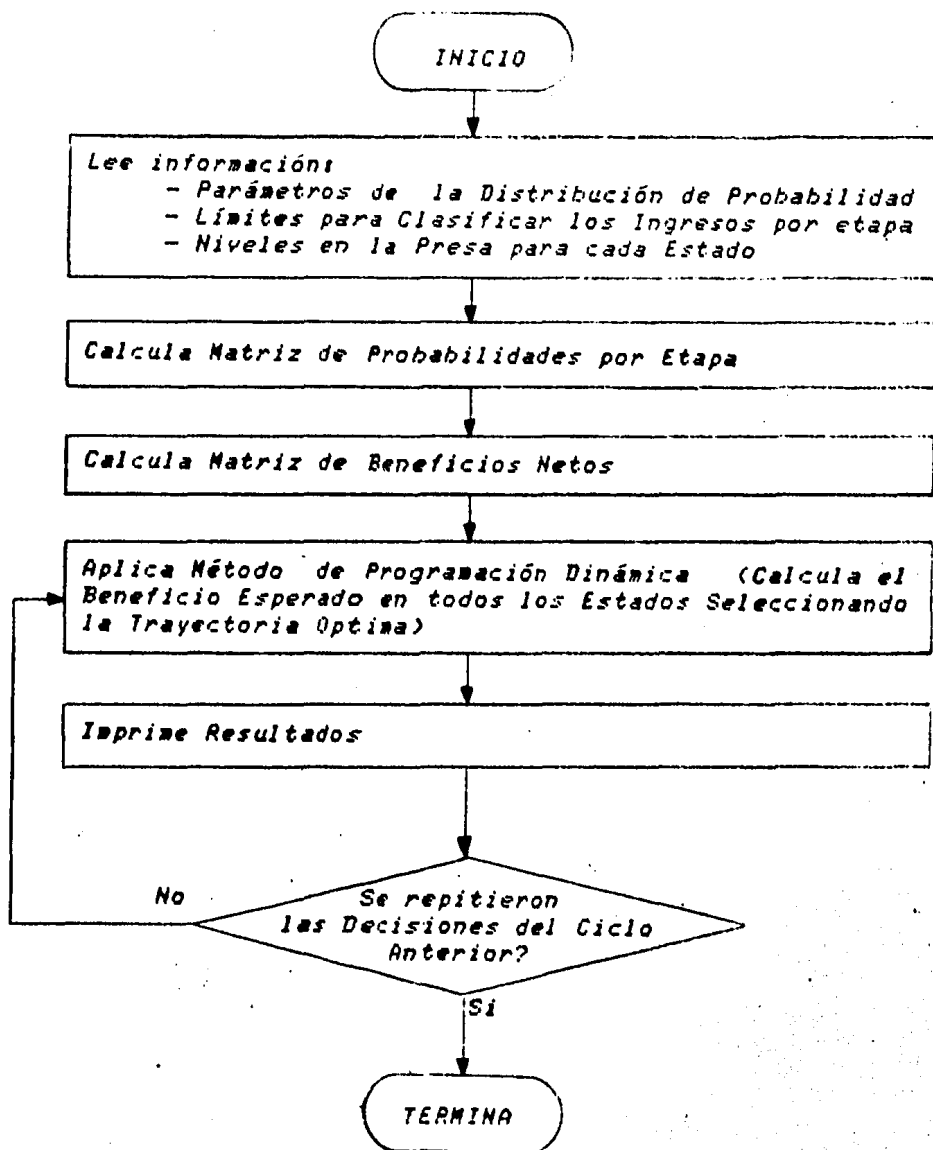


Figura IV.2 - Diagrama de Bloques del Modelo

## IV.4.2 - Descripción del Programa

El programa fué desarrollado en Lenguaje BASIC y probado en una minicomputadora COMMODORE 64. El listado se muestra en la figura IV.3

Las principales variables son:

$D(I, J, K)$  = Parámetros de la Distribución Normal

con  $I$  = Etapa

$J$  = Ingreso en la Etapa Anterior

$K$  = 1: Media

$K$  = 2: Desviación Estándar

$L(I, J)$  = Límites para Clasificar los Ingresos

con  $I$  = Etapa

$J$  = 1: Límite Inferior

$J$  = 2: Límite Superior

$EL(I)$  = Nivel de la Presa en Función del Estado

con  $I$  = Estado

$PR(N, Q, I, J)$  = Matriz de Probabilidad de los Ingresos

con  $N$  = Etapa

$Q$  = Ingreso en la Etapa Anterior

$I$  = Ingreso Base en esta Etapa

$J$  = Clasificación del Ingreso

$B(K, I, J)$  = Matriz de Beneficios Netos

con  $K$  = Extracciones

$I$  = Estado Inicial

$J$  = Estado Final

$F(N, Q, I, K)$  = Valor Esperado de la Función Objetivo Acumulada

con  $N$  = Etapa

$Q$  = Ingreso en la Etapa Anterior

$I$  = Nivel en la Presa

*K = Extracción*

*FO (N,Q,I) = Máximo Valor Esperado (Optimo) de la  
Función Objetivo Acumulada*

*con N = Etapa*

*Q = Ingreso en la Etapa Anterior*

*I = Nivel en la Presa*

*DE (N,Q,I) = Decisión de Extracción Optima*

*con N = Etapa*

*Q = Ingreso en la Etapa Anterior*

*I = Nivel en la Presa*

*En la primera parte del programa, líneas 160 a 720, se  
leen los parámetros de la función de distribución, los límites  
para clasificar los ingresos y las elevaciones para cada nivel  
en la presa.*

*A continuación se calcula la matriz de probabilidad  
base, en las líneas 740 a 1220. Para calcular el área bajo la  
curva normal se emplea el método de aproximación por áreas  
trapezoidales con incrementos de 0.1, esto se hace en la  
subrutina 5000.*

*Después, en las líneas 1240 a 1460, se calculan los  
beneficios netos para cada combinación de niveles y volúmenes  
de extracción.*

*Finalmente el algoritmo de optimización esta  
desarrollado en las líneas 1490 a 2120.*

```

10 REM *****
20 REM *
30 REM * ***** PROGRAMA: F.FROGDIN ***** *
40 REM *
50 REM * DETERMINA LA POLITICA OPTIMA DE OPERACION DE LA *
60 REM * PRESA INFIERNILLO, MEDIANTE EL METODO DE LA PROGRA- *
70 REM * MACION DINAMICA CON FUTURO INDETERMINADO CONSIDE- *
80 REM * RANDO DEPENDENCIA EN LOS ESCURRIMIENTOS. *
90 REM *
100 REM *****
110 :
120 DIM D(6,3,2), L(6,2), EL(8), PR(6,3,6,3), B(6,8,8), FO(7,3,8), F(6,3,8,6)
130 DIM DE(6,3,8)
140 :
150 REM -----
160 REM LECTURA DE DATOS
170 :
180 REM PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION LOGNORMAL
190 REM D(I,J,K) K=1 MEDIA
200 REM K=2 DESVIACION
210 REM I=ETAPA
220 REM J=INGRESO EN LA ETAPA ANTERIOR
230 :
240 FOR I=1 TO 6: FOR J=1 TO 3: FOR K=1 TO 2
250 READ D(I,J,K): NEXT K,J,I
260 DATA 7.479, 0.362
270 DATA 7.693, 0.330
280 DATA 8.055, 0.353
290 DATA 7.989, 0.280
300 DATA 8.227, 0.286
310 DATA 8.414, 0.290
320 DATA 7.458, 0.361
330 DATA 7.748, 0.351
340 DATA 7.931, 0.363
350 DATA 7.340, 0.197
360 DATA 7.501, 0.192
370 DATA 7.673, 0.207
380 DATA 7.093, 0.255
390 DATA 7.208, 0.223
400 DATA 7.227, 0.244
410 DATA 7.987, 0.264
420 DATA 8.023, 0.343
430 DATA 8.157, 0.304
440 :
450 REM LIMITES PARA CLASIFICAR LOS INGRESOS EN CADA ETAPA
460 REM L(I,J) J=1 LIMITE INFERIOR
470 REM J=2 LIMITE SUPERIOR
480 REM I=ETAPA
490 REM INGRESO MENOR QUE LI=CHICO
500 REM INGRESO ENTRE LI Y LS=MEDIANO
510 REM INGRESO MAYOR QUE LS=GRANDE
520 :
530 FOR I=1 TO 6: FOR J=1 TO 2
540 READ L(I,J): NEXT J,I
550 DATA 7.5483, 7.9195
560 DATA 8.0639, 8.3567
570 DATA 7.5347, 7.8943

```

Figura 10.3 - Listado del Programa

```

580 DATA 7.4016, 7.6129
590 DATA 7.0647, 7.2836
600 DATA 7.9162, 8.1931
610 :
620 REM NIVEL EN LA PRESA EN FUNCION DEL ESTADO
630 REM EL(I) I=ESTADO
640 FOR I=0 TO 8: READ EL(I): NEXT I
650 DATA 140.00,143.84,149.68,154.31,158.28,161.78,164.97,167.92,170.00
660 :
670 FOR I=1 TO 3: READ IN*(I):NEXT
680 DATA "(CHICO)", "(MEDIANO)", "(GRANDE)"
690 :
700 OPEN#4,4,1: T%=CHR$(9): H%=CHR$(12): R%=CHR$(13): CD%=CHR$(14)
710 FOR I=1 TO 99: G%=G%+"-": NEXT
720 :
730 REM -----
740 REM INICIA CALCULO DE PROBABILIDADES POR ETAPA
750 FOR N=1 TO 6
760 PRINT"INICIA CALCULO DE                                PROBABILIDADES DE ETAPA":N
770 IF N=1 OR N=4 THEN PRINT#4,H%;R%;CD%;"                PROBABILIDADES PARA INGRESOS "
780 IF N=1 OR N=4 THEN PRINT#4,CD%;"                    AGRUPADOS POR RANGOS      "
790 PRINT#4,R%;SPC(6);CD%;"ETAPA":N
800 PRINT#4,SPC(6);LEFT$(G%,74)
810 PRINT#4,SPC(35);"INGRESO EN ETAPA ANTERIOR"
820 PRINT#4,SPC(15);LEFT$(G%,65)
830 PRINT#4,SPC(21);"1(CHICO)";SPC(14);"2(MEDIANO)";SPC(13);"3(GRANDE)"
840 PRINT#4,SPC(15);LEFT$(G%,19);"      ";LEFT$(G%,19);"      ";LEFT$(G%,19)
850 PRINT#4,"      INGRESO":
860 FOR LK=1 TO 3: PRINT#4," 1(CHI) 2(MED) 3(GDE)  ";: NEXT: PRINT#4
870 PRINT#4,SPC(6);LEFT$(G%,74)
880 FOR Q=1 TO 3: REM PARA CADA GRUPO DE INGRESOS EN LA ETAPA ANTERIOR
890 REM CALCULO DE PROBABILIDADES PARA LOS POSIBLES INGRESOS (DISCRETOS)
900 REM FR(N,Q,I,J) J=1 INGRESO CHICO (EN ESTA ETAPA)
910 REM                J=2 INGRESO MEDIANO
920 REM                J=3 INGRESO GRANDE
930 REM                I=1 A 6 POSIBLES INGRESOS(AGRUPADOS)
940 REM                Q= INGRESO EN ETAPA ANTERIOR
950 REM                N= ETAPA
960 :
970 F1=-4: J=1: L1=L(N,1)
980 FOR I=1 TO 6
990 II=LOG(I* 879.32): IF I=6 THEN II=10.13
1000 F2=(II-D(N,Q,1))/D(N,Q,2)
1010 GOSUB 5000: REM INTEGRACION DE LA CURVA NORMAL
1020 PR(N,Q,I,J)=P
1030 IF II<L1 THEN 1100
1040 F1=(L1-D(N,Q,1))/D(N,Q,2)
1050 GOSUB 5000: J=J+1
1060 IF J=2 THEN L1=L(N,2)
1070 IF J=3 THEN L1=10.30
1080 PR(N,Q,I,J)=P
1090 FR(N,Q,I,J-1)=PR(N,Q,I,J-1)-F:GOTO 1030
1100 F1=F2
1110 NEXT I: NEXT Q
1120 FOR I=1 TO 6: Z%="      "+STR$(I)+" "
1130 FOR Q=1 TO 3: Z%=Z%+" "
1140 FOR J=1 TO 3

```

Figura 10.3 - Listado del Programa

```

1150 D$=STR$(10.0005+PR(N,Q,I,J))
1160 D$=MID$(D$,3,5)
1170 Z$=Z$+D$+" "
1180 NEXT J,Q
1190 PRINT#4,Z$
1200 NEXT I: PRINT#4,SPC(6);LEFT$(G$,74)
1210 NEXT N
1220 :
1230 REM -----
1240 REM CALCULO DE BENEFICIOS NETOS
1250 FOR U=0 TO 6: IF U=1 OR U=2 OR U=4 OR U=5 THEN 1290
1260 PRINT#4,H$;R$;CHR$(14);"          BENEFICIOS NETOS PARA CADA"
1270 PRINT#4,CHR$(14);"          COMBINACION DE NIVELES, DADO UN"
1280 PRINT#4,CHR$(14);"          VOLUMEN DE EXTRACCION"
1290 PRINT#4: PRINT#4,SPC(5);CHR$(14);CHR$(14);"EXTRACCION=";U
1300 PRINT#4,SPC(5);LEFT$(G$,70)
1310 PRINT#4,SPC(34);"N I V E L F I N A L"
1320 PRINT#4,SPC(6);"NIVEL ";LEFT$(G$,62)
1330 PRINT#4,"          INICIAL ";:FOR I=0 TO 8: PRINT#4,SPC(4);I;:NEXT I: PRINT#4
1340 PRINT#4,SPC(5);LEFT$(G$,70)
1350 FOR SI=0 TO B
1360 PRINT#4,SPC(7);SI;" ";
1370 FOR SJ=0 TO B
1380 IN=SI-SI+U
1390 IF IN<=0 THEN B=0:GOTO 1440
1400 IF IN>6 THEN B=0:GOTO 1440
1410 IF SJ=0 THEN B=-298.7*IN: GOTO 1440: REM DEFICIT
1420 IF SJ=B THEN DR=7-IN: B=-298.7*DR^2: GOTO 1440: REM DERRAME
1430 H=(EL(SI)+EL(SJ))/2: B=29.867*U*(H-59)
1440 B=INT(B): B(U,SI,SJ)=B: B$="          "+STR$(B): B$=RIGHT$(B$,7): PRINT#4,B$;
1450 NEXT SJ: PRINT#4
1460 NEXT SI: PRINT#4,SPC(5);LEFT$(G$,70): NEXT U
1470 :
1480 REM -----
1490 REM INICIA ALGORITMO DE OPTIMIZACION(PROGRAMACION DINAMICA)
1500 REM INICIALIZACION DE FO
1510 FOR Q=1 TO 3: FOR SJ=0 TO B: FO(7,Q,SJ)=0.0: NEXT SJ,Q
1520 N=6: CI=1
1530 REM CALCULO DE F
1540 N1=N+1
1550 FOR Q1=1 TO 3
1560 FOR U=0 TO 6
1570 FOR SI=0 TO B
1580 S=0
1590 FOR QJ=1 TO 3
1600 FOR SJ=0 TO B
1610 II=SI-SI+U
1620 IF II<=0 THEN P=0: GOTO 1670: REM INGRESO FUERA DE RANGO
1630 IF II>6 THEN P=0: GOTO 1670: REM INGRESO FUERA DE RANGO
1640 P=PR(N,Q1,II,QJ)
1650 IF SJ=0 THEN P=0: FOR K=1 TO II: P=P+PR(N,Q1,K,QJ): NEXT K
1660 IF SJ=B THEN P=0: FOR K=II TO 6: P=P+PR(N,Q1,K,QJ): NEXT K
1670 S=S+P*(B(U,SI,SJ)+FO(N1,QJ,SJ))
1680 NEXT SJ,QJ
1690 F(N,Q1,SI,U)=S
1700 NEXT SI,U,Q1

```

Figura IV.3 - Listado del Programa

```

1710 REM OBTENCION DE FO Y DE
1720 PRINT#4,H#;R#;CHR$(20);T#;
1730 PRINT#4,SPC(12);CHR$(14);"VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO"
1740 PRINT#4,SPC(22);CHR$(14);"CICLO";CI;SPC(32);"ETAPA";N
1750 FOR QI=1 TO 3: PRINT#4,R#;SPC(20);"INGRESO";QI;IN$(QI): PRINT#4,SPC(20);G#
1760 PRINT#4,SPC(58);"E X T R A C C I O N"
1770 PRINT#4,SPC(20);"NIVEL";T#;LEFT$(G#,68);" MAXIMO";" DECISION"
1780 PRINT#4,SPC(30);" 0";T#;" 1";T#;" 2";T#;" 3";T#;" 4";T#;" 5";T#;" 6"
1790 PRINT#4,SPC(20);G#
1800 FOR I=0 TO 8: PRINT#4,SPC(21);I;T#;
1810 FO(N,QI,I)=F(N,QI,I,0): DE(N,QI,I)=0: PRINT#4,INT(F(N,QI,I,0));T#;
1820 FOR U=1 TO 6: PRINT#4,INT(F(N,QI,I,U));T#;
1830 IF F(N,QI,I,U)>FO(N,QI,I) THEN FO(N,QI,I)=F(N,QI,I,U): DE(N,QI,I)=U
1840 NEXT U
1850 PRINT#4,INT(FO(N,QI,I));T#;DE(N,QI,I)
1860 NEXT I: PRINT#4,SPC(20);G#: NEXT QI
1870 REM SE CAMBIA ETAPA Y SE REPITE EL PROCESO
1880 IF N=1 THEN N=N-1: GOTO 1540
1890 PRINT#4,CHR$(18);H#;R#;CHR$(14);" EXTRACCIONES OPTIMAS EN FUNCION"
1900 PRINT#4,CHR$(14);" DEL INGRESO EN LA ETAPA ANTERIOR"
1910 PRINT#4,CHR$(14);" Y EL NIVEL EN LA PRESA "
1920 PRINT#4: PRINT#4,SPC(10);CHR$(14);"CICLO ";CI
1930 FOR QI=1 TO 3
1940 PRINT#4: PRINT#4,SPC(10);"INGRESO EN LA ETAPA ANTERIOR=";QI;IN$(QI)
1950 PRINT#4,SPC(10);LEFT$(G#,63): PRINT#4,SPC(41);"E T A P A"
1960 PRINT#4,SPC(19);LEFT$(G#,54): PRINT#4,SPC(11);"NIVEL";SPC(7);
1970 FOR I=6 TO 1 STEP -1: PRINT#4,I;SPC(6);: NEXT I: PRINT#4
1980 PRINT#4,SPC(10);LEFT$(G#,63)
1990 FOR I=0 TO 8: PRINT#4,SPC(12);I;SPC(8);
2000 FOR J=6 TO 1 STEP -1
2010 PRINT#4,DE(J,QI,I);SPC(6);: NEXT J: PRINT#4
2020 NEXT I: PRINT#4,SPC(10);LEFT$(G#,63)
2030 NEXT QI
2040 PRINT "SE REPITE EL PROCESO?"
2050 GET C#: IF C#="S" THEN 2080
2060 IF C#="N" THEN END
2070 GOTO 2050
2080 FOR Q=1 TO 3: FOR J=0 TO 8
2090 FO(7,Q,J)=FO(1,Q,J)
2100 NEXT J,Q
2110 CI=CI+1
2120 N=6: GOTO 1540
2130 :
2140 REM -----
5000 REM SUBROUTINA PARA INTEGRAR EL AREA BAJO UNA CURVA NORMAL
5010 D=(2)^0.5: FA=EXP(-0.5*F1^2)/D: P=0.00
5020 F=F1+0.1: FOR L=F TO F2 STEP 0.1
5030 FB=EXP(-0.5*L^2)/D
5040 P=P+(FA+FB)/2*0.1
5050 FA=FB
5060 NEXT L
5070 FB=EXP(-0.5*F2^2)/D
5080 P=P+(FA+FB)/2*ABS(F2-L+0.1)
5090 RETURN

```

Figura IV.3 - Listado del Programa

#### IV.5 - RESULTADOS

Como resultado de cada corrida se obtienen cuatro tipos de tablas: Probabilidades, Beneficios Netos, Valor Esperado de la Función Objetivo y Extracciones Óptimas.

La tabla de Probabilidades para ingresos agrupados por Rangos (tabla IV.5) muestra las probabilidades de tener un ingreso cualquiera y este sea chico, mediano o grande, en función de la etapa y el ingreso real en la etapa anterior. Los ingresos están agrupados en 6 rangos, como ya se dijo, siendo cada rango de 879.32 millones de metros cúbicos.

Los Beneficio Netos que se obtienen en función de cada decisión de extracción y las diferentes combinaciones de nivel inicial y final se muestran en la tabla IV.6. Las decisiones son también de 879.32 millones de metros cúbicos por cada unidad de extracción.

En el anexo B se tienen las tablas con los valores esperados de la Función Objetivo Acumulada en cada etapa para todas las combinaciones de ingresos en la etapa anterior, nivel inicial en la etapa y volumen de extracción programado. Para cada nivel de determina la extracción que maximiza los beneficios, seleccionándola como decisión óptima.

La tabla IV.7 muestra las decisiones óptimas para todas las combinaciones de etapa, nivel inicial e ingreso en la etapa anterior. El proceso se repite hasta que en dos ciclos



consecutivos se obtengan las mismas decisiones, lo cual generalmente sucede en un par de iteraciones. Se puede observar que entre el primero y segundo ciclo hay grandes diferencias, principalmente en la etapa 6, mientras que del segundo al tercer ciclo las decisiones no cambian.

Las decisiones óptimas pueden representarse en forma gráfica, como se propone en las figuras IV.4, IV.5 y IV.6. Esta presentación permite interpolar los resultados para corregir pequeños desvíos que se tengan durante un período, por condiciones hidrológicas extremas. También permite una gama más amplia de decisiones de extracción, al poder estimar puntos entre dos decisiones.

**PROBABILIDADES PARA INGRESOS  
AGRUPADOS POR RANGOS**

**ETAPA: 1**

INGRESO EN ETAPA ANTERIOR									
INGRESO	1(CHICO)			2(MEDIANO)			3(GRANDE)		
	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)
1	0.027	0.000	0.000	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.462	0.000	0.000	0.249	0.000	0.000	0.049	0.000	0.000
3	0.083	0.289	0.000	0.079	0.381	0.000	0.026	0.232	0.000
4	0.000	0.024	0.083	0.000	0.042	0.170	0.000	0.043	0.272
5	0.000	0.000	0.023	0.000	0.000	0.059	0.000	0.000	0.205
6	0.000	0.000	0.002	0.000	0.000	0.018	0.000	0.000	0.173

**ETAPA: 2**

INGRESO EN ETAPA ANTERIOR									
INGRESO	1(CHICO)			2(MEDIANO)			3(GRANDE)		
	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.033	0.000	0.000	0.004	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000
3	0.313	0.000	0.000	0.107	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000
4	0.260	0.130	0.000	0.173	0.130	0.000	0.082	0.082	0.000
5	0.000	0.170	0.018	0.000	0.260	0.039	0.000	0.226	0.043
6	0.000	0.000	0.077	0.000	0.000	0.286	0.000	0.000	0.535

**ETAPA: 3**

INGRESO EN ETAPA ANTERIOR									
INGRESO	1(CHICO)			2(MEDIANO)			3(GRANDE)		
	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)
1	0.030	0.000	0.000	0.003	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000
2	0.482	0.000	0.000	0.213	0.000	0.000	0.103	0.000	0.000
3	0.068	0.293	0.000	0.056	0.372	0.000	0.034	0.304	0.000
4	0.000	0.009	0.088	0.000	0.017	0.221	0.000	0.018	0.281
5	0.000	0.000	0.020	0.000	0.000	0.083	0.000	0.000	0.155
6	0.000	0.000	0.005	0.000	0.000	0.034	0.000	0.000	0.104

Tabla 10.5

**PROBABILIDADES PARA INGRESOS  
AGRUPADOS POR RANGOS**

**ETAPA: 4**

INGRESO EN ETAPA ANTERIOR									
INGRESO	1(CHICO)			2(MEDIANO)			3(GRANDE)		
	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)
1	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.620	0.126	0.000	0.302	0.138	0.000	0.095	0.071	0.000
3	0.000	0.168	0.080	0.000	0.279	0.255	0.000	0.220	0.453
4	0.000	0.000	0.003	0.000	0.000	0.025	0.000	0.000	0.153
5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008
6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

**ETAPA: 5**

INGRESO EN ETAPA ANTERIOR									
INGRESO	1(CHICO)			2(MEDIANO)			3(GRANDE)		
	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)
1	0.109	0.000	0.000	0.027	0.000	0.000	0.033	0.000	0.000
2	0.346	0.317	0.159	0.233	0.372	0.249	0.220	0.338	0.251
3	0.000	0.000	0.068	0.000	0.000	0.117	0.000	0.000	0.154
4	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.004
5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

**ETAPA: 6**

INGRESO EN ETAPA ANTERIOR									
INGRESO	1(CHICO)			2(MEDIANO)			3(GRANDE)		
	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)	1(CHI)	2(MED)	3(GDE)
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.026	0.000	0.000	0.054	0.000	0.000	0.012	0.000	0.000
3	0.314	0.000	0.000	0.282	0.000	0.000	0.167	0.000	0.000
4	0.055	0.356	0.000	0.042	0.283	0.000	0.035	0.297	0.000
5	0.000	0.032	0.153	0.000	0.029	0.167	0.000	0.036	0.230
6	0.000	0.000	0.064	0.000	0.000	0.143	0.000	0.000	0.223

Tabla 10.5

**BENEFICIOS NETOS PARA CADA  
COMBINACION DE NIVELES, DADO UN  
VOLUMEN DE EXTRACCION**

**EXTRACCION= 0**

NIVEL INICIAL	NIVEL FINAL								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	-299
3	0	0	0	0	0	0	0	0	-1195
4	0	0	0	0	0	0	0	0	-2689
5	0	0	0	0	0	0	0	0	-4780
6	0	0	0	0	0	0	0	0	-7468
7	0	0	0	0	0	0	0	0	-10754
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0

**EXTRACCION= 1**

NIVEL INICIAL	NIVEL FINAL								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-299	2476	2563	2632	2692	2744	0	0	0
1	0	2533	2621	2690	2749	2801	2849	0	0
2	0	0	2708	2777	2836	2889	2936	2980	0
3	0	0	0	2846	2905	2958	3005	3049	-299
4	0	0	0	0	2965	3017	3065	3109	-1195
5	0	0	0	0	0	3069	3117	3161	-2689
6	0	0	0	0	0	0	3165	3209	-4780
7	0	0	0	0	0	0	0	3253	-7468
8	0	0	0	0	0	0	0	0	-10754

**EXTRACCION= 2**

NIVEL INICIAL	NIVEL FINAL								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-598	4953	5127	5265	5394	0	0	0	0
1	-299	5067	5242	5380	5499	5603	0	0	0
2	0	5242	5416	5554	5673	5778	5873	0	0
3	0	0	5554	5693	5811	5916	6011	6099	0
4	0	0	0	5811	5930	6034	6130	6218	-299
5	0	0	0	0	6034	6139	6234	6322	-1195
6	0	0	0	0	0	6234	6330	6418	-2689
7	0	0	0	0	0	0	6418	6506	-4780
8	0	0	0	0	0	0	0	6568	-7468

Tabla 10.6

**BENEFICIOS NETOS PARA CADA  
COMBINACION DE NIVELES, DADO UN  
VOLUMEN DE EXTRACCION**

**EXTRACCION= 3**

NIVEL INICIAL	NIVEL FINAL								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-897	7429	7691	7898	0	0	0	0	0
1	-598	7601	7863	8070	8248	0	0	0	0
2	-299	7863	8125	8332	8510	8667	0	0	0
3	0	8070	8332	8539	8717	8874	9017	0	0
4	0	0	8510	8717	8895	9052	9195	9327	0
5	0	0	0	8874	9052	9209	9352	9484	-299
6	0	0	0	0	9195	9352	9495	9627	-1195
7	0	0	0	0	0	9484	9627	9759	-2689
8	0	0	0	0	0	0	9720	9852	-4780

**EXTRACCION= 4**

NIVEL INICIAL	NIVEL FINAL								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-1195	9906	10255	0	0	0	0	0	0
1	-897	10135	10484	10761	0	0	0	0	0
2	-598	10484	10833	11109	11347	0	0	0	0
3	-299	10761	11109	11386	11623	11832	0	0	0
4	0	10998	11347	11623	11860	12069	12260	0	0
5	0	0	11556	11832	12069	12278	12469	12645	0
6	0	0	0	12023	12260	12469	12660	12836	-299
7	0	0	0	0	12436	12645	12836	13012	-1195
8	0	0	0	0	0	12749	12960	13136	-2689

**EXTRACCION= 5**

NIVEL INICIAL	NIVEL FINAL								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-1494	12382	0	0	0	0	0	0	0
1	-1195	12669	13105	0	0	0	0	0	0
2	-897	13105	13541	13887	0	0	0	0	0
3	-598	13451	13887	14233	14529	0	0	0	0
4	-299	13747	14183	14529	14825	15087	0	0	0
5	0	14009	14445	14790	15087	15348	15586	0	0
6	0	0	14683	15029	15325	15586	15825	16045	0
7	0	0	0	15249	15545	15807	16045	16265	-299
8	0	0	0	0	15701	15962	16200	16420	-1195

Tabla IV.6

**BENEFICIOS NETOS PARA CADA  
COMBINACION DE NIVELES, DADO UN  
VOLUMEN DE EXTRACCION**

**EXTRACCION= 6**

NIVEL INICIAL	NIVEL FINAL								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-1793	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-1494	15203	0	0	0	0	0	0	0
2	-1195	15726	16250	0	0	0	0	0	0
3	-897	16141	16664	17079	0	0	0	0	0
4	-598	16497	17020	17435	17791	0	0	0	0
5	-299	16810	17334	17749	18104	18418	0	0	0
6	0	17096	17620	18034	18390	18704	18990	0	0
7	0	0	17884	18299	18654	18968	19254	19518	0
8	0	0	0	18485	18841	19154	19440	19705	-299

Tabla 10.6

EXTRACCIONES OPTIMAS EN FUNCION  
DEL INGRESO EN LA ETAPA ANTERIOR  
Y EL NIVEL EN LA PRESA

CICLO 1

INGRESO EN LA ETAPA ANTERIOR= 1 (CHICO)

NIVEL	ETAPA					
	6	5	4	3	2	1
0	2	0	0	0	0	0
1	3	0	0	0	0	0
2	4	0	0	0	0	0
3	5	1	0	0	2	0
4	6	2	0	1	3	2
5	6	3	1	2	4	3
6	6	4	2	3	5	4
7	6	5	3	5	6	5
8	6	6	4	6	6	6

INGRESO EN LA ETAPA ANTERIOR= 2 (MEDIANO)

NIVEL	ETAPA					
	6	5	4	3	2	1
0	2	0	0	0	0	0
1	3	0	0	0	0	0
2	4	0	0	0	1	0
3	5	2	0	0	2	1
4	6	3	0	2	3	2
5	6	4	1	4	4	3
6	6	4	3	5	5	5
7	6	5	4	6	6	6
8	6	6	5	6	6	6

INGRESO EN LA ETAPA ANTERIOR= 3 (GRANDE)

NIVEL	ETAPA					
	6	5	4	3	2	1
0	3	0	0	0	0	0
1	4	0	0	0	0	0
2	5	1	0	0	1	1
3	5	2	0	2	2	2
4	6	3	1	3	3	3
5	6	4	2	4	4	4
6	6	5	3	5	5	5
7	6	6	4	6	6	6
8	6	6	5	6	6	6

Tabla 10.7

EXTRACCIONES OPTIMAS EN FUNCION  
DEL INGRESO EN LA ETAPA ANTERIOR  
Y EL NIVEL EN LA PRESA

CICLO 2

INGRESO EN LA ETAPA ANTERIOR= 1 (CHICO)

NIVEL	ETAPA					
	6	5	4	3	2	1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	2	0	0	0	2	0
4	3	0	0	1	3	2
5	4	1	1	2	4	3
6	5	2	2	4	5	4
7	6	3	3	5	6	5
8	6	4	4	6	6	6

INGRESO EN LA ETAPA ANTERIOR= 2 (MEDIANO)

NIVEL	ETAPA					
	6	5	4	3	2	1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	1	0
3	2	0	0	0	2	1
4	3	0	0	2	3	2
5	4	1	1	4	4	3
6	5	2	3	5	5	5
7	6	3	4	6	6	6
8	6	4	5	6	6	6

INGRESO EN LA ETAPA ANTERIOR= 3 (GRANDE)

NIVEL	ETAPA					
	6	5	4	3	2	1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	1	1
3	2	0	0	2	2	2
4	3	0	1	3	3	3
5	4	1	2	4	4	4
6	5	2	3	5	5	5
7	6	3	4	6	6	6
8	6	4	5	6	6	6

Tabla 10.7



EXTRACCIONES OPTIMAS EN FUNCION  
DEL INGRESO EN LA ETAPA ANTERIOR  
Y EL NIVEL EN LA PRESA

CICLO 3

INGRESO EN LA ETAPA ANTERIOR= 1 (CHICO)

NIVEL	ETAPA					
	6	5	4	3	2	1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	2	0	0	0	2	0
4	3	0	0	1	3	2
5	4	1	1	2	4	3
6	5	2	2	4	5	4
7	6	3	3	5	6	5
8	6	4	4	6	6	6

INGRESO EN LA ETAPA ANTERIOR= 2 (MEDIANO)

NIVEL	ETAPA					
	6	5	4	3	2	1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	1	0
3	2	0	0	0	2	1
4	3	0	0	2	3	2
5	4	1	1	4	4	3
6	5	2	3	5	5	5
7	6	3	4	6	6	6
8	6	4	5	6	6	6

INGRESO EN LA ETAPA ANTERIOR= 3 (GRANDE)

NIVEL	ETAPA					
	6	5	4	3	2	1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	1	1
3	2	0	0	2	2	2
4	3	0	1	3	3	3
5	4	1	2	4	4	4
6	5	2	3	5	5	5
7	6	3	4	6	6	6
8	6	4	5	6	6	6

Tabla 14.7

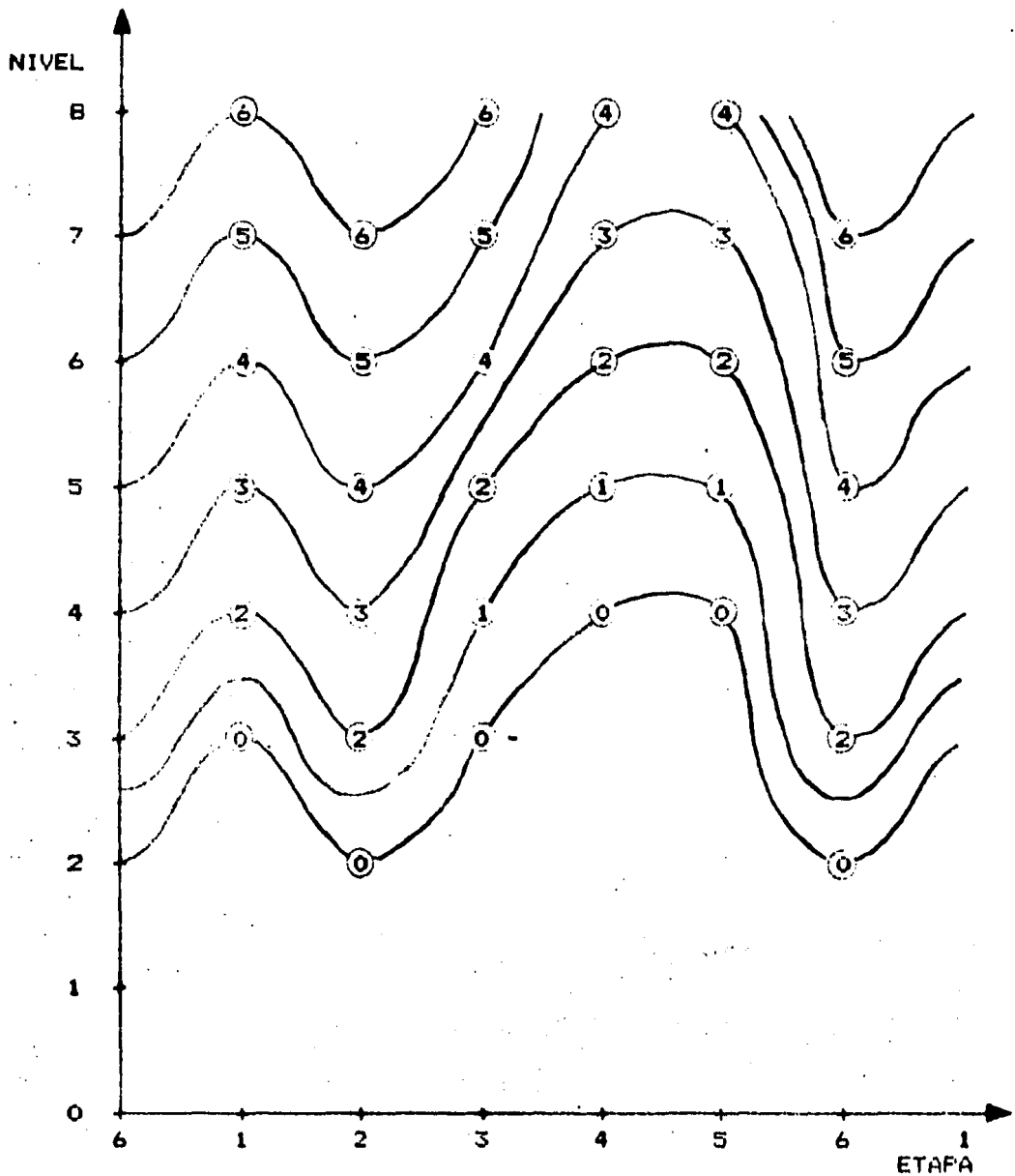


Figura IV.4 - Decisiones Optimas  
(Ingreso Anterior = Chico)

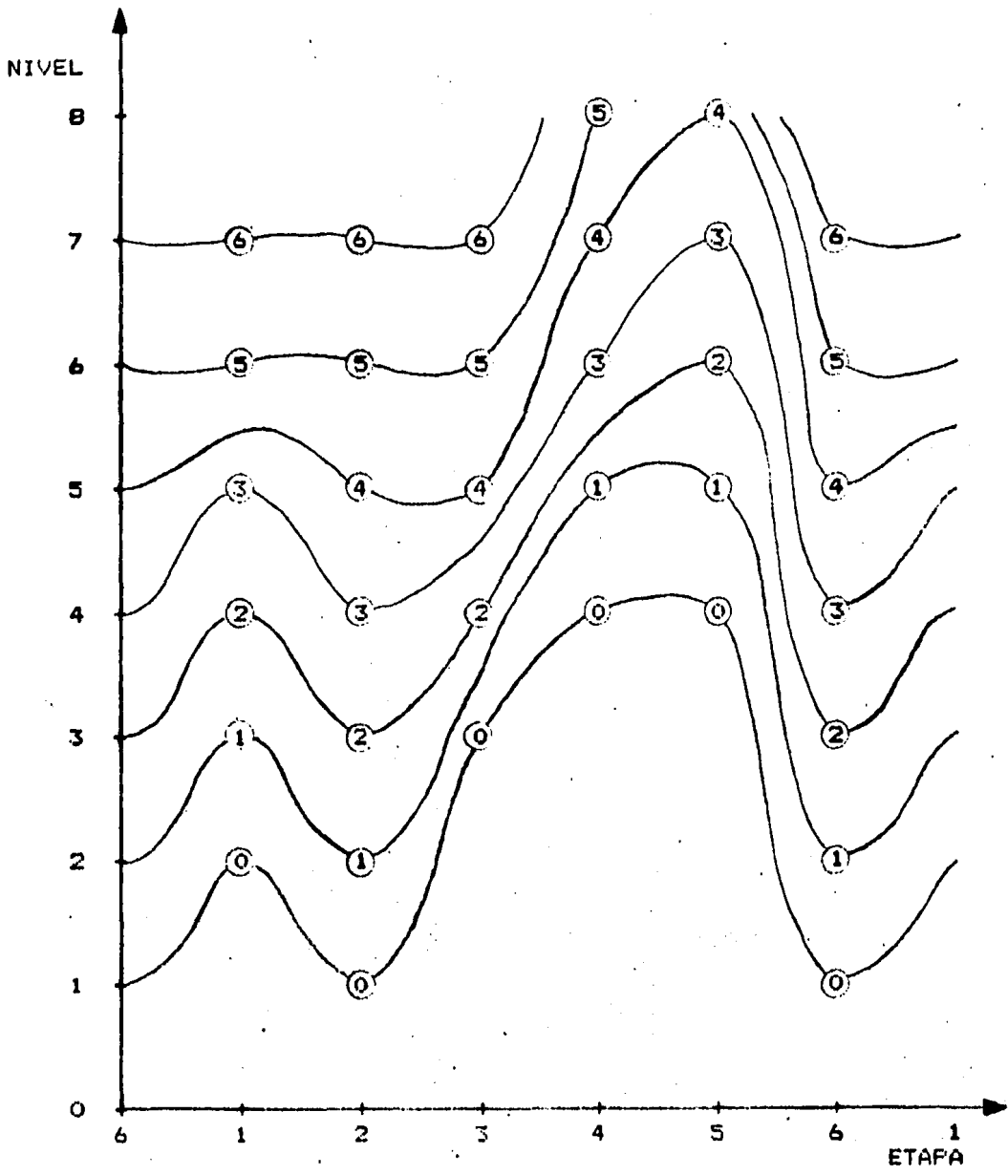


Figura 14.5 - Decisiones Optimas  
(Ingreso Anterior = Mediano)

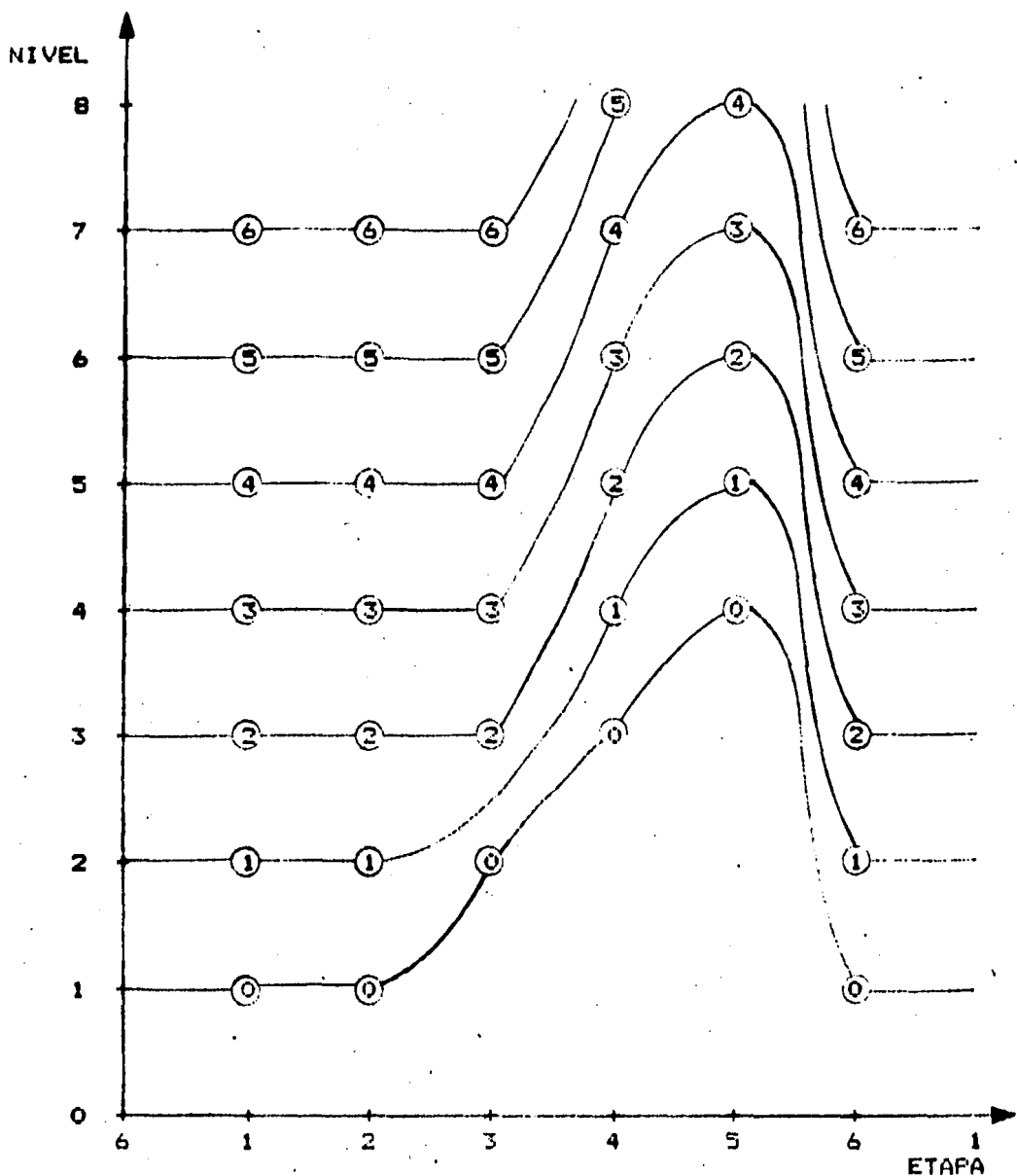


Figura IV.6 - Decisiones Optimas  
(Ingreso Anterior = Grande)

## U - CONCLUSIONES

El Modelo propuesto permite definir las políticas de operación de una presa en función al período, el nivel en el vaso y el escurrimiento registrado en el período anterior.

Uno de los puntos mas importantes es el cálculo de las matrices de probabilidad condicional, por lo que se plantean diferentes formas de obtener dichas matrices.

La principal limitante del modelo es la necesidad de discretizar las variables, tanto de estado como de decisión, agrupándolas en un número pequeño de rangos para no consumir en forma excesiva tanto tiempo como memoria de computadora.

Esta desventaja se minimiza con el algoritmo propuesto, basado en este aspecto en los desarrollos planteados en la referencia 7.

En relación con el ejemplo de aplicación se encontró que para el caso de Infiernillo y la discretización de etapas, estados y decisiones utilizadas, el beneficio adicional al considerar la dependencia de los escurrimientos es pequeño cualitativamente. Para que este beneficio sea mayor se debe mejorar la función objetivo y tener un mayor número de estados y decisiones. También es poco importante porque la correlación entre los períodos no es muy grande, aunque si es estadísticamente significativa. Probablemente el aumento en el número de etapas, o lo que es lo mismo la disminución del

*tamaño de cada etapa, traiga consigo un aumento en la correlación.*

*Estas conclusiones preliminares deberán sin embargo probarse y ampliarse mediante la aplicación del algoritmo al caso de Infiernillo con una discretización mas fina y a otras presas de importancia.*

## **REFERENCIAS**

- 1 - *Application of Dynamic Programming to Water Resources Management*  
John H. Labadie  
Depto. of Civil Engineering, Colorado State University, 1980
- 2 - *Dynamic Programming*  
R. Bellman  
Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957
- 3 - *Estadística Básica para Negocios y Economía*  
Paul G. Hoel y Raymond J. Jessen  
Compañía Editorial Continental, SA de CV, México, 1983
- 4 - *Introducción a la Estadística Matemática*  
Erwin Kreyszig  
Editorial Limusa, México, 1979
- 5 - *Operación de una Presa*  
Jorge Alvaro Hinojosa Martínez  
Facultad de Ingeniería, UNAM, 1982
- 6 - *Improved Stochastic Dynamic Programming for Optimal Reservoir Operation Based on the Asymptotic Convergence of Benefit Differences*  
Alberto Guitrón De Los Reyes  
University of Arizona, 1974
- 7 - *Operación Conjunta del Sistema de Presas Infiernillo-Villita, de la Cuenca del Río Balsas*  
Ramón Domínguez M., Carlos Flores I., Oscar Fuentes M.  
Instituto de Ingeniería, 1984

## **ANEXO A**

*En este Anexo se presenta el programa utilizado para generar registros sintéticos por medio de la expresión propuesta por Thomas y Fiering y un ejemplo de registros generados para la presa El Infiernillo.*



```

10 REM *****
20 REM *
30 REM *      PROGRAMA PARA GENERAR DATOS DE ESCURRIMIENTO MENSUAL
40 REM *      MODELO DE THOMAS-FIERING.
50 REM *
60 REM *****
70 DIM A(12),R(12),S(12),B(12),M(12),X(12),M$(12)
80 PRINT "":INPUT "NUMERO DE AÑOS A GENERAR:":N
90 B$=""
100 FOR I=1 TO 12
110 READ M$(I),M(I),S(I),R(I)
120 NEXT I
130 FOR J=1 TO 12
140 K=J-1: IF K=0 THEN K=12
150 A(J)=R(J)*S(J)/S(K)
160 C=SQR(1-R(J)*R(J))
170 B(J)=S(J)*C
180 PRINTJ;R(J);S(J);A(J);B(J)
190 NEXTJ
200 OPEN4,4
210 PRINT#4,"          DATOS GENERADOS CON EL MODELO DE THOMAS Y FIERING"
220 PRINT#4: PRINT#4,"          ";
230 FOR I=1 TO 12: PRINT#4,"          "+M$(I);: NEXT: PRINT#4
240 FOR I=1 TO N: PRINTI: E$=""
250 XF=X(12):X(12)=XA:XA=XF:IF I=1 THEN X(12)=M(12)
260 FOR J=1 TO 12
270 K=J-1:IF K=0 THEN K=12
280 F=SQR(LOG(RND(1))*(-2))*COS(2*RND(1))
290 D=X(K)-M(K)
300 X(J)=M(J)+A(J)*D+F*B(J)
310 D=INT(EXP(X(J))+.5)
320 D$=STR$(D):C=6-LEN(D$):E$=E$+LEFT$(B$,C)+D$
330 NEXT J
340 PRINT#4,E$: NEXT I
350 PRINT#4: CLOSE 4: END
360 REM DATOS PARA LA PRESA EL INFIERNILLO
370 DATA ENE, 6.1301, 0.3300, 0.28616
380 DATA FEB, 5.8768, 0.2631, 0.80322
390 DATA MAR, 5.7587, 0.2945, 0.85056
400 DATA ABR, 5.6081, 0.3042, 0.71101
410 DATA MAY, 5.8401, 0.3319, 0.59317
420 DATA JUN, 6.8561, 0.4035, 0.32946
430 DATA JUL, 7.6688, 0.3404, 0.68784
440 DATA AGO, 7.7142, 0.4141, 0.64001
450 DATA SEP, 8.1909, 0.3437, 0.54724
460 DATA OCT, 7.6989, 0.4209, 0.5193
470 DATA NOV, 6.6209, 0.3723, 0.70485
480 DATA DIC, 6.2936, 0.2852, 0.87558

```

DATOS GENERADOS CON EL MODELO DE THOMAS Y FIEFING

ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
801	465	382	351	655	971	2291	2194	3766	2096	775	494
60	86	85	153	210	697	2029	2255	5510	2149	933	544
295	354	424	454	519	815	3209	5029	4782	2267	790	607
509	439	378	267	268	493	1727	1878	1907	2939	962	495
502	377	301	296	343	1155	2006	1937	5490	1603	338	283
380	298	278	289	395	769	1277	2531	5504	2205	709	501
299	200	130	147	263	1018	2044	1624	3317	2328	1253	645
787	513	390	313	282	689	2077	1470	4004	1686	594	398
452	351	386	311	674	1388	2199	1183	3924	3530	957	575
569	417	333	272	283	634	1789	1611	2375	1369	718	478
479	267	203	197	301	458	1918	2771	3512	1583	744	513
576	400	477	373	379	1334	1792	1829	2062	1508	597	540
383	251	213	225	322	704	1975	1223	3026	1274	591	427
456	284	267	198	243	849	1706	2793	6682	4530	1116	905
418	280	241	181	203	677	1919	1445	2490	1499	569	493
639	507	543	368	351	1136	2565	2452	2607	2529	694	617
224	249	218	193	415	729	1447	804	2800	2194	603	468
344	304	225	237	390	1689	3241	3792	3598	4371	1031	782
559	368	389	245	301	883	1661	2650	6391	3185	1023	700
697	407	286	267	248	994	2153	1093	1889	1704	939	509
421	282	249	227	275	1651	2830	2596	4020	2350	1127	758
330	239	201	195	235	1157	1904	1541	2617	1655	507	402
339	259	207	222	373	1400	3033	3709	5330	2082	585	415
563	595	442	412	411	1427	1498	2233	4120	6105	943	595
419	341	345	183	264	625	1387	2729	3515	2974	889	652
804	390	411	257	399	762	1940	866	2378	1585	1044	667
375	204	161	131	231	1079	2685	1431	3121	1363	473	442
846	564	377	239	256	928	2931	4048	4678	2967	763	603
621	434	624	511	673	2521	3925	4887	7464	4145	1056	668
418	396	499	393	320	1400	3962	3478	6435	3926	994	562
937	480	321	286	237	1225	1844	1858	5115	3379	791	599
424	393	330	291	658	1087	1621	1197	2264	1499	537	375
572	341	318	254	254	1568	2609	5371	4681	1940	619	409
583	311	293	257	163	829	2250	2789	4215	2902	663	416
401	290	224	173	371	1227	2643	1844	3007	1900	910	797
599	292	259	211	303	774	1773	1696	3148	1828	802	574
275	315	207	227	317	876	1632	2497	3534	3110	834	637
359	352	289	311	259	1012	2380	2851	4895	2826	629	498
398	333	281	323	390	580	1621	2095	3139	2808	955	685
427	244	180	154	294	646	2616	1994	2746	1357	692	552
367	253	297	277	259	1065	1845	3621	5273	2028	721	474
502	264	216	266	372	855	2270	1519	2514	2550	1656	703
588	419	258	243	382	1641	3188	2306	4477	1928	557	473
850	629	561	482	454	1602	1925	2589	4999	4742	883	585
333	286	326	346	225	861	2572	3262	4198	2334	764	456
452	354	396	360	342	775	1551	1190	3216	1227	410	346
237	165	172	179	169	758	1505	984	2888	1837	662	467
397	330	358	428	588	1145	2694	2481	3625	2977	870	654
378	437	360	264	256	783	2439	2162	2880	1982	656	580
412	296	337	263	373	812	1534	1047	2277	1755	743	573

## ANEXO B

*Tablas con los valores esperados de la Función Objetivo Acumulada en cada etapa, para todas las combinaciones de ingresos en la etapa anterior, nivel inicial en la presa y volumen de extracción programado.*

VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 1 ETAPA 6

INGRESO 1 (CHICO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0	2624	4967	4679	1599	-603	-1794	4967	2
1	0	2743	5365	7626	6492	2295	-422	7626	3
2	-20	2884	5661	8309	10513	8480	3064	10513	4
3	-299	2783	5907	8700	11355	13483	10511	13483	5
4	-1776	2018	5698	9039	11837	14491	16529	16529	6
5	-4658	-703	4413	8704	12260	15058	17703	17703	6
6	-7468	-4575	402	6876	11790	15560	18356	18356	6
7	-10755	-7468	-4490	1536	9400	14949	18942	18942	6
8	0	-10755	-7468	-4404	2682	11941	18116	18116	6

INGRESO 2 (MEDIANO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0	2631	4930	4749	2619	496	-1793	4930	2
1	0	2749	5378	7425	6585	3568	901	7425	3
2	-43	2890	5674	8329	10241	8596	4617	10241	4
3	-406	2520	5719	8719	11382	13137	10651	13137	5
4	-1786	1632	5196	9056	11863	14525	16107	16107	6
5	-4521	-726	3738	7936	12284	15090	17744	17744	6
6	-7467	-4347	367	5994	10759	15594	18394	18394	6
7	-10754	-7467	-4168	1487	8124	13648	18977	18977	6
8	0	-10754	-7467	-3986	2620	10359	16546	16546	6

INGRESO 3 (GRANDE)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0	2659	5122	6109	4310	1804	-1794	6109	3
1	0	2773	5434	7856	8388	5630	2233	8388	4
2	-67	2911	5733	8413	10823	10954	7195	10984	5
3	-585	2270	5362	8792	11494	13672	13433	13872	5
4	-2207	995	4399	9121	11960	14664	17000	17000	6
5	-4732	-1641	2610	7205	12371	15211	17912	17912	6
6	-7469	-4693	-1057	4311	9777	15702	18540	18540	6
7	-10756	-7468	-4642	-458	6032	12409	19107	19107	6
8	0	-10756	-7468	-4601	148	7766	15049	15049	6

VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 1 ETAPA 5

INGRESO 1 (CHICO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	10404	9798	5126	4298	3989	3690	3391	10404	0
1	13352	13020	12111	5507	4301	3989	3690	13352	0
2	16232	16126	15810	14607	5505	4304	3989	16232	0
3	17678	19134	19038	18721	17194	5709	4307	19134	1
4	18370	20692	22156	22039	21731	19860	5918	22156	2
5	18319	21481	23812	25275	25170	24824	22594	25275	3
6	10360	21303	24688	27022	28480	28363	27994	28480	4
7	6167	10716	24369	27980	30313	31762	31630	31762	5
8	0	6167	11078	27481	31307	33627	35055	35055	6

INGRESO 2 (MEDIANO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	10826	10468	5667	4453	4141	3842	3543	10826	0
1	13786	13453	12998	5980	4457	4141	3842	13786	0
2	16570	16568	16254	15728	6320	4461	4141	16570	0
3	17837	19479	19489	19175	18557	6671	4465	19489	2
4	18477	20858	22509	22518	22196	21472	7031	22518	3
5	17955	21594	23984	25635	25639	25300	24462	25639	4
6	9163	20783	24806	27201	28848	28841	28481	28848	4
7	5631	9252	23689	28103	30498	32137	32116	32137	5
8	0	5631	9342	26639	31435	33819	35438	35438	6

INGRESO 3 (GRANDE)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	10959	10583	6033	4531	4193	3893	3594	10959	0
1	13922	13588	13101	6451	4542	4193	3893	13922	0
2	16522	16706	16391	15819	6906	4553	4193	16706	1
3	17863	18534	19629	19315	18633	7373	4565	18629	2
4	18485	20886	22565	22660	22338	21534	7854	22660	3
5	17608	21595	24013	25693	25782	25444	24509	25782	4
6	9140	20310	24801	27232	28908	28986	26627	26986	5
7	5578	9248	23086	26090	30530	32199	32263	32263	6
8	0	5578	9359	25903	31415	33833	35501	35501	6

VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 1 ETAPA 4

INGRESO 1 (CHICO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	17107	16721	12123	9713	9379	9080	8781	17107	0
1	20044	19745	19328	12788	9721	9379	9080	20044	0
2	23091	22833	22557	22140	13512	9731	9379	23091	0
3	26232	26009	25766	25491	25053	14257	9741	26232	0
4	29449	29261	29047	28805	28523	28053	15023	29449	0
5	31529	32567	32395	32182	31935	31638	31134	32567	1
6	27745	33932	35780	35620	35403	35146	34830	35780	2
7	24450	27752	36401	39077	38925	38701	38431	39077	3
8	0	24450	27759	38907	42411	42254	42010	42411	4

INGRESO 2 (MEDIANO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	18216	17849	14973	10121	9544	9241	8942	18216	0
1	21194	20877	20491	16457	10188	9545	9241	21194	0
2	24274	24005	23712	23337	18072	10263	9546	24274	0
3	27444	27210	26955	26668	26285	19734	10338	27444	0
4	30625	30488	30265	30014	29723	29322	21440	30625	0
5	31213	33687	33636	33417	33163	32861	32435	33687	1
6	27871	32627	35843	36876	36656	36395	36076	36876	3
7	24585	27871	34079	40081	40196	39971	39659	40196	4
8	0	24585	27871	35534	43355	43540	43297	43540	5

INGRESO 3 (GRANDE)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	19576	19209	17872	11821	9797	9379	9035	19576	0
1	22602	22254	21885	20095	12259	9821	9379	22602	0
2	25721	25437	25127	24765	22513	12740	9847	25721	0
3	28913	28678	28411	28111	27747	25001	13231	28913	0
4	31723	31950	31753	31494	31193	30818	27555	31950	1
5	30909	34366	35090	34926	34667	34359	33966	35090	2
6	27974	31443	37090	38322	38185	37923	37602	38322	3
7	24688	27974	31991	39884	41632	41521	41251	41632	4
8	0	24688	27975	32549	42709	44966	44867	44966	5

VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 1 ETAPA 3

INGRESO 1 (CHICO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	25659	25015	21760	18319	16899	16313	15929	25659	0
1	28816	28320	27580	23055	18653	16969	16327	28816	0
2	31981	31628	31154	30345	24463	19020	17046	31981	0
3	35108	34901	34578	34110	33207	25913	19395	35108	0
4	37967	38074	37940	37636	37164	36156	27400	38074	1
5	38908	40736	41142	41076	40786	40302	39180	41142	2
6	35699	40562	43569	44299	44298	44017	43516	44299	3
7	32287	35795	42261	46476	47534	47596	47321	47596	5
8	0	32287	35895	43985	49414	50791	50905	50905	6

INGRESO 2 (MEDIANO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	28485	27943	26145	22029	18953	17457	16581	28485	0
1	31657	31189	30629	28261	23605	19283	17553	31657	0
2	34815	34506	34067	33518	30562	24075	19644	34815	0
3	37792	37679	37493	37065	36509	32928	25168	37792	0
4	39885	40499	40658	40590	40163	39588	35357	40658	2
5	39238	41911	43295	43732	43776	43343	42745	43776	4
6	36259	39932	43999	46173	46888	47045	46601	47045	5
7	32961	36268	40645	46141	49122	50119	50387	50387	6
8	0	32961	36277	41368	48306	52091	53360	53360	6

INGRESO 3 (GRANDE)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	30591	30082	28991	25467	21627	19060	17004	30591	0
1	33777	33526	32809	31348	27007	22352	19353	33777	0
2	36943	36653	36234	35741	34006	28695	23154	36943	0
3	39574	39616	39668	39264	38773	36739	30420	39668	2
4	40834	41852	42396	42792	42392	41895	39543	42792	3
5	39521	42226	44207	45264	46006	45603	45094	46006	4
6	36689	39852	43660	46631	48208	49301	48892	49301	5
7	33400	36691	40193	45131	49113	51222	52671	52671	6
8	0	33400	36694	40539	46618	51613	54244	54244	6

VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
 CICLO 1 ETAPA 2

INGRESO 1 (CHICO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	39258	38817	38041	34730	29827	26794	25183	39258	0
1	42364	42002	41558	40683	36329	30564	27012	42364	0
2	45392	45248	44921	44503	43552	38500	31380	45392	0
3	48011	48156	48272	47960	47550	46502	40515	48272	2
4	48950	50281	51030	51404	51098	50686	49529	51404	3
5	47229	50041	52628	53995	54627	54319	53899	54627	4
6	44493	47333	51186	55043	57038	57931	57617	57931	5
7	41206	44493	47441	52320	57516	60153	61309	61309	6
8	0	41206	44493	47350	53466	60006	63278	63278	6

INGRESO 2 (MEDIANO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	43077	42636	42093	40537	36537	31759	26577	43077	0
1	46289	45864	45425	44865	43013	38179	32566	46289	0
2	48968	49212	48826	48419	47871	45723	39993	49212	1
3	50547	51121	52274	51907	51514	50960	48492	52274	2
4	50183	51832	53359	55445	55088	54599	54129	55445	3
5	48182	50535	53160	55667	58706	58352	57960	58706	4
6	45488	48196	50998	54527	58037	62049	61694	62049	5
7	42201	45488	48210	51270	55926	60461	65466	65466	6
8	0	42201	45489	48224	51645	57335	62893	62893	6

INGRESO 3 (GRANDE)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	45831	45352	44836	43945	41556	37018	32593	45831	0
1	49117	48646	48173	47654	46671	43825	38927	49117	0
2	51325	52066	51637	51199	50707	49652	46730	52066	1
3	51910	52734	53154	54747	54326	53844	52697	53154	2
4	50889	52518	54198	58351	57956	57542	57060	58351	3
5	48822	50992	53146	55707	61638	61249	60835	61638	4
6	46133	48924	51998	55793	57257	65067	64619	65067	5
7	42846	46134	48827	51206	54455	58642	68450	68450	6
8	0	42846	46135	48829	51316	55122	60433	60433	6



VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 1 ETAPA 1

INGRESO 1 (CHICO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	49339	48744	45569	41973	40428	39794	39392	49339	0
1	52386	52003	51322	46927	42343	40509	39811	52386	0
2	55518	55199	54840	54099	48403	42740	40598	55518	0
3	58492	58438	58152	57799	56974	49923	43163	58492	0
4	60329	61447	61476	61213	60856	59937	51483	61476	2
5	59351	63039	64504	64611	64365	63996	62974	64611	3
6	55515	60931	65831	67650	67831	67599	67214	67831	4
7	52063	55002	62554	68696	70873	71129	70905	71129	5
8	0	52983	55690	64291	71592	74119	74436	74436	6

INGRESO 2 (MEDIANO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	52154	51627	49661	45238	42452	41300	40699	52154	0
1	55289	54848	54302	51673	46025	42664	41349	55289	0
2	58342	58129	57716	57180	53861	46888	42899	58342	0
3	60860	61250	61109	60705	60160	56112	47770	61250	1
4	61107	63688	64274	64197	63794	63229	58421	64274	2
5	58330	63347	66613	67395	67375	66965	66374	67395	3
6	54959	59139	65655	69622	70600	70635	70213	70635	5
7	51658	54968	59969	68022	72705	73881	73968	73969	6
8	0	51659	54977	60812	70416	75809	77172	77172	6

INGRESO 3 (GRANDE)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	57730	57172	56301	53491	49377	46042	42782	57730	0
1	61006	60485	59925	58915	55409	50435	46529	61006	0
2	62334	63903	63415	62992	61752	57509	51603	63903	1
3	62395	64813	66937	66465	65941	64668	59655	66937	2
4	59743	64318	67390	70079	69615	69090	67660	70079	3
5	56682	60714	66303	70040	73312	75647	72315	73312	4
6	53856	56841	61714	68345	72777	76627	76157	76627	5
7	50569	53856	57004	62741	70437	75569	80015	80015	6
8	0	50569	53856	57169	63779	72543	78370	78370	6

VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 2 ETAPA 6

INGRESO 1 (CHICO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	64366	63927	63224	59961	54862	51870	50469	64366	0
1	67492	67109	66668	65883	61774	55557	52052	67492	0
2	70384	70376	70028	69612	68770	63762	56326	70384	0
3	72414	73187	73399	73066	72658	71740	65793	73399	2
4	73376	74730	76101	76531	76204	75794	74786	76531	3
5	71617	74448	77125	79107	79753	79425	79006	79753	4
6	68892	71700	75554	79589	82194	83057	82722	83057	5
7	65605	68892	71785	76688	82113	85352	86434	86434	6
8	0	65605	68892	71871	77834	84654	88520	88520	6

INGRESO 2 (MEDIANO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	65420	64958	64087	61111	56961	53785	51026	65420	0
1	68569	68169	67705	66681	62947	57910	54190	68569	0
2	71048	71459	71094	70656	69498	64958	58959	71459	1
3	72663	73612	74488	74139	73709	72393	67013	74488	2
4	73432	74701	76278	77625	77283	76851	75364	77625	3
5	71808	74192	76807	79028	80853	80510	80070	80853	4
6	69041	71982	75584	78973	81651	84163	83815	84163	5
7	65754	69041	72161	76705	81193	84740	87546	87546	6
8	0	65754	69041	72343	77837	83428	87638	87638	6

INGRESO 3 (GRANDE)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	68053	67580	66963	64923	60634	56416	52287	68053	0
1	71259	70827	70355	69698	67202	62005	57046	71259	0
2	73357	74170	73776	73335	72664	69697	63519	74170	1
3	74260	75694	77221	76845	76416	75714	72246	77221	2
4	74294	75840	78124	80380	80013	78586	78841	80380	3
5	72372	74861	77474	80630	83650	83265	82633	83630	4
6	69657	72412	75445	79155	83202	86961	86593	86961	5
7	66289	69667	72452	76044	80877	85834	90366	90366	6
8	0	66190	69667	72493	76649	82610	88474	88474	6

VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 2 ETAPA 5

INGRESO 1 (CHICO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	71480	70727	65542	64651	64341	64042	63743	71480	0
1	74501	74096	73041	65724	64654	64341	64042	74501	0
2	77634	77274	74886	75537	65922	64657	64341	77634	0
3	80860	80537	80187	79797	78124	66125	64660	80860	0
4	84160	83875	83558	83207	82807	80789	66335	84160	0
5	86950	87271	86994	86678	86319	85900	83523	87271	1
6	81348	89834	90478	90204	89883	89512	89070	90478	2
7	77473	81703	82900	93770	93495	93165	92779	93770	3
8	0	77473	82056	96012	97097	96809	96458	97097	4

INGRESO 2 (MEDIANO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	72458	71947	66551	65229	64915	64616	64317	72458	0
1	75501	75085	74478	66864	65232	64915	64616	75501	0
2	78653	78283	77886	77208	67205	65236	64915	78653	0
3	81894	81562	81204	80807	80037	67556	65241	81894	0
4	85206	84915	84592	84233	83828	82952	67916	85206	0
5	87409	88322	88041	87718	87353	86932	85942	88322	1
6	80851	90237	91535	91258	90931	90555	90113	91535	2
7	77418	80939	93143	94831	94556	94220	93830	94831	3
8	0	77418	81030	96093	98163	97897	97521	98163	4

INGRESO 3 (GRANDE)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	72688	72156	67020	65373	65032	64732	64433	72688	0
1	75735	75317	74675	67437	65384	65032	64732	75735	0
2	78891	78519	78120	77391	67892	65395	65032	78891	0
3	82136	81802	81443	81044	80207	68360	65407	82136	0
4	85431	85159	84834	84474	84067	83107	68840	85431	0
5	87249	88541	88286	87962	87596	87173	86082	88541	1
6	80911	89931	91747	91505	91176	90800	90356	91747	2
7	77445	81019	92727	95036	94803	94468	94077	95036	3
8	0	77445	81129	95544	98361	98126	97770	98361	4

VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 2 ETAPA 4

INGRESO 1 (CHICO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	78854	78183	73437	71005	70671	70372	70073	78854	0
1	82101	81492	80790	74192	71014	70671	70372	82101	0
2	85356	84893	84304	83602	74826	71023	70671	85356	0
3	88493	88274	87823	87238	86516	75571	71033	88493	0
4	91714	91522	91312	90862	90270	89517	76337	91714	0
5	93813	94832	94656	94447	93992	93385	92596	94832	1
6	90054	96216	98045	97881	97668	97204	96577	98045	2
7	86759	90061	98685	101342	101185	100966	100489	101342	3
8	0	86759	90968	101190	104675	104514	104275	104575	4

INGRESO 2 (MEDIANO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	80306	79634	76519	71612	71033	70730	70431	80306	0
1	83573	82967	82276	76002	71680	71034	70730	83573	0
2	86772	86384	85802	85122	79617	71754	71035	86772	0
3	89941	89708	89334	88758	88069	81279	71830	89941	0
4	93130	92985	92763	92393	91813	91106	82985	93130	0
5	93753	96192	96133	95915	95542	94951	94220	96192	1
6	90426	95167	99348	99373	99154	98774	98166	99373	3
7	87140	90426	96619	102586	102693	102469	102078	102693	4
8	0	87140	90426	98093	105860	106036	105725	106036	5

INGRESO 3 (GRANDE)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	81971	81288	79648	73481	71440	71021	70717	81971	0
1	85231	84660	83974	81870	73518	71464	71022	85231	0
2	88391	88066	87522	86954	84288	74399	71490	88391	0
3	91585	91347	91040	90536	89805	85775	74890	91585	0
4	94416	94322	94422	94123	93589	92906	89330	94622	1
5	97650	97059	97763	97596	97286	96755	96054	97763	2
6	96721	94184	96783	100994	100854	100551	99997	100994	3
7	87434	90721	94732	100578	104305	104191	103880	104305	4
8	0	87434	90721	95289	105402	107639	107537	107639	5

VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 2 ETAPA 3

INGRESO 1 (CHICO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	89032	87278	83823	80272	78828	78236	77652	88932	0
1	91196	90692	89844	85118	80606	78898	78250	91196	0
2	94362	94007	93527	92629	85527	80973	78975	94362	0
3	97487	97283	96957	96483	95471	87976	81348	97487	0
4	100366	100453	100322	100016	99537	98419	89464	100453	1
5	101287	103115	103521	103458	103165	102675	101443	103521	2
6	98977	102941	105948	106678	106680	106397	105889	106680	4
7	94666	98175	104640	108855	109913	109978	109701	109978	5
8	0	94666	98274	106364	111794	113171	113287	113287	6

INGRESO 2 (MEDIANO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	90976	90389	88468	84217	81083	79563	79680	90976	0
1	94151	93680	93075	90585	85193	81410	79660	94151	0
2	97309	96999	96557	95964	92895	86262	81722	97309	0
3	100284	100173	99987	99556	98955	95252	87356	100284	0
4	102376	102589	103153	103893	102653	102034	97680	103153	2
5	101730	104492	105766	106226	106270	105874	105191	106270	4
6	98750	102423	106490	108664	109383	109539	109092	109539	5
7	95452	98759	103136	108633	111613	112614	112881	112881	6
8	0	95452	98769	103860	110798	114581	115855	115855	6

INGRESO 3 (GRANDE)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	93149	92619	91362	87815	83898	81290	79211	93149	0
1	96337	95884	95346	92809	89336	84623	81583	96337	0
2	99503	99210	98792	96277	96467	91044	85425	99503	0
3	102132	102177	102228	101822	101310	99290	92768	102228	2
4	103392	104410	104957	105352	104950	104432	102004	105352	3
5	102079	104784	106766	107829	108566	108161	107631	108566	4
6	99247	102411	106218	109189	110769	111862	111450	111862	5
7	95958	99249	102751	107689	111671	113782	115231	115231	6
8	0	95958	99252	103097	109176	114171	116805	116805	6

**VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 2**

**ETAPA 2**

**INGRESO 1 (CHICO)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	101693	101253	100476	97163	92258	89224	87612	101693	0
1	104799	104437	103994	103118	98962	92995	89442	104799	0
2	107827	107683	107356	106939	105987	100933	93810	107827	0
3	110447	110591	110707	110395	109985	108937	102948	110707	2
4	111386	112719	113466	113939	113533	113121	111964	113839	3
5	109665	112478	115064	116430	117061	116754	116334	117061	4
6	106929	109770	113603	117479	119474	120366	120052	120366	5
7	103643	106930	109878	114756	119952	122569	123744	123744	6
8	0	103643	106930	109987	115922	122442	125713	125713	6

**INGRESO 2 (MEDIANO)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	105569	105138	104584	103028	99026	94247	89065	105569	0
1	108760	108355	107917	107357	105504	100668	95055	108760	0
2	111460	111703	111317	110911	110362	109214	102482	111703	1
3	113039	113613	114765	114399	114006	113452	110983	114765	2
4	112676	114324	115851	117936	117580	117191	116620	117936	3
5	110674	113028	115652	118159	121198	120844	120452	121198	4
6	107981	110688	113390	117019	120529	124541	124185	124541	5
7	104694	107981	110702	113762	118419	122953	127957	127957	6
8	0	104694	107981	110717	114138	119628	125385	125385	6

**INGRESO 3 (GRANDE)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	109363	107884	107367	106477	104087	99548	90122	109363	0
1	111649	111178	110705	110186	109203	106356	101057	111649	0
2	113857	114399	114169	113730	113239	112194	108861	114399	1
3	114442	115266	117686	117279	116857	116376	115229	117686	2
4	113422	115050	116730	120883	120498	120074	119592	120883	3
5	111354	113524	115679	118240	124170	123789	123367	124170	4
6	108666	111357	113630	116325	119789	127539	127150	127539	5
7	105378	108666	111359	113739	116988	121374	120981	120981	6
8	0	105378	108667	111362	113849	117654	122665	122665	6

**VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 2**

**ETAPA 1**

**INGRESO 1 (CHICO)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	111801	111205	108930	104434	102889	102256	101853	111801	0
1	114847	114464	113783	109388	104804	102970	102273	114847	0
2	117980	117661	117302	116560	110865	105210	103060	117980	0
3	120953	120899	120613	120260	119436	112384	105624	120953	0
4	122790	123908	123937	123675	123317	122398	113944	123937	2
5	121813	125500	126965	127072	126826	126458	125435	127072	3
6	117977	123392	128292	130111	130293	130060	129675	130293	4
7	114544	118964	125015	131157	133334	133590	133567	133590	5
8	0	114544	118152	126652	134054	136580	136897	136897	6

**INGRESO 2 (MEDIANO)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	114635	114108	112141	107718	104933	103780	103179	114635	0
1	117769	117329	116782	114153	108505	105145	103870	117769	0
2	120823	120610	120197	119661	116341	109369	105360	120823	0
3	123340	123730	123589	123186	122641	118592	110250	123730	1
4	123588	126169	126753	126677	126274	125709	120902	126753	2
5	129811	125827	129093	129876	129855	129445	128855	129876	3
6	117440	121620	129135	132192	132680	133115	132674	133115	5
7	114139	117445	122450	130503	135185	136361	136449	136449	6
8	0	114139	117458	123293	132696	136390	136652	136652	6

**INGRESO 3 (GRANDE)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	120242	119683	118813	116003	111889	109554	105294	120242	0
1	123520	122997	122437	121427	117921	112947	109041	123520	0
2	124846	126415	125927	125354	124263	120021	114115	126415	1
3	124810	127325	129449	128977	128453	127189	122167	129449	2
4	122255	126930	129902	132591	132126	131601	130172	132591	3
5	119194	123226	126815	132560	135824	135359	134027	135824	4
6	116368	119353	124227	130657	135298	139139	138669	139139	5
7	113081	116368	119516	125253	132949	138081	142527	142527	6
8	0	113081	116369	119662	126291	135055	140862	140862	6

**VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 3 ETAPA 6**

**INGRESO 1 (CHICO)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	126851	126413	125709	122447	117347	114356	112954	126851	0
1	129977	129594	129153	128368	124260	118042	114537	129977	0
2	132869	132861	132513	132097	131256	125247	118811	132869	0
3	134899	135672	135684	135551	135144	134225	128278	135884	2
4	135861	137216	138587	139016	138689	138279	137271	139016	3
5	134103	136934	139610	141593	142238	141910	141491	142238	4
6	131377	134185	138039	142074	144679	145542	145208	145542	5
7	128090	131377	134270	139173	144598	147837	148519	148919	6
8	0	128090	131378	134357	140319	147139	151005	151005	6

**INGRESO 2 (MEDIANO)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	127901	127439	126569	123593	119442	116267	113597	127901	0
1	131050	130651	130187	129163	125429	120392	116672	131050	0
2	133530	133940	133576	133138	131979	127440	121441	133940	1
3	135145	136093	136969	136621	136191	134875	129493	136969	2
4	135914	137182	138759	140107	139765	139333	137845	140107	3
5	134289	136974	139288	141509	143335	142992	142552	143335	4
6	131522	134464	138066	141455	144332	146645	146296	146645	5
7	128236	131523	134643	139186	143675	147222	150028	150028	6
8	0	128236	131523	134924	140319	145910	150119	150119	6

**INGRESO 3 (GRANDE)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	130550	130077	129459	127419	123131	118913	114703	130550	0
1	133755	133323	132852	132194	128698	124501	119542	133755	0
2	135854	136667	136273	135831	135161	132194	128016	136667	1
3	136756	138191	139717	139342	138912	138210	134743	139717	2
4	136791	138337	140621	142877	142510	142082	141337	142877	3
5	134869	137357	139971	143126	146126	149761	149329	146126	4
6	132163	134908	137941	141652	145698	149458	149090	149458	5
7	128876	132163	134949	138549	143373	148330	152863	152863	6
8	0	128876	132164	134990	139146	145107	150970	150970	6



VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 3 ETAPA 5

INGRESO 1 (CHICO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	133964	133211	126026	127135	126825	126526	126227	133964	0
1	136985	136580	135525	128208	127138	126826	126526	136985	0
2	140119	139759	139370	138021	128496	127141	126826	140119	0
3	143344	143021	142671	142281	140608	128610	127145	143344	0
4	146644	146359	146043	145692	145291	143273	128819	146644	0
5	149335	149755	149478	149162	148803	148385	146007	149755	1
6	143832	152319	152963	152689	152367	151996	151555	152963	2
7	139957	144188	155384	156254	155979	155649	155263	156254	3
8	0	139957	144550	158496	159581	159294	158942	159581	4

INGRESO 2 (MEDIANO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	134944	134433	129937	127714	127401	127102	126803	134944	0
1	137987	137571	136964	129350	127718	127401	127102	137987	0
2	141138	140769	140371	139694	129691	127722	127401	141138	0
3	144380	144048	143690	143293	142523	130041	127726	144380	0
4	147692	147401	147077	146719	146314	145437	130401	147692	0
5	149894	150808	150527	150204	149839	149418	148427	150808	1
6	143336	152723	154020	153744	153416	153041	152598	154020	2
7	139903	143425	155629	157317	157041	156706	156316	157317	3
8	0	139903	143516	158578	160649	160362	160006	160649	4

INGRESO 3 (GRANDE)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	135174	134642	129906	127859	127518	127218	126919	135174	0
1	138221	137803	137161	129923	127870	127518	127218	138221	0
2	141377	141006	140606	139878	130378	127881	127518	141377	0
3	144622	144289	143929	143550	142693	130846	127893	144622	0
4	147917	147645	147320	146960	146553	145593	131326	147917	0
5	149735	151027	150772	150448	150082	149659	148568	151027	1
6	143397	152437	154233	153991	153662	153286	152842	154233	2
7	139932	143505	155213	157522	157299	156954	156563	157522	3
8	0	139932	143615	158030	160848	160612	160256	160848	4

VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 3 ETAPA 4

INGRESO 1 (CHICO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	141337	140666	133919	133488	133154	132854	132555	141337	0
1	144584	143975	143273	136585	133496	133154	132854	144584	0
2	147838	147375	146787	145085	137309	133506	133154	147838	0
3	150976	150757	150306	149720	148998	138054	133516	150976	0
4	154197	154005	153794	153345	152753	152000	139819	154197	0
5	156296	157314	157138	156930	156475	155868	155079	157314	1
6	152536	158698	160528	160363	160151	159687	159060	160528	2
7	149242	152544	161167	163825	163668	163449	162971	163825	3
8	0	149242	152551	163673	167158	166997	166757	167158	4

INGRESO 2 (MEDIANO)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	142790	142117	139002	134096	133517	133214	132915	142790	0
1	146056	145451	144759	140486	134163	133517	133214	146056	0
2	149256	148868	148286	147605	142101	134237	133318	149256	0
3	152424	152191	151818	151242	150553	143762	134313	152424	0
4	155613	155468	155246	154877	154297	153590	145468	155613	0
5	156236	158676	158616	158399	158026	157435	156703	158676	1
6	152909	157650	161832	161856	161637	161257	160650	161856	3
7	149623	152909	159103	165070	165176	164553	164561	165176	4
8	0	149623	152909	160577	169743	169520	168278	168520	5

INGRESO 3 (GRANDE)

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	144460	143787	142137	135970	133929	133510	133206	144460	0
1	147720	147149	146463	144359	136408	133953	133511	147720	0
2	150980	150555	150012	149343	146777	136898	133990	150980	0
3	154075	153836	153529	152995	152324	149266	137379	154075	0
4	156905	157112	156912	156612	156078	155396	151820	157112	1
5	156139	159549	160252	160085	159786	159244	158544	160252	2
6	153210	156673	162273	163484	163344	163041	162487	163484	3
7	149924	153210	157222	165067	166794	166889	166569	166794	4
8	0	149924	153211	157778	167891	170128	170026	170128	5

**VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 3 ETAPA 3**

**INGRESO 1 (CHICO)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	150514	149760	145305	142753	141309	140710	140333	150514	0
1	153670	153174	152325	147600	143088	141379	140732	153670	0
2	156844	156489	156009	155090	149008	143455	141456	156844	0
3	159969	159764	159439	158964	157952	150458	143829	159969	0
4	162948	162935	162803	162498	162019	160901	151945	162935	1
5	163769	165597	166003	165940	165647	165156	163925	166003	2
6	160558	165423	168430	169160	169161	168878	168371	169161	4
7	157148	160656	167122	171337	172394	172460	172183	172460	5
9	0	157148	160756	168946	174275	175632	175768	175768	6

**INGRESO 2 (MEDIANO)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	153460	152873	150952	146701	143566	142047	141163	153460	0
1	156634	156163	155558	153068	147676	143894	142143	156634	0
2	159793	159483	159041	158448	155369	148746	144255	159793	0
3	162767	162657	162471	162040	161438	157736	149839	162767	0
4	164860	165473	165636	165567	165137	164518	160164	165636	2
5	164213	166886	168270	168710	168754	168318	167674	168754	4
6	161234	164907	168974	171148	171866	172022	171575	172022	5
7	157936	161243	165620	171116	174097	175098	175364	175364	6
8	0	157936	161253	166343	173281	177066	178338	178338	6

**INGRESO 3 (GRANDE)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	155634	153104	153846	150300	146383	143775	141695	155634	0
1	158822	158368	157831	156294	151841	147108	144048	158822	0
2	161988	161598	161277	160762	159952	155520	147910	161988	0
3	164617	164661	164713	164306	163795	161685	155253	164713	2
4	165877	166895	167441	167837	167435	166917	164489	167837	3
5	164564	167269	169250	170309	171051	170646	170116	171051	4
6	161732	164895	169703	171674	173253	174347	173934	174347	5
7	158443	161734	165236	170174	174156	176267	177716	177716	6
8	0	158443	161737	165582	171661	176656	179290	179290	6

**VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 3 ETAPA 2**

**INGRESO 1 (CHICO)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	164100	163737	162963	159650	154744	151711	150099	164100	0
1	167200	166720	166400	165403	161400	155402	151920	167200	0
2	170310	170170	169042	169423	168474	167420	166297	170310	0
3	172934	173070	173193	172001	172472	171420	169433	173193	2
4	175073	175204	175932	176326	176019	175600	174451	176326	3
5	172152	174964	177351	178917	179540	179201	178021	179540	4
6	169416	172257	176009	179965	181960	182053	182339	182053	5
7	166130	169416	172344	177243	182439	185075	186230	186230	6
8	0	166130	169417	172474	178009	184929	188200	188200	6

**INGRESO 2 (MEDIANO)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	160061	167620	167076	163320	161910	156739	151937	160061	0
1	171272	170047	170409	169049	167996	163160	157367	171272	0
2	173932	174195	173009	173403	172034	170706	164974	174195	1
3	175531	176105	177257	176091	176490	175944	173473	177257	2
4	175168	176816	178343	180429	180072	179683	179112	180429	3
5	173166	175520	178144	180631	183690	183336	182944	183690	4
6	170473	173100	175002	179511	183021	187033	186677	187033	5
7	167106	170473	173194	176256	180911	185463	190449	190449	6
8	0	167106	170473	173209	176630	182320	187077	187077	6

**INGRESO 3 (GRANDE)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	170060	170300	169064	168974	166504	162045	152619	170060	0
1	174146	173675	173201	172602	171700	168052	163594	174146	0
2	176334	177095	176663	176227	175736	174600	171357	177095	1
3	176939	177762	180103	179775	179354	178072	177725	180103	2
4	175910	177547	179227	183300	182905	182571	182000	183300	3
5	173851	176021	178175	180736	180667	180277	180064	180667	4
6	171162	173053	176127	179022	182206	190036	189647	190036	5
7	167975	171163	173056	176236	179404	185071	193470	193470	6
8	0	167975	171164	173950	176345	180151	185461	185461	6

**VALOR ESPERADO ACUMULADO DE LA FUNCION OBJETIVO  
CICLO 3**

**ETAPA 1**

**INGRESO 1 (CHICO)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	174200	173492	170317	166922	163377	160743	164341	174200	0
1	177334	176951	176270	171075	167291	165487	164760	177334	0
2	100467	100140	179709	179047	173332	167677	163047	100467	0
3	103440	103346	103101	102767	101923	170872	160111	103440	0
4	105277	106395	106420	106162	103005	104005	176431	106420	2
5	104300	107907	109482	109360	109313	100940	107922	109360	3
6	100464	103000	190700	192390	192700	192347	192162	192700	4
7	177032	100251	107302	193443	193021	196077	193054	196077	5
8	0	177032	100639	109149	196341	199640	199304	199304	6

**INGRESO 2 (MEDIANO)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	177124	176997	176630	170207	167422	166249	163660	177124	0
1	100250	179010	179272	176643	170990	167634	166319	100250	0
2	103312	103099	102406	102130	170030	171057	167049	103312	0
3	103030	106219	106070	105675	105130	101001	172739	106219	1
4	106077	100650	109244	109166	100763	100190	103391	109244	2
5	103300	100316	191502	192365	192344	191935	191344	192365	3
6	179929	104109	190624	194391	193370	193605	193103	193605	3
7	176620	179930	104939	192992	197674	190051	190930	190930	6
8	0	176620	179947	105702	193305	200779	202141	202141	6

**INGRESO 3 (GRANDE)**

NIVEL	EXTRACCION							MAXIMO	DECISION
	0	1	2	3	4	5	6		
0	102735	102176	101306	170996	174302	171047	167707	102735	0
1	106013	105490	104930	103920	100414	175440	171534	106013	0
2	107339	100900	100420	107007	106736	102514	176690	100900	1
3	107403	109010	191942	191479	190946	109673	104660	191942	2
4	104740	109323	192395	193004	196620	190094	192665	193004	3
5	101607	105719	191390	195053	190317	197052	197320	190317	4
6	170061	101046	106720	193330	197702	201632	201162	201632	5
7	175574	170061	102009	107746	195442	200574	205020	205020	6
8	0	175574	170662	102175	100704	197540	203375	203375	6