UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

ANALISIS LINEAL DE ESTRUCTURAS BIDIMENSIONALES.

T E S I S

Que para obtener el título de:

I N G E N I E R O   C I V I L

P r e s e n t a :

José Luis Parada Fernández

México, D. F.   1984

*** INDICE ***

I.-

*** INTRODUCCION ***

El objetivo primario de ésta tesis es el de realizar el análisis estructural de cualquier estructura bidimensional con una mayor exactitud y velocidad por medio del método de Rigideces. Como un objetivo secundario, el de una ayuda de estudio para los alumnos que cursan la asignatura Introducción de las Computadoras al Análisis Estructural, incluída en el programa vigente de la carrera de Ingeniería Civil, que se imparte en la Universidad Nacional Autónoma de México.

El análisis estructural es una rama de las ciencias físicas que tiene que ver con el comportamiento de las estructuras. Las estructuras se definen como los sistemas que soportan cargas, la palabra comportamiento se entiende como su tendencia a deformarse dependiendo de las condiciones a que estén sometidas. Los resultados del análisis se usan entonces para determinar la forma de las estructuras y verificar si son adecuadas para soportar las cargas para las cuales se han diseñado.

Basicamente hay dos tipos diferentes de métodos matriciales para analizar estructuras, llamados, método de Rigideces y metodo de Flexibilidades, este último no se incluye en esta tesis. Cada método involucra la solución eventual de ecuaciones simultáneas en las cuales los desplazamientos de los nodos son las incógnitas en el método de Rigideces y las fuerzas en los elementos en el método de Flexibilidades. El método de Flexibilidades está asociado con el grado de indeterminación de la estructura y requiere resolver tantas ecuaciones simultáneas como número de redundantes. En el método de Rigideces, lo que importa es el grado de libertad del sistema.

Contrariamente a lo que sucede en el método de Flexibilidades, el método de Rigideces es favorable en una estructura indeterminada a medida que se hace menor el grado de libertad.

El primer paso del método de las rigideces es el de restringir todos los desplazamientos en junta desconocidos. Esto nos conduce a vigas doblemente empotradas, por lo cual el estudio parte del análisis de vigas doblemente empotradas.

En éste método se utilizan acciones producidas por desplazamientos unitarios, éstos pueden ser traslaciones o rotaciones unitarias, y las acciones pueden ser fuerzas o momentos.

Las acciones causadas por desplazamientos unitarios se les conoce como "rigideces".

Para el estudio de ésta tesis se requiere de conocimientos de Estática, Estructuras Isostáticas y de Análisis Estructural, las cuales son asignaturas vigentes en el programa de la carrera de Ingeniería Civil, que se imparte en la Universidad Nacional Autónoma de México.

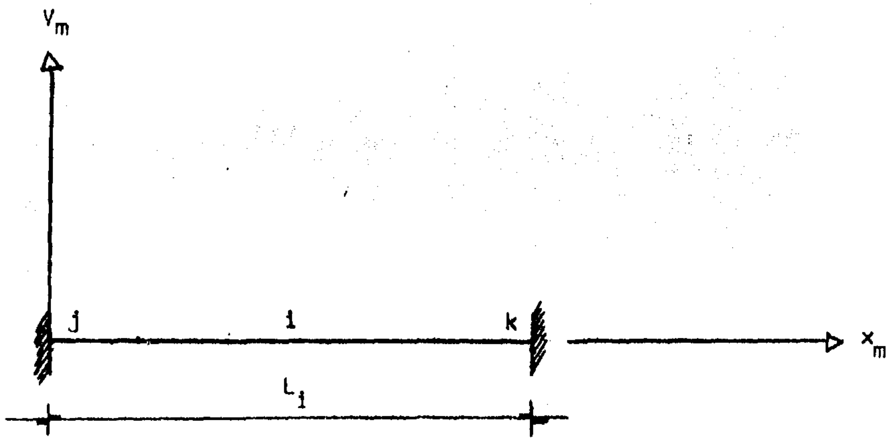
II.-

*** MATRIZ ELEMENTAL DE RIGIDECES ***

(Sin considerar deformación axial)

Por efectos de análisis, de aquí en adelante se consideran los momentos positivos en dirección contraria a las manecillas de reloj, fuerzas y desplazamientos son positivos de izquierda a derecha o de abajo hacia arriba.

Se considera una barra "i", doblemente empotrada, con un Momento de Inercia constante a lo largo de su eje longitudinal. Al empotramiento de la derecha se le coloca el subíndice "k" y al de la izquierda el subíndice "j". La barra se encuentra situada en ejes ortogonales (x_m-y_m), en los cuales, la abscisa (x_m) coincide con el eje longitudinal de la barra.

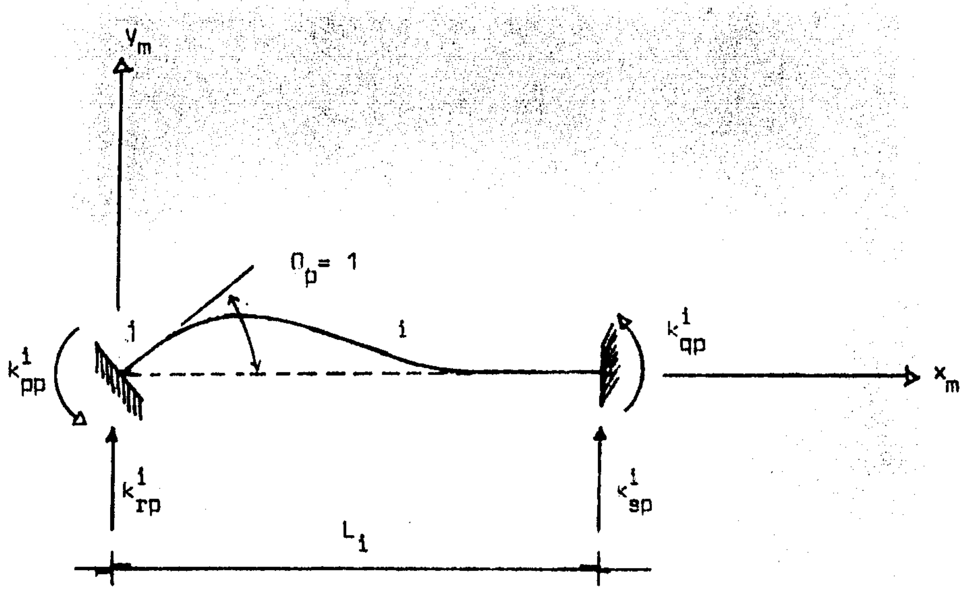


(figura 1)

Si se desprecian las deformaciones axiales en la barra, hay solo dos posibles desplazamientos en cada empotramiento, que son: la traslación y la rotación.

Los desplazamientos de rotación y traslación en el punto "j", son definidos como "Op" y "Δr" respectivamente y los correspondientes al punto "k" son definidos como "Oq" y "Δs".

Si se impone una rotación unitaria y positiva en el punto "j" (Op = 1), para mantener el equilibrio en la barra, aparecen rigideces en los puntos "j" y "k", figura 2:



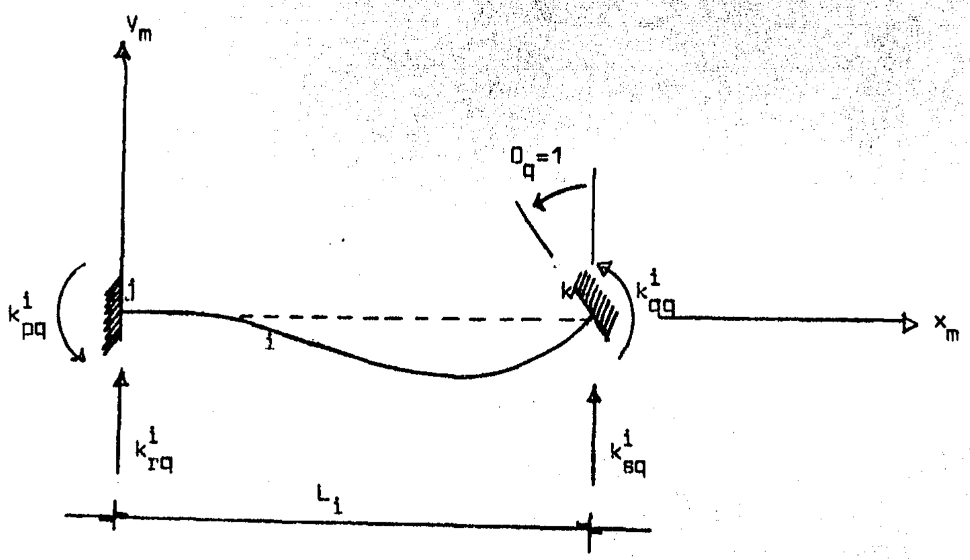
(figura 2)

Las rigideces que aparecen en el punto "j", se denotan como k^{i}_{pp} y k^{i}_{rp}, y las rigideces que aparecen en el punto "k", se denotan como k^{i}_{qp} y k^{i}_{sp}, como se puede observar, para identificar a las rigideces se utilizan subíndices, los cuales "i" es el correspondiente a la barra, el subíndice de abajo a la izquierda es el correspondiente al tipo de rigidez y el de abajo a la derecha es el correspondiente al desplazamiento que se impone.

Por Ejemplo:

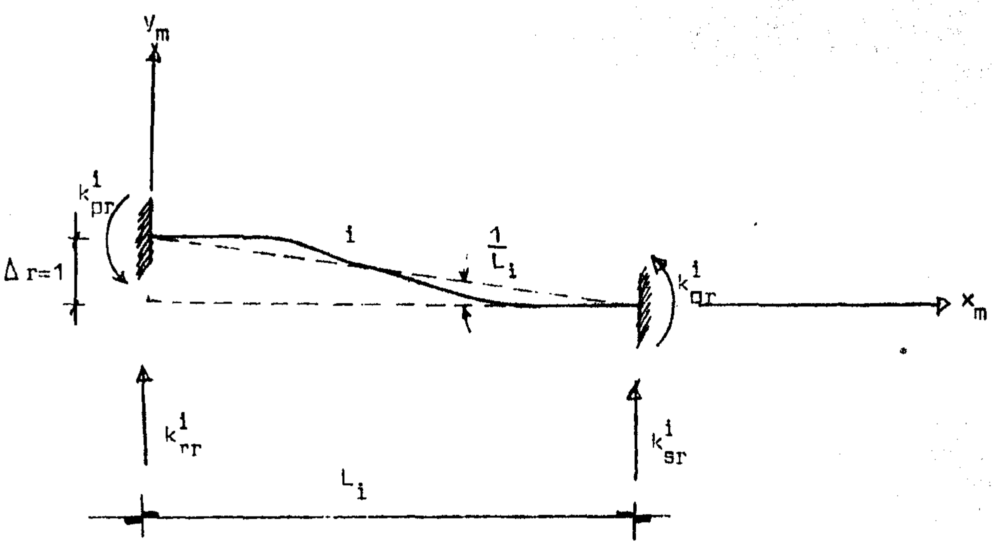
k^{i}_{qp} ; es la rigidez del elemento "i", que corresponde a un momento "q" en el punto "k", debido a un desplazamiento "p" (giro).

De la misma manera, ahora si se impone un giro unitario y positivo en el punto "k", para mantener el equilibrio de la barra "i", aparecen rigideces en los puntos "j" y "k". (figura 3).



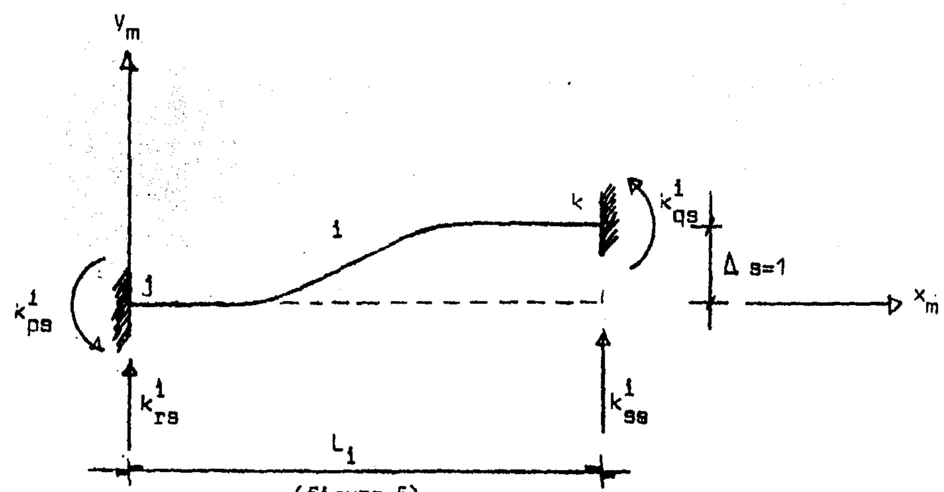
(figura 3)

Ahora, si se impone una traslación normal al eje "x", en el punto "j" con $\Delta r = 1$, se tiene:



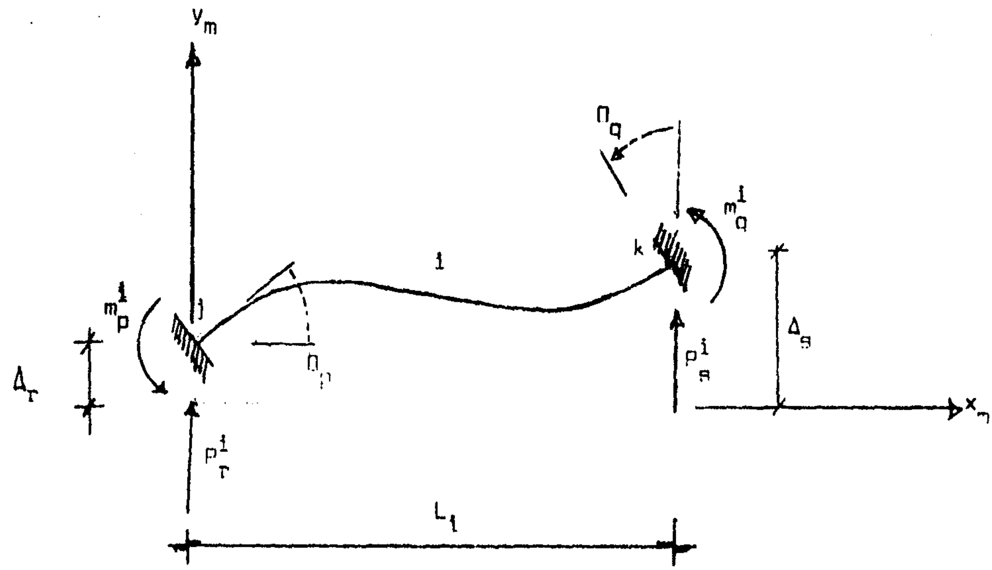
(figura 4)

Y finalmente, si se impone una traslación unitaria y positiva en el punto "k" ($\Delta s = 1$), se tiene:



(figura 5)

Ahora, si se imponen los desplazamientos Op, Oq, Δr, y Δs arbitrariamente, se tiene:



(figura 6)

Para mantener el equilibrio de la barra de la figura anterior, se tiene:

$$
\begin{aligned}
m_p^i &= k_{pp}^i\,\theta_p + k_{pq}^i\,\theta_q + k_{pr}^i\,\Delta r + k_{ps}^i\,\Delta s \\
m_q^i &= k_{qp}^i\,\theta_p + k_{qq}^i\,\theta_q + k_{qr}^i\,\Delta r + k_{qs}^i\,\Delta s \\
p_r^i &= k_{rp}^i\,\theta_p + k_{rq}^i\,\theta_q + k_{rr}^i\,\Delta r + k_{rs}^i\,\Delta s \\
p_s^i &= k_{sp}^i\,\theta_p + k_{sq}^i\,\theta_q + k_{sr}^i\,\Delta r + k_{ss}^i\,\Delta s
\end{aligned}
\qquad \text{ECUACIONES } 1
$$

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar matricialmente como sigue:

$$[m]^i = [k]^i \cdot [d]^i$$

$$\text{donde } m_i = \begin{bmatrix} m_p \\ m_q \\ p_r \\ p_s \end{bmatrix} \quad ; \qquad d\,i = \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \Delta r \\ \Delta s \end{bmatrix}$$

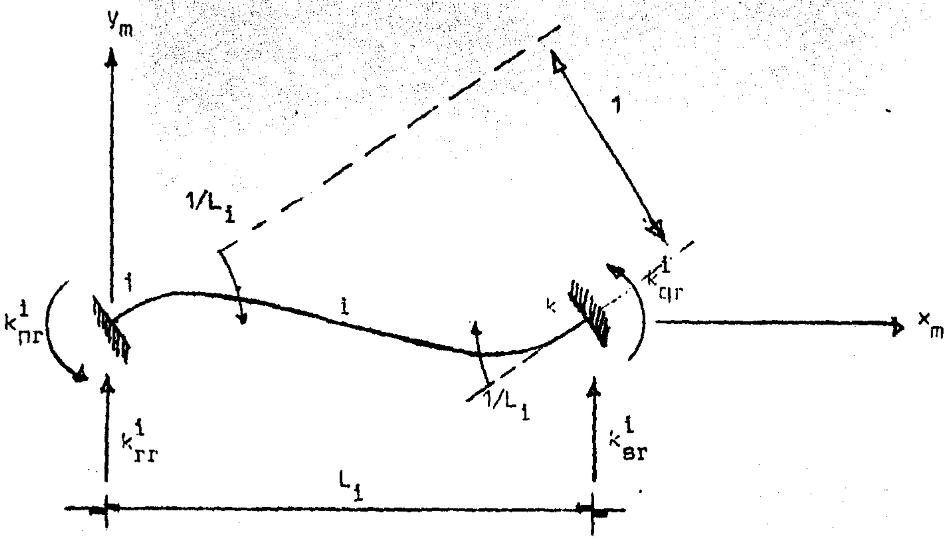
$$
y\ k\,i = \begin{array}{c c}
\begin{bmatrix}
k_{pp} & k_{pq} & k_{pr} & k_{ps} \\
k_{qp} & k_{qq} & k_{qr} & k_{qs} \\
k_{rp} & k_{rq} & k_{rr} & k_{rs} \\
k_{sp} & k_{sq} & k_{sr} & k_{ss}
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ s \end{array} \\
\begin{array}{cccc} p & \quad q & \quad r & \quad s \end{array} &
\end{array}
\qquad \text{MATRIZ "A"}
$$

Las rigideces k_{rp}^i , k_{sp}^i , k_{rq}^i y k_{sq}^i se pueden obtener de la siguiente manera:

$$k_{rp}^i = \frac{k_{pp}^i + k_{qp}^i}{L_i} \quad ; \qquad k_{sp}^i = -\ \frac{k_{pp}^i + k_{qp}^i}{L_i}$$

$$k_{rq}^i = \frac{k_{pq}^i + k_{qq}^i}{L_i} \quad ; \qquad k_{sq}^i = -\ \frac{k_{pq}^i + k_{qq}^i}{L_i}$$

Tomando en cuenta la figura 4 y si se consideran las siguientes deformaciones como se muestra en la figura siguiente:



(figura 7)

De la figura anterior se obtiene:

$$k^{i}_{pr} = k^{i}_{pp}\left(\frac{1}{Li}\right) + k^{i}_{pq}\left(\frac{1}{Li}\right) = \frac{k^{i}_{pp} + k^{i}_{pq}}{Li}$$

$$k^{i}_{qr} = k^{i}_{qp}\left(\frac{1}{Li}\right) + k^{i}_{qq}\left(\frac{1}{Li}\right) = \frac{k^{i}_{qp} + k^{i}_{qq}}{Li}$$

Ahora si se considera el equilibrio estático de la barra de la figura 4 y su relación con la figura 7; se puede obtener k^{i}_{rr} y k^{i}_{sr}. Por lo tanto:

$$k^{i}_{rr} = \frac{k^{i}_{pp} + k^{i}_{pq} + k^{i}_{qp} + k^{i}_{qq}}{Li^{2}}$$

$$k^{i}_{sr} = -\frac{k^{i}_{pp} + k^{i}_{pq} + k^{i}_{qp} + k^{i}_{qq}}{Li^{2}}$$

Ahora, si se procede de la misma forma pero refiriendose al punto "k" y no al punto "j", se obtienen:

$$k^{i}_{ps} = -\frac{k^{i}_{pp} + k^{i}_{pq}}{L_i}$$

$$k^{i}_{qs} = -\frac{k^{i}_{qp} + k^{i}_{qq}}{L_i}$$

$$k^{i}_{rs} = -\frac{k^{i}_{pp} + k^{i}_{pq} + k^{i}_{qp} + k^{i}_{qq}}{L_i^2}$$

$$k^{i}_{ss} = -\frac{k^{i}_{pp} + k^{i}_{pq} + k^{i}_{qp} + k^{i}_{qq}}{L_i^2}$$

Sustituyendo los valores anteriores en la matriz "A", se obtiene:

$$[k]_i = \begin{bmatrix} k_{pp} & k_{pq} & \frac{k_{pp}+k_{pq}}{L_i} & -\left(\frac{k_{pp}+k_{pq}}{L_i}\right) \\ k_{qp} & k_{qq} & \frac{k_{qp}+k_{qq}}{L_i} & -\left(\frac{k_{qp}+k_{qq}}{L_i}\right) \\ \left(\frac{k_{pp}+k_{qp}}{L_i}\right) & \left(\frac{k_{pq}+k_{qq}}{L_i}\right) & \left(\frac{k_{pp}+k_{pq}+k_{qp}+k_{qq}}{L_i^2}\right) & -\left(\frac{k_{pp}+k_{pq}+k_{qp}+k_{qq}}{L_i^2}\right) \\ -\left(\frac{k_{pp}+k_{qp}}{L_i}\right) & -\left(\frac{k_{pq}+k_{qq}}{L_i}\right) & \left(\frac{k_{pp}+k_{pq}+k_{qp}+k_{qq}}{L_i^2}\right) & \left(\frac{k_{pp}+k_{pq}+k_{qp}+k_{qq}}{L_i^2}\right) \end{bmatrix}$$

Donde $k\ pp = 4\,\dfrac{EI}{L}$

$k\ pq = 2\,\dfrac{EI}{L}$

$k\ qp = 2\,\dfrac{EI}{L}$

$k\ qq = 4\,\dfrac{EI}{L}$

Por lo tanto la Matriz Elemental de Rigideces de una barra es:

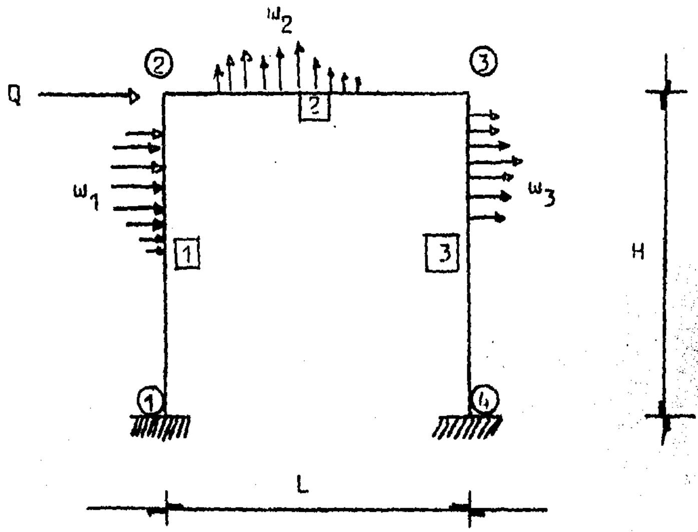
$$\left[k\right]_i = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \quad p \quad & \quad q \quad & \quad r \quad & \quad s \quad \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 4\,\dfrac{EI}{L} & 2\,\dfrac{EI}{L} & 6\,\dfrac{EI}{L^2} & -6\,\dfrac{EI}{L^2} \\[2ex] 2\,\dfrac{EI}{L} & 4\,\dfrac{EI}{L} & 6\,\dfrac{EI}{L^2} & -6\,\dfrac{EI}{L^2} \\[2ex] 6\,\dfrac{EI}{L^2} & 6\,\dfrac{EI}{L^2} & 12\,\dfrac{EI}{L^3} & -12\,\dfrac{EI}{L^3} \\[2ex] -6\,\dfrac{EI}{L^2} & -6\,\dfrac{EI}{L^2} & -12\,\dfrac{EI}{L^3} & 12\,\dfrac{EI}{L^3} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p \\[4ex] q \\[4ex] r \\[4ex] s \end{array} \end{array}$$

III.-

*** MATRIZ GLOBAL DE RIGIDECES ***

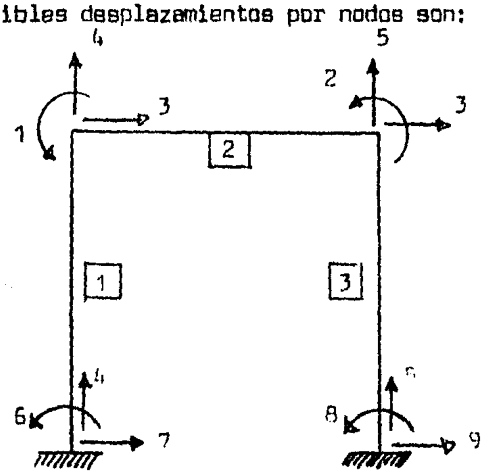
(Sin considerar deformación axial)

Se considera el siguiente sistema estructural:



Los miembros del marco anterior, 1 , 2 , 3 , tienen un Momento de Inercia constante a lo largo de su eje longitudinal, al igual que su Módulo de Elasticidad. El marco tiene una altura H y una longitud L. Se aplican cargas generales.

Los posibles desplazamientos por nodos son:



El marco es estáticamente indeterminado en un grado de 3, ya que los desplazamientos θ 1, θ 2 y Δ3, no se encuentran restingidos y los desplazamientos Δ4, Δ5, θ 6, Δ7 y θ 8 son restringidos por medio de las condiciones de apoyo de la estructura.

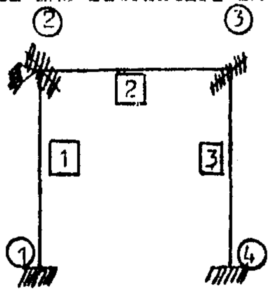
Para poder resolver la Estructura anterior, se procede de la siguiente manera:

1º.- En el nudo 2, se restringe su rotación θ 1.

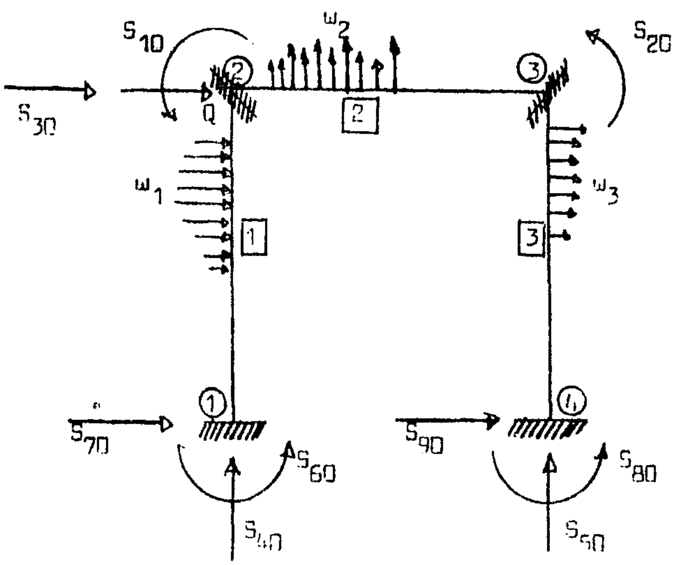
2º.- En el nudo 2, se restringe su traslación Δ3.

3º.- En el nudo 3, se restringe su rotación θ 2.

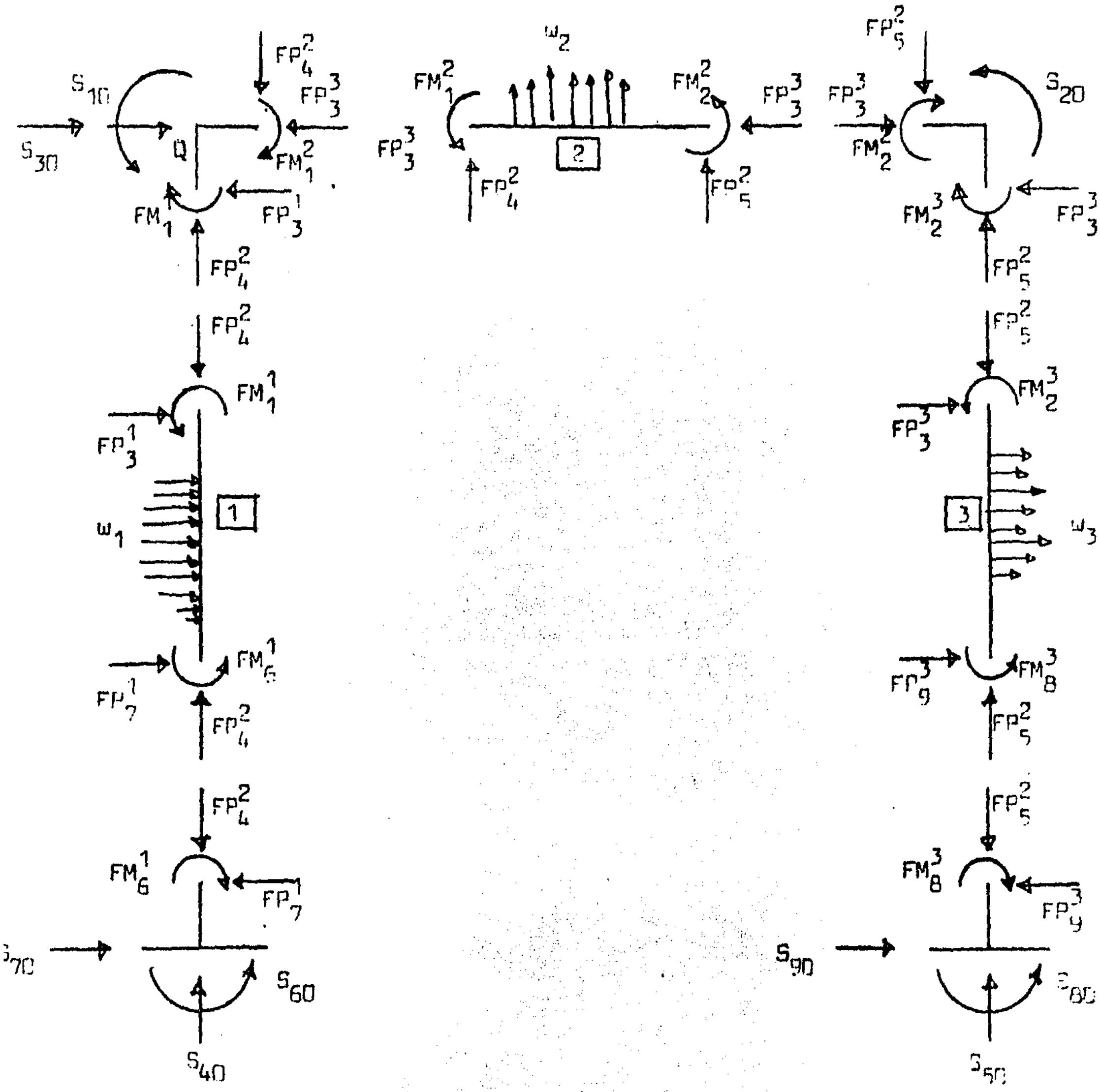
Por lo tanto resulta una Estructura en las siguientes condiciones:



Al considerar las condiciones de carga del sistema estructural, se obtienen las siguientes reacciones:



Al hacer el equilibrio del sistema estructural, se obtiene:



Para poder identificar a las reacciones obtenidas anteriormente, los momentos (FM_m^i), y los cortantes (FP_m^i), donde "i" se refiere al miembro, y "m" se refiere al desplazamiento.

Al realizar el equilibrio en los nodos se obtiene:

$S_{10} = FM_1^1 + FM_1^2$

$S_{20} = FM_2^2 + FM_2^3$

$S_{30} = FP_3^1 + FP_3^3 - Q$

$S_{40} = FP_4^2$

$S_{50} = FP_5^2$

$S_{60} = FM_6^1$

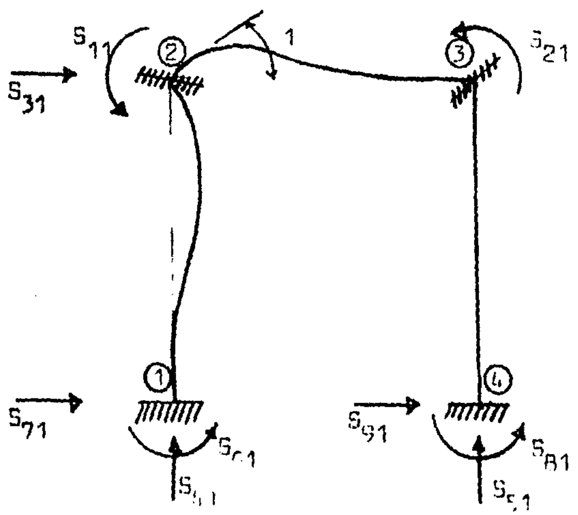
$S_{70} = FP_7^1$

$S_{80} = FM_8^3$

$S_{90} = FP_9^3$

Ahora si se aplican desplazamientos unitarios en cada uno de los nodos se obtiene:

1^o.- $D_1 = 1$ en el nodo ②:



$S_{11} = k_{11}^{1} + k_{11}^{2}$

$S_{21} = k_{21}^{2}$

$S_{31} = k_{31}^{1}$

$S_{41} = k_{41}^{2}$

$S_{51} = k_{51}^{2}$

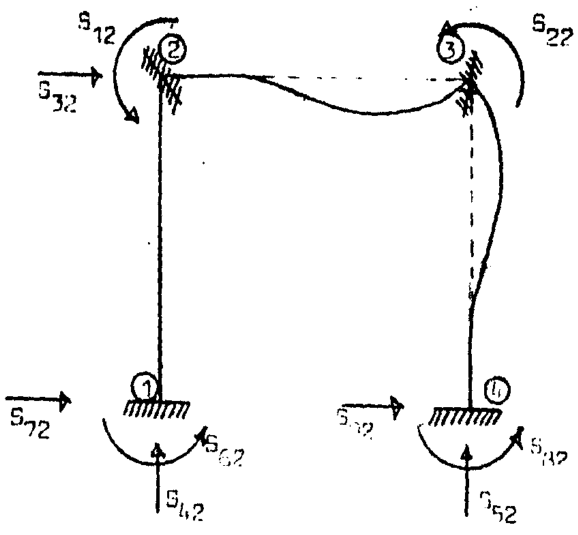
$S_{61} = k_{61}^{1}$

$S_{71} = k_{71}^{1}$

$S_{81} = 0$

$S_{91} = 0$

2^{o}.- $\theta_2 = 1$ en el nodo ③;



$S_{12} = k_{12}^{2}$

$S_{22} = k_{22}^{2} + k_{22}^{3}$

$S_{32} = k_{32}^{3}$

$S_{42} = k_{42}^{2}$

$S_{52} = k_{52}^{2}$

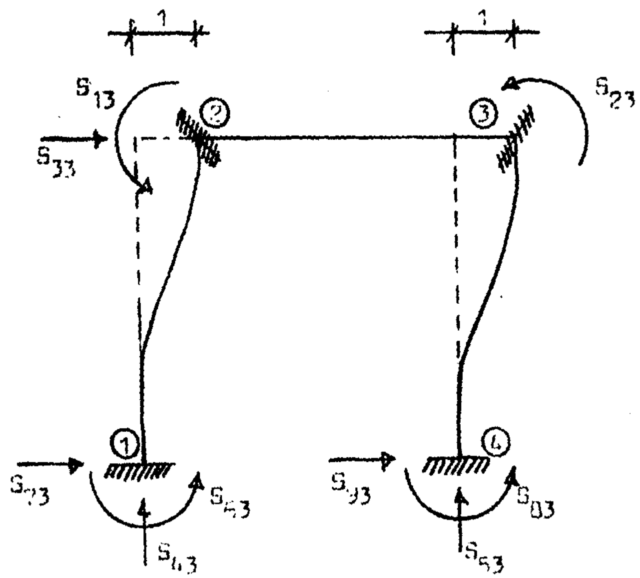
$S_{62} = 0$

$S_{72} = 0$

$S_{82} = k_{82}^{3}$

$S_{92} = k_{92}^{3}$

3º.- $\Delta_3 = 1$, en dirección del desplazamiento 3;



$S_{13}= k^{1}_{13}$

$S_{23}= k^{3}_{23}$

$S_{33}= k^{1}_{33} + k^{3}_{33}$

$S_{43}= 0$

$S_{53}= 0$

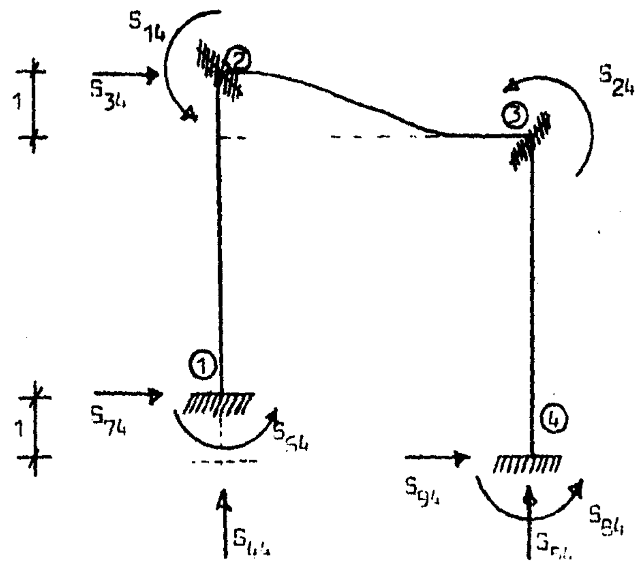
$S_{63}= k^{1}_{63}$

$S_{73}= k^{1}_{73}$

$S_{83}= k^{3}_{83}$

$S_{93}= k^{3}_{93}$

4^{o}.- $\Delta_4 = 1$, en dirección del desplazamiento 4;



$S_{14} = k_{14}^{2}$

$S_{24} = k_{24}^{2}$

$S_{34} = 0$

$S_{44} = k_{44}^{2}$

$S_{54} = k_{54}^{2}$

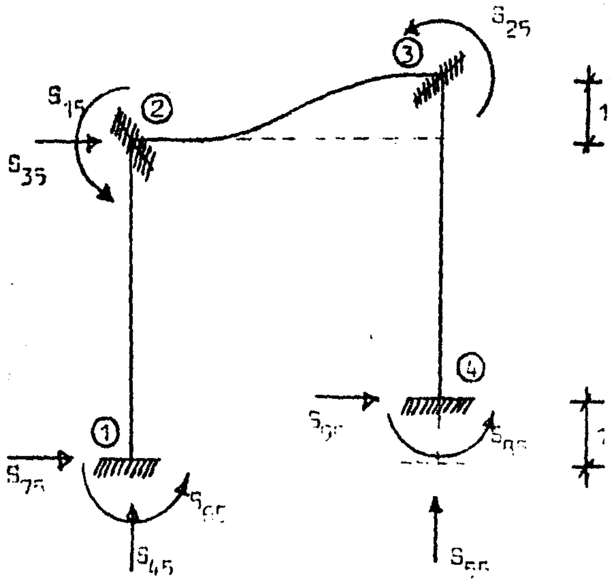
$S_{64} = 0$

$S_{74} = 0$

$S_{84} = 0$

$S_{94} = 0$

5º.- $\Delta_5 = 1$, en dirección del desplazamiento 5;



$S_{15} = k_{15}^{2}$

$S_{25} = k_{25}^{2}$

$S_{35} = 0$

$S_{45} = k_{45}^{2}$

$S_{55} = k_{55}^{2}$

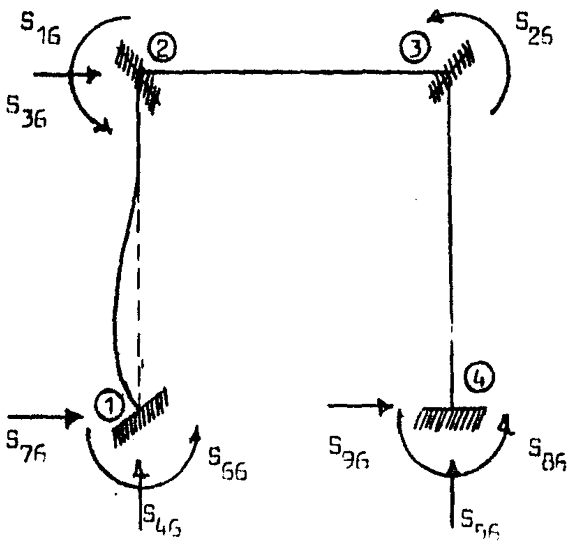
$S_{65} = 0$

$S_{75} = 0$

$S_{85} = 0$

$S_{95} = 0$

6º.- $D_6 = 1$, en dirección del desplazamiento 6, en el nodo 1.



$S_{16} = k_{16}^{1}$

$S_{26} = 0$

$S_{36} = k_{36}^{1}$

$S_{46} = 0$

$S_{56} = 0$

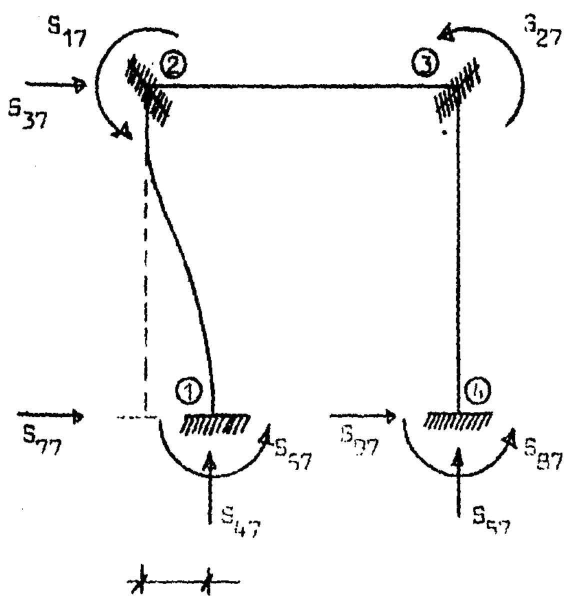
$S_{66} = k_{66}^{1}$

$S_{76} = k_{76}^{1}$

$S_{86} = 0$

$S_{96} = 0$

7º.- $\Delta_7 = 1$, en dirección del desplazamiento 7;



$S_{17} = k^{1}_{17}$

$S_{27} = 0$

$S_{37} = k^{1}_{37}$

$S_{47} = 0$

$S_{57} = 0$

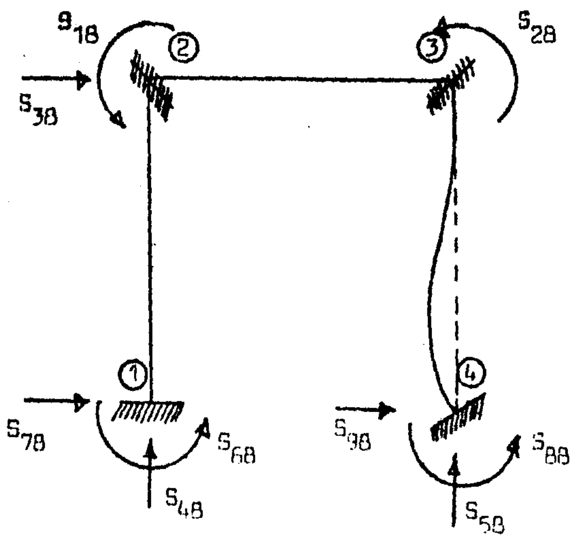
$S_{67} = k^{1}_{67}$

$S_{77} = k^{1}_{77}$

$S_{87} = 0$

$S_{97} = 0$

8°.- $D_8 = 1$, en dirección del desplazamiento 8, en el nodo (4):



$S_{18} = 0$

$S_{28} = k^{3}_{28}$

$S_{38} = k^{3}_{38}$

$S_{48} = 0$

$S_{58} = 0$

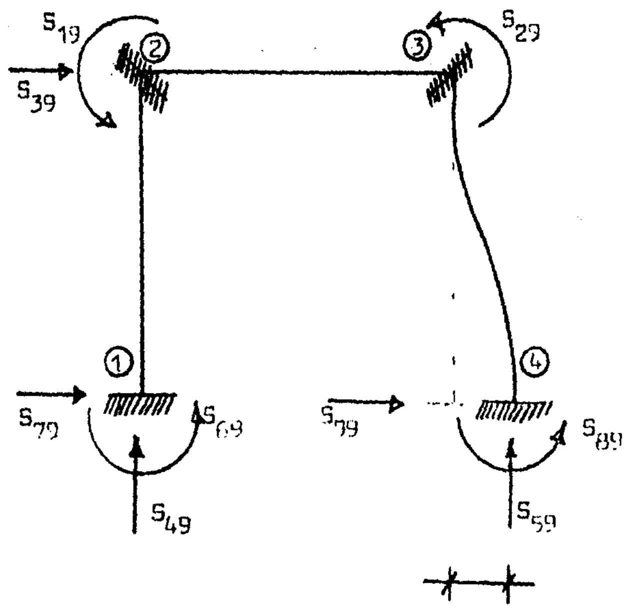
$S_{68} = 0$

$S_{78} = 0$

$S_{88} = k^{3}_{88}$

$S_{98} = k^{3}_{98}$

9^{o}.- $\Delta_9 = 1$, en dirección del desplazamiento 9, en el nodo 4:



$S_{19} = 0$

$S_{29} = k^{3}_{29}$

$S_{39} = k^{3}_{39}$

$S_{49} = 0$

$S_{59} = 0$

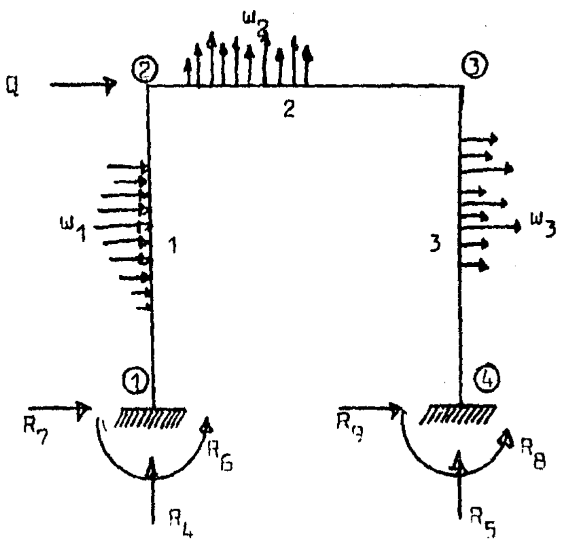
$S_{69} = 0$

$S_{79} = 0$

$S_{89} = k^{3}_{89}$

$S_{99} = k^{3}_{99}$

Las reacciones del marco son:



La solución del sistema estructural indeterminado queda expresado como:

$$
\begin{aligned}
S_{10} + S_{11}D_1 + S_{12}D_2 + S_{13}\Delta_3 + S_{14}\Delta_4 + S_{15}\Delta_5 + S_{16}D_6 + S_{17}\Delta_7 + S_{18}D_8 + S_{19}\Delta_9 &= 0 \\
S_{20} + S_{21}D_1 + S_{22}D_2 + S_{23}\Delta_3 + S_{24}\Delta_4 + S_{25}\Delta_5 + S_{26}D_6 + S_{27}\Delta_7 + S_{28}D_8 + S_{29}\Delta_9 &= 0 \\
S_{30} + S_{31}D_1 + S_{32}D_2 + S_{33}\Delta_3 + S_{34}\Delta_4 + S_{35}\Delta_5 + S_{36}D_6 + S_{37}\Delta_7 + S_{38}D_8 + S_{39}\Delta_9 &= 0 \\
S_{40} + S_{41}D_1 + S_{42}D_2 + S_{43}\Delta_3 + S_{44}\Delta_4 + S_{45}\Delta_5 + S_{46}D_6 + S_{47}\Delta_7 + S_{48}D_8 + S_{49}\Delta_9 &= R_4 \\
S_{50} + S_{51}D_1 + S_{52}D_2 + S_{53}\Delta_3 + S_{54}\Delta_4 + S_{55}\Delta_5 + S_{56}D_6 + S_{57}\Delta_7 + S_{58}D_8 + S_{59}\Delta_9 &= R_5 \\
S_{60} + S_{61}D_1 + S_{62}D_2 + S_{63}\Delta_3 + S_{64}\Delta_4 + S_{65}\Delta_5 + S_{66}D_6 + S_{67}\Delta_7 + S_{68}D_8 + S_{69}\Delta_9 &= R_6 \\
S_{70} + S_{71}D_1 + S_{72}D_2 + S_{73}\Delta_3 + S_{74}\Delta_4 + S_{75}\Delta_5 + S_{76}D_6 + S_{77}\Delta_7 + S_{78}D_8 + S_{79}\Delta_9 &= R_7 \\
S_{80} + S_{81}D_1 + S_{82}D_2 + S_{83}\Delta_3 + S_{84}\Delta_4 + S_{85}\Delta_5 + S_{86}D_6 + S_{87}\Delta_7 + S_{88}D_8 + S_{89}\Delta_9 &= R_8 \\
S_{90} + S_{91}D_1 + S_{92}D_2 + S_{93}\Delta_3 + S_{94}\Delta_4 + S_{95}\Delta_5 + S_{96}D_6 + S_{97}\Delta_7 + S_{98}D_8 + S_{99}\Delta_9 &= R_9
\end{aligned}
$$

Al realizar las sustituciones correspondientes de cada miembro y ordenandolas en forma matricial se obtiene:

$$
\left[\begin{array}{ccc|cccccc}
(k^1_{11}+k^2_{11}) & k^2_{12} & k^1_{13} & k^2_{14} & k^2_{15} & k^1_{16} & k^1_{17} & 0 & 0 \\
k^2_{21} & (k^3_{22}+k^2_{22}) & k^3_{23} & k^2_{24} & k^2_{25} & 0 & 0 & k^3_{28} & k^3_{29} \\
k^1_{31} & k^3_{32} & (k^1_{33}+k^3_{33}) & 0 & 0 & k^1_{36} & k^1_{37} & k^3_{38} & k^3_{39} \\
\hline
k^2_{41} & k^2_{42} & 0 & k^2_{44} & k^2_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k^2_{51} & k^2_{52} & 0 & k^2_{54} & k^2_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k^1_{61} & 0 & k^1_{63} & 0 & 0 & k^1_{66} & k^1_{67} & 0 & 0 \\
k^1_{71} & 0 & k^1_{73} & 0 & 0 & k^1_{76} & k^1_{77} & 0 & 0 \\
0 & k^3_{82} & k^3_{83} & 0 & 0 & 0 & 0 & k^3_{88} & k^3_{89} \\
0 & k^3_{92} & k^3_{93} & 0 & 0 & 0 & 0 & k^3_{98} & k^3_{99}
\end{array}\right]
\cdot
\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ D_6 \\ \Delta_7 \\ D_8 \\ \Delta_9 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -FM^1_1-FM^2_1 \\ -FM^2_2-FM^3_2 \\ -FP^1_3-FP^3_3+Q \\ -FP^2_4 \\ -FP^2_5 \\ -FM^1_6 \\ -FP^1_7 \\ -FM^3_8 \\ -FP^3_9 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{bmatrix}
$$

Las matrices anteriores se pueden expresar como sigue:

$$\left[S_c\right]\left[\Delta_c\right] = \left[JL_c\right] + \left[R_c\right]$$

Se define a "S" como la matriz de Rigideces Global de la estructura, a "Δ_c" como el vector de Desplazamientos, a "JL_c" como el vector de carga de los nodos, y a "R_c" como el vector de Reacciones de la estructura, las cuales se dividen en:

$$\left[\begin{array}{c|c} \left[S_{uu}\right] & \left[S_{ur}\right] \\ \hline \left[S_{ru}\right] & \left[S_{rr}\right] \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \left[\Delta_u\right] \\ \hline \left[\Delta_r\right] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \left[JL_u\right] \\ \hline \left[JL_r\right] \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \left[0\right] \\ \hline \left[R\right] \end{array}\right] \qquad \text{ECUACIONES } (2)$$

Donde:

$\left[S_{uu}\right]$; Representa a las rigideces asociadas con los desplazamientos de nodo "no restringidos" por las condiciones de apoyo, desarrolladas por la aplicación independiente de desplazamientos unitarios en los nodos no restringidos.

$\left[S_{ru}\right]$; Representa a las rigideces asociadas con los desplazamientos de nodo "restringidos" por las condiciones de apoyo, desarrolladas por la aplicación independiente de desplazamientos unitarios en los nodos no restringidos.

$\left[S_{ur}\right]$; Representa a las rigideces asociadas con los desplazamientos de nodo "no restringidos" por las condiciones de apoyo, desarrolladas por la aplicación independiente de desplazamientos unitarios en los nodos restringidos.

$\left[S_{rr}\right]$; Representa a las rigideces asociadas con los desplazamientos de nodo "restringidos" por las condiciones de apoyo, desarrolladas por la aplicación independiente de desplazamientos unitarios en los nodos restringidos.

Las ecuaciones (2), no pueden ser resueltas directamente, puesto que se desconoce el vector Desplazamientos y el vector de Reacciones, por lo tanto para su solución se procede como sigue:

1º.- $\left[S_{uu}\right]\left[\Delta_u\right] = \left[JL_u\right] + \left[0\right]$

o sea:

$$S_{10} + S_{11}\theta_1 + S_{12}\theta_2 + S_{13}\Delta_3 = 0$$
$$S_{20} + S_{21}\theta_1 + S_{22}\theta_2 + S_{23}\Delta_3 = 0$$
$$S_{30} + S_{31}\theta_1 + S_{32}\theta_2 + S_{33}\Delta_3 = 0$$

Si se sustituyen los valores correspondientes se tiene:

$$\begin{bmatrix} k^{1}_{11}+k^{2}_{11} & k^{2}_{12} & k^{1}_{13} \\ k^{2}_{21} & k^{2}_{22}+k^{3}_{22} & k^{3}_{23} \\ k^{1}_{31} & k^{3}_{32} & k^{1}_{33}+k^{3}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -FM^{1}_{1}-FM^{2}_{1} \\ -FM^{2}_{2}-FM^{3}_{2} \\ -FP^{1}_{3}-FP^{3}_{3}+Q \end{bmatrix}$$

Del sistema de ecuaciones anterior se puede obtener θ_1, θ_2 y Δ_3 , o sea:

$$\left[\Delta_u\right] = \left[S_{uu}\right]^{-1} \left[JL_u\right]$$

Después de obtener las magnitudes de los desplazamientos "no restringidos", se procede como sigue:

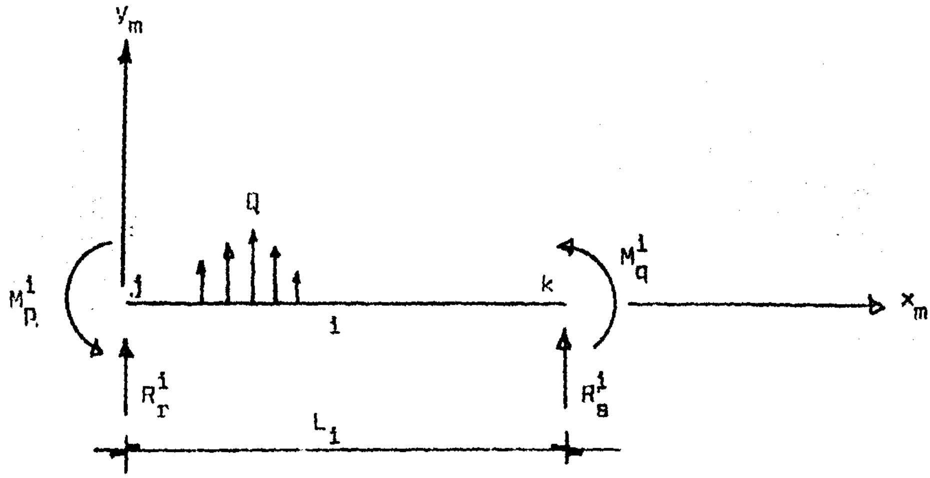
$$\left[S_{ru}\right]\left[\Delta_u\right] - \left[JL_r\right] = \left[R_r\right]$$

o sea:

$$\begin{bmatrix} k^{2}_{41} & k^{2}_{42} & 0 \\ k^{2}_{51} & k^{2}_{52} & 0 \\ k^{1}_{61} & 0 & k^{1}_{63} \\ k^{1}_{71} & 0 & k^{1}_{73} \\ 0 & k^{3}_{82} & k^{3}_{83} \\ 0 & k^{3}_{92} & k^{3}_{93} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} FP^{2}_{4} \\ FP^{2}_{5} \\ FM^{1}_{6} \\ FP^{1}_{7} \\ FM^{3}_{8} \\ FP^{3}_{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{bmatrix}$$

Y así es como se encuentra el valor de las reacciones R_4, R_5, R_6, R_7, R_8 y R_9.

Si se desea encontrar los elementos mecánicos actuando en cada miembro de la estructura, se considera la siguiente figura:



Donde:

$$M_p^i = m_p^i + FM_p^i$$

$$M_q^i = m_q^i + FM_q^i \qquad \text{ECUACIONES } (3)$$

$$P_r^i = p_r^i + FP_r^i$$

$$P_s^i = p_s^i + FP_s^i$$

M_p^i ; FM_p^i .- Se definen como Momento Final y Momento de Empotramiento en el punto "j" del miembro "i", respectivamente.

M_q^i ; FM_q^i .- Se definen como Momento Final y Momento de Empotramiento en el punto "k" del miembro "i", respectivamente.

P_r^i ; FP_r^i .- Se definen como Cortante Final y Cortante de Empotramiento en el punto "j" del miembro "i", respectivamente.

P_s^i ; FP_s^i .- Se definen como Cortante Final y Cortante de Empotramiento en el punto "k" del miembro "i", respectivamente.

Sustituyendo las Ecuaciones (1) en las Ecuaciones (3) se obtiene:

$$M_p^i = k_{pp}^i\, O_p + k_{pq}^i\, O_q + k_{pr}^i\, \Delta_r + k_{ps}^i\, \Delta_s + FM_p^i$$

$$M_q^i = k_{qp}^i\, O_p + k_{qq}^i\, O_q + k_{qr}^i\, \Delta_r + k_{qs}^i\, \Delta_s + FM_q^i$$

$$P_r^i = k_{rp}^i\, O_p + k_{rq}^i\, O_q + k_{rr}^i\, \Delta_r + k_{rs}^i\, \Delta_s + FM_r^i$$

$$P_s^i = k_{sp}^i\, O_p + k_{sq}^i\, O_q + k_{sr}^i\, \Delta_r + k_{ss}^i\, \Delta_s + FM_s^i$$

ECUACIONES (4)

Estas Ecuaciones anteriores, ordenadas matricialmente resulta:

$$\left[M\right]_i = \left[k\right]_i \left[\Delta\right]_i + \left[FM\right]_i$$

Al aplicar las Ecuaciones (4), en cada uno de los miembros del marco anteriormente especificado, se obtiene:

Para el miembro 1 :

$$M_1^1 = k_{11}^1\, O_1 + k_{16}^1\, O_6 + k_{13}^1\, \Delta_3 + k_{17}^1\, \Delta_7 + FM_1^1$$

$$M_6^1 = k_{61}^1\, O_1 + k_{66}^1\, O_6 + k_{63}^1\, \Delta_3 + k_{67}^1\, \Delta_7 + FM_6^1$$

$$P_3^1 = k_{31}^1\, O_1 + k_{36}^1\, O_6 + k_{33}^1\, \Delta_3 + k_{37}^1\, \Delta_7 + FP_3^1$$

$$P_7^1 = k_{71}^1\, O_1 + k_{76}^1\, O_6 + k_{73}^1\, \Delta_3 + k_{77}^1\, \Delta_7 + FP_7^1$$

Para el miembro 2 :

$$M_1^2 = k_{11}^2\, O_1 + k_{12}^2\, O_2 + k_{14}^2\, \Delta_4 + k_{15}^2\, \Delta_5 + FM_1^2$$

$$M_2^2 = k_{21}^2\, O_1 + k_{22}^2\, O_2 + k_{24}^2\, \Delta_4 + k_{25}^2\, \Delta_5 + FM_2^2$$

$$P_4^2 = k_{41}^2\, O_1 + k_{42}^2\, O_2 + k_{44}^2\, \Delta_4 + k_{45}^2\, \Delta_5 + FP_4^2$$

$$P_5^2 = k_{51}^2\, O_1 + k_{52}^2\, O_2 + k_{54}^2\, \Delta_4 + k_{55}^2\, \Delta_5 + FP_5^2$$

Para el miembro 3 :

$$M_2^3 = k_{22}^3\,\theta_2 + k_{28}^3\,\theta_8 + k_{23}^3\,\Delta_3 + k_{29}^3\,\Delta_9 + FM_2^3$$

$$M_8^3 = k_{82}^3\,\theta_2 + k_{88}^3\,\theta_8 + k_{83}^3\,\Delta_3 + k_{89}^3\,\Delta_9 + FM_8^3$$

$$P_3^3 = k_{32}^3\,\theta_2 + k_{38}^3\,\theta_8 + k_{33}^3\,\Delta_3 + k_{39}^3\,\Delta_9 + FM_3^3$$

$$P_9^3 = k_{92}^3\,\theta_2 + k_{98}^3\,\theta_8 + k_{93}^3\,\Delta_3 + k_{99}^3\,\Delta_9 + FM_9^3$$

Resumiendo lo especificado anteriormente, se tienen las siguientes ecuaciones:

$\left[S_{uu}\right]\left[\Delta_u\right] = \left[JL_u\right]$; Con ésta ecuación se obtienen los Desplazamientos.

$\left[R_r\right] = \left[S_{ru}\right]\left[\Delta_u\right] - \left[JL_r\right]$; Con ésta ecuación se obtienen las Reacciones en los apoyos.

$\left[M\right]_i = \left[k\right]_i\left[\Delta\right]_i + \left[FM\right]_i$; Con ésta ecuación se obtienen los Elementos Mecánicos de cada miembro estructural.

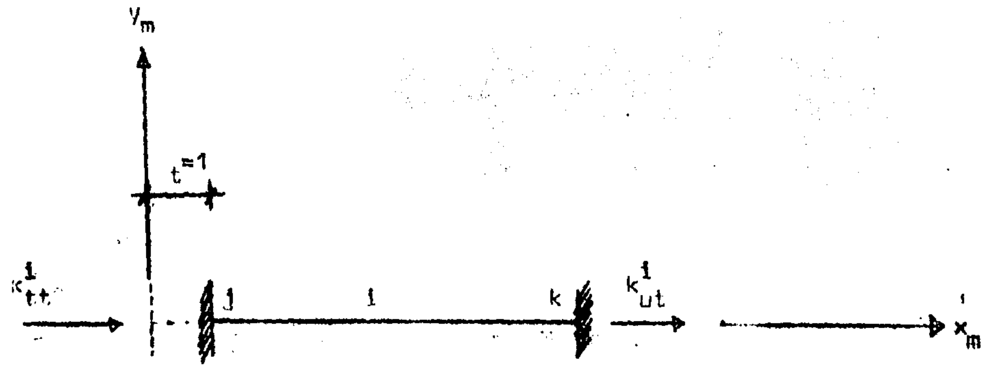
IV.-

*** MATRIZ ELEMENTAL DE RIGIDECES ***

(Considerando deformación axial)

Se considera una barra "i", doblemente empotrada, con un Momento de Inercia constante a lo largo de su eje longitudinal. Al empotramiento de la derecha se le coloca el subíndice "k" y al de la izquierda el subíndice "j". La barra se encuentra situada en ejes ortogonales (x_m - y_m), en los cuales, la abscisa coincide con el eje longitudinal de la barra. (Ver figura 1).

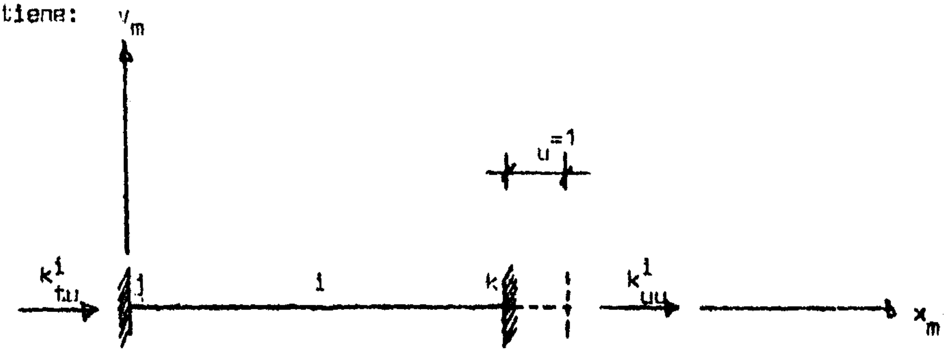
Imponiendo una deformación unitaria (Δ_t = 1), en el punto "j" se tiene:



Donde:

k^i_{tt} y k^i_{ut} , son las rigideces axiales que aparecen en la barra para mantener el equilibrio.

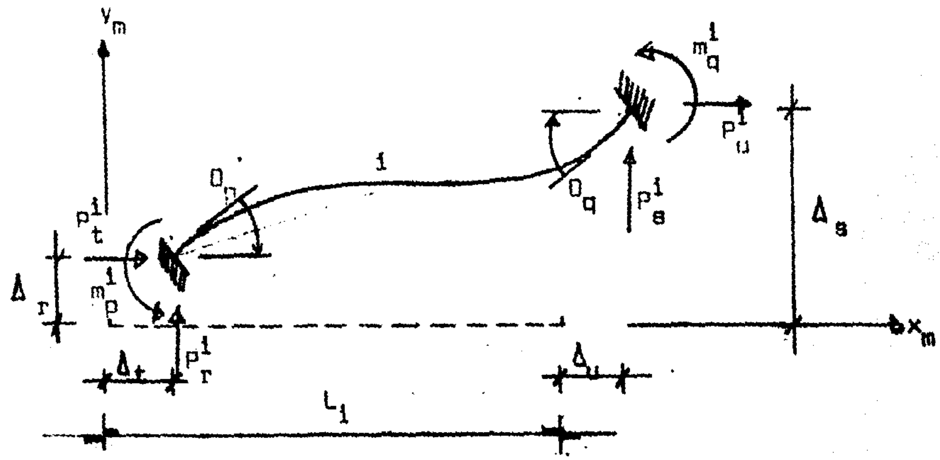
De igual manera, aplicando en el punto "k" una deformación unitaria (Δ_u= 1), se tiene:



Donde:

k^i_{tu} y k^i_{ut} , son las rigideces axiales que aparecen en la barra para mantener el equilibrio.

Si se imponen los desplazamientos θ_p , θ_q , Δ_r , Δ_s , Δ_t y Δ_u, se tiene:



De la figura anterior se obtiene:

$$
\begin{aligned}
m^i_p &= k^i_{pp}\,\theta_p + k^i_{pq}\,\theta_q + k^i_{pr}\,\Delta_r + k^i_{ps}\,\Delta_s + 0 + 0\\
m^i_q &= k^i_{qp}\,\theta_p + k^i_{qq}\,\theta_q + k^i_{qr}\,\Delta_r + k^i_{qs}\,\Delta_s + 0 + 0\\
p^i_r &= k^i_{rp}\,\theta_p + k^i_{rq}\,\theta_q + k^i_{rr}\,\Delta_r + k^i_{rs}\,\Delta_s + 0 + 0\\
p^i_s &= k^i_{sp}\,\theta_p + k^i_{sq}\,\theta_q + k^i_{sr}\,\Delta_r + k^i_{ss}\,\Delta_s + 0 + 0\\
p^i_t &= 0 + 0 + 0 + 0 + k^i_{tt}\,\Delta_t + k^i_{tu}\,\Delta_u\\
p^i_u &= 0 + 0 + 0 + 0 + k^i_{ut}\,\Delta_t + k^i_{uu}\,\Delta_u
\end{aligned}
$$

ECUACIONES (5)

Si las ecuaciones 5 se expresan matricialmente se tiene:

$$[m]_i = [k]_i \, [\Delta]_i$$

Donde:

$$m_i = \begin{bmatrix} m_p \\ m_q \\ p_r \\ p_s \\ p_t \\ p_u \end{bmatrix} \quad ; \quad \Delta_i = \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \Delta_r \\ \Delta_s \\ \Delta_t \\ \Delta_u \end{bmatrix}$$

$$k_i = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p & q & r & s & t & u \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_{pp} & k_{pq} & k_{pr} & k_{ps} & 0 & 0 \\ k_{qp} & k_{qq} & k_{qr} & k_{qs} & 0 & 0 \\ k_{rp} & k_{rq} & k_{rr} & k_{rs} & 0 & 0 \\ k_{sp} & k_{sq} & k_{sr} & k_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{tt} & k_{tu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{ut} & k_{uu} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{array}$$

MATRIZ "B"

Si se comparan la matriz "A" con la matriz "B", se puede observar que aparecen cuatro nuevos términos, los cuales son: k_{tt}, k_{tu}, k_{ut}, k_{uu}, que son debidos a que se están considerando las deformaciones axiales en la barra.

Para evaluar estas rigideces, si a una barra con una sección transversal uniforme, se le aplica una fuerza P, normal a la sección transversal, la barra experimenta un cambio de longitud igual a:

$$\Delta_a = \frac{PL}{AE}$$

Donde "L" es la longitud original de la barra, "A" es el área de la sección transversal de la barra y "E" es el Módulo de Elasticidad del material de la barra. Despejando "P" de la fórmula anterior, se tiene:

$$P = \frac{AE\,\Delta_a}{L}$$

Si se aplica un desplazamiento axial unitario ($\Delta_t = 1$) en el punto "j" de la barra, se obtienen:

$$k^i_{tt} = \frac{AE}{L} \qquad y \qquad k^i_{tu} = -\frac{AE}{L}$$

De la misma manera, si se aplica un desplazamiento axial unitario ($\Delta_u = 1$) en el punto "k" de la barra se obtienen:

$$k^i_{tu} = -\frac{AE}{L} \qquad y \qquad k^i_{uu} = \frac{AE}{L}$$

Por lo tanto, sustituyendo los valores correspondientes de cada elemento de la matriz "B", se obtiene:

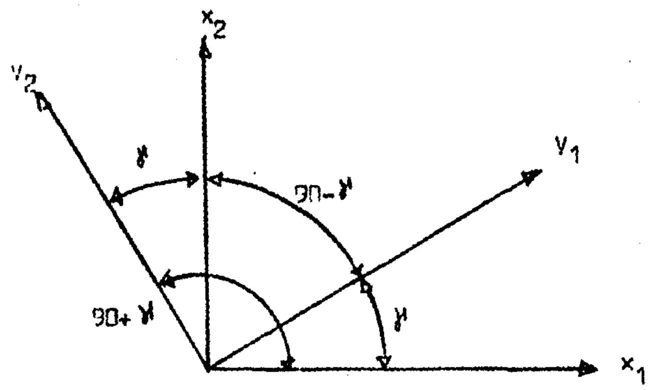
$$\left[k\right]_i = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p & q & r & s & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L} & -\frac{6EI}{L} & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L} & -\frac{6EI}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L} & \frac{6EI}{L} & \frac{12EI}{L} & -\frac{12EI}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{L} & -\frac{6EI}{L} & -\frac{12EI}{L} & \frac{12EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{array}$$

La matriz $\left[k\right]_i$, se define como la matriz de Rigideces Elemental de una barra considerando deformaciones axiales.

V.-

*** MATRIZ DE TRANSFORMACION ROTACIUNAL DE COORDENADAS ***

Se consideran dos ejes ortogonales, x_1-x_2 y y_1-y_2:



Se define a Coseno Director, como el coseno del ángulo formado entre dos ejes.

La posición del eje y_1 con respecto a los ejes x_1 y x_2, puede ser determinada por medio de los cosenos directores C_{11} y C_{12} respectivamente, es decir:

$C_{11} = \cos$

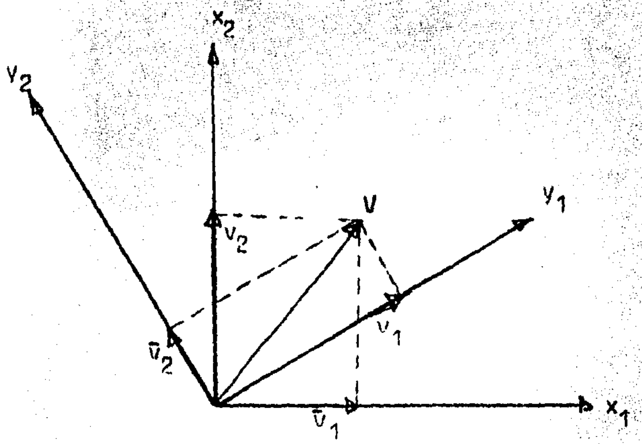
$C_{12} = \cos\,(90^{o} - \gamma) = \operatorname{sen}\gamma$

La posición del eje y_2 con respecto a los ejes x_1 y x_2, puede ser determinada por medio de los cosenos directores C_{21} y C_{22} respectivamente, es decir:

$C_{21} = \cos\,(90^{o} + \gamma) = -\operatorname{sen}\gamma$

$C_{22} = \cos\gamma$

Ahora, ya especificado lo anterior, si se considera un vector "V", el cual puede ser la representación de alguna deformación o de alguna fuerza o rigidez de un sistema estructural, se tiene la siguiente figura:



Este vector "V", esta determinado por medio de sus componentes en cualquiera de los dos sistemas de ejes, es decir, en el sistema de ejes y_1-y_2, por medio de v_1 y v_2 y en el sistema de ejes x_1-x_2, por medio de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$, y su relación entre ellas se establece como sigue: Puesto que el vector $\bar{v}_1$, que se encuentra en el sistema de ejes x_1-x_2, puede estar compuesto por medio de sus componentes en el sistema de ejes y_1-y_2, las cuales son:

$\bar{v}_1 \cos\gamma$ en el eje y_1 ; $-\bar{v}_1 \operatorname{sen}\gamma$ en el eje y_2 .

Tambien el vector $\bar{v}_2$, que se encuentra en el sistema de ejes x_1-x_2, puede estar compuesto por medio de sus componentes en el sistema de ejes y_1-y_2, las cuales son:

$\bar{v}_2 \cos\gamma$ en el eje [illegible] ; $\bar{v}_2 \operatorname{sen}\gamma$ en el eje y_1.

La componente total de los dos vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ en el eje Y_1 queda como:

$v_1 = \bar{v}_1 \cos\gamma + \bar{v}_2 \operatorname{sen}\gamma$

La componente total de los dos vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ en el eje y_2 queda como:

$v_2 = -\bar{v}_1 \operatorname{sen}\gamma + \bar{v}_2 \cos\gamma$

Utilizando los cosenos directores en las expresiones anteriores, se tiene:

$$v_1 = C_{11}\,\bar{v}_1 + C_{12}\,\bar{v}_2$$
$$v_2 = C_{21}\,\bar{v}_1 + C_{22}\,\bar{v}_2$$

ECUACIONES (6)

Si se expresan matricialmente las expresiones anteriores se tiene que:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} \quad ; \text{ o sea } \quad [v] = [C]\,[\bar{v}]$$

Donde el vector v representa a las componentes del vector "V" en el sistema de ejes y_1-y_2, el vector $\bar{v}$ representa a las componentes del vector "V" en el sistema de ejes x_1-x_2 y la matriz $[C]$ representa a la matriz de rotación de ejes x_1-x_2 a los ejes y_1-y_2.

Similarmente, resolviendo los vectores v_1 y v_2, que se encuentran en el sistema de ejes y_1-y_2, a los ejes x_1-x_2, la componente total en el eje x_1 es:

$$\bar{v}_1 = v_1 \cos\gamma - v_2 \operatorname{sen}\gamma$$

La componente total en el eje x_2 es:

$$\bar{v}_2 = v_1 \operatorname{sen}\gamma + v_2 \cos\gamma$$

Sustituyendo los cosenos directores correspondientes, se tiene:

$$\bar{v}_1 = C_{11}\,v_1 + C_{21}\,v_2$$
$$\bar{v}_2 = C_{12}\,v_1 + C_{22}\,v_2$$

ECUACIONES (7)

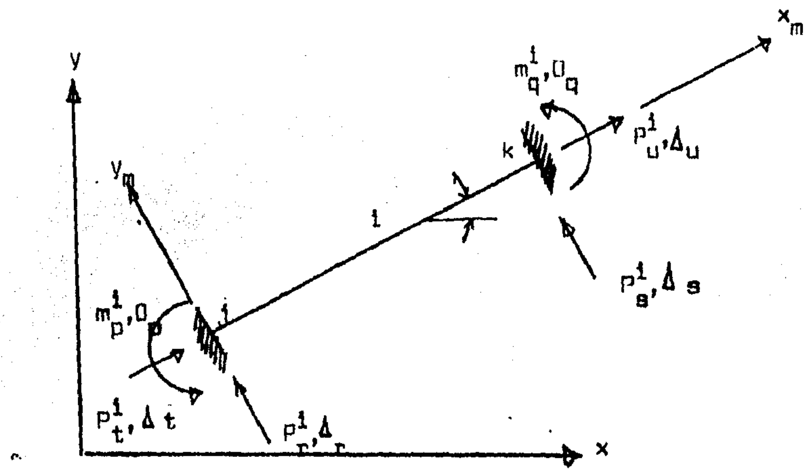
que en forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad ; \text{ o sea } \quad [\bar{v}] = [C]^T\,[v]$$

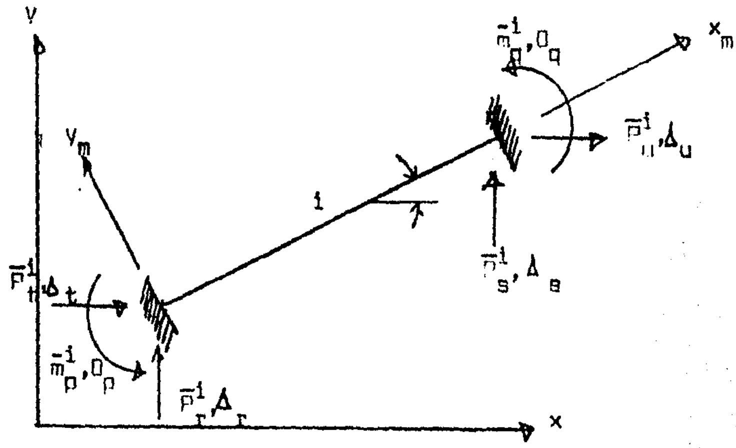
Donde la matriz $[C]^T$ es la matriz de rotación del sistema de ejes y_1-y_2 al sistema de ejes x_1-x_2.

También se puede observar claramente que $C^T = C^{-1}$, con ésto se concluye que la matriz de Rotación $[C]$ es ortogonal.

Si se considera una barra "i", en la cual existen ejes locales, que son x_m-y_m, los cuales a la vez se encuentran referidos a los ejes ortogonales x-y.



De las ecuaciones ⑦, las fuerzas P_r, P_s, P_t y P_u, que estan referidas al sistema de ejes locales x_m-y_m, se pueden evaluar para el sistema de ejes x-y:



$$\bar{p}^i_r = C_{12}\, p^i_t + C_{22}\, p^i_r = C_{22}\, p^i_r + C_{12}\, p^i_t$$

$$\bar{p}^i_s = C_{12}\, p^i_u + C_{22}\, p^i_s = C_{22}\, p^i_r + C_{12}\, p^i_u$$

$$\bar{p}^i_t = C_{21}\, p^i_r + C_{11}\, p^i_t = C_{11}\, p^i_t + C_{21}\, p^i_r$$

$$\bar{p}^i_u = C_{21}\, p^i_s + C_{11}\, p^i_u = C_{11}\, p^i_u + C_{21}\, p^i_s$$

$$\bar{m}^i_p = m^i_p$$

$$\bar{m}^i_q = m^i_q$$

Si se representan las anteriores ecuaciones en forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{m}_p \\ \bar{m}_q \\ \bar{p}_r \\ \bar{p}_s \\ \bar{p}_t \\ \bar{p}_u \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{22} & 0 & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{22} & 0 & C_{12} \\ 0 & 0 & C_{21} & 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{21} & 0 & C_{11} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} m_p \\ m_q \\ p_r \\ p_s \\ p_t \\ p_u \end{bmatrix}_i$$

O tambien como:

$$\left[\bar{m}\right]_i = \left[T\right]^T_i \left[m\right]_i$$

Donde $\left[\bar{m}\right]_i$, representa a las componentes de las fuerzas actuando en la barra "i", en los ejes de referencia x-y.

$\left[m\right]_i$, representa a las componentes de las fuerzas actuando en la barra "i", en los ejes locales x_m-y_m.

$\left[T\right]^T$, es la matriz de transformación rotacional de un sistema local a un sistema de ejes de referencia, y es la transpuesta de la matriz $\left[T\right]$, que quedará definida adelante.

De las ecuaciones (6)

$$p_r^i = C_{22}\,\bar{p}_r^i + C_{21}\,\bar{p}_t^i$$

$$p_s^i = C_{22}\,\bar{p}_s^i + C_{21}\,\bar{p}_u^i$$

$$p_t^i = C_{12}\,\bar{p}_r^i + C_{11}\,\bar{p}_t^i$$

$$p_u^i = C_{12}\,\bar{p}_s^i + C_{11}\,\bar{p}_u^i$$

$$m_p^i = \bar{m}_p^i$$

$$m_q^i = \bar{m}_q^i$$

Si se representan las anteriores ecuaciones en forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} m_p \\ m_q \\ p_r \\ p_s \\ p_t \\ p_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{22} & 0 & C_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{22} & 0 & C_{21} \\ 0 & 0 & C_{12} & 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{12} & 0 & C_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{m}_p \\ \bar{m}_q \\ \bar{p}_r \\ \bar{p}_s \\ \bar{p}_t \\ \bar{p}_u \end{bmatrix}$$

O también como:

$$\left[m\right]_i = \left[T\right]_i \left[\bar{m}\right]_i$$

Donde la matriz $\left[T\right]_i$, es la matriz de transformación rotacional de los ejes de referencia a los ejes locales, y esta es definida como la matriz de Transformación, y como $\left[T\right]^{-1} = \left[T\right]$, se concluye que la matriz $\left[T\right]$ es ortogonal.

De la misma manera, la relación entre las componentes de los desplazamientos del miembro "i" con respecto a los ejes locales x_m-y_m y con los ejes de referencia x-y, se tiene que:

$$\left[\bar{\Delta}\right]_i = \left[T\right]_i^T \left[\Delta\right]_i \qquad \text{para los ejes locales } x_m\text{-}y_m$$

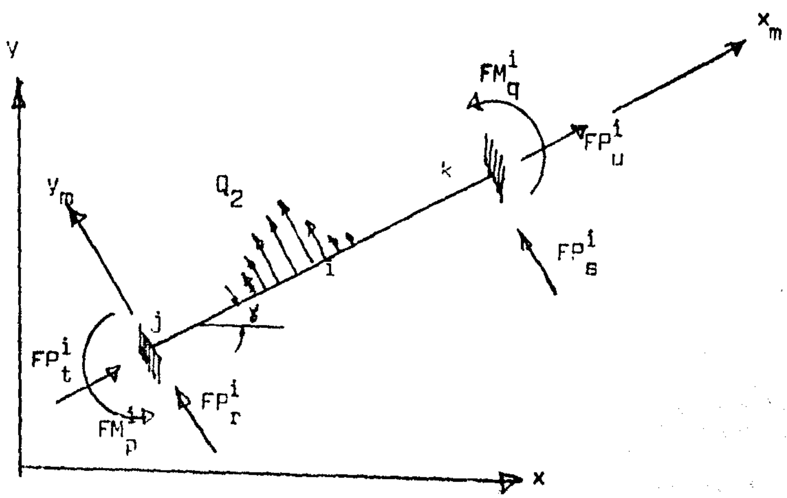
Y

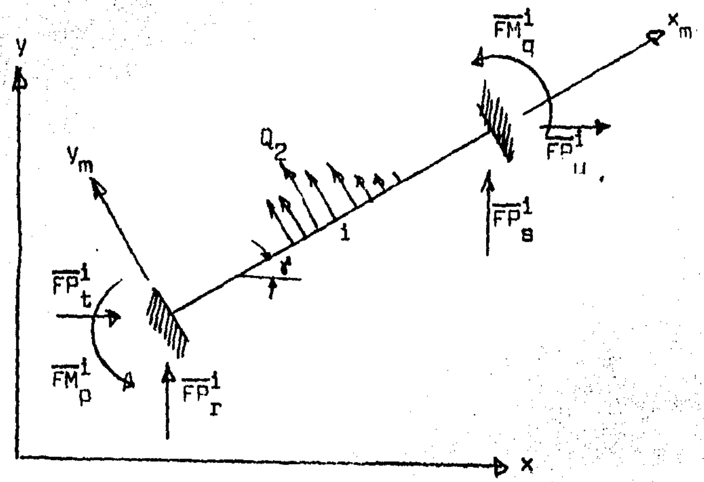
$$[\Delta]_i = [T]_i \, [\bar{\Delta}]_i \qquad \text{para los ejes de referencia } x\text{-}y.$$

Donde:

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} D_p \\ D_q \\ \Delta_r \\ \Delta_s \\ \Delta_t \\ \Delta_u \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \bar{\Delta}_i = \begin{bmatrix} \bar{D}_p \\ \bar{D}_q \\ \bar{\Delta}_r \\ \bar{\Delta}_s \\ \bar{\Delta}_t \\ \bar{\Delta}_u \end{bmatrix}$$

De una manera similar, la relación entre las componentes del vector de fuerzas de empotramiento del miembro "i", con respecto a los ejes locales x_m-y_m y con los ejes de referencia x-y, es: Si tomamos en cuenta las siguientes figuras:





Por lo tanto:

$[\overline{FM}] = [T]^T\ [FM]$, refiriendose a los ejes locales.

$[FM] = [T]\ [\overline{FM}]$, refiriendose a los ejes de referencia.

Donde:

$$FM = \begin{bmatrix} FM_p \\ FM_q \\ FP_r \\ FP_s \\ FP_t \\ FP_u \end{bmatrix} \quad ; \quad y \quad \overline{FM} = \begin{bmatrix} \overline{FM}_p \\ \overline{FM}_q \\ \overline{FP}_r \\ \overline{FP}_s \\ \overline{FP}_t \\ \overline{FP}_u \end{bmatrix}$$

Si se establecen las siguientes relaciones:

$C_{11} = Cx$
$C_{12} = Cy$
$C_{21} = -Cy$
$C_{22} = Cx$

Por lo tanto:

$Cx = \cos \gamma$
$Cy = \cos (90^{o} - \gamma) = \text{sen}\, \gamma$
Donde el ángulo γ se mide en dirección contraria a las manecillas del reloj, desde el eje x del sistema de referencia al eje x_m del sistema local.
Por lo tanto la matriz de Transformación es:

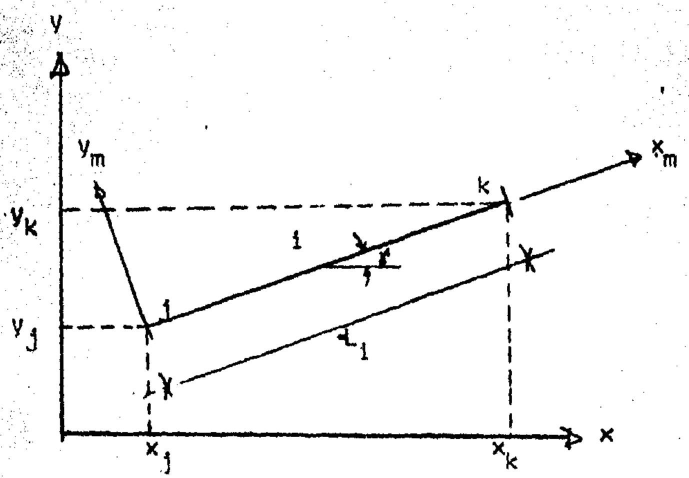
$$
\left[T \right]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Cx & 0 & -Cy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cx & 0 & -Cy \\ 0 & 0 & Cy & 0 & Cx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cy & 0 & Cx \end{bmatrix}
$$

VI.-

*** MATRIZ ELEMENTAL, TRANSFORMADA DE RIGIDECES ***

(Considerando deformación axial)

Tomando como referencia la siguiente figura:



$$Cx = C_{11} = \cos\gamma = \frac{Xk - Xj}{L_i}$$

$$Cy = C_{12} = \operatorname{sen}\gamma = \frac{Yk - Yj}{L_i}$$

$$L_i = \sqrt{(Xk - Xj)^2 - (Yk - Yj)^2}$$

Donde (Xj, Yj) son las coordenadas del punto "j" del miembro "i", en los ejes de referencia.

(Xk, Yk) son las coordenadas del punto "k" del miembro "i", en los ejes de referencia.

L_i es la longitud del miembro "i".

Como anteriormente se había establecido, se tiene:

$$[m]_i = [k]_i [\Delta]_i \qquad (1)$$

Y como :

$$[m]_i = [T]_i [\bar{m}]_i \qquad (2)$$

$$[\Delta]_i = [T]_i \, [\bar{\Delta}]_i \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se tiene:

$$[T]_i [\bar{m}]_i = [k]_i [T]_i [\bar{\Delta}]_i$$

Si se despeja $[\bar{m}]_i$, se tiene:

$$[\bar{m}]_i = [T]_i^{-1} [k]_i [T]_i [\bar{\Delta}]_i$$

Y como $[T]^{-1} = [T]^T$, se tiene:

$$[\bar{m}]_i = [T]_i^T [k]_i [T]_i [\bar{\Delta}]_i$$

Por lo tanto el término $[T]_i^T [k]_i [T]_i = [\bar{k}]_i$ ECUACION (8)

Donde $[\bar{k}]_i$ se define como matriz de rigideces transformada con respecto a los ejes de referencia.

Por lo tanto:

$$[\bar{m}]_i = [\bar{k}]_i [\bar{\Delta}]_i$$

Sustituyendo los elementos correspondientes de las matrices de la Ecuación 8 se tiene que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Cx & 0 & Cy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cx & 0 & Cy \\ 0 & 0 & -Cy & 0 & Cx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Cy & 0 & Cx \end{bmatrix}}_{[T]_i^T} \underbrace{\begin{bmatrix} k_{pp} & k_{pq} & k_{pr} & k_{ps} & 0 & 0 \\ k_{qp} & k_{qq} & k_{qr} & k_{qs} & 0 & 0 \\ k_{rp} & k_{rq} & k_{rr} & k_{rs} & 0 & 0 \\ k_{sp} & k_{sq} & k_{sr} & k_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{tt} & k_{tu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{ut} & k_{uu} \end{bmatrix}}_{[k]_i} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Cx & 0 & -Cy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cx & 0 & -Cy \\ 0 & 0 & Cy & 0 & Cx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cy & 0 & Cx \end{bmatrix}}_{[T]_i} = [\bar{k}]_i$$

Realizando operaciones se obtiene:

$$
\left[\bar{k}\right]_i = \begin{bmatrix}
k_{pp} & k_{pq} & Cxk_{pr} & Cxk_{ps} & -Cyk_{pr} & -Cyk_{ps} \\
k_{qp} & k_{qq} & Cxk_{qr} & Cxk_{qs} & -Cyk_{qr} & -Cyk_{qs} \\
Cxk_{rp} & Cxk_{rq} & Cx^2k_{rr}+Cy^2k_{tt} & Cx^2k_{rs}+Cy^2k_{tu} & CxCyk_{tt}-CxCyk_{rr} & CxCyk_{tu}-CxCyk_{rs} \\
Cxk_{sp} & Cxk_{sq} & Cx^2k_{sr}+Cy^2k_{ut} & Cx^2k_{ss}+Cy^2k_{uu} & CxCyk_{ur}-CxCyk_{sr} & CxCyk_{uu}-CxCyk_{ss} \\
-Cyk_{rp} & -Cyk_{rq} & CxCyk_{tt}-CxCyk_{rr} & CxCyk_{tu}-CxCyk_{rs} & Cx^2k_{tt}+Cy^2k_{rr} & Cx^2k_{tu}+Cy^2k_{rs} \\
-Cyk_{sp} & -Cyk_{sq} & CxCyk_{ut}-CxCyk_{sr} & CxCyk_{uu}-CxCyk_{ss} & Cx^2k_{uu}+Cy^2k_{sr} & Cx^2k_{uu}+Cy^2k_{ss}
\end{bmatrix}
$$

Al realizar las sustituciones correspondientes de cada elemento de la matriz "k" se obtiene:

La matriz Elemental, General, Transformada de Rigideces de una barra : .

$$
\left[\bar{k}\right]_i = \begin{bmatrix}
\frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & Cx\frac{6EI}{L^2} & -Cx\frac{6EI}{L^2} & -Cy\frac{6EI}{L^2} & Cy\frac{6EI}{L^2} \\
\frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & Cx\frac{6EI}{L^2} & -Cx\frac{6EI}{L^2} & -Cy\frac{6EI}{L^2} & Cy\frac{6EI}{L^2} \\
Cx\frac{6EI}{L^2} & Cx\frac{6EI}{L^2} & Cx^2\frac{12EI}{L^3}+Cy^2\frac{AE}{L} & -(Cx^2)\frac{12EI}{L^3}-Cy^2\frac{AE}{L} & CxCy\frac{AE}{L}-CxCy\frac{12EI}{L^3} & -CxCy\frac{AE}{L}+CxCy\frac{12EI}{L^3} \\
-Cx\frac{6EI}{L^2} & -Cx\frac{6EI}{L^2} & -(Cx^2)\frac{12EI}{L^3}-Cy^2\frac{AE}{L} & Cx^2\frac{12EI}{L^3}+Cy^2\frac{AE}{L} & -CxCy\frac{AE}{L}+CxCy\frac{12EI}{L^3} & CxCy\frac{AE}{L}-CxCy\frac{12EI}{L^3} \\
-Cy\frac{6EI}{L^2} & -Cy\frac{6EI}{L^2} & CxCy\frac{AE}{L}-CxCy\frac{12EI}{L^3} & -CxCy\frac{AE}{L}+CxCy\frac{12EI}{L^3} & Cx^2\frac{AE}{L}+Cy^2\frac{12EI}{L^3} & -(Cx^2)\frac{AE}{L}-Cy^2\frac{12EI}{L^3} \\
Cy\frac{6EI}{L^2} & Cy\frac{6EI}{L^2} & -CxCy\frac{AE}{L}+CxCy\frac{12EI}{L^3} & CxCy\frac{AE}{L}-CxCy\frac{12EI}{L^3} & -(Cx^2)\frac{AE}{L}-Cy^2\frac{12EI}{L^3} & Cx^2\frac{AE}{L}+Cy^2\frac{12EI}{L^3}
\end{bmatrix}
$$

Para el cálculo de los elementos mecánicos de cada miembro, se hace lo siguiente:

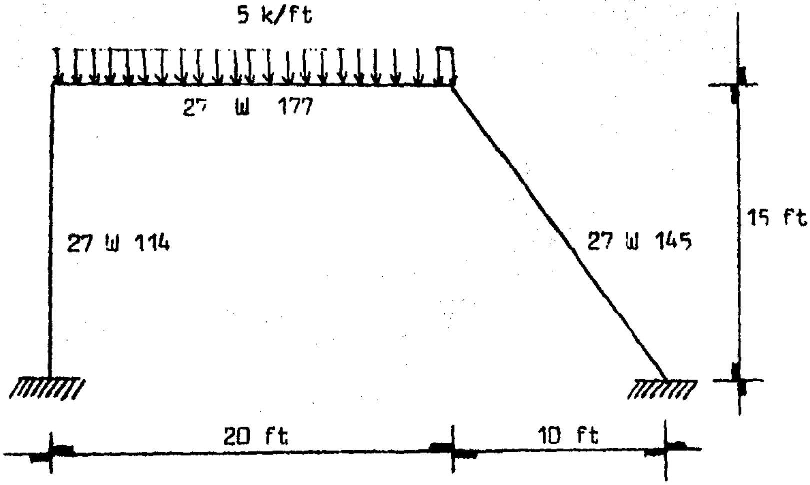
$\left[M\right]_i = \left[k\right]_i \left[T\right]_i \left[\bar{A}\right]_i + \left[FM\right]_i$, para los ejes de referencia.

$\left[\bar{M}\right]_i = \left[\bar{k}\right]_i \left[\bar{A}\right]_i + \left[\overline{FM}\right]_i$, para los ejes locales.

" APENDICE A "

*** EJEMPLOS ***

***** EJEMPLO 1 *****



Calcular :

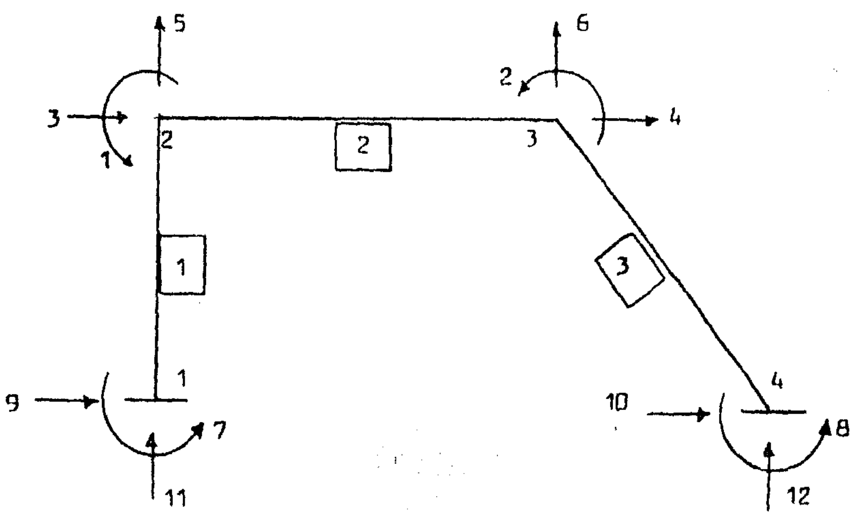
a).- La matriz de rigideces global de la estructura.

b).- El valor de los desplazamientos no restringidos.

c).- Las reacciones en los apoyos del sistema estructural.

d).- Las reacciones en cada miembro estructural.

SOLUCION



DATOS :

MIEMBRO	DESCRIPCION	LONGITUD	AREA NETA	Mo. DE INERCIA	COSENOS DIRECTORES	
		ft.	$ft.^2$	$ft.^4$	$\cos \gamma$	$\operatorname{sen} \gamma$
1	27 W 114	15	0.2333	0.1972	0	1
2	27 W 177	20	0.3632	0.337	1	0
3	27 W 145	18.02	0.2979	0.2515	0.5548	-0.8319

NOTA:

Los resultados de los momentos (P) y (Q) están dados en k-ft.

Los resultados de las fuerzas cortantes y normales (R), (S), (T)y (U), están dados en kips.

Se toma en cuenta que:

k=kips= 1000 lb = 454 kg

donde 1 lb = 0.454 kg

1 ft = 0.3048 mt

*************** EJEMPLO ***************

NECESITO LOS SIGUIENTES DATOS:

NUMERO DE BARRAS POR ANALIZAR M= 3

PARA EL MIEMBRO 1

LONGITUD	15
AREA NETA	.2333
MOMENTO DE INERCIA	.1972
COSENOS DIRECTORES	
O=COS &=	0
V=SEN &=	1

PARA EL MIEMBRO 2

LONGITUD	20
AREA NETA	.3632
MOMENTO DE INERCIA	.337
COSENOS DIRECTORES	
O=COS &=	1
V=SEN &=	0

PARA EL MIEMBRO 3

LONGITUD	18.02
AREA NETA	.2979
MOMENTO DE INERCIA	.2715
COSENOS DIRECTORES	
O=COS &=	.5548
V=SEN &=	-.8319

```
DIGAME EL NUMERO DE DESPLAZAMIENTOS EN EL SISTEMA ESTRUCTURAL,
n= 12

AHORA DE ESTOS  12  DESPLAZAMIENTOS,
DIGAME CUANTOS SON NO RESTRINGIDOS
D(1)=  6


AHORA DIGAME LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS
PARA CADA UNO DE LOS MIEMBROS.

PARA EL MIEMBRO  1 :
 7  1  11  5  9  3

PARA EL MIEMBRO  2 :
 1  2  5  6  3  4

PARA EL MIEMBRO  3 :
 2  8  6  12  4  10
```

** MATRIZ DE RIGIDECES **

```
H( 1 , 1 )= .119987
H( 1 , 2 )= .0337
H( 1 , 3 )= 5.25867E-03
H( 1 , 4 )= 0
H( 1 , 5 )= 5.055E-03
H( 1 , 6 )=-5.055E-03
H( 1 , 7 )= .0262933
H( 1 , 8 )= 0
H( 1 , 9 )=-5.25867E-03
H( 1 , 10 )= 0
H( 1 , 11 )= 0
H( 1 , 12 )= 0
H( 2 , 1 )= .0337
H( 2 , 2 )= .127666
H( 2 , 3 )= 0
H( 2 , 4 )= 4.17333E-03
H( 2 , 5 )= 5.055E-03
H( 2 , 6 )=-2.27178E-03
H( 2 , 7 )= 0
H( 2 , 8 )= .0301332
H( 2 , 9 )= 0
H( 2 , 10 )=-4.17333E-03
H( 2 , 11 )= 0
H( 2 , 12 )=-2.78322E-03
H( 3 , 1 )= 5.25867E-03
H( 3 , 2 )= 0
H( 3 , 3 )= .0188612
H( 3 , 4 )=-.01816
H( 3 , 5 )= 0
H( 3 , 6 )= 0
H( 3 , 7 )= 5.25867E-03
H( 3 , 8 )= 0
H( 3 , 9 )=-7.01155E-04
H( 3 , 10 )= 0
H( 3 , 11 )= 0
H( 3 , 12 )= 0
H( 4 , 1 )= 0
H( 4 , 2 )= 4.17333E-03
H( 4 , 3 )=-.01816
H( 4 , 4 )= .0236338
H( 4 , 5 )= 0
H( 4 , 6 )=-7.373E-03
H( 4 , 7 )= 0
H( 4 , 8 )= 4.17333E-03
H( 4 , 9 )= 0
H( 4 , 10 )=-5.47381E-03
H( 4 , 11 )= 0
H( 4 , 12 )= 7.373E-03
H( 5 , 1 )= 5.055E-03
H( 5 , 2 )= 5.055E-03
```

```
H( 5 , 3 )= 0
H( 5 , 4 )= 0
H( 5 , 5 )= .0160588
H( 5 , 6 )=-5.055E-04
H( 5 , 7 )= 0
H( 5 , 8 )= 0
H( 5 , 9 )= 0
H( 5 , 10 )= 0
H( 5 , 11 )=-.0155533
H( 5 , 12 )= 0
H( 6 , 1 )=-5.055E-03
H( 6 , 2 )=-2.27178E-03
H( 6 , 3 )= 0
H( 6 , 4 )=-7.373E-03
H( 6 , 5 )=-5.055E-04
H( 6 , 6 )= .0121177
H( 6 , 7 )= 0
H( 6 , 8 )= 2.78322E-03
H( 6 , 9 )= 0
H( 6 , 10 )= 7.373E-03
H( 6 , 11 )= 0
H( 6 , 12 )=-.0116122
H( 7 , 1 )= .0262933
H( 7 , 2 )= 0
H( 7 , 3 )= 5.25867E-03
H( 7 , 4 )= 0
H( 7 , 5 )= 0
H( 7 , 6 )= 0
H( 7 , 7 )= .0525867
H( 7 , 8 )= 0
H( 7 , 9 )=-5.25867E-03
H( 7 , 10 )= 0
H( 7 , 11 )= 0
H( 7 , 12 )= 0
H( 8 , 1 )= 0
H( 8 , 2 )= .0301332
H( 8 , 3 )= 0
H( 8 , 4 )= 4.17333E-03
H( 8 , 5 )= 0
H( 8 , 6 )= 2.78322E-03
H( 8 , 7 )= 0
H( 8 , 8 )= .0602664
H( 8 , 9 )= 0
H( 8 , 10 )=-4.17333E-03
H( 8 , 11 )= 0
H( 8 , 12 )=-2.78322E-03
H( 9 , 1 )=-5.25867E-03
H( 9 , 2 )= 0
H( 9 , 3 )=-7.01155E-04
H( 9 , 4 )= 0
```

```
H( 9 , 5 )= 0
H( 9 , 6 )= 0
H( 9 , 7 )=-5.25867E-03
H( 9 , 8 )= 0
H( 9 , 9 )= 7.01155E-04
H( 9 , 10 )= 0
H( 9 , 11 )= 0
H( 9 , 12 )= 0
H( 10 , 1 )= 0
H( 10 , 2 )=-4.17333E-03
H( 10 , 3 )= 0
H( 10 , 4 )=-5.47381E-03
H( 10 , 5 )= 0
H( 10 , 6 )= 7.373E-03
H( 10 , 7 )= 0
H( 10 , 8 )=-4.17333E-03
H( 10 , 9 )= 0
H( 10 , 10 )= 5.47381E-03
H( 10 , 11 )= 0
H( 10 , 12 )=-7.373E-03
H( 11 , 1 )= 0
H( 11 , 2 )= 0
H( 11 , 3 )= 0
H( 11 , 4 )= 0
H( 11 , 5 )=-.0155533
H( 11 , 6 )= 0
H( 11 , 7 )= 0
H( 11 , 8 )= 0
H( 11 , 9 )= 0
H( 11 , 10 )= 0
H( 11 , 11 )= .0155533
H( 11 , 12 )= 0
H( 12 , 1 )= 0
H( 12 , 2 )=-2.78322E-03
H( 12 , 3 )= 0
H( 12 , 4 )= 7.373E-03
H( 12 , 5 )= 0
H( 12 , 6 )=-.0116122
H( 12 , 7 )= 0
H( 12 , 8 )=-2.78322E-03
H( 12 , 9 )= 0
H( 12 , 10 )=-7.373E-03
H( 12 , 11 )= 0
H( 12 , 12 )= .0116122
```

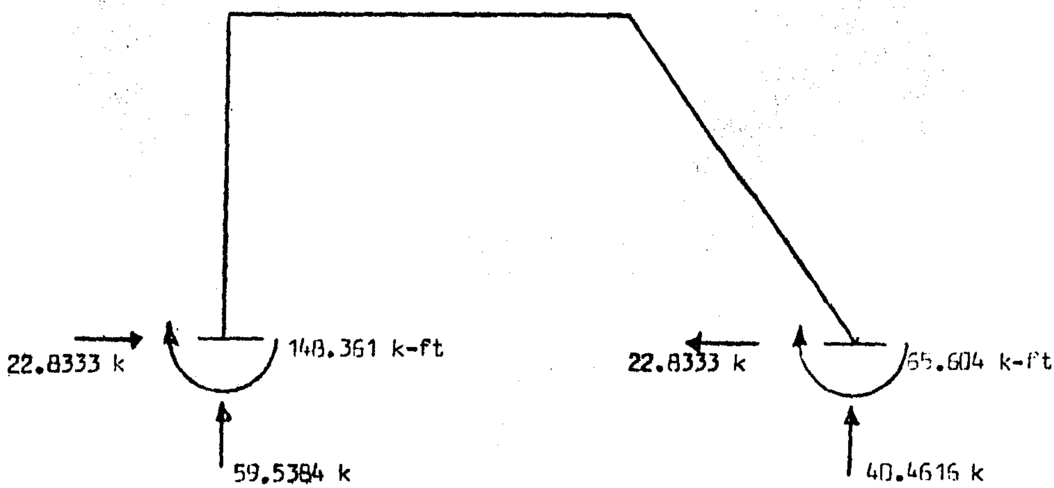
AHORA NECESITO EL VECTOR DE FUERZA F

```
F( 1 ,1)=-166.66
F( 2 ,1)= 166.66
F( 3 ,1)= 0
F( 4 ,1)= 0
F( 5 ,1)=-50
F( 6 ,1)=-50
F( 7 ,1)= 0
F( 8 ,1)= 0
F( 9 ,1)= 0
F( 10 ,1)= 0
F( 11 ,1)= 0
F( 12 ,1)= 0
```

```
EL RESULTADO DE LOS DESPLAZAMIENTOS NO RESTRINGIDOS ES:
B( 1 ,1)=-1741.01
B( 2 ,1)= 2288.99
B( 3 ,1)=-19507.6
B( 4 ,1)=-20764.9
B( 5 ,1)=-3820.01
B( 6 ,1)=-17217.4
```

LAS REACCIONES DEL SISTEMA ESTRUCTURAL SON:

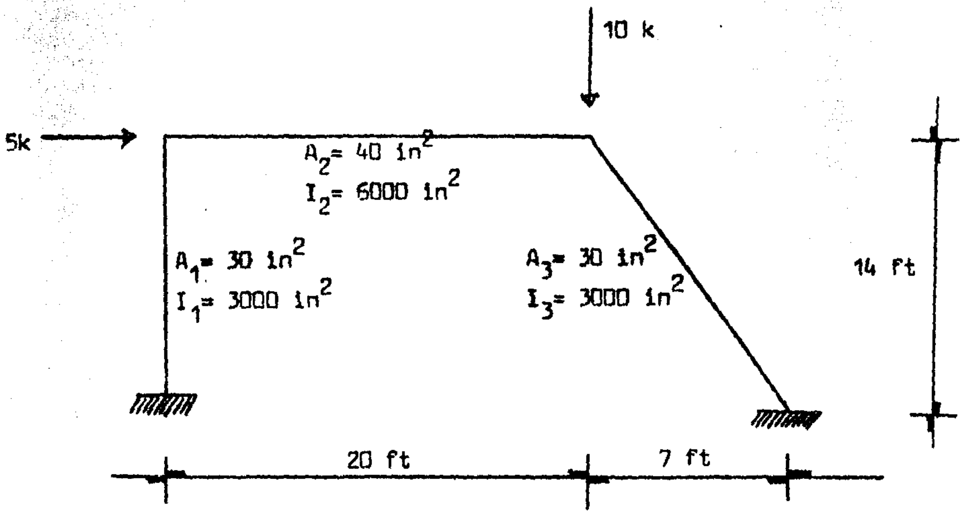
R(7 ,1)=-148.361
R(8 ,1)=-65.604
R(9 ,1)= 22.8333
R(10 ,1)=-22.8333
R(11 ,1)= 59.5384
R(12 ,1)= 40.4616



```
CALCULO DE LAS REACCIONES DE CADA MIEMBRO ESTRUCTURAL:

PARA LA BARRA  1 ESCRIBA LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS :
( P, Q, R, S, T, U)
 7  1  11  5  9  3

AHORA ESCRIBA SU VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO :
FM( 1 , 7 ,1)= 0
FM( 1 , 1 ,1)= 0
FM( 1 , 11 ,1)= 0.
FM( 1 , 5 ,1)= 0
FM( 1 , 9 ,1)= 0
FM( 1 , 3 ,1)= 0
LAS REACCIONES DE LA BARRA  1 SON:
-148.361   (P)
-194.138   (Q)
-22.8333   (R)
 22.8333   (S
 59.5384   (T)
 59.5384   (U)

PARA LA BARRA  2 ESCRIBA LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS :
( P, Q, R, S, T, U)
 1  2. 5  6  3  4

AHORA ESCRIBA SU VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO :
FM( 2 , 1 ,1)= 166.66
FM( 2 , 2 ,1)=-166.66
FM( 2 , 5 ,1)= 50
FM( 2 , 6 ,1)= 50
FM( 2 , 3 ,1)= 0
FM( 2 , 4 ,1)= 0
LAS REACCIONES DE LA BARRA  2 SON:
 194.138   (P)
-3.37064   (Q)
 59.5384   (R)
 40.4616   (S)
 22.8333   (T)
-22.8333   (U)
```

```
PARA LA BARRA  3 ESCRIBA LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS :
( P, Q, R, S, T, U)
 2  8  6  12  4  10

AHORA ESCRIBA SU VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO :
FM( 3 , 2 ,1)= 0
FM( 3 , 8 ,1)= 0
FM( 3 , 6 ,1)= 0
FM( 3 , 12 ,1)= 0
FM( 3 , 4 ,1)= 0
FM( 3 , 10 ,1)= 0
LAS REACCIONES DE LA BARRA  3 SON:
 3.37067  (P)
-65.604   (Q)
-3.45358  (R)
 3.45358  (S)
 46.3344  (T)
-46.3344  (U)
```

***** EJEMPLO 2 *****



Calcular:

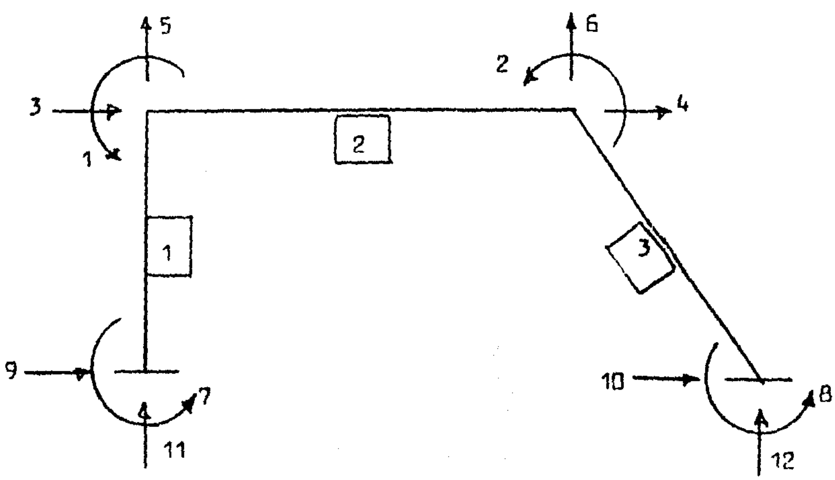
a).- La matriz de rigideces global de la estructura.

b).- El valor de los desplazamientos no restringidos.

c).- Las reacciones en los apoyos del sistema estructural.

d).- Las reacciones en cada miembro estructural.

SOLUCION



DATOS :

MIEMBRO	DESCRIPCION	LONGITUD	AREA NETA	Mo. DE INERCIA	COSENOS DIRECTORES	
		ft.	$ft.^2$	$ft.^4$	cos	sen
1	--	14	0.208	0.145	0	1
2	--	20	0.278	0.289	1	0
3	--	15.65	0.208	0.145	0.4473	-0.8945

NOTA:

Los resultados de los momentos (P) y (Q), están dados en k- ft.

Los resultados de las fuerzas cortantes y normales (R), (S), (T) y (U), están dados en kips.

Donde 1 kip = 1000 lb = 454 kg

1 ft = 0.3048 mt

*************** EJEMPLO ***************

NECESITO LOS SIGUIENTES DATOS:

NUMERO DE BARRAS POR ANALIZAR M= 3

PARA EL MIEMBRO 1	
LONGITUD	14
AREA NETA	.208
MOMENTO DE INERCIA	.145
COSENOS DIRECTORES	
O=COS &=	0
V=SEN &=	1
PARA EL MIEMBRO 2	
LONGITUD	20
AREA NETA	.278
MOMENTO DE INERCIA	.289
COSENOS DIRECTORES	
O=COS &=	1
V=SEN &=	1
PARA EL MIEMBRO 3	
LONGITUD	15.65
AREA NETA	.208
MOMENTO DE INERCIA	.145
COSENOS DIRECTORES	
O=COS &=	.4473
V=SEN &=	-.8946

```
DIGAME EL NUMERO DE DESPLAZAMIENTOS EN EL SISTEMA ESTRUCTURAL.
D=  12


AHORA DE ESTOS  12  DESPLAZAMIENTOS,
DIGAME CUANTOS SON NO RESTRINGIDOS
D(1)=  6



AHORA DIGAME LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS
PARA CADA UNO DE LOS MIEMBROS,

PARA EL MIEMBRO  1 :
 7  1  11  5  9  3

PARA EL MIEMBRO  2 :
 1  2  5  6  3  4

PARA EL MIEMBRO  3 :
 2  8  6  12  4
```

```
** MATRIZ DE RIGIDECES **
H( 1 , 1 )= .0992286
H( 1 , 2 )= .0289
H( 1 , 3 )= 4.43878E-03
H( 1 , 4 )= 0
H( 1 , 5 )= 4.335E-03
H( 1 , 6 )=-4.335E-03
H( 1 , 7 )= .0207143
H( 1 , 8 )= 0
H( 1 , 9 )=-4.43878E-03
H( 1 , 10 )= 0
H( 1 , 11 )= 0
H( 1 , 12 )= 0
H( 2 , 1 )= .0289
H( 2 , 2 )= .0948607
H( 2 , 3 )= 0
H( 2 , 4 )= 3.17775E-03
H( 2 , 5 )= 4.335E-03
H( 2 , 6 )=-2.74613E-03
H( 2 , 7 )= 0
H( 2 , 8 )= .0185304
H( 2 , 9 )= 0
H( 2 , 10 )=-3.17775E-03
H( 2 , 11 )= 0
H( 2 , 12 )=-1.58887E-03
H( 3 , 1 )= 4.43878E-03
H( 3 , 2 )= 0
H( 3 , 3 )= .0145341
H( 3 , 4 )=-.0139
H( 3 , 5 )= 0
H( 3 , 6 )= 0
H( 3 , 7 )= 4.43878E-03
H( 3 , 8 )= 0
H( 3 , 9 )=-6.34111E-04
H( 3 , 10 )= 0
H( 3 , 11 )= 0
H( 3 , 12 )= 0
H( 4 , 1 )= 0
H( 4 , 2 )= 3.17775E-03
H( 4 , 3 )=-.0139
H( 4 , 4 )= .0169225
H( 4 , 5 )= 0
H( 4 , 6 )=-5.1367E-03
H( 4 , 7 )= 0
H( 4 , 8 )= 3.17775E-03
H( 4 , 9 )= 0
H( 4 , 10 )=-3.02[illegible]47E-03
H( 4 , 11 )= 0
H( 4 , 12 )= 5.1367E-03
H( 5 , 1 )= 4.335E-03
H( 5 , 2 )= 4.335E-03
```

```
H( 5 , 3 )= 0
H( 5 , 4 )= 0
H( 5 , 5 )= .0152906
H( 5 , 6 )=-4.335E-04
H( 5 , 7 )= 0
H( 5 , 8 )= 0
H( 5 , 9 )= 0
H( 5 , 10 )= 0
H( 5 , 11 )=-.014857
H( 5 , 12 )= 0
H( 6 , 1 )=-4.335E-03
H( 6 , 2 )=-2.74613E-03
H( 6 , 3 )= 0
H( 6 , 4 )=-5.1367E-03
H( 6 , 5 )=-4.335E-04
H( 6 , 6 )= .011161
H( 6 , 7 )= 0
H( 6 , 8 )= 1.58887E-03
H( 6 , 9 )= 0
H( 6 , 10 )= 5.1367E-03
H( 6 , 11 )= 0
H( 6 , 12 )=-.0107275
H( 7 , 1 )= .0207143
H( 7 , 2 )= 0
H( 7 , 3 )= 4.43878E-03
H( 7 , 4 )= 0
H( 7 , 5 )= 0
H( 7 , 6 )= 0
H( 7 , 7 )= .0414286
H( 7 , 8 )= 0
H( 7 , 9 )=-4.43878E-03
H( 7 , 10 )= 0
H( 7 , 11 )= 0
H( 7 , 12 )= 0
H( 8 , 1 )= 0
H( 8 , 2 )= .0185304
H( 8 , 3 )= 0
H( 8 , 4 )= 3.17775E-03
H( 8 , 5 )= 0
H( 8 , 6 )= 1.58887E-03
H( 8 , 7 )= 0
H( 8 , 8 )= .0[illegible]70607
H( 8 , 9 )= 0
H( 8 , 10 )= 3.17775E-03
H( 8 , 11 )= 0
H( 8 , 12 )=-1.58887E-03
H( 9 , 1 )=-4.43878E-03
H( 9 , 2 )= 0
H( 9 , 3 )=-6.34111E-04
H( 9 , 4 )= 0
```

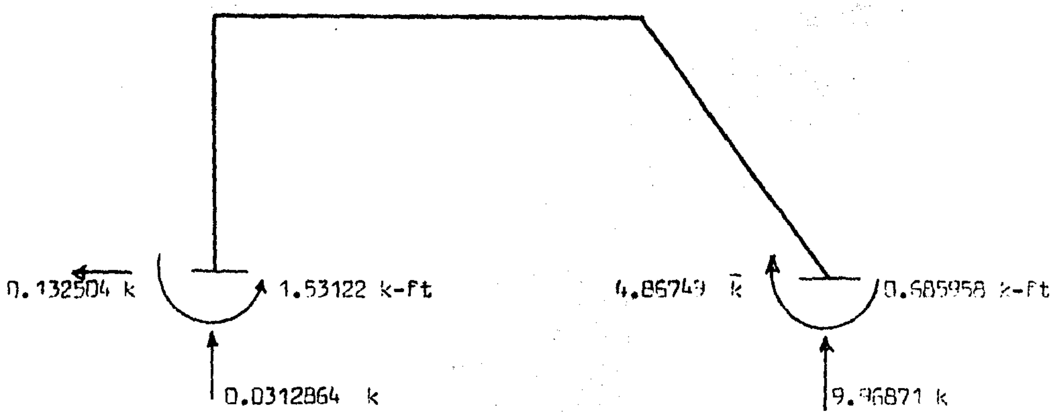
```
H( 9 , 5 )= 0
H( 9 , 6 )= 0
H( 9 , 7 )=-4.43878E-03
H( 9 , 8 )= 0
H( 9 , 9 )= 6.34111E-04
H( 9 , 10 )= 0
H( 9 , 11 )= 0
H( 9 , 12 )= 0
H( 10 , 1 )= 0
H( 10 , 2 )=-3.17775E-03
H( 10 , 3 )= 0
H( 10 , 4 )=-3.02247E-03
H( 10 , 5 )= 0
H( 10 , 6 )= 5.1367E-03
H( 10 , 7 )= 0
H( 10 , 8 )=-3.17775E-03
H( 10 , 9 )= 0
H( 10 , 10 )= 3.02247E-03
H( 10 , 11 )= 0
H( 10 , 12 )=-5.1367E-03
H( 11 , 1 )= 0
H( 11 , 2 )= 0
H( 11 , 3 )= 0
H( 11 , 4 )= 0
H( 11 , 5 )=-.0148571
H( 11 , 6 )= 0
H( 11 , 7 )= 0
H( 11 , 8 )= 0
H( 11 , 9 )= 0
H( 11 , 10 )= 0
H( 11 , 11 )= .0148571
H( 11 , 12 )= 0
H( 12 , 1 )= 0
H( 12 , 2 )=-1.58887E-03
H( 12 , 3 )= 0
H( 12 , 4 )= 5.1367E-03
H( 12 , 5 )= 0
H( 12 , 6 )=-.0107275
H( 12 , 7 )= 0
H( 12 , 8 )=-1.58887E-03
H( 12 , 9 )= 0
H( 12 , 10 )=-5.1367E-03
H( 12 , 11 )= 0
H( 12 , 12 )= .0107275
```

AHORA NECESITO EL VECTOR DE FUERZA F

```
F( 1 ,1)= 0
F( 2 ,1)= 0
F( 3 ,1)= 5
F( 4 ,1)= 0
F( 5 ,1)= 0
F( 6 ,1)=-10
F( 7 ,1)= 0
F( 8 ,1)= 0
F( 9 ,1)= 0
F( 10 ,1)= 0
F( 11 ,1)= 0
F( 12 ,1)= 0
```

EL RESULTADO DE LOS DESPLAZAMIENTOS NO RESTRINGIDOS ES:
B(1 ,1)=-58.2876
B(2 ,1)=-14.2255
B(3 ,1)= 616.974
B(4 ,1)= 266.794
B(5 ,1)=-2.10581
B(6 ,1)=-799.408

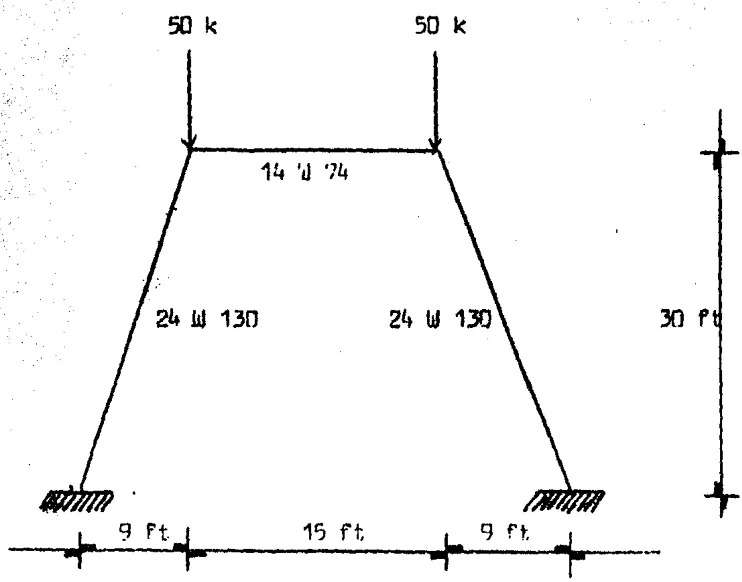
LAS REACCIONES DEL SISTEMA ESTRUCTURAL SON:
R(7 ,1)= 1.53122
R(8 ,1)=-.685958
R(9 ,1)=-.132504
R(10 ,1)=-4.86749
R(11 ,1)= .0312864
R(12 ,1)= 9.96871



```
CALCULO DE LAS REACCIONES DE CADA MIEMBRO ESTRUCTURAL:

PARA LA BARRA  1 ESCRIBA LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS :
( P, Q, R, S, T, U)
 7  1  11  5  9  3

AHORA ESCRIBA SU VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO :
FM( 1 , 7 ,1)= 0
FM( 1 , 1 ,1)= 0
FM( 1 , 11 ,1)= 0
FM( 1 , 5 ,1)= 0
FM( 1 , 9 ,1)= 0
FM( 1 , 3 ,1)= 0
LAS REACCIONES DE LA BARRA  1 SON:
 1.53122   (P)
 .323835   (Q)
 .132504   (R)
-.132504   (S)
 .0312864   (T)
-.0312864   (U)


PARA LA BARRA  2 ESCRIBA LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS :
( P, Q, R, S, T, U)
 1  2  5  6  3  4

AHORA ESCRIBA SU VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO :
FM( 2 , 1 ,1)= 0
FM( 2 , 2 ,1)= 0
FM( 2 , 5 ,1)= 0
FM( 2 , 6 ,1)= 0
FM( 2 , 3 ,1)= 0
FM( 2 , 4 ,1)= 0
LAS REACCIONES DE LA BARRA  2 SON:
-.323834   (P)
 .949561   (Q)
 .0312863   (R)
-.0312863   (S)
 4.86749   (T)
-4.86749   (U)
```

```
PARA LA BARRA  3 ESCRIBA LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS :
( P, Q, R, S, T, U)
 2  8  6  12  4  10

AHORA ESCRIBA SU VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO :
FM( 3 , 2 ,1)= 0
FM( 3 , 8 ,1)= 0
FM( 3 , 6 ,1)= 0
FM( 3 , 12 ,1)= 0
FM( 3 , 4 ,1)= 0
FM( 3 , 10 ,1)= 0
LAS REACCIONES DE LA BARRA  3 SON:
-.949561   (P)
-.685958   (Q)
-.104506   (R)
 .104506   (S)
 11.091   (T)
-11.091   (U)
```

***** EJEMPLO 3 *****



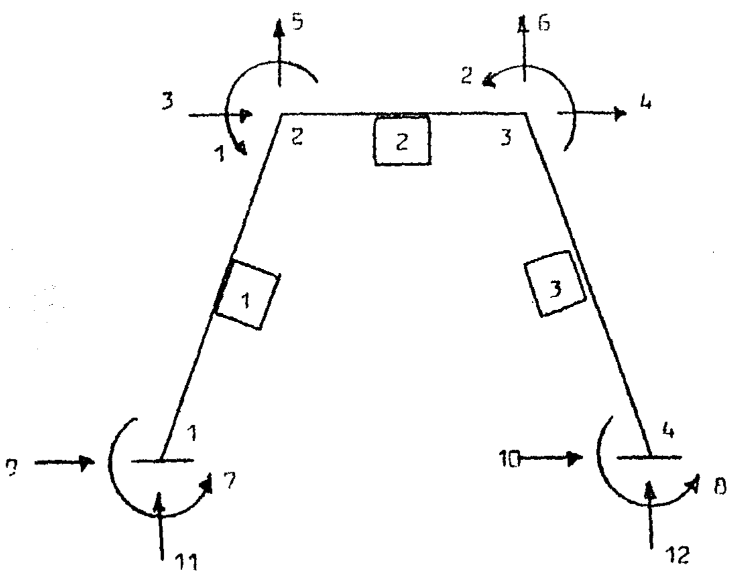
CALCULAR :

a).- La matriz de rigideces global de la estructura.

b).- El valor de los desplazamientos no restringidos.

c).- Las reacciones en los apoyos del sistema estructural.

d).- Las reacciones en cada miembro estructural.



DATOS :

MIEMBRO	DESCRIPCION	LONGITUD	AREA NETA	Mo. DE INERCIA	COSENOS DIRECTORES	
		ft.	$ft.^2$	$ft.^4$	cos	sen
1	24 W 130	31.32	0.2673	0.1938	0.2873	0.9578
2	14 W 74	15	0.1513	0.0383	1	0
3	24 W 130	31.32	0.2673	0.1938	0.2873	-0.9578

NOTA:

Los resultados de los momentos (p) y (Q), estan dados en k- ft.

Los resultados de las fuerzas cortantes y normales (R), (S), (T) y (U), estan dadas en kips.

Donde:

1 kip = 1000 lb = 454 kg

1 Ft = 0.3048 mt

*************** EJEMPLO ***************

NECESITO LOS SIGUIENTES DATOS:

NUMERO DE BARRAS POR ANALIZAR M= 3

PARA EL MIEMBRO 1

LONGITUD	31.32
AREA NETA	.2673
MOMENTO DE INERCIA	.1938
COSENOS DIRECTORES	
O=COS &=	.2873
V=SEN &=	.9578

PARA EL MIEMBRO 2

LONGITUD	15
AREA NETA	.1513
MOMENTO DE INERCIA	.0383
COSENOS DIRECTORES	
O=COS &=	1
V=SEN &=	0

PARA EL MIEMBRO 3

LONGITUD	31.32
AREA NETA	.2673
MOMENTO DE INERCIA	.1938
COSENOS DIRECTORES	
O=COS &=	.2873
V=SEN &=	-.9578

```
DIGAME EL NUMERO DE DESPLAZAMIENTOS EN EL SISTEMA ESTRUCTURAL.
D=  12


AHORA DE ESTOS  12  DESPLAZAMIENTOS,
DIGAME CUANTOS SON NO RESTRINGIDOS
D(1)=  6



AHORA DIGAME LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS
PARA CADA UNO DE LOS MIEMBROS,

PARA EL MIEMBRO  1 :
 7  1  11  5  9  3

PARA EL MIEMBRO  2 :
 1  2  5  6  3  4

PARA EL MIEMBRO  3 :
 2  8  6  12  4  10
```

** MATRIZ DE RIGIDECES **

```
H( 1 , 1 )= .0349643
H( 1 , 2 )= 5.10667E-03
H( 1 , 3 )= 1.13537E-03
H( 1 , 4 )= 0
H( 1 , 5 )= 6.80771E-04
H( 1 , 6 )=-1.02133E-03
H( 1 , 7 )= .0123755
H( 1 , 8 )= 0
H( 1 , 9 )=-1.13537E-03
H( 1 , 10 )= 0
H( 1 , 11 )= 3.40563E-04
H( 1 , 12 )= 0
H( 2 , 1 )= 5.10667E-03
H( 2 , 2 )= .0349643
H( 2 , 3 )= 0
H( 2 , 4 )= 1.13537E-03
H( 2 , 5 )= 1.02133E-03
H( 2 , 6 )=-6.80771E-04
H( 2 , 7 )= 0
H( 2 , 8 )= .0123755
H( 2 , 9 )= 0
H( 2 , 10 )=-1.13537E-03
H( 2 , 11 )= 0
H( 2 , 12 )=-3.40563E-04
H( 3 , 1 )= 1.13537E-03
H( 3 , 2 )= 0
H( 3 , 3 )= .0108659
H( 3 , 4 )=-.010092
H( 3 , 5 )= 2.32765E-03
H( 3 , 6 )= 0
H( 3 , 7 )= 1.13537E-03
H( 3 , 8 )= 0
H( 3 , 9 )=-7.73889E-04
H( 3 , 10 )= 0
H( 3 , 11 )=-2.32765E-03
H( 3 , 12 )= 0
H( 4 , 1 )= 0
H( 4 , 2 )= 1.13537E-03
H( 4 , 3 )=-.010092
H( 4 , 4 )= .0108659
H( 4 , 5 )= 0
H( 4 , 6 )=-2.32765E-03
H( 4 , 7 )= 0
H( 4 , 8 )= 1.13537E-03
H( 4 , 9 )= 0
H( 4 , 10 )=-7.73889E-04
H( 4 , 11 )= 0
H( 4 , 12 )= 2.32765E-03
H( 5 , 1 )= 6.80771E-04
H( 5 , 2 )= 1.02133E-03
```

```
H( 5 , 3 )= 2.32765E-03
H( 5 , 4 )= 0
H( 5 , 5 )= 7.9718E-03
H( 5 , 6 )=-1.36178E-04
H( 5 , 7 )=-3.40563E-04
H( 5 , 8 )= 0
H( 5 , 9 )=-2.32765E-03
H( 5 , 10 )= 0
H( 5 , 11 )=-7.83562E-03
H( 5 , 12 )= 0
H( 6 , 1 )=-1.02133E-03
H( 6 , 2 )=-6.80771E-04
H( 6 , 3 )= 0
H( 6 , 4 )=-2.32765E-03
H( 6 , 5 )=-1.36178E-04
H( 6 , 6 )= 7.9718E-03
H( 6 , 7 )= 0
H( 6 , 8 )= 3.40563E-04
H( 6 , 9 )= 0
H( 6 , 10 )= 2.32765E-03
H( 6 , 11 )= 0
H( 6 , 12 )=-7.83562E-03
H( 7 , 1 )= .0123755
H( 7 , 2 )= 0
H( 7 , 3 )= 1.13537E-03
H( 7 , 4 )= 0
H( 7 , 5 )=-3.40563E-04
H( 7 , 6 )= 0
H( 7 , 7 )= .024751
H( 7 , 8 )= 0
H( 7 , 9 )=-1.13537E-03
H( 7 , 10 )= 0
H( 7 , 11 )= 3.40563E-04
H( 7 , 12 )= 0
H( 8 , 1 )= 0
H( 8 , 2 )= .0123755
H( 8 , 3 )= 0
H( 8 , 4 )= 1.13537E-03
H( 8 , 5 )= 0
H( 8 , 6 )= 3.40563E-04
H( 8 , 7 )= 0
H( 8 , 8 )= .024751
H( 8 , 9 )= 0
H( 8 , 10 )=-1.13537E-03
H( 8 , 11 )= 0
H( 8 , 12 )=-3.40563E-04
H( 9 , 1 )=-1.13537E-03
H( 9 , 2 )= 0
H( 9 , 3 )=-7.73889E-04
H( 9 , 4 )= 0
```

```
H( 9 , 5 )=-2.32765E-03
H( 9 , 6 )= 0
H( 9 , 7 )=-1.13537E-03
H( 9 , 8 )= 0
H( 9 , 9 )= 7.73889E-04
H( 9 , 10 )= 0
H( 9 , 11 )= 2.32765E-03
H( 9 , 12 )= 0
H( 10 , 1 )= 0
H( 10 , 2 )=-1.13537E-03
H( 10 , 3 )= 0
H( 10 , 4 )=-7.73889E-04
H( 10 , 5 )= 0
H( 10 , 6 )= 2.32765E-03
H( 10 , 7 )= 0
H( 10 , 8 )=-1.13537E-03
H( 10 , 9 )= 0
H( 10 , 10 )= 7.73889E-04
H( 10 , 11 )= 0
H( 10 , 12 )=-2.32765E-03
H( 11 , 1 )= 3.40563E-04
H( 11 , 2 )= 0
H( 11 , 3 )=-2.32765E-03
H( 11 , 4 )= 0
H( 11 , 5 )=-7.83562E-03
H( 11 , 6 )= 0
H( 11 , 7 )= 3.40563E-04
H( 11 , 8 )= 0
H( 11 , 9 )= 2.32765E-03
H( 11 , 10 )= 0
H( 11 , 11 )= 7.83562E-03
H( 11 , 12 )= 0
H( 12 , 1 )= 0
H( 12 , 2 )=-3.40563E-04
H( 12 , 3 )= 0
H( 12 , 4 )= 2.32765E-03
H( 12 , 5 )= 0
H( 12 , 6 )=-7.83562E-03
H( 12 , 7 )= 0
H( 12 , 8 )=-3.40563E-04
H( 12 , 9 )= 0
H( 12 , 10 )=-2.32765E-03
H( 12 , 11 )= 0
H( 12 , 12 )= 7.83562E-03
```

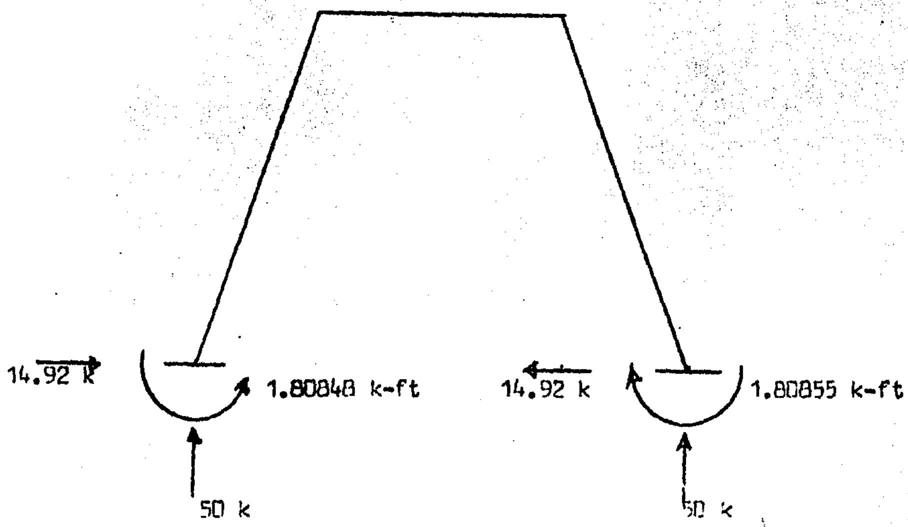
AHORA NECESITO EL VECTOR DE FUERZA F

```
F( 1 ,1)= 0
F( 2 ,1)= 0
F( 3 ,1)= 0
F( 4 ,1)= 0
F( 5 ,1)=-50
F( 6 ,1)=-50
F( 7 ,1)= 0
F( 8 ,1)= 0
F( 9 ,1)= 0
F( 10 ,1)= 0
F( 11 ,1)= 0
F( 12 ,1)= 0
```

EL RESULTADO DE LOS DESPLAZAMIENTOS NO RESTRINGIDOS ES:
B(1 ,1)=-103.449
B(2 ,1)= 103.45
B(3 ,1)= 739.164
B(4 ,1)=-739.237
B(5 ,1)=-6605.19
B(6 ,1)=-6605.21

LAS REACCIONES DEL SISTEMA ESTRUCTURAL SON:

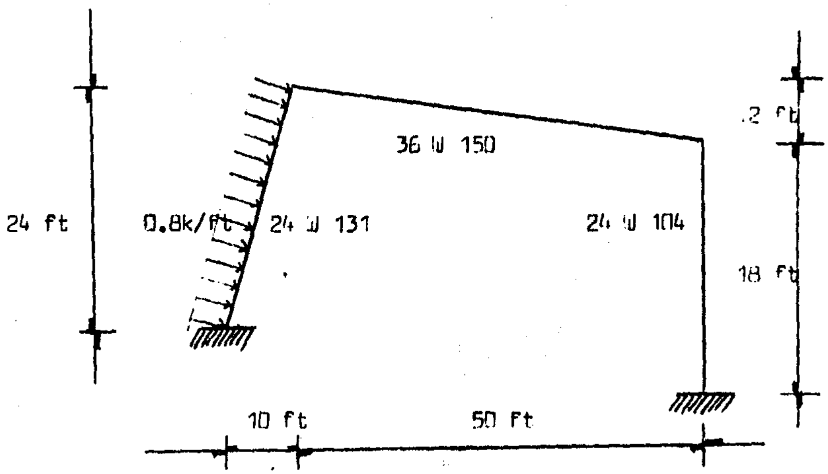
R(7 ,1)= 1.8Ø848
R(8 ,1)=-1.8Ø855
R(9 ,1)= 14.92
R(10 ,1)=-14.92
R(11 ,1)= 5Ø
R(12 ,1)= 5Ø



```
CALCULO DE LAS REACCIONES DE CADA MIEMBRO ESTRUCTURAL:


PARA LA BARRA  1 ESCRIBA LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS :
( P, Q, R, S, T, U)
 7  1  11  5  9  3

AHORA ESCRIBA SU VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO :
FM( 1 , 7 ,1)= 0
FM( 1 , 1 ,1)= 0
FM( 1 , 11 ,1)= 0
FM( 1 , 5 ,1)= 0
FM( 1 , 9 ,1)= 0
FM( 1 , 3 ,1)= 0
LAS REACCIONES DE LA BARRA  1 SON:
 1.80848   (P)
 .528249   (Q)
 .0746081   (R)
-.0746081   (S)
 52.1806   (T)
-52.1806   (U)


PARA LA BARRA  2 ESCRIBA LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS :
( P, Q, R, S, T, U)
 1  2  5  6  3  4

AHORA ESCRIBA SU VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO :
FM( 2 , 1 ,1)= 0
FM( 2 , 2 ,1)= 0
FM( 2 , 5 ,1)= 0
FM( 2 , 6 ,1)= 0
FM( 2 , 3 ,1)= 0
FM( 2 , 4 ,1)= 0
LAS REACCIONES DE LA BARRA  2 SON:
-.528249   (P)
 .528313   (Q)
 4.23193E-06   (R)
-4.23193E-06   (S)
 14.92   (T)
-14.92   (U)
```

```
PARA LA BARRA  3 ESCRIBA LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS :
( P, Q, R, S, T, U)
 2  8  6  12  4  10

AHORA ESCRIBA SU VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO :
FM( 3 , 2 ,1)= 0
FM( 3 , 8 ,1)= 0
FM( 3 , 6 ,1)= 0
FM( 3 , 12 ,1)= 0
FM( 3 , 4 ,1)= 0
FM( 3 , 10 ,1)= 0
LAS REACCIONES DE LA BARRA  3 SON:
-.528312   (P)
-1.80855   (Q)
-.0746126  (R)
 .0746126  (S)
 52.1806   (T)
-52.1806   (U)
```

***** EJEMPLO 4 *****



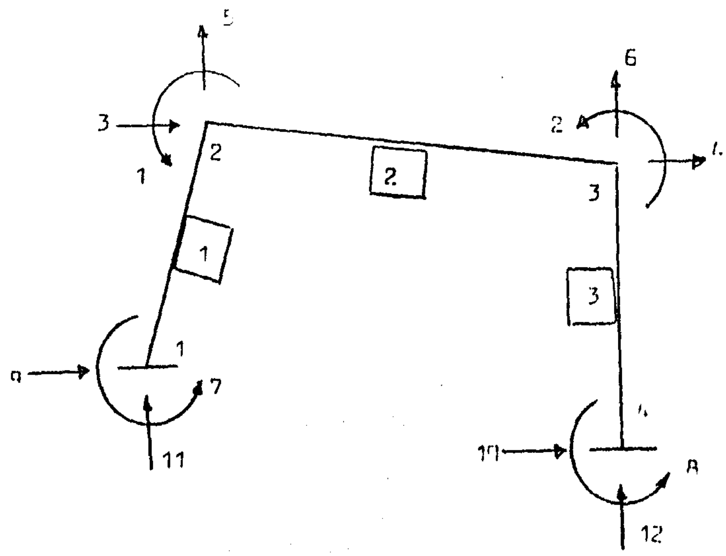
CALCULAR ;

a).- La matriz de rigideces global de la estructura.

b).- El valor de los desplazamientos no restringidos.

c).- Las reacciones en los apoyos del sistema estructural.

d).- Las reacciones en cada miembro estructural.'



DATOS :

MIEMBRO	DESCRIPCION	LONGITUD	AREA NETA	Mo. DE INERCIA	COSENOS DIRECTORES	
		ft.	$ft.^2$	$ft.^4$	cos	sen
1	24 J 131	2[illegible]	0.2673	0.1[illegible]	.384[illegible]	[illegible].923
2	35 J 150	51.42	0.306[illegible]	0.4359	0.9723	-0.2334
3	24 J 104	18	0.2125	0.1404	0	-1

NOTA :

Los resultados de los momentos (P) y (Q), estan dados en k-ft.

Los resultados de las fuerzas cortantes y normales (R), (S), (T) y (U), estan dados en kips.

Donde:

1 kips= 1000 lb = 454 kg.

1 ft = 0.3048 mt.

*************** EJEMPLO ***************

NECESITO LOS SIGUIENTES DATOS:

NUMERO DE BARRAS POR ANALIZAR M= 3

```
PARA EL MIEMBRO  1
  LONGITUD               26
  AREA NETA              .2673
  MOMENTO DE INERCIA     .1938
  COSENOS DIRECTORES
       C=COS &=          .3846
       V=SEN &=          .923

PARA EL MIEMBRO  2
  LONGITUD               51.42
  AREA NETA              .3069
  MOMENTO DE INERCIA     .4359
  COSENOS DIRECTORES
       C=COS &=          .9723
       V=SEN &=         -.2334

PARA EL MIEMBRO  3
  LONGITUD               18
  AREA NETA              .2125
  MOMENTO DE INERCIA     .1494
  COSENOS DIRECTORES
       C=COS &=          0
       V=SEN &=         -1
```

```
DIGAME EL NUMERO DE DESPLAZAMIENTOS EN EL SISTEMA ESTRUCTURAL.
D=  12


AHORA DE ESTOS  12  DESPLAZAMIENTOS,
DIGAME CUANTOS SON NO RESTRINGIDOS
D(1)=  6


AHORA DIGAME LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS
PARA CADA UNO DE LOS MIEMBROS,

PARA EL MIEMBRO  1 :
 7  1  11  5  9  3

PARA EL MIEMBRO  2 :
 1  2  5  6  3  4

PARA EL MIEMBRO  3 :
 2  8  6  12  4  10
```

DIGAME EL NUMERO DE DESPLAZAMIENTOS EN EL SISTEMA ESTRUCTURAL.
D= 12

AHORA DE ESTOS 12 DESPLAZAMIENTOS,
DIGAME CUANTOS SON NO RESTRINGIDOS
D(1)= 6

AHORA DIGAME LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS
PARA CADA UNO DE LOS MIEMBROS.

PARA EL MIEMBRO 1 :
7 1 11 5 9 3

PARA EL MIEMBRO 2 :
1 2 5 6 3 4

PARA EL MIEMBRO 3 :
2 8 6 12 4 10

```
** MATRIZ DE RIGIDECES **
H( 1 , 1 )= .0637244
H( 1 , 2 )= .0169545
H( 1 , 3 )= 1.81854E-03
H( 1 , 4 )=-2.30874E-04
H( 1 , 5 )= 3.00219E-04
H( 1 , 6 )=-9.61776E-04
H( 1 , 7 )= .0149077
H( 1 , 8 )= 0
H( 1 , 9 )=-1.58767E-03
H( 1 , 10 )= 0
H( 1 , 11 )= 6.61557E-04
H( 1 , 12 )= 0
H( 2 , 1 )= .0169545
H( 2 , 2 )= .067109
H( 2 , 3 )= 2.30874E-04
H( 2 , 4 )= 2.53579E-03
H( 2 , 5 )= 9.61776E-04
H( 2 , 6 )=-9.61776E-04
H( 2 , 7  = 0
H( 2 , 8 )= .0166
H( 2 , 9 )= 0
H( 2 , 10 )=-2.76667E-03
H( 2 , 11 )= 0
H( 2 , 12 )= 0
H( 3 , 1 )= 1.81854E-03
H( 3 , 2 )= 2.30874E-04
H( 3 , 3 )= 7.27794E-03
H( 3 , 4 )=-5.64452E-03
H( 3 , 5 )= 2.25603E-03
H( 3 , 6 )= 1.34573E-03
H( 3 , 7 )= 1.58767E-03
H( 3 , 8 )= 0
H( 3 , 9 )=-1.63343E-03
H( 3 , 10 )= 0
H( 3 , 11 )=-3.60256E-03
H( 3 , 12 )= 0
H( 4 , 1 )=-2.30874E-04
H( 4 , 2 )= 2.53579E-03
H( 4 , 3 )=-5.64452E-03
H( 4 , 4 )= 5.95192E-03
H( 4 , 5 )= 1.34573E-03
H( 4 , 6 )=-1.34573E-03
H( 4 , 7 )= 0
H( 4 , 8 )= 2.76667E-03
H( 4 , 9 )= 0
H( 4 , 10 )=-3.27407E-04
H( 4 , 11 )= 0
H( 4 , 12 )= 0
H( 5 , 1 )= 3.00219E-04
H( 5 , 2 )= 9.61776E-04
```

```
H( 5 , 3 )= 2.25683E-03
H( 5 , 4 )= 1.34573E-03
H( 5 , 5 )= 9.13557E-03
H( 5 , 6 )=-3.6151E-04
H( 5 , 7 )=-6.61557E-04
H( 5 , 8 )= 0
H( 5 , 9 )=-3.60256E-03
H( 5 , 10 )= 0
H( 5 , 11 )=-8.77836E-03
H( 5 , 12 )= 0
H( 6 , 1 )=-9.61776E-04
H( 6 , 2 )=-9.61776E-04
H( 6 , 3 )= 1.34573E-03
H( 6 , 4 )=-1.34573E-03
H( 6 , 5 )=-3.6151E-04
H( 6 , 6 )= .0121671
H( 6 , 7 )= 0
H( 6 , 8 )= 0
H( 6 , 9 )= 0
H( 6 , 10 )= 0
H( 6 , 11 )= 0
H( 6 , 12 )=-.0118056
H( 7 , 1 )= .0149077
H( 7 , 2 )= 0
H( 7 , 3 )= 1.58767E-03
H( 7 , 4 )= 0
H( 7 , 5 )=-6.61557E-04
H( 7 , 6 )= 0
H( 7 , 7 )= .0298154
H( 7 , 8 )= 0
H( 7 , 9 )=-1.58767E-03
H( 7 , 10 )= 0
H( 7 , 11 )= 6.61557E-04
H( 7 , 12 )= 0
H( 8 , 1 )= 0
H( 8 , 2 )= .0166
H( 8 , 3 )= 0
H( 8 , 4 )= 2.75667E-03
H( 8 , 5 )= 0
H( 8 , 6 )= 0
H( 8 , 7 )= 0
H( 8 , 8 )= .0332
H( 8 , 9 )= 0
H( 8 , 10 )=-2.75667E-03
H( 8 , 11 )= 0
H( 8 , 12 )= 0
H( 9 , 1 )=-1.58767E-03
H( 9 , 2 )= 0
H( 9 , 3 )=-1.63343E-03
H( 9 , 4 )= 0
```

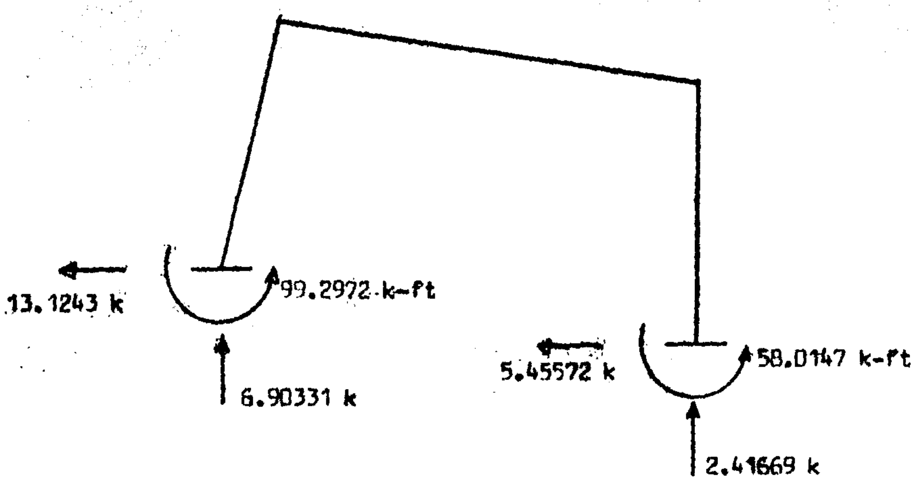
```
H( 9 , 5 )=-3.60256E-03
H( 9 , 6 )= 0
H( 9 , 7 )=-1.56767E-03
H( 9 , 8 )= 0
H( 9 , 9 )= 1.63343E-03
H( 9 , 10 )= 0
H( 9 , 11 )= 3.60256E-03
H( 9 , 12 )= 0
H( 10 , 1 )= 0
H( 10 , 2 )=-2.76667E-03
H( 10 , 3 )= 0
H( 10 , 4 )=-3.07407E-04
H( 10 , 5 )= 0
H( 10 , 6 )= 0
H( 10 , 7 )= 0
H( 10 , 8 )=-2.76667E-03
H( 10 , 9 )= 0
H( 10 , 10 )= 3.07407E-04
H( 10 , 11 )= 0
H( 10 , 12 )= 0
H( 11 , 1 )= 6.61557E-04
H( 11 , 2 )= 0
H( 11 , 3 )=-3.60256E-03
H( 11 , 4 )= 0
H( 11 , 5 )=-8.77806E-03
H( 11 , 6 )= 0
H( 11 , 7 )= 6.61557E-04
H( 11 , 8 )= 0
H( 11 , 9 )= 3.60256E-03
H( 11 , 10 )= 0
H( 11 , 11 )= 8.77806E-03
H( 11 , 12 )= 0
H( 12 , 1 )= 0
H( 12 , 2 )= 0
H( 12 , 3 )= 0
H( 12 , 4 )= 0
H( 12 , 5 )= 0
H( 12 , 6 )=-.0118056
H( 12 , 7 )= 0
H( 12 , 8 )= 0
H( 12 , 9 )= 0
H( 12 , 10 )= 0
H( 12 , 11 )= 0
H( 12 , 12 )= .0118056
```

AHORA NECESITO EL VECTOR DE FUERZA F

```
F( 1 ,1)= 45.06
F( 2 ,1)= 0
F( 3 ,1)= 9.29
F( 4 ,1)= 0
F( 5 ,1)=-4.66
F( 6 ,1)= 0
F( 7 ,1)=-45.06
F( 8 ,1)= 0
F( 9 ,1)= 9.29
F( 10 ,1)= 0
F( 11 ,1)=-4.66
F( 12 ,1)= 0
```

```
EL RESULTADO DE LOS DESPLAZAMIENTOS NO RESTRINGIDOS ES.
B( 1 ,1)= 401.855
B( 2 ,1)=-1073.88
B( 3 ,1)= 25870.3
B( 4 ,1)= 27412.5
B( 5 ,1)=-10842.6
B( 6 ,1)=-204.728
```

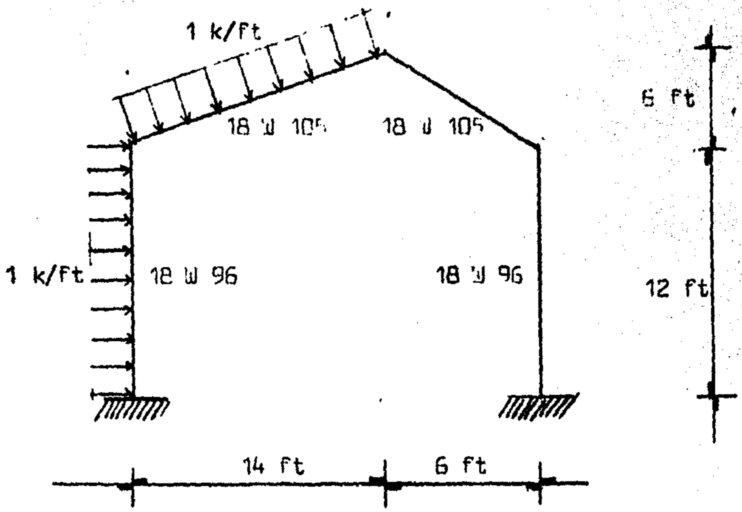
```
LAS REACCIONES DEL SISTEMA ESTRUCTURAL SON:
R( 7 ,1)= 99.2972
R( 8 ,1)= 58.0147
R( 9 ,1)=-13.1243
R( 10 ,1)=-5.45572
R( 11 ,1)= 6.90331
R( 12 ,1)= 2.41669
```



```
CALCULO DE LAS REACCIONES DE CADA MIEMBRO ESTRUCTURAL:

PARA LA BARRA  1 ESCRIBA LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS :
( P, Q, R, S, T, U)
 7  1  11  5  9  3

AHORA ESCRIBA SU VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO :
FM( 1 , 7 ,1)= 45.06
FM( 1 , 1 ,1)=-45.06
FM( 1 , 11 ,1)= 10.4
FM( 1 , 5 ,1)= 10.4
FM( 1 , 9 ,1)= 0
FM( 1 , 3 ,1)= 0
LAS REACCIONES DE LA BARRA  1 SON:
 99.2972  (P)
 15.1679  (Q)
 14.8025  (R)
 5.9975   (S)
 .596001  (T
-.596001  (U

PARA LA BARRA  2 ESCRIBA LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS :
( P, Q, R, S, T, U)
 1  2  5  6  3  4

AHORA ESCRIBA SU VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO :
FM( 2 , 1 ,1)= 0
FM( 2 , 2 ,1)= 0
FM( 2 , 5 ,1)= 0
FM( 2 , 6 ,1)= 0
FM( 2 , 3 ,1)= 0
FM( 2 , 4 ,1)= 0
LAS REACCIONES DE LA BARRA  2 SON:
-15.1679  (P)
-40.1882  (Q)
 1.07655  (R)
 1.07655  (S)
 5.86958  (T)
-5.86958  (U)
```

```
PARA LA BARRA  3 ESCRIBA LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS :
( P, Q, R, S, T, U)
 2  8  5  12  4  10

AHORA ESCRIBA EL VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO :
FM( 3 , 2 ,1)= 0
FM( 3 , 8 ,1)= 0
FM( 3 , 6 ,1)= 0
FM( 3 , 12 ,1)= 0
FM( 3 , 4 ,1)= 0
FM( 3 , 10 ,1)= 0
LAS REACCIONES DE LA BARRA  3 SON:
 40.1863  (P)
 58.0147  (Q)
 5.45572  (R)
-5.45572  (S)
 2.41669  (T)
-2.41669  (U)
```

***** EJEMPLO [illegible] *****

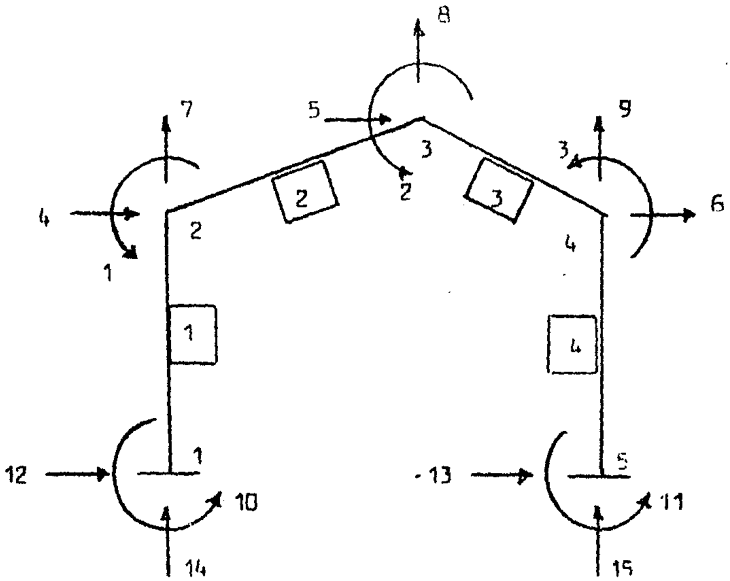


CALCULAR :

a).- La matriz de rigideces global de la estructura.

b).- El valor de los desplazamientos no restringidos.

c).- Las reacciones en los apoyos del sistema estructural.



DATOS

MIEMBRO	DESCRIPCION	LONGITUD	AREA NETA	Mo. DE INERCIA	COSENOS DIRECTORES	
		ft.	$ft.^2$	$ft.^4$	cos	sen
1	18 W 96	12	0.1979	0.08439	[illegible]	[illegible]
2	18 W 105	15.23	0.2159	0.09211	0.7192	0.3937
3	18 W 105	8.48	0.2159	0.09211	0.7071	-0.7071
4	18 W 96	12	0.1979	0.08439	0	-1

NOTA :

Los resultados de los momentos (P) y (Q), estan dados en k-ft.

Los resultados de las fuerzas cortantes y normales (R), (S), (T) y (U), estan dados en kips.

Donde:

1 kip = 1000 lb = 454 kg

1 ft = 0.3048 mt.

*************** EJEMPLO ***************

NECESITO LOS SIGUIENTES DATOS:

NUMERO DE BARRAS POR ANALIZAR M= 4

PARA EL MIEMBRO 1

LONGITUD	12
AREA NETA	.1979
MOMENTO DE INERCIA	.08439
COSENOS DIRECTORES	
O=COS &=	0
V=SEN &=	1

PARA EL MIEMBRO 2

LONGITUD	15.23
AREA NETA	.2159
MOMENTO DE INERCIA	.09211
COSENOS DIRECTORES	
O=COS &=	.9192
V=SEN &=	.3937

PARA EL MIEMBRO 3

LONGITUD	3.48
AREA NETA	.2159
MOMENTO DE INERCIA	.09211
COSENOS DIRECTORES	
O=COS &=	.7071
V=SEN &=	-.7071

PARA EL MIEMBRO 4

LONGITUD	12
AREA NETA	.1979
MOMENTO DE INERCIA	.08439
COSENOS DIRECTORES	
O=COS &=	0
V=SEN &=	-1

```
DIGAME EL NUMERO DE DESPLAZAMIENTOS EN EL SISTEMA ESTRUCTURAL,
D=  15


AHORA DE ESTOS  15  DESPLAZAMIENTOS,
DIGAME CUANTOS SON NO RESTRINGIDOS
D(1)=  9


AHORA DIGAME LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS
PARA CADA UNO DE LOS MIEMBROS,

PARA EL MIEMBRO  1 :
 10  1  14  7  12  4

PARA EL MIEMBRO  2 :
 1  2  7  8  4  5

PARA EL MIEMBRO  3 :
 2  3  8  9  5  6

PARA EL MIEMBRO  4 :
 3  11  9  15  6  3
```

** MATRIZ DE RIGIDECES **

```
H( 1 , 1 )= .0523217
H( 1 , 2 )= .0120959
H( 1 , 3 )= 0
H( 1 , 4 )= 2.57821E-03
H( 1 , 5 )= 9.38045E-04
H( 1 , 6 )= 0
H( 1 , 7 )= 2.19012E-03
H( 1 , 8 )=-2.19012E-03
H( 1 , 9 )= 0
H( 1 , 10 )= .014065
H( 1 , 11 )= 0
H( 1 , 12 )=-3.51625E-03
H( 1 , 13 )= 0
H( 1 , 14 )= 0
H( 1 , 15 )= 0
H( 2 , 1 )= .0120959
H( 2 , 2 )= .0676398
H( 2 , 3 )= .0217241
H( 2 , 4 )=-9.38045E-04
H( 2 , 5 )= 6.37239E-03
H( 2 , 6 )=-5.43435E-03
H( 2 , 7 )= 2.19012E-03
H( 2 , 8 )= 3.24423E-03
H( 2 , 9 )=-5.43435E-03
H( 2 , 10 )= 0
H( 2 , 11 )= 0
H( 2 , 12 )= 0
H( 2 , 13 )= 0
H( 2 , 14 )= 0
H( 2 , 15 )= 0
H( 3 , 1 )= 0
H( 3 , 2 )= .0217241
H( 3 , 3 )= .0440342
H( 3 , 4 )= 0
H( 3 , 5 )= 5.43435E-03
H( 3 , 6 )=-6.02039E-03
H( 3 , 7 )= 0
H( 3 , 8 )= 5.43435E-03
H( 3 , 9 )=-5.43435E-03
H( 3 , 10 )= 0
H( 3 , 11 )=-3.51625E-03
H( 3 , 12 )= 0
H( 3 , 13 )= 0
H( 3 , 14 )= 0
H( 3 , 15 )= 0
H( 4 , 1 )= 2.57821E-03
H( 4 , 2 )=-9.38045E-04
H( 4 , 3 )= 0
H( 4 , 4 )= .0126122
H( 4 , 5 )=-.0120262
```

```
H( 4 , 6 )= 0
H( 4 , 7 )= 5.0169E-03
H( 4 , 8 )=-5.0169E-03
H( 4 , 9 )= 0
H( 4 , 10 )= 3.51625E-03
H( 4 , 11 )= 0
H( 4 , 12 )=-5.86042E-04
H( 4 , 13 )= 0
H( 4 , 14 )= 0
H( 4 , 15 )= 0
H( 5 , 1 )= 9.38045E-04
H( 5 , 2 )= 6.37239E-03
H( 5 , 3 )= 5.43435E-03
H( 5 , 4 )=-.0120261
H( 5 , 5 )= .0256622
H( 5 , 6 )=-.013636
H( 5 , 7 )=-5.0169E-03
H( 5 , 8 )=-6.80653E-03
H( 5 , 9 )= .0118234
H( 5 , 10 )= 0
H( 5 , 11 )= 0
H( 5 , 12 )= 0
H( 5 , 13 )= 0
H( 5 , 14 )= 0
H( 5 , 15 )= 0
H( 6 , 1 )= 0
H( 6 , 2 )=-5.43435E-03
H( 6 , 3 )=-6.02039E-03
H( 6 , 4 )= 0
H( 6 , 5 )=-.013636
H( 6 , 6 )= .014222
H( 6 , 7 )= 0
H( 6 , 8 )= .0118234
H( 6 , 9 )=-.0118234
H( 6 , 10 )= 0
H( 6 , 11 )= 3.51625E-03
H( 6 , 12 )= 0
H( 6 , 13 )= 0
H( 6 , 14 )= 0
H( 6 , 15 )= 0
H( 7 , 1 )= 2.19012E-03
H( 7 , 2 )= 2.19012E-03
H( 7 , 3 )= 0
H( 7 , 4 )= 5.0169E-03
H( 7 , 5 )=-5.0169E-03
H( 7 , 6 )= 0
H( 7 , 7 )= .0189533
H( 7 , 8 )=-2.46164E-03
H( 7 , 9 )= 0
H( 7 , 10 )= 0
```

```
H( 7 , 11 )= 0
H( 7 , 12 )= 0
H( 7 , 13 )= 0
H( 7 , 14 )=-.0164917
H( 7 , 15 )= 0
H( 8 , 1 )=-2.19012E-03
H( 8 , 2 )= 3.24423E-03
H( 8 , 3 )= 5.43435E-03
H( 8 , 4 )=-5.0169E-03
H( 8 , 5 )=-6.80653E-03
H( 8 , 6 )= .0118234
H( 8 , 7 )=-2.46164E-03
H( 8 , 8 )= .0160976
H( 8 , 9 )=-.013636
H( 8 , 10 )= 0
H( 8 , 11 )= 0
H( 8 , 12 )= 0
H( 8 , 13 )= 0
H( 8 , 14 )= 0
H( 8 , 15 )= 0
H( 9 , 1 )= 0
H( 9 , 2 )=-5.43435E-03
H( 9 , 3 )=-5.43435E-03
H( 9 , 4 )= 0
H( 9 , 5 )= .0118234
H( 9 , 6 )=-.0118234
H( 9 , 7 )= 0
H( 9 , 8 )=-.013636
H( 9 , 9 )= .0301277
H( 9 , 10 )= 0
H( 9 , 11 )= 0
H( 9 , 12 )= 0
H( 9 , 13 )= 0
H( 9 , 14 )= 0
H( 9 , 15 )=-.0164917
H( 10 , 1 )= .014065
H( 10 , 2 )= 0
H( 10 , 3 )= 0
H( 10 , 4 )= 3.51625E-03
H( 10 , 5 )= 0
H( 10 , 6 )= 0
H( 10 , 7 )= 0
H( 10 , 8 )= 0
H( 10 , 9 )= 0
H( 10 , 10 )= .02813
H( 10 , 11 )= 0
H( 10 , 12 )=-3.51625E-03
H( 10 , 13 )= 0
H( 10 , 14 )= 0
H( 10 , 15 )= 0
```

```
H( 11 , 1 )= 0
H( 11 , 2 )= 0
H( 11 , 3 )=-3.51625E-03
H( 11 , 4 )= 0
H( 11 , 5 )= 0
H( 11 , 6 )= 3.51625E-03
H( 11 , 7 )= 0
H( 11 , 8 )= 0
H( 11 , 9 )= 0
H( 11 , 10 )= 0
H( 11 , 11 )= .02813
H( 11 , 12 )= 0
H( 11 , 13 )= 0
H( 11 , 14 )= 0
H( 11 , 15 )= 0
H( 12 , 1 )=-3.51625E-03
H( 12 , 2 )= 0
H( 12 , 3 )= 0
H( 12 , 4 )=-5.86042E-04
H( 12 , 5 )= 0
H( 12 , 6 )= 0
H( 12 , 7 )= 0
H( 12 , 8 )= 0
H( 12 , 9 )= 0
H( 12 , 10 )=-3.51625E-03
H( 12 , 11 )= 0
H( 12 , 12 )= 5.86042E-04
H( 12 , 13 )= 0
H( 12 , 14 )= 0
H( 12 , 15 )= 0
H( 13 , 1 )= 0
H( 13 , 2 )= 0
H( 13 , 3 )= 0
H( 13 , 4 )= 0
H( 13 , 5 )= 0
H( 13 , 6 )= 0
H( 13 , 7 )= 0
H( 13 , 8 )= 0
H( 13 , 9 )= 0
H( 13 , 10 )= 0
H( 13 , 11 )= 0
H( 13 , 12 )= 0
H( 13 , 13 )= 0
H( 13 , 14 )= 0
H( 13 , 15 )= 0
H( 14 , 1 )= 0
H( 14 , 2 )= 0
H( 14 , 3 )= 0
H( 14 , 4 )= 0
H( 14 , 5 )= 0
```

```
H( 14 , 6 )= 0
H( 14 , 7 )=-.0164917
H( 14 , 8 )= 0
H( 14 , 9 )= 0
H( 14 , 10 )= 0
H( 14 , 11 )= 0
H( 14 , 12 )= 0
H( 14 , 13 )= 0
H( 14 , 14 )= .0164917
H( 14 , 15 )= 0
H( 15 , 1 )= 0
H( 15 , 2 )= 0
H( 15 , 3 )= 0
H( 15 , 4 )= 0
H( 15 , 5 )= 0
H( 15 , 6 )= 0
H( 15 , 7 )= 0
H( 15 , 8 )= 0
H( 15 , 9 )=-.0164917
H( 15 , 10 )= 0
H( 15 , 11 )= 0
H( 15 , 12 )= 0
H( 15 , 13 )= 0
H( 15 , 14 )= 0
H( 15 , 15 )= .0164917
```

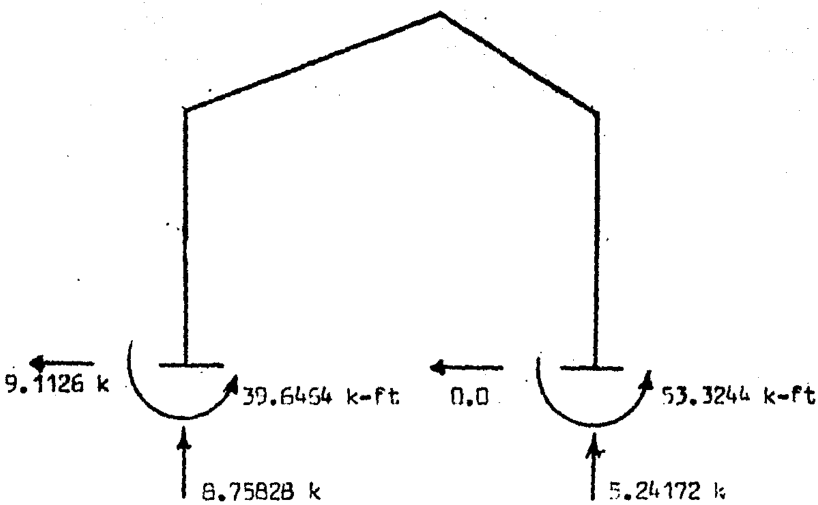
AHORA NECESITO EL VECTOR DE FUERZA F

```
F( 1 ,1)=-7.329
F( 2 ,1)= 19.32
F( 3 ,1)= 0
F( 4 ,1)= 9
F( 5 ,1)= 3
F( 6 ,1)= 0
F( 7 ,1)=-7
F( 8 ,1)=-7
F( 9 ,1)= 0
F( 10 ,1)=-12
F( 11 ,1)= 0
F( 12 ,1)= 6
F( 13 ,1)= 0
F( 14 ,1)= 0
F( 15 ,1)= 0
```

```
EL RESULTADO DE LOS DESPLAZAMIENTOS NO RESTRINGIDOS ES:
B( 1 ,1)=-1775.62
B( 2 ,1)= 457.318
B( 3 ,1)= 469.239
B( 4 ,1)= 12965
B( 5 ,1)= 13539.9
B( 6 ,1)= 15634.4
B( 7 ,1)=-531.073
B( 8 ,1)=-2957.25
B( 9 ,1)=-317.641
```

'AS REACCIONES DEL SISTEMA ESTRUCTURAL SON:

```
R( 10 ,1)= 39.6464
R( 11 ,1)= 53.3244
R( 12 ,1)=-9.1126
R( 13 ,1)= 0
R( 14 ,1)= 8.75828
R( 15 ,1)= 5.24172
```



" APENDICE B "

8.1.- GEOMETRIA GENERAL.-

La geometría general de la estructura se puede definir por medio de longitudes de barras, claros y alturas de entrepiso.

Es necesario conocer áreas y momentos de inercia de todas y cada una de las barras. Estas propiedades geométricas estan referidas con respecto a un sistema de ejes locales. La definición del sistema de ejes locales, es tal que el eje "x" siempre coincide con el eje longitudinal de la barra.

8.2.- SISTEMA DE COORDENADAS GENERALIZADAS.-

Es el conjunto de fuerzas o desplazamientos, numerados en forma secuencial y localizados en una estructura en posición y dirección. Así, para el método de Rigideces, las coordenadas generalizadas son la posición y dirección de los desplazamientos incógnitas.

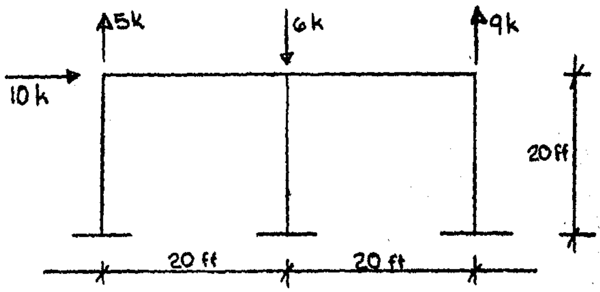
8.3.- FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS.-

Por fuerzas se entiende, no solo las lineales sino también los momentos y por desplazamientos, se entiende, no solo los lineales sino los rotacionales también.

Los elementos de una matriz, ya sean fuerzas o desplazamientos, se agrupan en un orden secuencial de las coordenadas generalizadas.

B.4. EJEMPLOS :

1.- Se tiene la siguiente estructura:



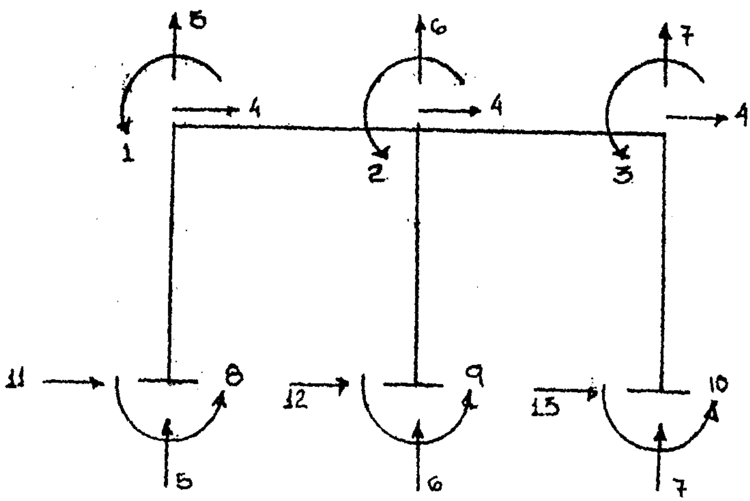
Se requiere:

a) Encontrar su vector desplazamientos.(Sin considerar deformación axial).

b) Encontrar su vector fuerzas.

SOLUCION:

Los desplazamientos son:



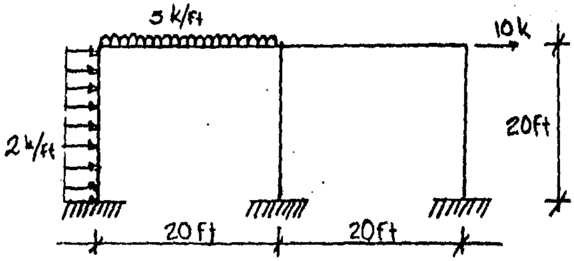
a).- Vector desplazamientos:

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ 0_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ 0_8 \\ 0_9 \\ 0_{10} \\ \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \\ \Delta_{13} \end{bmatrix}$$

b).- Vector de fuerzas:

$$[JL] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \\ -6 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \end{array}$$

2.- Se tiene la siguiente estructura:



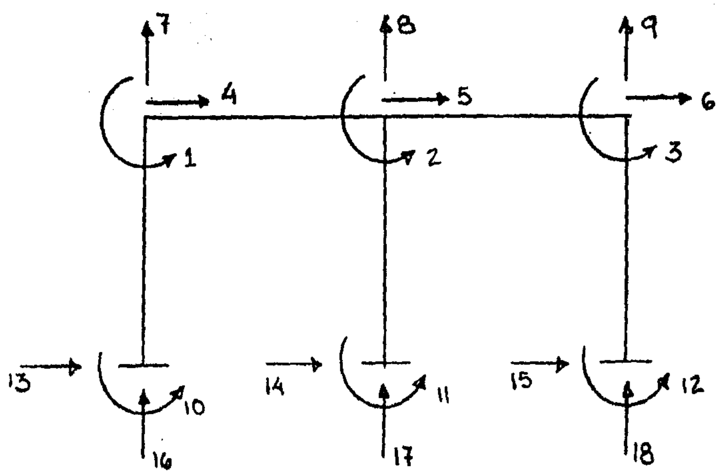
Se requiere:

a).- Encontrar su vector desplazamientos (considerando deformaciones axiales).

b).- Encontrar su vector de fuerzas.

SOLUCION :

Los desplazamientos son:



a).- Vector desplazamientos :

$$
[\Delta] = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \\ \Delta_{13} \\ \Delta_{14} \\ \Delta_{15} \\ \Delta_{16} \\ \Delta_{17} \\ \Delta_{18} \end{bmatrix}
$$

b).- Vector fuerzas:

$$
[J_L] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -100 \\ 166.67 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 10 \\ -50 \\ -50 \\ 0 \\ -66.67 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{array}
$$

" APENDICE C "

C.1.- SISTEMAS DE ECUACIONES.-

Un sistema de "m" ecuaciones lineales con "n" incógnitas se expresa como sigue:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + \cdots\cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + \cdots\cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + \cdots\cdots + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + \cdots\cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

El cual puede ser escrito matricialmente como :

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

Y también en una notación matricial como:

$$[A]\,[X] = [B]$$

Donde:

$$
A = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

C.2.-SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES POR MEDIO DE LA MATRIZ INVERSA.-

Un sistema de ecuaciones lineales puede ser resuelto por medio de la matriz inversa, si ésta existe.

Se tiene un sistema de ecuaciones lineales:

$$[A]\ [X] = [B]$$

Si multiplico por $[A]^{-1}$ a cada lado de la igualdad:

$$[A]^{-1}\ (\ [A]\ [X]\ ) = [A]^{-1}\ [B]$$

Como:

$$[A]^{-1}\ [A] = [I]$$

Se tiene que:

$$[I]\ [X] = [A]^{-1}\ [B]$$

Por lo tanto:

$$[X] = [A]^{-1}\ [B]$$

C.2.1.-Inversión de matrices:

C.2.1.a - Método : Matriz Adjunta:

Los elementos de la matriz $[A]$, se sustituyen por sus respectivos cofactores α_{ij} , por lo tanto:

$$\text{Adj}\ [A] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

El cofactor de un elemento $a_{ij} = \alpha_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Donde M_{ij} es el menor de un determinante, que se define como el determinante que queda al eliminar el renglón i ésimo y la columna j ésima.

Ahora, si cada elemento de la Adjunta de $[A]$ se divide entre el determinante de $[A]$ ($|A|$), nos da la inversa de la matriz $[A]$ ($[A]^{-1}$):

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{11}}{|A|} & \frac{\alpha_{12}}{|A|} & \frac{\alpha_{13}}{|A|} & \cdots & \frac{\alpha_{n1}}{|A|} \\ \frac{\alpha_{21}}{|A|} & \frac{\alpha_{22}}{|A|} & \frac{\alpha_{23}}{|A|} & \cdots & \frac{\alpha_{n2}}{|A|} \\ \frac{\alpha_{31}}{|A|} & \frac{\alpha_{32}}{|A|} & \frac{\alpha_{33}}{|A|} & \cdots & \frac{\alpha_{n3}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\alpha_{1n}}{|A|} & \frac{\alpha_{2n}}{|A|} & \frac{\alpha_{3n}}{|A|} & & \frac{\alpha_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

C.2.1.b.- Método : Transformación de renglones :

Este método es más explicativo por medio de un ejemplo:

Determinar la inversa de la matriz A ;

Donde $[A] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

Solución:

$$\left[[A] \,\vdots\, [I] \right] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

1º.- Multiplicar el renglón 1 por 2 y sumarlo al renglón 2.
2º.-Multiplicar el renglón 1 por 3 y restarlo al renglón 3.
Por lo tanto se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

3º.-Multiplicar el renglón 2 por -½.
Por lo tanto se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

4º.-Multiplicar el renglón 2 por 3 y sumarlo al renglón 1.
5º.-Multiplicar el renglón 2 por 2 y restarlo al renglón 3.
Por lo tanto se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

6º.-Multiplicar el renglón 3 por ½
Por lo tanto se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

7º.-Multiplicar el renglón 3 por 5 y sumarlo al renglón 1.
8º.-multiplicar el renglón 3 por 2 y sumarlo al renglón 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Ya que se obtuvo la matriz $[I]$ a la izquierda, la inversa de la matriz $[A]$ es :

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

C.3.- [illegible]UCION DE SISTEMA DE ECUACIONES, METODO ITERATIVO.-

Este es un método muy utilizado en las computadoras, donde se tiene un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Este método es factible si y solo si :

$[A] \cdot [X] = [B]$; donde $|A| \neq 0$

Se considera un sistema de ecuaciones siguiente:

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z = b_1$$

$$a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z = b_2$$

$$a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z = b_3$$

Si se despejan x, y, z, de las ecuaciones anteriores, se tiene:

$$x = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} y - a_{13} z)$$

$$y = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} x - a_{23} z) \qquad \text{ECUACIONES } (9)$$

$$z = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} x - a_{32} z)$$

Si x=0; y=0; z=0; se tiene que:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$y_1 = \frac{b_2}{a_{22}}$$

$$z_1 = \frac{b_3}{a_{33}}$$

Ahora, si se sustituyen los valores anteriores en las ecuaciones (9), se tienen nuevos valores de x, y, z :

$$x_2 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} y_1 - a_{13} z_1)$$

$$y_2 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} x_2 - a_{23} z_1)$$

$$z_2 = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} x_2 - a_{32} y_2)$$

De la misma manera:

$$x_3 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} y_2 - a_{13} z_2)$$

$$y_3 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} x_3 - a_{23} z_2)$$

$$z_3 = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} x_3 - a_{32} y_3)$$

De una manera general, se tiene que :

$$x_i = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} y_{i-1} - a_{13} z_{i-1})$$

$$y_i = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} x_i - a_{23} z_{i-1})$$

$$z_i = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} x_i - a_{32} y_i)$$

El proceso se continúa hasta encontrar una aproximación de $e = 0.0005$.

O sea que:

$$|x_i - x_{i-1}| < e$$

$$|y_i - y_{i-1}| < e$$

$$|z_i - z_{i-1}| < e$$

C.4.- SOLUCION DE SISTEMA DE ECUACIONES : METODO DE CHOLESKY .-

Una matriz [A], simétrica, con la diagonal principal positiva, no singular y cuadrada, puede ser descompuesta de la siguiente manera:

$$[A] = [G] \cdot [G]^T \qquad \text{ECUACION } (10)$$

Donde [G] es una matriz triangular inferior de orden "n", con elementos positivos en la diagonal principal.

$[G]^T$ es una matriz triangular superior de orden "n", con elementos positivos en la diagonal principal.

Como: $[A] \cdot [X] = [B] \qquad \text{ECUACION } (11)$

Si se sustituye la ecuación 10 en la ecuación 11:

$$[G] \cdot [G]^T \cdot [X] = [B]$$

Y si: $[G]^T \cdot [X] = [Y]$

Por lo tanto se tiene:

$$[G] \cdot [Y] = [B]$$

La ecuación (10) se resuelve iterativamente.

Para encontrar los valores g_{ij}, se procede de la siguiente manera:

1.- Hacer $j = 1$

2.- $g_{11} = \sqrt{a_{11}}$

3.- $i = j+1$

4.- $g_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{g_{11}}$

5.- $i = i+1$, repetir el cuarto paso.

6.- Repetir 4 y 5 hasta $i = n+1$.

7.- $j = j+1$

8.- $g_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk}^2}$

9.- $i = j+1$

10.- $g_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}\, g_{jk}}{g_{jj}}$

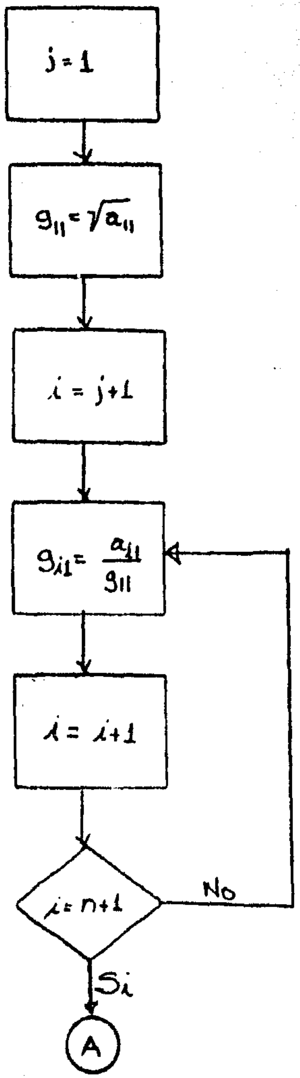
11.- $i = i+1$, repetir 10

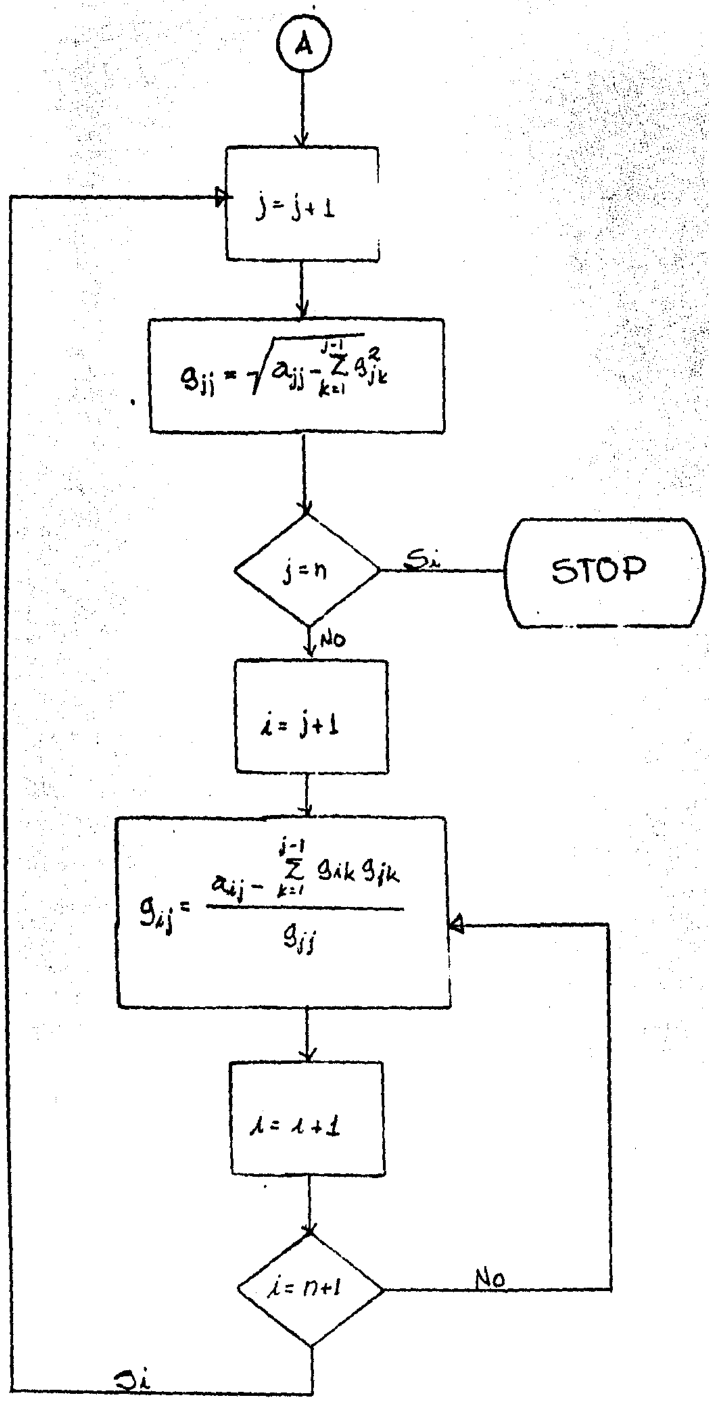
12.- Repetir 10 y 11 hasta $i = n+1$.

13.- Repetir 7.

14.- Repetir 7 hasta 13, hasta que $j=n$.

?.5.- DIAGRAMA DE FLUJO DEL METODO DE CHOLESKY:




A
j = j + 1
$g_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk}^2}$
j = n
Si
STOP
No
i = j+1
$g_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} g_{jk}}{g_{jj}}$
i = i + 1
i = n+1
No
Si

" APENDICE D "

*** RESUMEN DE ALGEBRA LINEAL ***

MATRIZ.-

Definición .- Una matriz de orden m×n sobre el campo de los números reales, es un arreglo rectangular con m renglones y n columnas, donde los a_{ij} se llaman sus elementos.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{matrix}$$

Comúnmente, se representa a las matrices con letras mayúsculas y a sus elementos con letras minúsculas.

IGUALDAD DE MATRICES.-

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices del mismo orden, entonces:

$A = B$ solo si $a_{ij} = b_{ij}$ para toda i, j.

RANGO DE UNA MATRIZ.-

Si transformamos una matriz A en una matriz escalonada B, el número de renglones de la matriz B con al menos un elemento distinto de cero se llama Rango de la Matriz A y se representa con R(A). El mismo rango se asigna a la matriz B.

PRODUCTO DE MATRICES.-

Sean:

$A = (a_{ij})$ (i= 1,2, ..., m y j= 1,2,......, n)

y $B = (b_{ij})$ (i= 1,2, ..., n y j= 1,2,......, p)

Dos matrices de orden m×n y n×p respectivamente.

El producto AB es una matriz:

$C = (c_{ij})$ (i= 1,2,......, m y j= 1,2,......, p)

de orden m×p cuyos elementos estan dados por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

MATRIZ CUADRADA .-

Si una matriz A es de orden $n \times n$, se dice que A es una matriz cuadrada de orden n.

SUMA DE MATRICES.-

Sean:

$A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices del mismo orden $m \times n$. La adición o suma A+B de dichas matrices es una nueva matriz $C = (c_{ij})$ de orden $m \times n$, tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Es decir, los elementos de la matriz C son las sumas de los elementos correspondientes de A y B.

PRODUCTO POR UN ESCALAR.-

Sean:

$A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ y $k \in R$, un escalar. El producto k por A, que se representa mediante kA, es la matriz:

$$kA = (k\, a_{ij})$$

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ.-

Sea la matriz A de orden $m \times n$. Se llama "transpuesta de A" y se representa mediante A^T, a la matriz de orden $n \times m$ cuyos renglones son las columnas de A y cuyas columnas son los renglones de A.

MATRIZ SIMETRICA Y ANTISIMETRICA.-

Una matriz cuadrada, en donde $A^T = A$, se le llama matriz simétrica. Y en donde $A^T = -A$, se le llama una matriz antisimétrica.

MATRIZ IDENTIDAD.-

Si son las matrices:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

se efectúa el producto IB, se tiene que:

$$IB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = B$$

En general, a la matriz cuadrada

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

se le llama matriz identidad de orden n. Esta matriz se puede expresar en forma abreviada como:

$I_n = (i_{ij})$; donde $i_{ij} = 1$ si $i=j$,

$i_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Para toda matriz A de orden mxn se tiene que:

$I_m \cdot A = A$

$A \cdot I_n = A$

MATRIZ TRIANGULAR.-

Una matriz cuadrada A , en la cual todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero, se le llama matriz triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una matriz cuadrada A , en la cual todos los elementos por arriba de la diagonal principal son cero, se le llama matriz triangular inferior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ORTOGONAL.-

Dos matrices A y B de orden $m \times n$, se dice que son ortogonales si:

$A^T B = B^T A = I$

MATRIZ INVERSA.-

La inversa de una matriz cuadrada A existe solo si $A \neq 0$, o sea si A es una matriz no singular. Si $A = 0$, se dice que A es una matriz singular.

Si se tiene una matriz cuadrada A de orden n, y si existe otra matriz cuadrada de orden n, la cual se denota A^{-1}, con la siguiente propiedad:

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$$

A^{-1} se define como la inversa de la matriz A.

PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE OPERACIONES CON MATRICES.-

1.- Ley conmutativa de la adición.

$A + B = B + A$

2.- Ley asociativa de la adición.

$A + (B + C) = (A + B) + C$

3.- Ley asociativa de la multiplicación.

$(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$

4.- Ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

$A\,(B + C) = A\,B + A\,C$

5.- En general, la ley conmutativa de la multiplicación no existe.

$A\,B \neq B\,A$

6.- La ecuación: $A\,B = 0$, no necesariamente significa que cualquiera de las dos matrices A o B sea una matriz cero o nula.

7.- La ecuación: $A\ B = A\ C$, para que sea factible, no necesariamente implica que $B = C$.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.-

El valor de un determinante puede obtenerse efectuando la suma de los productos de los elementos de una cualquiera de sus líneas (renglón o columna) por sus respectivos cofactores.

Se llama cofactor del elemento a_{ij} al determinante $(-1)^{i+j} M_{ij}$, donde M_{ij} es el menor de a_{ij}.

Se llama menor del elemento a_{ij} de un determinante de orden n, al determinante de orden n-1 que se obtiene al suprimir, en el determinante original, el renglon i y la columna j.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{kj}\, M_{kj}$$; si elegimos el renglon k, para desarrollar por cofactores el determinante de orden n.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik}\, M_{ik}$$; si elegimos la columna k.

" APENDICE E "

*** DESCRIPCION DEL PROGRAMA ***

El programa está realizado en lenguaje "BASIC", está ajustado para resolver el análisis de cualquier tipo de marcos, con los apoyos empotrados y de n número de barras.

Explicación de las rutinas:

10

Con ésta rutina se realiza la Captura de Datos, o sea las propiedades geométricas de los miembros estructurales.

540

550

Con ésta rutina se calcula la Matriz de Rigideces Elemental Transformada de cada barra.

750

760

Con ésta rutina se calcula la Matriz de Rigideces Global de la Estructura.

930

940

Con ésta rutina se realiza la Captura de Datos del Vector de Fuerzas

1030

1040

Con ésta rutina se obtiene la solución del sistema de ecuaciones por medio del método de Cholesky, por lo tanto se obtiene el valor de los desplazamientos no restringidos.

1590

1600 → 1700

Con ésta rutina se obtiene el resultado de las reacciones del sistema estructural en los apoyos.

1710 → 2480

Con ésta rutina se obtiene el resultado de los elementos mecánicos de cada elemento estructural.

2490 → 2560

Subrutina de retorno.

" APENDICE F "

*** LISTADO DEL PROGRAMA ***

```
10 '#############################################################################
20 '#############################################################################
30 '########## PROGRAMA DE ANALISIS ESTRUCTURAL       #####################
40 '########## REALIZADO POR: JOSE LUIS PARADA FDEZ. #####################
50 '#############################################################################
60 '#############################################################################
80 CLS:SYSTEM"FORMS L=66"
90 LPRINT TAB(20);"*************** EJEMPLO ***************"
100 PRINT"CALCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDECES"
110 LPRINT
120 LPRINTTAB(8);"NECESITO LOS SIGUIENTES DATOS:"
130 PRINT "NECESITO LOS SIGUIENTES DATOS:"
140 LPRINT
150 PRINT "NUMERO DE BARRAS POR ANALIZAR M=";:INPUT M
160 LPRINTTAB(8); "NUMERO DE BARRAS POR ANALIZAR M=";M
170 LPRINT
180 LPRINT
190 LPRINT
200 E=1
210 KK=0:FOR N=1 TO M
220 LPRINT
230 LPRINT
240 LPRINTTAB(08);"PARA EL MIEMBRO ";N
250 PRINT "LONGITUD DEL MIEMBRO";N;:INPUT L(N)
260 LPRINTTAB(10); "LONGITUD ";TAB(30);L(N)
270 PRINT"AREA NETA DEL MIEMBRO";N;:INPUT A(N)
280 LPRINTTAB(10);"AREA NETA ";TAB(30);A(N)
290 PRINT"MO. DE INERCIA DEL MIEMBRO";N;:INPUT I(N)
300 LPRINTTAB(10); "MOMENTO DE INERCIA ";TAB(30);I(N)
310 PRINT "COSENOS DIRECTORES DEL MIEMBRO";N
320 LPRINTTAB(10);"COSENOS DIRECTORES  "
330          PRINT"O=COS &= ";:INPUT O(N)
340        LPRINTTAB(15);"O=COS &= ";TAB(30);O(N)
350          PRINT"V=COS &= ";:INPUT V(N)
360 KK=KK+1:      LPRINTTAB(15);"V=COS &= ";TAB(30);V(N)
370 IFKK=4THENSYSTEM"T":INPUT"<ENTER> ";BB:KK=0
380 NEXTN : N=N-1
390 SYSTEM"T":INPUTBB
400 PRINT"DIGAME EL NUMERO DE DESPLAZAMIENTOS EN EL SISTEMA ESTRUCTURAL";
              :PRINT "D=";:INPUT D:T=0
410 LPRINT
420 LPRINT
430 LPRINT
440 LPRINT
450 LPRINTTAB(8);"DIGAME EL NUMERO DE DESPLAZAMIENTOS EN EL SISTEMA ESTRUCT
URAL. ":LPRINTTAB(8); "D= ";D
```

```
460 LPRINT
470 LPRINT
480 PRINT "AHORA DE ESTOS ";D;"DESPLAZAMIENTOS DIGAME CUANTOS SON NO RESTRI
NGIDOS"
490 LPRINTTAB(8);"AHORA DE ESTOS ";D;" DESPLAZAMIENTOS, ":LPRINTTAB(8);"DIG
AME CUANTOS SON NO RESTRINGIDOS"
500 PRINT "D(1)=";:INPUT D(1)
510 LPRINTTAB(8);"D(1)= ";D(1)
520 LPRINT
530 LPRINT
540 LPRINT
550 DIM K(N,6*N,6*N)
560 LPRINTTAB(8);"AHORA DIGAME LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS ":LPRINTTAB(
8);"PARA CADA UNO DE LOS MIEMBROS."
570 KK=0:FOR C=1 TO N
580 PRINT "PARA EL MIEMBRO ";C;"DIGAME LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS P,Q,
R,S,T,U."
590 LPRINT
600 KK=KK+1:LPRINTTAB(8);"PARA EL MIEMBRO ";C;":"
610 INPUT P,Q,R,S,T,U
620 PRINT P;Q;R;S;T;U
630 LPRINTTAB(8); P;Q;R;S;T;U
640 K(C,P,P)=4*E*I(C)/L(C):K(C,P,Q)=2*E*I(C)/L(C):K(C,P,R)=O(C)*6*E*I(C)/L(
C)^2:K(C,P,S)=-O(C)*6*E*I(C)/L(C)^2:K(C,P,T)=-V(C)*6*E*I(C)/L(C)^2:K(C,P,U)
=V(C)*6*E*I(C)/L(C)^2
650 K(C,Q,P)=2*E*I(C)/L(C):K(C,Q,Q)=4*E*I(C)/L(C):K(C,Q,R)=O(C)*6*E*I(C)/L(
C)^2:K(C,Q,S)=-O(C)*6*E*I(C)/L(C)^2:K(C,Q,T)=-V(C)*6*E*I(C)/L(C)^2:K(C,Q,U)
=V(C)*6*E*I(C)/L(C)^2
660 K(C,R,P)=O(C)*6*E*I(C)/L(C)^2:K(C,R,Q)=O(C)*6*E*I(C)/L(C)^2:K(C,R,R)=(O
(C)^2*12*E*I(C)/L(C)^3)+V(C)^2*A(C)*E/L(C):K(C,R,S)=(-(O(C)^2)*12*E*I(C)/L(
C)^3)-V(C)^2*A(C)*E/L(C):K(C,R,T)=(O(C)*V(C)*A(C)*E/L(C))-O(C)*V(C)*12*E*I(
C)/L(C)^3
670 K(C,R,U)=(-O(C)*V(C)*A(C)/L(C))+O(C)*V(C)*12*E*I(C)/L(C)^3
680 K(C,S,P)=-O(C)*6*E*I(C)/L(C)^2:K(C,S,Q)=-O(C)*6*E*I(C)/L(C)^2:K(C,S,R)=
(-(O(C)^2)*12*E*I(C)/L(C)^3)-V(C)^2*A(C)*E/L(C):K(C,S,S)=(O(C)^2*12*E*I(C)/
L(C)^3)+V(C)^2*A(C)*E/L(C)
690 K(C,S,T)=(-O(C)*V(C)*A(C)*E/L(C))+O(C)*V(C)*12*E*I(C)/L(C)^3:K(C,S,U)=(
O(C)*V(C)*A(C)*E/L(C))-O(C)*V(C)*12*E*I(C)/L(C)^3
700 K(C,T,P)=-V(C)*6*E*I(C)/L(C)^2:K(C,T,Q)=-V(C)*6*E*I(C)/L(C)^2:K(C,T,R)=
(O(C)*V(C)*A(C)*E/L(C))-O(C)*V(C)*12*E*I(C)/L(C)^3:K(C,T,S)=(-O(C)*V(C)*A(C
)*E/L(C))+O(C)*V(C)*12*E*I(C)/L(C)^3
710 K(C,T,T)=(O(C)^2*A(C)*E/L(C))+V(C)^2*12*E*I(C)/L(C)^3:K(C,T,U)=(-(O(C)^
2)*A(C)*E/L(C))-V(C)^2*12*E*I(C)/L(C)^3
720 K(C,U,P)=V(C)*6*E*I(C)/L(C)^2:K(C,U,Q)=V(C)*6*E*I(C)/L(C)^2:K(C,U,R)=(-
O(C)*V(C)*A(C)*E/L(C))+O(C)*V(C)*12*E*I(C)/L(C)^3:K(C,U,S)=(O(C)*V(C)*A(C)*
E/L(C))-O(C)*V(C)*12*E*I(C)/L(C)^3
730 K(C,U,T)=(-(O(C)^2)*A(C)*E/L(C))-V(C)^2*12*E*I(C)/L(C)^3:K(C,U,U)=(O(C)
^2*A(C)*E/L(C))+V(C)^2*12*E*I(C)/L(C)^3
```

```
 ~ IFKK=8THENSYSTEM"T":INPUT"<ENTER> ";BB:KK=0
750 NEXTC:C=C-1
760 DIMH(D,D)
770 FORZ=1TO D
780 FORY=1 TOD
790 FORX=1TOC
800 H(Z,Y)=H(Z,Y)+K(X,Z,Y)
810 NEXTX
820 NEXTY
830 NEXTZ
840 Z=Z-1:Y=Y-1
850 GOSUB 2490
860 SYSTEM"T":INPUT B
870 PRINT TAB(20);"** MATRIZ DE RIGIDECES **"
880 LPRINT TAB(20);"** MATRIZ DE RIGIDECES **"
890 KK=0:FORW=1TOZ:FORH=1TOY:PRINT"H(";W;",";H;")=";H(W,H)
900 KK=KK+1:LPRINTTAB(20); "H(";W;",";H;")=";H(W,H)
910 IF KK=50THENSYSTEM"T":INPUTBB:KK=0
920 NEXTH
930 NEXTW
940 CLS
950 DIMF(Z,1)
960 SYSTEM"T":INPUTBB
970 PRINT"NECESITO EL VECTOR FUREZA  F "
980 LPRINTTAB(10);"AHORA NECESITO EL VECTOR DE FUERZA F"
990 LPRINT
1000 LPRINT
1010 FORI=1TOZ:PRINT "F(";I;",1)=";:INPUT F(I,1)
1020 LPRINTTAB(10);"F(";I;",1)=";F(I,1)
1030 NEXTI:I=D(1):J=D(1)
1040 DIME(I,J)
1050 DIM W(4,4)
1060 N=D(1)
1070 J=1
1080 CLS
1090 I=J+1
1100 G(I,1)=H(I,1)
1100 G(I,1)=H(I,1)
1110 I=I+1
1120 J=J+1
1130 W(1,1)=0
1140 IFJ>N GOTO 1270
1150 FOR K = 1 TO J-1
```

```
1160 W(1,1)=W(1,1)+G(J,K)*G(J,K)
1170 NEXTK
1180 K=K-1
1190 I=J+1
1200 FORK=1TOJ-1
1210 W(2,2)=W(2,2)+H(I,K)*G(J,K)
1220 NEXTK
1230 K=K-1
1240 G(I,J)=((H(I,J)-W(2,2))/H(J,J))
1250 I=I+1
1260 GOTO1270
1270 CLS
1280 Q=D1
1290 A=1
1300 FORW=1TON
1310 K=1
1320 IFK>NGOTO1360
1330 E(1,1)=E(1,1)+H(W,K)*Y(K,1)
1340 K=K+1
1350 GOTO1320
1360 Y(W,1)=(F(W,1)-E(1,1))/H(W,W)
1370 E(1,1)=0
1380 NEXT
1390 W=W-1
1400 DIMB(Z,1)
1410 FORD=NTO1STEP-1
1420 K=N
1430 IFK<1GOTO1470
1440 E(2,2)=E(2,2)+H(K,D)*B(K,1)
1450 K=K-1
1460 GOTO1430
1470 B(D,1)=(Y(D,1)-E(2,2))/G(D,D)
1480 E(2,2)=0
1490 NEXTD:
1500 CLS:SYSTEM"T":INPUT"<ENTER> ";B3
1510 PRINT"EL RESULTADO DE LOS DESPLAZAMIENTOS NO RESTRINGIDOS ES:"
1520 LPRINT
1530 LPRINT
1540 LPRINT
1550 LPRINTTAB(10);"EL RESULTADO DE LOS DESPLAZAMIENTOS NO RESTRINGIDOS ES
"
1560 FORF=1TON
1570 PRINT"B(";F;",1)=";B(F,1);
1580 LPRINTTAB(10);"B(";F;",1)=";B(F,1)
1590 NEXT F:F=F-1
1600 DIMC(Y,Y)
```

```
1610 DIMR(Y,1
1620 FORI=D(1)+1 TO Z : FOR J=1 TO D(1): C(I,1)=C(I,1)+B(J,1)*K(I,J)
1630 NEXTJ:NEXTI
1640 FORI=1 TO 1200:NEXT: PRINT" LAS REACCIONES DEL SISTEMA SON: "
1650 SYSTEM"T":INPUT"<ENTER> ";BB
1660 LPRINTTAB(12);"LAS REACCIONES DEL SISTEMA ESTRUCTURAL SON:"
1670 FORI=D(1)+1TO Z: R(I,1)=C(I,1)-F(I,1)
1680 PRINTR(I,1)
1690 LPRINTTAB(10);"R(";I;",1)=";R(I,1
1700 NEXTI
1710 DIMVM(X,Z,Z)
1720 DIMFM(I,Z,1)
1730 DIMS(X,Z,Z)
1740 SYSTEM"T":INPUT"<ENTER> ";BB
1750 PRINT"CALCULO DE LAS REACCIONES DE CADA MIEMBRO ESTRUCTURAL
1760 LPRINTTAB(10);"CALCULO DE LAS REACCIONES DE CADA MIEMBRO ESTRUCTURAL:"
1770 KK=0:FORI=1 TO C
1780 PRINT "PARA LA BARRA" ;I;"ESCRIBA LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS (P,Q
,R,S,T,U)";:INPUT P,Q,R,S,T,U
1790 LPRINT
1800 LPRINT
1810 LPRINTTAB(10) "PARA LA BARRA ";I;"ESCRIBA LA SECUENCIA DE DESPLAZAMIEN
TOS :":LPRINTTAB(10)"( P, Q, R, S, T, U)"
1820 LPRINTTAB(10);P;Q;R;S;T;U
1830 LPRINT
1840 PRINT"ESCRIBA SU VECTOR DE EMPOTRAMIENTO:"
1850 LPRINTTAB(10);"AHORA ESCRIBA SU VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO :"
1860 PRINT "FM(";I;",";P;",1)=";:INPUT FM(I,P,1)
1870 LPRINTTAB(10); "FM(";I;",";P;",1)=";FM(I,P,1)
1880 PRINT "FM(";I;",";Q;",1)=";:INPUT FM(I,Q,1)
1890 LPRINTTAB(10); "FM(";I;",";Q;",1)=";FM(I,Q,1)
1900 PRINT "FM(";I;",";R;",1)=";:INPUT FM(I,R,1)
1910 LPRINTTAB(10); "FM(";I;",";R;",1)=";FM(I,R,1
1920 PRINT "FM(";I;",";S;",1)=";:INPUT FM(I,S,1)
1930 LPRINTTAB(10); "FM(";I;",";S;",1)=";FM(I,S,1)
1940 PRINT "FM(";I;",";T;",1)=";:INPUT FM(I,T,1)
1950 LPRINTTAB(10); "FM(";I;",";T;",1)=";FM(I,T,1
1960 PRINT "FM(";I;",";U;",1)=";:INPUT FM(I,U,1)
1970 LPRINTTAB(10); "FM(";I;",";U;",1)=";FM(I,U,1)
1980 PRINT "LAS REACCIONES DE LA BARRA ";I;" SON:"
1990 LPRINTTAB(10); "LAS REACCIONES DE LA BARRA ";I;"SON:"
2000 T(3,3)=O(I):T(4,4)=O(I):T(5,5)=O(I):T(6,6)=O(I)
2010 T(5,3)=V(I):T(6,4)=V(I)
2020 T(4,6)=-V(I):T(3,5)=-V(I)
2030 VM(I,P,1)=VM(I,P,1)+(4*E*I(I)/L(I))*B(P,1)
2040 VM(I,P,1)=VM(I,P,1)+(2*E*I(I)/L(I))*B(Q,1)
2050 VM(I,P,1)=VM(I,P,1)+(6*E*I(I)/(L(I)^2))*B(R,1)*T(3,3)
2060 VM(I,P,1)=VM(I,P,1)+(-6*E*I(I)/(L(I)^2))*B(S,1)*T(4,4)
2070 VM(I,P,1)=VM(I,P,1)+(6*E*I(I)/(L(I)^2))*T(3,5)*B(T,1)
2080 VM(I,P,1)=VM(I,P,1)+(-6*E*I(I)/(L(I)^2))*T(4,6)*B(U,1)
2090 S(I,P,1)=VM(I,P,1)+FM(I,P,1):PRINTS(I,P,1)
2100 LPRINTTAB(10);S(I,P,1);:LPRINT" (P
```

```
2110 VM(I,Q,1)=VM(I,Q,1)+(2*E*I(I)/L(I))*B(P,1
2120 VM(I,Q,1)=VM(I,Q,1)+(4*E*I(I)/L(I))*B(Q,1)
2130 VM(I,Q,1)=VM(I,Q,1)+(6*E*I(I)/(L(I)^2))*B(R,1)*T(3,3)
2140 VM(I,Q,1)=VM(I,Q,1)+(-6*E*I(I)/(L(I)^2))*B(S,1)*T(4,4)
2150 VM(I,Q,1)=VM(I,Q,1)+(6*E*I(I)/(L(I)^2))*T(3,5)*B(T,1)
2160 VM(I,Q,1)=VM(I,Q,1)++(-6*E*I(I)/(L(I)^2))*T(4,6)*B(U,1)
2170 S(I,Q,1)=VM(I,Q,1)+FM(I,Q,1):PRINT S(I,Q,1)
2180 LPRINTTAB(10);S(I,Q,1);:LPRINT" (Q)"
2190 VM(I,R,1)=VM(I,R,1)+(6*E*I(I)/(L(I)^2))*B(P,1)
2200 VM(I,R,1)=VM(I,R,1)+(6*E*I(I)/(L(I)^2))*B(Q,1)
2210 VM(I,R,1)=VM(I,R,1)+(12*E*I(I)/(L(I)^3))*B(R,1)*T(3,3)
2220 VM(I,R,1)=VM(I,R,1)+(-12*E*I(I)/(L(I)^3))*B(S,1)*T(4,4)
2230 VM(I,R,1)=VM(I,R,1)+(12*E*I(I)/(L(I)^3))*T(3,5)*B(T,1)
2240 VM(I,R,1)=VM(I,R,1)+(-12*E*I(I)/(L(I)^3))*T(4,6)*B(U,1)
2250 S(I,R,1)=VM(I,R,1)+FM(I,R,1):PRINT S(I,R,1)
2260 LPRINTTAB(10);S(I,R,1);:LPRINT" (R)"
2270 VM(I,S,1)=VM(I,S,1)+(-6*E*I(I)/(L(I)^2))*B(P,1)
2280 VM(I,S,1)=VM(I,S,1)+(-6*E*I(I)/(L(I)^2))*B(Q,1)
2290 VM(I,S,1)=VM(I,S,1)+(-12*E*I(I)/(L(I)^3))*B(R,1)*T(3,3)
2300 VM(I,S,1)=VM(I,S,1)+(12*E*I(I)/(L(I)^3))*B(S,1)*T(4,4)
2310 VM(I,S,1)=VM(I,S,1)+(-12*E*I(I)/(L(I)^3))*T(3,5)*B(T,1)
2320 VM(I,S,1)=VM(I,S,1)+(12*E*I(I)/(L(I)^3))*T(4,6)*B(U,1)
2330 S(I,S,1)=VM(I,S,1)+FM(I,S,1):PRINT S(I,S,1)
2340 LPRINTTAB(10);S(I,S,1);:LPRINT" (S)"
2350 VM(I,T,1)=VM(I,T,1)+(A(I)*E/L(I))*T(5,3)*B(R,1)
2360 VM(I,T,1)=VM(I,T,1)+(-A(I)*E/L(I))*T(6,4)*B(S,1)
2370 VM(I,T,1)=VM(I,T,1)+(A(I)*E/L(I))*B(T,1)*T(5,5)
2380 VM(I,T,1)=VM(I,T,1)+(-A(I)*E/L(I))*B(U,1)*T(6,6)
2390 S(I,T,1)=VM(I,T,1)+FM(I,T,1):PRINT S(I,T,1)
2400 LPRINT TAB(10);S(I,T,1);:LPRINT" (T)"
2410 VM(I,U,1)=VM(I,U,1)+(-A(I)*E/(L(I)))*T(5,3)*B(R,1)
2420 VM(I,U,1)=VM(I,U,1)+(A(I)*E/L(I))*T(6,4)*B(S,1)
2430 VM(I,U,1)=VM(I,U,1)+(-A(I)*E/L(I))*B(T,1)*T(5,5)
2440 VM(I,U,1)=VM(I,U,1)+(A(I)*E/L(I))*B(U,1)*T(6,6)
2450 S(I,U,1)=VM(I,U,1)+FM(I,U,1):PRINT S(I,U,1)
2460 KK=KK+1:LPRINTTAB(10);S(I,U,1);:LPRINT" (U)"
2470 IFKK=2THENSYSTEM"T":INPUT"<ENTER> ";BD:KK=0
2480 NEXT I :GOSUB2530:END
2490 PRINT "DESEA UD., VER E IMPRIMIR LA MATRIZ DE RIGIDECES? (Y/N)"
2500 B$=INKEY$ :IF LEN (B$)=0 GOTO 2500
2510 IF B$="N" GOTO 2530
2520 IF B$="Y" THEN RETURN
2530 PRINT "DESEA UD. ANALIZAR OTRO SISTEMA ESTRUCTURAL ? (Y/N)"
2540 C$=INKEY$:IF LEN (C$)=0 GOTO 2540
2550 IF C$="Y" GOTO 70
2560 RETURN
```

*** COMENTARIOS ***

La computadora es un arma muy poderosa del Ingeniero Civil y que se puede aplicar en cualquiera de los campos que le corresponden, ya que con la computadora se logra disminuír tiempos y a la véz costos, los cuales son las metas primordiales del Ingeniero Civil.

Los ejemplos y los resultados de éstos, se encuentran en unidades del sistema inglés, ésto se debe a que en las propiedades geométricas de los elementos estructurales, las unidades en el sistema inglés ocupan menos decimales y a la vez menos espácio , por lo tanto son variables de simple presición.

Para el desarrollo de ésta tesis se utilizó una computadora TRS-80 modelo 16, con una capacidad de memoria de 32,000 bytes, puesto que se tiene un límite de memoria, sólo se logró resolver problemas de no más de cuatro barras o elementos, pero el programa está realizado para resolver problemas de "n" barras o elementos estructurales, donde el valor de "n" depende de la memoria instalada en la computadora.

*** BIBLIOGRAFIA ***

ANALISIS DE ESTRUCTURAS INDETERMINADAS.
J. SERLING KINNEY.
Compania editorial Continental, S.A.

ANALISIS ESTRUCTURAL AVANZADO.
JAN J. TUMA
R.K. MUNSHI
Mc. Graw - Hill.

BASIC CONCEPTS OF STRUCTURAL ANALYSIS.
FRED W. BEAUFAIT
Prentice - Hall, Inc.
Englewood cliffs, N. J. 07632

INTRODUCCION AL ANALISIS ESTRUCTURAL CON MATRICES.
HAYRETTIN - KARDESTUNCER
Mc. Graw - Hill

MATRIX COMPUTER ANALYSIS OF STRUCTURES.
MOSHE F. RUBINSTEIN
Prentice - Hall, Inc.
Englewood Cliffs, N. J. 07632

STRUCTURAL ANALYSIS.
MURRAY I. MAUTELL
JOHN F. MARRON
The Ronald press company.
New York.

MATRIX STRUCTURAL ANALYSIS.
J. L. MEEK
Mc. Graw - Hill.

STRUCTURAL MATRIX ANALYSIS FOR THE ENGINEER.
JOHN RODINSON
John Wiley & Sons
New York, London, Sydney

THEORY OF MATRIX STRUCTURAL ANALYSIS.
J. S. PRZEMIENIECKI
Mc. Graw - Hill.