

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA



ANALISIS DE SEÑALES SISMICAS UTILIZANDO
OPERADORES HOMOMORFICOS

T E S I S

Que para obtener el Título de

INGENIERO GEOFISICO

P r e s e n t a n

RAFAEL ALFEREZ HERNANDEZ
JORGE ALFONSO MENDOZA AMUCHASTEGUI



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	página
I RESUMEN	1
II INTRODUCCION	3
III SISTEMAS HOMOMORFICOS	5
3.1 Definición matemática	5
3.2 Sistema de Oppenheim	9
3.3 Normalización de la traza	17
3.4 Principales propiedades	25
IV DISEÑO DE FILTROS EN EL CEPSTRUM	37
4.1 Filtro inverso	39
4.2 Filtros modeladores	41
V EXTRACCION DE SERIES DE COEFICIENTES DE REFLEXION	45
VI EXTRACCION DE LA ONDICULA SISMICA	61
6.1 Apilamiento horizontal del cepstrum	62
6.2 Apilamiento vertical de cepstra de tiempo corto	64
6.3 Método de Tribolet	69
VII DISCUSION Y CONCLUSIONES	80
BIBLIOGRAFIA	88
APENDICE	90

I.- RESUMEN

Los sistemas homomórficos son un tipo de transformaciones no lineales las cuales satisfacen un principio generalizado de superposición. Algunos de estos sistemas son particularmente útiles en la separación de las componentes de una señal, cuando éstas han sido combinadas a través de una convolución, como es el caso de las componentes de las señales sísmicas.

Las principales propiedades de los cepstra para algunas señales de importancia, tales como la serie de coeficientes de reflexión (de fase mínima), el generador de múltiples de la columna de agua y las oscilaciones del pulso de burbuja, se utilizan para eliminar o reducir sus efectos en el dominio del tiempo.

Criterios de normalización se tienen que tomar en cuenta para efectuar el cálculo del cepstrum de una traza sísmica. Estos criterios incluyen la unicidad de la función logaritmo complejo, el pesado exponencial de la serie de coeficientes de reflexión para convertirla a fase mínima, la presencia del efecto de alias y las técnicas usadas para su disminución, y el cálculo de una curva de fase continua y libre de la componente lineal (rampa).

Utilizando la propiedad de una de las transformaciones homomórficas en donde una convolución en el dominio del tiempo pa-

sa a ser una adición en el cepstrum, es posible derivar expresiones de filtro inverso y de filtros modeladores, en este nuevo dominio. Esta misma propiedad nos permite el uso de una técnica de simple filtrado lineal en el cepstrum para extraer la serie de coeficientes de reflexión o la ondícula sísmica.

Por medio de métodos que utilizan promedios de cepstra de trazas sísmicas se demuestra que estos procedimientos cancelan el cepstrum de la función de reflectividad y recuperan el cepstrum de la ondícula sísmica.

El asumir que la ondícula sísmica no es estacionaria en el tiempo, nos lleva a un análisis en el cual la traza sísmica es dividida en segmentos de tiempo corto, donde a cada uno de dichos segmentos se le aplican diferentes funciones ventana y se obtienen los cepstra correspondientes. Una estimación de la ondícula sísmica para cada segmento de tiempo corto se obtiene al promediar las componentes de periodo bajo de los cepstra obtenidos para cada segmento pesado por las diferentes ventanas.

II.- INTRODUCCION

Las señales sísmicas representan la respuesta del subsuelo a las excitaciones provenientes de fenómenos naturales tales como los terremotos, o bien de fuentes acústicas artificiales como aquellas que son usadas en la geofísica de exploración. El propósito del análisis y procesado de las señales sísmicas es el facilitar la interpretación de los datos obtenidos, en términos de la estructura del subsuelo de la tierra.

La representación detallada de una señal sísmica implica un modelo relativamente complejo y su análisis requiere del uso de técnicas basadas en diferentes simplificaciones de dicho modelo.

Una señal sísmica puede ser representada como la convolución de una ondícula con la respuesta impulsiva del canal de -- transmisión a través de la Tierra, mas componentes de ruido (coherentes y/o estocásticos). Al proceso de separación de éstas -- componentes se le denomina deconvolución y es de considerable aplicación en la sismología.

Técnicas convencionales de deconvolución, generalmente usando el filtro óptimo de Wiener (Rice, 1962; Robinson y Treitel, 1967), asumen que la ondícula sísmica es de fase mínima. Sin embargo, si la ondícula sísmica real no se aproxima a ser de fase mín

ma, los metodos convencionales darían por resultado una estimación deficiente de las componentes de la señal sísmica.

Una técnica alternativa para llevar a cabo el proceso de deconvolución está basada en la consideración de una clase de sistemas no lineales los cuales obedecen a un principio generalizado de superposición. Tales sistemas son representados por transformaciones entre espacios vectoriales, y reciben el nombre de sistemas homomórficos. El método no lineal de deconvolución originalmente propuesto por Oppenheim (1965) que utiliza la teoría de la superposición generalizada es conocido como deconvolución homomórfica y fué desarrollado primeramente para problemas de detección y eliminación del fenómeno de eco en sismos naturales.

El algoritmo que utiliza la deconvolución homomórfica - transforma el proceso de convolución en una superposición aditiva de sus componentes, con el resultado de que éstas pueden ser separadas más fácilmente que en el dominio original. Ulrych (1971), ha demostrado la aplicación del método a la sismología para efectuar la separación de señales que se traslapan. Stoffa, Buhl y Bryan (1974), han hecho la aplicación práctica del proceso de filtrado homomórfico, utilizándolo para la eliminación de los pulsos de burbuja originados por la pistola de aire, y de las reverberaciones por la columna de agua, en trabajo sísmico marino de reflexión.

El procesado homomórfico de señales sísmicas ofrece la considerable ventaja de que no es necesaria ninguna suposición a priori acerca de la naturaleza de la ondícula sísmica o del tren de impulsos que caracteriza al canal de transmisión.

III.- SISTEMAS HOMOMORFICOS

3.1 Definición Matemática.

Sea T un sistema lineal cualquiera, el principio de superposición establece que

$$T \left[x_1(n) + x_2(n) \right] = T \left[x_1(n) \right] + T \left[x_2(n) \right]$$

además (3.1.1)

$$T \left[Cx_1(n) \right] = CT \left[x_1(n) \right]$$

Si deseamos generalizar el principio de superposición, (Oppenheim, 1975) denotamos con el símbolo \square , a una regla para combinar entradas entre sí, y con el símbolo \diamond , a una regla para combinar entradas con escalares. De igual manera, \circ denotará una regla para combinar salidas, e identificaremos como \lceil a una regla para combinar salidas con escalares. Generalizando la ecuación (3.1.1) tendremos

$$H \left[x_1(n) \square x_2(n) \right] = H \left[x_1(n) \right] \circ H \left[x_2(n) \right]$$

además (3.1.2)

$$H \left[C \diamond x_1(n) \right] = C \lceil H \left[x_1(n) \right]$$

Podemos decir que el sistema H cumple con un principio generalizado de superposición, con una operación de entrada \square

y una operación de salida \odot .

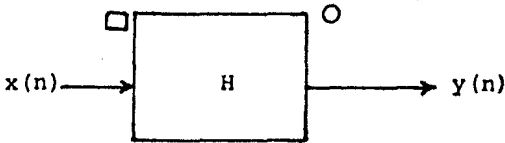


Fig. 3.1

Los sistemas lineales son un caso especial en el que las operaciones denotadas como \square y \odot equivalen a la operación suma, y las operaciones \diamond y \lrcorner equivalen a la operación multiplicación.

La teoría de los espacios vectoriales provee el formalismo matemático para representar sistemas de esta clase. Si interpretamos las entradas y salidas del sistema como vectores en un espacio vectorial con las reglas \square y \odot correspondiendo a la suma vectorial, y a las reglas \diamond y \lrcorner correspondiendo a multiplicación escalar, entonces el sistema de transformación H es una transformación algebraica desde el espacio vectorial de entrada hasta el espacio vectorial de salida.

Las operaciones de entrada y salida deben de satisfacer los postulados algebraicos de suma vectorial y multiplicación escalar, respectivamente. Esto significa que las operaciones \square y \odot deben ser conmutativas y asociativas:

$$x_1(n) \square x_2(n) = x_2(n) \square x_1(n)$$

$$y_1(n) \odot y_2(n) = y_2(n) \odot y_1(n)$$

(3.1.3)

$$x_1(n) \square [x_2(n) \square x_3(n)] = [x_1(n) \square x_2(n)] \square x_3(n) \quad (3.1.4)$$

$$y_1(n) \circ [y_2(n) \circ y_3(n)] = [y_1(n) \circ y_2(n)] \circ y_3(n)$$

Si las entradas al sistema constituyen un espacio vectorial con \square y \diamond correspondiendo a suma vectorial y a multiplicación escalar respectivamente, las salidas del sistema constituyen un espacio vectorial con \circ y \sqcup correspondiendo a suma vectorial y multiplicación escalar, entonces los sistemas de esta clase pueden ser representados como una cascada de tres sistemas, como se muestra en la figura (3.2.)

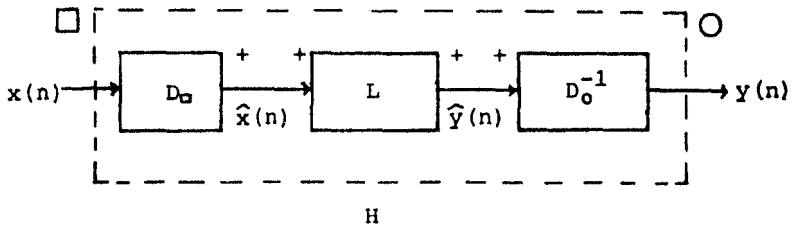


Fig. 3.2 Representación Canónica de los Sistemas Homomórficos.

El sistema D_0 , referido como el sistema característico, tiene la propiedad de que

$$\begin{aligned} D_0 [x_1(n) \square x_2(n)] &= D_0 [x_1(n)] + D_0 [x_2(n)] \\ &= \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n) \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$$D_0 [C \diamond x_1(n)] = C D_0 [x_1(n)] = C x_1(n) \quad (3.1.6)$$

Obsérvese que D_{\square} obedece un principio generalizado de superposición, donde la operación de entrada es \square y la operación de salida es $+$. El efecto del sistema D_{\square} es el transformar la combinación de las señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$ de acuerdo a la regla \square en una combinación lineal de señales correspondientes $D_{\square} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$ y --

El sistema L es un sistema lineal convencional tal que

$$\begin{aligned} L \begin{bmatrix} \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n) \end{bmatrix} &= L \begin{bmatrix} \hat{x}_1(n) \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} \hat{x}_2(n) \end{bmatrix} = \hat{y}_1(n) + \hat{y}_2(n) \\ L \begin{bmatrix} C\hat{x}_1(n) \end{bmatrix} &= C L \begin{bmatrix} \hat{x}_1(n) \end{bmatrix} = C\hat{y}_1(n) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Finalmente, el sistema D_{\circ}^{-1} transforma la adición en \circ , tal que

$$\begin{aligned} D_{\circ}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{y}_1(n) + \hat{y}_2(n) \end{bmatrix} &= D_{\circ}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{y}_1(n) \end{bmatrix} \circ D_{\circ}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{y}_2(n) \end{bmatrix} \\ &= y_1(n) \circ y_2(n) \\ D_{\circ}^{-1} \begin{bmatrix} C\hat{y}_1(n) \end{bmatrix} &= C \left[D_{\circ}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{y}_1(n) \end{bmatrix} \right] = C \left[y_1(n) \right] \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Puesto que el sistema D_{\square} está determinado por las operaciones \square y \diamond , es llamado el sistema característico para la operación \square . Similarmente, D_{\circ} es el sistema característico para la operación \circ . Todos los sistemas homomórficos con la misma operación de entrada y salida difieren sólo en la parte lineal. Esto es de fundamental importancia, porque una vez que el sistema característico ha sido determinado, el proceso se reduce a un filtrado lineal. Por ejemplo, si deseamos recuperar $x_1(n)$ de la señal

$$x(n) = x_1(n) \square x_2(n)$$

debemos escoger el sistema lineal tal que su salida $y(n)$ sea

$$\hat{y}(n) = \hat{x}_1(n)$$

entonces tenemos que $D_o = D_a$, y $y(n) = D_a^{-1} [\hat{x}_1(n)] = x_1(n)$

Esto es, para separar $x_1(n)$ y $x_2(n)$, debemos separar $\hat{x}_1(n)$ y $\hat{x}_2(n)$ usando un filtro lineal. Que tan bien podamos aproximarnos a ésta situación ideal depende de la operación \square y de las señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$. En lo sucesivo de este trabajo nos vamos a restringir a clases de sistemas en que las operaciones de entrada y salida son iguales, y en particular, a los sistemas homomórficos definidos por la operación convolución.

3.2 Sistema de Oppenheim

Uno de los problemas comunes en el procesamiento de señales consiste en tratar de recuperar éstas cuando han sido combinadas a través de convolución. Especialmente en sismología, se trata de recuperar las componentes de una serie de tiempo, que son la ondícula y el tren de coeficientes de reflexión, que han sido combinadas por medio de una convolución.

Como una alternativa al proceso de filtrado lineal comúnmente usado, consideremos una clase de sistema homomórfico que obedece un principio generalizado de superposición para convolución (Oppenheim, 1975).

Si ahora queremos generalizar el principio de superposición a una señal que resulta de la convolución de sus componentes $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$, buscamos un sistema con transformación H tal que

$$H \left[ax_1(t) * bx_2(t) \right] = aH \left[x_1(t) \right] * bH \left[x_2(t) \right] \quad (3.2.1)$$

donde a y b denotan multiplicación escalar y H es un sistema homomórfico. Los elementos en la ecuación (3.2.1) satisfacen los postulados algebraicos de suma vectorial.

El sistema H tiene la siguiente representación canónica

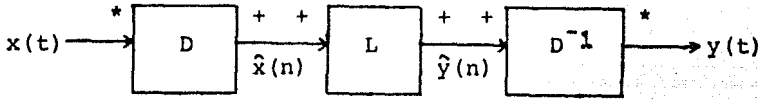


Fig. 3.3

donde el sistema característico D tiene la propiedad

$$D \left[x_1(t) * x_2(t) \right] = D \left[x_1(t) \right] + D \left[x_2(t) \right] = \hat{x}_1(T) + \hat{x}_2(T) \quad (3.2.2)$$

$$D \left[Cx_1(t) \right] = CD \left[x_1(t) \right] = C\hat{x}_1(T)$$

El sistema L es un sistema lineal y el sistema D^{-1} es el inverso de D . Entonces, si podemos de alguna manera determinar el sistema D , entonces tendremos una representación de todos los sistemas que obedecen un principio generalizado de superposición para convolución.

La representación matemática del sistema característico D está basada en el hecho de que la transformada z de una convolución puede representarse como la multiplicación de las transformadas z de sus componentes, donde la transformada z está definida como

$$X(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x(t)z^{-t}, \quad \text{para } z = e^{\sigma + i\omega}$$

entonces tenemos

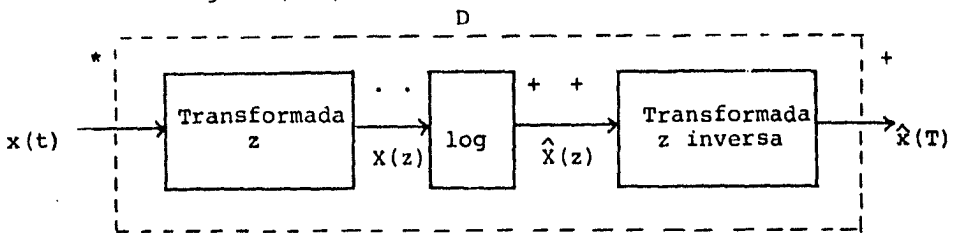
$$X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

Esto significa que podemos considerar a la transformada z como -- una transformación homomórfica con una convolución como operación de entrada y una multiplicación como operación de salida. Podemos cambiar la forma canónica del sistema H si representamos las señales por medio de sus respectivas transformadas z , obteniendo la forma canónica mostrada en la figura (3.4), donde el $\log[]$ se refiere al logaritmo complejo (Oppenheim, 1975).



Fig. 3.4

Si las señales en vez de estar representadas por sus -- transformadas z están representadas como secuencias, podemos entonces representar formalmente el sistema característico D como se ilustra en la figura (3.5)

Fig. 3.5 Representación del sistema característico D .

Existen varias consideraciones importantes implícitas en la representación anterior del sistema característico D :

a) El logaritmo complejo $\log [X(z)]$, debe estar únicamente definido de tal manera que si

$$X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

entonces

$$\hat{X}(z) = \log [X_1(z) \cdot X_2(z)] = \log [X_1(z)] + \log [X_2(z)]$$

b) $\hat{X}(z)$ debe ser una transformada z válida, es decir que $X(z)$ exista y sea analítica.

c) A fin de que $\hat{x}(T)$ sea únicamente definido, debemos escoger una región de convergencia para $\hat{X}(z) = \log [X(z)]$. Asumiendo que $x(t)$ y $\hat{x}(T)$ son secuencias reales y estables, las regiones de convergencia de $X(z)$ y $\hat{X}(z)$ deben incluir al círculo unitario (ver apéndice). Al tratarse de una transformada z debe de tener expansión en series de Laurent

$$\hat{X}(z) = \log [X(z)] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \hat{x}(t) z^{-t}$$

y debe ser analítica en una región que incluya al círculo unitario, y quedaría dentro de éste expresada de la siguiente manera

$$\hat{X}(e^{iw}) = \hat{X}_R(e^{iw}) + i\hat{X}_I(e^{iw})$$

Como $\hat{x}(T)$ es real, $\hat{X}_R(e^{iw})$ debe ser una función par de w , y $\hat{X}_I(e^{iw})$ debe ser una función impar de w . Además, $\hat{X}(e^{iw})$ debe ser una función periódica de w con periodo igual a 2π . Al ser $\hat{X}(z)$ analítica en el círculo unitario, $\hat{X}(e^{iw})$ debe ser continua. Esto significa que sus términos:

$$X_R(e^{i\omega}) = \log \left| X(e^{i\omega}) \right|$$

$$X_I(e^{i\omega}) = \arg [X(e^{i\omega})]$$

deben ser funciones continuas de ω . Si $\log \left| X(e^{i\omega}) \right|$ es analítica en la región anular del círculo unitario, la continuidad de $\hat{X}_R(e^{i\omega})$ es un hecho, sin embargo, el que $\hat{X}_I(e^{i\omega})$ sea continua depende de la definición del logaritmo complejo.

Una aproximación para definir al logaritmo complejo es el asumir que el logaritmo complejo continuo es obtenido por integración de su derivada. Si asumimos un logaritmo complejo univaluado y diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dz} \log [X(z)] = \frac{1}{X(z)} \frac{dX(z)}{dz} = \frac{d\hat{X}(z)}{dz} \quad (3.2.3)$$

Evaluando en el círculo unitario, tenemos

$$\hat{X}'(e^{i\omega}) = \frac{X'(e^{i\omega})}{X(e^{i\omega})} = \hat{X}'_R(e^{i\omega}) + i\hat{X}'_I(e^{i\omega})$$

donde el apóstrofe denota derivada con respecto a ω . Si efectuamos la derivación obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{d\hat{X}_I(e^{i\omega})}{d\omega} = \frac{X_R(e^{i\omega}) X'_I(e^{i\omega}) - X_I(e^{i\omega}) X'_R(e^{i\omega})}{X_R^2(e^{i\omega}) + X_I^2(e^{i\omega})} \quad (3.2.4)$$

Integrando con respecto a ω , aplicamos la condición:

$$\arg [X(e^{i\omega})]_{\omega=0} = 0$$

para asegurar que $\arg [X(e^{i\omega})]$ es una función de ω continua e im par. Si asumimos que $\log [X(z)]$ es analítica, entonces

$$\hat{X}'(z) = \frac{X'(z)}{X(z)} \quad (3.2.5)$$

se cumple que

$$z\hat{X}'(z) = \sum_{\infty}^{\infty} [-t\hat{x}(T)] z^{-t} = \frac{zX'(z)}{X(z)} \quad (3.2.6)$$

Si integramos en un contorno cerrado dentro de la región de convergencia de $\hat{X}(z)$

$$\hat{x}(T) = \frac{-1}{2\pi i t} \oint_c \frac{zX'(z)}{X(z)} z^{t-1} dz, \quad t \neq 0 \quad (3.2.7)$$

$$\hat{x}(T) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c X(z) z^{T-1} dz \quad (3.2.7')$$

para $T=0$

$$\hat{x}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(e^{i\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}_R(e^{i\omega}) d\omega + \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}_I(e^{i\omega}) d\omega \right]$$

como $\hat{X}_I(e^{i\omega})$ es una función impar de ω , su integral de $-\pi$ a π se cancela.

así tenemos que

$$\hat{x}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{x}_R(e^{i\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |x(e^{i\omega})| d\omega \quad (3.2.8)$$

De esta manera hemos llegado a una relación implícita - entre $\hat{x}(T)$ y $x(t)$. $\hat{x}(T)$ será la entrada al sistema L , y ha sido llamada el cepstrum complejo. La palabra cepstrum se origina de un trabajo de Bogert, Healy y Tukey (1963), en el cual denominaron cepstrum al espectro de potencia del logaritmo del espectro de potencia de una señal. En dicho trabajo el uso del cepstrum estaba dirigido hacia la detección de ecos y no a la deconvolución, o -- sea que la retención de la información de fase no era importante. Lo anterior implicaba el uso del logaritmo de valores reales positivos.

En general nosotros debemos de utilizar el logaritmo complejo y la transformada compleja de Fourier, por lo tanto llamaremos cepstrum complejo a la salida del sistema característico D . Es importante hacer notar que el cepstrum complejo de una secuencia real, es una secuencia de valores reales.

Una vez definido el sistema característico D , es conveniente especificar la forma canónica del sistema L , como parte integrante del sistema homomórfico H .

En teoría, cualquier sistema que obedezca al principio de superposición para adición puede ser usado en el sistema homomórfico canónico H , sin embargo es de utilidad considerar una cla

se de sistemas lineales invariantes en la frecuencia, para los cuales

$$Y(e^{i\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(e^{i\theta}) L(e^{i(\omega-\theta)}) d\theta \quad (3.2.9)$$

Para un sistema como éste, se obtiene su transformada de Fourier a partir de $\hat{X}(e^{i\omega}) = \log [X(e^{i\omega})]$, por medio de una convolución --periódica continuamente variable. Dicho sistema tiene una representación en el dominio del tiempo que es como sigue

$$y(t) = l(t) \hat{x}(T) \quad (3.2.10)$$

donde $l(t)$ es la transformada inversa de $L(e^{i\omega})$. $l(t)$ debe ser real y en general debe ser estable, ya que $x(t)$, $\hat{x}(T)$, $y(t)$ y $\hat{y}(T)$ son secuencias reales y estables. Lo anterior implica que $L(z)$ tiene una región de convergencia que incluye al círculo unitario, y que las partes reales e imaginarias de $l(e^{i\omega})$ son funciones par e impar respectivamente.

La conveniencia de este tipo de sistemas se verá cuando se discutan las propiedades de $\hat{x}(T)$.

Para completar la representación del sistema homomórfico H sólo nos faltaría establecer el sistema característico D^{-1} , que podemos establecerlo como lo muestra la figura (3.6). La transformación realizada por el sistema homomórfico D^{-1} es de un espacio aditivo a un espacio convolucional.

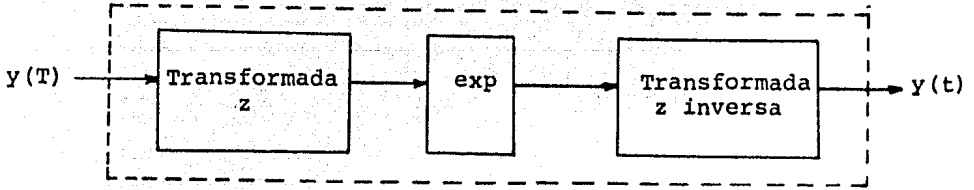


Fig. 3.6 Representación canónica del sistema D^{-1} .

Por definición

$$D^{-1} \left[D \left[x(t) \right] \right] = x(t) \quad (3.2.11)$$

Tenemos pues que la salida del sistema D^{-1} es

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} Y(z) z^{t-1} dz \quad (3.2.12)$$

donde c' es el círculo unitario y $Y(z) = \exp \left[\hat{Y}(z) \right]$. Es importante notar que la función exponencial compleja no tiene problemas de unicidad y que si $Y(z)$ es analítica dentro del círculo unitario, entonces $\exp \left[\hat{Y}(z) \right]$ también lo es (Oppenheim, 1975).

3.3 Normalización de la Traza

Consideraremos una traza sísmica formada por la convolución de dos componentes, que serán la ondícula sísmica $s(t)$ y la serie de coeficientes de reflexión $r(t)$

$$x(t) = s(t) * r(t) \quad (3.3.1)$$

Al obtener el cepstrum de la traza, el principal objetivo que perseguimos es lograr tener separadas las dos componentes aditivas principales, sin embargo, para que esto sea factible es necesario tener en cuenta primero algunos criterios y consideraciou

nes de cálculo.

a) El cepstrum implica el cálculo de la transformada z inversa de una función logarítmica, que en términos de su magnitud y su argumento puede escribirse como

$$\hat{X}(z) = \log X(z) = \log \left[|X(z)| e^{i \arg [X(z)]} \right]$$

$$\log X(z) = \log |X(z)| + i \arg [X(z)] \quad (3.3.2)$$

$$\arg [X(z)] = \text{ARG} [X(z)] + i2\pi k$$

$$k=0,1,2,\dots$$

$$-\pi < \text{ARG} [X(z)] < \pi$$

El logaritmo natural complejo definido en la ecuación (3.3.2) es una función multivaluada ya que tiene una multiplicidad de $2\pi k$. Además, como es una función discontinua, entonces $\log [X(z)]$ no será una función analítica generalmente. Sin embargo, el sistema homomórfico D puede ser único si en (3.3.2) $\log [X(z)]$ es analítica en una región conteniendo un contorno circular c especificado por

$$z = e^{\sigma + iw}, \quad -\pi < w < \pi$$

Es posible lograr la anterior condición calculando $\text{ARG} [X(z)]$ y luego "desenvolviéndolo", es decir, producir $\arg [X(z)]$ el cual es continuo, considerando que la curva de fase ha sido muestreada en intervalos suficientemente pequeños (Ulrych, 1971).

b) Al tomar la transformada inversa de la ecuación -- (3.3.2) llegamos a la definición del cepstrum complejo de la traza, donde c es el contorno circular referido anteriormente, quedando expresado como

$$\hat{x}(T) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \hat{X}(z) z^{T-1} dz \quad (3.3.3)$$

Debido a analogías entre el dominio del tiempo y el cepstrum para series de tiempo impulsivas, es preferible asociar la palabra período con la variable T del cepstrum.

La ecuación (3.3.3) implica sólo aquellos valores de $\hat{X}(z)$ que caen en el contorno cerrado de integración c , por lo tanto $\hat{x}(T)$ es una función de un contorno particular. Si el contorno es restringido al círculo unitario, esto quiere decir que $\sigma=0$ y $z=e^{i\omega}$, lo cual nos permite utilizar la transformada discreta de Fourier (TDF) en vez de la transformada z para el cálculo del cepstrum. Sin embargo, si multiplicamos nuestra función de tiempo original por la función de peso a^t , donde $0 < a < 1$, habremos movido nuestro contorno de integración a un círculo de radio e^{γ} donde $\gamma = -\log a$. Como $a < 1$, γ es positiva y es una función decreciente exponencialmente. Al regresar al dominio del tiempo por medio del sistema inverso D^{-1} , debemos quitarle el peso al resultado, multiplicando éste por a^{-t} lo que garantiza contornos de integración c y c' iguales. Como la transformada discreta de Fourier nos ha servido para evaluar $\hat{X}(z)$ alrededor del círculo unitario, podemos considerar que el efecto del pesado es el mover los polos y ceros de $\hat{X}(z)$ radialmente hacia adentro del círculo unitario en un factor e^{γ} ; y quitar el peso con la función inversa equivale a regresarlos a su posición original (Stoffa et. al, 1974).

Si una función es de fase mínima, esto corresponde a tener todos sus polos y ceros dentro del círculo unitario. Esto es, si el más lejano cero a partir del origen esta en $z_0 = e^{\sigma + i\omega_0}$, entonces para $\gamma > \sigma$ tendremos por resultado que todos los polos y ceros de $X(z)$ se habrán movido hacia adentro del círculo unitario y la función pesada será entonces de fase mínima (Stoffa et al, 1974).

Se ha demostrado (Schafer, 1969) que el cepstrum de una función de fase mínima es cero para $T < 0$. Al pesar adecuadamente una traza sísmica podemos hacer que la serie de coeficientes de reflexión sea de fase mínima, y al obtener el cepstrum podemos decir que cualquier contribución para $T < 0$ se puede atribuir únicamente a la ondícula y que además las dos componentes convolucionadas de la traza sísmica estarán separadas en el cepstrum por una cantidad igual a la separación de los primeros dos impulsos. Esta es una propiedad que es de suma importancia a considerar para -- efectuar el filtrado en el cepstrum.

Contrariamente, una función de fase máxima tendrá sus polos y ceros fuera del círculo unitario y su respectivo cepstrum será cero para $T > 0$.

c) Como nos limitamos a secuencias de entrada de longitud finita, podemos calcular la transformada discreta de Fourier sólo en un número finito de puntos. El fenómeno de alias se presenta en el cepstrum cuando a la operación logaritmo de la ecuación (3.3.2) le sigue la TDF. Esto es debido a que las operaciones no lineales como son: logaritmo, valor absoluto y arco tangente, intro

ducen armónicas en $X(z)$. Como todas las armónicas están presentes hasta periodos T infinitos, el cepstrum será de longitud infinita. Al usar la TDF tendremos un efecto de alias dentro del intervalo principal: $-1/2 \Delta f < T \leq 1/2 f$.

El pesar exponencialmente con a^t puede ayudar a disminuir el efecto de alias, ya que $e^{-\lambda t}$ suaviza $\hat{X}(z)$ al reducir las amplitudes de sus fluctuaciones rápidas. Lo anterior trae como consecuencia que los periodos altos de $\hat{X}(T)$ y sus armónicas se vean reducidos. Los periodos mas cortos son menos afectados pero sus armónicas decaen considerablemente a partir del periodo de doblaje $1/2 \Delta f$.

El efecto de alias puede también ser disminuido añadiendo ceros al final de la serie de tiempo original de tal manera que el logaritmo complejo esté muestreado a una densidad lo suficientemente grande para que no ocurra alias severo al calcular el cepstrum. La disminución del efecto de alias se muestra en la fig.3.7.

d) Sabemos que la transformada de Fourier $F(w)$ de una función de tiempo consiste de una parte real $u(w)$ y una parte imaginaria $v(w)$. Para datos de tiempo limitado apropiadamente muestreado, los coeficientes de Fourier serán muestras de una curva - continua y libre de alias.

$$\{f(t)\} = F(w) = u(w) + iv(w)$$

$$F(w) = \left[u^2(w) + v^2(w) \right]^{1/2} \cdot \exp \left\{ i \tan^{-1} \left[\frac{v(w)}{u(w)} \right] \right\}$$

$$F(w) = A(w) \exp \left[i \phi(w) \right] \quad (3.3.4)$$

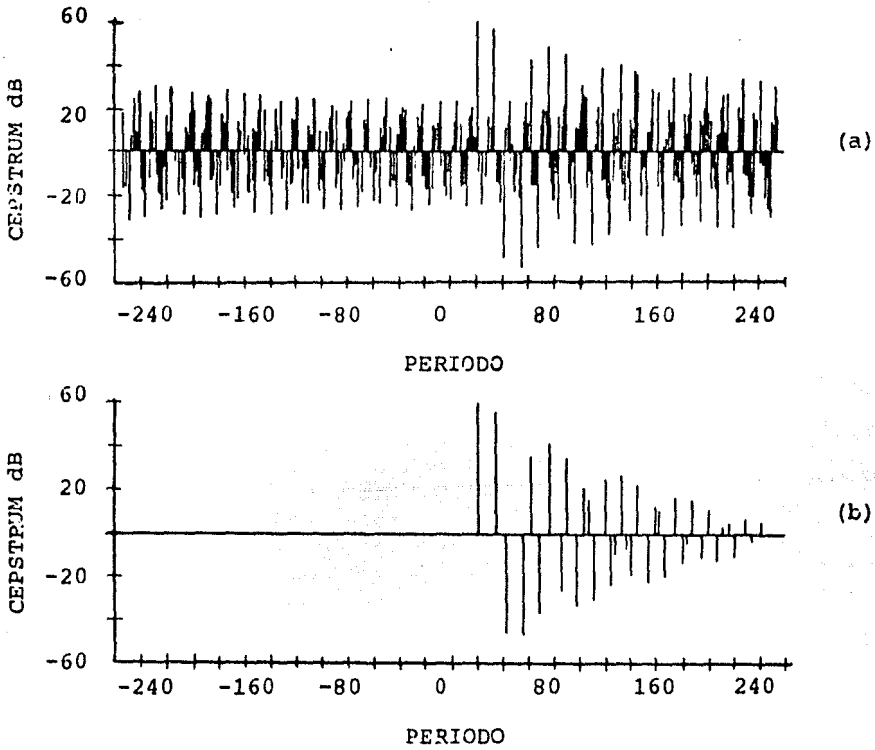


Fig. 3.7 Cepstrum de una serie de tiempo de tres impulsos: $r_0(t) = \delta(t) + \delta(t-21) + \delta(t-34)$. (a) Pesar con $a=0.975$ es suficiente para hacer a la serie de tiempo de fase mínima, pero el cepstrum presenta alias severo. (b) Pesar con $a=0.96$ reduce el alias en el cepstrum.

El logaritmo natural complejo de esta expresión es

$$F(w) = \log [A(w)] + i\phi(w) \quad (3.3.5)$$

La mayor dificultad que se presenta al obtener el cepstrum consiste en calcular una curva de fase apropiada, que tiene que ser continua y estar libre de la componente de fase lineal (rampa). Debido a que la función arco tangente está multivaluada, se deben de escoger los intervalos que la hacen continua. Si se determina el valor principal, la curva de fase resultante estará restringida a $-\pi < \phi \leq \pi$.

La curva de fase continua para los datos de entrada es comunmente llamada fase desenvuelta y puede ser definida rigurosamente en términos de la integral de su derivada.

El desenvolvimiento de fase convencional se puede hacer ya sea por el procesado apropiado del valor principal de fase -- (algoritmo de Schafer), o bien por la integración numérica de la fase. El algoritmo de Schafer se basa en la detección de las discontinuidades de la curva de fase lo cual se hace calculando la diferencia entre los valores principales de fase en dos frecuencias adyacentes w_{k-1} y w_k . Cuando ésta diferencia es mayor que un umbral dado, podemos decir que esta presente una discontinuidad. La fase es desenvuelta sumando apropiadamente múltiplos de 2π al valor principal hasta que las discontinuidades inducidas por el módulo de la operación 2π , son removidas. Este procedimiento dara por resultado una curva de fase continua (desenvuelta) cuando el muestreo de frecuencias es lo suficientemente fino tal que la diferen

cia entre dos muestras adyacentes de la fase desenvuelta es siempre menor que el umbral especificado. Sin embargo, en presencia de una rampa grande (componente de fase lineal) éste método presenta problemas, los cuales pueden ser resueltos usando un algoritmo iterativo de desenvolvimiento (Tribolet, 1977).

Una aproximación alternativa al cálculo de la curva de fase continua consiste en considerar la derivada de fase con respecto a la frecuencia (Stoffa et al, 1974).

$$\frac{d}{dx} \left[\tan^{-1} x \right] = \frac{1}{1+x^2} \quad (3.3.6)$$

Si $x=v(w)/u(w)$, y $\phi(w) = \tan^{-1}x$, entonces

$$\frac{d\phi}{dw} = \frac{1}{1 + \frac{v^2(w)}{u^2(w)}} \cdot \frac{d}{dw} \left(\frac{v(w)}{u(w)} \right) \quad (3.3.7)$$

y

$$\frac{d}{dw} \left(\frac{v(w)}{u(w)} \right) = \left[u(w) \frac{dv(w)}{dw} - v(w) \frac{du(w)}{dw} \right] / u^2(w)$$

tal que

$$\frac{d\phi}{dw} = \frac{1}{u^2(w) + v^2(w)} \cdot \left[u(w) \frac{dv(w)}{dw} - v(w) \frac{du(w)}{dw} \right] \quad (3.3.8)$$

Hay que hacer notar que en la práctica, el cálculo de las derivadas en la ecuación (3.3.8) se lleva a cabo de manera in

directa, utilizando propiedades de la transformada de Fourier -- previamente a la integración de la ecuación (3.3.8), con lo que obtenemos una curva de fase continua. Esta aproximación ofrece, además, un método para remover el corrimiento de fase lineal, ya que éste es el valor medio de $d\phi/dw$. Determinando esta media, quitándola de $d\phi/dw$ y luego integrando obtenemos la curva de fase deseada, continua y libre de rampa.

El término de fase lineal o rampa es necesario quitarlo ya que su transformación tiene contribuciones para todos los periodos (T) en el cepstrum, que pueden enmascarar la información. Podemos interpretar el remover el término de fase lineal como un corrimiento de nuestra función pesada, de tal forma que el primer impulso se sitúa en el origen.

3.4 Principales Propiedades

Con el fin de mostrar la utilidad de los sistemas homomórficos en la sismología vamos a considerar algunas propiedades del cepstrum para señales de interés.

-Secuencias de impulsos de fase mínima (Stoffa et al, 1974)

Sea $x_0(t)$ una serie de n impulsos distribuidos arbitrariamente en el tiempo

$$x_0(t) = \sum \alpha_i \delta(t-t_i) \quad t_i \geq 0 \quad (3.4.1)$$

El primer paso para encontrar el cepstrum de ésta función es aplicarle un peso exponencial

$$x(t) = x_0(t) a^t \quad (3.4.2)$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i a^{t_i} \delta(t-t_i) \quad (3.4.3)$$

donde $0 < a \leq 1$

la transformada z es

$$X(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i a^{t_i} z^{-t_i} \quad (3.4.4)$$

factorizando

$$X(z) = \alpha_1 a^{t_1} z^{-t_1} \left[1 + \sum_{i=2}^n \beta_i a^{T_i} z^{-T_i} \right], \quad (3.4.5)$$

donde

$$\beta_i = \alpha_i / \alpha_1 \quad ; \quad T_i = t_i - t_1 \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n$$

ahora, tomando el logaritmo natural

$$X(z) = \log(\alpha_1 a^{t_1} z^{-t_1}) + \log \left[1 + \sum_{i=2}^n \beta_i a^{T_i} z^{-T_i} \right] \quad (3.4.6)$$

z^{-t_1} es el término de la rampa de la fase por lo que es necesario eliminarlo. Con respecto a la transformada z (ecuación 3.4.5), - esto es equivalente a remover los t_1 ceros al infinito en el plano z. Así, tenemos

$$X(z) = \log(\alpha_1) + \log \left[1 + \sum_{i=2}^n \beta_i a^{T_i} z^{-T_i} \right] \quad (3.4.7)$$

el paso final de la transformación es el contorno de integración

definido en la ecuación (3.4.7) sin embargo, en lugar de realizar la integración indicada, seguimos el método descrito por Schafer (1969). Si podemos manipular en una forma tal que sea reconocida como la transformada z de una función conocida, entonces conoceremos la función. En éste caso, encontrando la expansión en series de Laurent en $z=0$ para el segundo logaritmo de la ecuación (3.4.7) es el paso siguiente.

La expansión en series de Laurent de $\log(1+x)$ en $x=0$ es

$$\log(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} x^m, \quad (3.4.8)$$

$$|x| < 1$$

hacemos

$$x = \sum_{i=2}^n \beta_i a^{T_i} z^{-T_i} \quad (3.3.9)$$

donde

$$\left| \sum_{i=2}^n \beta_i a^{T_i} z^{-T_i} \right| < 1 \quad |x| < 1 \quad (3.4.10)$$

este requerimiento asegura que la serie de impulsos sea de fase mínima. Para datos reales, debido a las pérdidas por dispersión y atenuación, una pequeña cantidad de peso es necesaria para hacer a la serie de impulsos de fase mínima (pero no necesariamente a la traza). Entonces

$$\hat{X}(z) = \log(\alpha_1) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \left(\sum_{i=2}^n \beta_i a^{T_i} z^{-T_i} \right)^m \quad (3.4.11)$$

La expresión entre paréntesis es un polinomio de $n-1$ términos elevado a la potencia m , y se puede expandir usando la expansión multinomial (Morse y Fesbach, 1953). De esta forma es reconocible - como la transformada z de la siguiente función

$$\hat{x}(T) = \log(x_1) \delta(T) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sum_{l_2, l_3, \dots, l_n} \left[\frac{m}{l_2 l_3 \dots l_n} \beta_2^{l_2} \beta_3^{l_3} \dots \beta_n^{l_n} a^{\sum_{j=2}^n T_j l_j} \right] \delta\left(T - \sum_{j=2}^n T_j l_j\right) \quad (3.4.12)$$

donde

$$\sum_{j=2}^n l_j = m \quad (3.4.13)$$

La segunda sumatoria en la ecuación (3.4.12), es sobre todas las posibles combinaciones de los l_j que satisfacen (3.4.13).

Vemos de la función δ en la ecuación (3.4.12), que hay contribuciones al cepstrum para todos los períodos originales y todos sus múltiplos, y también para todas las combinaciones de - estos múltiplos.

El cepstrum es cero para períodos negativos puesto que la serie de impulsos es de fase mínima.

Nótese que el cepstrum es cero entre $T=0$ y $T=T_2$, una -- propiedad que será usada posteriormente para deconvolucionar la - traza.

Además, aunque la serie de impulsos sea de extensión finita, el cepstrum será de extensión infinita.

Si la serie de impulsos es de fase máxima, entonces el cepstrum es cero para valores positivos de T .

Al calcular el cepstrum por medio de la transformada discreta de Fourier, resulta una versión alias de la ecuación (3.4.12). Sin embargo, el aplicarle un peso exponencial a la serie de impulsos sirve para un doble propósito: garantiza que nuestra serie de impulsos sea de fase mínima y reduce el efecto de alias (obsérvese la figura (3.7)).

-Reverberación en una columna de agua (Stoffa et al, 1974)

Sea $m(t)$ el generador de múltiplos de una columna de agua

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n R^n \delta(t - nT_w) \quad (3.4.14)$$

donde R es el coeficiente de reflexión, $0 < R < 1$, y T_w es el tiempo de tránsito a través de la columna de agua.

La función es de fase mínima puesto que $R < 1$

La transformada z de $m(t)$ es

$$M(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m R^m z^{-mT_w} \quad (3.4.15)$$

o

$$M(z) = (1 + R z^{-T_w})^{-1} \quad (3.4.16)$$

Tomando el logaritmo complejo y usando la expansión en series de Laurent en $z=0$

$$\widehat{M}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{R^m}{m} z^{-mT_w} \quad (3.4.17)$$

Por lo que el cepstrum de la reverberación debida a una columna de agua es

$$\widehat{m}(T) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{R^m}{m} \delta(T - mT_w) \quad (3.4.18)$$

-Pulso de Burbuja (Stoffa et al, 1974)

Sea $b(t)$ la parte periódica de la oscilación del pulso de la burbuja producida por un cañón de aire

$$b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n \delta(t - nT_b) \quad 0 < R < 1 \quad (3.4.19)$$

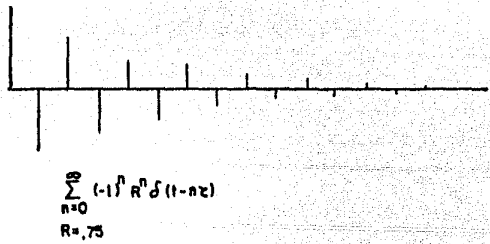
donde T_b es el período de las oscilaciones.

Siguiendo el mismo método usado para la reverberación en una columna de agua, se obtiene el cepstrum de $b(t)$

$$\widehat{b}(T) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R^m}{m} \delta(T - mT_b) \quad (3.4.20)$$

En las figuras 3.8 y 3.9 están representadas algunas series de tiempo y su correspondiente cepstrum.

(a) Generador de múltiplos de signo alternado



(b) Dipolo

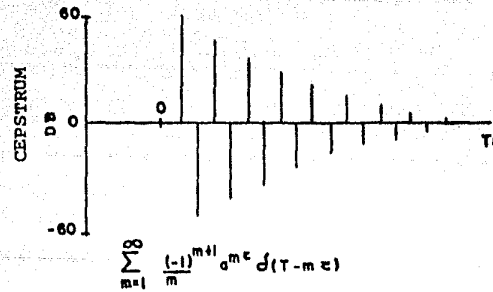
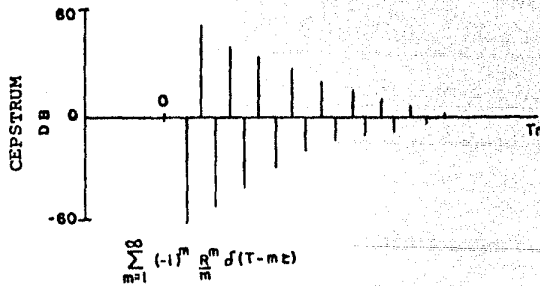
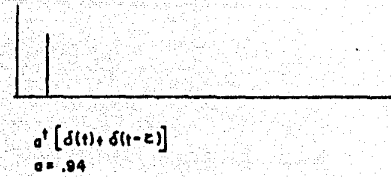


Figura 3.8 Funciones de fase mínima y su respectivo cepstrum. La función (a) es el inverso convolucional de (b) puesto que la suma de los cepstrum es cero para $R=a^f$

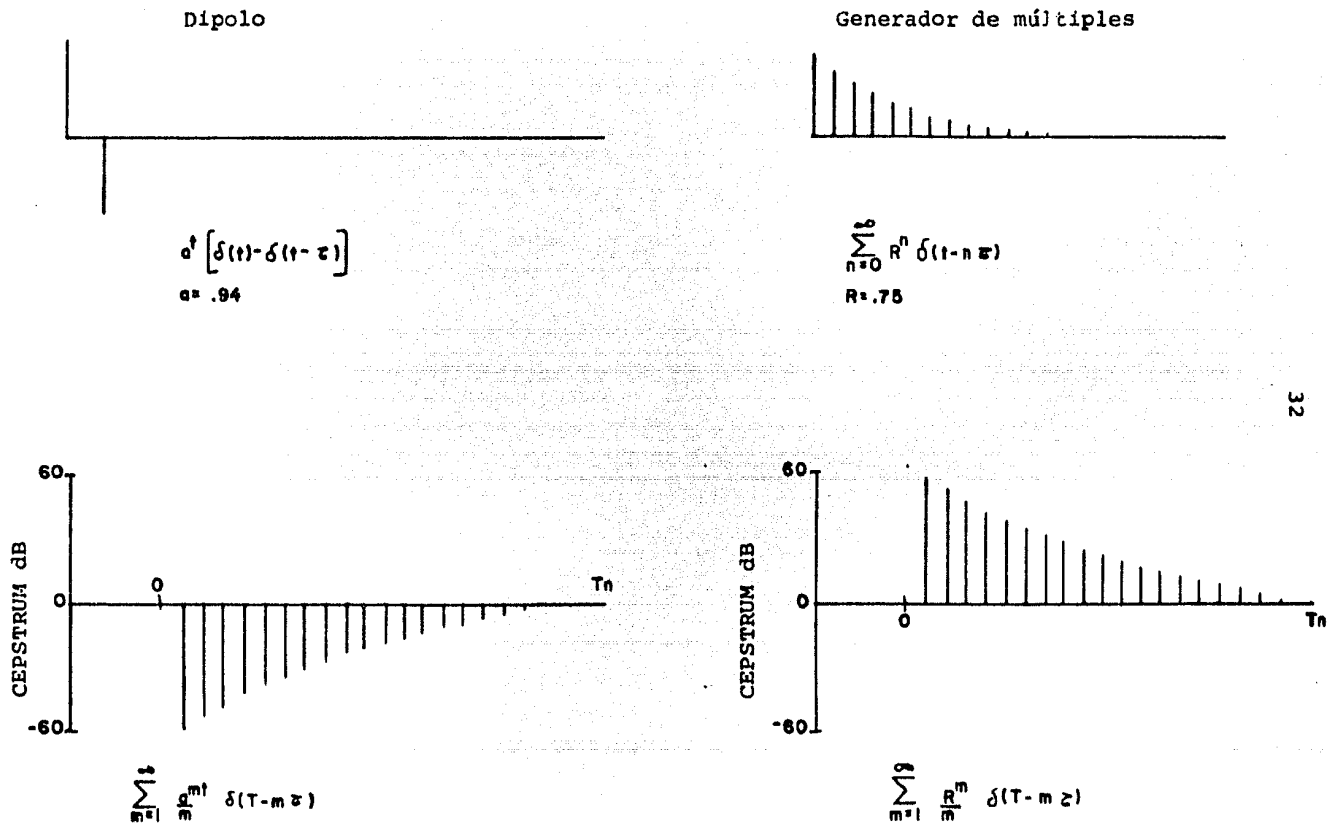


Figura 3.9 Funciones convolucionales inversas de fase mínima

-Cepstrum de señales desplazadas (Souza, 1976)

Sea la señal $y(t)$ definida como

$$y(t) = x(t - k t) \quad (3.4.21)$$

$$y(t) = x_1 \delta(t - k\Delta t) + x_2 \delta(t - (k+1)\Delta t) \quad (3.4.22)$$

La transformada z de $y(t)$ es

$$Y(z) = z^k X(z) \quad (3.4.23)$$

tomando logaritmo

$$\hat{Y}(z) = \hat{X}(z) + k \log(z) \quad (3.4.24)$$

de (3.4.24) el cepstrum de $y(t)$ es

$$\hat{y}(\tau) = \hat{x}(\tau) + \hat{\alpha}(\tau) \quad (3.4.25)$$

donde $\hat{\alpha}(\tau)$ es la contribución debida al desplazamiento de la señal. La función $\hat{\alpha}(\tau)$ no puede ser evaluada directamente de su transformada z porque $\log z$ no tiene expansión en series de Laurent en $z=0$. Sin embargo, por las propiedades de la transformada de Fourier (3.4.23) puede ser escrita como

$$Y(w) = |X(w)| e^{i(\theta_X(w) - kw)} \quad (3.4.26)$$

Tomando logaritmo

$$\hat{Y}(w) = \hat{X}(w) - ikw \quad (3.4.27)$$

Comparando (3.4.27) con (3.4.25) encontramos que $\hat{\alpha}(T)$ es la transformada inversa de Fourier del factor $-ikw$, esto es

$$\hat{\alpha}(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-ikw) e^{i\omega T} d\omega \quad (3.4.28)$$

evaluando la integral

$$\hat{\alpha}(T) = \begin{cases} \frac{k}{T} & \text{para } T \text{ par} \\ \frac{k}{T} & \text{para } T \text{ impar} \\ 0 & \text{para } T=0 \end{cases} \quad (3.4.29)$$

Usualmente la componente de fase lineal debida a un desplazamiento en el tiempo es eliminada antes del cálculo del cepstrum como lo ha descrito Shafer (1969) y Stoffa et al (1974).

En la figura (3.10) se muestra el cepstrum debido a un desplazamiento unitario de una ondícula sísmica.

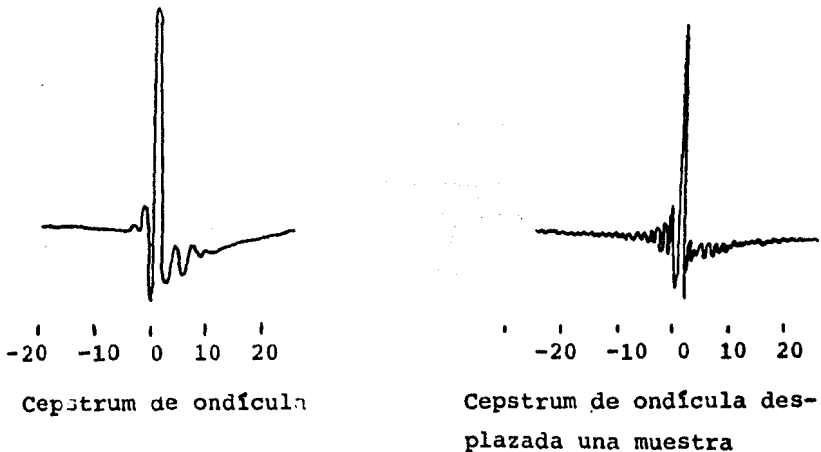


Figura 3.10

-Cepstrum de señales escaladas (Souza, 1976)

Si una señal es multiplicada por una constante positiva C sólo el cepstrum en $T=0$ será modificado

$$y(t) = C \cdot x(t) \quad C > 0 \quad (3.4.30)$$

$$\hat{y}(T) = \hat{x}(T) + \log C \delta(T) \quad (3.4.31)$$

Si $x(t)$ es multiplicada por una constante negativa entonces se - añadirá un corrimiento de π en el espectro de fase

$$y(t) = -C \cdot x(t) \quad (3.4.32)$$

Su transformada de Fourier es

$$Y(w) = C |X(w)| e^{i \left[\theta_x(w) + \frac{w}{|w|} \pi \right]} \quad (3.4.33)$$

tomando el logaritmo

$$\hat{Y}(w) = \log C + \hat{X}(w) + i \frac{w}{|w|} \pi \quad (3.4.34)$$

al tomar la transformada inversa, obtenemos el cepstrum

$$\hat{y}(T) = \hat{x}(T) = \log C \delta(T) + \hat{\beta}(T) \quad (3.4.35)$$

donde $\hat{\beta}(T)$ es la contribución al cepstrum debido al factor (-1) en la serie de tiempo. Evaluando $\hat{\beta}(T)$, resulta

$$\hat{\beta}(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(i \frac{w}{|w|} \pi \right) e^{i w T} dw \quad (3.4.36)$$

$$\hat{\beta}(T) = \begin{cases} 0 & \text{para } T \text{ par} \\ -\frac{2}{T} & \text{para } T \text{ impar} \end{cases} \quad (3.4.37)$$

La figura (3.11) muestra el cepstrum del operador convolucional $-f(t)$ que es equivalente a -1

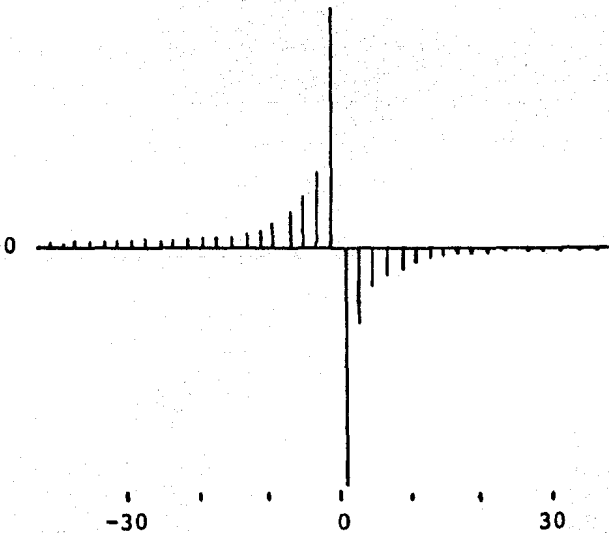


Figura 3.11 Cepstrum de $-f(t)$

IV.- DISEÑO DE FILTROS EN EL CEPSTRUM

Hemos visto que la transformación homomórfica de Oppenheim que hemos tratado nos lleva de un espacio convolucional en el dominio del tiempo a un espacio aditivo en el dominio del periodo T al obtener el cepstrum. Lo anterior es la base que utilizamos para obtener expresiones en el cepstrum que sirven como filtros en el procesado de datos sísmicos.

El análisis sísmico por medio de los filtros homomórficos utiliza las diferentes características de las componentes de la señal en el cepstrum. Esta técnica posee la ventaja de que no requiere de un conocimiento previo de la forma de la ondícula sísmica, además de que la ondícula no se supone de fase mínima como sucede con las técnicas de deconvolución predictiva.

Si suponemos un modelo sísmico invariante en el tiempo

$$x(t) = s(t) * r(t)$$

El cepstrum complejo, $x(T)$, de éste modelo va a consistir de componentes asociadas con la ondícula sísmica más componentes

asociadas con la serie de coeficientes de reflexión.

El espectro de potencia de la ondícula sísmica es mucho más suave que el espectro de potencia de la serie de coeficientes de reflexión, y esto está ligado con el hecho de que el cepstrum de la ondícula está concentrado alrededor del origen, mientras -- que el cepstrum de la serie de coeficientes de reflexión aparece como una serie infinita más alejada del origen.

El cepstrum de una serie de coeficientes de reflexión $r(T)$, tendrá generalmente una estructura complicada. A fin de -- hacer esta estructura tan simple y predecible como sea posible, y así mismo facilitar la separación de las componentes de la señal en el espacio cepstral, se ha hecho común el pesar exponencialmente la traza para convertir a fase mínima a la serie reflectora. De esta manera, la serie de coeficientes de reflexión contribuirá al cepstrum sólo para períodos T positivos más grandes o iguales que el intervalo entre los dos primeros arribos. En tal -- caso, el uso de una ventana en el cepstrum alrededor del origen, con su correspondiente suavizamiento de las orillas (esto es, filtrado pasa bajos en el cepstrum), retendría las contribuciones de la ondícula sísmica, mientras que una ventana que deje pasar sólo la parte de períodos altos en el cepstrum, podría usarse para recuperar la serie de coeficientes de reflexión.

A continuación veremos como se obtienen las expresiones para filtro inverso y para filtros modeladores (Souza, 1976).

4.1.- Filtro Inverso

Sea $f_1(t)$ el filtro inverso de $s(t)$, tal que

$$f_1(t) * s(t) = \delta(t) \quad (4.1)$$

obteniendo la transformada z , la expresión queda

$$F_1(z) \cdot S(z) = 1 \quad (4.2)$$

o lo que es equivalente

$$F_1(z) = [S(z)]^{-1} \quad (4.3)$$

siguiendo con la metodología ya conocida para llegar al cepstrum, obtenemos el logaritmo de la ecuación (4.3)

$$\widehat{F}_1(z) = \log F_1(z)$$

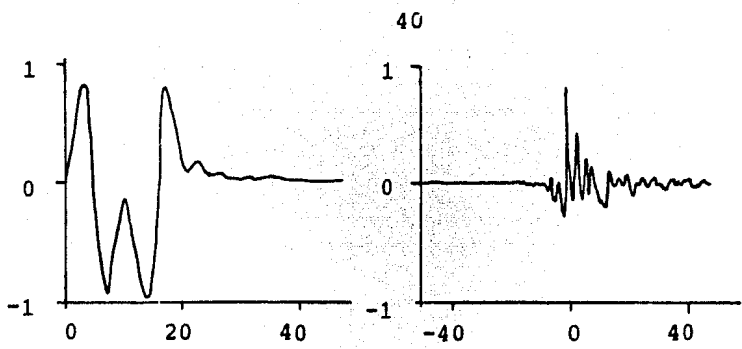
$$\widehat{F}_1(z) = -\log S(z)$$

$$\widehat{F}_1(z) = -\widehat{S}(z) \quad (4.4)$$

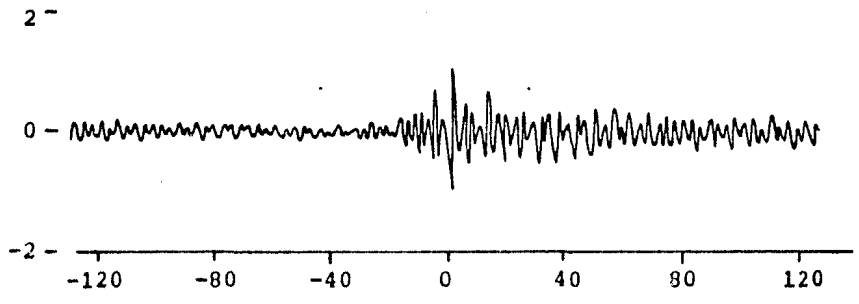
A continuación obtenemos la transformada inversa de (4.4), que nos da

$$\widehat{f}_1(T) = -\widehat{s}(T) \quad (4.5)$$

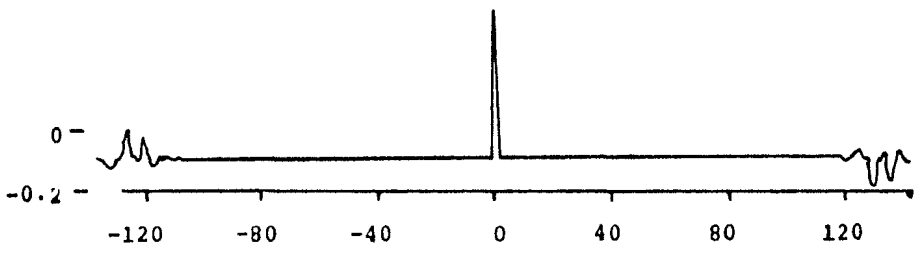
La ecuación (4.5) nos muestra que la operación en el cepstrum equivalente a encontrar el filtro inverso para una ondícula - se limita a un simple cambio de signo. Por lo tanto, si el cepstrum de la ondícula es conocido, su filtro inverso es obtenido fácilmente en el dominio del tiempo (Souza, 1976). La figura (4.1) nos muestra un ejemplo de lo anterior.



a) Ondícula de cañón de aire. b) Parte central del cepstrum de la ondícula



c) Filtro inverso, calculado cambiando el signo del cepstrum y transformando al dominio del tiempo.



d) Convolución del filtro inverso con la ondícula.

Fig. 4.1

4.2.- Filtros Modeladores

Sea $f_2(t)$ el filtro modelador tal que cuando es convolucionado con $s(t)$, nos da la señal $y(t)$

$$f_2(t) * s(t) = y(t) \quad (4.6)$$

obteniendo su transformada z

$$F_2(z) \cdot S(z) = Y(z) \quad (4.7)$$

tomando el logaritmo de (4.7)

$$\log [F_2(z) \cdot S(z)] = \log Y(z)$$

$$\widehat{F}(z) + \widehat{S}(z) = \widehat{Y}(z) \quad (4.8)$$

despejando $F(z)$ de la ecuación (4.8)

$$\widehat{F}(z) = \widehat{Y}(z) - \widehat{S}(z) \quad (4.9)$$

obtenemos el cepstrum utilizando la transformada z inversa de (4.9)

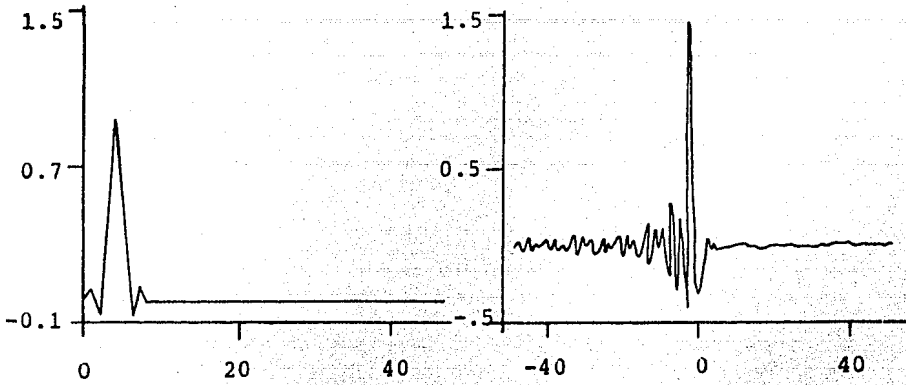
$$\widehat{f}(\tau) = \widehat{y}(\tau) - \widehat{s}(\tau) \quad (4.10)$$

De esto podemos observar que el diseño de un filtro modelador de ondícula requiere de los cepstra tanto de la ondícula real como de la ondícula deseada. En las figuras (4.2) y (4.3) - podemos ver un ejemplo de aplicación de un filtro modelador .

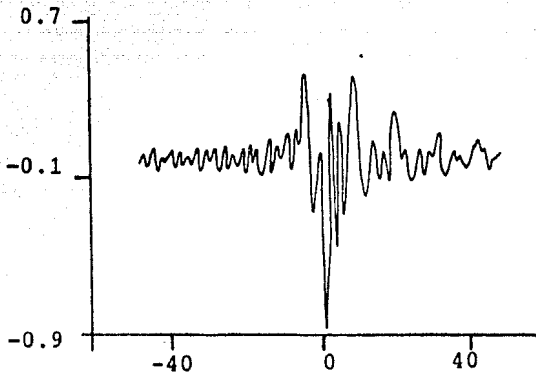
Es importante hacer aquí unas aclaraciones que se deben de tomar en cuenta cuando se diseñan filtros para trabajar en el

dominio del periodo. Los filtros diseñados mediante substracciones de cepstra son teóricamente libres de error, siempre y cuando el cepstrum tenga un número infinito de muestras. Sin embargo, las amplitudes de algunos filtros inversos se decrementan muy lentamente en el dominio del periodo. Esto trae como consecuencia que al utilizar el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para transformar el cepstrum al dominio del tiempo, obtengamos una salida con efecto de alias considerable. Este efecto se ha observado como el causante de cierto error introducido en los extremos de la señal a la cual se le ha aplicado el filtro. Esta característica puede ser relacionada a la periodicidad del algoritmo de la transformada rápida de Fourier.

La longitud del filtro se puede incrementar utilizando un número mayor de muestras en el cepstrum. Cuando el filtro es dos veces la longitud de la señal a filtrar, los errores inducidos por el efecto de alias no serán de gran consideración en el resultado final. El alias en el dominio del tiempo se puede minimizar utilizando el recurso de aplicar un truncador pasa bajos en el cepstrum. Este procedimiento tiene como consecuencia que las amplitudes del filtro se decrementan rápidamente y por lo tanto, se reduce el efecto de alias. Por otra parte, la efectividad del filtro se reduce si usamos sólo la **parte central** del cepstrum, y algo de error es introducido en la señal filtrada.

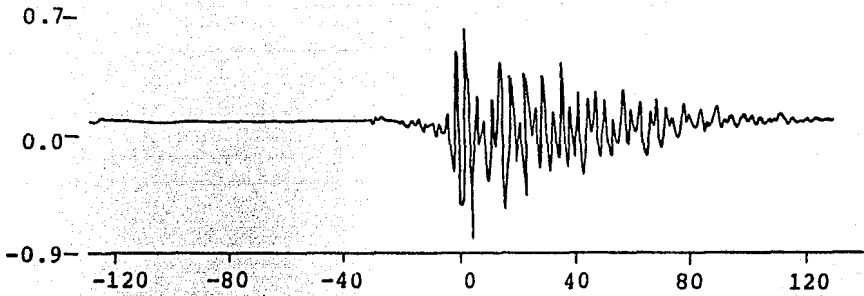


a) Ondícula deseada

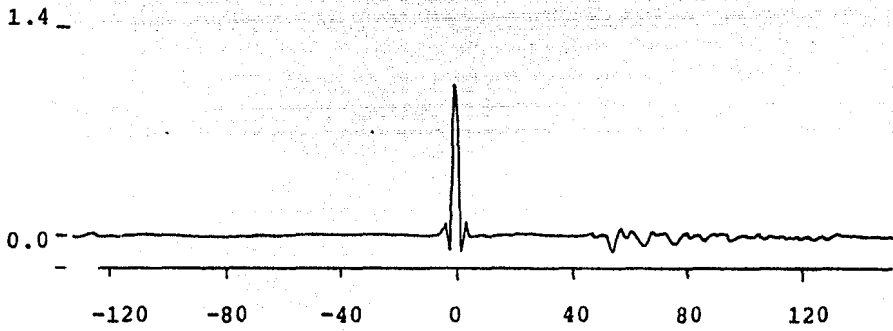
b) Cepstrum de la ondícula
deseada.

c) Cepstrum del filtro modelador para la ondícula de la fig.4.1a

Fig. 4.2



(a)



(b)

Fig. 4.3 (a) Filtro modelador para modificar la ondícula de la figura 4.1a, a la ondícula deseada de la figura 4.2a .

(b) Salida: Convolución del filtro con la ondícula de entrada.

V.- EXTRACCION DE SERIES DE COEFICIENTES DE REFLEXION

En el filtrado inverso estadístico debemos hacer una suposición acerca de la información de fase, ya que al tomar la funcción de autocorrelación de la traza, dicha información ha sido destruída. Tal suposición es generalmente que la fuente es de fase mínima.

Como el espectro de potencia de la fuente varía lentamente con respecto a la frecuencia, la deconvolución en el dominio del tiempo elimina las componentes de baja frecuencia del espectro de potencia de la traza, dejando las componentes de alta frecuencia que presumiblemente representan a la serie reflectora.

Se pueden obtener mejores resultados al tratar el espectro de fase como se ha venido tratando al espectro de potencia en el filtrado estadístico, esto es, asociar las componentes de lenta variación con la fuente, y a las componentes de rápida variación con la serie reflectora. Esta discusión indujo a trabajar en el cepstrum, ya que las componentes de lenta variación en el dominio

de las frecuencias están relacionadas con las componentes concentradas alrededor del origen en el cepstrum, y similarmente, las componentes de rápida variación en frecuencias, corresponden a las componentes alejadas del origen en el cepstrum (Stoffa et al, 1974).

Removiendo los valores del cepstrum cercanos al origen, podemos eliminar las componentes de baja frecuencia del espectro de fase y del espectro de amplitud.

En éste método, la fuente no tiene que ser necesariamente de fase mínima, aunque la serie reflectora sí tiene que ser de fase mínima, o puede ser hecha tal con un pesado exponencial apropiado, como se vió en el capítulo III.

Puesto que la serie reflectora de fase mínima tiene contribuciones en el cepstrum que están confinadas en periodos mayores que el tiempo de arribo del primer reflejo, una deconvolución puede ser realizada reteniendo únicamente dichas contribuciones.

Consideremos una función en el tiempo, que es la respuesta al impulso de un filtro pasa banda de 20-60 hz, representando una posible fuente e ilustrada en la figura 5.1 a. Sus respectivos espectros de fase y potencia, así como su cepstrum están mostrados en la figura 5.1 b,c,d.

Nótese que el cepstrum tiene una significativa contribución en periodos negativos, indicando una sustancial componente de fase máxima.

Cualquier intento de recobrar una serie reflectora de una traza formada por la convolución de ésta función de fase mixta

con la serie reflectora puede fallar si uno usa la suposición -- de que la fuente es de fase mínima (Comínguez y Hilterman, 1981).

En este ejemplo, Stoffa et al (1974) removieron todas - las contribuciones en el cepstrum para periodos mayores que +18 y menores que -18. En las figuras 5.2 a,b,c están representados -- los espectros de fase y potencia, y la correspondiente ondícula, que es casi idéntica a la original de la figura 5.1a . Al elimi- nar las contribuciones del cepstrum para $-18 \leq T \leq 18$, se removerán la mayoría de los efectos de una convolución con ésta función (on dícula pasa banda) como se muestra en la figura 5.2d, que es nues tra fuente deconvolucionada. Por supuesto, que cualquier reflector cuya primera contribución en el cepstrum esté entre 0 y 18 será re movido junto con la fuente (e incidentalmente, introducirá una - pequeña cantidad de ruido convolucional). Sin embargo, puede ser necesario sacrificar una pequeña cantidad de información del reflec tor para deconvolucionar adecuadamente a la fuente.

Para propósitos de ilustración se ha escogido un reflec tor de fase máxima, figura 5.3, donde la separación entre el tiro y el primer reflector es mayor que 18. Pesando con $a=0.98$ es su- ficiente para hacer a la serie de coeficientes de reflexión de - fase mínima. Dadas las características anteriores, la primera-- contribución en el cepstrum estará en $T > 18$. En la figura 5.3b, se muestra convolucionada con la fuente de la figura 5.1a y pesada con $a=0.98$. El cepstrum está mostrado en la figura 5.3c . La deconvolución es realizada poniendo todas las contribuciones del cepstrum que estén entre -18 y +18 iguales a cero. A la traza resul tante de ésta deconvolución se le quita el peso y da por resultado

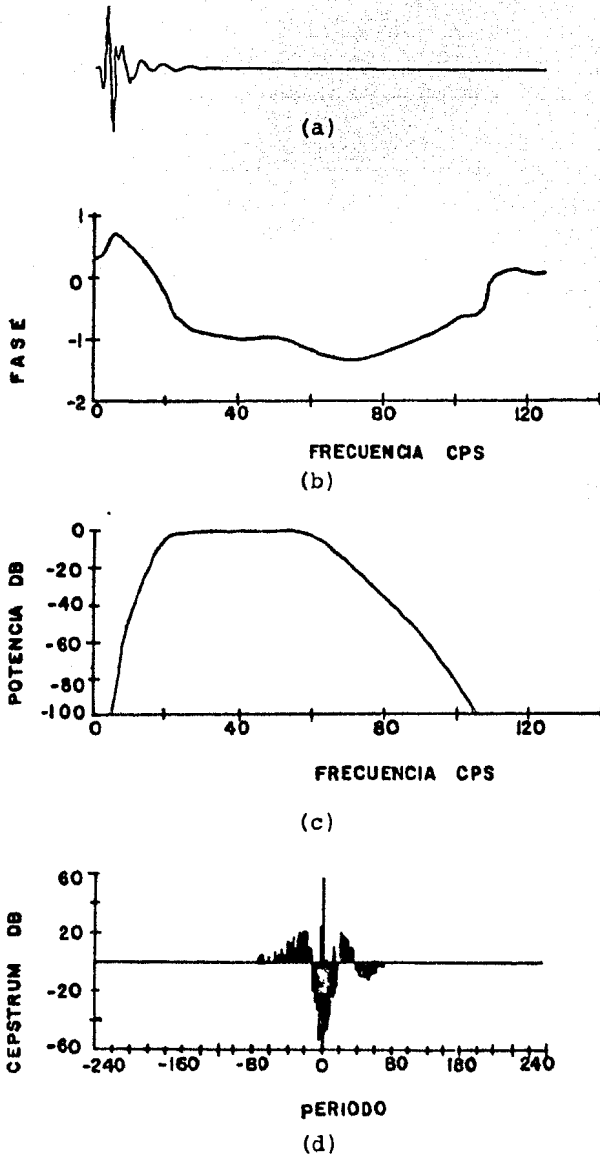
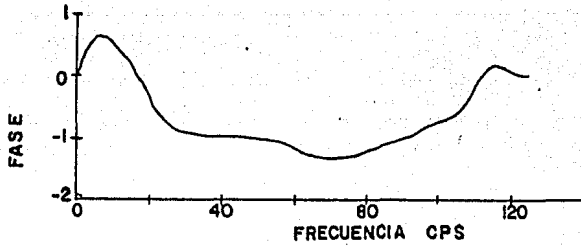
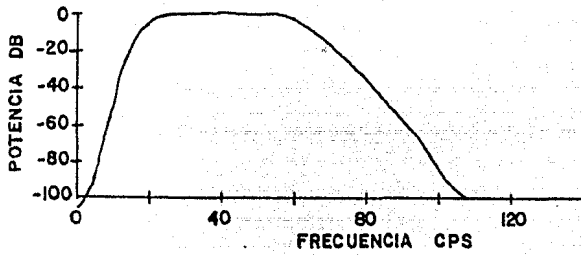


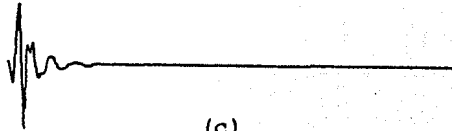
Fig. 5.1 . (a) Ondícula sísmica. (b) Espectro de fase.
 (c) Espectro de Potencia. (d) Cepstrum.



(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 5.2 (a) Espectro de fase obtenido al hacer cero el cepstrum de la fig. 5.1d para $|T| > 18$. (b) Espectro de Potencia correspondiente. (c) Correspondiente ondícula en el dominio del tiempo. (d) Salida resultante al hacer cero el cepstrum de la fig. 5.1d en el rango $-18 \leq T \leq 18$.

la serie de tiempo mostrada en la figura 5.3 d.

Con este procedimiento queda mostrado que una convolución en la que una ondícula que no es de fase mínima ha sido fácilmente deconvolucionada. El ruido aparece por las contribuciones de la ondícula que todavía están presentes en los periodos que se han retenido. El efecto de quitar el peso ha amplificado el ruido al final de la traza.

Ahora vamos a considerar la deconvolución de una función periodica impulsiva y amortiguada, tal y como es la reverberación producida por una columna de agua (Stoffa et al, 1974).

El cepstrum de ésta función (demostrado en el capítulo III) es

$$\hat{m}(T) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{R^m}{m} \delta(T - mT_w) \quad (5.1)$$

removiendo las primeras n contribuciones del generador de múltiples

$$\hat{e}_n(T) = \hat{m}(T) - \sum_{l=1}^n (-1)^l \frac{R^l}{l} \delta(T - lT_w) \quad (5.2)$$

realizando la substracción y tomando la transformada z , resulta

$$\hat{e}_n(z) = \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{z^l}{l} \quad \zeta = -Rz^{-T_w} \quad (5.3)$$

expandiendo en series de potencias obtenemos

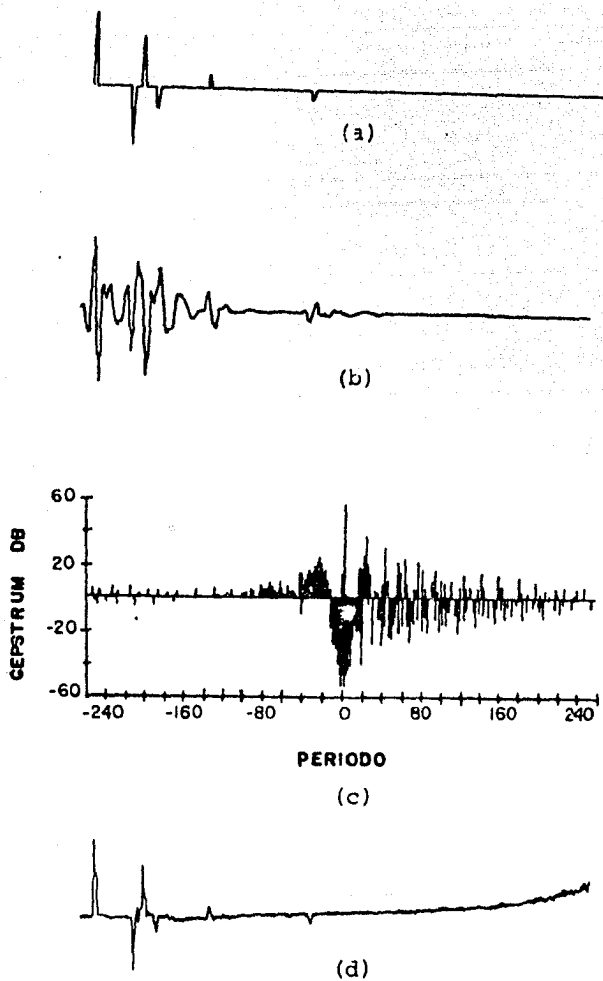


Fig. 5.3. (a) Tren de impulsos de fase mixta arbitrario, excepto que la separación de los dos primeros es 19. (b) convolución de este tren con la ondícula de la fig. 5.1 a. (c) cepstrum de la traza, peso: $a=0.98$. (d) Serie de tiempo deconvolucionada al hacer cero las contribuciones del cepstrum para $-18 \leq T \leq 18$.

$$P_n(z) = \prod_{l=n+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! l^j} \zeta^{lj} \quad (5.4)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^{n+k}}{n+k} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^k \frac{1}{2(n+1)(n+k-l)} \right] \zeta^{(2n+k)} + \dots$$

(5.5)

De la ecuación (5.5) vemos que excepto por la contribución en $T=0$, la primera contribución está hasta el múltiple $(n+1)$. La segunda sumatoria contribuye sólo en el múltiple $(2n+k)$ para $k \geq 2$. Esta relación muestra que removiendo las primeras n contribuciones del cepstrum, se eliminan los primeros n múltiplos en el dominio del tiempo y divide por $(n+1)$ las amplitudes de los múltiplos remanentes. Ver figura 5.4.

No necesitamos conocer las localizaciones exactas del generador de múltiplos en el cepstrum, si estamos dispuestos a tolerar la pérdida de una pequeña cantidad de información de la traza. Por ejemplo, sabemos que en aguas con una profundidad de 60 m., el generador de múltiplos debido a la columna de agua tiene sus dos primeras localizaciones en el cepstrum en períodos menores de .2 seg. (de hecho, están en .08 y .16 seg.). Además si estamos usando un cañón de aire cuyo pico en el espectro está en .18 hz., el período del cañón de aire es .055 seg., por lo tanto tenemos tres contribuciones en el cepstrum en períodos menores que .2 seg., que son debidas a las oscilaciones del pulso de burbuja. Removiendo todas las contribuciones para $T < .2$ seg., se eliminan los dos primeros múltiplos de la reverberación de la columna de agua y se

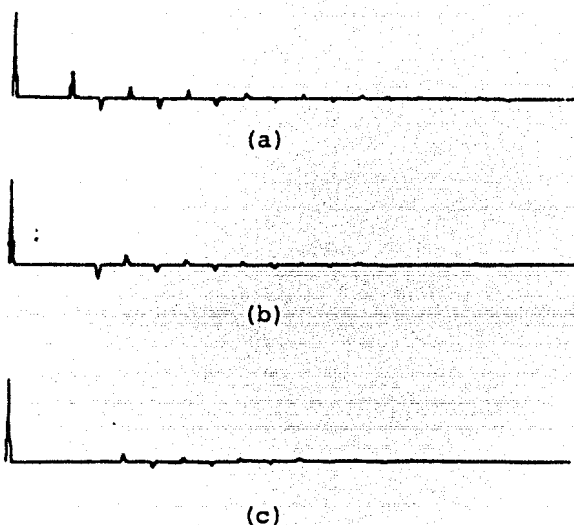


Figura 5.4. Serie de tiempo deconvolucionada obtenida al eliminar (a) la primera contribución, (b) las primeras dos contribuciones, y (c) las tres primeras contribuciones del cepstrum de un generador de múltiples con $T_w=13$ y $R=0.8$.

reducen los demás a un tercio de su amplitud original, además, se eliminan las primeras tres oscilaciones del pulso de burbuja y se reducen a un cuarto de sus amplitudes originales las oscilaciones remanentes.

En seguida vamos a describir el método anterior aplicado a datos sísmicos marinos reales, analizados por Buhl et al (1974).

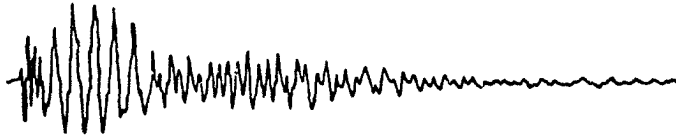
En el capítulo III se demostró que una serie finita en el tiempo tiene un cepstrum que es de extensión infinita, entonces al usar la transformada discreta de Fourier para calcular el cepstrum, surge el problema de que éste presenta el fenómeno de alias. Esto puede ser aliviado agregando ceros a la serie de tiempo ori-

ginal y por un peso exponencial adecuado.

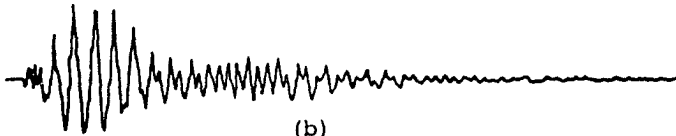
Como ya hemos visto, la deconvolución se realiza haciendo cero todas las contribuciones del cepstrum menores que un período T_c cuidadosamente escogido.

En las figuras 5.5 y 5.6 están mostrados la traza original y los pasos intermedios en el cálculo del cepstrum.

La oscilación debida al pulso de la burbuja de éstos -- datos tiene un período de 0.055 seg. En el cepstrum hay unos picos de cerca de 10 dB en $T=0.052$, 0.104, y 0.156 seg. La señal -

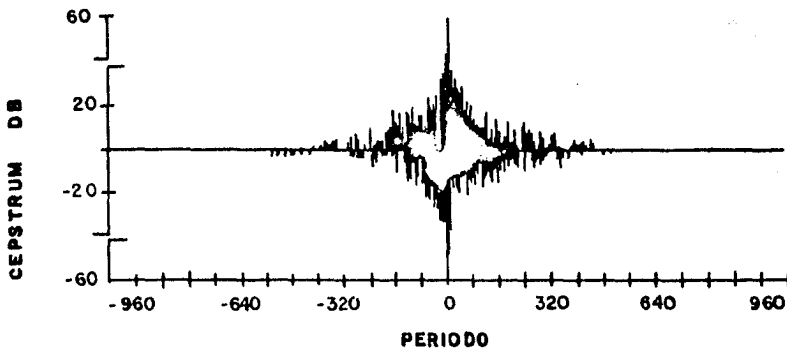


(a)



(b)

$A = 0.9980$



(c)

Fig. 5.5 (a) Traza sísmica. (b) Misma traza después de pesarla con $a=0.998$. (c) Cepstrum de b.

fué muestreada a intervalos de 4 mseg., por lo que los picos corresponden a $n=13$, 26 y 39, consecuentemente se ha escogido el período de corte en $T_c=0.176$ seg ($n=44$), que incluye las tres primeras contribuciones del cepstrum del pulso de la burbuja.

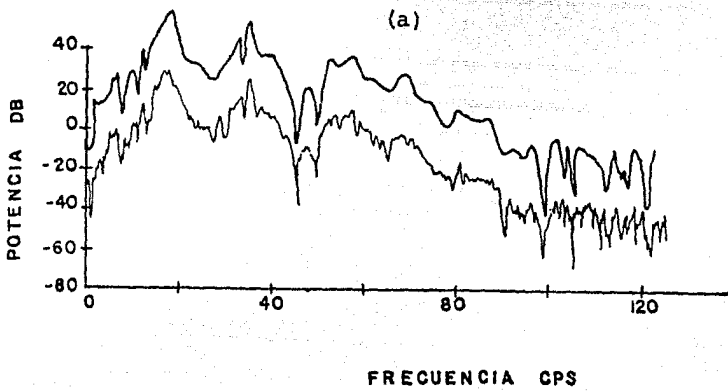
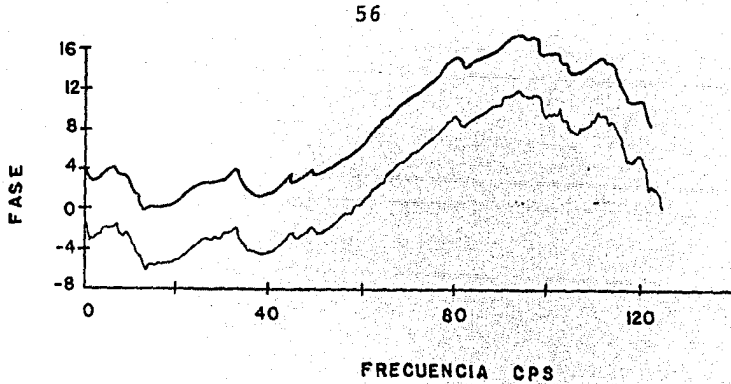
En la figura 5.6 a y b, las líneas b son el espectro de la fuente efectiva de fase mixta recobrada del cepstrum de la figura 5.5c, incluyendo todas las contribuciones del cepstrum complejo para $T < .176$. Es aparente que hemos retenido sólo las componentes de baja frecuencia del espectro original visto en las figuras 5.6a y b, líneas a.

La serie de tiempo de esta función está mostrada en la figura 5.6c, el tiempo total de duración es de 1.1 segundos. La naturaleza periódica del pulso de burbuja es obvia.

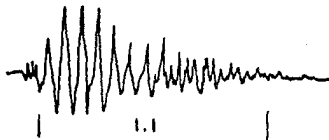
Para hacer la deconvolución en el cepstrum simplemente restamos los términos del cepstrum asociados con la fuente, o sea, hacer cero el cepstrum de la figura 5.5c para $-T_n < T < 0.176$ seg.

El espectro de fase y de potencia obtenidos están mostrados en la figura 5.7 a y b. El espectro de potencia no exhibe picos espectrales debidos al pulso de la burbuja. La serie correspondiente deconvolucionada está mostrada en la figura 5.7c. El carácter oscilatorio de la traza original ha sido suprimido.

En la figura 5.8 se han graficado diez trazas sin procesar (lado izquierdo) y diez trazas procesadas (lado derecho) - en el cepstrum. El procesamiento incluye control de ganancia programada, con un incremento de ganancia de 1 a 10, de 0 a 1 seg.,



(b)



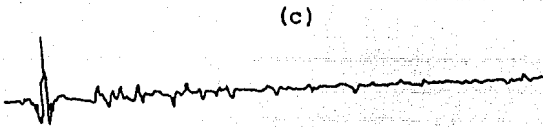
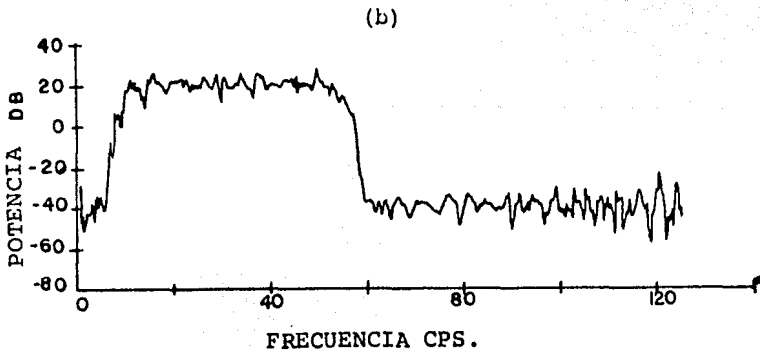
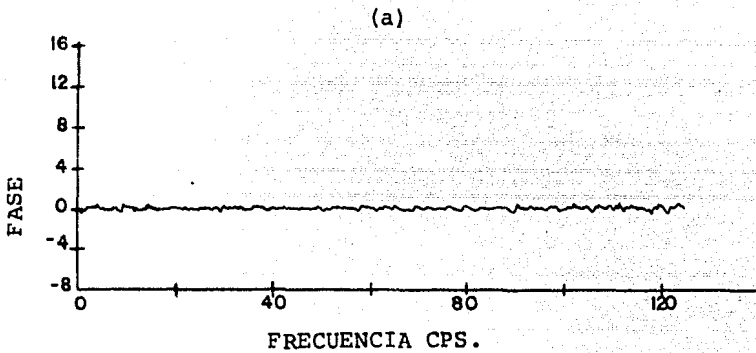
(c)



(d)

Fig. 5.6 (a) y (b) Líneas a, espectros de la traza de entrada, fig. 5.5b. (a) y (b) Líneas b, espectros de la fuente efectiva derivada del cepstrum de la figura 5.5c, haciendo cero los períodos entre 44 y 1024. (c) Fuente efectiva. (d) Componente de fase máxima de la fuente efectiva derivada al hacer cero los períodos positivos (fase mínima) del cepstrum de la figura 5.5c .

Fig. 5.7 (a) Fase de salida. (b) Espectro de potencia de salida. Ambas (a) y (b) son espectros después de la deconvolución de la figura 5.5b con la fuente efectiva de la figura 5.6c usando filtrado en el cepstrum. (c) Traza de salida.



y una ganancia constante de diez después de 1 seg. Se pueden ver varios arribos fuertemente marcados por ejemplo, en 0.25, 0.58, 0.65 y 0.85 . Todos los arribos están bien delineados.

En la figura 5.9 se han graficado las diez trazas originales (lado izquierdo) y diez trazas procesadas usando deconvolución por filtro de Wiener y la suposición de que la fuente es de fase mínima. La función de autocorrelación fué limitada a --44 retrasos, o .176 seg., para que fuera algo comparable a la --estimación de la fuente por medio del cepstrum. Aunque la amplitud de los arribos es mayor en las trazas procesadas de la figura 5.9, ellos están claramente dispersos.

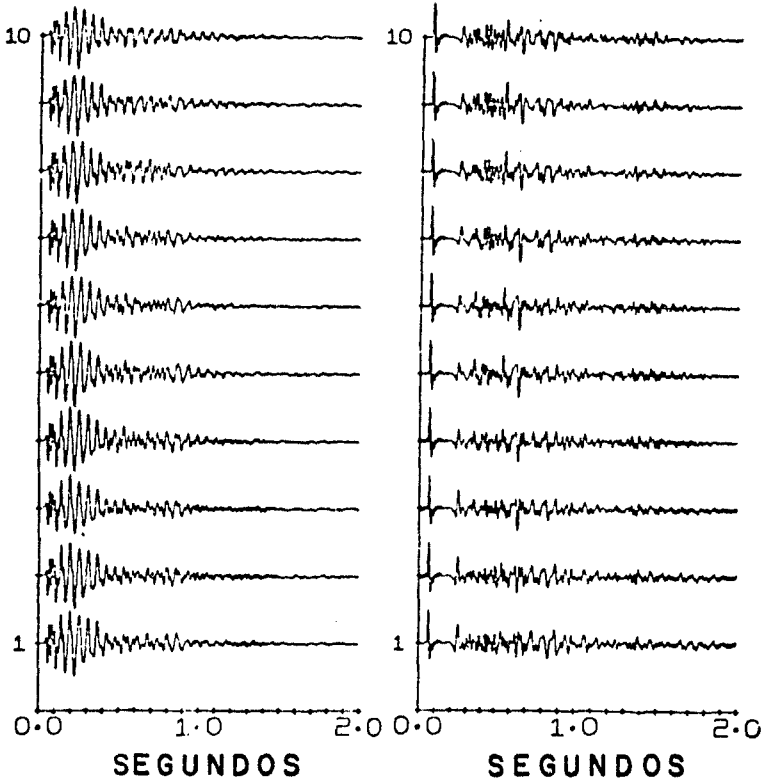


Figura 5.8. Deconvolución en el cepstrum. Comparación de diez trazas consecutivas de entrada (izq.) y trazas de salida (der.). El procesado incluye deconvolución en el cepstrum, filtrado pasa banda y control de ganancia programada.

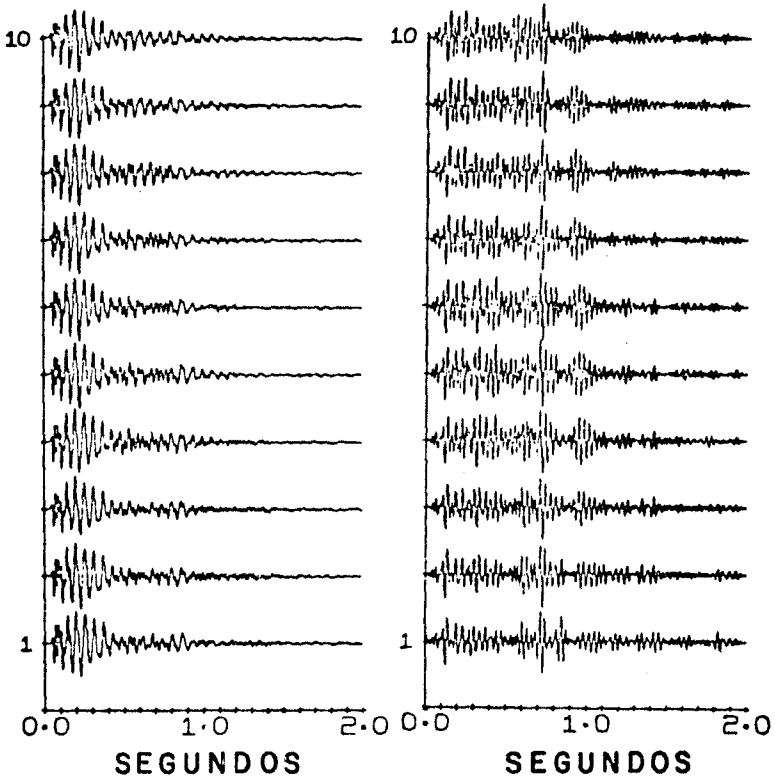


Fig. 5.9 Deconvolución en el dominio del tiempo usando 44 retrasos de la función de autocorrelación y suposición de fase mínima.

VI.- EXTRACCION DE LA ONDÍCULA SISMICA

El cepstrum de una traza sísmica está formado por la superposición aditiva de dos componentes: el cepstrum de la ondícula sísmica y el cepstrum de la serie de coeficientes de reflexión. Ulrych (1971) ha demostrado que el cepstrum de la ondícula está - concentrado en un intervalo alrededor del origen, con una longitud similar a la longitud de la ondícula en el dominio del tiempo. _ Esta propiedad nos sugiere la posibilidad de recuperar la ondícula sísmica por medio de un simple filtrado lineal pasa bajos en el cepstrum. Sin embargo, lo anterior no es tan sencillo realmente ya que la condición para aplicar éste método es que el cepstrum de la serie de coeficientes de reflexión no tenga ninguna contribución en el intervalo ocupado por el cepstrum de la ondícula. Esto será verdad si la serie de coeficientes de reflexión es de - fase mínima y el intervalo de tiempo entre las dos primeras reflexioónes debe ser mayor que la duración de la ondícula. Si lo anterior

no se cumple, puede pasar que al utilizar una ventana para efectuar el filtrado lineal queden contribuciones del cepstrum de la serie de coeficientes de reflexión dentro de la ventana, o bien que al tratar de evitar que ésto suceda y hacer más angosta la ventana, quede truncado el cepstrum de la ondícula. En ambos casos, la ondícula que se recuperaría en el dominio del tiempo sería una estimación pobre de la ondícula real.

Como una alternativa de recuperación de la ondícula sísmica se proponen a continuación algunos métodos que utilizan técnicas de redundancia.

1.- Apilamiento Horizontal del Cepstrum.

Una técnica para recuperar el cepstrum de la ondícula consiste en promediar con la misma componente de ondícula, pero con diferentes contribuciones de series de coeficientes de reflexión.

Un conjunto de trazas obtenidas a diferentes separaciones de fuente-receptor, puede ser representado como

$$x(t,l) = s(t) * r(t,l) \quad (6.1.1)$$

donde $s(t)$ es la ondícula sísmica fuente,

$r(t,l)$ es la serie de coeficientes de reflexión, y

l es la distancia fuente receptor.

Podemos decir que si la función de reflectividad es dependiente de la separación fuente-receptor, también su respectivo cepstrum lo es.

Esto se expresa como

$$\hat{x}(T, l) = \hat{s}(T) + \hat{f}(T, l) \quad (6.1.2)$$

y el resultado de promediar N cepstra es

$$\hat{x}_m(T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{x}(T, l_i) = \hat{s}(T) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{f}(T, l_i) \quad (6.1.3)$$

La función de reflectividad depende de la separación fuente-receptor en dos maneras: primero, los intervalos de tiempo entre las reflexiones son cambiados de manera determinista por efecto de "moveout" (en forma de curvas hiperbólicas), y segundo, los coeficientes de reflexión varían con respecto al ángulo de incidencia. Por lo tanto, las contribuciones de los coeficientes de reflexión de los cepstra de cada traza, estarán en cada serie a diferentes períodos.

Al promediar N cepstra es de esperarse una reducción de la amplitud relativa en un factor N, donde N es el número de series de coeficientes de reflexión. Por otro lado, como para cada traza, la ondícula aparece con las mismas componentes en el cepstrum, al apilar las trazas se enfatizarán dichas componentes.

Al antitransformar homomórficamente la ecuación (6.1.3) obtendremos en el tiempo una ondícula estimada, mas contribuciones de las series de coeficientes de reflexión atenuadas.

2.- Apilamiento Vertical de Cepstra de Tiempo Corto.

El método de apilamiento horizontal de cepstra propuesto para recuperar la ondícula sísmica requiere que la forma de dicana ondícula se mantenga aproximadamente constante a lo largo de un tendido . Lo anterior es cierto en general cuando se trata de exploración sísmica marina, y es posible promediar las trazas de varios puntos de tiro. En trabajo terrestre sin embargo, la forma de la ondícula depende de los parámetros elásticos del medio superficial y puede variar en cada punto de tiro.

Un método alternativo de apilamiento vertical que promedia cepstra de tiempo corto dentro de una misma traza es el propuesto por M. Souza (1976), y se presenta a continuación. En éste método, varias ventanas de tiempo de una traza sísmica son -- promediadas cepstralmente para recuperar la ondícula sísmica. La suposición hecha para éste proceso es que la función de reflectividad permanece aleatoria dentro de la traza.

Se le da el nombre de cepstrum de tiempo corto (Schafer, 1969) al cepstrum calculado para una determinada ventana de tiempo. La transformada discreta de Fourier de tiempo corto está definida como

$$X(w,k) = \sum_{t=0}^{L-1} x(t+k) w(t) e^{-iwt} \quad (6.2.1)$$

donde $w(t)$ es una función ventana de longitud L , y k es el pará-

metro que recorre la ventana a lo largo de la traza $x(t)$.

Si la ondícula $s(t)$ permanece constante a lo largo de la ventana mientras que la serie de coeficientes de reflexión es pesada por la función ventana, tenemos que

$$x(t+k)w(t) = s(t) * r_w(t,k) + e(t,k) \quad (6.2.2)$$

donde

$$r_w(t,k) = r(t+k) \cdot w(t)$$

$e(t,k)$ es el error asociado con la superposición y truncamiento de las reflexiones. La función $w(t)$, así como su longitud deben ser escogidas de tal manera que el error sea minimizado. Si este error llega a ser despreciable, la ecuación (6.2.1) puede escribirse como

$$X(w,k) = \sum_{t=0}^{L-1} [s(t) * r_w(t,k)] e^{-iwt} \quad (6.2.3)$$

o bien

$$X(w,k) = S(w) \cdot R_w(w,k) \quad (6.2.4)$$

obteniendo el cepstrum

$$\hat{x}(T,k) = \hat{s}(T) + \hat{r}_w(T,k) \quad (6.2.5)$$

La contribución de reflectividad para cada cepstrum de tiempo corto depende de la posición de la ventana a lo largo de la traza, de tal forma que un número mayor de cepstra de tiempo corto pueden ser promediados para resaltar la contribución de la ondícula.

El resultado de promediar N ventanas de una misma tra
za es:

$$\hat{x}_m(T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{x}(T, k_i) = \hat{s}(T) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{r}(T, k_i) \quad (6.2.6)$$

utilizando las propiedades de la antitransformada de Fourier, la
ecuación (6.2.6) puede escribirse como:

$$\hat{X}(T) = \mathcal{F}^{-1} \hat{S}(w) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{F}^{-1} [\hat{R}(w, k_i)] \quad (6.2.7)$$

$$\hat{X}(w) = \hat{S}(w) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{R}(w, k_i) \quad (6.2.8)$$

Reemplazando $\hat{X}(w)$ con $\log X(w)$, y arreglando

$$\log X_m(w) = \log S(w) + \log \left[\prod_{i=1}^N |R(w, k_i)| \right]^{1/N} + \frac{j}{N} \sum_{i=1}^N \theta_R(w, k_i) \quad (6.2.9)$$

Esta última ecuación nos muestra que el promediar los cepstra es
equivalente a tomar la media geométrica del espectro de amplitud
de las series de coeficientes de reflexión de las diferentes ven
tananas, y la media aritmética de sus espectros de fase.

Exponenciando la ecuación (6.2.9)

$$X_m(w) = S(w) \cdot R_m(w) \quad (6.2.10)$$

donde el espectro de amplitud de $R_m(w)$ es

$$|R_m(w)| = \left[\prod_{i=1}^N |R(w, k_i)| \right]^{1/N} \quad (6.2.11)$$

y el espectro de fase está dado por

$$\Theta_{R_m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R(w, k_i) \quad (6.2.12)$$

El promediar geoméricamente el espectro de amplitud produce un $R_m(w)$ constante cuyo valor es más pequeño que un valor medio M alrededor del cual oscilarán los espectros de amplitud de los diferentes segmentos de tiempo corto. Por lo tanto, el promediar los cepstra de un gran número de segmentos nos dará por resultado una función de tiempo la cual tiene un espectro de amplitud constante y un espectro de fase igual a cero. La representación en el tiempo de esta función esta dada por

$$r_m(t) = K \delta(t) \quad (6.2.13)$$

transformando (6.2.10) al dominio del tiempo y reemplazando (6.2.13)

$$x_m(t) = s(t) * r_m(t)$$

$$x_m(t) = s(t) * K \delta(t)$$

$$x_m(t) = Ks(t) \quad (6.2.14)$$

La ecuación (6.2.14) nos demuestra que al efectuar el promedio de cepstra y regresar luego al dominio del tiempo, obtenemos una versión escalada de la ondícula sísmica real.

Souza (1976) probó los conceptos aquí expuestos con-

trazas sísmicas sintéticas, y encontró que al promediar los ceps tra, la mayoría de las contribuciones correspondientes a la serie de coeficientes de reflexión se cancelan.

Los parámetros que afectan directamente la estimación de la ondícula por éste método de promedio y de cepstra son los siguientes :

a) Longitud de la ventana: Según Foster et al (1968), la venta na tiene que ser al menos siete veces más grande que la longitud de la ondícula. Para datos reales, su duración deberá escogerse basándose en la duración esperada de la ondícula sísmica.

b) Corrimiento de la ventana: Para datos sintéticos, un corri miento de dos tercios la longitud de la ondícula puede ser utili zado y obtener buenos resultados. Sin embargo, para datos reales con un grado menor de aleatoriedad, corrimientos mayores tendrían que usarse para disminuir la superposición de las ondículas en las ventanas. Si se utilizan pequeños corrimientos, éstos traerán - como consecuencia errores severos en la estimación de la ondícula.

c) Número de ventanas a utilizar: Este parámetro está limitado por la cantidad de datos (número y longitud de las trazas grabadas), y por la selección de los parámetros mencionados anteriormente. Para datos reales, sería de esperarse el uso de varios cientos de ventanas para lograr una buena estimación de la ondícula.

d) Tipo de función ventana: Las orillas suavizadas de la ven tana deben de ser al menos tan largas como la longitud esperada de la ondícula, con el fin de minimizar errores debidos al trun-

camiento y a la superposición de las reflexiones. Se ha encontrado que ventanas rectangulares con orillas suavizadas (Hanning) - proveen buenos resultados.

El cepstrum de tiempo corto de cada ventana es calculado con un algoritmo en el cual se utiliza la transformada rápida de Fourier. La componente de fase lineal es removida antes del calculo del cepstrum. Como esta componente depende de la ondícula la misma y de la reflectividad de cada ventana, nos encontramos con la dificultad de que no es posible conocer la cantidad exacta de fase lineal que debe restituirse a la ondícula recuperada.

3. Método de Tribolet.

Hasta ahora hemos estudiado algunos métodos que asumen que la ondícula sísmica es invariante en el tiempo. Sin embargo, en general ésta suposición no se cumple. El cambio en las características de la ondícula es un fenómeno que varía lentamente en el tiempo, motivado por éste hecho, Tribolet (1979) ha desarrollado un análisis basado en la segmentación de la traza sísmica en secciones cortas de tiempo (análisis de tiempo corto), en donde en cada segmento la ondícula sísmica aparece en formas muy similares. Así, toda la traza sísmica se modela como una secuencia de modelos invariantes, cada uno siendo válido en un determinado intervalo de tiempo corto, esto es

$$x(t,k) = s(t,k) * r(t,k) \quad (6.3.1)$$

donde k se refiere al intervalo de tiempo corto. Más generalmente, podemos segmentar la traza sísmica usando una variedad de -- ventanas w de tiempo corto:

$$\begin{aligned} x_i(t,k) &= x(t,k) w_i(t,k) \\ &= s_i(t,k) * r_i(t,k) \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

donde

$$r_i(t,k) = r(t,k) w_i(t,k) \quad (6.3.3)$$

el subíndice i es usado para referirse a una ventana particular. Lo anterior está ilustrado en la figura 6.1 .

El uso de funciones ventana que pueden ser de fase mínima, máxima o intermedia nos llevan a secuencias $s_i(t,k)$ que -- capturan a la ondícula sísmica $s(t,k)$ en su región cepstral de -- período bajo

$$\hat{s}^L(t,k) \simeq \hat{s}_i^L(t,k) \quad (6.3.4)$$

Dado el hecho de que la ondícula sísmica está esencialmente contenida en la región cepstral de período bajo, hay que -- utilizar un criterio que nos dé el período de corte T_c para separar la información debida a la ondícula de las componentes debidas a la serie de coeficientes de reflexión.

El análisis homomórfico de período alto y período bajo resulta

$$x_i^L(t,k) = s_i^L(t,k) * r_i^L(t,k) \quad (6.3.5)$$

$$x_i^H(t,k) = s_i^H(t,k) * r_i^H(t,k) \quad (6.3.6)$$

esto implica que

$$\hat{x}_i^L(T,k) = \hat{s}_i^L(T,k) + \hat{r}_i^L(T,k) \quad (6.3.7)$$

y de la ecuación (6.3.4)

$$\hat{x}_i^L(T,k) = \hat{s}^L(T,k) + \hat{r}_i^L(T,k) \quad (6.3.8)$$

El período de corte es determinado por el primer pico

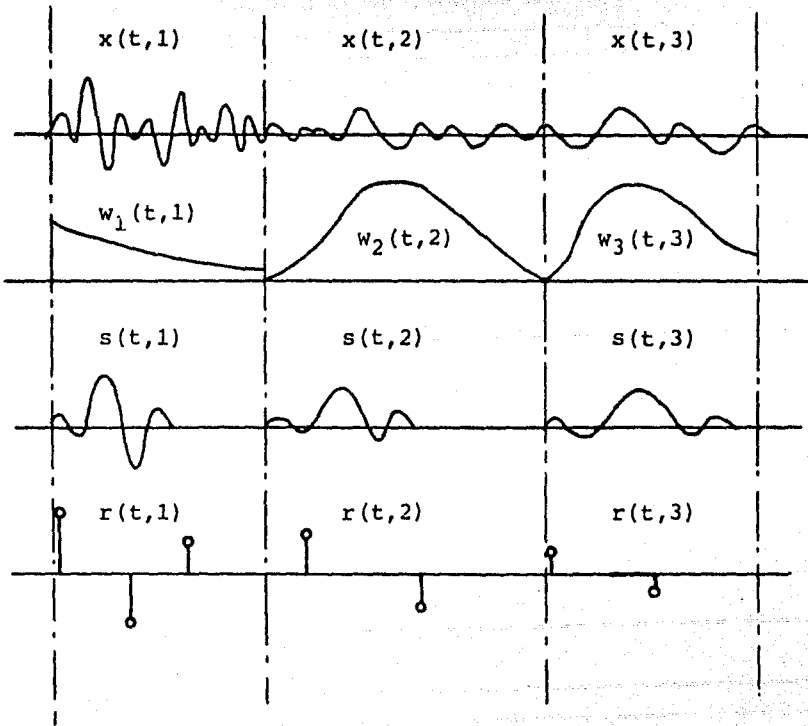


Fig. 6.1 Análisis de tiempo corto.

de la función de autocorrelación de la correspondiente serie reflectora $r_i(t, k)$.

Después de haber sido filtrado homomórficamente en -- tiempo bajo cada uno de los segmentos $x_i(t, k)$, las salidas resultantes en tiempo real $x_i^L(t, k)$ son sujetas a diferentes desplazamientos m_i , $i=1, \dots, M$ para sincronizarlas.

Definamos el promedio en el tiempo de las componentes de período bajo después de haber sido sincronizadas apropiadamente, como

$$\langle r^L(t, k) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M r_i^L(t+m_i, k) = \delta(t) + \eta^L(t) \quad (6.3.9)$$

de acuerdo al teorema del límite central (Churchill, 1966), -- es de esperarse que la componente de ruido del apilamiento en el tiempo converja a cero, si la serie reflectora es aleatoria.

Ahora, definiendo el apilamiento en el tiempo de las componentes de período bajo del segmento de la traza como

$$\langle x^L(t, k) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i^L(t+m_i, k) \quad (6.3.10)$$

utilizando la ecuación (6.3.8), podemos escribir

$$\langle x^L(t, k) \rangle = s^L(t, k) * \langle r^L(t, k) \rangle \quad (6.3.11)$$

de acuerdo al comportamiento del segundo término de la ecuación (6.3.11) mostrado en la ecuación (6.3.9), concluimos que

$$\langle x^L(t,k) \rangle \simeq s^L(t,k) \quad (6.3.12)$$

además, dadas las características de que la ondícula sísmica se encuentra esencialmente contenida en períodos bajos (ecuación -- 6.3.4), podemos asociarla con el promedio en el tiempo de las componentes de período bajo de la traza, o sea

$$s(t,k) \simeq \langle x^L(t,k) \rangle \quad (6.3.13)$$

Vamos a ilustrar éste procedimiento por medio del siguiente ejemplo, realizado por Tribolet (1979).

Se obtiene un sismograma resultado de la excitación de la estructura de la Tierra mostrada en la tabla 6.1, con la ondícula sísmica de un cañón de aire representada en la figura 6.5a . Las ventanas utilizadas, así como las correspondientes series de coeficientes de reflexión están mostradas en la figura 6.2 . La función de autocorrelación de cada serie reflectora está ilustrada en la figura 6.3 . El período de corte T_c para obtener el -- cepstrum de período bajo está indicado por medio de una flecha.

En seguida tenemos las componentes en el tiempo correspondientes al período bajo de cada segmento $x_1^L(t,k)$, ilustradas en la figura 6.4 .

Por último, se realiza el promedio en el tiempo de las componentes de período bajo $\langle x^L(t,k) \rangle$ para obtener la ondícula estimada, que se observa junto con la ondícula original en la figura 6.5b .

capa número	tiempo de tránsito (mseg)	coeficiente de reflexión
1	111	0.30
2	302	0.10
3	100	-0.03
4	503	0.05
5	154	0.03
6	219	0.08
7	138	-0.04
8	286	0.12
9	167	0.08
10	431	0.06
11		0.15

Tabla 6.1

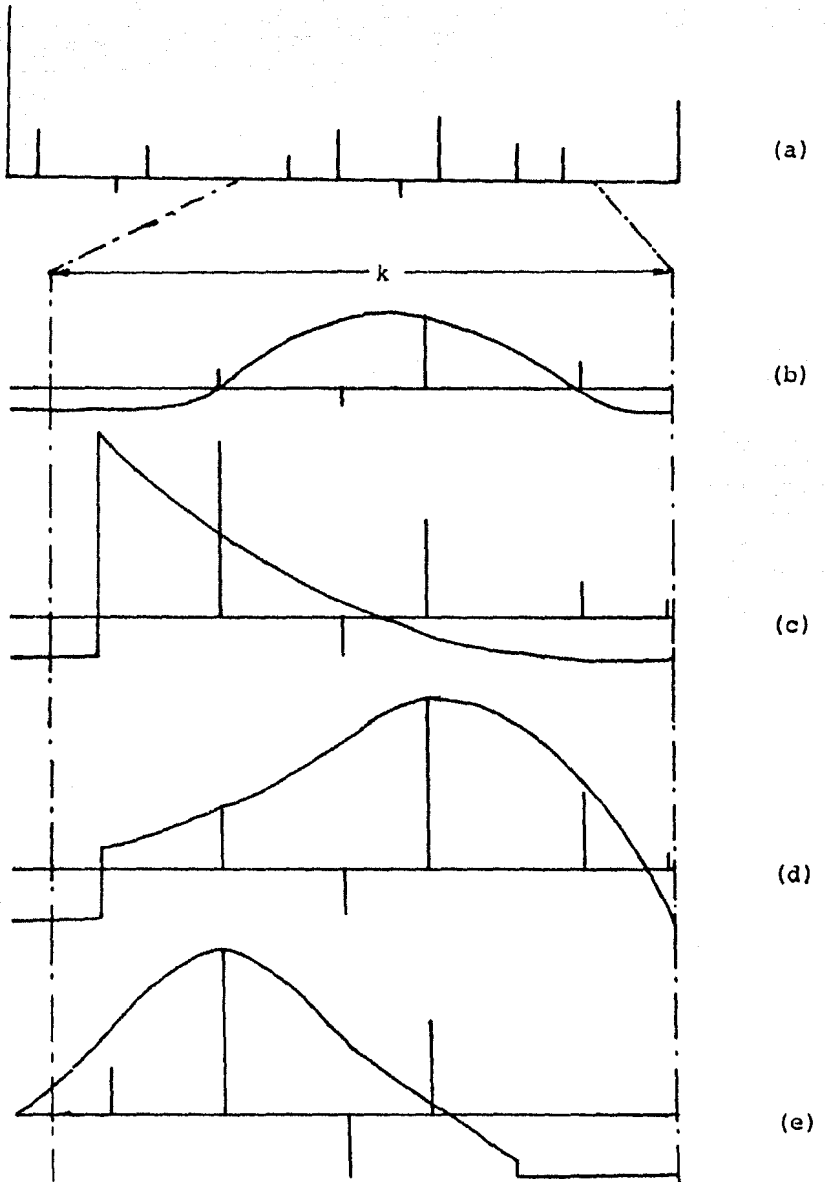


Fig. 6.2 (a) Serie de coeficientes de reflexión. (b)-(e) ventanas y serie reflectora correspondiente. (b) Hamming. (c) Exponencial (d) Rayleigh. (e) Gaussiana.

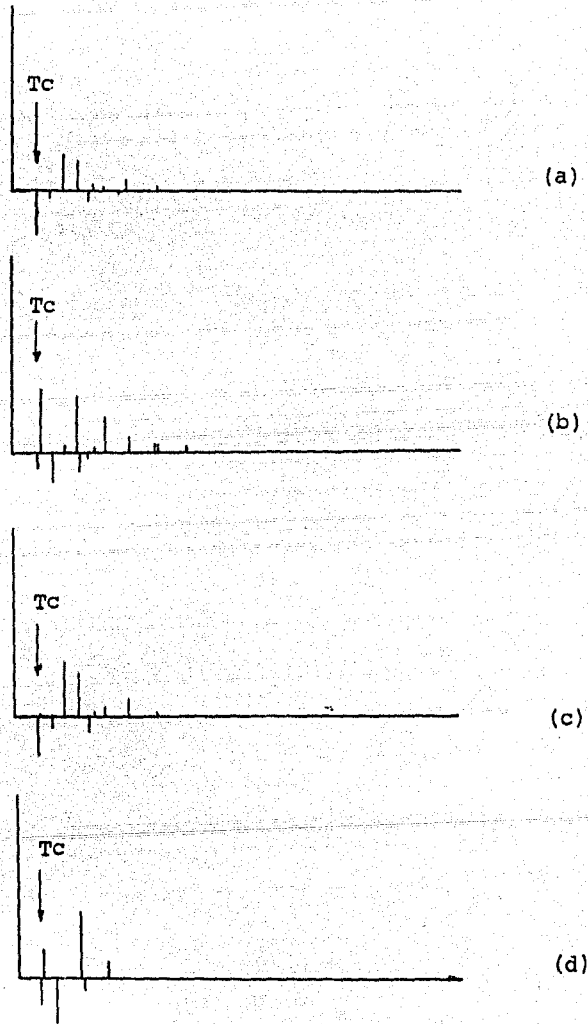


Fig. 6.3 Funciones de autocorrelación para cada segmento reflector afectado por una ventana de (a) Hamming. (b) Exponencial. (c) Rayleigh. (d) Gaussiana.

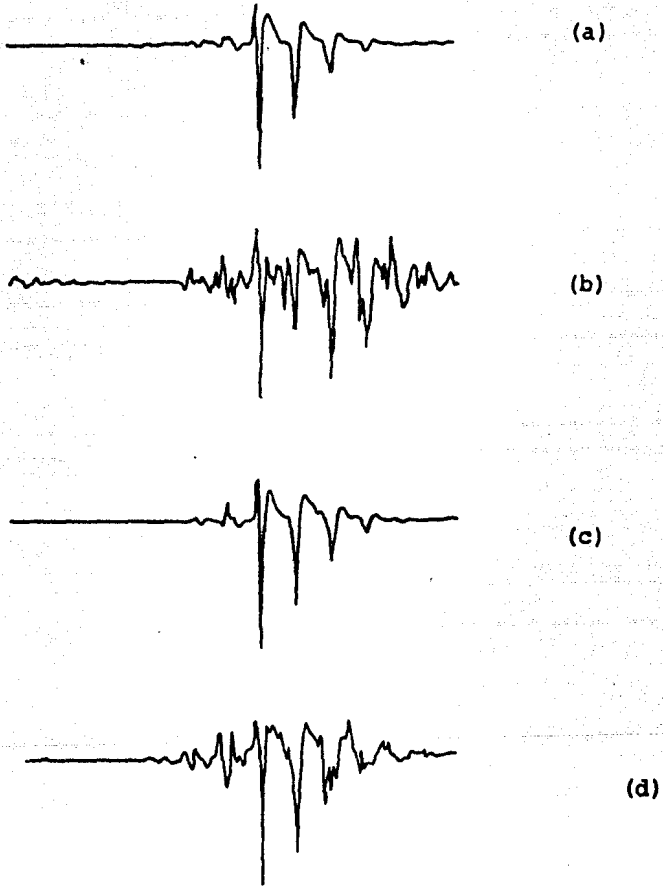


Fig. 6.4 Componentes de período bajo de las secciones $x_i^L(t,k)$ correspondientes a (a) Hamming. (b) Exponencial. (c) Rayleigh. (d) Gaussiana.

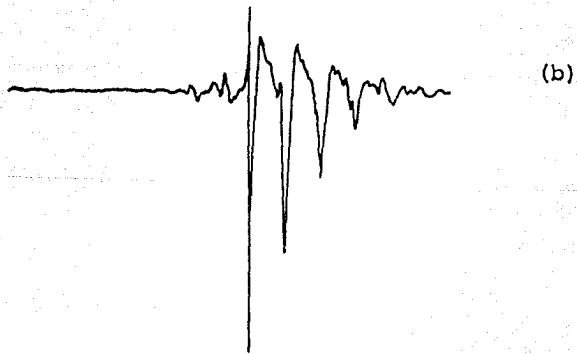
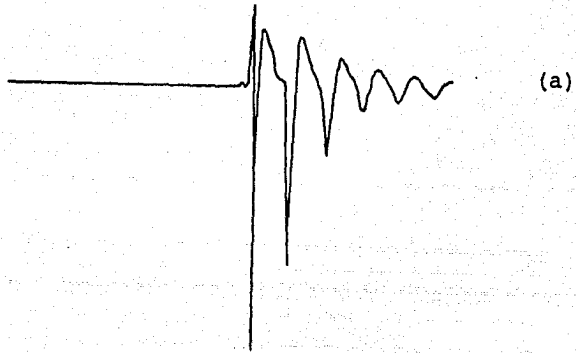


Fig. 6.5 (a) Ondícula original. (b) Ondícula estimada por apilamiento en el tiempo de las componentes de período bajo.

Una de las mayores dificultades que encontramos en el análisis de señales para sismología de exploración, es la falta de resolución de los eventos sísmicos.

En este capítulo hemos presentado algunos métodos que pretenden recuperar la ondícula sísmica por medio de técnicas homomórficas. Esto presenta la ventaja de que podemos obtener una ondícula con sus características completas en frecuencias, y por lo tanto, es posible usarla en el diseño de un filtro de Wiener exacto, ya que podremos conocer el óptimo retraso que nos dá por resultado reflexiones que han sido comprimidas a la forma de impulsos. En consecuencia, se esperará una mejor resolución de -- nuestro sismograma.

VII.- DISCUSION Y CONCLUSIONES

Hemos visto que el procesado homomórfico nos ofrece la posibilidad de recuperar la serie de coeficientes de reflexión o la ondícula sísmica de una manera relativamente sencilla, como lo es por medio de un filtrado lineal en el cepstrum. De acuerdo con lo anterior, si decidimos obtener la serie de coeficientes de reflexión, tendremos que separar las componentes de período alto del cepstrum de la traza sísmica, utilizando para ello un filtro pasa altos. Si por el contrario, nuestro objetivo consiste en recobrar la ondícula sísmica, tal lo podemos lograr por medio de un filtro lineal pasa bajos en el cepstrum.

El éxito de la deconvolución homomórfica por medio de filtros lineales en el cepstrum, dependerá del grado de separación de las componentes de la ondícula y de la serie de coeficientes de reflexión en el cepstrum, así como del período de corte es

cogido para cada filtro. Esto significa que al tratar de recuperar la ondícula o la serie reflectora, podríamos tener resultados dañados por pérdida de información o bien contaminados con contribuciones no deseadas, como consecuencia de un traslape de las componentes. Superada de alguna forma ésta desventaja, el procedimiento de recuperación de la serie de coeficientes de reflexión ofrece la posibilidad de eliminar eventos interferentes, como reverberaciones y múltiples.

Para eliminar o disminuir los problemas causados por el traslape de las componentes en el cepstrum, se han presentado métodos alternativos para obtener la ondícula sísmica, que consisten en utilizar promedios de cepstra. La base de estos métodos consiste en considerar a la serie de coeficientes de reflexión como aleatoria, y de ello depende el éxito que se tenga al estimar la ondícula.

Souza (1976), propone dos métodos de apilamiento, el horizontal y el vertical, en los cuales se considera a la ondícula como invariante a lo largo de la traza sísmica. El método de apilamiento horizontal nos dará una mejor estimación de la ondícula mientras mayor sea el número de trazas que se promedien cepstralmente. El método de apilamiento vertical en lugar de usar varias trazas, realiza la estimación de la ondícula promediando cepstra los segmentos cortos de una misma traza. La desventaja del apilamiento vertical es que requiere de cientos de ventanas en una misma traza para lograr una buena aproximación de la ondícula, sin

embargo es útil cuando no se cuenta con un número de canales suficiente para lograr buenos resultados por medio del apilamiento horizontal.

A diferencia de los anteriores métodos de apilamiento, el propuesto por Tribolet (1979), considera a la ondícula sísmica como no estacionaria en el tiempo, y hace un análisis de tiempo corto en el cual utiliza un menor número de ventanas que en el método de apilamiento vertical de Souza, y obtiene una estimación de la ondícula para cada segmento de la traza. Este método proporciona buenos resultados, sin embargo presenta la desventaja de que es necesario conocer la serie de coeficientes de reflexión para poder efectuar la autocorrelación. Este método puede ser interactivo con un operador, el cual estará monitoreando los resultados para decidir en que momento dichos resultados son satisfactorios.

Un sismograma puede contener mucha información acerca de las condiciones del subsuelo, pero antes de poder ser interpretado, los eventos que aparecen en el registro deben estar claramente identificados.

Cuando por medio de alguno de los métodos que hemos tratado en éste trabajo obtenemos una buena estimación de la ondícula sísmica, es decir con información completa de amplitud y fase en frecuencias, es posible utilizar tal ondícula en el diseño de un filtro de Wiener exacto, esto es, sin especulación de fase mínima, que utilizaremos para convertir la ondícula en una delta. Si se aplica este filtro inverso a la traza, se obtendrá un

buen resultado ya que no habrá dispersión de elementos de fase - máxima.

Si nuestro objetivo está enfocado al estudio de sismos naturales, el obtener la ondícula por medio de análisis homomórfico nos puede dar una idea de las características de la fuente productora del fenómeno.

Las técnicas convencionales de filtrado en abanico permiten el paso de solo aquellos eventos cuyas velocidades aparentes caen dentro de una región determinada, en forma de abanico, en el plano (f,k) o de frecuencias y número de onda (Treitel et al, 1967).

Si en exploración tenemos un registro sísmico multicanal de punto de reflejo común, observamos que los eventos se presentan siguiendo determinados alineamientos. Al obtener los cepstra de las trazas de dicho registro es de esperarse, por propiedades del cepstrum, que las contribuciones presenten también alineamientos específicos. Esto nos sugiere la posibilidad de aplicar un filtrado en abanico en el cepstrum, que deje pasar únicamente las componentes situadas en una región determinada, cercana al origen, para obtener como salida un cepstrum que contenga solamente las contribuciones debidas a la ondícula, y de esta forma, -- poder recuperarla.

Podemos ilustrar lo anterior con el sismograma sintético multicanal mostrado en la figura (7.1), que ha sido obtenido utilizando un impulso como fuente y considerando dos reflectores. En la figura (7.2), podemos ver los cepstra correspondientes al registro sísmico y comprobar los alineamientos mencionados.

Podemos determinar la región de paso del filtro en abanico mediante la velocidad límite de un canal por muestra temporal que corresponde en el ejemplo a $300\text{m}/4\text{ mseg}$. Las velocidades aparentes mayores serían dejadas pasar por el filtro y los eventos con menores velocidades aparentes serían discriminados. La región de paso del filtro debe permitir una pequeña desviación para evitar que algunas contribuciones de la ondícula queden cortadas. Las contribuciones que caigan dentro de la región de paso del filtro pueden entonces ser apiladas para obtener una sola salida. A ésta salida se le antitransforma homomórficamente para obtener una aproximación de la ondícula sísmica en tiempo real.

Como conclusiones podemos expresar que el procesado homomórfico de señales, una técnica no lineal basada en operaciones de filtrado en el cepstrum, ha sido aplicado a una variedad de problemas no sólo en sismología de exploración, sino también en acústica y en procesamiento de imágenes ópticas. En sismología existe un número de técnicas que pueden ser aplicadas a la deconvolución de una señal. Algunas de estas técnicas se basan en el uso de filtros lineales en el cepstrum. Dichos métodos han sido propuestos por varios autores, y se ha encontrado que dan buenos resultados cuando tratamos modelos de reflectividad simples.

El aislar el cepstrum de la ondícula utilizando el recurso de efectuar promedios de cepstra, nos lleva a una mejor estimación de la ondícula sísmica y por lo tanto, nos permite el diseño de filtros inversos más efectivos.

En este trabajo se ha presentado únicamente el sistema homomórfico que transforma el proceso de convolución en una suma de componentes, sin embargo, es claro que dependiendo del sistema característico escogido, pueden existir diferentes sistemas de -deconvolución en los que el homomorfismo se mantiene, y que constituyen un área potencial de aplicación práctica.

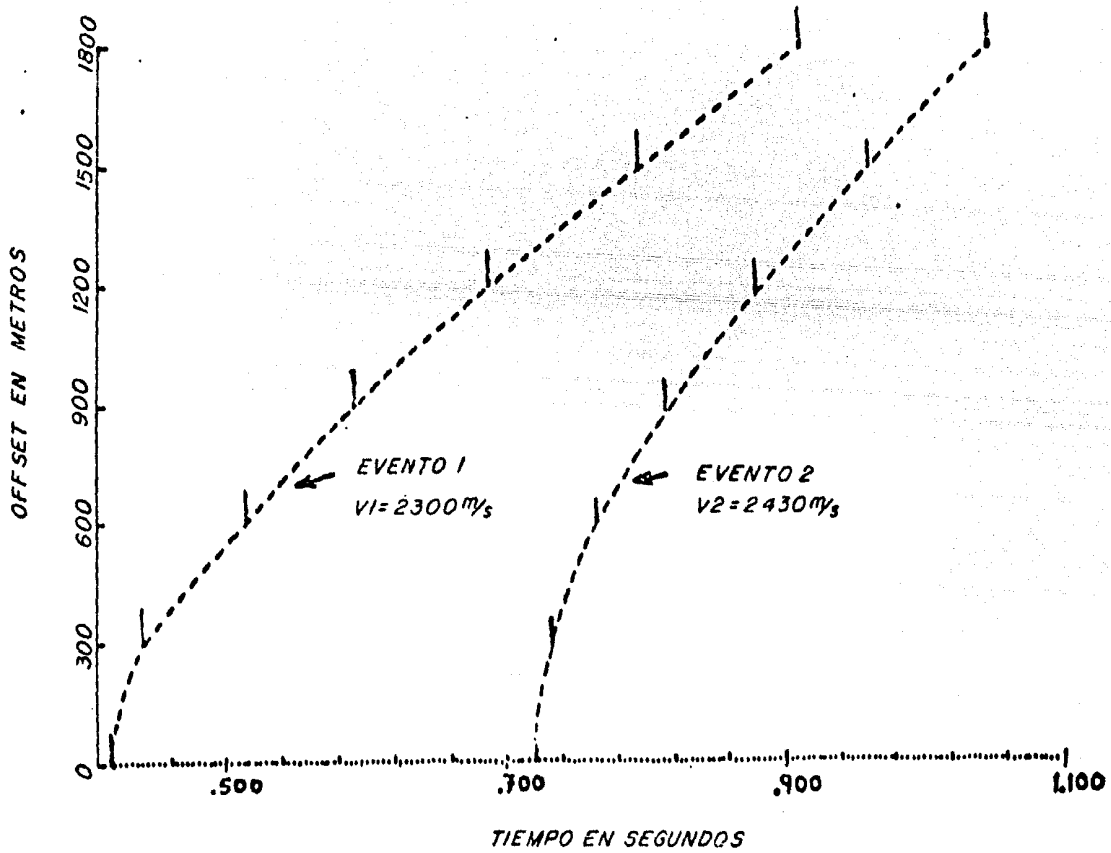


Fig. 7.1 Sismograma sintético multicanal

GANANCIA DETERMINISTICA $\approx \tau \times e^{a\tau}$

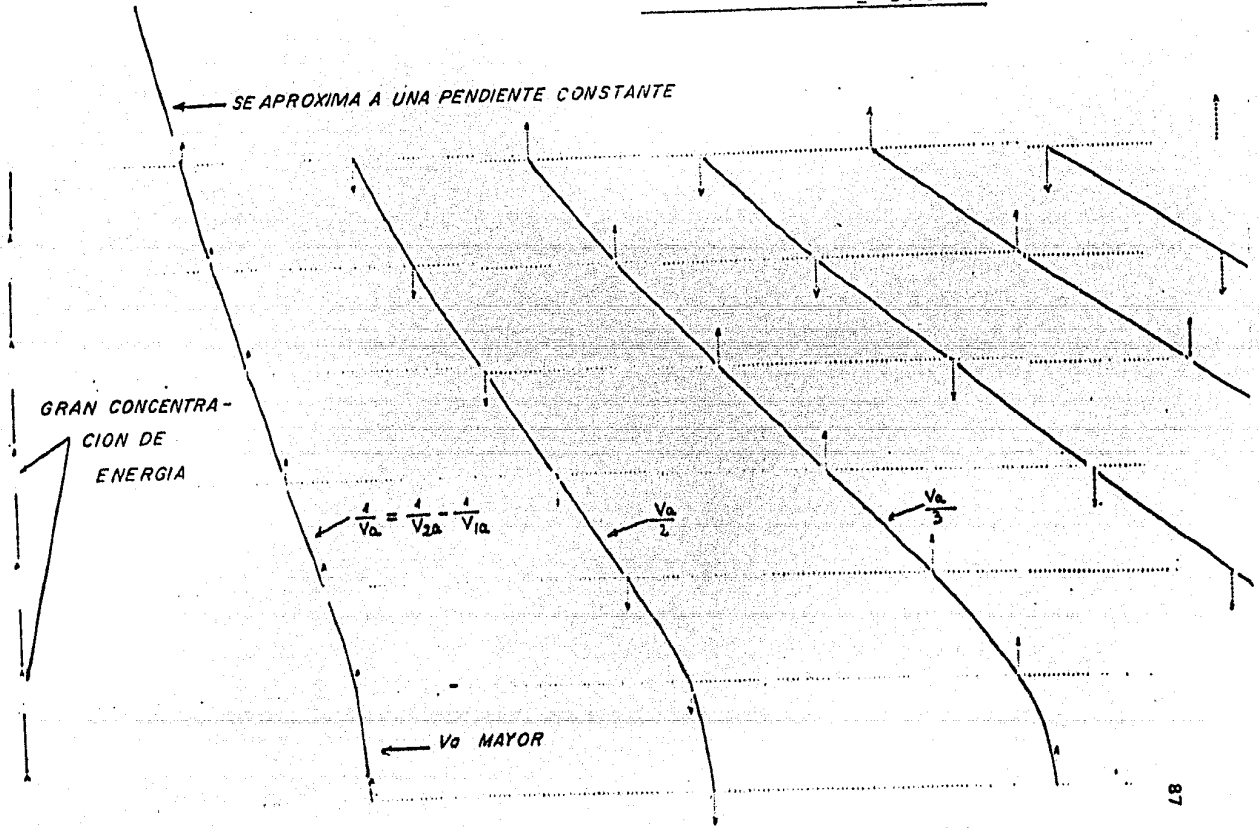


Fig 7.2 Ceptrum del registro sísmico de la fig. 7.1

BIBLIOGRAFIA

- Buhl, P., Stoffa, P. L., y Bryan, G. M., 1974, The application of homomorphic deconvolution to shallow-water marine seismology - Part II: Real Data: Geophysics, v. 39, p. 417-426.
- Buttkus, B., 1975, Homomorphic filtering - Theory and Practice: Geophysical Prospecting, v. 23, p. 712-748.
- Comínguez, A., y Hilterman, F. J., 1981, Multi-channel wavelet - extraction: Seismic Acoustics Laboratory, Fourth Year Annual Progress Review, v. 8, p. 255-274.
- Jae, L., 1979, Spectral root homomorphic deconvolution system: IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, v. ASSP-27, p. 223-233.
- Oppenheim, A. V., y Schaffer, R. W., 1975, Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Robinson, E. A., y Treitel, S., 1967, Principles of digital Wiener filtering: Geophysical Prospecting, v. 15, p. 311-333.
- Schaffer, R. W., 1969, Echo removal by discrete generalized linear filtering: Technical Report 466, MIT, Res. Lab. of Electr.

- Souza, M. M., 1976, Wavelet extraction parameters of homomorphic deconvolution: M. S. Thesis, Univ. of Houston.
- Stoffa, P. O., Buhl, P., y Bryan, G. M., 1974, The application of homomorphic deconvolution to shallow-water marine seismology - Part I: Models: Geophysics, v. 39, p. 401-416.
- Treitel, S., Shanks, J. L., y Frasier, C. W., 1967, Some aspects of fan filtering: Geophysics, v. 32, p. 789-800.
- Tribolet, J. M., 1979, Seismic Applications of Homomorphic Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- _____ 1977, A new phase unwrapping algorithm: IEEE Transactions on Acoustics Speech, and Signal Processing, v. ASSP-25, p. 170-177.
- Ulrych, T. J., 1971, Application of homomorphic deconvolution to seismology: Geophysics, v. 36, p. 650-660.

APENDICE

Transformada z

La representación de la transformada z de una secuencia está definida por el par de ecuaciones

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (1)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad (2)$$

La transformada z o transformada directa de $x(n)$ está definida por la ecuación (1). En general $X(z)$ es una serie infinita de potencias en la variable z^{-1} , donde la secuencia de valores, $x(n)$, son los coeficientes en la serie de potencias.

La transformada z inversa está definida por la integral de contorno en la ecuación (2) donde c es un contorno cerrado que contiene el origen del plano z y queda dentro de la región de convergencia de $X(z)$

Círculo unitario y transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una señal discreta está dada por las ecuaciones

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n} \quad (3)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega \quad (4)$$

Estas ecuaciones son un caso especial de las ecuaciones (1) y (2) en donde la representación de Fourier es obtenida al restringir la transformada z al círculo unitario del plano z , haciendo $z=e^{i\omega}$.

Una condición suficiente para la existencia de una representación en transformada de Fourier puede ser obtenida haciendo $z=1$.

Una clase importante de transformadas z son aquellas en que $X(z)$ es una función racional, o sea, una relación de polinomios en z . Las raíces del polinomio del numerador son aquellos valores de z para los cuales $X(z)=0$, y son referidos como los ceros de $X(z)$. Valores de z para los cuales $X(z)$ es infinito son referidos como los polos de $X(z)$. Los polos de $X(z)$, para valores finitos de z son las raíces del polinomio del denominador.