Lej. 10

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

" PANORAMA GENERAL DE LAS DECISIONES BAJO EL CONFLICTO DEL INTERES "

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :

I N G E N I E R O   C I V I L

P R E S E N T A :

JOSE CRUZ ALFEREZ ORTEGA

México, D. F. 1986

FACULTAD DE INGENIERIA
EXAMENES PROFESIONALES
60-I-300 T.E.

Al Pasante señor JOSE CRUZ ALFEREZ ORTEGA,
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. Francisco J. Jauffred Mercado, para que lo desarrolle como tesis en su Examen Profesional de Ingeniero CIVIL.

"PANORAMA GENERAL DE LAS DECISIONES BAJO EL CONFLICTO DEL INTERES"

I. Juegos entre dos personas sin cooperación.

II. Juegos cooperativos entre dos personas.

III. Juegos entre n personas.

IV. Conclusiones.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, 16 de noviembre de 1981
EL DIRECTOR

ING. JAVIER JIMENEZ ESPRIU

JJE/OBLH/ser

INDICE

CAPITULO III.

JUEGOS ENTRE N PERSONAS.

CAPITULO IV.

CONCLUSIONES.

INTRODUCCION

Se entiende por juego una situación en la que los participantes toman decisiones tendientes a lograr un objetivo. Puesto que el objetivo es el mismo, existe una situación de conflicto de intereses y se dice que las decisiones que se toman en un juego son bajo conflicto de intereses .

En un juego los participantes llevan a cabo acciones; a un conjunto de éstas se le llama TACTICA en el juego.

Se entiende por ESTRATEGIA un conjunto de normas que señalan la táctica que debe usar cada uno de los jugadores a lo largo del juego.

Al terminar el juego cada uno de los jugadores perciben una ganancia, misma que depende de la conducta seguida en el juego. A esta ganancia se le acostumbra llamar PAGO y puede ser positiva o negativa.

También es usual que el juego se sujete a un cierto reglamento, mismo que caracteriza o establece diferencias entre juegos, como son las llamadas REGLAS DEL JUEGO.

Por último, las reglas del juego deben definir el pago que recibe cada uno de los jugadores. Se dice que las reglas de juego definen la LEY DE PAGOS del juego.

CAPITULO I

JUEGOS ENTRE DOS PERSONAS SIN COOPERACION.

Para su análisis los juegos se presentan en tres formas básicas estas son: la forma descriptiva, la normal y la característica.

I.1.- Presentación descriptiva

Se dice que un juego se presenta en esta forma cuando las tácticas de los jugadores aparecen representadas en un árbol de juegos acción por acción.

Un árbol de juegos es una sucesión de vértices y arcos, los vértices representan jugadores y los arcos acciones que pueden tomar los jugadores. Considerese el llamado juego "NIM" de origen egipcio.

En este juego cada uno de los jugadores puede elegir entre un número 1 y un número 2. El que primero alcance un número prefijado sumando las selecciones de cada jugador es el que se lleva un premio.

Obsérvese que esta presentación tiene como ventaja el observar el conjunto de acciones que puede usar cada uno de los jugadores. Sin embargo la complejidad de las situaciones reales hace poco atractivo su uso.

A esta presentación descriptiva también suele llamarsele una FORMULACION EXTENSIVA DEL JUEGO.

CAPITULO I

JUEGOS ENTRE DOS PERSONAS SIN COOPERACION.

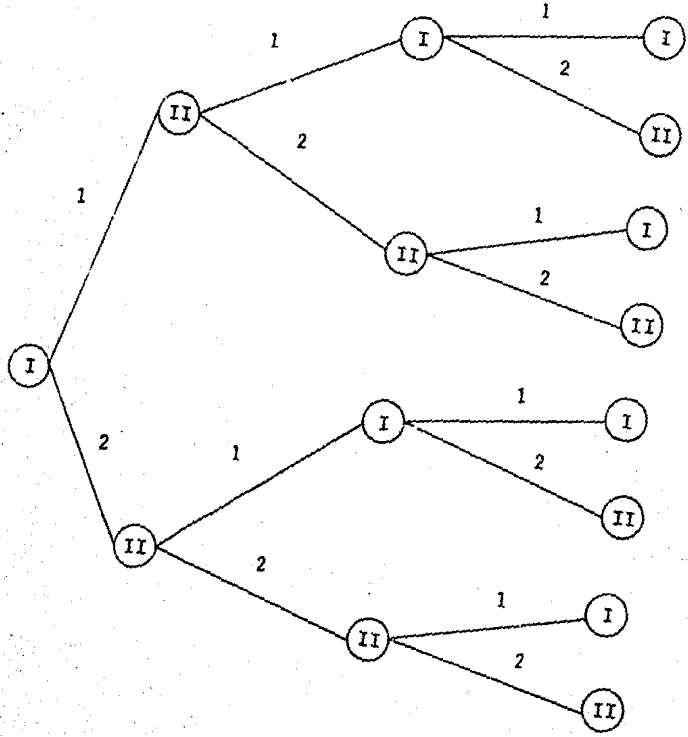
Para su análisis los juegos se presentan en tres formas básicas estas son: la forma descriptiva, la normal y la característica.

I.1.- Presentación descriptiva

Se dice que un juego se presenta en esta forma cuando las tácticas de los jugadores aparecen representadas en un árbol de juegos acción por acción.

Un árbol de juegos es una sucesión de vértices y arcos, los vértices representan jugadores y los arcos acciones que pueden tomar los jugadores. Considerese el llamado juego "NIM" de origen egipcio.

En este juego cada uno de los jugadores puede elegir entre un número 1 y un número 2. El que primero alcance un número prefijado sumando las selecciones de cada jugador es el que se lleva un premio.

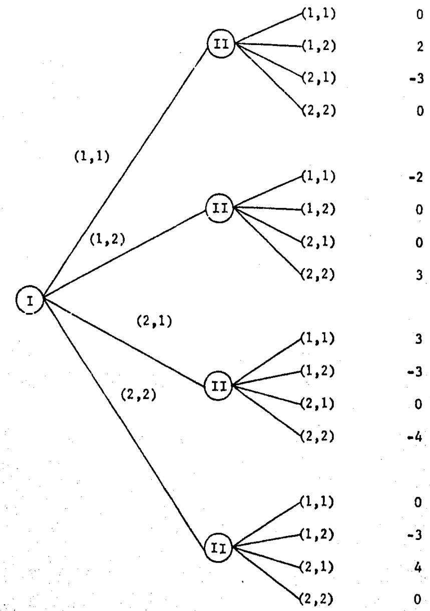

I
II
II
I
II
1
2
1
2
1
2
1
2
1
2
1
2
1
2

Obsérvese que esta presentación tiene como ventaja el observar el conjunto de acciones que puede usar cada uno de los jugadores. Sin embargo la complejidad de las situaciones reales hace poco atractivo su uso.

A esta presentación descriptiva también suele llamarsele una FORMULACION EXTENSIVA DEL JUEGO.

JUEGO DE MORA (JUEGO ITALIANO MEDIOEVAL)

$\&_I$	$\&_{II}$
I	II
(1,1)	(1,1)
(1,2)	(1,2)
(2,1)	(2,1)
(2,2)	(2,2)


I
(1,1)
(1,2)
(2,1)
(2,2)
II
II
II
II
(1,1) 0
(1,2) 2
(2,1) -3
(2,2) 0
(1,1) -2
(1,2) 0
(2,1) 0
(2,2) 3
(1,1) 3
(1,2) -3
(2,1) 0
(2,2) -4
(1,1) 0
(1,2) -3
(2,1) 4
(2,2) 0

En el juego anterior ''NIM ''fue posible apreciar la formulación extensiva. Ahora se plantea el juego ''Mora ''en donde no solamente se tiene en forma extensiva sino además se -- introduce la presentación normal.

Descripción del juego.-

1.- Tanto el jugador I como el jugador II, presentan simultáneamente uno o dos dedos.

2.- Tanto el jugador I como el jugador II, dicen simultáneamente un número que puede ser uno o dos.

Reglas del juego.- Si uno de los jugadores ''adivina ''el número de dedos que presenta el contrario mientras que éste último no acierta, entonces el jugador inicial recibe en moneda la suma de los dedos mostrados.

Si ninguno de los dos acierta o si los dos adivinan el -- juego se declara tablas y la ganancia es cero para ambos jugadores.

Tácticas.- Obsérvese que la diferencia del juego anterior en - donde solamente ejercía una acción, en éste se ejercen dos acciones simultáneamente; presentar y decir; de manera que cada una de las tácticas quede representada por un vector con dos - elementos.

El primero corresponde a la acción presentar y el segundo a la acción decir. En este caso las tácticas que presenta I son $\&_{I}$, análogamente las del jugador II son $\&_{II}$.

Obsérvese que en este caso las tácticas son vectores en general se define como TACTICA un VECTOR de n elementos, tantos como acciones simultáneas deben ejercer los jugadores.

En el juego anterior el vector se reduce a un escalar dado que solamente podían ejercer una acción los jugadores.

Como consecuencia el árbol de juegos es $\&_{A}$.

Obsérvese que al final de cada una de las ramas (''colgado de cada una '') Aparece el PAGO que recibe cada uno de los jugadores. Se establece como convención en el caso de dos jugadores, referir los pagos a uno de ellos, de manera que los positivos corresponden al jugador I y los negativos al jugador II. El sentido de esta convención es claro, ya que como se trata de juego de ''suma cero ''lo que un jugador gana, necesariamente lo pierde el contrario y puesto que la convención se refiere al jugador I, lo que gana el jugador II es necesariamente lo que pierde el jugador I.

El árbol nos permite ver que la rama ganadora para el jugador I es aquella en donde I usa la táctica (2,2) y el jugador II usa el vector (2,1).

Por su parte la rama ganadora para el jugador II es aquella en donde el jugador I usa el vector (2,1) y el jugador II usa el vector (2,2), obsérvese lo que implica para cada uno de los jugadores el término ganar. Para el jugador I implica maximizar los pagos del jugador II; para el jugador II significa minimizar los pagos para el jugador I.

Es importante establecer formalmente que el jugador I busca maximizar para ganar, el jugador II busca minimizar para ganar ; a ésto se refieren los teoremas de Von Newmman.

Cabe hacer la misma observación que en el "NIM", esto es, aún en ese caso tan simple el árbol de juegos se hace ya poco manejable. Adicionalmente, si bien es cierto que las tácticas aparecen en forma explícita, en lo que se refiere a las estrategias no es constructivo (no proporciona soluciones).

1.2.- PRESENTACION NORMAL.-

La presentación normal de un juego se hace mediante una matriz en la que los renglones corresponden a tácticas del jugador I, las columnas corresponden a tácticas del jugador II y el contenido corresponde al pago que recibe cada jugador al usar simultáneamente, cada uno de ellos, una de sus tácticas.

Así para el juego de Mora se tiene:

$$\begin{array}{cc} & \text{II} \\ & \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{array} \\ \text{I} \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

I.3.- PRESENTACION CARACTERISTICA.-

Como se vió en el juego de Mora conduce a una matriz llamada ""de pagos ""en la que los renglones son las tácticas del jugador I y las columnas las del jugador II. Entonces, si I -- dispone de ""n ""tácticas y II de ""m ""tácticas , la matriz - de pagos es de la forma siguiente:

$$\begin{array}{cc} & \text{II ""m ""Tácticas} \\ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{""n ""Tácticas} \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

Un elemento cualquiera a_{ij}, si tiene signo positivo es el pago que recibe el jugador I cuando se emplea su táctica i y el jugador II emplea su táctica j. De tener signo negativo el pago lo recibe el jugador II bajo las mismas condiciones.

I.3.1.- PUNTO SILLA.-

Considerese ahora el siguiente ejemplo: la matriz, si se analiza desde el punto de vista del jugador I, es obvio que lo que le conviene es emplear la táctica 1, ya que de ganar, gana más que si emplea la táctica 2 y de perder, pierde menos con la táctica 1 que con la táctica 2.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{II} \\ & & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \text{I} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Analizándolo ahora desde el punto de vista del jugador II, es obvio que debe emplear su táctica 2, ya que de emplear la 1, perdería bajo cualquier táctica que empleara el jugador I.

En este caso tan simple, la estrategia es inmediata; para el jugador I emplear en el 100% de los casos la táctica 1 y nunca emplear la 2. Análogamente para el jugador II, emplear en el 100% de los casos la táctica 2 y nunca emplear la táctica 1.

Si como en el caso de las tácticas las estrategias se representan mediante vectores, la estrategia del jugador I será (100%,0) y del jugador II (0,100%), pero es más simple poner I (1,0) y II (0,1).

Obsérvese que las ESTRATEGIAS SON VECTORES DE TACTICAS - así como las tácticas fueron vectores de acciones. Sin embargo, estos vectores llamados "estrategias" tienen como características que todos sus elementos son no negativos y la suma de sus elementos son igual a la unidad.

Se distinguen dos tipos de ESTRATEGIAS, las PURAS en donde uno de los elementos es igual a la unidad y todos los restantes iguales a cero y las MIXTAS en las que ninguno de los elementos es igual a la unidad.

El juego antes considerado, como se ha visto lleva a estrategias puras. Por otra parte, el ejemplo de las estrategias (1,0) para el jugador I y (0,1) para el jugador II, determina en forma única el pago -1, a este VALOR determinado en forma única se le llama VALOR DEL JUEGO y se le acostumbra representar mediante v $[v = -1]$ El valor del juego es un indicador de cual de los jugadores es el favorecido al plantear el juego, así si $v > 0$ el juego favorece al jugador I, si $v < 0$, el juego favorece al jugador II y si $v = 0$ no favorece a ninguno y se dice que el juego es JUSTO.

Obsérvese nuevamente la matriz de pagos, nótese que el valor del juego tiene como característica ser el mínimo en su renglón y simultáneamente el máximo en su columna. Se dice entonces que se trata del PUNTO SILLA de la matriz. Esto proviene de la analogía con el paraboloide hiperbólico , en donde precisamente el punto silla es el máximo en el sentido de uno de los ejes perpendiculares y el mínimo en el sentido del otro eje.

Se ha llegado así a uno de los resultados de Von Newmman "si una matriz admite punto silla, dicho punto es el valor del juego, adicionalmente, si la matriz admite punto silla - los jugadores disponen de estrategias puras definidas mediante el punto silla ".

I.3.2.- CRITERIOS SIMPLES DE DOMINANCIA.-

a).- Se dice que un renglón domina a otro cuando sus elementos son mayores, en todo caso iguales a los del renglón dominado.

b).- Se dice que una columna domina a otra cuando sus elementos son respectivamente menores o en todo caso iguales a los de la columna dominada.

I.3.3.- CRITERIOS DE ELIMINACION POR DOMINANCIA.-

1).- Si dos renglones con elementos no todos idénticos presentan como característica que uno de ellos domine, entonces el renglón dominado puede eliminarse sin alterar ni las --

estrategias ni el valor del juego.

2).- Si entre dos columnas con elementos no todos identicos, - si una de ellas domina, la columna dominada puede elimi-- narse sin alterar las estrategias ni el valor del juego.

$$\begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{4} \\ 1 & 2 & \cancel{5} & \cancel{3} \\ 4 & 1 & \cancel{3} & \cancel{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

3).- Si el "i" ésimo renglón es dominado por una combinación convexa de los restantes renglones, puede ser eliminado.

$$\begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{-3} & \cancel{5} & \cancel{-3} \\ \cancel{1} & 3 & -2 & 2 & 0 \\ \cancel{1} & -2 & 1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & -1 & -4 & 1 \\ \cancel{3} & -2 & -1 & 6 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

4).- Si la "j "ésima columna es dominada por una combinación convexa de las restantes columnas, puede ser eliminada.

5).- Si se consideran dos grupos de renglones r_1 y r_2 y una -- combinación convexa de renglones de r_1 domina a una com-- binación convexa de renglones r_2 entonces existe un ren-- glón r_2 que puede ser eliminado.

6).- Si las columnas pueden agruparse en dos conjuntos C_1 y C_2 y una combinación convexa de columnas de C_1 domina a una combinación convexa de columnas de C_2 existe una columna en C_2 que puede ser eliminada.

7).- Supóngase que la matriz A puede partirse de la siguiente manera:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 & \bar{A}_4 \end{bmatrix}$$

Combinación convexa si:

$$\alpha_1 \quad r_1 + \alpha_2 \quad r_2 + \alpha_3 \quad r_3, \text{ con:}$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$$

si cada columna de A_1 domina alguna combinación convexa de A_2 y si cada renglón de A_3 se encuentra dominada por una combinación convexa de renglones de A_1 entonces las submatrices A_2 A_3 y A_4 pueden eliminarse.

I.4.- JUEGOS SIN PUNTO SILLA

$$\begin{array}{ccc} & y_1 & y_2 \\ x_1 & \multirow{2}{*}{} & \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} (x_1, \quad x_2) \\ (y_1, \quad y_2) \end{array}$$

$$v = x_1\, y_1\, a_{11} + x_1\, y_2\, a_{12} + x_2\, y_1\, a_{21} + x_2\, y_2\, a_{22}$$

$$v = x_1\, (y_1\, a_{11} + y_2\, a_{12}) + x_2\, (y_1\, a_{21} + y_2\, a_{22})$$

$$v = y_1\, (x_1\, a_{11} + x_2\, a_{21}) + y_2\, (x_1\, a_{12} + x_2\, a_{22})$$

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$y_1 + y_2 = 1$$

Si $x_1 = 1;\ x_2 = 0$

$$v = y_1\, a_{11} + y_2\, a_{12}$$

Si $x_1 = 0;\ x_2 = 1$

$$v = y_1\, a_{21} + y_2\, a_{22}$$

Si $y_1 = 1;\ y_2 = 0$

$$v = x_1\, a_{11} + x_2\, a_{21}$$

Si $y_1 = 0;\ y_2 = 1$

$$v = x_1\, a_{12} + x_2\, a_{22}$$

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad (1)$$

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} = v \qquad (2)$$

$$x_1 a_{12} + x_2 a_{22} = v \qquad (3)$$

$$y_1 + y_2 = 1 \qquad (4)$$

$$y_1 a_{11} + y_2 a_{12} = v \qquad (5)$$

$$y_1 a_{21} + y_2 a_{22} = v \qquad (6)$$

De (2) y (3) :

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} = x_1 a_{12} + x_2 a_{22}$$

$$x_1 (a_{11} - a_{12}) = x_2 (a_{22} - a_{21})$$

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12}} \quad x_2 \qquad (7)$$

De (7) en (6) :

$$\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12}} \quad x_2 + x_2 = 1$$

$$x_2 \quad \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12}} + 1 \right) = 1$$

$$x_2 \quad \left(\frac{a_{22} - a_{21} + a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12}} \right) = 1$$

$$x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{22} - a_{21} + a_{11} - a_{12}} \qquad (8)$$

De (8) en (7) :

$$x_1 = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12}} \right) \qquad \left(\frac{a_{11} - a_{12}}{a_{22} - a_{21} + a_{11} - a_{12}} \right)$$

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{22} - a_{21} + a_{11} - a_{12}} \tag{9}$$

De (5) en (6) :

$$y_1 a_{11} + y_2 a_{12} = y_1 a_{21} + y_2 a_{22}$$

$$y_1 (a_{11} - a_{21}) = y_2 (a_{22} - a_{12})$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21}} \quad y_2 \tag{10}$$

De (10) en (4) :

$$\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21}} \quad y_2 + y_2 = 1$$

$$y_2 \quad \frac{a_{22} - a_{12} + a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{21}} = 1$$

$$y_2 \quad \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{22} - a_{12} + a_{11} - a_{21}} \tag{11}$$

De (11) en (10) :

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{22} - a_{12} + a_{11} - a_{21}} \tag{12}$$

De (9) y (8) en (2) :

$$v = \frac{a_{11}\ a_{22} - a_{11}\ a_{21}}{a_{22} - a_{21} + a_{11} - a_{12}} + \frac{a_{11}\ a_{21} - a_{12}\ a_{21}}{a_{22} - a_{21} + a_{11} - a_{12}}$$

$$v = \frac{a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}}{a_{22} - a_{21} + a_{11} - a_{12}} \tag{13}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \rightarrow \bar{A}^* = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\bar{e} = \begin{bmatrix} 1, & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad e^{-t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}\ \bar{A}^{*} = a_{22} - a_{21},\ \ a_{11} - a_{12}$$

$$\bar{A}^{*}\ \bar{\epsilon}^{t} = \begin{bmatrix} a_{22} - a_{12} \\ \\ a_{11} - a_{21} \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}\ \bar{A}^{*}\ \bar{\epsilon}^{t} = a_{22} - a_{21} + a_{11} - a_{12}$$

$$\bar{A} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

$$\bar{x} = (\ x_1,\ x_2\ )$$

De (9) y (8):

$$\bar{x} = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{22} - a_{21} + a_{11} - a_{12}}\ ,\ \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{22} - a_{21} + a_{11} - a_{12}} \right)$$

$$\bar{x} = \frac{\bar{e}\ \bar{A}^{*}}{\bar{e}\ \bar{A}^{*}\ \bar{\epsilon}^{t}}$$

$$\bar{y} = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{22} - a_{21} + a_{11} - a_{12}} \quad , \quad \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{22} - a_{21} + a_{11} - a_{12}} \right)$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{A}^{*} \quad \bar{\epsilon}^{t}}{\bar{\epsilon} \quad \bar{A}^{*} \quad \bar{\epsilon}^{t}}$$

$$v = \frac{|\bar{A}|}{\bar{e} \quad \bar{A}^{*} \quad \bar{e}^{t}}$$

Ejemplo 1)

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|\bar{A}| = 4 - 6 = -2$$

$$\bar{A}^{*} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{e} = \begin{bmatrix} 1 & , & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}^{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{e}\ \bar{A}^* = \begin{bmatrix} 2+2, & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4, 5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}\ \bar{A}^*\ \bar{e}^t = \begin{bmatrix} 4, 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 9$$

$$\bar{A}^*\ \bar{e}^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 \\ 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Jugador I

$$\bar{x} = \frac{\bar{e}\ \bar{A}^*}{\bar{e}\ \bar{A}^*\ \bar{e}^t} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9}, & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9}, & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

Jugador II

$$\bar{y} = \frac{\bar{A}^*\ \bar{e}^t}{\bar{e}\ \bar{A}^*\ \bar{e}^t} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

Valor del juego:

$$v = \frac{|\bar{A}|}{\bar{e} \quad \bar{A}^{*} \quad \bar{e}^{t}} = \frac{-2}{9}$$

$$v = -\frac{2}{9}$$ El valor del juego favorece al jugador II.

Ejemplo 2)

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando criterios de dominancia.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{4} \\ 1 & 2 & \cancel{5} & \cancel{3} \\ 4 & 1 & \cancel{3} & \cancel{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\bar{A}| = 1 - 8 = -7$$

$$\bar{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{e} = \begin{bmatrix} 1 & , & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}\ \bar{A}^* = \begin{bmatrix} 1 - 4, & -2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3, & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}\ \bar{A}^*\ \bar{e}^t = \begin{bmatrix} -3, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -4$$

$$\bar{A}^*\ \bar{e}^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & - & 2 \\ -4 & + & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Jugador I

$$\bar{x} = \frac{\bar{e}\ \bar{A}^*}{\bar{e}\ \bar{A}^*\ \bar{e}^t} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{-4} & , & \frac{-1}{-4} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & , & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Jugador II

$$\bar{y} = \frac{\bar{A}^{*} \quad \bar{\epsilon}^{t}}{\bar{\epsilon} \quad \bar{A}^{*} \quad \bar{\epsilon}^{t}} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{-4} \\ \\ \frac{-3}{-4} \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Valor del juego:

$$v = \frac{|\bar{A}|}{\bar{\epsilon} \quad \bar{A}^{*} \quad \bar{e}^{t}} = \frac{-7}{-4}$$

$v = \frac{7}{4}$ El valor del juego favorece al jugador I.

Tácticas de los jugadores de acuerdo a la matriz original:

Jugador I

$$\bar{x} = \left[0, \ \frac{3}{4}, \ \frac{1}{4} \right]$$

Jugador II

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

valor del juego:

$$v = \frac{7}{4}$$

I.5.- JUEGOS DE 2 x m y n x 2.

I máximo

$$v\ (\bar{x}) = \left[\text{Min.}\ \ (a_{ij}\, x_j\ +\ a_{ij}\, x_2) \right]$$

$$\sum x_i = 1$$

$$x_1 = 1 - x_2$$

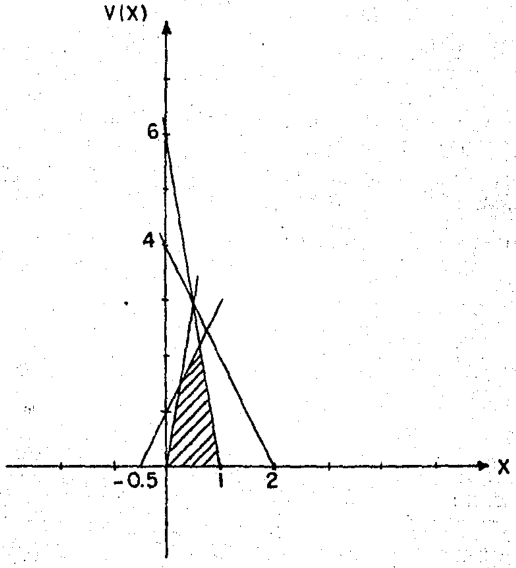
$$v\ (\bar{x}) = a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2$$

$$v\ (\bar{x}) = a_{11}\, x_1 + (1 - x_1)\, a_{21}$$

$$v\ (\bar{x}) = (a_{11} - a_{21})\, x_1 + a_{21}$$

Ejemplo de criterio gráfico:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$



$$v_1 \ (\bar{x}) = (2 - 4) \ x_1 + 2 \ ;$$

$$v_1 \ (\bar{x}) = -2 \ x_1 + 2$$

$$v_2 \ (\bar{x}) = 2x_1 + 1$$

$$v_3 \ (\bar{x}) = -5x_1 + 6$$

$$v_4 \ (\bar{x}) = 5x_1$$

$$x \geq 0$$

Las rectas que definen el valor del juego máximo de las menores son:

$$v \ (\bar{x}) = 2x_1 + 1$$

$$v \ (\bar{x}) = -5x_1 + 6$$

$$2x_1 + 1 = -5x_1 + 6$$

$7x_1 = 5$ por lo tanto:

$$x_1 = 5/7$$

$$x_2 = 2/7$$

$$v = \frac{17}{7}$$

Comprobación:

Con la matriz equivalente después de aplicar criterios de dominancia:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \bar{A}$$

$$\bar{A}^{*} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}\ \bar{A}^{*}\ \bar{e}^{t} = \begin{bmatrix} 6-1, & -1+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 2 \end{bmatrix} = 7$$

$$\bar{A}^{*}\ \bar{e}^{t} = \begin{bmatrix} 6 - 1 \\ -1 \quad 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|\bar{A}| = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 18 - 1 = 17$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} , \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0, & \frac{5}{7}, & \frac{2}{7}, & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$v = \frac{|\bar{A}|}{\bar{e} \quad \bar{A}^{*} \quad \bar{e}^{t}}$$

$$v = \frac{17}{7}$$

I.6.- METODO GENERAL PARA JUEGOS DE $n \times n$

1.- Determinar todas las posibles submatrices $\bar{M}$ cuadradas de $\bar{A}$ (matriz de pagos).

2.- Obtener el determinante $|\bar{M}|$ para cada submatriz e investigar si tiene inversa ($|\bar{M}| \neq 0$).

3.- Para cada una de las submatrices $\bar{M}$ con inversa obtener -- x', y' y v.

4.- Desechar la submatriz $\bar{M}$ que produce vectores $\bar{x}$ ó $\bar{y}$ con algún elemento negativo.

5.- Para las submatrices que cumplen con las condiciones anteriores formar las estrategias $\bar{x}$, $\bar{y}$ con los correspondientes ceros.

6.- Verificar que el producto interior de $\bar{x}$ con las columnas -- eliminadas sea mayor o igual a v, ($\bar{x}$ x columnas eliminadas $\geq v$) y lo mismo para y, ($\bar{y}$ x renglones eliminados $\leq v$).

7.- La matriz que cumple con éste último requisito es la que suministra las estrategias y el valor del juego, ó soluciones.

ejemplo:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 1.5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} 1.5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} d & f \end{array} \\ \begin{array}{c} d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 1.5 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} d & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 1.5 & 3 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} 1.5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} d & f \end{array} \\ \begin{array}{c} b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Todos los determinantes resultan diferentes de cero.

$1^*\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix}$ $2^*\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $3^*\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $4^*\begin{bmatrix} 0.5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$5^*\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1.5 \end{bmatrix}$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} -1, & -1.5 \end{bmatrix} /-2.5;$ $\begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} /1;$ $\begin{bmatrix} 1, & 0 \end{bmatrix} /1;$ $\begin{bmatrix} -0.5, & -1 \end{bmatrix} /-1.5$

$\begin{bmatrix} 0, & -1.5 \end{bmatrix} /-1.5$

$\bar{y} = \begin{bmatrix} -2, & -0.5 \end{bmatrix} /-2.5;$ $\begin{bmatrix} 0, & 1 \end{bmatrix} /1;$ $\begin{bmatrix} -1, & 2 \end{bmatrix} /1;$

$\begin{bmatrix} -1.5, & 0 \end{bmatrix} /-1.5;$ $\begin{bmatrix} -2, & 0.5 \end{bmatrix} /-1.5$

$v_1 = \dfrac{-4.5}{-2.5} = 1.8 \leq 2.4$ $\quad v_2 = 1 \quad v_3 = x \quad v_4 = \dfrac{1.5}{-1.5} = 1$

$1 \leq 1.8 \qquad 0.5 \nleq 1$

$v_5 = x$

$1.33 \geq 1$

$3 \ngeq 1$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} -4, & -6, & 0 \end{bmatrix}$ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0, & 0.33, & 0.67 \end{bmatrix}$

$\bar{y} = \begin{bmatrix} 8, & 2, & 0 \end{bmatrix}$ $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \end{bmatrix}$ $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \end{bmatrix}$

6^* $\begin{bmatrix} 0.5 & -3 \\ -1 & 1.5 \end{bmatrix}$ 7^* $\begin{bmatrix} 0.5 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ 8^* $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix}$ 9^* $\begin{bmatrix} 0.5 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1.5 & 1.5 & 3 \\ 1 & -2.25 & 3 \\ 1 & 1.5 & -4.5 \end{bmatrix}$$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} -0.5, & -1.5 \end{bmatrix} /-2.5; \quad \begin{bmatrix} -0.5, & 0 \end{bmatrix} /-0.5; \quad \begin{bmatrix} 0, & -1.5 \end{bmatrix} /-1.5;$

$\begin{bmatrix} -0.5, & 0 \end{bmatrix} /-0.5$

$\bar{y} = \begin{bmatrix} -2.5, & 0.5 \end{bmatrix} /-2.5; \quad \begin{bmatrix} -2.5, & 2 \end{bmatrix} /-0.5; \quad \begin{bmatrix} -1, & -0.5 \end{bmatrix} /-1.5$

$\begin{bmatrix} -1.5, & 1 \end{bmatrix} /-0.5$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0, 0, 1 \end{bmatrix} \quad 1 \neq 2$

$\bar{y} = \begin{bmatrix} 0.66, 0, & 0.33 \end{bmatrix}$

$v = \dfrac{-3}{-1.5}$

$\tilde{A}$ de cofactores

$$\begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 1 \\ 1.5 & -2.25 & 1.5 \\ 3 & 3 & -4.5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0.5, & 0.75, & 1.5 \end{bmatrix} /2.75$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 3, & 1.75, & -2 \end{bmatrix} /2.75$$

Solución:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0.4, & 0.6, & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v = 1.8$$

I.7.- Juegos de n x m

Jugador II: minimizar v

con $y_i \geq 0$

Sujeto a:

$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots\ldots\ldots a_{1m} y_m \leq v$$

$$a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots\ldots\ldots a_{2m} y_m \leq v$$

- -

$$a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots\ldots\ldots a_{nm} y_n \leq v$$

$$y_1 + y_2 + \ldots\ldots\ldots y_m = 1$$

si sumamos todos los coeficientes a_{nm} :

$$K' = \left| \text{min de } a_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, n \\ j = 1, m \end{matrix} \right| + 1$$

el valor absoluto del elemento a_{ij} más pequeño de la matriz de pagos mas uno.

Hacemos a la matriz de pagos una matriz con solo términos positivos, por lo tanto, logramos que el valor del juego sea positivo, o sea- $V > 0$

V resulta de la v transformada al sumar K': $A_{mn} = a_{ij} + K'$

transformamos haciendo $y_j = \dfrac{y_i}{v}$ para que los términos independientes sean iguales a 1:

$$A_{11} Y_1 + A_{12} Y_2 + \dots\dots\dots + A_{1m} Y_m \leq 1$$

$$A_{21} Y_1 + A_{22} Y_2 + \dots\dots\dots + A_{2m} Y_m \leq 1$$

$$A_{n1} Y_1 + A_{n2} Y_2 + \dots\dots\dots + A_{nm} Y_m \leq 1$$

$$Y_1 + Y_2 + \dots\dots\dots + Y_m \leq 1/v$$

$$Y_i \geq 0$$

Minimizar v es lo mismo que maximizar 1/v tomando el primer miembro de la igualdad con 1/v el problema queda como:

$$\max. \quad z = Y_1 + Y_2 + \dots\dots Y_m$$

sujeto a :

$$A_{11} Y_1 + A_{12} Y_2 + \ldots\ldots + A_{1m} Y_m \leq 1$$

$$A_{21} Y_1 + A_{22} Y_2 + \ldots\ldots + A_{2m} Y_m \leq 1$$

- -

$$A_{n1} Y_1 + A_{n2} Y_2 + \ldots\ldots + A_{nm} Y_m \leq 1$$

$$y_i \geq 0 \qquad i = 1 \ \ldots\ldots \ m.$$

Con todo esto logramos simplificar el problema original pues reduci mos el rango de soluciones de (- ∞, ∞) a (0, -1)

$$\max \frac{1}{v} = \max z$$

$$v = \frac{1}{z\ (\max)} - (k + 1)$$

$$v = \frac{1}{Y_1 + \ldots Y_m} - (k + 1)$$

$$v = V - (k + 1)$$

$$y_i = Y_i \quad V$$

$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 \leq V$$

$$(a_{11} + k + 1) y_1 + (a_{12} + k + 1) y_2 + (a_{13} + k + 1) y_3 \leq V$$

$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + B Y_1 + B Y_2 + B Y_3 \leq V$$

$$v + B (y_1 + y_2 + y_3) \leq V$$

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1$$

$$B = K + 1$$

$$v + B = V$$

Para encontrar la estrategia del jugador I se utiliza el concepto del Dual, donde Z_i es la variable de holgura (la que sumada en - el primer miembro de las ecuaciones de restricción igualan a éstas con el término independiente).

$$X_i = \frac{Z_i}{Y_1 + \ldots\ldots + Y_m}$$

$$x_i = V X_i$$

ejemplo:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

sumando el menor de los $A_{ij} + 1$ (A_{ij} = valor absoluto del mínimo -- elemento de la matriz original) para hacerla positiva.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 6 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Planteando función objetivo y restricciones:

Función objetivo:

maximizar $Z = Y_1 + Y_2 + Y_3$

sujeto a:

$$3\,Y_1 + 5\,Y_2 + 5\,Y_3 \leq 1$$

$$6\,Y_1 + 2\,Y_2 + 6\,Y_3 \leq 1$$

$$7\,Y_1 + 7\,Y_2 + Y_3 \leq 1$$

$$H \; -Y_1 \; -Y_2 \; -Y_3 = 0$$

$$3\,Y_1 + 5\,Y_2 + 5\,Y_3 + Z_1 = 1$$

$$6\,Y_1 + 2\,Y_2 + 6\,Y_3 + Z_2 = 1$$

$$7\,Y_1 + 7\,Y_2 + Y_3 + Z_3 = 1$$

θ	V.b.	b	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	Z_2	Z_3
	0		- 1	- 1	- 1			
0.20	Z_1	1	3	5	5	1	0	0
0.17	Z_2	1	6	2	6*	0	1	0
1.00	Z_3	1	7	7	1	0	0	1
$Z_j - C_j$			- 1	- 1	- 1			
0.04	Z_1	0.15	- 2	3.35*	0	1	-0.85	0
0.52	Y_3	0.17	1	0.33	1	0	0.17	0
0.12	Z_3	0.83	6	6.67	0	0	-0.17	1
$Z_j - C_j$		0.17	0	-0.67			0.17	0
	Y_2	0.05	-0.6	1	0	0.36	- 0.25	0
	Y_3	0.15	1.2	0	1	- 0.10	0.25	0
	Z_3	0.50	10*	0	0	- 2.0	1.5	1
$Z_j - C_j$		0.20	-0.4	0	0	0.20	0	0
	Y_2	0.08	0	1	0	0.18	- 0.16	0.06
	Y_3	0.09	0	0	1	0.14	0.07	- 0.12
	Y_1	0.05	1	0	0	-0.2	0.15	0.10
$Z_j - C_j$		0.22	0	0	0	0.12	0.06	0.04

Los valores que toman las variables de holgura en la función objetivo son las tácticas del jugador I.

$$X_j = \frac{Z_j}{\sum_{j=1}^{n} Z_j}$$

$$\bar{Y} = \begin{array}{ccc} Y_2 & Y_3 & Y_1 \\ \left[\frac{0.08}{0.22}, \right. & \frac{0.09}{0.22}, & \left. \frac{0.05}{0.22} \right] \end{array}$$

$$\bar{X} = \left[\frac{0.12}{0.22}, \frac{0.06}{0.22}, \frac{0.04}{0.22} \right]$$

$$v = \frac{1}{0.22} - 4 = \frac{6}{11}$$

Ejemplo:

Dos fabricantes A y B compiten por un mismo mercado existen N áreas en que estudios previos han demostrado preferencias del consumidor por el producto B. Además la capacidad adquisitiva por áreas es $a_1 > a_2 > \dots\dots > a_n$.

El fabricante A desea invadir éstas áreas y planea una campaña de ventas y B, sabiéndolo, planea su campaña para contrarrestar a A.

Si los recursos de A y B son limitados y por tanto deben concentrarse en una sóla área.

Cual es la estrategia a emplear y cual fabricante es el favorecido?

Supóngase que A invade el área a_j con valor de a_i unidades, y dada la resistencia que le presenta B solo consiguen un porcentaje "p" del mercado. Esto es, solo logra Pa_j del total a_j unidades.

Tacticas de A		Tacticas de B	
Invadir	a_1	Defender	a_1
" "	a_2	" "	a_2
" "	.	" "	.
" "	.	" "	.
" "	a_j	" "	a_j

La matriz de pagcs será :

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} Pa_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & Pa_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_3 & a_3 & Pa_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_n & \cdots & \cdots & \cdots & Pa_n \end{bmatrix}
\end{array}$$

Ejemplo de aplicación particular :

a_1 = 3' pesos

a_2 = 2' pesos $\qquad a_1 > a_2 > a_3$

a_3 = 1' pesos

P = 50% → 0.50

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 1' & 2' & 3' \\
\hline
1 & 1.5 & 3 & 3 \\
2 & 2 & 1 & 2 \\
3 & 1 & 1 & 0.5
\end{array}
$$

Después de aplicar criterios de dominancia:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1.5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}^{*} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \frac{\bar{e}\ \bar{A}^{*}}{\bar{e}\ \bar{A}^{*}\ \bar{e}^{t}} = \frac{(-1\ ,\ -1.5)}{-2.5} = \begin{bmatrix} 0.4, 0.6, 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{e}^{t}\ \bar{A}^{*}}{\bar{e}\ \bar{A}^{*}\ \bar{e}^{t}} = \frac{(-2,\ -0.5)}{-2.5} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v = \frac{|\bar{A}|}{\bar{e}\ \bar{A}^{*}\ \bar{e}^{t}} = \frac{-4.5}{-2.5} = 1.8$$

En una competencia por mercado como la antes planteada, el número óptimo de áreas a atacar y defender respectivamente por los jugadores A y B cuando $a_1 > a_2 \; . \; . \; . \; . \; . > a_n$ es r, misma que se determina a partir de la siguiente inecuación;

$$\frac{\frac{1}{a_r} + 1}{\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{a_i}} \geq \frac{1}{r + p - 1} \geq \frac{\frac{1}{a_r}}{\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i}}$$

En donde P es el porcentaje de penetración del jugador A. Además una vez determinado r, las estrategias óptimas para cada jugador quedan dadas por $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$, v cuyos respectivos elementos son:

$$\bar{X}_K = \frac{\frac{1}{a_k}}{\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i}} \; ; \quad 1 \leq k \leq r + 1$$

$$Y_K = \frac{1}{1-p} \left| 1 - \frac{\dfrac{p+r-1}{a_k}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i}} \right|$$

$$1 \leq k \leq r+1$$

$$v = \frac{r+p-1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i}}$$

$r = 2$ cumple con la inecuación y $\bar{x}_k$ y $\bar{y}_K$ coinciden con las calculadas.

No se debe olvidar que el valor de la táctica es la frecuencia con que debe tomarse dicha acción.

ejemplo :

Se tienen dos mercados para un mismo producto.

El primero vale 20 y el segundo 10 millones.

El primer competidor está dispuesto a invertir 4 millones y el segundo 3 millones. Cual es la estrategia para cada uno de los competidores si gana el mercado el que mas invierta? El ganador gana el mercado y la inversión del contrario.

A - 20	I	II
B - 10	(4, 0)	(3,0)
	(3, 1)	(2, 1)
I - 4	(2, 2)	(1, 2)
II - 3	(1, 3)	(0, 3)
	(0, 4)	

Las combinaciones de tácticas entre jugadores son :

		A					B					
		Venc.	Inv.	Inv.D	Val. Sit	Total	Venc.	Inv.	Inv.D	Val. Sit	Total	Balance
(4,0)	(3,0)	I	4	3	20	27	-	-	-	10	-	27
	(2,1)	I	4	2	20	26	II	1	0	10	-11	15
	(1,2)	I	4	1	20	25	II	2	0	10	-12	13
	(0,3)	I	4	0	20	24	II	3	0	10	-13	11
(3,1)	(3,0)	-	-	-	-	-	I	1	0	10	11	11
	(2,1)	I	3	2	20	25	-	-	-	-	-	25
	(1,2)	I	3	1	20	24	II	2	1	10	-13	11
	(0,3)	I	3	0	20	23	II	3	1	10	-14	9
(2,2)	(3,0)	II	3	2	20	- 25	I	2	0	10	12	-13
	(2,1)	-	-	-	-	-	I	2	1	10	13	13
	(1,2)	I	2	1	20	23	-	-	-	-	-	+23
	(0,3)	I	2	0	20	22	II	3	2	10	-15	7
(1,3)	(3,0)	II	3	1	20	-24	I	3	0	10	13	-11
	(2,1)	II	2	1	20	-23	I	3	1	10	14	-9
	(1,2)	-	-	-	-	-	I	3	2	10	15	15
	(0,3)	I	1	0	20	21	-	-	-	-	-	21
(0,4)	(3,0)	II	3	0	20	-23	I	4	0	10	14	-9
	(2,1)	II	2	0	20	-22	I	4	1	10	15	-7
	(1,2)	II	1	0	20	-21	I	4	2	10	[illegible]	-5
	(0,3)	-	-	-	-	-	I	4	3	10	[illegible]	[illegible]

Las combinaciones de tácticas entre jugadores son :

		A					B					
		Venc.	Inv.	Inv.D	Val. Sit	Total	Venc.	Inv.	Inv.D	Val. Sit	Total	Balance
(4,0)	(3,0)	I	4	3	20	27	-	-	-	10	-	27
	(2,1)	I	4	2	20	26	II	1	0	10	-11	15
	(1,2)	I	4	1	20	25	II	2	0	10	-12	13
	(0,3)	I	4	0	20	24	II	3	0	10	-13	11
(3,1)	(3,0)	-	-	-	-	-	I	1	0	10	11	11
	(2,1)	I	3	2	20	25	-	-	-	-	-	25
	(1,2)	I	3	1	20	24	II	2	1	10	-13	11
	(0,3)	I	3	0	20	23	II	3	1	10	-14	9
(2,2)	(3,0)	II	3	2	20	- 25	I	2	0	10	12	-13
	(2,1)	-	-	-	-	-	I	2	1	10	13	13
	(1,2)	I	2	1	20	23	-	-	-	-	-	+23
	(0,3)	I	2	0	20	22	II	3	2	10	-15	7
(1,3)	(3,0)	II	3	1	20	-24	I	3	0	10	13	-11
	(2,1)	II	2	1	20	-23	I	3	1	10	14	-9
	(1,2)	-	-	-	-	-	I	3	2	10	15	15
	(0,3)	I	1	0	20	21	-	-	-	-	-	21
(0,4)	(3,0)	II	3	0	20	-23	I	4	0	10	14	-9
	(2,1)	II	2	0	20	-22	I	4	1	10	15	-7
	(1,2)	II	1	0	20	-21	I	4	2	10	16	-5
	(0,3)	-	-	-	-	-	I	4	3	10	17	17

Matriz de pagos:

$$
\begin{array}{c}
\\
(4,0)\\
(3,1)\\
(2,2)\\
(1,3)\\
(0,4)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} (3,0) & (2,1) & (1,2) & (0,3) \end{array}\\
\begin{bmatrix}
27 & 15 & 13 & 11\\
11 & 25 & 11 & 9\\
-13 & 13 & 23 & 7\\
-11 & -9 & 15 & 21\\
-9 & -7 & -5 & 17
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Transformando para aplicar el criterio de programación lineal:

$$
\begin{bmatrix}
41 & 29 & 27 & 25\\
25 & 39 & 25 & 23\\
1 & 27 & 37 & 21\\
3 & 5 & 29 & 35\\
5 & 7 & 9 & 31
\end{bmatrix}
$$

Planteando función objetivo y restricciones:

Maximizar $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 0$

sujeto a:

$$41\ Y_1 + 29\ Y_2 + 27\ Y_3 + 25\ Y_4 + Z_1 \leq 1$$
$$25\ Y_1 + 39\ Y_2 + 25\ Y_3 + 23\ Y_4 + Z_2 \leq 1$$
$$Y_1 + 27\ Y_2 + 37\ Y_3 + 21\ Y_4 + Z_3 \leq 1$$
$$3\ Y_1 + 5\ Y_2 + 29\ Y_3 + 35\ Y_4 + Z_4 \leq 1$$
$$5\ Y_1 + 7\ Y_2 + 9\ Y_3 + 31\ Y_4 + Z_5 \leq 1$$

La relación Beneficio - Costo tiene un campo de aplicación muy limitado, pues los beneficios no siempre dependen solo del jugador I en éste juego, como es obvio.

θ	V.b.	b	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
	Z_1	1	41*	29	27	25	1	0	0	0	0
	Z_2	1	25	39	25	23	0	1	0	0	0
	Z_3	1	1	27	37	21	0	0	1	0	0
	Z_4	1	3	5	29	35	0	0	0	1	0
	Z_5	1	5	7	9	31	0	0	0	0	1
Z_j-C_j			-1	-1	-1	-1					
0.0394	Y_1	0.024	1	0.707	0.658	0.609	0.024	0	0	0	0
0.0409	Z_2	0.40	0	21.325	8.55	9.775	-0.6	1	0	0	0
0.0478	Z_3	0.976	0	26.293	36.342	20.391	-0.024	0	1	0	0
0.0279	Z_4	0.928	0	2.879	27.026	33.173*	-0.072	0	0	1	0
0.0314	Z_5	0.88	0	3.465	5.71	27.955	0.12	0	0	0	1
Z_j-C_j		0.024	0	-0.293	-0.342	-0.391	0.024	0	0	0	0
0.043	Y_1	0.007	1	0.634	0.162	0	0.025	0	0	0	0
0.006	Z_2	0.126	0	20.484*	0.593	0	-0.58	1	0	-0.293	0
0.017	Z_3	0.405	0	24.519	19.723	0	0.017	0	1	-0.612	0
0.322	Y_4	0.028	0	0.086	0.814	1	-0.002	0	0	0.003	0
0.092	Z_5	0.097	0	1.060	17.045	0	0.175	0	0	-0.838	1
Z_j-C_j		0.035	0	-0.259	-0.023	0	0.023	0	0	0.012	0
	Y_1	0.003	1	0	0.143	0	0.043	-0.032	0	0.009	0
	Y_2	0.006	0	1	0.029	0	-0.028	0.049	0	-0.014	0
	Z_3	0.258	0	0	19.002	0	0.704	-12.01	1	-0.269	0
	Y_4	0.027	0	0	0.812	1	0	-0.004	0	0.031	0
	Z_5	0.091	0	0	17.014	0	0.205	-0.052	0	-0.823	1
		0.037	0	0	0.015	0	0.016	0.013	0	0.008	0

$Y_1 = 0.003$

$Y_2 = 0.006$

$Y_3 = 0$

$Y_4 = 0.027$

$$\bar{x} = \left[\frac{0.016}{0.037}, \quad \frac{0.013}{0.037}, \quad \frac{0}{0.037}, \quad \frac{0.008}{0.037}, \quad 0 \right]$$

$$\bar{x} = \left[0.432, \quad 0.351, \quad 0, \quad 0.216, \quad 0 \right]$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \frac{0.003}{0.037} \\ \\ \frac{0.006}{0.037} \\ \\ \frac{0}{0.037} \\ \\ \frac{0.027}{0.037} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.081 \\ 0.162 \\ 0 \\ 0.730 \end{bmatrix}$$

$$v = \frac{1}{0.037} - 14 = 13.027$$

El valor del juego favorece al jugador I.

Este problema y en general todos los de análisis de mercado no se deben dar por terminados hasta no llevar a cabo un análisis de sensibilidad tanto respecto a las estrategias como al valor del juego. Este análisis de sensibilidad determina el mínimo de recursos que se deben invertir por parte de los jugadores sin variar el resultado del juego, ésto es, en éste caso para el jugador I, invertir en el ciclo A y para el jugador II invertir en el ciclo B.

Ejemplo:

Un residente de carreteras se ve forzado a decidir sobre autorizar o no un pago de 10 millones de pesos por conceptos de terracerías en 20 kilómetros de carretera. Normalmente es muy simple y sin ningún riesgo éste proceso ya que si cumple con las especificaciones se autoriza y en caso contrario se rechaza y para determinar éste cumplimiento meramente se llevan a cabo análisis de laboratorio.
Sin embargo en ésta ocasión no dispone de éstos resultados y por diversas circunstancias no puede posponer su decisión hasta contar con ellos. Que debe hacer el residente?.

Estados de la naturaleza:

E_1 : Cumple especificaciones

E_2 : No cumple especificaciones.

Acciones del residente:

A_1 : Pagar.

A_2 : No pagar

Experiencia del residente respecto al contratista.

P : Probabilidad de que el laboratorio diga aceptar tramo.

q : Probabilidad de que el laboratorio diga rechazar tramo.

Resultados:

(a) E_1 A_1 Cumple las especificaciones y paga el residente.

(d) F_1 A_2 Cumple las especificaciones no paga el residente.

(c) E_2 A_1 No cumple especificaciones y paga el residente.

(b) E_2 A_2 No cumple especificaciones y no paga el residente.

En orden de preferencia las tácticas del residente se ordenan con- a, b, c y d.

$$A, E, \succ A_2 E_2 \succ A_2 E_1 \succ A_1 E_2$$
$$a \succ b \succ c \succ d$$

Juego residente - contratista

I .- Residente

II .- Contratista.

Tácticas II.- A : Recomienda aceptar el tramo.

R : Recomienda rechazar el tramo.

Tácticas I :

$T_1 \quad (A,R) = \{A,R\}$

$T_2 \quad (A,R) = \{R,A\}$

$T_3 \quad (A,R) = \{R,R\}$

$T_4 \quad (A,R) = \{A,A\}$

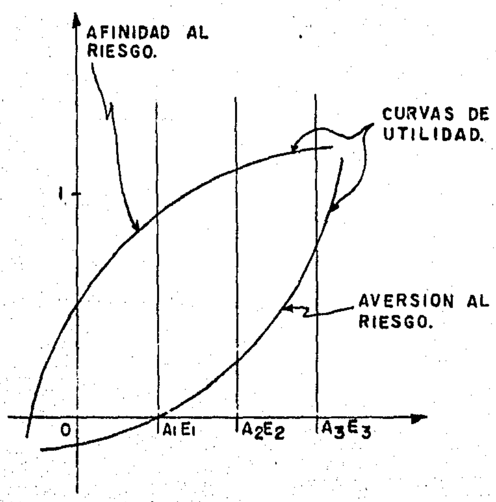
Planteamiento de la matriz de pagos.

$$
\begin{array}{lll}
 & & \begin{array}{cc} \quad\quad A \quad\quad & \quad\quad B \quad\quad \end{array} \\
T_1 & (A,R) = \{A,R\} & \\
T_2 & (A,R) = \{R,A\} & \\
T_3 & (A,R) = \{R,R\} & \\
T_4 & (A,R) = \{A,A\} &
\end{array}
\begin{bmatrix} Pa + qd & Pc + qb \\ Pc + qb & Pa + qd \\ Pc + qb & Pc + qb \\ Pa + qd & Pa + qd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3.4 \\ -3.4 & -2 \\ -3.4 & -3.4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}
$$

Después de aplicar criterios de dominancia.

$$= \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$

Los valores de las probabilidades de a, b, c y d se obtienen en base a técnicas para cuantificar la información de la experiencia --- (distribuciones de probabilidad subjetiva).



Suponiendo:

$a = 0, \quad b = -3 , \quad C = -6 , \quad d = -10$

$y \; P = 0.8 \; ; \; q = 0.2$

De la matriz de pagos anterior se obtiene:

$\bar{X} = \begin{bmatrix} 0, 0, 0, 1 \end{bmatrix}$

$\bar{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Revisando la sensibilidad con:

$a = 0 \; ; \; b = -1 \; ; \; c = -2 \; ; \; d = -10$

$$\begin{bmatrix} \cancel{-2} & \cancel{-1.8} \\ \cancel{-1.8} & \cancel{-2} \\ -1.8 & \cancel{-1.8} \\ \cancel{-2} & \cancel{-2} \end{bmatrix}$$

$\bar{X} = \begin{bmatrix} 0, 0, 1, 0 \end{bmatrix}$

$\bar{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

En el caso real, la solución fué rechazar.

Nunca se debe dar por satisfecho con una solución, siempre es mejor hacer un análisis de sensibilidad.

1.8.- JUEGOS MULTIETAPICOS

Las tácticas de los jugadores en estos juegos multietápicos están - en función de las tácticas de un jugador ficticio que es la naturaleza o el azar. Por otra parte, también, no solamente se gana una - cantidad específica sino la posibilidad de ganar más en el futuro.

Reglas del juego:

En tanto los dos jugadores tengan capital el juego puede proseguir. Además, el seguir o no el juego está sujeto al azar (con un volado) si, las dos monedas son iguales gana una cantidad el jugador I, si- son desiguales gana el jugador II.

A las soluciones de éstos juegos se llega por medio de aproximacio nes sucesivas. Para ello planteamos la igualdad entre el juego y -- su valor.

$T_i = v_i \quad i = 1,2,3,4$

5 pesos

(~~5 , 0~~)

(4 , 1) ______ T_1

(3 , 2) ______ T_2

(2 , 3) ______ T_3

(1 , 4) ______ T_4

(~~0 , 5~~)

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 + \frac{1}{2} T_2 \\ -1 + \frac{1}{2} T_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2} T_1 & -1 + \frac{1}{2} T_3 \\ -1 + \frac{1}{2} T_3 & 1 + \frac{1}{2} T_1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2} T_2 & -1 + \frac{1}{2} T_4 \\ -1 + \frac{1}{2} T_4 & 1 + \frac{1}{2} T_2 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2} T_3 & -1 \\ -1 & 1 + \frac{1}{2} T_3 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 + \frac{1}{2} V_2 \\ -1 + \frac{1}{2} V_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2} V_1 & -1 + \frac{1}{2} V_3 \\ -1 + \frac{1}{2} V_3 & 1 + \frac{1}{2} V_1 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \quad v_2 + 1 & \frac{1}{2} \quad v_4 - 1 \\ \frac{1}{2} \quad v_4 - 1 & \frac{1}{2} \quad v_2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$v_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \quad v_3 + 1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \quad v_3 + 1 \end{bmatrix}$$

Una vez que se ha planteado la igualdad $T_i = v_i$, esto es, que a partir de las matrices en el segundo miembro se obtiene el valor del juego, (que es así como deben interpretarse las igualdades), la solución se obtiene por aproximaciones sucesivas:

1.- Se parte de $v_i = 0$

2.- Se resuelve cada una de las matrices mediante la expresión ya conocida $v = \dfrac{|\bar{A}|}{\bar{e} \quad \bar{A}^* \quad \bar{e}^t}$

3.- Se sustituye el valor de v_i obtenido en el paso anterior en las matrices correspondientes.

4.- Se usa nuevamente la expresión del paso 2 y se sustituyen valores de v_i en las matrices.

5.- Una vez que se logra coincidencia entre los valores de v_i obtenidas en dos iteraciones sucesivas (tomando en cuenta la tolerancia especificada) se dan por buenos estos valores de v_i.

6.- Se obtienen los valores finales de todas y cada una de las matrices.

7.- Se encuentran las estrategias $\bar{X}_i$ y $\bar{Y}_i$ mediante las expresiones $\bar{X} = \dfrac{\bar{e} \quad \bar{A}^*}{\bar{e} \quad \bar{A}^* \quad \bar{e}^t}$, $\bar{Y} = \dfrac{\bar{A} \quad \bar{e}^t}{\bar{e} \quad \bar{A}^* \quad \bar{e}^t}$

Es evidente que si en vez de ser matrices 2 x 2 son de n x n con - $n \geq 3$ entonces los siete pasos anteriores se efectuarán pero -- usando la programación lineal de las fórmulas de Von Newmann.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v = \frac{|\bar{A}|}{\bar{e} \quad \bar{A}^* \quad \bar{e}^t} = \frac{0}{\bar{e} \quad \bar{A}^* \quad \bar{e}^t} = 0$$

Conclusiones:

El juego es "justo", pues $v = 0$, la matriz de pagos es simétrica y las estrategias son simétricas. Se cae pues, en un caso trivial.

Ejemplo:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 + \frac{1}{2} T_2 \\ 3 & 2 - \frac{1}{2} T_4 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} -3 & -2 + \frac{1}{2} T_1 \\ 2 + \frac{1}{2} T_3 & 3 - \frac{1}{2} T_4 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 5 + \frac{1}{2} T_2 & -2 + \frac{1}{2} T_3 \\ -1 + \frac{1}{2} T_1 & 2 + \frac{1}{2} T_4 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 + \frac{1}{2} T_1 \\ 5 & -2 + \frac{1}{2} T_3 \end{bmatrix}$$

1a. iteración.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \; ; \; |\bar{A}_1| = 13; \; \bar{e} \; \bar{A}_1^* \; \bar{e}^t = 4; \; v_1 = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} ; \quad v_2 = 2; \quad \bar{e}\ \bar{A}_2^*\ \bar{e}^t = 0; \quad v_2 = 2$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} ; \quad |\bar{A}_3| = 8; \quad \bar{e}\ \bar{A}_4^*\ \bar{e}^t = 4 ; \quad v_3 = \frac{8}{4} = 2$$

$$v_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} ; \quad |\bar{A}_4| = -16 ; \quad \bar{e}\ \bar{A}_4^*\ \bar{e}^t = 8 ; \quad v_4 = -2$$

2a. iteración.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3+1 \\ 3 & 2+1 \end{bmatrix} ; \quad |\bar{A}_1| = 12 ; \quad \bar{e}\ \bar{A}_1^*\ \bar{e}^t = 6 ; \quad v_1 = 2$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -3 & -2+1.625 \\ 2+1 & 3+1 \end{bmatrix} ; \quad |\bar{A}_2| = -10.875 ; \quad \bar{e}\ \bar{A}_2^*\ \bar{e}^t = 3.625; \quad v_2 = -3$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 5+1 & -2+1 \\ -1+1.625 & 2-1 \end{bmatrix} ; \quad |\bar{A}_3| = 6.625 ; \quad \bar{e}\ \bar{A}_3^*\ \bar{e}^t = 6.625 ; \quad v_3 = 1$$

$$v_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2+1.625 \\ 5 & -2+1 \end{bmatrix} ; \quad |\bar{A}_4| = -21.125 ; \quad \bar{e}\ \bar{A}_4^*\ \bar{e}^t = 10.625 ;$$

$$v_4 = -2$$

3a. iteración

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \; -1.5 \\ 3 & 2 + 1 \end{bmatrix} ; \quad v_1 = 3$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -3 & -2 + & 1 \\ 2 + 0.5 & 3 + & 1 \end{bmatrix} ; \quad v_2 = 2.5$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 5 - 1.5 & -2 + \; 0.5 \\ -1 + 1 & 2 - 1 \end{bmatrix} ; \quad |\bar{A}_3| = 3.5 \; ; \quad \bar{e} \; \bar{A}^* \; \bar{e}^t = 3 \; ;$$

$$v_3 = \frac{3.5}{3} = \quad v_3 = 1.166$$

$$v_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 + \; 1 \\ 5 & -2 + \; 0.5 \end{bmatrix} ; \quad |\bar{A}_4| = -19.5 \; ; \quad \bar{e} \; \bar{A}^* \; \bar{e}^t = -6.5$$

$$v = \frac{-19.5}{-6.5} = 3$$

4a. iteración

$v_1 = 0.8$

$v_2 = 1.8$

$v_3 = 2.4$

$v_4 = 2.4$

CAPITULO II

JUEGOS COOPERATIVOS ENTRE DOS PERSONAS

II.1.- En los juegos cooperativos los jugadores solo tienen intereses comunes. Un piloto de un avión y el operador en la torre de control están implicados en un juego cooperativo en el que comparten un solo objetivo común, un aterrizaje seguro. Dos veleros maniobrando para evitar una colisión y una pareja de baile, están también jugando un juego cooperativo.

El problema en juegos cooperativos consiste en coordinar los esfuerzos de los dos jugadores eficientemente, donde la comunicación entre ellos debe ser efectiva.

Una comunicación que conduce a acuerdos sin valor y que puedan romperse fácilmente no es suficiente. La cooperación implica ''algo '' mas, y debe incluir no solo la promesa sino también su realización.

Así para tratar de encontrar ese ''algo ''se puede preguntar: Que resultado nos dicta la razón si, en un juego, hay posibilidades de acuerdos en las estrategias a seguir por cada jugador y si estos acuerdos se pueden mantener? Un juego cooperativo entonces, se puede definir como el que requiere un entendimiento previo para llegar a acuerdos obligatorios.

Por consiguiente, no hay duda que el hacer promesas ingenuas - como maniobras en lo que es realmente una batalla no - cooperativa-- se tiene que llevar a cabo lo que se promete. De manera que si esa- promesa es digna de hacerse deben existir ganancias reales a adquirirse de el ''quid pro quo ''.

No todos los juegos, por lo tanto ofrecen un campo propicio - para la cooperación. Los que lo propician, son aquellos en los cuales ambos jugadores pueden ganar relativamente de acuerdo a sus posibilidades no - cooperativas.

Los participantes de un juego de dos personas por una suma-cero no tienen razon para cooperar. La teoria de los juegos cooperativos nos dice que cuando dos personas tienen una decisión de una suma no-cero, existe un elemento de interés común.

Sin embargo, para que el interés común exista, ello depende de un entendimiento sobre la distribución de las posibles ganancias.A menos que haya un acuerdo no solo en las estrategias sino también- en la división de los frutos de una acción conjunta.

En los juegos cooperativos existe un rasgo característico en - la teoría del juego que desaparece, LA INCERTIDUMBRE.

Una vez que los jugadores se han puesto de acuerdo (yo haré esto, tu aquello), ellos ya saben que tendrán sus posibles ganancias.

Cualesquiera que sean los problemas para identificar la solución de un juego cooperativo, el encontrar un principio racional por el cual cada jugador pueda suponer una hipótesis sobre la estrategia del otro y que no sea una de ellas. Esto último puede considerarse como el problema fundamental teórico de los juegos no cooperativos producidos por la coincidencia de la interdependencia con la incertidumbre. Aqui tenemos interdependencia pero negociación abierta.

El viejo problema es remplazado por uno enteramente diferente pero igual de grande . El establecer un principio para que en conjunto se pueda escoger un par de ganancias las cuales son en algún sentido lo mejor para ambos.

En un juego cooperativo existen grupos de resultados que son peores que algunos otros, pero de estos últimos, que son elegibles pueden favorecer a un jugador mas que al otro. Estos resultados elegibles son aquellos que satisfacen la famosa norma de Optimización de Pareto. La pregunta es, cual de ellos se debe escoger? Si los jugadores no se ponen de acuerdo en este aspecto, la empresa de cooperación fracasará. Quizas puedan escoger un resultado elegible en particular mediante algún principio de "Racionalidad en conjunto ", es más fácil decirlo que hacerlo.

El único canon sin objeción de ''Racionalidad en conjunto es - es la Norma de Pareto'', y todos los resultados de los arreglos elegibles satisfacen este punto por igual.

Por consiguiente la teoría del juego cooperativo, tal como la - teoría de selección social en la economía de asistencia social, se- encuentra con un impase en la notoria falta de perfección en los niveles de resultados que proporciona el principio de ''optimización - de pareto ''.

La teoría del juego cooperativo, sin embargo, no es una teoría- de selección social. En una interpretación de esta teoría los individuos son miembros de una sociedad, les guste o no, en otra inter-- pretación (paternalística) no se les considera como capaces de de- cidir. En un juego cooperativo, por otro lado, un jugador es un agente muy autónomo que siempre tiene como una de sus estrategias la op- ción de retirarse de las negociaciones. No perderá su ciudadanía por esto, simplemente las posibles ganancias del juego.

Esto tiene por consecuencia que por cada jugador hay límites - en lo que puede ser negociable: Estos límites estan delineados por- la ganancia que un jugador podría ganar por su propia cuenta sin la firma de un acuerdo. Estos Límites de negociación no tienen similar en la teoría de Seguridad Social.

Hay que notar que los límites dentro de los cuales los acuer-- dos pueden negociarse cooperativamente son establecidos por las uti lidades de las estrategias de la teoria no-cooperativa.

II.2.- EL GRUPO ALCANZABLE.

Cualquier juego en forma normal está completamente especificado por un grupo de estrategias puras para cada jugador y el arreglo de-- las posibles ganancias correspondientes a la selección de estrategias por los jugadores. En un juego de dos personas las ganancias pueden- mostrarse en una matriz en la cual los renglones estan en relación -- con las estrategias puras de uno de los jugadores y las columnas con las estrategias del otro jugador.

Cada entrada en la matriz de pagos es un par de ganancias (u_A, - u_B). Estos pares (u_A, u_B) asociados con varios pares de estrate --- gias pueden marcarse en una gráfica con u_A y u_B en los dos ejes.

Diremos que esta gráfica muestra el espacio de las ganancias pa- res, o simplemente que muestra "ganancia-espacio". Ganancia-Espa- cio es el grupo en el cual la mayor parte de la teoria cooperativa se basa.

Si cada jugador tiene dos estrategias puras, habrá cuatro pares- de ganancias de esta clase a marcarse; si el jugador A tiene m y el jugador B tiene n estrategias, habrán pares de ganancias m n.

A estos puntajes mostrando pares de ganancias por diferentes selecciones de estrategias debemos ahora agregar los puntos de uno o más jugadores que usaron una estrategia combinada. Tenemos así el todo del Grupo Posible No-Cooperativo.

La cooperación agranda el grupo posible no-cooperativo y hace posible ganancias pares. Mostraremos esto con un ejemplo:

LA BATALLA DE LOS SEXOS.

Consideremos la matriz de pagos.

		S	
		D	B
H	D	(2,1)	(-1, -1)
	B	(-1, -1)	(1, 2)

Ella (s) prefiere ir al Ballet (B) ,el (H) a las carreras de perros (D); cada uno prefiere ir dondequiera con el otro, en lugar de ir solo o sola a su espectáculo favorito. Vamos a suponer primero que el juego se juega no-cooperativamente.

Ellos tienen una disputa y cada uno tiene que escoger ignorando si el otro (otra) va a cambiar de parecer.

(Pero sabiendo, sin embargo, las ganancias). Las ganancias pares que corresponden a los pares de estrategias puras son J, K y L (dos veces) ver figura II.1

Supongamos que ella va a los perros y él arriezga entonces - las posibles ganancias de él y ella se dan por puntajes compuestos por L, J. Por ejemplo si ella juega D y el juega D y B con probabilidades de mitad y mitad (50%), la ganancia de él es $\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times -1 = \frac{1}{2}$ La ganancia de ella es $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times -1 = 0$ lo cual da una ganancia par (1/2, 0), esto es el punto N.

Si solo ella arriezga y el juega B por seguro, ellos obtienen gananacias pares a lo largo de L-K .

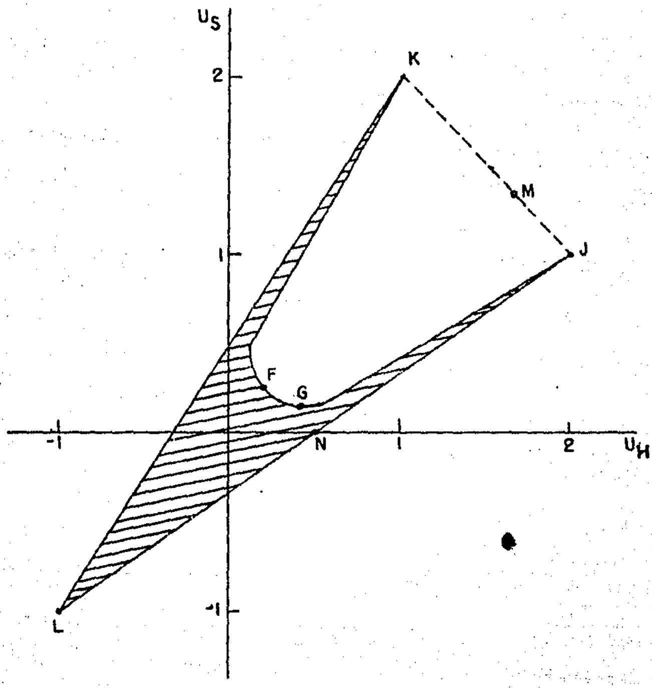
(Cual es la localización de las ganancias pares si ella juega B y - el arriezga?).

Supongamos ahora que ambos jugadores usan estrategias combinadas. Digamos que ambos tiran una moneda imparcial y juega D si cae "cara ". Entonces cada una de las estrategias par (D, D), (D, B), -- (B, D), (B, B) tiene la probabilidad $(1/2)^2 = \frac{1}{4}$ Por lo tanto la posible ganancia de (H) es: $\frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} (-1) + \frac{1}{4} (-1) + \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$ (II.1)

Asi la de (s) ella, que establece el punto F. Del mismo modo si cada uno tienen un aparato de azar (digamos una ruleta) la cual produce resultados con probabilidad $\frac{2}{3}$, y juega D siempre y cuando este resultado se produzca, la posible ganancia de (s) es :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 2 + \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ (-1) + \frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\ (-1) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 1 = 5/9$$

y la de (s) es 2/9 : el punto G.



II.1 LA BATALLA DE LOS SEXOS.

Generalmente riesgos (elección al azar) de esta clase, en los cuales la posibilidad de D es la misma para ambos jugadores, genera la línea curva K F G J en el espacio de ganancia. Finalmente, - puede demostrarse que si las posibilidades de los dos jugadores jugando D no son iguales, uno obtiene el puntaje de la parte sombreada de la figura L K F G J L.

Notamos dos puntos antes de proseguir. Primero, es esencial en los cálculos de ganancias anotados en los experimentos de azar de - los dos jugadores que dichos experimentos sean independientes. Independencia de las dos elecciones al azar se define como la posibilidad de que uno obtenga un resultado del juego D y este resultado no se afecta si el otro obtiene o no un juego D.

La independencia se asegura, si los dos experimentos no estánrelacionados físicamente o por obtención de información. Segundo -- hay que recordar que las ganancias a las estrategias, ejemplo, la - ganancia 2 a (H) por el par (D, D) pueden por si mismas ser ganan-- cias posibles; por eventualidades (como autobuses perdidos, indis-- posición de la prima - dona) pueden ser movidas posibles en el juego. Sin embargo se pueden tomar valores posibles de valores posi--- bles aritméticamente (multiplicando cada uno de estos por la probabilidad apropiada y sumando), así que la ecuación II.1 es perfectamente válida.

Adoptemos por un momento la interpretación de frecuencia re--- lativa de probabilidades combinadas. Intuitivamente, si él y ella -

tienen una serie de compromisos (y ellos no se cansan de sus espectáculos favoritos o de ellos mismos), ellos deberían turnarse entre (D, D) y (B, B). Ahora independientemente de la moneda al aire (volado) o lo que sea, resultan algunas veces (D, B) y (B, D) pero las estrategias combinadas correlacionadas están libres de este inconveniente. Supongamos otra vez que (H) él juega D con probabilidad $\frac{2}{3}$, los D compromisos decidiéndose por algún aparato de azar o de otro modo, y suponiendo que (s) ella hace lo mismo. Estas estrategias combinadas se consideran correlacionadas si los compromisos D son los mismos en ambos casos.

La correlación es claramente imposible sin que exista alguna relación entre los dos experimentos: las ruletas pueden estar conectadas o un jugador simplemente informado del resultado del experimento del otro y correlacionar su juego de esta manera. En el caso particular en el cual la probabilidad de D es 2/3,

$$u_A = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 5/3 \text{ y } u_B = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 = 4/3$$

y la ganancia par $(u_A, u_B) = (5/3, 4/3)$, punto M.

La localización de ganancias pares resultando de todas las estrategias combinadas perfectamente correlacionadas es la línea de puntos K J. Las estrategias combinadas correlacionadas imperfectas dan puntajes dentro de K F J N.

Esto se localiza geométricamente en la región comprendida dentro de los puntos J, K, L. Algebraicamente, es el grupo de los promedios probados de las ganancias pares correspondientes a las estrategias pares.

Pero entonces la equivalencia en el dibujo convexo de las ganancias pares de las estrategias puras; o finalmente es el grupo de ganancia pares obtenidas por todas las combinaciones de probabilidades de los pares de las estrategias puras. El resto es simple. Mediante la cooperación los jugadores pueden obtener todos estos puntajes porque ellos pueden combinar las estrategias pares de cualquier manera, perfectamente correlacionadas, imperfectamente correlaciondas o sin correlación alguna. Sin cooperación, las combinaciones correlacionadas se descartan; consecuentemente, sin cooperación, el grupo posible es solamente un sub-grupo en el dibujo convexo. En éste caso, éste subgrupo es la región sombreada en la figura II.1

Estas consideraciones producen una definición formal de un juego-cooperativo como un juego en el que el grupo de ganancias pares posibles es el dibujo convexo, o igualmente, el grupo de todas las combinaciones probables de las ganancias pares de un grupo dado de estrategias pares.

Nótese que en la versión no-cooperativa del juego aún los puntos del área sombreada L, K, F, G, J son solo posibles en el sentido de que ellos podrían presentarse.

Pero para el punto K, digamos, para poder lograrse sería necesario - que los dos jugadores acertaran (o estimaran) lo que el otro piensa. K es meramente una ganancia lógica posible; no está al alcance - en el sentido que el par de ellos puedan decidirse por K, no es posible escogerla.

Si el par tomara una decisión el juego sería ipso facto, cooperativo, contrario a nuestra suposición.

Consecuentemente, las perspectivas que la cooperación nos ofrece tiene mayor promesa de dos maneras: Primero, los resultados de -- un juego cooperativo son objeto de la preferencia (elección) del -- jugador mientras que en un juego no - cooperativo nada puede hacerse para asegurar un resultado mas que otro. Segundo, hay mas posibles resultados.

II.3.- EL GRUPO DE NEGOCIACION

En un juego cooperativo entonces, los jugadores pueden escoger - juntos una ganancia par; y su elección es mas amplia que en el caso - de que no hubiera comunicación y no pueden correlacionar sus estrategias. Ahora nos preguntamos: Que punto del grupo posible deben escoger ? En otras palabras, cual es la solución de un juego cooperativo de dos personas ?

Dos principios de racionalidad excluyen ahora partes del grupo posible como soluciones aceptables.

En el caso de un juego cooperativo entre dos personas , estos dos principios no disminuyen el grupo a un punto único, la solución se mantiene subdeterminada. Sin embargo, veremos más tarde que los mismos dos principios nos pueden conducir al otro problema: excluyen tan perfectamente que se pueden quedar sin solución.

El primer principio es " La Optimización de Pareto ". De acuerdo a este princípo, el par de jugadores, si son racionales, no escogeran cierta ganancia par si existe otra posibilidad de que pueda tener una posible utilidad mayor para un jugador y otro tanto para el otro.

Geométricamente, el criterio de Pareto limita soluciones posibles a la frontera Nor - Este del grupo posible.

Este principio puede considerarse como uno de racionalidad de los dos jugadores considerados como un par.

El segundo principio es el " andar solo ".
Supongamos que el jugador A puede lograr utilidad posible v_A sin cooperar; entonces, si la juega racional, el nunca aceptará una ganancia par (u_A, u_B) en el cual $u_A < v_A$.

Es verdad, si una solución propuesta cooperativa da u^*_A el puede mantenerla si avalúa la cooperación.

Pero no hay lugar para esta ética dentro de nuestra estructura ya que en ella, las ganancias contienen todos los valores de los jugadores.

La cantidad v_A, (la ganancia posible que A puede lograr) se considera una perspectiva de hierro, una posibilidad que A puede estar segura de ganar aún si B se pone difícil. Es también, evidentemente, la más alta ganancia segura que A puede lograr mediante la selección de su estrategia no cooperativa.

En otras palabras, v_A es la ganancia max min de A, o el nivel máximo de seguridad de todas sus estrategias o el nivel de seguridad de A.

Este segundo principio puede o no puede estar en la frontera Nor - Este al cual el primer principio les dice a los jugadores que confinen su atención. En la Batalla de los Sexos el nivel de seguridad de él y de ella es más alto, es -1. Una mirada a la figura II.1 muestra que todos los puntos de la frontera Nor - Este K - J (el grupo Optimización de Pareto) les da a él y a ella considerablemente mas que -1.

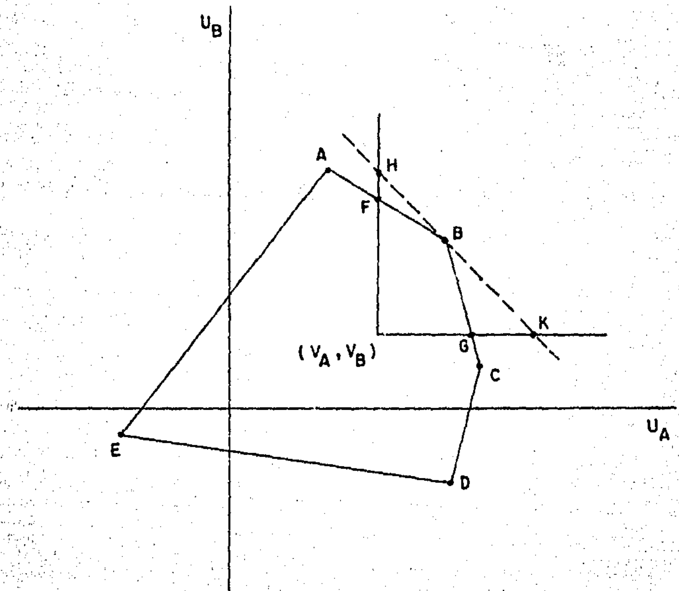
De manera que en este juego del " andar solo " no afecta. La figura II.2 representa un juego cooperativo en el cual los niveles de seguridad sí llegan. A B C D E son las ganancias pares que corresponden a varias estrategias pares del juego y A B C D E el ----

casco convexo, del grupo alcanzable del juego cooperativo con estas estrategias. El par de jugadores no pueden racionalmente escoger un punto fuera del segmento de dos facetas A B C (la frontera Nor - - Este o el grupo Optimo de Pareto .) Pero solo los puntos en la porción F B G pasan los requisitos $u_A = v_A$, $u_B = v_B$. El grupo de puntos a satisfacer ambos principios (F B G) se le conoce como -- el grupo Negociable. Von Newmann y Morgenstern dicen que cualquier- solución debe encontrarse en este grupo y por esta razón se le conoce también como la solución del grupo de Von Newmann y Morgenstern.

Vemos que la solución de V N M de un juego cooperativo de dos- personas es en general indeterminado. En particular la indeterminación esencial del criterio de Pareto tan familiar en la Economía - de Bienestar Social, a pesar de que se ha mitigado por el requerimiento que $u_A \geq v_A$, $u_B \geq v_B$, no ha desaparecido.

V N M pensaron que argumentos de racionalidad no podrían identificar un punto en particular como la solución a pesar de que en - todo juego el factor psicológico y otros extraños a una teoría de - tomar decisiones racionalmente, a menudo producen un resultado determinado.

Anticipándonos, hacemos la observación de que en un juego cooperativo de dos personas en el cual los dos jugadores son comerciantes cambiando artículos, el grupo de negociación es el correlativo en espacio de ganancia de La Curva de Contrato.



II.2.- EL GRUPO DE NEGOCIACION.

Estaremos tratando no solo con juegos en los cuales los resultados son cambios de artículos, sino también juegos, en los cuales las ganancias son recibos monetarios. Si las utilidades de los jugadores son lineales en dinero, entonces, sin la pérdida de generalidad, sus utilidades pueden escalarse y cerradas a cero de manera que ellas puedan identificarse numéricamente con sus recibos monetarios. Llamése un juego así como un " juego por dinero ". Supongamos que en un Juego por Dinero los sobornos están dentro de las reglas, ésto es, los jugadores pueden hacer acuerdo para re distribuir sus recibos después del juego. El grupo Optimización de Pareto es la línea de 135^{o} a traves del punto mas Nor - Este del grupo alcanzable. Es la línea discontinua en la figura II.2 y el grupo de negociación se convierte en el segmento H K.

II.4.- REGATEOS

Nos hemos quedado con un problema. Como se puede aislar un punto del grupo de negociación como la solución de un juego cooperativo ?

El procedimiento usual, descartado por mucho tiempo pero recientemente vuelto a utilizarse es por comparación de utilidades interpersonales de utilidad. El intento al que ahora revisamos (N A S H) es una teoría del juego más que una selección social teórica, evita esta última, y capitaliza en la noción de la fuerza estratégica que se confiere a un individuo por medio de su nivel de seguridad no -- cooperativo.

Considérese un juego de dos personas en el cual las estrate--- gias son decisiones para cambiar artículos bajo varios términos específicos. A éste juego se le conoce como un Juego de Intercambio. Supongamos también que hay solo una cosa que puede pasar en el caso que no se realice un intercambio. Entonces el juego de Intercambio- se le llama un Juego de Regateo. En este juego no hay alternativas abiertas a los jugadores en sus funciones no - cooperativas en particular, no hay represalias si no se toman sus términos. Ellos se - tienen que ir a casa y al final del día son todavía los dueños de - lo que trajeron al mercado. El par de ganancias si el resultado es no - intercambio, si los jugadores regresan a casa con sus artícu-- los, se le llama el STATUS QUO. Es de notarse que éste término describe un punto en el espacio de ganancia y no un par de artículos.

Un juego de regateo está completamente especificado por lo siguiente:

(1) La región cooperativamente alcanzable, digamos R en el espacio de ganancia.

(2) El punto STATUS QUO, (S_A , S_B)

Los puntos en R muestran las utilidades posibles que los jugadores obtendrían después de llegar a diferentes acuerdos.

Nótese que esta definición no menciona de los artículos a cambiarse. Consecuentemente, también se aplica si los resultados no - son intercambios (cambios de artículos) pero por recibos de sumas de dinero por cada jugador o cualquier cosa que ocurra que de lu-- gar a utilidad. Por lo tanto, cualquier juego cooperativo puede -- considerarse como un juego de regateo siempre que el efecto de una falta de acuerdo envía a los jugadores a un bien - definido STATUS QUO. Es claro ahora que la Batalla de los Sexos fué un juego de -- regateo particularmente simple en el cual un intercambio definido se considera. Obsérvese en seguida que las ganancias del STATUS -- QUO S_A, S_B deben ser los niveles de seguridad de los jugadores v_A, v_B en este juego cooperativo. El jugador A puede estar seguro de S_A -- Esta parte de su ganancia lo espera en casa . Segundo, él no puede- estar seguro de mas, no importa cual estrategia use, el intercambio que ofrezca, o ninguno, B lo puede limitar a S_A rehusando intercambio.

EL JUEGO DEL LAVADO.

Aqui esta un juego para ilustrar estos conceptos que presentan a él y a ella años más tarde.

Lo que se va a intercambiar es la preparación de las comidas y el lavado de los platos. La primera estrategia α_1 de (él) es --

sentarse mientras ella hace todo; en α_2 él propone lavar a cambio de la preparación dela cena por ella; en α_3 él se ofrece lavar y preparar la ensalada mientras ella cocina el resto de la comida, Las estrategias de ella B_1, B_2, B_3 consisten en el ofrecimeinto de llevar a cabo los intercambios recíprocos a aquellos propuestos en α_1, α_2, α_3. Si ellos no estan de acuerdo a uno de estos intercambios estarán obligados a comer comida china comprada para llevar a casa, una posibilidad que ambos no miran con poco entusiasmo. Supongamos también que a él no le gusta preparar la ensalada y a ella no le guste la posibilidad de que él no haga nada . las ganancias pueden ser como sigue:

S

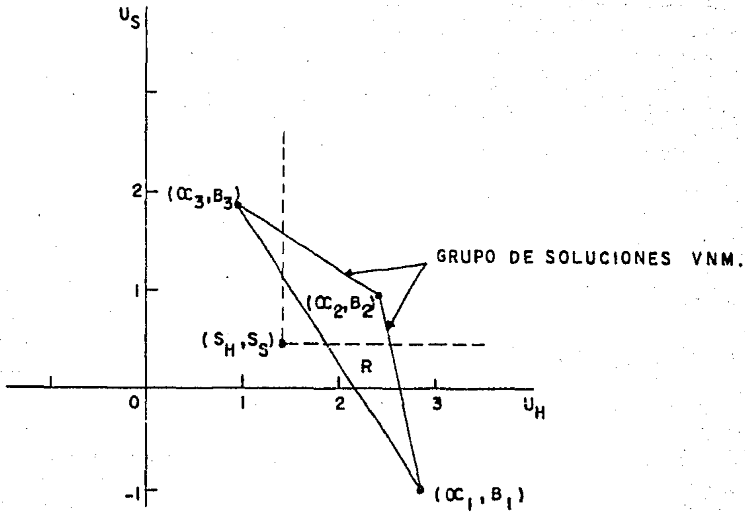
		B	B	B
	α_1	$(3, -1)$	$(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
H	α_2	$(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(2\frac{1}{2}, 1)$	$(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	α_3	$(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(1, 2)$

Las ganancias fuera de la diagonal muestran las posibles utilidades si sus demandas no son aceptadas. No importa cual demanda no sea aceptada. Si ellos no se ponen de acuerdo los resultados son --

siempre los mismos: La comida comprada. Es por ello que las entradas de fuera de la diagonal son todas iguales. La región alcanzable R en espacio de ganancia y el punto de STATUS QUO (S_H, S_S) estan en la figura II.3.

Nótese que la alternativa de que a ella le disguste la perspectiva de la comida china más que a él no está expresada por su utilidad de no - intercambio ($\frac{1}{2}$) siendo menos que el (1 $\frac{1}{2}$) de él que ya que las escalas y orígenes de las funciones de utilidad individual son arbitrarias y un "fortiori" los índices de utilidades de los dos no son directamente comparables. Pero la relación de él 1 $\frac{1}{2}$ a el 1, 2 $\frac{1}{2}$ ó 3 él podría lograr en otros resultados, cuando se comparan con la relación correspondiente para ella ($\frac{1}{2}$ en relación a - 1, 1, 2) expresa algo sobre el grado de aversión con el cual cada uno ve el STATUS QUO.

Puede parecer no - natural llamar los variados ofrecimientos de intercambio como " Estrategias " de los protagonistas. Parece tanto que H (él) piense jugar α_3 si S (ella) esta dispuesta a jugar B_2. No tendría una mejor especificación de su estrategia, digamos, " si ella esta dispuesta a preparar toda la comida porque él no sugiere preparar la ensalada? " Donde está la estrategia al revelar los términos mínimos al empezar ? .



II.3.- JUEGO DE LAVADO.

Las negociaciones sobre el lavado son realmente un negocio franco y abierto. Todas las cartas están sobre la mesa. La teoría de los juegos de Regateo no dice lo que podemos escuchar si fueramos testigos de estas negociaciones - argumentos basados en comparaciones interpersonales de utilidad, o en principios de juego limpio, escenas de coraje o lagrimas, súplicas de modelos más convencionales ? Pero está claro sobre lo que no observaríamos: Las maniobras disimuladas Típicas de Regateo real en el cual cada contendiente empieza por exagerar sus términos reales verdaderos y bajando solo si es necesario.

Esta es la inevitable consecuencia de una fundamental suposición de la teoría de los juegos, que cada jugador conoce las preferencias del otro.

Es quizás en los juegos de regateo que esta suposición alcanza su nadir de realismo, ya que mucho del sabor del verdadero regateo radica en tener que calcular en que términos el otro está preparado a llegar a un arreglo. La teoría no se propone describir conducta, pero las formas de elección no cooperativas y cooperativas por seres racionales concientes del interes, es de cada uno de los jugadores.

Nash propone la siguiente formula para arbitraje entre oponentes recalcitrantes, Cualquier puntaje (u_A, u_B) en R, considérese la cantidad $(u_A - S_A) (u_B - S_B)$ El producto de las ganancias de los dos jugadores son incrementos medios desde el STATUS QUO, o el producto de sus ganancias.

Ahora se calcula el (u_A, u_B) en R que maximiza este producto sujeto a las restricciones $u_A \geq S_A$, $u_B \geq S_B$. La solución de Nash para el arbitraje de un juego de Regateo es la colocación de artículos (o lo que se está negociando) lo que porduce este máximo (restricto) producto de las ganancias.

Hasta el momento se ha estado viendo el espacio de ganancias, debemos notar cuidadosamente que Nash define su solución de Regateo en el espacio de resultados.

Es mejor pensar de los resultados de un juego de regateo (puntaje - en el espacio de resultados del juego) como siendo pares de canas-- tas de artículos uno para cada jugador. ""Artículo "" se interpreta con bastante amplitud como dinero, servicios de lavado o cual--- quier otra cosa que produce utilidad.

En algunos resultados se puede recibir cantidades negativas de- algunos artículos, es decir, uno es el abastecedor de ellos. Nos referiremos a estos resultados de juegos cooperativos (pares de canas tas) como "" distribuciones "".

Es claro que así como hay un grupo realizable o factible en el - espacio de ganancia, hay también un grupo factible de distribuciones en el espacio de resultados. Para referencia, definiremos ""deman-- da "" . Una demanda es una especificación por un jugador (de una - canasta de artículos para él) o su porción de una distribución. Esto puede ser \$ 50 por semana, una cafetera nueva , 42 horas por semana, - 1 donde el último punto significa que el sindicato le da a la directiva una garantía de no presentar una nueva reclamación por- 12 meses. Existe una suposición de que el jugador estará de acuerdo si el otro ofrece darle por lo menos las cantidades especificadas en su demanda; por ejemplo, conceder al sindicato \$ 50 por semana y la cafetera a cambio de 41 horas de trabajo y la garantía de los 12 meses. Un par de demandas especifica una distribución. Si la distribución es factible (los jugadores tienen el poder de hacer disponi--- bles las cantidades totales de los artículos que especifican).

Las demandas se llaman compatibles.

La solución de acuerdo a Nash del Juego de lavado es (α_2, B_2) (Ella prepara toda la comida, el lava) con probabilidad 1 1/12 y - (α_1, B_1) (Ella hace todo) con probabilidad 1/12. Las ganancias son (2 $\frac{3}{8}$, 1 $\frac{1}{12}$). Nash pretende que esta es una buena solución porque satisface las siguientes cuatro condiciones que él mantiene - como deseables a priori :

1.- (La Optimización de Pareto) Una distribución no se debe escoger si hay otra factible y la cual un jugador prefiere y el otro no se opone.

2.- (No - Comparabilidad Inter - Personal) Supongamos que re - escalamos o empezamos la función de utilidad de un individuo; esto no debe cambiar la solución.

3.- (SIMETRIA) Un juego de regateo será simétrico si, en términos de índices legítimos de utilidad, R sería simétrico alrededor de la línea de 45^{o}. Si el juego es simétrico, la solución, de - acuerdo a Nash, proporciona a los jugadores ganancias iguales en términos de simetrizar los índices de utilidad.

4.- (Independencia de Alternativas Irrelevantes) Supongamos que quitamos ciertos intercambios del juego, digamos que el gobierno impone una congelación de salarios o un contendiente es despojado de sus artículos, entonces si la solución anterior esta disponible, debe tomársele en cuenta.

Condición (1) La Optimización de Pareto está obviamente satisfecha por la solución de Nash ya que si hubiera un resultado con ganancias u_A, u_B una mas grande y una tan grande como las ganancias - de la solución Nash, entonces está última no llevaría el producto - de los incrementos de las utilidades al máximo, contrario a su definición. Nótese que las restricciones a los incrementos al máximo -- ($u_A \geq S_A$, $u_B \geq S_B$) junto con el hecho de que $S_A = v_A$, $S_B = v_B$, significa que las ganancias de Nash constituyen una solución V N M- (solución de Von Newmann y Morgenstern) y estan en el grupo de negociación ya que también la solución Nash es Optimización de Pareto y satisface los niveles de seguridad de los jugadores.

Condición (2) (No Comparabilidad Interpersonal).

A menudo se cree que las soluciones de los problemas de selección de grupo no deberían depender en comparaciones interpersonales de utilidad esto es, no deben depender en las cantidades absolutas- de utilidad asignadas a los dos individuos, en el siguiente sentido.

Considerando cualquiera de los dos resultados, x, y, la elec-- ción de x ó y para el grupo debe depender solamente en la preferencia de " B ". NO en cuanto cada uno guste dicha preferencia.

La idea que respalda esto es positiva: A él no le gusta esto mas -- que a ella le gusta aquello, no tiene significado o por lo menos no verificable: De acuerdo a este punto de vista las reglas sólidas no se pueden hacer sobre estas bases débiles.

Por otro lado, parece que hacemos precisamente estos juicios-- en familia, corporaciones y vida política y que una teoría seria de be permitir espacio para tales juicios, su papel negativo está limi tado a desarraigar inconsistencias. Nótese que prohibiendo comparaciones interpersonales no es la misma cosa que negar la determinación única del índice de utilidad personal. Se puede construir una utilidad determinada única si existen una Summum Bonum y una Summum Malum, digamos dicha eterna (B) y perdición (P); mas aún podemos - hacerlo así para todos, ya que estas perspectivas son posibilidades que todos afrontamos. Si escribimos $u_K (B) = 1$, $u_K (P) = 0$ para cada persona K, se tiene un convenio para una escala y centralizar (centrar la puntería o alcanzar la máxima exactitud) lo cual es aplicable universalmente y bien determinada. Por todo esto está muy lejos de la capacidad de decir de que un cambio en u_A de $\frac{1}{2}$ a 1 es- equivalente a un cambio en u_B de $\frac{1}{2}$ a 0 : de poder decir que la -- dicha de un hombre compensa la desdicha de otro; ni este intercambio al 1 por 1 ó ningún otro se implica.

Se dibuja ahora una prueba que la solución Nash satisface la -- condición (2). Dejemos que u_A, u_B sean (cualquiera de ellas) los índices de utilidad para A y B. En términos de estos índices se traza- el grupo de pares alcanzables de utilidades esperadas netas de las-- utilidades STATUS QUO, en otras palabras se dibuja el grupo alcanzable R en una gráfica con origen en (S_A, S_B); llámese a esto incrementos en las (utilidades) posibles o incrementos de ganancias G_A, G_B. La solución Nash es el resultado que maximiza G_A, G_B, esto es, - una tangencia con la curva de indiferencia mas alta de la forma $G_A . G_B$ = constante. Toda curva de indiferencia es una hipérbola al cuadrado y en ella la elasticidad de G_B con respecto a G_A es -1 en cualquier- punto. Entonces el punto Nash ocurre donde la elasticidad de los incrementos de utilidades tienen su frontera -1 (este punto es único- si la frontera es cóncava al origen, pero lo es desde que es la frontera de R simplemente movida hacia la izquierda y hacia abajo por -- nuestra substracción de (S_A, S_B) y R es un grupo convexo por su -- construcción de manera que su frontera Nor - Este es cóncava de origen).

Ahora se cambia el origen de u_A, digamos los incrementos de ganancias se mantienen sin cambios por cada resultado, de manera que - el resultado Nash, donde la elasticidad del incremento de utilidad - de B con respecto al de A es igual a -1, es el mismo resultado de antes.

Otra vez se cambian las unidades de u_A para dar u_A. Pero elasticidad es una medida independiente de unidades, de manera que la elasticidad todavia es igual a -1 por el mismo intercambio (negocio)- que antes. Esto establece el resultado.

Condición (3) (Simetría):

Solamente se tiene que notar que la familia de curvas, de hipérbolas cuadradas de indiferencia es simétrica alrededor de la línea de 45^{o}. Si podemos encontrar u_A y u_B para la cual R es simétrica también (pueda ser que podamos o no) la tangente esta claramente en esta línea. Nótese que, por condición (2) obtenemos la misma solución (intercambio arbitrado de utilógenos) para cualquier otro u_A, u_B, a pesar de que estos generalmente harán R y el máximo u_A, u_B asimétrico. Esta asimetría es simplemente un accidente de perspectiva.

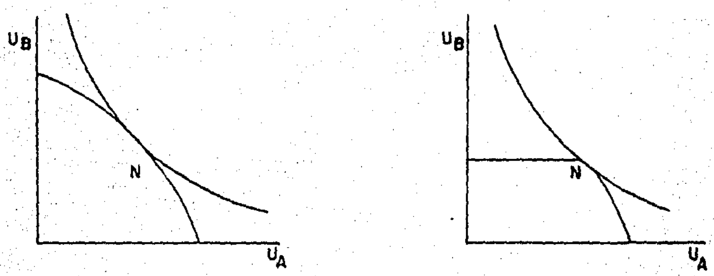
Condición (4) se llama independencia de alternativas irrelevantes por Marschak y por Luce and Raiffa.

(Otros incluyendo Arrow usan Independencia de Alternativas Irrelevantes en otro sentido)

Para visualizar su significado considérese la analogía de racionamientos en unas ordinarias compras de consumidores. Si la vieja canasta escogida esta dentro de las raciones, todavía se le escogerá (por lo menos si se presume que las raciones son intransferibles).

Así, las selecciones de los consumidores satisfacen la condición (4): pero la solución de Nash se determina, como hemos visto, como un consumidor posesionándose en el punto mas lejano de una familia de curvas de indiferencia.

La situación se representa en la gráfica II.4. La condición (4) no es común: no como en la condición (1) podría ser violada por una regla razonable de arbitraje. Por ejemplo, N no podría todavía escogerse por una regla en contra de 100% de la ganancia máxima en potencia de un jugador.



II.4.- INDEPENDENCIA DE ALTERNATIVAS IRRELEVANTES.

La fórmula de Nash no solo satisface las condiciones (1) y (4) pero lo mas impresionante es que es la única que lo hace. Sin embargo, estos resultados de ninguna manera disponen del problema con -- que empezamos: Como Aislar un Punto del Grupo de Negociación como - la Solución Correcta de un Juego Cooperativo, primero, se ha adelantado solo como un arbitraje conveniente por una tercera persona y - confiar que los contendientes acepten una fórmula de este arbitraje no es lo mismo que acepten por si mismos a la solución que esta fórmula conducirá. Es psicológicamente relevante, pero para agentes racionales los dos casos son equivalentes aunque pueda discutirse.

Hablar de arbitraje es un poco " presuntuoso ", y es de todos modos un "camino despistado " y el mismo Nash lo abandona más tarde, los juegos de regateo son una sub-clase de los juegos cooperativos , en especial es debido a las claras implicaciones de no llegar a un acuerdo: hay simplemente una reversión a un bien definido- estado anterior. En situaciones más complejas un jugador puede escoger lo que al otro jugador le está por llegar si él no se aviene a- un arreglo .

El puede disponer de una multiplicidad de sanciones: con ellas, el puede amenazar al otro durante las pláticas. En este caso no hay STATUS QUO dado. Se decidirá en una clase de " juego no cooperativo de amenaza " el cual es parte del juego cooperativo. La fórmula de Nash es por lo tanto no aplicable en este caso. Es verdad que- en todo juego cooperativo cada jugador tiene un nivel de seguridad- definido único, su incremento maxmin no cooperativo v.

El grupo de negociación definido en la sección II.3 esta consecuentemente siempre determinado. Pero el punto de STATUS QUO (S_A, S_B) en un juego de regateo es algo más que el par de niveles de seguridad: es la posición a la cual los jugadores van a volver si no hay acuerdo). Con axiomas de racionalidad, como es Estadística, uno puede probar más o menos cualquier cosa. Las virtudes y vicios de los axiomas, no son a menudo transparentes " APRIORI ". La prueba del pastel tiene que estar al comerlo. La formula Nash puede producir respuestas que algunos pueden encontrar dudosas.

Sin embargo, la fórmula de arbitraje Nash es interesante y no lo es solamente por su soporte axiomático sino también por su simplicidad y su operación. El criterio de Pareto es demasiado blando y consecuentemente no lo suficientemente aguda para política y práctica, pero la formula Nash tiene la virtud de compromiso. Nash dice quien debería hacer el lavado. (Aqui radica otra razón, una razón al nivel meta. porque la trama debería aceptarse). Problemas quedan todavia: No es práctico cuando las utilidades no se conocen, y ciertamente los contendientes tienen un motivo para no decir la verdad (En un juego no-cooperativo más grande con el arbitro); pero en regateos monetarios de apuestas menores el árbitro conoce las utilidades bastante bien.

II.5.- TEORIA DE REGATEO DE ZEUTHEN

La teoría de Nash tiene historia. En 1930 Zeuthen dio el punto de Nash como una solución para una teoría descriptiva de regateo. - Zeuthen modela el regateo como una secuencia dinámica de concesio-- nes por los dos contendientes. Supongamos que en alguna etapa, (punto o momento del juego) . A está pidiendo u_{AA}, más exactemente, - pidiendo un acuerdo en Utilógenos que le producen u_{AA} y B le ofrece u_{AB}. Del mismo modo A le ofrece u_{BA}, y B pide u_{BB}, de tal manera A- y B estan proponiendo las ganancias pares (u_{AA}, u_{BA}) y (u_{AB}, - - u_{BB}) respectivamente. A piensa que si el se mantiene (no acepta - la demanda completa u_{BB}) las posibles consecuencias son: con la probabilidad r_A un quebranto irreparable en cuyo caso A obtiene su --- utilidad STATUS QUO S_A, y con probabilidad $1 - r_A$, concesión por B- de la demanda de A. (Nótese que esto implica que A asigna cero probabilidad a que B haga una concesión parcial como su próxima movida o de otro modo que estamos hablando de probabilidades condicionales que A asigna basado en la hipótesis de que B no hará una concesión). Entonces , por el principio.de utilidad esperado, A le será mejor - mantenerse que estar de acuerdo con los términos si :

$$r_A \, S_A + (1 - r_A) \, u_{AA} - u_{AB},$$

$$r_A \angle \frac{u_{AA} - u_{AB}}{u_{AA} - S_A} = r_A^*,$$

Simétricamente , B preferirá mantenerse en lugar de conceder si:

$$r_B \angle \frac{u_{BB} - u_{BA}}{u_{BB} - S_B} = r_B^* ,$$

Zeuthen sugiere que A concederá y B no, si y solamente si $r_A^* - r_B$ esto es, si para A la probabilidad de perder es suficiente para hacer una rendición total preferible a una resistencia total, es menor que lo es para B. Esta sugerencia parece arbitaria, especialmente en vista del tratamiento deficiente de la probabilidad que cada uno se asigna de hacer una concesión parcial. Pero veremos el resto de todas maneras.

Sin pérdida de generalidad podemos poner $S_A = S_B = 0$, medir las utilidades de cada uno de sus valores STATUS QUO. Entonces lo que tenemos es que A concede si:

$$\frac{u_{AA} - u_{AB}}{u_{AA}} \angle \frac{u_{BB} - u_{BA}}{u_{BB}} ,$$

Solamente que:

$$(u_A \ u_B)_A \leq (u_A \ u_B)_B \ .$$

donde $(u_A \ u_B)_A$ denota lo mismo que $u_{AA} \ u_{BA}$, esto es la propuesta de A por el producto de ganancias utilidad y similarmente para --- $(u_A \ u_B)_B$.

Finalmente, supongamos que si está satisfecho y que A es el -- que tiene que hacer una concesión, está concesión será la propuesta de un par utilidad $(u'_A \ u'_B)_A$ lo que asegurara que él no tendrá que hacer la proxima concesión . Para esto debe ser el caso que

$$(u'_A \ \ u''_B)_A \geq (u_A \ \ u_B)_B \ ,$$

por una repetición del argumento que nos condujo a (II.2) por razonamiento similarmente para B,

$$(u''_A \ \ u'_B)_B \geq (u'_A \ \ u''_B)_A \ ,$$

y las proposiciones sucesivas $(u'_A \ u''_B)_A$, $(u''_A \ u'_B)_B$, $(u'''_A \ u''''_B)_A$ $(u''''_A \ u_B''')_B$, . . . , entonces el producto de incremento de ganancias es cóncava al origen (tal como la teoría cooperativa nos dice que debe ser) entonces está secuencia debe acercarse al punto de -- Nash: Si las concesiones no se ponen escasas demasiado pronto, tiene el punto de Nash como su límite.

II.6.- CONSIDFRACIONES MORALES

No es fácil decidir si el esquema de Nash debería tomarse como una guia técnica para árbitros profesionales, como una prescripción para decisiones racionales por dos personas con ganancias no-cero, o como una prescripción ética para una solución de un conflicto distributivo. Como sugerimos anteriormente puede ser posible explicar- por lo menos algunos aspectos de moral interpersonal como tipos de- racionalidad de grupo, de modo que la distinción entre la segunda y tercera de estas lecturas de Nash no esta bien definida. Tampoco lo está entre la primera y las otras dos, desde que el buen sentido o la justicia de una decisión de un árbitro puede mejorar su carrera.

Si la solución Nash es ' buena ; lo es en sentido aparte de las doctrinas Cristiana o Socialista. La solución Nash es desigual- en dos aspectos. El primero es necesario y parte integral de la solución. El segundo depende en hechos psicológicos fortuitos.

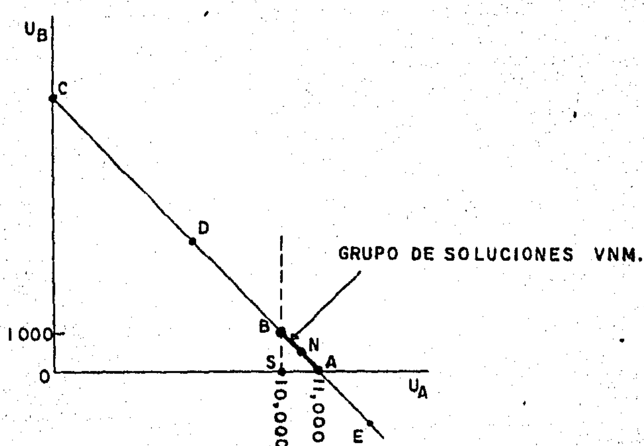
El primero, es necesario efecto que preserva desigualdades -- existentes. El segundo, efecto casual que amplifica desigualdades - existentes. Los siguientes ejemplos muestras estos dos efectos:

Ambos ejemplos conciemen dos personas, uno A, con una fortuna de - £ 10,000.00 y el otro B, sin un centavo. Cooperando , ellos pueden - ganar £ 1,000 (digamos que los beneficios dependen de los bienes- de A y los conocimientos de B).

HOMBRE RICO, HOMBRE POBRE - 1

Dejemos que las utilidades de ambos sean lineales en riqueza -- monetaria, de manera que sin pérdida de generalidad podamos decir -- que la utilidad de cada uno es igual a su riqueza.

El juego de regateo es un juego por dinero.



II.5.- HOMBRE RICO, HOMBRE POBRE - 1

El punto S en la figura II.5 es el STATUS QUO. Para obtener el grupo realizable necesitamos especificar el juego un poco mas.Hemos dicho que mediante cooperación ellos ganaran £ 1,000 ; esto, sin - embargo, no es un '' resultado ''en el sentido '' técnico '' desde que no especifica quien lo logra si los dos adoptan determinadas estrategias. Debemos entonces explicar nuestra descripción informal del resultado de la manera siguiente:

(i) La consecuencia directa de la cooperación es que A obtiene x- y B obtiene (1,000 - x), x siendo un número entre 0 y 1000; y

(ii) Las reglas del juego - digamos, la ley de consorcio permiten - pagos aparte (redistribuciones de ganancias) a hacerse libremente entre ambos después de que estas consecuencias directas se han producido. Si este es el juego, entonces los pares realizables de ganancias por cooperación se dan por la línea A B.

Esto quizás no sea todo. Puede ser que las redistribuciones de sus fortunas iniciales son perfectamente permisibles también. Si es así, los puntos alcanzables después de la cooperación incluyen el - segmento de la línea B C en manos de A dandole a B más y más de las £ 10,000 con que empezó.

Realmente si el juego permite adeudar , la línea alcanzable se prolonga a los cuadrantes negativos. Sin embargo, podemos decir que estas extensiones de A B no pueden contener las soluciones Nash o cualquier V N M: los puntos en ella no son negociables, porque no les da a los jugadores por lo menos la utilidad STATUS QUO (su dinero inicial). El juego A no cooperaría si el precio de cooperación fuese un punto como D. Tampoco lo haría B si fuese un punto como E.

Dibujando nuevos ejes a traves de S considerando la simetría del grupo realizable (o posible, alcanzable) clasifica que en la solución Nash (marcada N) cada uno obtiene la mitad de los extra £ 1,000 de manera que la solución Nash produce las ganancias (10,500 - 500). Se puede decir que no se puede ser más justo. La solución parece ser perfectamente equitativa en término monetarios y de utilidades. Sin embargo, este ejemplo fue diseñado para mostrar una tendencia a la desigualdad en plan de Nash. La solución es equitativa en términos de cambios del STATUS QUO. El STATUS QUO, sin embargo, por naturaleza es notoriamente desigual. Por consecuencia la solución lo es si no se toma el STATUS QUO por sentado, entonces se miden las ganancias de los jugadores desde el comienzo.

Pero si se tomara este último paso se estaría llegando a un buen nivel de confianza. La posición de los ceros de utilidad, contrario a los monetarios, es arbitrario de manera que no es claro si hay tal cosa como " medir desde el comienzo ". Aún si lo hubiera, otro obstáculo inmediatamente se presentaría una No Comparabilidad Interpersonal.

Utilidad cero para un hombre que empieza tiene que mostrarse - ser una condición comparable y similar a, utilidad cero para otro,- si vamos a ponerle algún sentido en decir que cero para ambos constituye un STATUS QUO " igual ".

Y esto no se ha demostrado. Considere otra vez el Juego del Lavado. Allí también la desigualdad de las utilidades del STATUS QUO- ($1 \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$) contribuyeron mucho a la desigualdad en las utilidades de la solución Nash medida por las mismas escalas de ($2 \frac{3}{8}$ $1 \frac{1}{12}$). No podemos decir que su STATUS QUO $1 \frac{1}{2}$, la utilidad --- que él lograría de una comida china preparada lo dejaría más feliz- en relación del $\frac{1}{2}$ de ella. Los número son meramente V N M asignaturas de utilidades: Se puede sumar 1, ó 100, al de ella sin hacer- el menor cambio en la descripción del estado del asunto.

Por otro lado si la comparabilidad interpersonal se acepta, la V N M interpretación de utilidad no se afecta. Más significado se - agrega por una juiciosa cesión de utilidades relativas a los dos individuos. Si decimos que el hombre rico y el hombre pobre tienen - utilidades STATUS QUO de 10,000 y/o respectivamente también decimos que uno esta contento y el otro miserable.

Debido a la falta de siginificado psicológico de las comparaciones interpersonales no tenemos dificultad en leer los números de este sentido.

Si los utilógenos son monetarios, la mayor parte de gente y la sociedad tienen puntos de vista éticos y fuertes con respecto a distribución. Esto puede ser porque tenemos práctica en la contemplación de las condiciones y consecuencias sobre la pobreza y riqueza.

Parece ser que hay poca duda de que así lo hacemos, dispuestos fácilmente en el caso monetario, también podríamos hacerlo en otros casos. Y cuando lo hacemos, las comparaciones interpersonales de las utilidades derivadas y no meramente comparaciones de las cantidades de los objetos dirigidos hacia los individuos, ocupan un lugar en nuestros juicios.

Aún en el juego del lavado, es muy fácil "Leer" las utilidades de STATUS QUO de $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ y las utilidades de la solución Nash de $2\frac{3}{8}$, $1\frac{1}{12}$ precisamente de esta manera. Todo esto amenaza la defensa de la conservación de la desigualdad de Nash basado en los terrenos de No Comparabilidad.

Estamos de acuerdo en que la solución de Nash es desigual ya que mantiene desigualdades pre-existentes de "algo". (Es asi también toda solución de V N M) Estas desigualdades son a menudo moralmente molestas.

La teoría por si misma no las justifica. Realmente por medio del mecanismo de medirlas de las utilidades de STATUS QUO las oculta muy sutilmente. Esta conservación de desigualdades pre-existentes no son excepcionales si se interpreta a Nash diciendo meramente que no se -- puede esperar una " ganga " en ninguno de otros términos, y que so_ lamente está distribución es factible si se presentan las fugas de re gateo de ambos lados.

Pero si a la solución se le entiende como una prescripción ética como a una contribución a la teoría de Bienestar Social, se necesita más defensa; aceptar la solución Nash sin ella, es aceptar que la fu- erza tiene la razón.

La necesidad de una defensa se hace evidente si examinamos una - vez más el juego del Lavado.

Mientras que en juego de Hombre Rico, Hombre Pobre - I la preser vación de desigualdad inicial puede parecerle a la mayor parte de la gente como enteramente natural, no parece ser lo mismo en el juego del Lavado. Porque pasa esto ? Que defensa se puede ofrecer a la desi-- gualdad conservadora de la solución de Nash ?

Una respuesta a medias es que hay posiciones generales en nues-- tra sociedad acerca de cuales recursos deberían asociarse en las va-- rias posibilidades de empresas en sociedad. El matrimonio es una cosa y los negocios otra.

El ideal de compartir de los cónyuges hace que la solución Nash en el juego del Lavado nos motive nuestras sensibilidades morales.

Pero en el juego presente la mayoría puede pensar que la aparente sociedad A D HOC de A y B no impone tal obligación. En pocas palabras la solución Nash será aceptada como " buena " solamente cuando se sienta que los jugadores tienen derechos de propiedad en sus utilidades de STATUS QUO.

Llegamos ahora a la manera por la cual, por virtud de un hecho psicológico casual, la solución Nash incrementa desigualdad. El hecho en consideración es una Aversión al riesgo.

HOMBRE RICO, HOMBRE POBRE - II

Recuerdese en la sección II.5 la observación empírica en la cual la utilidad de V N M decrece más agudamente con incrementos de entradas (ganancias monetarias) cuanto mayores sean estos incrementos comparados con el nivel de entradas. Lo mismo ocurre en la riqueza. Mientras un hombre rico como A puede ser idiferente entre f 500 y la lotería $\left[\frac{1}{2} \text{ f } 0 , \frac{1}{2} \text{ f } 1000\right]$, un hombre pobre como B puede tener digamos $\left[\text{f } 100 , \frac{1}{2} \text{ f } 1000\right]$. De acuerdo a esto, cambiemos el ejemplo 1 haciendo una curva a la función de utilidad por -- dinero para expresar esta aversión de riesgo, dejando lineal a A. - Podemos también, para cada uno de ellos, fijar las utilidades de incrementos monetarios de f y f 1,000 iguales a 0 y 1 respectivamente, por tanto sin perder generalidad dentro de la teoría V N M. Nótese que no hacemos comparaciones interpersonales. Logramos:

incremento monetario		ganancia		(u_A u_B)
A	B	A	B	
0	1000	0	1·0	0
250	750	0·25	0·98	0·25
500	500	0·50	0·90	0·45
750	250	0·75	0·73	0·55
1000	0	1·0	0	0

La solución Nash paga f 750 a A y f 250 a B porque hay aver - sión al riesgo ha incrementado la desigualdad monetaria pre existente. Funcionaría al contrario si la gente tuviera funciones de utilidad convexas. Esto es, si sus pendientes se incrementan. (Como en el caso de preferencia - Riesgo). Usualmente, como en el presente caso no lo hacen, por lo tanto, generalmente, la solución Nash no - hace nada por Re-distribuir progresivamente una distribución desi-- gual de la riqueza antes del juego, lo que hace es Re-distribuirla Regresivamente.

Nótese, sin embargo, que cada uno obtiene aproximadamente un - porcentaje de su máximo posible de incremento de Utilidad: B queda- pronto satisfecho por lo que para él es una experiencia nueva y emocionante pero A está ya acostumbrado al dinero. Por lo tanto, incrementos de porcentaje de utilidades más o menos iguales van con porcentajes de incrementos monetarios muy desiguales. Debe notarse también que la igualdad aproximada de los porcentajes de incrementos - de utilidades no es una propiedad universal de Nash. Depende en que las funciones de utilidad no estén formadas extrañamente.

II.7.- DETERMINACION DE SALARIO II.

Tenemos ahora suficiente teoría cooperativa para un modelo de - Regateos de Salario con un contenido económico real. Un monopolio bilateral es un mercado con un vendedor y un comprador. En muchas de - las negociaciones de Salarios una sola Unión (sindicato) afronta a - un solo empleador. Estas entidades podrían comprar o vender mano de- obra de otra entidad. Pero las negociaciones que vamos a modelar no consideran terceras personas.

Estas negociaciones, por consiguiente, constituyen un juego cooperativo de dos personas. Siempre que concentremos nuestra atención a las relaciones directas entre estas dos entidades (juego de dos --

personas) usando lenguaje de Economía un monopolio bilateral. En - la clásica literatura microeconómica el resultado es un monopolio bilateral, la cantidad vendida y su precio se mantienen indeterminados. Esta característica viene a ser la incertidumbre de la solución V N M dispuesta en disimulo.

Pero si el juego cooperativo de dos personas es un juego de negociación o regateo, el arreglo de Nash proporcionará una solución determinada la cual es racionalizable y no arbitraria. Una de las notorias indeterminaciones de la microeconomía clásica se habra resuelto . Para que un juego cooperativo de dos personas sea negociable (de regateo.) debe existir un resultado único en caso de no llegar a un acuerdo. Vamos a suponer esto aquí . Esto implica el ignorar de ambos lados que se pueden efectuar en este caso (Huelga, trabajo-a-regla, sobretiempo, etc.) Esto nos permite usar la teoría de regateo de Nash en lugar de la más difícil de Amenaza Múltiple de la sección siguiente.

(Esta última no siempre nos da una solución única a pesar de que la incertidumbre de V N M está bastante aminorada) Los resultados principales se hacen dignos de mención adelantada.

(1) Producción (y por consecuencia empleo, desde que el modelo es corto) está presentada tal como si la unión de los trabajadores y el empleado constituyeran una empresa única comprando mano de obra en un mercado externo y maximizando las ganancias.

(11) El documento de salarios se determina mediante la fórmula arbitraria de Nash.

´ NO TRADE ´ se toma literalmente significando que no se ha llegado a un contrato de trabajo y la producción se paraliza. La participación de la unión será mayor, cuanto mayor sea su utilidad-STATUS QUO. En efecto, existen mayores fondos de huelga y otros recursos de protección. El Modelo es el siguiente. La función de demanda es $P = \emptyset (q)$, en la anotación usual, y la función producción es $q = f (e)$, e denota empleo. La utilidad de la empresa U_F llega a ser igual a la ganancia. La empresa no tiene aversión de riesgo esto es,

$$u_F = \pi = pq - we - rk,$$

w denota la proporción de salario, k el capital accionista empleado R la renta para el capital.

La utilidad de la unión U_L (L por labor) es alguna función en incremento G de los excedentes salariales.

Los Excedentes salariales, S, se define como el exceso del documento negociado salarial sobre los salarios que el mismo número de hombres en ocupaciones alternas. $u_L = G (S)$, $S = we - w_o e$,

W_o denota la tasa ´externa ´ de salario y G es una función en incremento de S. Este u_L tiene una ventaja sobre ellos, ya que una Unión no necesariamente prefiere aumentar empleos a costa de la tasa de salarios solamente porque esto aumentaría el total del documento de salarios de sus miembros.

Nótese que u_L puede interpretarse como la utilidad de un monopolio - en búsqueda de ganancias que transforma en gastos a un costo w_0 por- unidad en una producción intermedia.a venderse w por unidad.

Lo primero en determinar la estructura de la negociación. Es -- importante estar consciente de que las negociaciones no estan sola-- mente sobre w, pero sobre w y e (también q y p).

No hay convenio o ninguna otra restricción que excluyan ciertos aspectos que puedan discutirse; y ambos W y E son puntos claramente pertinentes. Ya que juntos determinan las ganancias.

Consecuentemente en este modelo no hay " ab initio" una cur-- va bien definida de demanda de mano de obra dándole a 'e ' en térmi-- nos de w como una función fuera del control de la Unión.

(Tal curva de demanda es ciertamente apropiada en otros tipos - de mercados, por ejemplo en un mercado de mano de obra competitivo en el cual los vendedores de labor no negocían colectivamente con el em- pleador, o en uno en el que no pueden negociar con él sobre todos los determinantes de sus ganancias.)

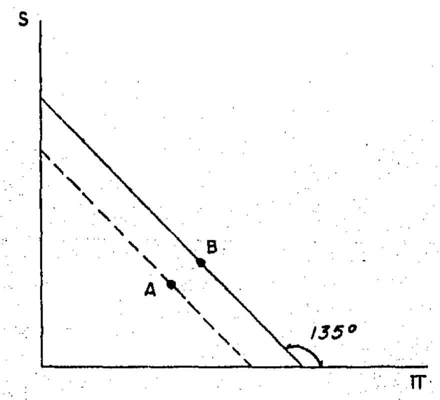
Para determinar la posibilidad de utilidad de la frontera de --- Pareto (de la cual el arreglo de negociación o la solución V N M son partes integrales.) notamos primerc que:

$$\pi + S = pq - w_o e - rK.$$

Esto depende solo en ´ e ´ (ya que determina q, y q a su vez determina a p.)

Para llegar a la posibilidad de utilidad frontera ambos lados - tienen que estar de acuerdo en cuanto al nivel de empleo e* que maximiza $\pi + S$. Mostramos esto por contradicción. Escribiendo $\pi + S = y$, y dejando e* que de $y = y^*$, y dejando que y* sea el valor máximo de Y . La figura II.6 esta dibujada en el espacio de réditos de - dinero: Sus ejes son π y S. La línea continua de 135^o es $\pi + S = y^*$

Escogiendo $e = e^*$ permite a los jugadores alcanzar cualquier- punto en está línea por medio de una distribución apropiada entre -- ellos (y solo tales puntos) Si ellos escogen algún otro.

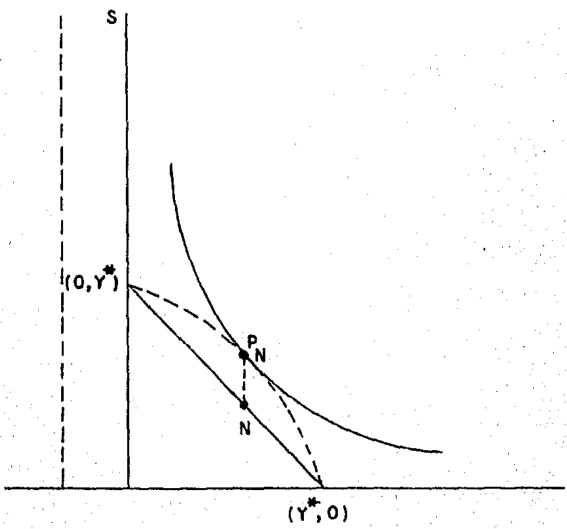


II.6. UTILIDADES POSIBLES.

$e = e$ produce $\pi + S = y' < y^*$ pueden alcanzar (π, S) puntos a lo largo de alguna línea como la punteada, y solo puntos a lo -- largo de esta línea. Pero considérese cualquier punto sobre la lí-- nea e', digamos A. Ambos π y S están más arriba en B en la línea e^*. Pero u_F se incrementa en π y u_L se incrementa en S.

Por tanto B produce mayores ganancias a ambos lados. Por consiguiente no hay ganancia-par a la que e'conduce que esté situada- en la frontera posibilidad-utilidad.

La figura II.7 superimpone (el espacio) (π, S) y (u_F - u_L) Espacio de ganancia. La línea continua de 135^0 es la misma que antes.



II..7. EL GRUPO ALCANZABLE.

Ahora escoja el origen y unidad de u_L de manera que u_L (0) = g (0) = 0, u_L (y*) = y*. Entonces la frontera posibilidad-utilidad- pasa a través de los extremos (y*, 0), (0, y*) de esta línea de 135^o intersecta a los dos ejes. Finalmente, si, como debemos supo-- ner, u_L manifiesta una aversión de riesgo positivo, la frontera de- posibilidad - utilidad debe tener la forma de la línea curva puntea da.

La región limitada por esta línea curva y los dos ejes es el - grupo alcanzable de ganancias pares.

Escribiendo π_0, S_0 para los valores de π, S si las negociacio nes se rompen. Suponiendo que esto sucede, los empleos y la produc- ción se paralizan, por lo menos durante el período en consideración

Por lo tanto π_0 = rk, el negativo de costos fijados, y S_0 se- da como

$$S_0 = (w - w_0) e = 0$$

Las utilidades correspondientes a π_0, S_0 esto es v_F, u_L, deben por consiguiente también ser rk, 0, por nuestra construcción de las dos funciones de utilidad.

Los puntos (rr, S_o) y (v_F, u_L) por lo tanto coinciden en el punto v en la figura II.7 (Aunque una pertenece al espacio de réditos y el otro al espacio de ganancias).

P_N en punto Nash en el espacio de ganancias por la construcción usual. Finalmente, N es el (rr, S) punto correspondiente a P_N, -- esto es N es la solución Nash de la negociación (o regateo).

Ahora determinamos N algebraicamente.

De la ecuación II.2, para que $rr + S$, ó y se maximizen necesitamos -

$$\left(p + \frac{dp}{dp} q \right) \frac{dq}{de} = w_o \qquad (\text{ II.3})$$

Esto es, el valor marginal producto de labor (mano de obra) -- iguala a la tasa de salarios " externos ". Bajo las acostumbradas suposiciones acerca de funciones de producción y demanda, la ecuación II.3 es también una condición suficiente y tiene una solución singular e*. Esto determina las dos fronteras (Líneas continua y segmentada) en la figura anterior. Para encontrar N necesitamos solamente poner la elasticidad del incremento de utilidad de la Unión -- (sindicato) con respecto al igual a -1 de la empresa esto es:

$$\frac{d\ (u_L - v_L)\ \ u_F - v_F}{d\ (u_F - v_F)\ \ u_L - v_L} = -1$$

Ahora $v_L = 0$, $u_F = rr$, $v_F = -rK$, así esto puede escribirse

$$\frac{du_L}{d\pi'} \quad \frac{\pi'}{u_L} = -1$$

donde $\pi' = \pi + rk$ = ganancia bruta de renta en capital equiva lente,

$$\frac{du_L}{dS} \quad \frac{dS}{d\pi'} \quad \frac{\pi'}{u_L} = -1$$

Pero desde el acuerdo está en la frontera de posibilidad de utilidad $\pi + S = y^*$, por lo cual $\pi + S = y^* + rk$ = constante, para -- que $dS/d\pi' = -1$. Así, nuestra condición se hace (du_L/dS) ---- $(\pi'/u_L) = -1$. ó desde que $\pi' = y^* + rk - S$,

$$\frac{du_L}{dS} \quad \frac{y^* + rk - S}{u_L} = 1 \cdot$$

desde que a u_L se le da como función g (S) de S, esta es una ecua--- ción en S solamente. Una vez que la hayamos resuelto para S, habre-- mos localizado el arreglo Nash**

Para poder apreciar el efecto en la solución de diferentes va-- lores de los niveles de seguridad de la empresa y de la Unión y tam- bién de los diferentes grados de aversión de riesgo por parte de la- unión, tomamos g (S) como una forma específica de función, digamos - un cuadrático. Aunque los cuadráticos tienen inconvenientes como fun ciones de utilidad en dinero, esto servirá a nuestro propósito su---

ficientemente.

Escribiendo $u_L = g(S) = aS^2 + bS + c$.

Es fácil verificar que escogiendo $u_L(0) = 0$, $u_L(y^*) = y^*$, como tenemos arriba implica $c = 0$, $a = -(b - 1) / y^*$, de modo que $u_L = \frac{b - 1}{y^*} S^2 + bS$.

Para que esta sea una función de utilidad plausible, b tiene -- que estar dentro de ciertos límites.

La utilidad marginal de los excedentes salariales es:

$$\frac{du_L}{dS} = -2 \quad \frac{b-1}{y^*} \quad S + b$$

Entonces necesitamos $b > 0$ para que $du_L / dS > 0$ en $S = 0$, y b - 1 de modo que du_L / dS decrece, por lo tanto, Hay Aversión al Riesgo. Cuanto mayor sea b, más rapidas son las bajas de utilidades, cuanto mas aguda sea la curvatura de u_L la Aversión al Riesgo será mayor Sin embargo, dos valores altos de b nos daría $du_L / dS < 0$ mien---- tras S aumenta. Esto ciertamente no puede permitirse para S entre -- 0 y y^*, el alcance en consideración. Sobre este alcance, du_L/dS hay- un mínimo en $S = y^*$ donde es igual a $2 - b$.

De este modo b debe ser, a lo mas 2. Tenemos entonces $1 \leq b \leq 2$.

El grupo $y^* = 2$ (medido en, digamos millones de pesos por mes)

Entonces obtenemos las soluciones Nash para S como rk y b toma los -- valores que se muestran.

		b		
		1	1.5	2
rk	0	1.0	0.90	0.85
	1	1.5	1.27	1.13

Las cifras en la primera columna ejemplifican que si la unión no tuviera Aversión al Riesgo (b = 1) su excedente salarial S, esto es su participación absoluta de y*, daríase por $\frac{1}{2}$ (y* + rk) = $\frac{1}{2}$ (y* - rr_0) Esta cantidad también es igual a $\frac{1}{2}$ (y* - rr_0- S_0)

Esto es, si nunguna de las partes es riesgo aversa, la suma de sus ganancias monetarias potenciales se divide en partes iguales.--- Así también, de acuerdo a nuestras escalas de utilidades, es la suma de sus incrementos de utilidades en potencia. Esto ilustra el principio de simetría en el arbitraje de Nash.

Un corolario de éste resultadp es que en cuanto Mayores sean Los Gastos Fijos de la Empresa, que es lo mismo que decir, su nivel de seguridad es mas bajo, la Unión obtendrá una Mayor Parte del ToTal Fijado.

Ya hemos encontrado estas dos propiedades de Nash en El Hombre Rico, El Hombre Pobre -1 en la sección II.6, donde también discutimos sus propiedades éticas.

Finalmente, dada la ganancia de potencial monetario en conjunto y* , la participación absoluta de la Unión prescrita por Nash decrece con su aversión al Riesgo.

Esta propiedad también se discutió en la secc. II.6 en referencia al Hombre Rico Hombre Pobre -11.

Nota: empíricamente, la aversión al Riesgo decrece con Riqueza absoluta o ingresos. Asi que la última propiedad se le puede interpretar como que a Peores Condiciones se encuentre La Unión, Peor Sera El Arreglo De Salarios S.

II.8.- LA SOLUCION DE NASH PARA EL JUEGO COOPERATIVO DE DOS PERSONAS GENERAL.

La piedra fundamental en la teoría de los juegos de Regateo es la idea de STATUS QUO. Las utilidades STATUS QUO son los niveles de seguridad de los jugadores y así sirven para reducir la solución de V N M.

La solución definida por Nash para regateos comprende el uso de un origen bien definido del cual se miden las utilidades como incrementos, y es el punto STATUS QUO el que sirve a este propósito también. Por último, el uso del STATUS QUO en cada fase del regateo puede justificarse apelando a la teoría no-cooperativa.

En la última sección describimos la teoría del El intento de la teoría del juego cooperativo general de definir un determinado resultado racional donde el V N M admite una derrota, depende de dos - - -

ideas:

(1) Todos los juegos cooperativos son en último análisis no-cooperativos; hay siempre un juego no-cooperativo latente en los sucesos.

(11) Un juego de regateo (o negociación) es un juego cooperativo en el cual es posible definir una solución racional determinada explotando el hecho de que en un juego de regateo las estrategias del juego no-cooperativo latente son singulares.

De manera que una manera posible de determinar en el juego cooperativo general es: primero, descubrir el juego no-cooperativo latente. Entonces mostrar este juego y tener estrategias óptimas únicas. - Si este intento tiene éxito se demostrará que el juego general cooperativo tiene la misma estructura en esencia que un juego de regateo y los argumentos por la originalidad en la situación de regateo será aplicable aquí.

" No hay negocio " en un juego de regateo puede tomarse como una "amenaza" implícita. Considérese un cualquier proceder que un jugador pueda realizar y que podría de alguna manera dañar al otro.

Generalmente, una Amenaza es una declaración por parte de un jugador en la que dicé que procederá con una acción de este tipo a menos que el otro se comprometa a determinadas acciones.

Ahora por razón de que una acción de amenaza es una acción a realizarse condicionalmente de acuerdo a la acción del oponente, las acciones ya bajo promesa no puede por lo tanto llamársele estratégias - ya que una estrategia no se condiciona bajo ningun término (a pesar- de que sus movimientos componentes si lo son), por ejemplo, en el -- juego del Lavado, la amenaza de no compartir el ' quehacer ' de ninguna manera aparece a la cabeza de ningún renglón o columna de la matriz de pagos. Esta acción de amenaza es, sin embargo, la que respalda, y la responsable de todas las ganancias ' fuera de la diagonal '.

Cualquiera de estas ganancia-pares nos muestra que resultados se presentarán si las demandas son incompatibles, en cuyo caso no habrá - arreglo y por consecuencia ningun reparto de utilidades. Note que en - este juego, como en toda negociación (o juego de regateo) la amenaza no tiene que mencionarse.

'' No hay negocio '' le proporciona a cada jugador un poder de - amenaza que no puede dejar de ejercer y que no tiene necesidad de ostentar antes que el otro.

En el juego del Lavado y en todo juego de regateo el resultado - de una falta de acuerdo es siempre el mismo. Es independiente de las demandas en particular que los jugadores han presentado.

Estas faltas de acuerdo conducen al " No hay Negocio " --- Tout Court, o un simple regreso al STATUS QUO. Cada jugador tiene - esta amenaza, y solo esta. Los juegos de regateo pueden entonces -- clasificarse como Juegos de Amenaza Fija. En el juego general cooperativo, por otro lado, cada jugador dispone de sanciones alternas - que puede ejercer en caso de rotura de negociaciones. Correspondientemente, él puede elegir entre varias amenazas, de manera que las - posiciones en las cuales cada jugador se encontraría si existiera - una rotura de negociaciones no es ya necesariamente el STATUS QUO - Anterior. Es ahora una ganancia par variable que depende de las -- sanciones que seran tomadas, llamándolo el punto de Amenaza. Nótese que el punto de amenaza es un punto en el espacio de ganancias,- como el STATUS QUO en un juego de amenaza fija.

Asi que cada jugador tiene un alcance de amenazas. Esta claro - que la amenaza que escoja es una decisión personal. Vamos a posponer la consideración de como esta decisión pueda hacerse denotar por -- t_A, t_B las amenazas que A, B escojan.

Estas selecciones definen un punto de amenaza, los pares de ganancias que resultarán si t_A, t_B se realizan. Llamese a estas ganancias v_A, v_B. El punto de amenaza (v_A v_B) puede ahora considerarse, formalmente, como el STATUS QUO de un juego de regateo.

Este pseudo juego de Regateo definido por una elección particular de amenazas es la llave de la solución Nash del juego cooperativo general.

Formalmente, un juego de regateo, tiene una solución Nash única. Considérese adoptar esta solución del juego cooperativo en su - totalidad y asi tendríamos la originalidad que buscamos. Nos que-- daría solamente determinar la solución del ' juego de Amenaza ',- para islar amenazas óptimas t_A, t_B. Pero el juego de Amenazas es -- no -cooperativo, por tanto su solución no crearía indeterminación - (o incertidumbre). Un paso crítico y dudoso en esta estrategia es tomar la solución del juego pseudo de Regateo, definido por las amenazas seleccionadas y ser la solución de todo el juego. Porqué de - berían los jugadores disponerse a aceptar el arreglo de Nash de este asi llamado juego de Regateo ? Es verdad que la racionalidad de- hacerlo así está respaldada por la lista de axiomas (1) y (4) en -- la sección II.4. Pero no es del todo claro que sea no-cooperativamente racional aceptar estos axiomas. La razón fundamental de los - axiomas radica en un teoría de selección en grupo, mientras que -- aquí estamos considerando a los jugadores en papeles no-cooperativos individualísticos.

Nash, por consiguiente, busca puramente argumentos no-cooperativos para que los jugadores acepten el arreglo Nash del pseudo juego de regateo que resulta de las selecciones de amenazas.

Los argumentos que él expone conducen a esta situación y a algo mas. No solo justifican el punto Nash dado a la amenaza par, pero en el mismo golpe, se llevan un par de amenazas óptimas.

Consideremos las siguientes dos movidas forma extensiva, juego-no-cooperativo.

Movida uno, A selecciona una amenaza t_A

Movida uno, B selecciona una amenaza t_B

Movida dos, A decide demandar d_A

Movida dos, B decide demandar d_B

Si d_A y d_B son compatibles, esto es si (d_A y d_B) es una contribución factible, el juego termina y cada uno acepta la demanda del otro.

Si ellos no son compatibles, el juego también se termina, cada uno realizando su amenaza.

A la demanda d_A se le permite depender en la Amenaza del oponente t_B. Esto tiene sentido. Un ejemplo de esta clase de dependencia es el de un empleador (empresa) que demanda menos (y que ofrece más) si la Unión advierte que irá a la huelga si no se aceptan sus demandas. También está de acuerdo con el modelo general de un juego de forma extensiva, donde una movida última en una estrategia completa depende generalmente de las movidas anteriores del oponente. Realmente d_A debería depender también en la temprana movida de A (t_A). Ahora tenemos un juego no-cooperativo de dos movidas en el cual la estrategia genérica de A tiene la forma (t_A, d_A) d_A siendo una función de t_A y t_B; o sea una estrategia para A tiene la forma . (t_A, d_A (t_A, t_B))

Todo juego no-cooperativo tiene por lo menos un par de equilibrio de estrategias (puras o mixtas), Nash muestra que el juego presente el juego cooperativo general con múltiples amenazas se convirtió en la forma no cooperativa. Siempre tiene como uno de sus pares de equilibrio, un par $[(t_A^*, d_A^*,) \quad (t_B^*, d_B^*)]$ en los cuales las demandas d_A^*, d_B^* constituyen la solución Nash del juego de regateo cuyo STATUS QUO es dado por t_A^*, t_B^*.

Nash toma este par de equilibrio como la solución del juego cooperativo. Es quizás engañoso ya que en la última vuelta (hacia el fi nal) se apoya en el reclamo sospechoso de que un equilibrio no cooperativo es una solución satisfactoria. Un problema, entre muchos otros, es que este equilibrio no cooperativo no sea único.

No es verdad necesariamente de todos ellos que los pares - demanda en ellos, sean los arreglos de Nash correspondientes a los pares-amenazas en ellos. Sin embargo, hay una clase especial importante de juegos multi-amenazas, en los cuales el equilibrio no-cooperativo es único y la propuesta de Nash es satisfactoria. La solución de Nash para el juego cooperativo general de amenazas multiples tiene tres características que resaltan. Ya hemos comentado dos, a saber, que Nash resuelve el juego cooperativo reduciendolo a la forma no-cooperativa, y que incorpora su solución para juegos de regateo o amenaza fija (juegos cooperativos) para lo cual el da una justificación diferente en el contexto presente, equilibrio no-cooperativo.

La tercera característica es que las amenazas nunca se realizan.

Esto no debería sorprendernos ya que el modelo pertenece a la teoría de racionalidad y no se intenta predecir comportamientos. Que la gente haga efectivas las amenazas, huelgas, guerras, no quiere decir que acciones que se conducen de esta manera sean racionales.

Teniendo esto en cuenta, vamos a ver porque los jugadores nunca tratan de hacer lo más que pueden. Las amenazas t_A, t_B son declaraciones de que A, B van a realizar ciertos actos dañinos si y solo si sus demandas no se aceptan. La teoría no se limita a juegos en los cuales es obligatorio realizar las amenazas, hay que recordar que estas son movidas en un juego no cooperativo verdaderamente, el '' si '' en la declaración de amenaza puede muy bien ser un engaño pero no hay razón de que esto sea así, puesto que ningún jugador hará una demanda que no lo lleve a una mejora a que lo pudiera llevar la realización de su amenaza.

Ahora, en la forma extensiva de dos movidas de Nash habrá arreglo si las dos demandas d_A y d_B son compatibles esto es, si las cantidades (de dinero, artículos, servicios, etc.)que ellos especifican no suman más de lo que está disponible. Pero en cualquier juego de regateo el arreglo de Nash es posible por su construcción. Desde que d_A*, d_B* son las cantidades en un arreglo de Nash ellos son compatibles, por lo tanto existe el arreglo, por consiguiente t_A* t_B* no se efectúan.

Ahora vemos que la razón efectiva del porque las amenazas no se realizan en Nash es porque en la movida dos los jugadores localizan ' Nash ' y por lo tanto demandas compatibles. Esto es un poquito extraordinario ya que la movida dos es parte de una estrategia no cooperativa de dos movidas: d_A, por ejemplo ha sido decidida

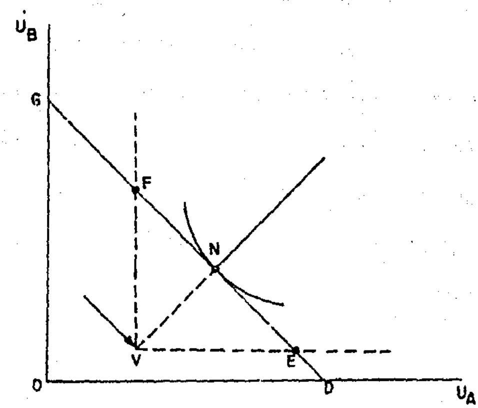
(como una función de los pares de amenazas) antes de que A sepa lo que d_B será. Pero solo un poco después de todos los seleccionados -- d's son parte de un par de estrategias en equilibrio, y como tales - están destinadas a tener propiedades especiales. Si imaginamos a jugadores reales intentar jugar la solución Nash veremos muy pronto -- porque hay huelgas, abandonos, y otras roturas de negociaciones. Deben existir completa y exacta información acerca de la matriz de pagos la que a su vez requiere información completa acerca de el posible resultado o distribución y acerca de la función de utilidad de - cada uno. De otra manera está el peligro de rotura de negociaciones- por error. Digamos que A desea poner la demanda Nash d_A*, y que esta corresponde al pseudo STATUS QUO consistiendo en las ganancias t_A*,- t_B* Llámese las ganancias v_A*, v_B*, d_A* dependiendo en v_A*, v_B* porque es el maximando restringido de ($u_A* - v_A*$) (u_B*, v_B*). Así un estimado erróneo de v_B*, digamos, producirá error en estimar d_A*. Si el último error es positivo tendrá tendencia a hacer el estimado d_A* incompatible con la demanda de B (B estimado de d_B*) Esto es - lo que pasará si, digamos, A es un empleador que sub-estima v_B* porque no esta conciente de que la Unión puede confiar en ayuda financiera de otras Uniones en caso de huelga.

De esta manera, de acuerdo a la teoría de Nash de juegos cooperativos, huelgas son los resultados de irracionalidad o de errores.

El problema de las posibles faltas de singularidad de equili-- brio no-cooperativo en el juego amenaza-demanda de Nash desaparece- en el caso conveniente que ya examinamos anteriormente sobre sali-- das de dinero, linealidad de funciones de utilidad, y legalidad de- sobornos. Como es usual, dejemos que v_A, v_B denote el pseudo STA-- TUS QUO (pagos de ganancias) si las amenazas t_A,t_B se materializan. Aquí podemos pensar de estas ganancias como pagos monetarios.Los -- pares de ganancias factibles, esto es, recibos de dinero deben ser- como el área triángular O D G en la figura II.8. El origen O nos da los niveles de seguridad de juego de los dos jugadores; la frontera Nor-Este tiene un ángulo de 135º (figura II.2)

Si v_A, v_B estuvieran en el punto v la localización se daría en N, donde la línea de 45^o a través de V intercepta la frontera de - incrementos de utilidad E F. Consecuentemente A necesita una V lo - más lejos posible en la dirección de la flecha y B una lo más lejos en la dirección opuesta.

Esto sugiere un juego de suma-cero se está jugando sobre V. -- Este es el caso que ahora mostramos. La línea V N tiene una ecua-- ción $u_A - u_B$ = constante, el constante siendo $v_A - v_B$. El límite --



II.8. UN JUEGO DE AMENAZAS MULTIPLES POR DINERO, CON PAGOS DE LADO (COHECHOS).

E F tiene la ecuación $v_A + u_B$ = constante = c así N es el punto ---

$$\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\ (u_A - u_B),\ \ \frac{c}{2} - \frac{1}{2}\ (u_A - u_B)$$

Pero este es el resultado final del juego si A juega la amenaza

t_A y B juega la amenaza t_B. De manera que todo el juego se reduce-- a un juego no-cooperativo con estrategias t_A, t_B y ganancias de -- sumas constantes. Pero es fácil mostrar que un juego de suma-cons-- tante puede siempre Re-Expresarse por medio de selecciones apropia- das de índices de utilidad como una de suma cero. El resultado es-- que todo el juego no está ambiguamente resuelto por las amenazas -- t_A^*, t_B^* las cuales maximizan y minimizan la ganancia de A en este - juego suma-cero.

CAPITULO III

JUEGOS ENTRE N PERSONAS

Con cooperación, suma cualquiera.

En un juego de n personas existe un conjunto $\{1,2,\ldots,N\}$ en donde N es el total de jugadores que puede participar en el juego y n es uno cualquiera de los jugadores.

A cualquier Subjunto del conjunto anterior (con excepción del vacío), se le llama una coalición. Se entiende por función característica de un juego de N personas y se le representa mediante la característica funcional v a una función cuyo dominio son las coaliciones y cuyo contradominio son números reales. --- Puede considerarse a la función característica como una generalización para N jugadores del concepto "valor del juego" que es -- propio de 2 jugadores, sin cooperación.

Cuando un juego se define mediante una función característica. Obsérvese que se tiene tres maneras fundamentales de representar un juego; la extensiva, la normal y la característica.

En general, si S es una coalición cualquiera v (S) $=\{1,2,3\}$ (1), (2), (3), (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3) coaliciones.

Propiedad de superaditividad (comportamiento racional).

Sean S, T dos coaliciones ejenas ($S \cap T = \emptyset$), se dice que el juego presenta la propiedad de superatividad si se tiene que $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

III.1.- JUEGO PROPIO.

Se dice que un juego es propio cuando se cumple por una parte - la propiedad de la superaditividad y adicionalmente la función característica para el conjunto vacío es cero. ($v(\emptyset) = 0$).

En caso de que solamente se cumpla $v(\emptyset) = 0$ pero no la propiedad de superaditividad, se dice que el juego es impropio.

Considérese un juego de N personas y una coalición cualquiera S- de manera que sus valores característicos sean respectivamente $v(N)$ y $v(S)$. Considérese también el complemento de la coalición S con - valor característico $v(N-S)$.

Si se cumple la condición de que $v(S) + v(N-S) = v(N)$ se - dice que es un juego de suma constante. En particular, si la constante es igual a cero, se dice que el juego es de suma cero.

III.2.- JUEGO ESENCIAL.

Considérese un juego de N jugadores y además, aisladamente a cada uno de los jugadores, el valor característico del conjunto - es v (N). El que le corresponde a un jugador i cualquiera v (i).- Si el juego es propio, se cumple el principio de superaditividad- y por consiguiente $v\ (N) \geq \sum_{j=1}^{N} v\ (i)$

Se dice que ese juego propio es esencial si estrictamente

$V(N) > \sum_{j=1}^{N} V\ (i)$. En caso contrario se dice que el juego pro---

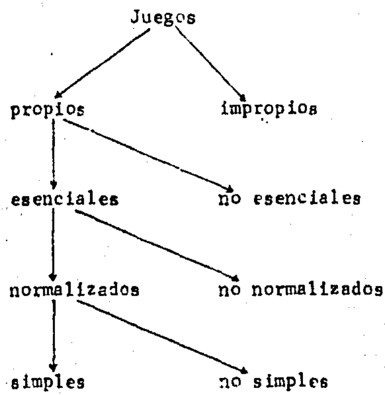
pio no es esencial.

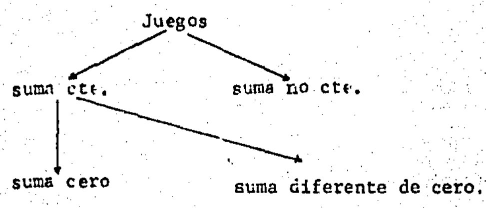
III.3.- JUEGO NORMALIZADO.

Se dice que un juego se encuentra normalizado en el inter-- valo (0,1) si reúne los siguientes dos requisitos $v\ (i) = 0\ \forall_i$, $v\ (N) = 1$. Obsérvese que un juego normalizado cumple con la definición del juego esencial y por consiguiente con la de juego propio. Entonces son susceptibles de ser normalizados los juegos - propios y esenciales.

III.4.- JUEGO SIMPLE.

Un juego normalizado en el intervalo (0,1) se dice que es sim-- ple si para cualquier coalición S, o se cumple v (S) = 0, o se cumple v (S) = 1





III.5.- IMPUTACIONES.

Una imputación es un vector que satisface las dos siguientes -- condiciones: ($\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$) Las x_i son la parte que le corresponde a cada integrante de la coalición.

a) $$\sum_{i=1}^{N} x_i = v(N)$$

b) $$x_i \geq v(i)$$

Obsérvese que en el concepto de imputación no solamente va implícito- el de repartición entre todos los jugadores que la forman sino lo que es más importante, el que ninguno de los jugadores recibirá menos de lo que obtendría jugando aisladamente.

III.6.- DOMINANCIA.

Dadas dos imputaciones $\bar{x}$, $\bar{y}$ y una coalición S, se dice que la - imputación $\bar{x}$ domina a la imputación $\bar{y}$ mediante la coalición S y se - escribe $\bar{X} \succ \bar{Y}$ si se cumple que $X_i \succ Y_i \;\forall\; S$ (elemento por elemento) y $\sum_{i \in S} X_i \leq v(S)$

III.7.- NUCLEO.

Al conjunto de imputaciones dominantes según una coalición cualquiera, se le llama núcleo del juego y es la solución del mismo.

Obsérvese que la obtención del núcleo implica, primero, conocimiento de todas las coaliciones en el juego; segundo, conocimiento de todas las posibles imputaciones para las coaliciones antes mencionadas; tercero, eliminación de aquellas imputaciones que son dominadas mediante una cualquiera de las coaliciones que pueden formarse en el juego considerado.

Cabe señalar que con gran fecuencia el núcleo del juego que es la solución del mismo está vacio, lo cual hace necesario acudir a otros conceptos para resolver el juego.

III.8.- CONJUNTOS ESTABLES.

Considérese un subconjunto del conjunto de imputaciones. Si en este subconjunto ninguna de las imputaciones se encuentra dominada por otra del mismo subconjunto y además todas las que no se encuentran en el subconjunto considerado, son dominadas por alguna de las del subconjunto considerado constituye un conjunto estable de imputaciones.

TEOREMA.

Si un juego tiene núcleo, el conjunto estable coincide con el núcleo.

En conjunto estable se distinguen dos tipos de estabilidad: la externa y la interna.

Un conjunto internamente estable (de imputaciones) es aquel en el que ninguna de las imputaciones domina a otra del mismo conjunto.

Un conjunto de imputaciones es externamente estable cuando las imputaciones del conjunto dominan a cualquiera otra imputación que no este en dicho conjunto.

Un conjunto estable tiene tanto estabilidad interna como externa.

TEOREMA.

Una fracción positiva de todos y cada uno de los juegos de n personas tiene puntos estables constituídos por el núcleo.

Coalición mínima ganadora.

Dado el conjunto de coaliciones que pueden formarse para n jugadores, dado el valor de cada una de estas coaliciones y dada una regla -

para tomar decisiones, entonces las coaliciones que satisfacen dicha regla reciben el nombre de coaliciones ganadoras. Así por ejemplo, considérese una constructora con 4 socios: A, 10% de las acciones; B, con 20%; C con 30% y D con 40% de las acciones. Las coaliciones que pueden formarse asi como el valor de las mismas, son conocidas.

Decisiones por mayoria simple; coaliciones:

A	- - - - 10	B	- - - - 20	C	- - - - 30	D	- - 40
AB	- - - - 30	BC	- - - - 50	CD	- - - - 70		
AC	- - - - 40	BD	- - - - 60				
AD	- - - - 50	BCD	- - - - 90				
ABC	- - - - 60						
ABD	- - - - 70						
ACD	- - - - 80						
ABCD	- - - - 100						

Si adicionalmente se define que las decisiones se toman por mayoria simple, esto es, con el 51% de las acciones en adelante, resulta que las coaliciones que pueden imponer su criterio en las decisiones son: ABC, ABD, ACD, ABCD, BD, BCD, CD.

Estas coaliciones reciben el nombre de coaliciones ganadoras. Si además de esto, se agrega el criterio de que las coaliciones ganadoras deben contener el menor número de gentes que les permita seguir siendo ganadoras, resulta entonces que de las siete (7) coaliciones ganadoras anteriores, quedan únicamente las tres siguientes: AD, CD, y ABC. Estas reciben el nombre de coaliciones mínimas ganadoras.

TEOREMA.

Sea un juego propio, simple y normalizado en el intervalo (0,1) y sea S una coalición mínima ganadora. Sea V_s el conjunto de todas las imputaciones $\bar{x}$ tales que todos sus elementos son ceros ($X_i = 0 \ \forall_i \in S$), entonces el conjunto V_s es un conjunto estable, solución del juego.

Obsérvese que en el teorema anterior implícitamente se define la metodología para resolver un juego. Esta consta de dos análisis : el primero investiga si el juego es propio; en caso positivo, la segunda investiga si es simple; de ser así, basta encontrar las coaliciones ganadoras, las imputaciones correspondientes a estas coaliciones, normalizarlas y seleccionar aquellas para las que todos sus elementos son nulos.

Estas imputaciones son las que resuelven el juego, ya que determinan con quien se deben asociar los jugadores y como se va a repartir la ganancia que corresponda a esa asociación.

Al resolver un juego se busca 1) asociaciones 2) repartición de ganancia 3) estrategias para jugar el juego 4) el valor del juego.

Obsérvese que una vez que se tiene el conjunto estable se han determinado los cuatro aspectos antes mencionados. Los dos primeros en la forma antes descrita y los dos últimos, reduciendo el juego a uno de dos jugadores: por una parte, la coalición antes seleccionada y por otra, el resto de los jugadores. Como en general había varias coaliciones en el conjunto estable, habrá tantos juegos de dos personas como jugadores en dicho conjunto y aquella que produzca el mayor valor del juego de dos personas será la que se seleccione junto con sus imputaciones correspondientes.

El metodo descrito es general una vez que se dispone del conjunto estable. Obsérvese que el teorema anterior suministra una manera de obtener el conjunto estable en el caso particular de juego propio y simple.

III.9.- AXIOMAS DE SHAPLEY.

Por valor de un juego v se entiende un vector $\emptyset$ (v) de n elementos que satisfacen las siguientes condiciones S, s_i S es una coalición entonces $\sum_{i \in S} \emptyset_i (v) = v(S)$

S_2 - para cualquier permutación π, i $\in$ N, entonces $\emptyset\, \pi(i)\, (\pi v) = \emptyset_i (v)$

S_3- si u, v son juegos, entonces $\emptyset_i (u + v) = \emptyset_i (u) + \emptyset_i (v)$.

III.10.- TEOREMA DE SHAPLEY.

Existe una única función valor del juego $\emptyset$ que satisface los axiomas de Shapley. Dicha función es:

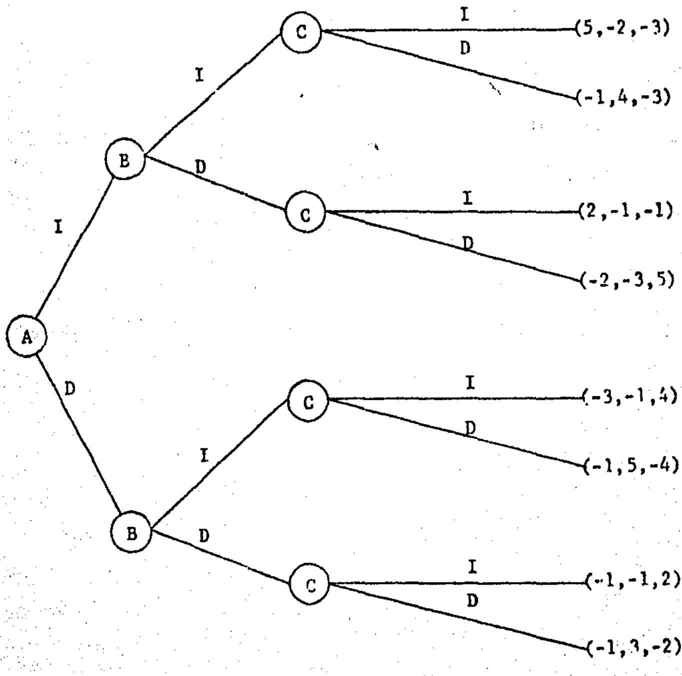
$$\emptyset_i (v) = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \frac{(t-1)!\ (n-t)!}{n!} \quad v(t) - v(t-i)$$

Si el juego es simple, la función se reduce a:

$$\emptyset_i (v) = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \frac{(t-1)!\ (n-t)!}{n!}$$

EJEMPLO:

Tenemos tres jugadores A, B,C (SOP, SCT, SP) cada uno tiene dos opciones D ó I (Zumpango o Texcoco), derecha o izquierda. El juego es sin cooperación y suma cero.



Forma extensiva.

Acciones.

Este es un ejemplo de suma cero sin cooperación para 3 jugadores.

A $\longrightarrow$ I , D

B $\longrightarrow$ I , D

C $\longrightarrow$ I , D

Tácticas:

(Recordar que son combinaciones de acciones).

A I,D $2^1 = 2$

B [I,D] [I, I] [D,I] [D,D] $= 2^2 = 4$

C $= 2^4 = 16$

I	D	
II	DI	
ID	DD	
III	DII	
IID	DID	
IDI	DDI	
IDD	DDD	
IIII	DIII	
IIID	DIID	
IIDI	DIDI	
IIDD	DIDD	Tácticas del jugador C.
IDII	DDII	
IDID	DDID	
IDDI	DDDI	
IDDD	DDDD	

El juego se resolverá con los mismos criterios que para dos jugadores, con fines ilustrativos; esto es, se usarán únicamente criterios de dominancia.

(5) ID II (5,-2,-3), (5,-2,-3), (-2,-3,5), (-2,-3,5), (-3,-1,4), (-1,-1,2), (-3,-1,4), (-1,-1,2)

(13) DDII (-1,4,-3), (-1,4,-3), (-2,-3,5), (-2,-3,5); (-3,-1,4), (-1,-1,2), (-3,-1,4), (-1,-1,2)

(I,I) (I,D) (D,I) (D,D); (I,I) (I,D) (D,I) D,D)

I D

Dominante

(5) A $\longrightarrow$ 5

B $\longrightarrow$ -1

Dominante

(13) A $\longrightarrow$ -1

B $\longrightarrow$ 4

A (1,0)

B (1,0,0,0), B (0,1,0,0)

C (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,)

$v_A = -1$; $v_B = 4$; $v_C = -3$

La dominancia para B y C se hace barriendo cada renglón por columnas. Se buscan los valores dominantes de ambos en un solo -- vector-valor. Si se encuentra, ese vector relacionándolo con su - posición en las matrices, se encuentran las estrategias.

Al jugador B le da lo mismo usar cualquiera de las dos estrategias que obtuvo.

Terminología n-jugadores

Conjunto de jugadores $\{A, B, C\}$

Coaliciones

(A), (B), (C), (A,B), (A,C), (A,B,C)

Ejemplo 1).-

Función característica

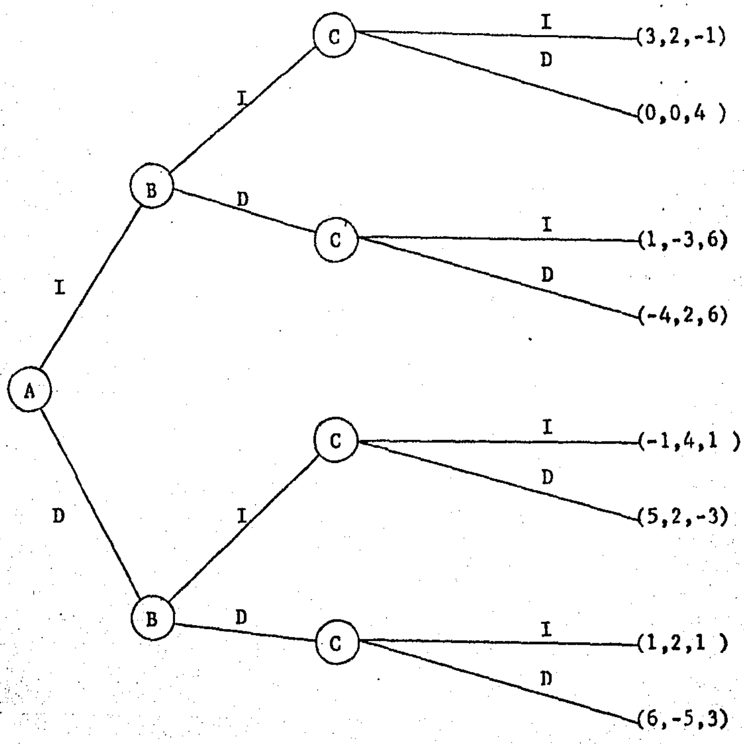
$$
\begin{aligned}
v\ (A) &= -2\\
v\ (B) &= -2\\
v\ (C) &= -3\\
v\ (A,B) &= 3\\
v\ (A,C) &= 2\\
v\ (B,C) &= 2\\
v\ (A,B,C) &= 0
\end{aligned}
$$

Esta forma para el mismo ejemplo, representa la versión de su cero en cooperación, propio y esencial, simple.

$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

Ejercicio (2)

Juego con cooperacion suma constante entre tres jugadores



Función característica del juego.

(1)	v	(A)	=	-1
(2)	v	(B)	=	0
(3)	v	(C)	=	-1
(3)	v	(A,B)	=	5
(2)	v	(A,C)	=	4
(1)	v	(B,C)	=	5
	v	(A,B,C,)	=	4

Suma constante.

Juego propio porque cumple:

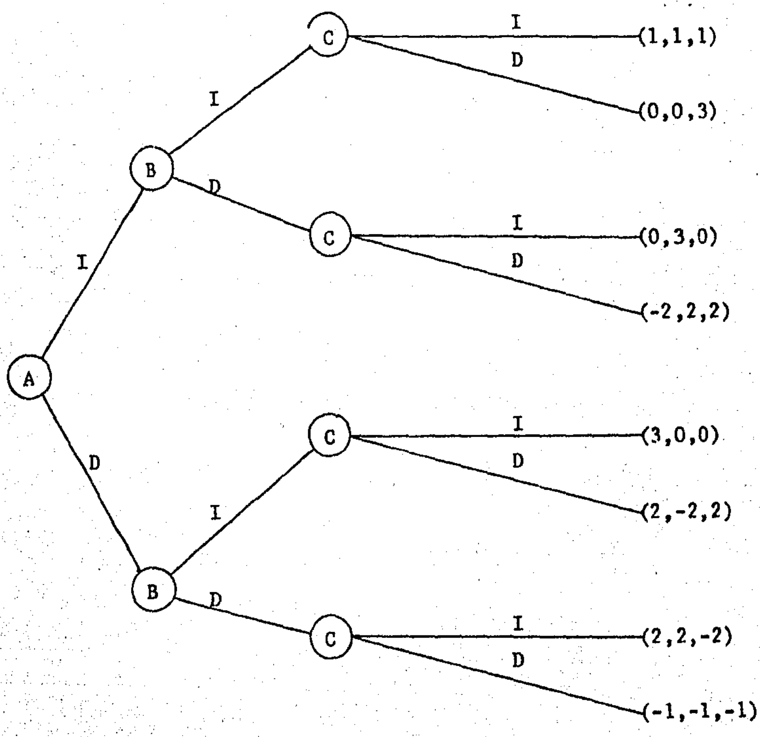
$$v\ (S) + v\ (T) \leq v\ (\ S \cup T\ )$$

Juego esencial porque cumple :

$$v\ (N) > \sum_{i=1}^{N} v\ (i)$$

Ejercicio (3)

Juego cooperativo, suma cero no constante entre tres jugadores.



Función característica del juego.

(1)	v	(A)	= 2
(2)	v	(B)	= 2
(3)	v	(C)	= 2
(3)	v	(A,B)	= 0
(2)	v	(A,C)	= 0
(1)	v	(B,C)	= 0
	v	(A,B,C)	= 3

Suma no constante.

Juego impropio porque no cumple con la expresión:

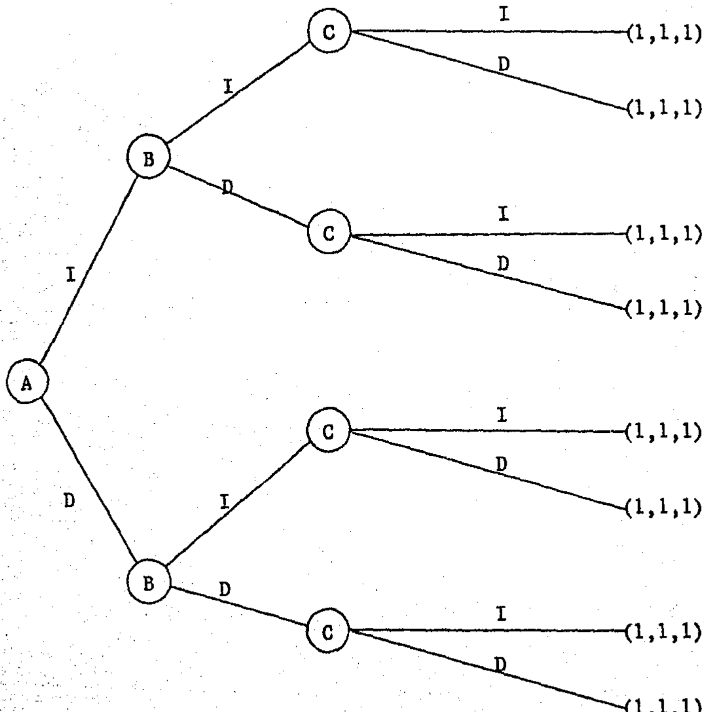
$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$

Juego no esencial (Trivial) porque no cumple:

$$v(N) > \sum_{i=1}^{N} v(i)$$

Ejercicio (4)

Juego con cooperación suma constante entre tres jugadores.



Función característica del juego

(1)	v	(A)	= 1
(2)	v	(B)	= 1
(3)	v	(C)	= 1
(3)	v	(A,B)	= 2
(2)	v	(A,C)	= 2
(1)	v	(B,C)	= 2
	v	(A,B,C)	= 3

Condición para que un juego sea propio:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$

Juego no esencial (Trivial) porque no cumple:

$$v(N) > \sum_{i=1}^{N} v(i)$$

III.11.- NORMALIZACION.

Supóngase que cada jugador recibe una bonificación o pago de una multa independientemente de cual es el resultado del juego de manera que se garantice $v\ (i) = 0$

$$v'\ (N) = v\ (N) + \sum_{i=1}^{N} a_i$$

a_i = suma de multas o bonificaciones.

$$v''\ (N) = Cv'(N) = 1\ , \quad C = \frac{1}{v'\ (N)}\ , \quad C = \frac{1}{v\ (N) + \sum_{i=1}^{N} a_i}\ ;$$

$$v''\ (S) = \frac{v\ (S) + \sum_{i \in S} a_i}{v\ (N) + \sum_{i=1}^{N} a_i}$$

Normalización

Para el ejemplo (1)

$$v''\ (S) = \frac{v\ (S) + \sum_{i \in S} a_i}{v\ (N) + \sum_{i=1}^{N} a_i}$$

$$v\ (A) = \frac{-2 + 2}{0 + 7} = 0$$

$$v\ (B) = 0$$

$$v\ (C) = 0$$

$$v\ (A,B,) = \frac{3 + 4}{0 + 7} = 1$$

$$v\ (A,C) = \frac{2 + 5}{0 + 7} = 1$$

$$v\ (B,C) = \frac{2 + 5}{0 + 7} = 1$$

$$v\ (A,B,C) = \frac{0 + 7}{0 + 7} = 1$$

Cuando la normalización adquiere los valores de ceros y unos el juego es <u>simple</u>.

Normalización para el ejemplo (2)

$$v\ (A) = \frac{-1 + 1}{4 + 2} = 0$$

$$v\ (B) = \frac{0 + 0}{6} = 0$$

$$v\ (C) = \frac{-1 + 1}{6} = 0$$

$$v\ (A,B) = \frac{5 + 1}{6} = 1$$

$$v\ (A,C) = \frac{4 + 2}{6} = 1$$

$$v\ (B,C) = \frac{5 + 1}{6} = 1$$

$$v\ (A,B,C) = \frac{4 + 2}{6} = 1$$

Adquiere los valores de ceros y unos por lo tanto el juego es simple.

Normalización para el ejemplo (3)

$$v\ (A) = 0$$

$$v\ (B) = 0$$

$$v\ (C) = 0$$

$$v\ (A,B) = \frac{0\ -4}{3+6} = 2$$

$$v\ (A,C) = \frac{0-4}{3+6} = -2$$

$$v\ (B,C) = \frac{0-4}{3+6} = -2$$

$$v\ (A,B,C) = \frac{3+6}{3+6} = 1$$

Juego no simple porque no adquiere valores de ceros y unos.

Normalización para el ejemplo (4)

$$v\ (A) = \frac{1-1}{3-3} = \text{ind.}$$

$$v\ (B) = \frac{1-1}{3-3} = \text{ind.}$$

$$v\ (C) = \frac{1-1}{3-3} = \text{ind.}$$

$$v\ (A,B) = \frac{2-2}{3-3} = \text{ind.}$$

$$v\ (A,C) = \frac{2-2}{3-3} = \text{ind.}$$

$$v\ (B,C) = \frac{2-2}{3-3} = \text{ind.}$$

$$v\ (A,B,C) = \frac{3-3}{3-3} = \text{ind.}$$

Núcleo

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

$X_i \geq v(i)$

$$\sum_{i \in S} X_i \geq v(S)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = v(N)$$

(1)

v	(A)	= -2
v	(B)	= -2
v	(C)	= -3
v	(A,B)	= 3
v	(A,C)	= 2
v	(B,C)	= 2
v	(A,B,C)	= 0

(2)

v	(A)	= -1
v	(B)	= 0
v	(C)	= -1
v	(A,B)	= 5
v	(A,C)	= 4
v	(B,C)	= 5
v	(A,B,C)	= 4

(1)

$$X_1 \geq -2$$
$$X_2 \geq -2$$
$$X_3 \geq -3$$
$$X_1 + X_2 \geq 3$$
$$X_1 + X_3 \geq 2 \qquad 2(X_1 + X_2 + X_3) \geq 7$$
$$X_2 + X_3 \geq 2 \qquad X_1 + X_2 + X_3 \geq 7/2$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0$$

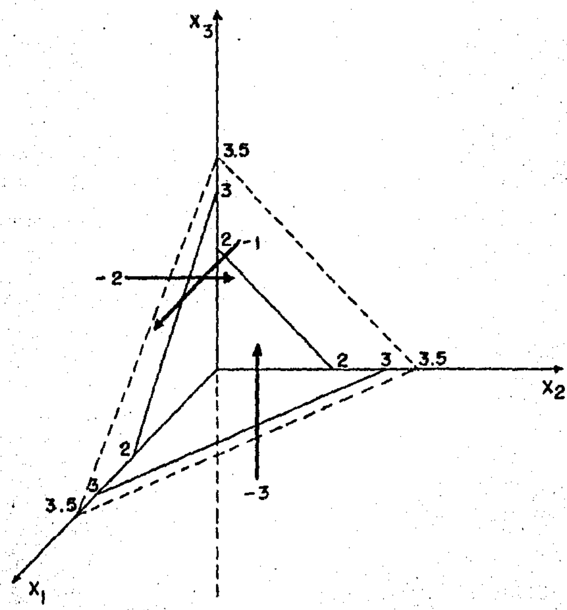
(2)

$$X_1 \geq -1$$
$$X_2 \geq 0$$
$$X_3 \geq -1$$
$$X_1 + X_2 \geq 5$$
$$X_1 + X_3 \geq 4 \qquad 2(X_1 \quad X_2 \quad X_3) \geq 14$$
$$X_2 + X_3 \geq 5 \qquad X_1 \quad X_2 \quad X_3 \geq 7$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 4$$

Todos los juegos propios tienen núcleo vacío.

Esquema para (1)



NUCLEO VACIO.

Teorema Shapley

$$\phi_i (v) = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!} \left[v(T) - v(T-i) \right]$$

$v(A) = 0, \quad v(B) = 1, \quad v(C) = 1 \qquad A, \begin{cases} B-4 \\ C-3 \\ BC-13 \end{cases}$

$v(AB) = 5, \quad v(AC) = 4, \quad v(BC) = 3$

$v(ABC) = 16$

$\left.\begin{matrix} (ABC) \\ \\ (ACB) \end{matrix}\right\} \quad v(A) = 0$

(BAC) - - - - v (BAC) = 4

(BCA) - - - - v (BCA) = 13

(CAB) - - - - v (CAB) = 3

(CBA) - - - - v (CBA) = 13

$\phi(A) = \frac{2}{6}(0) + \frac{1}{6}(4) + \frac{1}{6}(3) + \frac{2}{6}(13) = 5.5 \longrightarrow 36\%$

$$B, \begin{cases} A & -5 \\ C & -2 \\ AC & -12 \end{cases}$$

(ABC) - - - v (ABC) = 5

(ACB) - - - v (ACB) = 12

(BAC) - - - v (BAC) = 0

(BCA) - - - v (BCA) = θ

(CAB) - - - v (CAB) = 12

(CBA) - - - v (CBA) = 2

$$\emptyset\ (B) = \frac{2}{6}\ (0) + \frac{1}{6}\ (5) + \frac{1}{6}\ (2) + \frac{2}{6}\ (12) = 5.167 \longrightarrow 34\%$$

$$C, \begin{cases} A = 4 \\ B = 2 \\ AB = 11 \end{cases}$$

(ABC) - - - v (ABC) = 11

(ACB) - - - v (ACB) = 4

(BAC) - - - v (BAC) = 11

(BCA) - - - v (BCA) = 2

(CAB) - - - v (CAB) = 0

(CBA) - - - v (CBA) = 0

$$\emptyset\ (C) = \frac{2}{6}\ (0) + \frac{1}{6}\ (4) + \frac{1}{6}\ (2) + \frac{2}{6}\ (11) = 4.67 \longrightarrow 30\%$$

Ejemplo:

$\{A,\ B,\ C,\ D\}$

10% , 20%, 30%, 40%

Mayoría simple.

Coaliciones ganadoras:

10 ←	A		B	30 ←	C	D	
30	AB	50	BC	70	CD	D	40
40	AC	60	BD				
50	AD	90	BCD				
60	ABC						
70	ABD						
80	ACD						
100	ABCD						

Una estructura de coaliciones es un conjunto de coaliciones.

$$T = \{(A,B,C,),\ \ (A,B,D,),\ \ (A,C,D),\ \ (B,D),\ (B,C,D),\ \ (C,D)\}$$

Estructuras de coaliciones que dejan de ser ganadoras:

$$T_A = \{(A,B,C)\}$$

$$T_B = \{(A,B,C),\ \ (A,B,D),\ \ (B,D)\}$$

$$T_C = \{(A,B,C),\ \ (A,C,D)\}$$

$$T_D = \{(A,B,D),\ \ (A,C,D),\ \ (B,D),\ \ (B,C,D)\}$$

DEL TEOREMA DE SHAPLEY

$$\emptyset_i (v) = \sum_{\substack{TCN \\ i\in T}} \frac{(t-1)!\ (n-t)!}{n!}$$

n = Número total de jugadores.

t = Número de jugadores en la estructura de coalición.

Para juegos simples.

$$\emptyset (A) = \frac{2!\ 1!}{4} = 0.08 \qquad 10\%$$

$$\emptyset (B) = \frac{2!\ 1!}{4!} (2) + \frac{1!\ 2!}{4!} = 0.25 \qquad 30\%$$

$$\emptyset (C) = \frac{2!\ 1!}{4!} (2) = 0.17 \qquad 20\%$$

$$\emptyset (D) = \frac{2!\ 1!}{4!} (3) + \frac{1!\ 2!}{4!} = \frac{0.33}{0.83} \qquad 40\%$$

	Peso por acciones	Peso por decisiones
A	10%	10%
B	20%	30%
C	30%	20%
D	40%	40%

Por lo que se deduce de la tabla anterior, el jugador B tiene más peso por decisiones que por acciones.

III.12.- KERNEL.

Se ha visto que el núcleo se define mediante las condiciones de Von Newmann:

1) $X_i \geq v(i)$

2) $\sum_{i \in S} X_i \geq v(S)$

3) $\sum_{i=1}^{N} X_i \geq v(N)$

que corresponden al comportamiento individual y colectivo de tipo racional.

Ahora bien, como ya ha sido visto, es muy común que el Kernel se encuentre vacío, sobre todo para los juegos propios que son los que interesan en las aplicaciones. Supóngase entonces que se suprime una de estas condiciones, específicamente la tercera que corresponde al comportamiento racional total, esto ocasiona inquietudes entre los jugadores que se pueden manifestar de la siguiente manera:

Supóngase que un jugador K nota que si forma una nueva coalición C cada uno de sus miembros más de lo que ahora está recibiendo, esto es, existe un vector $\bar{\bar{X}}$ de elementos y_i tales que $y_i > X_i \quad \forall_i \in C$ y que satisface las dos primeras condiciones de Von Newmann, es lógico en tonces, que dicho jugador k que al suprimir la condición 3) goza de libertad, trate de formar dicha coalición C. Se dice entonces que el vector $\bar{y}$ constituye una objeción presentada por el jugador k. Si la nueva coalición C formada por el jugador k, no contiene al jugador L que inicialmente estaba coaligado con k, se dice que la objeción presentada por k es contra el jugador L.

En estas condiciones la reacción de k es la siguiente: voy a formar una coalición D en donde no se encuentre k y que además recibamos más de lo que originalmente recibíamos en la primera de las coaliciones.

Habrá algunos jugadores, los de la intersección de $C \cap D$ que son los que deben decidir si se inclinan por pertenecer a C ó a D.- Si se inclinan por pertenecer a D, se dice que el jugador L tiene una contraobjeción para la objeción del jugador k.

Obsérvese que en los conceptos anteriores se están manejando pagos a los jugadores como se hacía en el caso de las imputaciones, esto es, se están manejando vectores $\bar{y}$ de pagos que cumplen con las dos primeras condiciones de Von Newmann. No son imputaciones puesto que no cumplen con la tercera. Se dice entonces que constituyen configuraciones de pagos.

En el caso particular de que la configuración de pagos cumpla con la tercera condición de Von Newmann, será una imputación.

Obsérvese que las objeciones y contraobjeciones que presentan los jugadores son configuraciones de pagos.

Notese también que de hecho los jugadores, al suprimir la tercera condición, están dando origen a regateos entre jugadores.

De hecho se define como conjunto de regateos precisamente a todas las configuraciones de pagos tales que si se ponen en vigencia, ningún jugador tiene objeciones contra otro jugador ni éste contraobjeciones sobre el primero.

Obsérvese que el conjunto de regateos implica configuraciones de pagos que satisfacen a todos los jugadores involucrados y por tanto no presentan ni objeciones ni contraobjeciones.

Kernel de un juego.

Se entiende por Kernel de un juego, el conjunto de todas las configuraciones de pago, individualmente racionales, tales que todos los jugadores que pertenecen o una cualquiera de las coaliciones en la configuración de pagos, se encuentran entre si en equilibrio. El concepto de equilibrio implica que todos los jugadores en la coalición o coaliciones de las configuraciones de pagos en el kernel son igualmente fuertes o igualmente débiles para influenciar -- una decisión cualquiera.

Obsérvese, que el kernel de conformidad con la definición anterior, viene a ser un subconjunto del conjunto de regateos.

El kernel desempeña el mismo papel que el Núcleo, es por tanto, también la solución del juego, pero a diferencia del Núcleo, el kernel siempre existe.

Kernel (solución) para un juego entre 3 personas.

Considérese los jugadores α, β, γ en un juego normalizado para - el cual se cumplen las siguientes condiciones:

$$v(\alpha) = v(\beta) = v(\gamma) = 0$$

$$v(\alpha\beta) \leq v(\alpha\gamma) \leq v(\beta\gamma)$$

Coaliciones de una persona:

configuración de pagos:

$$(0, 0, 0; \alpha, \beta, \gamma)$$

Coaliciones de dos personas:

$$v \; (\alpha, \beta) + v \; (\alpha \gamma) \geq v \; (\beta \gamma) \qquad (I)$$

$$v \; (\alpha, \beta) + v \; (\alpha \gamma) \leq v \; (\beta \gamma) \qquad (II)$$

Si I se cumple:

$$(W_1, W_2, 0; \alpha \; \beta, \gamma)$$

$$(W_1, 0, W_3; \alpha \gamma, \beta)$$

$$(0, W_2, W_3; \alpha, \beta \gamma)$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \quad v \; (\alpha \beta) + v \; (\alpha \gamma) - v \; (\beta \gamma)$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \quad v \; (\alpha \beta) + v \; (\beta \gamma) - v \; (\alpha \gamma)$$

$$W_3 = \frac{1}{2} \quad v \; (\alpha \gamma) + v \; (\beta \gamma) - v \; (\alpha \beta)$$

Si II se cumple:

$(0, v(\alpha\beta), 0; \ \alpha B, \gamma)$

$(0, 0, v(\alpha\gamma); \ \alpha\gamma, \beta)$

$(0, W_2, W_3; \qquad \alpha, \beta\gamma)$

Coaliciones de tres personas:

a) $v(\alpha\beta\gamma) \geq 3 v(\beta\gamma)$

$$\left(\frac{v(\alpha\beta\gamma)}{3}, \quad \frac{v(\alpha\beta\gamma)}{3}, \quad \frac{v(\alpha\beta\gamma)}{3}; \quad \alpha, \beta, \gamma \right)$$

b) $v(\alpha\beta\gamma) \angle 3 v(\beta\gamma)$

b_1) Si se cumple una de las dos siguientes condiciones:

$$\begin{cases} v(\alpha\beta) + v(\alpha\gamma) \geq v(\beta\gamma) \\ 2_v(\alpha\beta) + 2_v(\alpha\gamma) - v(\beta\gamma) \leq v(\alpha\beta\gamma) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(\alpha\beta) + v(\alpha\gamma) \angle v(\beta\gamma) \\ v(\beta\gamma) \leq v(\alpha\beta\gamma) \end{cases}$$

Definiendo :

$$X_1 = \left[\frac{1}{2} v(\alpha\beta\gamma) - v(\beta\gamma) \right]$$

$$W_2 = \max \left[0,\ v(\alpha\beta) - X_1\right]$$

$$W_3 = \max \left[0,\ v(\alpha\gamma) - X_1\right]$$

$$C = \frac{1}{2} \left[v(\alpha\beta\gamma) + v(\beta\gamma)\right]$$

Entonces:

Pago a α es X_1

β es $X_2 = W_2 + \frac{1}{2}(C - W_2 - W_3)$

γ es $X_3 = W_3$

$(X_1, X_2, X_3, \alpha, \beta, \gamma)$

b_{II})

$$2v(\beta\gamma) - v(\alpha\beta) - v(\alpha\gamma) \leq v(\alpha\beta\gamma) \leq$$
$$2v(\alpha\beta) + 2v(\alpha\gamma) - v(3\gamma)$$

El pago a:

α es $W_1 + \dfrac{v(\alpha\beta\gamma) - W}{3} = Y_1$

β es $W_2 + \dfrac{v(\alpha\beta\gamma) - W}{3} = Y_2$

γ es $W_3 + \dfrac{v(\alpha\beta\gamma) - W}{3} = Y_3$

Definiendo:

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

$$(Y_1, Y_2, Y_3; \alpha, \beta, \gamma)$$

b_{iii})

$v (\alpha \gamma) - v (\alpha \beta) \quad v (\alpha \beta \gamma) \leq \min \{ v (\beta \gamma), 2v (\beta \gamma) - v (\alpha \beta) - v (\alpha \gamma) \}$

El pago a:

α es $0 = z_1$

β es $\frac{1}{2} \left[v (\alpha \beta \gamma) + v (\alpha \beta) - v (\alpha \gamma) \right] = z_2$

γ es $\frac{1}{2} \left[v (\alpha \beta \gamma) + v (\alpha \gamma) - v (\alpha \beta) \right] = z_3$

$(Z_1, Z_2, Z_3; \alpha, \beta, \gamma)$

b_{iv}) $v (\alpha \beta \gamma) \leq v (\alpha \gamma) - v (\alpha \beta)$

El pago a:

α es 0

β es 0

γ es $v(\alpha\beta\gamma)$

Es claro, que puesto que α, β y γ corresponden respectivamente a alguno de los jugadores, la solución en primer lugar debe cambiar de α, β y γ a los correspondientes A,B,C, cualesquiera que estos sean. En segundo lugar, puesto que el juego se encuentra normalizado, la solución debe antinormalizarse para tener la respuesta final.

Ejemplo:

$v(A) = -3$; $v(B) = -2$; $v(C) = -1$

$v(AB) = 5$; $v(BC) = 7$; $v(AC) = 10$

$v(ABC) = 12$

$$v'(A) = \frac{-3 + 3}{12 + 6} = 0$$

$v'(B) = 0$

$v'(C) = 0$

$$v'(AB) = \frac{5 + 5}{12 + 6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

$$v'(BC) = \frac{7 + 3}{12 + 6} = \frac{5}{9}$$

$$v'(AC) = \frac{10 + 4}{18} = \frac{7}{9}$$

$$v'(ABC) = \frac{18}{18} = 1$$

$$v\ \overset{BC}{(\alpha\ \beta)} \leq v\ \overset{AB}{(\alpha\ \gamma)} \leq v\ \overset{AC}{(\beta\ \gamma)}$$

$A \longrightarrow \beta$

$C \longrightarrow \gamma$

$B \longrightarrow \alpha$

Ejemplo:

$v(A) = -1 \qquad v(AB) = 5$

$v(B) = 0 \qquad v(AC) = 4$

$v(C) = -1 \qquad v(BC) = 5$

$v(ABC) = 4$

$v'(A) = 0; \quad v'(B) = 0; \quad v'(C) = 0$

$$v'(AB) = \frac{5 + 2}{4 + 2} = 1$$

$$v'(AC) = \frac{4 + 2}{6} = 1$$

$$v'(BC) = \frac{5 + 1}{6} = 1$$

$$v'(ABC) = \frac{4 + 2}{6} = 1$$

$$A \longrightarrow \alpha$$

$$B \longrightarrow \beta$$

$$C \longrightarrow \gamma$$

Jugadores aislados (coaligan una persona):

$$(0, 0, 0; \alpha, \beta, \gamma)$$

Coaliciones de dos personas:

$$v (\alpha \beta) + v (\alpha \gamma) \geq v (\beta \gamma)$$

$$1 + 1 \geq 1$$

$$w_1 = \left[\frac{1}{2} \quad v (\alpha \beta) + v (\alpha \gamma) - v (\beta \gamma) \right] = 1$$

$$w_2 = \left[\frac{1}{2} \quad v (\alpha \beta) + v (\beta \gamma) - v (\alpha \gamma) \right] = 1$$

$$w_3 = \left[\frac{1}{2} \quad v (\alpha \gamma) + v (\beta \gamma) - v (\alpha \beta) \right] = 1$$

$$(w_1, w_2, 0; \alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 0; \alpha, \beta, \gamma)$$

$$(w , 0, w_3; \alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 1; \alpha, \gamma, \beta)$$

$$(0, w_2, w_3; \alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 1; \alpha, \beta, \gamma)$$

Coaliciones de tres personas:

a) $v\ (\alpha\ \beta\ \gamma) \geq 3\ v\ (\beta\ \gamma)$

$1 \not\geq 3$

b) $v\ (\alpha\ \beta\ \gamma) > 3\ v\ (\beta\ \gamma)$

$1 \not> 3$ (1)

bI) $\begin{cases} v\ (\alpha\ \beta) + v\ (\alpha\ \gamma) \geq v\ (\beta\ \gamma) = 2 = 1 \\ 2v\ (\alpha\ \beta) + 2v\ (\alpha\ \gamma) \quad -v\ (\beta\ \gamma) \leq v\ (\alpha\ \beta\ \gamma);\ 3 \not\leq 1 \end{cases}$

$v\ (\alpha\ \beta) + v\ (\alpha\ \gamma) \angle\ v\ (\beta\ \gamma) = 2 \not< 1$

bII) $2v\ (\beta\ \gamma) \quad -v\ (\alpha\ \beta) \quad -v\ (\alpha\ \gamma) =$

$v\ (\alpha\ \beta\ \gamma) = 2v\ (\alpha\ \beta) + 2v\ (\alpha\ \gamma) \quad -v\ (\beta\ \gamma)$

$1 = 2 + \frac{2 - 1}{3}$

$y_1 = w_1 + \frac{v\ (\alpha\ \beta\ \gamma) - w}{3} = 1 + \frac{1 - 3}{3} = \frac{1}{3} \longrightarrow (\alpha)$

$y_2 = w_2 + \frac{v\ (\alpha\ \beta\ \gamma) - w}{3} = 1 + \frac{1 - 3}{3} = \frac{1}{3} \longrightarrow (\beta)$

$y_3 = w_3 + \frac{v\ (\alpha\ \beta\ \gamma) - w}{3} = 1 + \frac{1 - 3}{3} = \frac{1}{3} \longrightarrow (\gamma)$

Juego normalizado	Juego inicial
$(0,0,0;\ \alpha, \beta, \gamma)$	(-1, 0, -1; A,B,C)
$(1,1,0;\ \alpha, \beta, \gamma)$	(5, 6, -1; A,B,C)
$(1,0,1;\ \alpha, \gamma, \beta)$	(5, 0, 5; A,C,B)
$(0,1,1;\ \alpha, \beta, \gamma)$	(-1, 6, 5; A,B,C)
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3};\ \alpha, \beta, \gamma)$	(3, 2, 3; A,B,C)

Del resultado se observa que al jugador A le conviene asociarse con B o con C en cuyo caso recibe 5 unidades de pago.

Si ya están coaligados B y C entonces deberá tratar de formar parte de esa coalición aspirando a recibir únicamente un pago de 3 unidades. Lo que no debe permitir es quedar aislado porque entonces perdería una unidad.

El jugador B pasa por una situación similar, sin embargo debe buscar coaliciones de dos jugadores ya que ésto le reporta un pago de seis unidades mientras que la de 3 jugadores solo le reporta un pago de 2 unidades.

Por último el jugador C se encuentra en las mismas condiciones que el jugador A.

Ejemplo:

1 persona :

$v \quad (A) = -3$

$v \quad (B) = -2$

$v \quad (C) = -1$

$v' \quad (A) = 0$

$v' \quad (B) = 0$

$v' \quad (C) = 0$

$v' \quad (AB) = 5/9 = v\ (\alpha\ \beta)$

$v' \quad (AC) = 7/9 = v\ (\beta\ \gamma)$

$v' \quad (BC) = 5/9 = v\ (\alpha\ \gamma)$

$v' \quad (ABC) = 1 = v\ (\alpha\ \beta\ \gamma)$

$A \longrightarrow \alpha$

$B \longrightarrow \beta$

$C \longrightarrow \gamma$

2 personas

$$\text{I} \quad v(\alpha\,\beta) + v(\alpha\,\gamma) \geq v(\beta\,\gamma)$$

$$\frac{5}{9} + \frac{5}{9} \geq \frac{7}{9}$$

$$w_1 = \frac{1}{2}\left[v(\alpha\,\beta) + v(\alpha\,\gamma) - v(\beta\,\gamma)\right]$$

$$w_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{9} + \frac{5}{9} - \frac{7}{9}\right] = \frac{1}{6}$$

$$w_2 = \frac{1}{2}\left[v(\alpha\,\beta) + v(\beta\,\gamma) - v(\alpha\,\gamma)\right]$$

$$w_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{9} + \frac{7}{9} - \frac{5}{9}\right] = \frac{7}{18}$$

$$w_3 = \frac{1}{2}\left[v(\alpha\,\gamma) + v(\beta\,\gamma) - v(\alpha\,\beta)\right]$$

$$w_3 = \frac{7}{18}$$

Estructuras de coaliciones:

$$(0,0,0;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

$$\left(\frac{1}{6},\ \frac{7}{18},\ 0;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\right)$$

$$\left(\frac{1}{6},\ 0,\ \frac{7}{18};\ \alpha,\ \gamma,\ \beta\right)$$

$$\left(0,\ \frac{7}{18},\ \frac{7}{18};\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\right)$$

3 Personas :

a) $v(\alpha\beta\gamma) \geq 3\,v(\beta\gamma)$

$1 \not\geq 3\,(7/9)$

b_1) $v(\alpha\beta) + v(\alpha\gamma) \geq v(\beta\gamma)$

$5/9 + 5/9 \geq 7/9$

$$2v(\alpha\beta) + 2\,v(\alpha\gamma) - v(\beta\gamma) = v(\alpha\beta\gamma)$$

$$2\left(\frac{5}{9}\right) + 2\left(\frac{5}{9}\right) - 2\left(\frac{7}{9}\right) \leq 1$$

$$6/9 \leq 1$$

$$X_1 = \frac{1}{2}\left[v(\alpha\beta\gamma) - v(\beta\gamma)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{9}\right) = \frac{1}{9}$$

$$w_2 = \max\left[0,\ v(\alpha\beta) - X_1\right] = \max\left[0,\ \frac{5}{9} - \frac{1}{9}\right] = \frac{4}{9}$$

$$w_3 = \max\left[0,\ v(\alpha\gamma) - X_1\right] = \max\left[0,\ \frac{4}{9} = \frac{4}{9}\right]$$

$$C = \frac{1}{2}\left[v(\alpha\beta\gamma) + v(\beta\gamma)\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{7}{9}\right] = \frac{8}{9}$$

Pagos:

$$\alpha \longrightarrow X_1 = \frac{1}{9}$$

$$\beta \longrightarrow X_2 = X_2 = w_2 + \frac{1}{2} (c - w_2 - w_3) =$$

$$\frac{4}{9} + \frac{1}{2} \left(\frac{8}{9} - \frac{4}{9} - \frac{4}{9} \right) = \frac{4}{9}$$

$$\gamma \longrightarrow X_3 = w_3 + \frac{1}{2} (c - w_2 - w_3) = \frac{4}{9}$$

Juego normalizado

$(0,0,0; \alpha, \beta, \gamma)$

$\left(\frac{1}{6}, \frac{7}{18}, 0; \alpha\ \beta, \gamma \right)$

$\left(\frac{1}{6}, 0, \frac{7}{18}; \beta, \alpha\ \gamma \right)$

$\left(0, \frac{7}{18}, \frac{7}{18}; \beta, \gamma , \alpha \right)$

$\left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}; \alpha, \beta, \gamma \right)$

Juego inicial (desnormalizado)

(-3, -2, -1; A, B, C)

(4, 1, -1; A B, C)

(-3, 1, 6; A, B C)

(4, -2, 6; A C, B)

(5, 0, 7; A B C)

Al conocerse los resultados del juego se conocen las alternativas que nos indican, bajo que condiciones y con quien es más conveniente asociarse.

Después que se conocen los contricantes se plantean las estrategias para competir y ganar.

CAPITULO IV

CONCLUSIONES

En una presentación descriptiva se tiene como ventaja el observar el conjunto de acciones que puede usar cada uno de los jugadores, sin embargo, por la complejidad de las situaciones reales se hace poco atractivo su uso.

Los teoremas de Von Neumann establecen: que uno de los jugadores busca maximizar para ganar, mientras que el otro jugador busca minimizar para ganar, de las tácticas que use cada jugador dependerá el pago que reciba.

Las estrategias son vectores de tácticas, así como las tácticas son vectores de acciones, sin embargo, estos vectores llamados estrategias tienen como características que todos sus elementos son no negativos y la suma de dichos elementos son igual a la unidad. Estas estrategias pueden ser puras y mixtas.

En general, todos los problemas de análisis de mercado, no se deben dar por terminados hasta no llevar a cabo un análisis de sensibilidad tanto respecto a las estrategias como al valor del juego. Este análisis de sensibilidad determina el mínimo de recursos que se deben invertir por parte de los jugadores sin variar el resultado del juego.

En los juegos multietápicos los jugadores están en función - de las tácticas de un jugador ficticio que es la naturaleza o el- azar, por otra parte, también, no solamente se gana una cantidad- específica, sino la posibilidad de ganar más en el futuro.

Es importante hacer notar que los juegos son actividades en- las que los jugadores, según su capacidad y el conocimiento amplio de las estrategias a utilizar, obtienen un pago de acuerdo a la -- aplicación de dichas estrategias.

El problema de los juegos cooperativos, consiste en coordi-- nar los esfuerzos de los jugadores eficientemente, ya que se tie- nen intereses comunes y en donde la comunicación entre ellos debe ser efectiva.

En los juegos cooperativos se requiere un entendimiento pre- vio para llegar a acuerdos obligatorios y en los que la incerti-- dumbre es un rasgo característico de estos juegos, y la solución- es en general indeterminada.

Un juego de intercambio es un juego de regateo que es una -- subclase de los juegos cooperativos.

Empíricamente la aversión al riesgo decrece con riqueza absoluta ó ingresos. Así que un criterio puede ser como que a peores- condiciones se encuentre el personal de una empresa, peor será el arreglo de salarios.

Lo fundamental en la teoria de los juegos de regateo es la idea del Status Quo, donde las utilidades del Status Quo son los niveles de seguridad de los jugadores.

Los juegos de regateo son juegos de amenaza fija, el juego está definido por una elección particular de amenazas que es la llave de la solución Nash del juego cooperativo general.

De acuerdo a la Teoría de Nash de Juegos Cooperativos, las huelgas son los resultados de irracionalidad o de errores.

En los juegos entre N personas con cooperación, existen coaliciones o subconjuntos de N.

A las coaliciones que satisfacen la regla de toma de decisiones se les llama coaliciones ganadoras, y éstas deben contener el menor número de elementos que les permita seguir siendo ganadoras.

Al resolver un juego se busca: Asociarse, repartición de ganancias, estrategias para jugar el juego y el valor del juego.

El núcleo de un juego se define mediante las condiciones de Von Neumann que corresponden al comportamiento individual y colectivo de tipo racional.

Las objeciones y contraobjeciones que presentan los jugadores son configuraciones de pagos.

Conjunto de regateos, son todas las configuraciones de pagos que si se ponen en vigencia, ningún jugador tiene objeciones contra otro jugador ni éste contraobjeciones sobre el primero.

El concepto de equilibrio implica que todos los jugadores en la coalición o coaliciones de las configuraciones de pagos en el-Kernel, son igualmente fuertes o igualmente débiles para influenciar una decisión cualquiera.

Es importante después de conocer las condiciones del juego-plantear estrategias para competir y ganar.

BIBLIOGRAFIA

1.- Michael Bacharach, Economics and the Theory of Games, the Macmillan Press LTD., New York, 1976.

2.- Morton D. Davis, Teoría del Juego, Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1971.

3.- Von Neumann, John, y Morgenstern, Oskar, The Theory - of Games and Economic Behavior, Princeton: Princeton University Press, 1953.

4.- David Blackwel and M.A. Girshick, Theory of Games and Statistical decisions, Dover Publications, Inc., New-York, 1979.