Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

"ALGUNOS ASPECTOS DE LOS ESPACIOS DE HARDY (HP) CONSIDERADOS COMO ESPACIOS DE BANACH"

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

César Luis García García

México, D. F. Octubre 198

INDICE

INTRODUCCION

El propósito de este trabajo es presentar algunas propiedades de ciertas clases de funciones analíticas con crecimiento restringido en vecindades de la frontera de su dominio. En el primer capítulo introducimos material preparatorio. En el siguiente capítulo se estudian teoremas de representación para un tipo de funciones armónicas en el disco unitario, así como algunos resultados básicos de su comportamiento en la frontera. Veremos también el teorema de convexidad de Hardy que se considera punto de partida en el desarrollo de la teoría de los espacios H^p. Se considerarán también conceptos interesantes como el de subordinación, que permite caracterizar, por ejemplo, a algunas funciones analíticas en función de las propiedades de su imágen. En el último capítulo se introducen, entre otras cosas, el comportamiento en la frontera de las funciones de H^p, los ceros de funciones de H^p y los teoremas de factorización canonica, que describen totalmente a las funciones de clase H^p.

CAPITULO I

§ PRELIMINARES

En este capítulo recopilamos algunos conceptos y resultados generales del Análisis Armónico Clásico que serán utilizados a lo largo de este trabajo

1.1 DEFINICION: $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. $\bar{D}$ y ∂D denotan la cerradura y la frontera topológica de D respectivamente. Si $\delta > 0$, $D_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \delta\}$.

1.2. CONVENCION: Si $f \in L^p([-\pi,\pi])$ $(0 < p \leq \infty)$ $\ni \cdot$ $f(\pi) = f(-\pi)$, f se considerará como una función con dominio en ∂D mediante la correspondencia $f(\theta) = f(e^{i\theta})$ y escribiremos $f \in L^p(\partial D)$.

1.3. NOTACION: Si $f : D \to \mathbb{C}$ es una función, denotaremos por f_r (con $0 < r < 1$) a la función $f_r : \partial D \to \mathbb{C}$ definida por $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$.

1.4. DEFINICION: Sean $f, g \in L^1([-\pi,\pi])$ definimos $f * g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ como sigue:

$$(f*g)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)\, g(t)\, dt$$

. Llamamos a $f*g$ la convolución de f con g.

Es un hecho bien conocido que $f*g$ existe c.d. y que tiene las siguientes propiedades:

1.5. PROPOSICION: Sean $f, g \in L^1([-\pi,\pi])$ entonces:

(a). $f*g \in L^1([-\pi,\pi])$ y $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$

(b). $f*g = g*f$

(c). $(f*g)*h = f*(g*h)$

(d). $f*(g+h) = f*g + f*h$.

(e). Si $f_n \longrightarrow f$ en $L^1([-\pi,\pi])$ y $g_n \longrightarrow g$ en $L^1([-\pi,\pi])$ entonces $f_n * g_n \longrightarrow f*g$ en $L^1([-\pi,\pi])$

1.6. OBSERVACION: En la definición de convolución $(f*g)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-t)g(t)\,dt$ puede suceder que $\theta - t \notin [-\pi,\pi]$. En general si $f:[-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función $\ni$ $f(-\pi) = f(\pi)$ y $x, y \in [-\pi,\pi]$ son tales que $x+y \notin [-\pi,\pi]$. consideremos x_0 el único punto en $[-\pi,\pi)$ $\ni$ $x+y = x_0 + 2\pi k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ y definimos $f(x+y) = f(x_0)$.

1.7 DEFINICION: Si $0<r<1$ y $t \in [-\pi,\pi]$ definimos $P(r,t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$

P se puede considerar como una función con dominio D, haciendo la correspondencia $P(re^{i\theta}) = P(r,\theta)$. P se llama Núcleo de Poisson y tiene las siguientes propiedades:

1.8 PROPOSICION: Si $P(r,\theta)$ es la función definida en 1.7 entonces:

(a). $P(r,\theta) > 0$ $\forall r \in (0,1)$ $\forall \theta \in [-\pi,\pi]$

(b). $P(r,\theta) = P(r,-\theta)$

(c). $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta)\,d\theta = 1$.

(d). $\forall \delta \in (0,\pi)$ fijo, $\lim_{r \to 1^-} \sup_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} P(r,\theta) = 0$

(e). $P(r,\theta)$ es una función armónica (considerada como función de D en $\mathbb{R}$)

(f). $\frac{1-r}{1+r} \leq P(r,\theta) \leq \frac{1+r}{1-r}$ $\forall \theta \in [-\pi,\pi]$, $\forall r \in (0,1)$. (Desigualdades de Harnack).

(g). Si $H: D \to \mathbb{C}$ es la función $H(z) = \frac{1+z}{1-z}$ entonces H es analítica en D.

Se puede comprobar fácilmente que: $P(r,\theta) = \operatorname{Re}\{H(re^{i\theta})\}$. (y en particular concluir que P es armónica (e)).

(h). $P(r,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$ con $re^{i\theta} \in D$. La serie converge uniformemente en compactos contenidos en D. Esta representación en serie se obtiene así:

$$P(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2} = \frac{1}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{+n} e^{-in\theta}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

1.9 DEFINICION: La función $Q(r,t) = \operatorname{Im}\{\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\}$ se llama el <u>núcleo conjugado de Poisson</u>.

Un breve cálculo muestra que $Q(r,t) = \dfrac{2r\operatorname{sen} t}{1-2r\cos t + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2r^n \operatorname{sen} nt.$

1.10 DEFINICION: Si $f \in L^1(\partial D)$ y $u(re^{i\theta}) = (P_r * f)(\theta)$. u es la <u>integral de Poisson de f</u>.

1.11 TEOREMA: Si $\varphi: \partial D \to \mathbb{R}$ es continua y $u: \bar{D} \to \mathbb{R}$ está definida por:

$$u(re^{i\theta}) = \begin{cases} \varphi(e^{i\theta}) & \text{si } r=1 \\ (P_r * \varphi)(\theta) & \text{si } 0 \le r < 1 \end{cases}$$ entonces

u es armónica en D y continua en $\bar{D}$.

El núcleo de Poisson es una herramienta fundamental en la solución al Problema de Dirichlet en el disco $D_\delta(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \delta\}$ con $\delta > 0$ y $a \in \mathbb{C}$.

Para el caso del disco unitario el problema puede plantearse como sigue:

Problema de Dirichlet : Sea $\varphi: \partial D \to \mathbb{R}$ una función continua. Hallar una función $u: \bar{D} \to \mathbb{R}$ tal que:

1). u es armónica en D.
2). u es continua en $\bar{D}$.
3). $u|_{\partial D} = \varphi$.

Es bien sabido que la función $u(re^{i\theta}) = (P_r * \varphi)(\theta)$ resuelve el problema de Dirichlet, pues es una función armónica en D y puede extenderse continuamente a la frontera de D, de tal modo que $u|_{\partial D} = \varphi$.

CAPITULO II

§ INTEGRAL DE POISSON-STIELTJES

En el capítulo anterior se hizo referencia a la integral de Poisson de una función continua $\varphi : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \ni \varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$: $u(re^{i\theta}) = (P_r * \varphi)(\theta)$. Mencionamos que dicha integral es una función armónica en D, continua en $\bar{D}$ y $\ni u(e^{i\theta}) = \varphi(\theta)$ $\forall\, \theta \in [-\pi,\pi]$. En esta sección presentamos una generalización de este concepto que sirve para caracterizar cierta clase importante de funciones armónicas.

2.1 <u>DEFINICION</u> : Sea $p \in (0,\infty]$ definimos

$$H^p = \{ f : D \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es analítica } \wedge \sup_{0<r<1} M_p(r,f) < \infty \} \text{ donde:}$$

$$M_p(r,f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right\}^{1/p} \quad \text{si} \quad p \in (0,\infty) \text{ , y}$$

$$M_\infty(r,f) = \sup_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |f(re^{i\theta})|$$

Si $f \in H^p$ para alguna $p \in (0,\infty]$ diremos que <u>f es de clase H^p</u>. <u>H^p</u> se llama <u>Espacio de Hardy</u>.

Será de gran utilidad considerar las clases de funciones armónicas que satisfacen una propiedad análoga a la dada en 2.1.

2.2 <u>DEFINICION</u> : Sea $p \in (0,\infty]$, se define <u>h^p</u> como la clase de funciones armónicas, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que: $\sup_{0<r<1} M_p(r,u) < \infty$ donde $M_p(r,u)$ está definido como en 2.1.

2.3 PROPOSICION : (a). H^p y h^p son espacios vectoriales, sobre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}$ respectivamente, con la suma y multiplicación por escalares usuales.

(b). $f \in H^p \Leftrightarrow \operatorname{Re}\{f\} \in h^p \wedge \operatorname{Im}\{f\} \in h^p$

(c). Si $0<p<q\leq\infty$ entonces $H^q \subset H^p \wedge (h^q \subset h^p)$.

demostración:

(a). y (b). son consecuencias de las siguientes desigualdades:

$a^p \leq (a+b)^p \leq 2^p(a^p+b^p)$ si $a\geq 0$, $b\geq 0$ y $p\in(0,\infty)$. El caso $p=\infty$ es inmediato.

(c). Sea $f\in H^q$, $q<\infty$, como $|f(re^{i\theta})|^p \leq 1+|f(re^{i\theta})|^q$ $\forall\, re^{i\theta}\in D$ entonces:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+|f(re^{i\theta})|^q)d\theta = 1+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^q d\theta$$

$$\therefore \sup_{0<r<1} M_p^p(r,f) \leq 1+\sup_{0<r<1} M_q^q(r,f) < \infty \text{ pues } f\in H^q$$

$$\therefore f\in H^p$$

El caso $q=\infty$ es claro y la prueba para h^p es análoga.

Más adelante daremos ejemplos donde la contención en (c). es propia.

2.4. DEFINICION: Sea μ una función real, de variación acotada en $[-\pi,\pi]$. La integral de Poisson-Stieltjes de μ es la función $u: D \to \mathbb{R}$ definida por:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,\theta-t)\,d\mu(t) = (P_r * \mu)(\theta).$$

2.5. OBSERVACIONES: (a). Note que la continuidad de P_r garantiza la existencia de la convolución.

(b). 2.4 generaliza el concepto definido en 1. . En efecto, si $\mu(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{t}\varphi(x)dx$ con $t\in[-\pi,\pi]$ y $\varphi:[-\pi,\pi]$ es continua con $\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)$ entonces $\mu(t)$ es absolutamente continua y $\frac{d\mu}{dt}=\varphi$ por lo que:

$$(P_r*\varphi)(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,\theta-t)\varphi(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,\theta-t)d\mu(t)=(P_r*\mu)(\theta)$$

2.6. <u>PROPOSICION</u>: La integral de Poisson-Stieltjes de $\mu\in BV([-\pi,\pi])$ es una función armónica en D.

<u>demostración</u>:

Como μ es una función real se tiene que:

$$(P_r*\mu)(\theta)=Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}d\mu(t)\right\}$$ ya que

$P(r,\theta-t)=Re\left\{\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right\}$ si $z=re^{i\theta}$ (Ver 1.)

Pero la función $f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)$ es analítica en D (consecuencia del teorema de convergencia dominada de Lebesgue).

$\therefore$ $P_r*\mu$ es armónica en D.

2.7. <u>OBSERVACIONES</u>: (a). La proposición anterior sigue siendo válida si la función $\mu\in BV([-\pi,\pi])$ es una función compleja, considerando la definición correspondiente de función armónica compleja. La prueba simplemente se reduciría a una aplicación de 2.6 a $Re\{\mu(t)\}$ e $Im\{\mu(t)\}$. Este argumento será válido en los resultados que se refieran a la integral de Poisson-Stieltjes.

(b). Como se probará en el siguiente teorema, la función $u(re^{i\theta})=(P_r*\mu)(\theta)$ no sólo es armónica en D; también satisface: $\sup_{0<r<1}M_1(r,u)<\infty$, es decir $u\in h^1$.

(c). La función $H_r(\theta) = \dfrac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}$, con $re^{i\theta} \in D$, es llamada el Núcleo de Herglotz y será utilizada constantemente en los capítulos siguientes.

Daremos una caracterización de las integrales de Poisson-Stieltjes, para lo cual se utilizarán resultados debidos a Helly que a continuación enunciamos sin demostrar. (Una demostración está en Natanson [ ]).

TEOREMA (Helly, 1913). : Sea $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de variación uniformemente acotada en $[a,b]$. Entonces existe una subsucesión $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$) que converge en $[a,b]$ a una función $\mu \in BV([a,b])$ tal que $\forall\ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua:

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi(t)\, d\mu_{n_k}(t) = \int_a^b \varphi(t)\, d\mu(t).$$

2.8 TEOREMA : Sea $u : D \to \mathbb{R}$ armónica. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a). u es una integral de Poisson-Stieltjes,

(b). u es diferencia de dos funciones armónicas positivas.

(c). $u \in h^1$.

demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b). Supongamos que $u(re^{i\theta}) = (P_r * \mu)(\theta)$ para alguna $\mu \in BV([-\pi,\pi])$. Como $\mu \in BV([-\pi,\pi])$ entonces $\mu = \mu_1 - \mu_2$ donde μ_1 y μ_2 son funciones no-decrecientes (Teorema de Jordan). Así, por propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes se tiene que: $(P_r * \mu)(\theta) = (P_r * \mu_1)(\theta) - (P_r * \mu_2)(\theta)$ y $P_r * \mu_i$, $i=1,2$ son funciones armónicas positivas.

(b) $\Rightarrow$ (c). Si $u = u_1 - u_2$ con u_1 y u_2 funciones armónicas positivas entonces u es una función armónica y si $r \in (0,1)$ entonces:

$$M_1(r,u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1(re^{it})\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_2(re^{it})\,dt = u_1(0) + u_2(0)$$

(la última igualdad es la bien conocida propiedad del valor medio para funciones armónicas)

$$\therefore \sup_{0<r<1} M_1(r,u) \leq u_1(0) + u_2(0) < \infty$$

$$\therefore u \in h^1 \;\_\_$$

(c). $\Rightarrow$ (a). Sea $u \in h^1$. Para cada $r \in (0,1)$ definimos $\mu_r : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mu_r(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} u(re^{it})\,dt \; . \quad \text{Si } -\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \pi \text{ es una partición}$$

de $[-\pi,\pi]$ y $r \in (0,1)$ es fijo, entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\mu_r(t_k) - \mu_r(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |u(re^{it})|\,dt =$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|\,dt \leq \sup_{0<r<1} M_1(r,u) < \infty$$

$\therefore \mu_r \in BV([-\pi,\pi])$ $\forall\, r \in (0,1)$ y la variación total de μ_r en $[-\pi,\pi]$ está acotada por $\displaystyle\sup_{0<r<1} M_1(r,u)$ $\forall\, r \in (0,1)$.

Consideremos una sucesión $(r_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ $\ni$ $\displaystyle\lim_{m\uparrow\infty} r_m = 1$. Aplicamos el teorema de Helly a la sucesión $(\mu_{r_m})_{m\in\mathbb{N}}$ para obtener una subsucesión $(\mu_{r_{m_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\mu_{r_m})_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $(\mu_{r_{m_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente en $[-\pi,\pi]$ a una función $\mu \in BV([-\pi,\pi])$ tal que:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,d\mu_{r_{m_k}}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,d\mu(t) \quad \forall\, \varphi : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} \text{ continua.}$$

En particular si $r \in (0,1)$

$$(P_r * \mu)(\theta) = \lim_{\substack{k\to\infty \\ r_{m_k} > r}} (P_r * \mu_{r_{m_k}})(\theta) = \lim_{\substack{k\to\infty \\ r_{m_k} > r}} (P_r * u_{r_{m_k}})(\theta) \quad \left(\text{pues } \frac{d\mu_{r_{m_k}}}{dt} = u \;\forall k\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} u(r_{m_k} r e^{i\theta}) \quad (\text{porque } u \text{ es armónica})$$

$$= u(re^{i\theta}) \quad (\text{por ser } u \text{ continua y } \lim_{k\to\infty} r_{m_k} = 1)$$

$$\therefore \quad u(re^{i\theta}) = (P_r * \mu)(\theta) \;\_\_$$

2.9. COROLARIO (Representación de Herglotz): Si $u: D \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica positiva entonces $u(re^{i\theta}) = (P_r * \mu)(\theta)$ con μ función no decreciente.

demostración:

Basta notar que en (I) $\Rightarrow$ (a). cada una de las funciones μ_r es no decreciente y que el límite puntual de funciones no decrecientes es una función no decreciente.

2.10 OBSERVACION: La representación de una función $u \in h^1$ como integral de Poisson-Stieltjes es única en el siguiente sentido: si $(P_r * \mu_1)(\theta) = u(re^{i\theta}) = (P_r * \mu_2)(\theta)$ entonces $\mu_1 = \mu_2$ c.d.

demostración:

Sea $\mu(t) = \mu_1(t) - \mu_2(t)$, entonces $(P_r * \mu)(\theta) \equiv 0$, probaremos que $\mu = 0$ c.d..

Por completación analítica del núcleo de Poisson tenemos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t) \equiv i\gamma$$

con $|z|<1$, $z = re^{i\theta}$ y γ una constante real. Ahora $\dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-int} z^n$ (convergencia uniforme en compactos contenidos en D).

$$\therefore \quad i\gamma = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t) = \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\, d\mu(t)$$

$$\therefore \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\, d\mu(t) = 0 \quad \forall\, n \geq 0$$

y por conjugación obtenemos $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\, d\mu(t) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Finalmente como cada función característica (de cualquier intervalo) puede ser aproximada en L^1 por funciones continuas y estas a su vez por polinomios trigonométricos concluimos que $d\mu$ es la medida idénticamente cero.

§ LIMITE NO TANGENCIAL

Para funciones armónicas (y analíticas) en una región R. (abierto y conexo) uno de los problemas de mayor trascendencia e interés es el que se refiere al comportamiento de tales funciones en la frontera de R o en vecindades de ella. Por ejemplo si u es la función armónica que se obtiene al considerar la integral de Poisson de una función φ integrable, es decir, $u(re^{i\theta}) = (P_r * \varphi)(\theta)$, $re^{i\theta} \in D$, el teorema de Abel garantiza que en cada punto θ, donde φ es continua, la siguiente igualdad se verifica:

$$\lim_{r \to 1^-} u(re^{i\theta}) = \varphi(\theta)$$

En el caso de la integral de Poisson-Stieltjes de una función $\mu \in BV([-\pi,\pi])$ probaremos que $\lim_{r\to 1^-} (P_r * \mu)(\theta) = \mu'(\theta)$ para cada θ donde la derivada simétrica $D\mu(\theta) = \lim_{t\to 0} \dfrac{\mu(\theta+t)-\mu(\theta-t)}{2t}$ exista. Note que si μ es derivable en θ entonces $D\mu(\theta)$ existe y $D\mu(\theta) = \mu'(\theta)$.

2.11 **TEOREMA** (P. Fatou): Sea $u(re^{i\theta}) = (P_r * \mu)(\theta)$ con $re^{i\theta} \in D$ y $\mu \in BV([-\pi,\pi])$. Si la derivada simétrica en θ_0 existe, entonces $\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta_0})$ existe y $\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta_0}) = D\mu(\theta_0)$.

demostración:

Probaremos primero el caso $\theta_0 = 0$. Sea $A = D\mu(0)$. Como $P(r,t) = P(r,-t)$ y $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)\,dt = 1$ (1.) entonces:

$$u(re^{i\theta_0}) - A = u(r) - A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)\,(d\mu(t) - A\,dt).$$

Integramos por partes para obtener:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)(d\mu(t) - A\,dt) = \frac{1}{2\pi}\Big[P(r,t)(\mu(t) - At)\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\mu(t) - At)\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\,dt$$

Ahora si $\theta \in [-\pi,\pi]$ es fijo, entonces $\lim_{r\to 1^-} P(r,\theta)=0$ por lo que

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\Big[P(r,t)(\mu(t)-At)\Big]_{-\pi}^{\pi}=0$$

Así solo falta probar que $\lim_{r\to 1^-}\int_{-\pi}^{\pi}(\mu(t)-At)\,\frac{\partial P}{\partial t}(r,t)\,dt=0$ para concluir que $\lim_{r\to 1^-}(u(r)-A)=0$.

Sea $\varepsilon>0$, como $D\mu(0)$ existe, elegimos $\delta\in(0,\pi)$ tal que

$$\left|\frac{\mu(t)-\mu(-t)}{2t}-A\right|<\varepsilon \text{ si } 0<|t|<\delta$$

Si $0<\delta\leq |t|\leq \pi$ entonces $\left|\frac{\partial P}{\partial t}(r,t)\right|\leq \frac{2r(1-r^2)}{(1-2r\cos\delta+r^2)^2}$ y además $\lim_{r\to 1^-}\frac{2r(1-r^2)}{(1-2r\cos\delta+r^2)^2}=0$ luego por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue se tiene que:

$$\lim_{r\to 1^-}\int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta}(\mu(t)-At)\frac{\partial P}{\partial t}(r,t)\,dt=\int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta}\lim_{r\to 1^-}(\mu(t)-At)\frac{\partial P}{\partial t}(r,t)\,dt=0 \quad \cdots (1)$$

Por otro lado:

$$-\int_{-\delta}^{\delta}(\mu(t)-At)\frac{\partial P}{\partial t}(r,t)dt=2\int_0^{\delta}\left[\frac{\mu(t)-\mu(-t)}{2t}-A\right]t\left[-\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\right]dt$$

$$\therefore \left|\int_{-\delta}^{\delta}(\mu(t)-At)\frac{\partial P}{\partial t}(r,t)\,dt\right|\leq 2\int_0^{\delta}\left|\frac{\mu(t)-\mu(-t)}{2t}-A\right|\left|\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\right|t\,dt\leq$$

$$\leq 2\varepsilon\int_0^{\delta}t\left|\frac{\partial P}{\partial t}(r,t)\right|dt\leq 2\varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}t\left(-\frac{\partial P}{\partial t}(r,t)\right)dt=2\varepsilon\left[O(1)+\int_{-\pi}^{\pi}P(r,t)dt\right]$$

$$\therefore \lim_{r\to 1^-}-\int_{-\delta}^{\delta}(\mu(t)-At)\frac{\partial P}{\partial t}(r,t)\,dt=0 \quad \ldots (2)$$

Finalmente (1) y (2) implican que $\lim_{r\to 1^-}(u(r)-A)=0$

En el caso $\theta_0 \neq 0$ considere $f:[-\pi,\pi] \longrightarrow [-\pi,\pi]$ definida por $f(t) = \theta_0 + t \pmod{2\pi}$ y sea $\nu(t) = \mu(f(t))$; note que $\nu \in BV([-\pi,\pi])$ y que

$$D\nu(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\nu(t)-\nu(-t)}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{\mu(\theta_0+t)-\mu(\theta_0-t)}{2t} = D\mu(\theta_0)$$

$$\therefore \lim_{r\to 1^-} (P_r * \nu)(0) = D\nu(0) = D\mu(\theta_0).$$

Ahora para cada $r \in (0,1)$ fija.

$$(P_r*\nu)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r, 0-t)\, d\nu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)\, d\nu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\theta_0}^{\pi-\theta_0} P(r, t-\theta_0)\, d\nu(t-\theta_0)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta_0 - t)\, d\mu(t) = (P_r * \mu)(\theta_0)$$

$$\therefore \lim_{r\to 1^-} (P_r * \mu)(\theta_0) = D\mu(\theta_0)$$

2.12 <u>COROLARIO</u> : Si $u \in h^1$ entonces $\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta})$ existe c.d.

<u>demostración</u>:

$u \in h^1 \Rightarrow u(re^{i\theta}) = (P_r * \mu)(\theta)$ con $\mu \in BV([-\pi,\pi])$ pero si $\mu \in BV([-\pi,\pi])$ entonces μ es diferenciable c.d. (por el teorema de Lebesgue, Ver Royden [ ], pp.

En particular $D\mu$ existe c.d. y $\therefore \lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta})$ existe c.d.

2.13 <u>COROLARIO</u> : Si $u(re^{i\theta}) = (P_r * \varphi)(\theta)$ con $\varphi \in L^1$ entonces $\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta}) = \varphi(\theta)$ c.d.

<u>demostración</u>:

Sea $\mu(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} \varphi(t)\,dt$, $\theta \in [-\pi,\pi]$. La función μ es absolutamente continua (en particular de variación acotada) y además $\mu'(\theta) = \varphi(\theta)$ c.d. . Ahora:

$$\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} (P_r * \varphi)(\theta) = \lim_{r\to 1^-} (P_r * \mu)(\theta) \quad \text{pues } \frac{d\mu}{dt} = \varphi$$

y como $\lim_{r\to 1^-}(P_r * \mu)(\theta) = \mu'(\theta) = \varphi(\theta)$ c.d. se tiene que:

$$\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta}) = \varphi(\theta) \quad \text{c.d.}$$

2.14 <u>COROLARIO</u>: Si $f \in H^p$ (h^p) con $1 \le p \le \infty$ entonces el límite radial $\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ existe casi dondequiera.

<u>demostración</u>:
Es una consecuencia inmediata del corolario 2.12 y la proposición 2.3

2.15 <u>DEFINICION</u> (Límite no tangencial): Sea f una función sobre D, $e^{i\theta_0} \in \partial D$ fijo, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y llamemos <u>$S_\alpha(\theta_0)$</u> a la siguiente region:
Considere el sector <u>con</u> vértice $e^{i\theta_0}$ de abertura 2α y simétrico con respecto al radio $\overline{0e^{i\theta_0}}$, el interior de esta región es $S_\alpha(\theta_0)$ (Ver Figura 1).

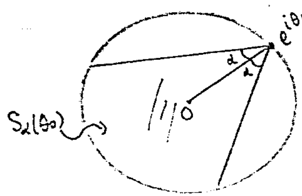

Figura 1.

Decimos que la función f <u>tiene límite no tangencial</u> l en $e^{i\theta_0}$ si para cada $\alpha \in (0, \pi/2)$ fija y para z en el interior de la región $S_\alpha(\theta_0)$ se tiene que $\lim_{z\to e^{i\theta_0}} f(z) = l$.

Posteriormente demostraremos que en el corolario 2.14 es posible cambiar las hipótesis "$1 \le p \le \infty$" por "$0 < p \le \infty$" y "límite radial" por "límite no tangencial". De hecho consideraremos una clase más amplia de funciones, que contiene a todos los espacios H^p $0<p\leq\infty$, en la cual cada uno de sus elementos tiene límite no tangencial c.d.; para la demostración de este resultado será de gran utilidad el siguiente teorema:

2.16 <u>TEOREMA (P. Fatou, 1906)</u>: Si $f\in H^\infty$ entonces f tiene límite no tangencial casi dondequiera.

<u>demostración</u>:

Por el corolario 2.14 se sabe que f tiene límite radial c.d.. Sea $\theta_0\in[-\pi,\pi]$ tal que $\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta_0})=l$ (es decir θ_0 es un valor en el cual el límite radial existe). Probaremos que f tiene límite no tangencial l en $e^{i\theta_0}$.

Sea $D_1=\{z\in\mathbb{C}: |z-1|<1\}$ y sean $R: D\to D$, $R(z)=ze^{i(\pi-\theta_0)}$; $T: D\to D_1$, $T(z)=1+z$. Llamaremos $g=T\circ R$.

Ahora sea $\tilde{f}: D_1\to\mathbb{C}$, la función definida por:

$$\tilde{f}(z)=(f\circ g^{-1})(z).$$

observaciones:

(i). La función $g: D\to D_1$ es una función analítica; más aun es un homeomorfismo isométrico, por lo cual g^{-1} existe y así $\tilde{f}$ queda bien definida.

(ii). $\tilde{f}$ es una función analítica acotada con $\sup_{0<r<1} M_\infty(r,\tilde{f})=\sup_{0<r<1} M_\infty(r,f)$.

(iii). $\lim_{s\to 0}\tilde{f}(s)=l$ $(s\in D_1\cap\mathbb{R})$. En efecto, si s varía sobre $D_1\cap\mathbb{R}$ entonces: $\lim_{s\to 0^+}\tilde{f}(s)=\lim_{s\to 0^+}(f\circ g^{-1})(s)=\lim_{s\to 0^+} f((1-s)e^{i\theta_0})=\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ con $r=1-s$

$$=l$$

El siguiente paso es probar que $\tilde{f}$ tiene límite no tangencial l en 0; note que esto implica que f tiene límite no tangencial l en $e^{i\theta_0}$.

Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos $\tilde{f}_n: D_1\to D$ como sigue: $\tilde{f}_n(z)=\tilde{f}\left(\frac{z}{n}\right)$. La sucesión $(\tilde{f}_n)_{n=1}^\infty$ constituye una familia de funciones analíticas uniformemente acotadas pues $\forall z \in D_1$ y $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|\tilde{f}_n(z)| = |\tilde{f}(\tfrac{z}{n})| \leq \sup_{0<r<1}\{\sup_{-\pi\leq\theta\leq\pi}|\tilde{f}(1+re^{i\theta})|\} = \sup_{0<r<1} M_\infty(r,f) < +\infty .$$

Así $(\tilde{f}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una familia normal y por el teorema de Montel (Ver Marsden, J.E. [ ]. p. 337) existe una subsucesión de $(\tilde{f}_n)_{n=1}^{\infty}$ que por comodidad seguiremos denotando $(\tilde{f}_n)_{n=1}^{\infty}$, que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D_1 a una función analítica en D_1: $F(z)$.

Sea $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ y sean $r_1, r_2 \in (0,1)$ $\ni$ $r_1 < r_2$, consideremos $K_{r_1,r_2} = \{z \in D_1 : |\arg z| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ (Ver figura 2)

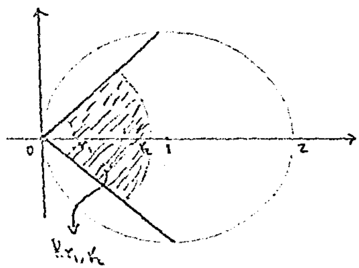

Figura 2

K_{r_1,r_2} es un subconjunto compacto de D_1, por lo cual $\tilde{f}_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(z)$ uniformemente en K_{r_1,r_2}. Ahora si $z \in K_{r_1,r_2} \cap \mathbb{R}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}(\frac{z}{n}) = l$ $\therefore$ $F(z) = l$ $\forall z \in K_{r_1,r_2} \cap \mathbb{R}$ $\therefore$ $F(z) \equiv l$

y $\tilde{f}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ uniformemente en K_{r_1,r_2}

$\therefore$ $\lim\limits_{z\to 0} \tilde{f}(z) = l$ si z varía en el interior de $S'_\alpha(0)$.

Aquí $S'_\alpha(0) = \{z \in D' : |\arg z| \leq \alpha\}$

§ FUNCIONES SUBARMONICAS

2.17 DEFINICION : $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una región si es abierto y conexo.

2.18 DEFINICION : Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región acotada y $g : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua. Decimos que g es subarmónica en Ω si para cada región Ω' con $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ y para cada función $u : \overline{\Omega'} \to \mathbb{R}$, armónica en Ω' y continua en $\overline{\Omega'}$, que satisface $g(z) \le u(z)$ $\forall z \in \partial\Omega'$ se cumple que $g(z) \le u(z)$ $\forall z \in \Omega'$.

Es fácil comprobar que toda función armónica es subarmónica. A continuación caracterizamos a las funciones subarmónicas mediante una desigualdad que generaliza la propiedad del valor medio para funciones armónicas.

2.19 TEOREMA : Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región acotada. g es subarmónica en Ω si y solo si $\forall z_0 \in \Omega$ $\exists r_0 > 0 \ni \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r_0\} \subset \Omega$ y :

$$g(z_0) \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \quad \forall r < r_0 \quad \cdots (3).$$

NOTA : La condición (3) se usa en algunas ocasiones como definición de función subarmónica.

demostración:

($\Rightarrow$) Sea $z_0 \in \Omega$ y $r_0 > 0 \ni \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r_0\} \subset \Omega$ (existe tal r_0 por ser Ω abierto). Sea $0 < r < r_0$ y $u : \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\} \to \mathbb{R}$ la función armónica en $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ que satisface $u(z) = g(z)$ $\forall z \ni |z - z_0| = r$ (La función armónica u, a la que nos referimos es la solución al problema de Dirichlet en el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ para la función $g|_{\{z : |z - z_0| = r\}}$.

Como g es subarmónica en Ω concluimos que $g(z_0) \le u(z_0)$

y $$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

$$\therefore \; g(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta \quad \text{si } r<r_0.$$

($\Leftarrow$). Sea Ω' una región tal que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ y considere $u: \overline{\Omega'} \longrightarrow \Omega$ una función armónica en Ω', continua en $\overline{\Omega'}$ tal que $g(z) \leq u(z)$ $\forall z \in \partial\Omega'$. Probaremos que $g(z) \leq u(z)$ $\forall z \in \Omega'$.

Supongamos que $\exists\, z \in \Omega'$ tal que $g(z) > u(z)$. Sea $h: \overline{\Omega'} \to \Omega$ la función definida por $h(z) = g(z) - u(z)$. h es una función continua en $\overline{\Omega'}$ luego $\exists\, z_0 \in \overline{\Omega'} \ni h(z) \leq h(z_0)$ $\forall z \in \overline{\Omega'}$. Sea $m = h(z_0) = \max\{h(z) : z \in \overline{\Omega'}\}$. Es claro que $m > 0$.

Ahora si $M = \{z \in \overline{\Omega'} : h(z) = m\}$ entonces:

- $M \subset \Omega'$ porque $h(z) \leq 0$ $\forall z \in \partial\Omega'$
- M es cerrado, pues h es continua y $M = h^{-1}(\{m\})$ y
- M no es abierto ya que Ω' es conexo y h no es constante.

Como M no es abierto $\exists\, z_1 \in M \ni D_r(z_1) \cap (\Omega' - M) \neq \emptyset$ $\forall r > 0$ ... (4). (Donde $D_r(z_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| < r\}$). Elegimos una sucesión $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, $D_{r_n}(z_1) \subset \Omega'$ y $\partial D_{r_n}(z_1) \cap (\Omega' - M) \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Note que tal sucesión existe porque Ω' es abierto y z_1 satisface (4).

Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $h(z) \leq m$ $\forall z \in \partial D_{r_n}(z_1)$ y la desigualdad es estricta en algún arco abierto de $\partial D_{r_n}(z_1)$, porque M es cerrado y $\partial D_{r_n}(z_1) \cap (\Omega' - M) \neq \emptyset$; luego

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(z_1 + r_n e^{i\theta})\,d\theta < m \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por otro lado como $u(z_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_1 + r_n e^{i\theta})\,d\theta$ se tiene que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z_1 + r_n e^{i\theta})\,d\theta - u(z_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(z_1 + r_n e^{i\theta})\,d\theta < m = h(z_1) = g(z_1) - u(z_1)$$

$$\therefore \; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z_1 + r_n e^{i\theta})\,d\theta < g(z_1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \; \text{⚲}$$

$\therefore$ $g(z) \leq u(z)$ $\forall z \in \Omega'$ $\therefore$ g es subarmónica.

Los siguientes ejemplos de funciones subarmónicas se usarán constantemente en secciones posteriores:

2.20 EJEMPLOS (a). Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una región, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ analítica y $p>0$ entonces $g: \Omega \to \mathbb{C}$, definida por $g(z) = |f(z)|^p$ es subarmónica en Ω.

demostración: Utilizaremos la caracterización dada en el teorema 2.19. Sea $z_0 \in \Omega$. Si $f(z_0)=0$ entonces:

$$g(z_0) = 0 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \quad \forall r>0 \ni D_r(z_0) \subset \Omega$$

Ahora si $f(z_0) \neq 0$ entonces $\exists\, r_0 > 0 \ni D_{r_0}(z_0) \subset \Omega$ y $f(z) \neq 0$ $\forall z \in D_{r_0}(z_0)$. Luego alguna rama de $[f(z)]^p$ es analítica en $D_{r_0}(z_0)$ y por tanto:

$$[f(z_0)]^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(z_0 + re^{i\theta})]^p\, d\theta$$

con $r<r_0$. (Aquí hemos aplicado la propiedad del valor medio a las funciones armónicas $Re\{[f(z)]^p\}$ e $Im\{[f(z)]^p\}$.

$$\therefore \ g(z_0) = |f(z_0)|^p \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^p\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \quad \forall r<r_0$$

$\therefore$ g es subarmónica en Ω

(b) Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una región, $u: \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica y $p \ge 1$ entonces $g(z) = |u(z)|^p$ es subarmónica en Ω.

demostración:

Nuevamente apelaremos al teorema 2.19. El caso $p=1$ es inmediato de la propiedad del valor medio para funciones armónicas.

Si $p>1$, sea $z_0 \in \Omega$ y $r_0>0$ tales que $D_{r_0}(z_0) \subset \Omega$ y $q \in (0,\infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sea $0<r<r_0$ entonces:

$$|u(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(z_0+re^{i\theta})|\,d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|u(z_0+re^{i\theta})|^p\,d\theta\right\}^{1/p}\cdot\left\{\int_{-\pi}^{\pi}1\,d\theta\right\}^{1/q} \quad \text{(desigualdad de Hölder).}$$

$$\therefore\ |u(z_0)|^p \leq \frac{(2\pi)^{p/q}}{(2\pi)^p}\int_{-\pi}^{\pi}|u(z_0+re^{i\theta})|^p\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(z_0+re^{i\theta})|^p\,d\theta \quad r<r_0$$

$$\therefore\ g(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \quad \forall r<r_0$$

$\therefore$ g es subarmónica.

(c). Sea $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica y $g(z)=\log^+|f(z)|$ entonces g es subarmónica.

$$\text{Aquí } \log^+ x = \begin{cases} \log x & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

demostración:

Sea $z_0 \in \Omega$. Si $|f(z_0)| \leq 1$ entonces:

$$g(z_0) = 0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(z_0+re^{i\theta})|\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \quad \forall r>0 \ni D_r(z_0)\subset\Omega$$

Por otro lado si $|f(z_0)|>1$ entonces $\exists\ r_0>0 \ni \overline{D_{r_0}(z_0)} \subset \Omega$ y $|f(z)|>1$ $\forall z \in \overline{D_{r_0}(z_0)}$ por lo que $\forall z \in D_{r_0}(z_0)$ se tiene que:

$$\log^+|f(z)| = \log|f(z)| = \operatorname{Re}\{\log f(z)\}.$$

Como $\log\{f(z)\}$ es analítica en $D_{r_0}(z_0)$ entonces $\log^+|f(z)|$ es armónica en $D_{r_0}(z_0)$ y:

$$g(z_0) = \log^+|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(z_0+re^{i\theta})|\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \quad \forall\, 0<r<r_0$$

$\therefore$ g es subarmónica.

§ TEOREMA DE CONVEXIDAD DE HARDY.

Considerado como punto de partida en el desarrollo de la teoría de los espacios H^p, el Teorema de Convexidad de Hardy se refiere al comportamiento de las medias $M_p(r,f)$ $(0<p\leq\infty)$ como funciones de r. Para algunos valores de p, fácilmente se pueden hacer algunas afirmaciones al respecto. Por ejemplo, si $p=\infty$, se tiene como consecuencia inmediata del Principio del Módulo Máximo que $M_\infty(r,f) \leq M_\infty(s,f)$ cuando $r\leq s$ y f es una función analítica en D. o bién si $p=2$ y $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es una función analítica en D (en particular la serie converge uniformemente en compactos contenidos en D) entonces por la idéntidad de Parseval o estimando directamente se tiene:

$$M_2^2(r,f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

De donde $M_2(r,f)$ es una función creciente de r y $f\in H^2 \iff \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$. Como veremos más adelante, el teorema de Hardy muestra que $\forall\, p\in(0,\infty]$ y $\forall\, f$ analítica en D dada, $M_p(r,f)$ es una función creciente de r. Más aún: se tienen ciertas relaciones de convexidad cuya descripción requiere de los siguientes elementos:

2.21. DEFINICION: Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ función. Decimos que <u>g es una función convexa de $\log r$</u> si siempre que $\log r = \alpha\log r_1 + (1-\alpha)\log r_2$, con $0<r_1<r_2<1$, $0<\alpha<1$; se cumple que $g(r)\leq \alpha g(r_1)+(1-\alpha)g(r_2)$

2.22. TEOREMA: Sea $g: D\to\mathbb{R}$ subarmónica y sea $m(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\,d\theta$ $0\leq r<1$. entonces:

(a). m es una función creciente, y

(b). m es una función convexa de $\log r$.

demostración: (a). Sean $0 \leq r_1 < r_2 < 1$ y sea $u: \overline{D_{r_2}(0)} \to \mathbb{R}$ la función armónica en $D_{r_2}(0)$, continua en $\overline{D_{r_2}(0)}$ y $\ni$ $u(z) = g(z)$ $\forall z \in \partial D_{r_2}(0)$.

Como g es subarmónica entonces $g(z) \leq u(z)$ $\forall z \in \overline{D_{r_2}(0)}$ en particular:

$$m(r_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(r_1 e^{i\theta})\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r_1 e^{i\theta})\,d\theta = u(0)$$

pero $$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r_2 e^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(r_2 e^{i\theta})\,d\theta = m(r_2)$$

$$\therefore\ m(r_1) \leq m(r_2)$$

$\therefore$ m es creciente.

(b). Supongamos que $\log r = \alpha \log r_1 + (1-\alpha)\log r_2$ donde $0<\alpha<1$ y $0<r_1<r_2<1$.
Sea u función armónica en $D_{r_1,r_2} = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ continua en $\overline{D_{r_1,r_2}}$ $\ni$ $g(z) = u(z)$ $\forall z \in \partial D_{r_1,r_2}$ entonces $g(z) \leq u(z)$ $\forall z \in \overline{D_{r_1,r_2}}$ y:

$$m(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(se^{i\theta})\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(se^{i\theta})\,d\theta \quad \forall s \in [r_1, r_2]$$

Por otro lado $\exists$ $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(se^{i\theta})\,d\theta = a\log s + b$ $\forall s \in [r_1, r_2]$

(Para una demostración ver Ahlfors, L. [ ] pp. 163-164).

$$\therefore\ m(s) \leq a\log s + b \quad \forall s \in [r_1, r_2]$$

Note que $m(r_i) = a\log r_i + b$ $i=1,2$

Finalmente como $\log r = \alpha\log r_1 + (1-\alpha)\log r_2$ entonces necesariamente $r \in [r_1, r_2]$ y:

$$m(r) \leq a\log r + b = a(\alpha\log r_1 + (1-\alpha)\log r_2) + b(\alpha + (1-\alpha))$$
$$= \alpha\, m(r_1) + (1-\alpha)\, m(r_2)$$

$$\therefore\ m(r) \leq \alpha\, m(r_1) + (1-\alpha)\, m(r_2)$$

$\therefore$ m es convexa de $\log r$.

2.23 OBSERVACION: De la demostración anterior se sigue que $m(r)$ es una función convexa de $\log r$ si g sólo es subarmónica en una región del tipo D_{S_1,S_2}.

Estamos ya en condiciones de presentar el teorema de Hardy. La prueba que damos usa funciones subarmónicas y es debida a F. Riesz (1922).

2.24 TEOREMA (Teorema de Convexidad de Hardy): Sea f una función analítica en D y sea $p\in(0,\infty]$. Entonces: (a). $M_p(r,f)$ es una función creciente de r (b). $\log M_p(r,f)$ es una función convexa de $\log r$.

demostración:

(a). Si $0<p<\infty$ entonces por el ejemplo 2.20 (a) sabemos que la función $g(z)=|f(z)|^p$ es subarmónica en D y por el teorema 2.22 $M_p^p(r,f)$ es una función creciente de r $\therefore$ $M_p(r,f)$ es una función creciente de r.

Si $p=\infty$ la conclusión es consecuencia inmediata del principio del módulo máximo.

Note que del ejemplo 2.20 (b) y del teorema 2.22. también se puede concluir que $M_p(r,u)$ es una función creciente de r si u es armónica en D y $p\geq 1$.

(b). Si $0<p<\infty$ entonces para $\lambda\in\mathbb{R}$ la función $h(z)=|z|^\lambda|f(z)|^p$ es subarmónica en $\dot{D}_1(0)=\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\}$ porque $z^{\lambda/p}f(z)$ es analítica en la región $\dot{D}_1(0)$ y por 2.20 (a). Luego de la observación 2.23. se sigue que:

$$m(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|h(re^{i\theta})|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|re^{i\theta}|^\lambda|f(re^{i\theta})|d\theta=r^\lambda M_p^p(r,f) \quad \text{es}$$

una función convexa de $\log r$.

Para probar que $\log M_p(r,f)$ es convexa de $\log r$, supongamos que $\log r=\alpha\log r_1+(1-\alpha)\log r_2$ (o equivalentemente $r=r_1^\alpha r_2^{1-\alpha}$) con $0<r_1<r_2<1$ y $0<\alpha<1$. Sea λ_0 tal que:

$$r_1^{\lambda} M_p^{\rho}(r_1,f) = r_2^{\lambda} M_p^{\rho}(r_2,f) = c$$ (fácilmente se comprueba que existe tal λ).

Como $m(r) = r^{\lambda} M_p^{\rho}(r,f)$ es una función convexa de $\log r$, si $r = r_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha}$ entonces:

$$r^{\lambda} M_p^{\rho}(r,f) = m(r) \leq \alpha m(r_1) + (1-\alpha) m(r_2)$$
$$= \alpha \cdot c + (1-\alpha)\cdot c = c$$

Ahora:

$$r^{\lambda} M_p^{\rho}(r,f) \leq c = c^{\alpha} c^{1-\alpha} = \{m(r_1)\}^{\alpha} \{m(r_2)\}^{1-\alpha}$$
$$= r_1^{\lambda\alpha} r_2^{\lambda(1-\alpha)} \{M_p^{\rho}(r_1,f)\}^{\alpha} \{M_p^{\rho}(r_2,f)\}^{1-\alpha}$$

y como $r^{\lambda} = r_1^{\lambda\alpha} r_2^{\lambda(1-\alpha)}$ entonces:

$$M_p^{\rho}(r,f) \leq \{M_p^{\rho}(r_1,f)\}^{\alpha} \{M_p^{\rho}(r_2,f)\}^{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \log M_p^{\rho}(r,f) \leq \alpha \log M_p^{\rho}(r_1,f) + (1-\alpha) \log M_p^{\rho}(r_2,f)$$

$$\Rightarrow \log M_p(r,f) \leq \alpha \log M_p(r_1,f) + (1-\alpha) \log M_p(r_2,f)$$

$$\Rightarrow \log M_p(r,f) \text{ es convexa de } \log r.$$

Si $p=\infty$ el resultado es el célebre teorema de los Tres Círculos de Hadamard. Supondremos que la función f en cuestión no es constante.

Nuevamente sea $\log r = \alpha \log r_1 + (1-\alpha)\log r_2$ con $0<r_1<r_2<1$ y $0<\alpha<1$ probaremos que: $\log M_\infty(r,f) \leq \alpha \log M_\infty(r_1,f) + (1-\alpha)\log M_\infty(r_2,f)$.

Como en la parte anterior considere $\lambda<0$ tal que

$$r_1^{\lambda} M_\infty(r_1,f) = r_2^{\lambda} M_\infty(r_2,f) = c$$

(fácilmente se obtiene que $\lambda = \log\left(\frac{M_\infty(r_2,f)}{M_\infty(r_1,f)}\right)\cdot \frac{1}{\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} < 0$)

Sea $D_{r_1,r_2} = \{z \in \mathbb{C} : r_1<|z|<r_2\}$ y $g: \overline{D_{r_1,r_2}} \longrightarrow \mathbb{C}$ la función definida por $g(z) = z^{\lambda} f(z)$. g es una función analítica en $B = D_{r_1,r_2} \setminus \{w \in D_{r_1,r_2} : w \in \mathbb{R}^-\}$. (considerando la rama principal de z^{λ}).

A continuación demostraremos que $|g(z)| \leq c$ $\forall z \in \overline{B} = \overline{D_{r_1,r_2}}$

Por el principio del Módulo Máximo basta probar que $|g(z)| \leq C$ si $z \in \partial B$.
Ahora $\partial B = \partial D_{r_1} \cup \partial D_{r_2} \cup (D_{r_1,r_2} \cap \mathbb{R}^-)$

Si $z \in \partial D_{r_1} \cup \partial D_{r_2}$ claramente $|g(z)| \leq C$ (por definición de C).
por otro lado si $z \in D_{r_1,r_2} \cap \mathbb{R}^-$ es tal que $|g(z)| > C$ entonces

$$r_1^{\lambda} |f(z)| > |z|^{\lambda} |f(z)| = |g(z)| > C = r_1^{\lambda} M_{\infty}(r_1, f)$$

$$\Rightarrow |f(z)| > M_{\infty}(r_1, f)$$

Analogamente $r_1^{\lambda}|f(z)| > r_2^{\lambda} M_{\infty}(r_2, f)$

$$\Rightarrow |f(z)| > \frac{r_2^{\lambda}}{r_1^{\lambda}} M_{\infty}(r_2, f) > M_{\infty}(r_2, f) \quad \left(\frac{r_2}{r_1} > 1\right)$$

$$\therefore |f(z)| > \max\{M_{\infty}(r_1,f), M_{\infty}(r_2,f)\} = \max\{|f(w)| : w \in \partial D_{r_1,r_2}\}$$ ¡!

pues f es analítica en $\overline{D_{r_1,r_2}}$ y z es un elemento de D_{r_1,r_2}

$$\therefore |g(z)| \leq C \quad \forall z \in \overline{B} = \overline{D_{r_1,r_2}}$$

En particular $r^{\lambda} M_{\infty}(r,f) \leq C$ pues $|g(re^{i\theta})| = r^{\lambda} |f(re^{i\theta})| \leq C \; \forall \theta \in [-\pi, \pi]$
Finalmente:

$$r^{\lambda} M_{\infty}(r,f) \leq C = C^{\alpha} C^{1-\alpha} [r_1^{\lambda} M_{\infty}(r_1,f)]^{\alpha} [r_2^{\lambda} M_{\infty}(r_2,f)]^{1-\alpha}$$

$$= (r_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha})^{\lambda} \{M_{\infty}(r_1,f)\}^{\alpha} \{M_{\infty}(r_2,f)\}^{1-\alpha}$$

y como $r = r_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha}$

$$M_{\infty}(r,f) \leq M_{\infty}^{\alpha}(r_1,f) \cdot M_{\infty}^{1-\alpha}(r_2,f)$$

$$\therefore \log M_{\infty}(r,f) \leq \alpha \log M_{\infty}(r_1,f) + (1-\alpha) M_{\infty}(r_2,f)$$

$$\therefore \log M_{\infty}(r,f) \text{ es convexa de } \log r$$

<u>NOTA:</u> La forma en que usualmente se enuncia el Teorema de los tres círculos de Hadamard se obtiene haciendo $\alpha = \log\left(\frac{r_2}{r}\right) / \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.

2.25 <u>OBSERVACION:</u> Como $M_p(r,f)$ $(0 < p \leq \infty)$ es una función creciente de r entonces $\sup_{0<r<1} M_p(r,f) = \lim_{r \nearrow 1^-} M_p(r,f) \quad \forall p \in (0,\infty]$.

§ TEOREMAS MAXIMALES DE HARDY Y LITTLEWOOD.

Cuando consideramos las integrales de Poisson de funciones continuas en $[-\pi,\pi]$ obtuvimos que estas eran de clase h^1 (observación 2.5). La siguiente proposición muestra que en general la integral de Poisson de una función $\varphi\in L^p([-\pi,\pi])$ $(1\le p\le\infty)$ es una función de clase h^p y da una cota para $\sup_{0<r<1} M_p(r,u)$ con $u=P_r*\varphi$.

2.26 PROPOSICION: Sea $p\in[1,\infty]$ fija y $\varphi\in L^p([-\pi,\pi])$. Si $u(re^{i\theta})=(P_r*\varphi)(\theta)$ $(re^{i\theta}\in D)$ entonces $u\in h^p$ y $M_p(r,u)\le\|\varphi\|_p$, donde $\|\varphi\|_p=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t)|^p dt\right\}^{1/p}$ y $0<r<1$.

demostración:

Por 2.6 u es armónica. Ahora sean $h(t)=\{|\varphi(t)|^p P_r(\theta-t)\}^{1/p}$ y $g(t)=\{P_r(\theta-t)\}^{1/q}$ con $\theta\in[-\pi,\pi]$ fija, $t\in[-\pi,\pi]$ y q el exponente conjugado de p (i.e. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$).

Como $P_r\in L^\infty([-\pi,\pi])$ y $\varphi\in L^p([-\pi,\pi])$ entonces $h\in L^p$ y $g\in L^q$. Observe que además $\|g\|_q=1$. Así, por la desigualdad de Hölder se tiene que:

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,\theta-t)|\varphi(t)|\,dt\right\}^p=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)g(t)\,dt\right\}^p\le\{\|h\|_p\|g\|_q\}^p=\|h\|_p^p$$

$$\therefore\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,\theta-t)|\varphi(t)|\,dt\right\}^p\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,\theta-t)|\varphi(t)|^p dt$$

Ahora:

$$M_p^p(r,u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|(P_r*\varphi)(\theta)|^p d\theta\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[(P_r*|\varphi|)(\theta)]^p d\theta$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(P_r*|\varphi|^p)(\theta)\,d\theta \quad \text{(por la parte anterior)}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t)|^p dt \quad \text{(teorema de Fubini).}$$

$$\therefore\ M_p(r,u) \le \|\varphi\|_p \quad \forall r\in(0,1)$$
$$\therefore\ u\in h^p$$

El caso $p=\infty$ es inmediato.

El teorema maximal de Hardy y Littlewood para funciones de $L^p([-\pi,\pi])$ (con $1<p\le\infty$) es una extensión interesante de la proposición 2.26.

2.27 TEOREMA (Hardy-Littlewood, 1930): Sea $u(re^{i\theta}) = (P_r * \varphi)(\theta)$ con $\varphi\in L^p([-\pi,\pi])$ y $1<p\le\infty$ y sea $U(\theta) = \sup_{0<r<1} |u(re^{i\theta})|$.

Entonces $U\in L^p([-\pi,\pi])$ y existe una constante A_p (que depende únicamente de p) tal que $\|U\|_p \le A_p\|\varphi\|_p$.

La demostración de este teorema se omite porque depende de algunos resultados técnicos cuyo tratamiento nos apartaría de la teoría que nos ocupa. Para una demostración ver Duren, P. [ ].

El teorema correspondiente a 2.27 para funciones de clase H^p ($0<p\le\infty$ (¡sic!)) es el siguiente:

2.28 TEOREMA (Hardy-Littlewood, 1930): Sea $f\in H^p$, $0<p\le\infty$. Si $F(\theta) = \sup_{r<1}|f(re^{i\theta})|$ entonces $F\in L^p([-\pi,\pi])$ y $\|F\|_p \le B_p \sup_{0<r<1} M_p(r,f)$ donde B_p es una constante que depende únicamente de p.

demostración:

Sea $R\in(0,1)$ fija y $g: D \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(re^{i\theta}) = |f(Rre^{i\theta})|^{p/2}$. La función g es subarmónica (por 2.20 (a)) y si $u(re^{i\theta}) = (P_r * |f_R|^{p/2})(\theta)$ entonces $g(re^{i\theta}) \le u(re^{i\theta})$ $\forall re^{i\theta}\in D$.

$$\therefore\ \sup_{0<r<1} |g(re^{i\theta})| \le \sup_{0<r<1} |u(re^{i\theta})| \quad \text{para cada } \theta\in[-\pi,\pi].$$

Si hacemos $U(\theta) = \sup_{0<r<1} |u(re^{i\theta})|$ entonces por el teorema 2.27 $U \in L^2([-\pi,\pi])$ (porque para cada R fija $|f_R(e^{i\theta})|^{p/2} \in L^2$) y existe una constante A_2 $\ni$

$$\|U\|_2 \leq A_2 \| |f_R|^{p/2} \|_2 = A_2 M_2(1,g)$$

Note que si $G(\theta) = \sup_{0<r<1} |g(re^{i\theta})|$ entonces $G(\theta) \leq U(\theta)$ $\forall \theta \in [-\pi,\pi]$ y

$\therefore$ $G \in L^2([-\pi,\pi])$ con $\|G\|_2 \leq \|U\|_2$

$$\therefore \|G\|_2 \leq A_2 M_2(1,g)$$

Por otro lado $M_2^{2/p}(1,g) = M_p(R,f)$ y para $F_R(\theta) = \sup_{0<r<R} |f(re^{i\theta})|$ tenemos que:

$$\|F_R\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F_R(\theta)|^p d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{ |\sup_{0<r<1} |f(Rre^{i\theta})||^{p/2} \}^2 d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{ \sup_{0<r<1} [|f(Rre^{i\theta})|^{p/2}] \}^2 d\theta = \|G\|_2^2$$

$$\therefore \|F_R\|_p^p \leq \|G\|_2^2$$

Así: $\|F_R\|_p^p \leq \|G\|_2^2 \leq A_2^2 M_2^2(1,g) = A_2^2 M_p^p(R,f)$

$$\therefore \|F_R\|_p \leq A_2^{2/p} M_p(R,f)$$

Ahora bien si $\theta \in [-\pi,\pi]$ entonces:

$$\lim_{R\to 1} F_R(\theta) = \lim_{R \to 1} \sup_{0<r<R} |f(re^{i\theta})| = \lim_{R\uparrow 1} \sup_{0<r<R} |f(re^{i\theta})| = \sup_{0<r<1} |f(re^{i\theta})|$$

$$= F(\theta).$$

$$\therefore \lim_{R\uparrow 1} |F_R(\theta)|^p = F(\theta)$$

Luego por el teorema de convergencia monótona, $F \in L^p([-\pi,\pi])$ y $\lim_{R\uparrow 1} \|F_R\|_p = \|F\|_p$

$$\therefore \|F\|_p = \lim_{R\uparrow 1} \|F_R\|_p \leq \lim_{R\uparrow 1} A_2^{2/p} M_p(R,f) = A_2^{2/p} \sup_{0<r<1} M_p(r,f).$$

$$\therefore \|F\|_p \leq A_2^{2/p} \sup_{0<r<1} M_p(r,f)$$

§ SUBORDINACION

El concepto de subordinación proporciona una condición necesaria para que $M_p(r,f) \leq M_p(r,g)$ si $r \in (0,1)$ es fija, $p \in (0,\infty]$ y f,g son funciones analíticas en D. Note la analogía que existe con el teorema de convexidad de Hardy: $M_p(r,f)$ es una función creciente de r si f es una función analítica en D y $p \in (0,\infty]$.

2.29 DEFINICION: Sean f, F funciones analíticas en D. Diremos que f está subordinada a F si existe una función analítica $w: D \to D$ tal que $f(z) = F(w(z))$ y $|w(z)| \leq |z|$ $\forall z \in D$.

NOTACION: $f \prec F$ indica que f está subordinada a F.

2.30 EJEMPLO: Sean $F: D \to \mathbb{C}$ analítica e inyectiva con $F(0)=0$ y $f: D \to \mathbb{C}$ analítica con $f(0)=0$. Supongamos que $\operatorname{Ran} f \subset \operatorname{Ran} F$ entonces $f \prec F$.

demostración:

Sea $w: D \to \mathbb{C}$ la función definida por $w(z) = F^{-1}(f(z))$. w está bien definida y es analítica en D. Además $w(0) = F^{-1}(f(0)) = F^{-1}(0) = 0$. Por otro lado $|w(z)| \leq 1$ $\forall z \in D$ pues $F^{-1}(\operatorname{Ran} f) \subset F^{-1}(\operatorname{Ran} F) = D$. Luego por el lema de Schwarz $|w(z)| \leq |z|$ $\forall z \in D$ y como $f(z) = F(w(z))$ entonces $f \prec F$.

2.31. OBSERVACIONES: (a). En la demostración del ejemplo anterior la propiedad de w: $|w(z)| \leq |z|$ $\forall z \in D$ implica que $f(D_r) \subset F(D_r)$ $\forall r \in (0,1)$.

(b). En las hipótesis del ejemplo 2.30 es posible cambiar $f(0)=0$ y $F(0)=0$ por $f(0)=a=F(0)$ con $a \in \mathbb{C}$ arbitrario y la conclusión es la misma: $f \prec F$.

(c). Note que para definir la subordinación de f a F no fué requisito para F el ser inyectiva, como en el ejemplo 2.30.

Como en el teorema de convexidad de Hardy, el resultado que mencionamos al inicio de esta sección, se deducirá de un hecho general válido para funciones subarmónicas.

2.32. TEOREMA: Sea $G: D \to \mathbb{R}$ subarmónica y $w: D \to \mathbb{C}$ analítica tal que $|w(z)| \leq |z|$ $\forall z \in D$. Si $g(z) = G(w(z))$ entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\, d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} G(re^{i\theta})\, d\theta \quad \forall r \in (0,1).$$

demostración:

Sea $r \in (0,1)$ fija y $U: \overline{D}_r \to \mathbb{R}$ la función armónica en D_r, continua en $\overline{D}_r$ y $\ni$. $U(z) = G(z)$ $\forall z \in \partial D_r$. Como G es subarmónica entonces $G(z) \leq U(z)$ $\forall z \in \overline{D}_r$.

Por otro lado si $v: \overline{D}_r \to \mathbb{R}$ esta definida por $v(z) = U(w(z))$ entonces v es armónica en D_r y:

$$v(z) = U(w(z)) \geq G(w(z)) = g(z) \quad \forall z \in \overline{D}_r$$ (Recuerde que $|w(z)| \leq |z|$ y $\therefore$ $w(\overline{D}_r) \subset \overline{D}_r$).

Finalmente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(re^{i\theta})\, d\theta = v(0) = U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(re^{i\theta})\, d\theta$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\, d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} G(re^{i\theta})\, d\theta$$

2.33 TEOREMA (Teorema de Subordinación de Littlewood, 1925): Sean f, F funciones analíticas en D tales que $f \prec F$ entonces $M_p(r,f) \leq M_p(r,F)$ $\forall r \in (0,1)$, $\forall p \in (0,\infty]$.

demostración: (Esta demostración también es de F. Riesz).

Sea $p \in (0,\infty]$. Si $p \in (0,\infty)$ entonces la función $G(z) = |F(z)|^p$ es subarmónica en D (ejemplo 2.20 (a)). Sea $g(z) = |f(z)|^p$. Como $f \prec F$ entonces $\exists\ w: D \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica $\ni$ $f(z) = F(w(z))$ y $|w(z)| \leq |z|$ $\forall z \in D$. En particular $g(z) = G(w(z))$, luego por el teorema 2.32.

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\,d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} G(re^{i\theta})\,d\theta \qquad \forall r \in (0,1)$$

$$\therefore\ M_p^p(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p\,d\theta = M_p^p(r,F) \quad \forall r \in (0,1)$$

$$\therefore\ M_p(r,f) \leq M_p(r,F) \quad \forall r \in (0,1)$$

Si $p=\infty$ el resultado es consecuencia inmediata de que $w(\bar{D}_r) \subset \bar{D}_r$ $\forall r \in (0,1)$ y del Principio del Módulo Máximo.

Concluiremos este capítulo con algunas aplicaciones del teorema de subordinación de Littlewood. Para esto necesitamos el siguiente ejemplo:

2.34. <u>EJEMPLO</u>: Si $f(z) = \frac{1}{1-z}$ entonces $f \in H^p$ $\forall p \in (0,1)$ y $f \notin H^1$.

<u>demostración</u>:

Sea $p \in (0,1)$, como f es analítica en D, resta probar que $\sup\limits_{0<r<1} M_p(r,f) = \lim\limits_{r \nearrow 1} M_p(r,f) < \infty$

Claramente $|1-re^{i\theta}| \geq r|\operatorname{sen}\theta|$ $\forall re^{i\theta} \in D$. Así pues

$$M_p^p(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1-re^{i\theta}|^p}\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi r^p}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|\operatorname{sen}\theta|^p} = \frac{2}{2\pi r^p}\int_{0}^{\pi} \frac{1}{\operatorname{sen}^p\theta}\,d\theta = \frac{1}{\pi r^p}\int_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^p\theta}$$

$$= \frac{2}{\pi r^p}\int_{0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\operatorname{sen}\theta)^p}$$ pero si $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$ entonces $\operatorname{sen}\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$

$$\therefore\ \frac{2}{\pi r^p}\int_{0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\operatorname{sen}\theta)^p} \leq \frac{2}{\pi r^p}\int_{0}^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2\theta}\right)^p d\theta = \frac{2}{\pi \cdot r^p}\cdot\frac{\pi^p}{2^p}\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{\theta^p}\,d\theta =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{r^p}\left[\frac{\theta^{1-p}}{1-p}\right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{r^p} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-p} \cdot \frac{1}{1-p} = \frac{1}{r^p(1-p)}$$

$$\therefore\ M_p^p(r,f) \leq \frac{1}{r^p(1-p)}$$

$$\therefore\ \lim_{r\to 1} M_p(r,f) \leq \lim_{r\to 1} \frac{1}{r(1-p)^{1/p}} = \frac{1}{(1-p)^{1/p}} < +\infty$$

$$\therefore\ f \in H^p \text{ si } p \in (0,1).$$

Probaremos ahora que $f \notin H^1$. Escribimos $f(z)$ como serie de potencias alrededor de 0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$ (y la convergencia de la serie es uniforme en compactos contenidos en D).

Claramente $\operatorname{Im}\{f(z)\} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \operatorname{sen} n\theta$ aquí $z = re^{i\theta}$.

Ahora:

$$2\pi M_1(r,f) = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\,d\theta \geq \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}\{f(re^{i\theta})\}\,d\theta \geq \int_0^{2\pi} (\pi-\theta) \operatorname{Im}\{f(re^{i\theta})\}\,d\theta$$

pero $\int_0^{2\pi} (\pi-\theta)\operatorname{Im}\{f(re^{i\theta})\}\,d\theta = \int_0^{2\pi} (\pi-\theta)\sum_{n=1}^{\infty} r^n \operatorname{sen} n\theta\,d\theta$ y por convergencia uniforme:

$$\int_0^{2\pi} (\pi-\theta)\sum_{n=1}^{\infty} r^n \operatorname{sen} n\theta\,d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} (\pi-\theta)\operatorname{sen} n\theta\,d\theta$$ integrando por partes

$$= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} = 2\pi \ln\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

$$\therefore\ M_1(r,f) \geq \ln\left(\frac{1}{1-r}\right)$$ y como $\lim_{r\to 1^-} \ln\left(\frac{1}{1-r}\right) = \infty$

entonces $\lim_{r\to 1^-} M_1(r,f) = \infty$

$$\therefore\ f \notin H^1.$$

2.35 TEOREMA : Sea f una función analítica en D, tal que $\operatorname{Re}\{f(z)\}>0$ $\forall z\in D$ entonces $f\in H^p$ $\forall p\in(0,1)$

demostración:

Como $f(0)\neq 0$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f(0)=1$. Sea $F: D\to\mathbb{C}$ la función definida por $F(z)=\frac{1+z}{1-z}$

Claramente F es analítica en D y un breve cálculo muestra que F es inyectiva

Veremos que $\operatorname{Ran} F=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}\{z\}>0\}$

Sea $z\in D$, $z=re^{i\theta}$, entonces $F(re^{i\theta})=\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}=P(r,\theta)+iQ(r,\theta)$

donde P es el núcleo de Poisson y Q es el núcleo conjugado de Poisson.

Como $0<r<1$ tenemos que $P(r,\theta)>0$ $\therefore \operatorname{Re}\{F(z)\}>0$

$$\therefore \operatorname{Ran} F\subset\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}\{z\}>0\}.$$

Ahora si $z\in\mathbb{C}$ es tal que $\operatorname{Re}\{z\}>0$, sea $w=\frac{z-1}{z+1}$. Es fácil comprobar que $F(w)=z$ (por supuesto $|w|<1$).

$$\therefore \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}\{z\}>0\}\subset \operatorname{Ran} F$$

$$\therefore \operatorname{Ran} F=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}\{z\}>0\}$$

Así $\operatorname{Ran} f\subset \operatorname{Ran} F$ y como $f(0)=1=F(0)$ entonces $f\prec F$ (Veáse el ejemplo 2.30 y la observación 2.31 (b).).

Sea $p\in(0,1)$, por el teorema de subordinación de Littlewood se tiene que:

$$M_p(r,f)\leq M_p(r,F)$$

Por otro lado : $M_p^p(r,F)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right|^p d\theta \leq \frac{2^p}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^p}$

luego si $g(z)=\frac{1}{1-z}$ entonces:

$M_p(r,F)\leq 2M_p(r,g)$ y como $g\in H^p$ $\forall p\in(0,1)$

concluimos que $\sup_{0<r<1} M_p(r,f)<\infty$ $\therefore f\in H^p$ si $p\in(0,1)$

CAPITULO III.

§ FUNCIONES DE CARACTERISTICA ACOTADA

Iniciamos este capítulo presentando una nueva clase de funciones y algunas propiedades importantes inherentes a ella. En el capítulo segundo probamos que si $f \in H^p$ (h^p) con $p \geq 1$ entonces f tiene límite no tangencial casi dondequiera. Señalamos que para funciones en H^p con $p \in (0,1)$ la afirmación anterior seguía siendo válida y para demostrarlo apelaríamos a una clase de funciones en la cual estuviesen contenidos todos los espacios H^p, a saber:

3.1. <u>DEFINICION</u>: Sea $f: D \to \mathbb{C}$ analítica. Decimos que <u>f es de característica acotada</u> (o bien <u>de clase N</u>) si:

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta < \infty$$

Al conjunto $N = \{f \mid f \text{ es de clase } N\}$ se le llama <u>Clase de Nevanlinna.</u>

Recordamos que $\log^+ x = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \log x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$; $\log^- x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 1 \\ -\log x & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$

3.2 <u>OBSERVACIONES</u>: (a). N es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Esto lo probaremos después de la caracterización que damos de N en 3.4..

(b). Si $f: D \to \mathbb{C}$ es analítica entonces $\log^+|f|$ es subarmónica (ejemplo 2.20 (c).) y por el teorema 2.22 (a). la función

$$m(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta \quad \text{es creciente, por lo que:}$$

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta = \lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta$$

(c). $H^p \subset N \quad \forall\, p \in (0,\infty]$

<u>demostración</u>:

Si $p=\infty$, sea $f \in H^\infty$ y $r \in (0,1)$ entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ (M_\infty(r,f))\, d\theta = 2\pi \log^+(M_\infty(r,f))$$

$$\leq 2\pi \log^+ \left(\sup_{0<r<1} M_\infty(r,f) \right) < \infty$$

$$\therefore \sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta < \infty$$

$\therefore$ f es de clase N.

Ahora si $p \in (0,\infty)$, probaremos primero que $\log^+ x \leq \frac{x^p}{p} \quad \forall\, x \in [0,\infty)$
La desigualdad claramente se cumple si $x \in [0,1]$. Para $x \in (1,\infty)$ considere la función $h: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \log x - \frac{x^p}{p}$. Derivamos para obtener $h'(x) = \frac{1-x^p}{x}$, luego $h'(x) = 0 \iff x = 1$

y como $h'(x) < 0 \quad \forall\, x \in (1,\infty)$ entonces $h(x) \leq h(1) = -\frac{1^p}{p} < 0 \quad \forall\, x \in (1,\infty)$

$$\therefore \log^+ x = \log x \leq \frac{x^p}{p} \quad \forall\, x \in (1,\infty)$$

$$\therefore \log^+ x \leq \frac{x^p}{p} \quad \forall\, x \in [0,\infty).$$

Finalmente si $f \in H^p$ entonces:

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|^p}{p}\, d\theta = \frac{2\pi}{p} M_p^p(r,f)$$

$$\therefore 0 \leq \lim_{r\nearrow 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leq \frac{2\pi}{p} \lim_{r\nearrow 1^-} M_p^p(r,f) < \infty$$

$\therefore$ f es de clase N

El siguiente teorema caracteriza por completo, en términos de funciones de H^∞, a la clase N. Esto será de gran importancia en resultados posteriores pues nos permitirá deducir propiedades de funciones en N a partir de las propiedades análogas para funciones en H^∞. En la demostración se utiliza la fórmula de Jensen que a continuación enunciamos para conveniencia del lector: (Para una demostración ver Rudin, W. [ ] pp. 289).

3.3 PROPOSICION (Fórmula de Jensen): Sea $f: D \to \mathbb{C}$ analítica $\ni$ $f(0) \neq 0$. Si $0<r<1$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son los ceros de f en $\overline{D}_r$, donde cada α_k esta repetido (multiplicidad de α_k)-veces, entonces:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \log|f(0)| + \sum_{k=1}^{n} \log\frac{r}{|\alpha_k|}$$

NOTA: La hipótesis $f(0)\neq 0$ en 3.3 no será un problema en las aplicaciones porque si f tiene un cero de orden m en 0 la fórmula de Jensen puede aplicarse a la función $\frac{f(z)}{z^m}$.

3.4 TEOREMA (F. y R. Nevanlinna, 1922): Sea $f: D \to \mathbb{C}$ analítica. f es de clase N si y solo si existen $\varphi, \psi \in H^\infty$ tales que $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ $\forall z \in D$.

demostración:

($\Leftarrow$). Supongamos que $\exists$ $\varphi, \psi \in H^\infty \ni f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ $\forall z\in D$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $|\varphi(z)|\leq 1$, $|\psi(z)|\leq 1$ $\forall z \in D$ y que $\psi(0)\neq 0$. (Si $\psi(0)=0$ y $m\geq 1$ es el orden del cero de ψ en 0 entonces consideramos a la función $g(z) = z^{-m} f(z)$).

Ahora si $0<r<1$ entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \int_{C_1} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta + \int_{C_2} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta \quad \text{donde}$$

$C_1 = \{\theta \in [-\pi,\pi] : |f(re^{i\theta})| \leq 1\}$ y $C_2 = \{\theta\in[-\pi,\pi] : |f(re^{i\theta})| > 1\}$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|d\theta = \int_{C_2} \log|f(re^{i\theta})|d\theta = \int_{C_2} \log|\varphi(re^{i\theta})|d\theta - \int_{C_2} \log|\psi(re^{i\theta})|d\theta$$

y como $\int_{C_2} \log|\varphi(re^{i\theta})|\,d\theta \leq 0$ entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|d\theta \leq -\int_{C_2} \log|\psi(re^{i\theta})|d\theta \leq -\int_{-\pi}^{\pi} \log|\psi(re^{i\theta})|d\theta$$

Finalmente si $z_1, \ldots, z_n$ son los ceros de ψ en $\overline{D}_r$, cada z_k repetido (multiplicidad de z_k)-veces, entonces por la fórmula de Jensen (3.3):

$$-\int_{-\pi}^{\pi} \log|\psi(re^{i\theta})|d\theta = -2\pi \log|\psi(0)| - 2\pi \sum_{k=1}^{n} \log \frac{r}{|z_k|} \leq -2\pi \log|\psi(0)|$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|d\theta \leq -2\pi \log|\psi(0)| \quad \forall\, r \in (0,1)$$

$$\therefore f \in N.$$

($\Rightarrow$). Sea $f \in N$, $f \neq 0$, Supongamos que f tiene un cero de orden $m \geq 0$ en 0 y sean $z_1, z_2, \ldots$ los otros ceros de f con cada z_k repetido (multiplicidad de z_k)-veces y ordenados según su módulo, es decir: $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots < 1$. Considere $\rho \in (0,1)$ tal que $f(z) \neq 0 \;\forall\, z \in \partial D_\rho$ (tal ρ existe porque f tiene a lo más una cantidad numerable de ceros en D).

Note que con esta elección de ρ, la función:

$$(1) \ldots \; F(z) = \log \left\{ f(z) \frac{\rho^m}{z^m} \prod_{|z_n|<\rho} \left(\frac{\rho^2 - \bar{z}_n z}{\rho(z - z_n)} \right) \right\} \quad \text{es analítica en } \overline{D}_\rho$$

y si $|z| = \rho$ entonces:

$$\left| \frac{\rho^m}{z^m} \prod_{|z_n|<\rho} \left(\frac{\rho^2 - \bar{z}_n z}{\rho(z - z_n)} \right) \right| = 1$$

Ahora $\operatorname{Re}\{F(z)\}$ es armónica en D_ρ y $\operatorname{Re}\{F(z)\} = \log|f(z)|$ si $z \in \partial D_\rho$

$$\therefore \operatorname{Re}\{F(re^{i\theta})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - t) \log|f(\rho e^{it})|\,dt \quad \text{si} \quad 0 < r < \rho$$

$= (P_r * \log|f_\rho|)(\theta)$ donde $f_\rho(t) = f(\rho e^{it})$.

Además $\mathrm{Re}\{F(re^{i\theta})\} = (P_r * \log|f_\rho|)(\theta)$ es la parte real de la función analítica: $re^{i\theta} \longmapsto (H_r * \log|f_\rho|)(\theta)$ $0<r<\rho$; (H_r es el núcleo de Herglotz, ver 1.).

Luego si $0<r<\rho$ entonces:

(2) ... $F(re^{i\theta}) = (H_r * \log|f_\rho|)(\theta) + i\,C(re^{i\theta})$ donde $C(re^{i\theta})$ es la función real definida por $C(re^{i\theta}) = \mathrm{Im}\{F(re^{i\theta})\} - (Q_r * \log|f_\rho|)(\theta)$ (Q_r es el núcleo conjugado de Poisson : $Q_r(t) = \mathrm{Im}\{H_r(t)\}$).

Así de las relaciones (1) y (2) obtenemos que para $z = re^{i\theta} \in D_\rho(0)$

$$\log\left\{f(z)\frac{\rho^m}{z^m}\prod_{|z_n|<\rho}\left(\frac{\rho^2-\bar{z}_n z}{\rho(z-z_n)}\right)\right\} = (H_r * \log|f_\rho|)(\theta) + i\,C(z)$$

De aquí que $f(z) = \dfrac{\varphi_\rho(z)}{\psi_\rho(z)}$ $\forall z \in D_\rho$ con las funciones φ_ρ, ψ_ρ definidas como sigue:

$$\varphi_\rho(z) = \frac{\rho^m}{z^m}\prod_{|z_n|<\rho}\left(\frac{\rho(z-z_n)}{\rho^2-\bar{z}_n z}\right)\cdot \exp\left\{-(H_r * \log^-|f_\rho|)(\theta) + i\,C(z)\right\} \quad \text{con } z = re^{i\theta} \ 0<r<\rho$$

$$\psi_\rho(z) = \exp\left\{-(H_r * \log^+|f_\rho|)(\theta)\right\} \quad \text{nuevamente } z = re^{i\theta}.$$

Tanto φ_ρ como ψ_ρ son funciones analíticas y acotadas en D_ρ. En efecto

$$|\varphi_\rho(re^{i\theta})| = \left|\frac{z^m}{\rho^m}\prod_{|z_n|<\rho}\left(\frac{\rho(z-z_n)}{\rho^2-\bar{z}_n z}\right)\right|\cdot\left|\exp\{-(H_r * \log^-|f_\rho|)(\theta) + i\,C(z)\}\right|$$

$$\leq \exp\{-(P_r * \log^-|f_\rho|)(\theta)\} \leq 1 \quad \text{pues } (P_r * \log^-|f_\rho|)(\theta) \geq 0$$

Análogamente $|\psi_\rho(re^{i\theta})| \leq \exp\{-(P_r * \log^+|f_\rho|)(\theta)\} \leq 1.$

Para concluir consideremos una sucesión (ρ_k) estrictamente creciente $\ni$ $\lim_{k\to\infty} \rho_k = 1$ y $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \partial D_{\rho_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Sean $\Phi_K : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Phi_K(z) = \varphi_{\rho_K}(\rho_K(z))$ $K=1,2,\dots$

$\Psi_K : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Psi_K(z) = \psi_{\rho_K}(\rho_K z)$ $K=1,2,\dots$

$\{\Phi_K\}_{K\in\mathbb{N}}$, $\{\Psi_K\}_{K\in\mathbb{N}}$ son dos familias de funciones analíticas uniformemente acotadas en D ($|\Phi_K(z)|\leq 1$, $|\Psi_K(z)|\leq 1$ $\forall z\in D$).

$\therefore$ $\{\Phi_K\}_{K\in\mathbb{N}}$, $\{\Psi_K\}_{K\in\mathbb{N}}$ son familias normales

$\therefore$ $\exists$ $\{K_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ subsucesión tal que:

$\{\Phi_{K_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$, $\{\Psi_{K_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ convergen uniformemente en $\overline{D_R}$ $\forall R\in(0,1)$. Si $\varphi(z) = \lim_{\ell\to\infty} \Phi_{K_\ell}(z)$ y $\psi(z) = \lim_{\ell\to\infty} \Psi_{K_\ell}(z)$ entonces φ, ψ son funciones analíticas en D y $|\varphi(z)|\leq 1$, $|\psi(z)|\leq 1$ $\forall z\in D$. Por otro lado:

$$\forall K\in\mathbb{N} \quad |\Psi_K(0)| = |\psi_{\rho_K}(0)| = |\exp\{-(1 * \log^+|f_{\rho_K}|)(0)|$$

$$\geq \left|\exp\left\{-\sup_{0<r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(re^{it})|\,dt\right\}\right| > 0$$

(Observe que hasta la penúltima desigualdad se usó que $f\in N$).

$\therefore$ $\psi \neq 0$ y como $f(z) = \dfrac{\Phi_{K_\ell}(z)}{\Psi_{K_\ell}(z)}$ $\forall z\in D$, $\forall \ell\in\mathbb{N}$ tenemos que

$f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ $\forall z\in D$ con lo cual queda probado el teorema.

3.5 <u>COROLARIO</u>: N es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

<u>demostración</u>:

Claramente $0\in N$ pues $\log^+|0| = 0$.

Si $\alpha\in\mathbb{C}$ y $f\in N$ entonces: como $\log^+ ab \leq \log^+ a + \log^+ b$ si $a,b\geq 0$ tenemos la siguiente relación:

$$\log^+|\alpha f(re^{i\theta})| \leq \log^+|\alpha| + \log^+|f(re^{i\theta})| \quad \forall re^{i\theta}\in D.$$

$$\therefore \sup_{0<r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|\alpha f(re^{i\theta})|\,d\theta \leq 2\pi\log^+|\alpha| + \sup_{0<r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta < \infty$$

$\therefore \alpha f \in N$

Finalmente si $f, g \in N$ entonces $f = \frac{\varphi_1}{\psi_1}$, $g = \frac{\varphi_2}{\psi_2}$ con $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2$ y ψ_2 funciones analíticas acotadas.

Como $f + g = \frac{\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1}{\psi_1\psi_2}$ y $\psi_1\psi_2 \in H^\infty$, $(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1) \in H^\infty$

entonces $f+g \in N$.

3.6. DEFINICION: Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y suponga que f tiene límite no tangencial casi dondequiera. De manera natural tenemos definida una función $\tilde{f}: \partial D \longrightarrow \mathbb{C}$, como sigue:

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) = \begin{cases} \lim\limits_{z \to e^{i\theta}} f(z) & \text{si } f \text{ tiene límite no tangencial en } e^{i\theta} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Llamaremos a $\tilde{f}(e^{i\theta})$. el límite no tangencial de f.

3.7. TEOREMA: (a). Si $f \in N$ entonces el límite no tangencial $\tilde{f}(e^{i\theta})$ existe casi dondequiera y además $\log|\tilde{f}(e^{i\theta})|$ es integrable a menos que $f \equiv 0$.

(b). Si $f \in H^p$ para alguna $p > 0$ entonces $\tilde{f}(e^{i\theta}) \in L^p(\partial D)$.

demostración:

(a). Sea $f \in N$, $f \not\equiv 0$. Por el teorema 3.4 existen $\varphi, \psi \in H^\infty$ (incluso $|\varphi(z)| \leq 1 \wedge |\psi(z)| \leq 1 \ \forall z \in D$) tales que $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$.

Como $\varphi, \psi \in H^\infty$ entonces el teorema 2.16 garantiza que los límites no tangenciales $\tilde{\varphi}(e^{i\theta})$ y $\tilde{\psi}(e^{i\theta})$ existen c.d.

Por el lema de Fatou:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\log|\tilde{\varphi}(e^{i\theta})|| \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{r \to 1} |\log|\varphi(re^{i\theta})|| \, d\theta \leq \varliminf_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|\varphi(re^{i\theta})|| \, d\theta =$$

$$= \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} -\log|\varphi(re^{i\theta})|\,d\theta$$

Por otro lado, de la fórmula de Jensen (3.3) tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\varphi(re^{i\theta})|\,d\theta = \log|\varphi(0)| + \sum_{k=1}^{n} \log\frac{r}{|\alpha_k|}$$

donde $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ son los ceros de φ contenidos en D_r, cada α_k está repetido (multiplicidad de α_k)-veces y como en ocasiones anteriores suponemos sin pérdida de generalidad que $\alpha_k \neq 0$ $\forall k \in \{1,\dots,n\}$.

Es claro ahora que $\int_{-\pi}^{\pi} \log|\varphi(re^{i\theta})|\,d\theta$ es una función creciente de r y $\therefore$ $\int_{-\pi}^{\pi} -\log|\varphi(re^{i\theta})|\,d\theta$ es una función decreciente de r, no negativa luego $\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} -\log|\varphi(re^{i\theta})|\,d\theta < +\infty$.

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} |\log|\tilde{\varphi}(e^{i\theta})||\,d\theta < +\infty \text{ es decir } \log|\tilde{\varphi}(e^{i\theta})| \in L^1(\partial D).$$

análogamente se prueba que: $\log|\tilde{\psi}(e^{i\theta})| \in L^1(\partial D)$; esto último indica además, que $|\tilde{\psi}(e^{i\theta})| \neq 0$ c.d. y $|\tilde{\varphi}(e^{i\theta})| \neq 0$ c.d.

$$\therefore \tilde{f}(e^{i\theta}) \text{ existe c.d.}$$

Y $$\int_{-\pi}^{\pi} |\log|\tilde{f}(e^{i\theta})||\,d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\log|\tilde{\varphi}(e^{i\theta})||\,d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} |\log|\tilde{\psi}(e^{i\theta})||\,d\theta < \infty$$

$$\therefore \log|\tilde{f}(e^{i\theta})| \in L^1(\partial D)$$

(b). Sea $p>0$ y $f \in H^p$.

Como $H^p \subset N$ entonces por inciso (a). el límite no tangencial $\tilde{f}(e^{i\theta})$ existe c.d. Una vez más utilizamos la versión continua del Lema de Fatou para obtener:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(e^{i\theta})|^p\,d\theta \leq \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p\,d\theta = \lim_{r\nearrow 1^-} 2\pi\, M_p^p(r,f) < \infty$$

$$\therefore \tilde{f}(e^{i\theta}) \in L^p(\partial D)$$

3.8 OBSERVACION: Del teorema anterior (3.7) se deduce que cada $f\in N$ esta univocamente determinada por los valores de $\tilde{f}(e^{i\theta})$ tomados en cualquier $E\subset\partial D$ de medida positiva. Es decir si $f,g\in N$ y $\tilde{f}(e^{i\theta})=\tilde{g}(e^{i\theta})$ en cualquier $E\subset\partial D$ de medida positiva entonces $f=g$.

En efecto si $h=f-g$ entonces $h\in N$ (corolario 3.5). Supongamos que $h\neq 0$. Escribimos $h(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ con $\varphi,\psi\in H^\infty$, $|\varphi(z)|\leq 1$ y $|\psi(z)|\leq 1$ $\forall z\in D$. Como $\varphi(z)\neq 0$ entonces un argumento análogo al de la primera parte de la demostración de 3.7 nos lleva a la conclusión de que $\log|\tilde{\varphi}(e^{i\theta})|$ es integrable. Así pues:

$$\infty > \int_{-\pi}^{\pi} |\log|\tilde{\varphi}(e^{i\theta})||\,d\theta \geq \int_E |\log|\tilde{\varphi}(e^{i\theta})||\,d\theta = \infty \quad \text{pues } \tilde{\varphi}(e^{i\theta})=0$$

$\forall e^{i\theta}\in E$ $\therefore$ $\log|\tilde{\varphi}(e^{i\theta})|$ no es integrable ∇

$$\therefore h\equiv 0$$

$$\therefore f=g$$

Si $f\in N$ podría surgir la pregunta respecto a si el $\sup_{0<r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|\log|f(re^{i\theta})||\,d\theta$ es finito o no. A priori la respuesta afirmativa sería aventurada ya que $\log|f(re^{i\theta})|$ puede tomar valores negativos con valor absoluto arbitrariamente grande, sin embargo:

3.9 TEOREMA: $f\in N$ si y solo si $\sup_{0<r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|\log|f(re^{i\theta})||\,d\theta < +\infty$

demostración:

($\Leftarrow$). Es inmediata pues $\log^+|f(re^{i\theta})|\leq|\log|f(re^{i\theta})||$ $\forall re^{i\theta}\in D$.

($\Rightarrow$). Sea $f\in N$ y supongamos que $f(0)\neq 0$. Por la fórmula de Jensen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \log|f(0)| + \sum_{j=1}^{n}\log\frac{r}{|\alpha_j|} \geq \log|f(0)| > -\infty \quad r\in(0,1)$$

Donde $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ son los ceros de f en $\overline{D}_r$ y cada α_k está repetido (multiplicidad de α_k)- veces.

Así:

$$-\infty < \log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{i\theta})||\,d\theta$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{i\theta})||\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \log|f(0)| \leq M$$ para alguna

$M>0$ y $\forall r \in (0,1)$ $\quad \therefore \quad \sup\limits_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{i\theta})||\,d\theta < +\infty$

§ PRODUCTOS DE BLASCHKE.

Los productos de Blaschke forman una subclase importante de la clase N. En particular, para la teoría que nos ocupa, destacan por su estrecha relación con ciertos teoremas de factorización que introduciremos más adelante.

Algo que probaremos es que cada $f \in N$ tiene asociado un producto de Blaschke en el cual está contenida toda la información de los ceros de f.

Comenzaremos entonces exhibiendo una propiedad de los ceros de una función $f \in N$ mediante el siguiente teorema:

3.10 TEOREMA: Sea $f \neq 0$ analítica en D y sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ los ceros de f con cada α_k repetido (multiplicidad de α_k)- veces.

Entonces:

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta < \infty \quad \text{si y solo si} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1-|\alpha_n|) < +\infty.$$

demostración:

($\Longrightarrow$). Supongamos que $\exists\ c>0 \ni \sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta \leq c$ y que f tiene un cero en 0 de multiplicidad $m \geq 0$. Sea $g(z) = \frac{f(z)}{z^m}$ $z \in D$. (observe que g es analítica en D y $g(0) \neq 0$)

Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ los ceros de g ordenados según su módulo: $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$ y cada a_k repetido (multiplicidad de a_k)-veces.

Por la fórmula de Jensen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|g(re^{i\theta})|\,d\theta = \log|g(0)| + \sum_{|a_n|\leq r} \log\frac{r}{|a_n|}$$ y como $\log|g(re^{i\theta})| =$

$= \log|f(re^{i\theta})| - \log r^m$ entonces:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \log(|g(0)|\,r^m) + \sum_{|a_n|\leq r} \log\frac{r}{|a_n|} \quad \cdots (1)$$

$$\Rightarrow \sum_{|a_n|\leq r} \log\frac{r}{|a_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \log(|g(0)|\,r^m).$$

Note que $\sum_{|a_n|\leq r} \log\frac{r}{|a_n|}$ es creciente respecto a r.

Ahora sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Si $r > |a_k|$ entonces:

$$\sum_{n=1}^{k} \log\frac{r}{|a_n|} \leq \sum_{|a_n|\leq r} \log\frac{r}{|a_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \log(|g(0)|\,r^m) \leq c - \log(|g(0)|\,r^m)$$

(Recuerde que por hipótesis $\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta \leq c$)

$$\therefore \sum_{n=1}^{k} \log\frac{r}{|a_n|} \leq c - \log(|g(0)|\,r^m)$$ y tomando el límite

cuando $r \to 1^-$ se tiene que $\sum_{n=1}^{k} \log\frac{1}{|a_n|} \leq c - \log(|g(0)|)$

$$\therefore \quad \exp\left(\sum_{n=1}^{K} \log \frac{1}{|a_n|}\right) \leq \exp\left(c - \log(|g(0)|)\right)$$

$$\therefore \quad \prod_{n=1}^{K} |a_n| \geq |g(0)|\, e^{-c} > 0$$

$\therefore \prod_{n=1}^{\infty} |a_n| > 0 \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (1-|a_n|) < +\infty$. (En general se tiene que si $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales $\ni$. $u_n \in [0,1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) > 0$ si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < +\infty$, (donde $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) = \lim_{K\to\infty} \prod_{n=1}^{K}(1-u_n)$) Ver Rudin, W. [ ] pp. 282)

($\Leftarrow$) De la igualdad (1) en la otra implicación se sigue que:

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta\right\} = |g(0)|\, r^m \prod_{|a_n|<r} \frac{r}{|a_n|} \leq |g(0)| \cdot \prod_{|a_n|<r} \frac{1}{|a_n|} \quad \text{pues } 0<r<1$$

$$\Rightarrow \prod_{|a_n|<r} |a_n| \cdot \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta\right\} \leq |g(0)|$$

Ahora $\sum_{n=1}^{\infty} (1-|a_n|) < \infty \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} |a_n| > 0$ y como $|a_n| < 1$ $\forall n$ entonces

$$0 < \prod_{n=1}^{\infty} |a_n| < \prod_{|a_n|<r} |a_n| < 1$$

$$\therefore \prod_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta\right\} \leq |g(0)| \quad \forall r \in (0,1)$$

luego si $c = \log\left(|g(0)| \cdot \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} |a_n|}\right)$ entonces $\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})| \leq c$.

3.11 <u>COROLARIO</u>: Sea $f \in N$ y sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ los ceros de f en D, entonces $\sum_n (1-|a_n|) < \infty$.

<u>demostración</u>:

Si $f \in N$ entonces por el teorema 3.9 $\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{i\theta})||d\theta < \infty$

y $\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta \leq \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{i\theta})||\,d\theta < \infty$

luego por el teorema 3.10 $\sum(1-|a_n|) < \infty$

Hemos demostrado que los ceros de una función de clase N forman una sucesión que se aproxima a la frontera del disco unitario (por supuesto nos referimos a una f con una infinidad de ceros), aun más se obtuvo una estimación de la rápidez con la que esta sucesión tiende a la frontera de D.

Como $H^p \subset N$ $\forall p \in (0,\infty]$, las aseveraciones anteriores siguen siendo válidas para las funciones de estos espacios. Cabe preguntarse si para $f \in H^p$ se puede decir algo más acerca de la rápidez con la que los ceros de f tienden a la ∂D. La respuesta en general es que no; incluso para funciones analíticas acotadas.

De hecho probaremos que a cada colección $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números en D tales que $\sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n) < \infty$ le corresponde una función

$B \in H^\infty$ $\ni$ $B(a_n)=0$ $\forall n \in N$ y $B(z) \neq 0$ si $z \neq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

3.12. <u>TEOREMA</u> (Blaschke, 1915): Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos en D tales que $0<|a_n| \leq |a_{n+1}|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) < \infty$, entonces:

(a). El producto infinito $B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z}$ $(z \in D)$ converge uniformemente en $\overline{D_R}$ $\forall R \in (0,1)$.

(b). $B(a_n)=0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y si $z \neq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $B(z) \neq 0$. La multiplicidad de cada a_n es igual al número de veces que este se repite en la sucesión.

(c). $|B(z)|<1$ $\forall z \in D$ y $|B(e^{i\theta})| = 1$ c.d. .

OBSERVACIONES: (i) Cada uno de los factores de B es una transformación de Möbius del disco unitario en si mismo y se anula en el a_n correspondiente.

(ii) La convergencia uniforme de $B(z)$ en discos cerrados contenidos en D implica que B es analítica en D y por la primera parte de (c). $B \in H^\infty \therefore B(e^{i\theta})$ existe c.d.

demostración (Teorema de Blaschke): (a). Sea $R \in (0,1)$ fija y $z \in \bar{D}_R$ entonces $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left|1 - \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}\right| = \left|\frac{(1-|a_n|)(a_n + |a_n| z)}{a_n(1-\bar{a}_n z)}\right|$$

$$= \left|\frac{a_n + |a_n| z}{a_n} \cdot \frac{1-|a_n|}{1-\bar{a}_n z}\right| \leq \frac{2(1-|a_n|)}{1-R}.$$

Ahora por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-|a_n|)}{1-R} < \infty$ luego por la prueba M de Weierstrass $\sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z}\right|$ converge uniformemente en $\bar{D}_R$

por lo que: $B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z}$ converge uniformemente en $\bar{D}_R$

(Sobre la convergencia de productos infinitos ver por ejemplo Rudin, W [ ] pp. 282)_

(b). Es claro de la definición de B_

(c). Como $\left|\frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z}\right| < 1 \quad \forall z \in D, \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $|B(z)| < 1 \ \forall z \in D$.

en particular $|B(e^{i\theta})| \leq 1$ c.d. . Para cada $K \in \mathbb{N}$ sea

$B_K(z) = \prod_{n=1}^{K} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z}$ (el K-ésimo producto parcial). Si $K \in \mathbb{N}$ entonces

la función $\frac{B(z)}{B_K(z)} = \prod_{n=K+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z}$ es analítica y acotada en D.

y además $|\tilde{B}_k(e^{i\theta})| = 1 \ \forall\, \theta\in[-\pi,\pi]$, luego por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue y por ser $M_1(r,\frac{B}{B_k})$ una función creciente de r, tenemos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{B(re^{i\theta})}{B_k(re^{i\theta})}\right|d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{B}(e^{i\theta})|\,d\theta$$

Por otro lado $\lim_{k\to\infty} B_k(z) = B(z)$ y la convergencia es uniforme en cada disco cerrado contenido en D

$$\therefore \quad 2\pi \leq \int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{B}(e^{i\theta})|\,d\theta \leq 2\pi$$ (la última igualdad es porque $|\tilde{B}(e^{i\theta})|\leq 1$ c.d.).

$$\therefore\ |\tilde{B}(e^{i\theta})| = 1 \text{ c.d.}$$

3.13. DEFINICION: Si $\{a_n\}$ es una colección de números complejos en $D-\{0\}$ $\ni$ $0<|a_n|\leq|a_{n+1}|\ \forall n$ y $\sum(1-|a_n|)<\infty$; m es un entero no negativo. Llamaremos el Producto de Blaschke de $\{a_n\}$ a la función:

$$B(z) = z^m\prod_n \frac{|a_n|}{a_n}\cdot\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}.$$

Concluiremos esta sección con una interesante caracterización de los productos de Blaschke, debida a M. Riesz.

3.14 TEOREMA: Una función analítica $f: D\to\mathbb{C}$ es un producto de Blaschke (salvo constantes de módulo 1) si y solo si

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}|\log|f(re^{i\theta})||\,d\theta = 0$$

demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que f es un producto de Blaschke y $f(0)\neq 0$ entonces:

$$f(z) = \prod_n\frac{|a_n|}{a_n}\cdot\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}$$ donde la colección $\{a_n\}$ satisface $\sum_n(1-|a_n|)<\infty$

y $0<|a_n|\leq|a_{n+1}|<1 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$.

Si la colección $\{a_n\}$ es finita digamos $\{a_1,\dots,a_k\}$ sea $R<1 \ni$. $R>|a_k|=\max\{|a_1|\dots|a_k|\}$. Entonces para $r\in[R,1)$ y $n\in\{1,\dots,k\}$ fija

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\frac{a_n-re^{i\theta}}{1-\bar{a}_n re^{i\theta}}\right|d\theta = 2\pi\log|a_n| + 2\pi\log\frac{r}{|a_n|} \quad \text{(fórmula de Jensen)}$$

$$= 2\pi\log\left(\frac{|a_n|}{|a_n|}\cdot r\right) = 2\pi\log r$$

$$\therefore \lim_{\substack{r\to1\\ r\geq R}}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\frac{a_n-re^{i\theta}}{1-\bar{a}_n re^{i\theta}}\right|d\theta = \lim_{\substack{r\to1\\ r\geq R}}2\pi\log r = 0$$

$$\therefore \lim_{r\to1}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \lim_{r\to1}\sum_{n=1}^{k}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\frac{a_n-re^{i\theta}}{1-\bar{a}_n re^{i\theta}}\right|d\theta = 0.$$

Si la colección $\{a_n\}$ es infinita, sea $r\in(0,1)$. Por la fórmula de Jensen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \sum_{|a_n|<r}\log\frac{r}{|a_n|} + \log|f(0)| \quad . \text{ Note que } |f(0)| = \prod_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

Ahora $\sum_{|a_n|<r}\log\frac{r}{|a_n|} + \log|f(0)|$ es una función creciente de r, por lo tanto si $N\in\mathbb{N}$ es fijo y $r>|a_N|$ obtenemos que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \sum_{|a_n|<r}\log\frac{r}{|a_n|} + \log|f(0)| \geq \sum_{n=1}^{N}\log\frac{r}{|a_n|} + \log|f(0)| =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\log r - \sum_{n=1}^{N}\log|a_n| + \log|f(0)| = N\log r + \sum_{n=N+1}^{\infty}\log|a_n|$$

$$\therefore \lim_{r\to1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta \geq \lim_{r\to1}N\log r + \sum_{N+1}^{\infty}\log|a_n| = \sum_{N+1}^{\infty}\log|a_n|$$

$$\therefore\ 0 \geq \lim_{r\to1}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta \geq 2\pi\lim_{N\to\infty}\sum_{N+1}^{\infty}\log|a_n| = 0$$

($\sum_{n=1}^{\infty} \log|a_n| < +\infty$ porque $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} |a_k|$ existe y es $\neq 0$ pues $\sum(1-|a_n|)<\infty$)

$$\therefore \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = 0$$

$$\therefore \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{i\theta})||\,d\theta = 0$$

($\Leftarrow$). Si $\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{i\theta})||\,d\theta = 0$, probaremos que f es un producto de Blaschke. Se deduce del teorema 3.9 que $f \in N$. Además $\log^+|f(re^{i\theta})| \leq |\log|f(re^{i\theta})||$ implica que:

$$0 \leq \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta \leq \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{i\theta})||\,d\theta = 0$$

$$\therefore \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta = 0.$$

Como $\log^+|f(re^{i\theta})| \geq 0$ $\forall re^{i\theta} \in D$ y $\log^+|f|$ es subarmónica se sigue del teorema 2.22 que $\log^+|f(re^{i\theta})| = 0$ $\forall re^{i\theta} \in D$

$$\therefore |f(re^{i\theta})| \leq 1 \quad \forall re^{i\theta} \in D.$$

Sea $B(z)$ el producto de Blaschke formado con los ceros de f. (El producto existe porque $f \in N$ y por el corolario 3.11). Definamos $g: D \to \mathbb{C}$ como sigue: $g(z) = \dfrac{f(z)}{B(z)}$

Observe que g es una función analítica en D, $g(z) \neq 0$ $\forall z \in D$ y además $|g(z)| \leq 1$ $\forall z \in D$ porque $|\tilde{f}(e^{i\theta})| \leq 1$ y $|\tilde{B}(e^{i\theta})| = 1$ c.d. (límites radiales)

Ahora

$$0 \leq \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|g(re^{i\theta})||\,d\theta \leq \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{i\theta})||\,d\theta + \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|B(re^{i\theta})||\,d\theta = 0$$

$$\therefore \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|g(re^{i\theta})||\,d\theta = 0$$

En particular $\quad 0 = \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |-\log|g(re^{i\theta})||d\theta = \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\log \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right| d\theta$ y si se procede como en el inicio de la demostración se obtiene que $\left|\frac{1}{g(re^{i\theta})}\right| \leq 1 \ \forall re^{i\theta} \in D$, pero $|g(re^{i\theta})| \leq 1 \ \forall re^{i\theta} \in D \ \therefore |g(re^{i\theta})| = 1 \ \forall re^{i\theta} \in D$.
Como g es analítica necesariamente $g(z) \equiv e^{i\theta_0}$ para alguna $\theta_0 \in [0,2\pi)$

$$\therefore f(z) = e^{i\theta_0} B(z)$$

§ CONVERGENCIA EN MEDIA P $(0<p\leq\infty)$ A VALORES FRONTERA.

En secciones anteriores demostramos que si $f \in H^p$ para alguna $p>0$ entonces $\tilde{f}(e^{i\theta})$ existe c.d. y $\tilde{f}(e^{i\theta}) \in L^p(\partial D)$. En la presente sección probaremos que $\tilde{f}(e^{i\theta})$ no solo es el límite no tangencial de $f(re^{i\theta})$ casi dondequiera sino que $f(re^{i\theta}) \to \tilde{f}(e^{i\theta})$ en $L^p(\partial D)$, es decir $\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(e^{i\theta})|^p d\theta = 0$.

Iniciamos con el teorema de Factorización de Riesz, el cual además de ser una útil herramienta en los teoremas siguientes es una muy buena aproximación a la descomposición canónica que daremos de las funciones de H^p y N.

15. TEOREMA (F. Riesz, 1923): Sea $f \in H^p$, $f \not\equiv 0$, $(p>0)$; entonces $f(z) = B(z)g(z)$ donde $B(z)$ es el producto de Blaschke formado con los ceros de f y $g(z)$ es una función en H^p tal que $g(z) \neq 0 \ \forall z \in D$ y $\sup_{0<r<1} M_p(r,g) = \sup_{0<r<1} M_p(r,f)$. Asimismo si $f \in N$ entonces $f(z) = B(z)g(z)$ donde $B(z)$ es como antes, $g \in N$ con $g(z) \neq 0 \ \forall z \in D$ y $\lim_{r\to 1^-}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|g(re^{i\theta})|d\theta = \lim_{r\to 1^-}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|d\theta$.

demostración:

Sea $p>0$ y $f\in H^p$, $f\not\equiv 0$ y sean $a_1, a_2, \ldots$ los ceros de f en D, con cada cero repetido tantas veces como su multiplicidad.

Denotemos por $B_n(z)$ al producto de Blaschke formado con los primeros n ceros de f, es decir:

$$B_n(z) = z^m \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z} \quad (m\geq 0).$$

(Si f tiene un número finito de ceros, digamos $a_1, \ldots, a_\ell$, hacemos $B_n(z) = B_\ell(z)$ si $n\geq \ell$).

Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $g_n: D \to \mathbb{C}$ la función definida por $g_n(z) = \frac{f(z)}{B_n(z)}$. Sea $\varepsilon\in(0,1)$ arbitraria. Como $\lim_{r\to 1}|B_n(re^{i\theta})| = 1$ y tal límite es uniforme $\exists\ \delta>0 \ni$ si $|1-|z||<\delta$ entonces $|B_n(z)|>1-\varepsilon$. Luego si $|1-r|<\delta$ entonces:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{1}{2\pi(1-\varepsilon)^p}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} \sup_{0<r<1} M_p^p(r,f)$$

Como $\int_{-\pi}^{\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p d\theta$ es una función creciente de r, la desigualdad anterior es válida $\forall\, r\in(0,1)$ y como $\varepsilon>0$ es arbitraria:

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \sup_{0<r<1} M_p^p(r,f)$$

Ahora si $g(z) = \frac{f(z)}{B(z)}$ entonces para $z = re^{i\theta}\in D$.

$$\lim_{r\uparrow 1} |g_n(re^{i\theta})|^p = |g(re^{i\theta})|^p \quad (\text{pues } |B_n(z)| \geq |B_{n+1}(z)|$$

y $\lim_{n\to\infty} B_n(z) = B(z)$, (límite uniforme en $\bar{D}_r$ $\forall\, r\in(0,1)$).

Luego por el teorema de convergencia monótona

$$M_p(r,g) = \lim_{n\to\infty} M_p(r,g_n) \leq \sup_{0<r<1} M_p(r,f)$$

$$\therefore\ g\in H^p$$

Claramente $g(z) \neq 0 \ \forall z \in D$ y además $\sup\limits_{0<r<1} M_p(r,g) \leq \sup\limits_{0<r<1} M_p(r,f)$

pero $|f(z)| \leq |g(z)| \ \forall z \in D$. $\therefore M_p(r,f) \leq M_p(r,g) \quad \forall r \in (0,1)$

$$\therefore \sup_{0<r<1} M_p(r,f) \leq \sup_{0<r<1} M_p(r,g)$$

$$\therefore \sup_{0<r<1} M_p(r,f) = \sup_{0<r<1} M_p(r,g)$$

Por otro lado si $f \in N$, $f \neq 0$ sea $B(z)$ el producto de Blaschke formado con los ceros de f y $g: D \to \mathbb{C}$ la función $g(z) = \frac{f(z)}{B(z)}$.

Es claro que g es analítica en D y $g(z) \neq 0 \ \forall z \in D$. Probaremos que $g \in N$. Como $\log^+(ab) \leq \log^+(a) + \log^+(b)$ si $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ entonces para $z \in D$ (con $f(z) \neq 0$)

$$\log^+|g(z)| \leq \log^+|f(z)| + \log^+\left|\frac{1}{B(z)}\right| = \log^+|f(z)| - \log|B(z)|$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|g(re^{i\theta})|\,d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} \log|B(re^{i\theta})|\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} |\log|B(re^{i\theta})||\,d\theta$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|g(re^{i\theta})|\,d\theta \leq \lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta + \lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|B(re^{i\theta})||\,d\theta$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta \quad \text{(por teorema 3.14)}$$

De hecho como $|g(z)| \geq |f(z)| \ \forall z \in D$:

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|g(re^{i\theta})|\,d\theta = \lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta < +\infty$$

$$\therefore g \in N$$

Para simplificar la demostración del teorema de convergencia en media p, probaremos primero el siguiente lema de Teoría de la Medida.

3.16 <u>LEMA</u> (<u>F. Riesz</u>) : Sea (X, S, m) un espacio de medida arbitrario, $\Omega \subset X$ un conjunto medible no vacío y sean $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ $(0<p<\infty$ fija$)$ tales que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ c.d. (relativo a m) y $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n|^p dm = \int_\Omega |f|^p dm$ entonces $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|^p dm = 0$

<u>demostración</u>:

Para cada $E \subset \Omega$ medible y cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $J_n(E) = \int_E |f_n|^p dm$ y también $J(E) = \int_E |f|^p dm$. J_n, J son medidas sobre X y $J_n \ll m$, $J \ll m$. Ahora sea $E \subset \Omega$ medible fijo y $\tilde{E} = \Omega - E$ entonces por el lema de Fatou:

$$J(E) \leq \underline{\lim}\, J_n(E) \leq \overline{\lim}\, J_n(E)$$

pero $\overline{\lim}\, J_n(E) = \overline{\lim}\, (J_n(\Omega) - J_n(\tilde{E})) = J(\Omega) - \underline{\lim}\, J_n(\tilde{E}) \leq$ (por lema de Fatou)

$$\leq J(\Omega) - J(\tilde{E}) = J(E)$$

$$\therefore J(E) \leq \underline{\lim}\, J_n(E) \leq \overline{\lim}\, J_n(E) = J(E)$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} J_n(E)$ existe y $\lim_{n\to\infty} J_n(E) = J(E)$. para cada $E \subset \Omega$ medible.

Ahora sea $\varepsilon > 0$ y $F \subset \Omega$ conjunto de medida finita (relativo a m) $\ni$ $J(\tilde{F}) < \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^{p+1}}$

Como $J \ll m$ $\exists\, \delta > 0 \ni J(G) < \frac{\varepsilon}{3\cdot 2^{p+1}}$ $\forall\, G \subset F$ con $m(G) < \delta$. y por el teorema de Egorov $\exists\, G \subset F \ni m(G) < \delta$ y $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformemente en $F - G$.

Elegimos $N_0 \in \mathbb{N}$ ∋ si $n \geq N_0$ entonces:

- $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in F-G.$
- $|J_n(\tilde{F}) - J(\tilde{F})| < \varepsilon/3\cdot 2^{p+1}$
- $|J_n(G) - J(G)| < \varepsilon/3\cdot 2^{p+1}$

De aquí, si $n \geq N_0$:

$$\int_{\Omega}|f_n-f|^p dm = \int_{\tilde{F}}|f_n-f|^p dm + \int_{G}|f_n-f|^p dm + \int_{F-G}|f_n-f|^p dm$$

$$\leq 2^p\{J_n(\tilde{F})+J(\tilde{F})+J_n(G)+J(G)\} + \varepsilon\, m(F-G)$$ (usando la desigualdad $(a+b)^p \leq 2^p(a^p+b^p)$ con $p>0$ y $a\geq 0$, $b\geq 0$).

pero $2^p\{J_n(\tilde{F})+J(\tilde{F})+J_n(G)+J(G)\} < \varepsilon + \varepsilon\, m(F-G) = (1+m(F-G))\,\varepsilon$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}|f_n-f|^p dm = \underline{0}.$$

3.17. <u>TEOREMA</u> (<u>F. Riesz</u>): Si $0<p<\infty$ y $f\in H^p$ entonces:

(a). $\displaystyle\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}(e^{i\theta})|^p d\theta.$

(b). $\displaystyle\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(e^{i\theta})|^p d\theta = 0.$

<u>demostración</u>: Usando una útil idea debida a A. Zygmund, primero probaremos (b) y (a) (sic) para el caso $p=2$, lo cual nos permitirá concluir (a) en el caso $p\in(0,\infty)$ arbitrario. De ahí usando el lema 3.16 se obtendrá (b). para cualquier $p\in(0,\infty)$.

Sea $f \in H^2$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ el desarrollo de f en serie de Taylor alrededor de 0. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente en $\bar{D}_r$ $\forall r \in (0,1)$

Como $f \in H^2$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Ahora bien, por el lema de Fatou:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{\rho \to 1} |f(re^{i\theta}) - f(\rho e^{i\theta})| \leq \lim_{\rho \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(e^{i\theta})|^2 d\theta =$$

$$= 2\pi \lim_{\rho \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (\rho^n - r^n)^2 = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (1 - r^n)^2$$

luego $$0 \leq \lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \lim_{r \to 1} 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (1 - r^n)^2 = 0$$

$$\therefore \lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(e^{i\theta})|^2 d\theta = 0.$$

Por otro lado $$\lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \lim_{r \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

$$\therefore \lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

Ahora si $f \in H^p$ con $0 < p < \infty$, por el teorema de factorización de Riesz $\exists\, g \in H^p \ni g(z) \neq 0 \ \forall z \in D$ y $f(z) = B(z) g(z)$ ($B(z)$ es el producto de Blaschke formado con los ceros de f).

La función $(g(z))^{p/2} \in H^2$ y por la parte anterior

$$\lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} (|g(re^{i\theta})|^{p/2})^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{g}(e^{i\theta})|^p d\theta$$

pero $\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta$ $\forall r \in (0,1)$ y $\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{g}(e^{i\theta})|^p d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(e^{i\theta})| d\theta$

pues $|\tilde{B}(e^{i\theta})| = 1$ c.d.

$$\therefore \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}(e^{i\theta})|^p d\theta$$

Finalmente, por el lema de Fatou:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}(e^{i\theta})|^p d\theta \leq \varliminf_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta = \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta$$

$$\therefore \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}(e^{i\theta})|^p d\theta$$

Y por el lema 3.16 $\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})-\tilde{f}(e^{i\theta})|^p d\theta = 0$

3.18 COROLARIO: Si $f\in H^p$ son $0<p<\infty$ entonces:

$$\sup_{0<r<1} M_p(r,f) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}(e^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p}$$

demostración:

Por la observación 2.25: $\sup_{0<r<1} M_p(r,f) = \lim_{r\nearrow 1^-} M_p(r,f)$. y por el teorema anterior $\lim_{r\nearrow 1^-} M_p(r,f) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}(e^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p}$

NOTA: Este corolario tendrá consecuencias importantes en los siguientes capítulos.

En este momento procede de manera natural preguntarse respecto al comportamiento de las funciones de la clase N en el sentido del teorema 3.17. Es decir, si $f\in N$ ¿Será cierto que

$$(1)\ \ldots\ \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\log^+|f(re^{i\theta})| - \log^+|\tilde{f}(e^{i\theta})|\right| d\theta = 0\ ?$$

La respuesta en general es que (1) es falso para algunas funciones de N, como lo muestra el siguiente ejemplo:

3.19. EJEMPLO: De una función de clase N que no satisface (1)

Sea $f(z) = \exp\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

- $f \in N$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{i\theta})||\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\log\left|\exp\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)\right|\right| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\log\left\{\exp\left(\operatorname{Re}\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)\right\}\right| d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left|\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)\right| d\theta \qquad \text{pero } \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = P(r,\theta) \geq 0$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta)\,d\theta = 2\pi$$

$$\therefore \sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{i\theta})||\,d\theta = 2\pi < \infty$$ y por el teorema 3.9 $f \in N$.

- f no satisface (1). (i.e. $\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log^+|f(re^{i\theta})| - \log^+|\tilde{f}(e^{i\theta})||\,d\theta \neq 0$)

Sea $re^{i\theta} \in D$ entonces $|f(re^{i\theta})| = \exp(P(r,\theta))$ y como $\lim_{r\to 1} P(r,\theta) =$
$= \lim_{r\to 1} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = 0$ (si $\theta \neq 0$) entonces $|\tilde{f}(e^{i\theta})| = 1$ $\forall \theta \neq 0$.

$$\therefore \log^+|\tilde{f}(e^{i\theta})| = 0 \quad (\theta \neq 0)$$

Así:

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log^+|f(re^{i\theta})| - \log^+|\tilde{f}(e^{i\theta})||\,d\theta = \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log^+\{\exp(P(r,\theta))\}|\,d\theta =$$

$$= \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta)\,d\theta = 2\pi \neq 0$$ (la penúltima igualdad se sigue de que $P(r,\theta) \geq 0$ y $\log^+ t = \log t$ si $t \geq 1$).

Aún cuando la condición (1) no se verifica para todos los elementos de la clase N, resulta que si es válida $\forall f \in H^p$ $\forall p > 0$:

3.20 COROLARIO: Si $f \in H^p$ para alguna $p>0$, entonces:

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \log^+|f(re^{i\theta})| - \log^+|\tilde{f}(e^{i\theta})| \right| d\theta = 0$$

demostración:

Sean $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $0<p\leq 1$ entonces la siguiente desigualdad se satisface: $|\log^+ a - \log^+ b| \leq \frac{1}{p}|a-b|^p$. Es claro que usando esta desigualdad y el teorema 3.17 el corolario es inmediato; por consiguiente sólo probaremos la desigualdad en cuestión. Para esto basta considerar el caso $1\leq b<a$.

Sea $h:[1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $h(x) = \frac{1}{p}(x-1)^p - \log x$.

Si calculamos la derivada de h se obtiene que $h'(x) = (x-1)^{p-1} - \frac{1}{x}$

Ahora $x \geq 1 \Rightarrow x > x^{1-p} > (x-1)^{1-p}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{(x-1)^{-p+1}} \Rightarrow (x-1)^{p-1} - \frac{1}{x} > 0$$

$$\therefore h'(x) > 0 \quad \forall x \in [1,\infty) \quad y \quad h(1) = 0$$

$$\therefore \log x \leq \frac{1}{p}(x-1)^p \quad \forall x \in [1,\infty)$$

Si $x = \frac{a}{b} \geq 1$ entonces: $\log x = \log\frac{a}{b} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{a}{b}-1\right)^p = \frac{1}{p}\left(\frac{a-b}{b}\right)^p \leq \frac{1}{p}(a-b)^p$

y $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b = \log^+ a - \log^+ b \quad \therefore \log^+ a - \log^+ b \leq \frac{1}{p}(a-b)^p$

3.21 OBSERVACION: En 3.2 probamos que $H^p \subset N \;\; \forall p>0$. una consecuencia del ejemplo 3.19 y el corolario 3.20 es que $f(z) = \exp\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \in N$ y $f(z) \notin H^p \;\; \forall p>0$

$$\therefore \bigcup_{p>0} H^p \subsetneq N$$

§ TEOREMA DE FACTORIZACION CANONICA

En el teorema de Riesz (3.15) se probó que si $f \in H^p$ $(p>0)$ entonces $f(z) = B(z)g(z)$ donde B es el producto de Blaschke formado con los ceros de f y $g \in H^p$ no se anula en algún punto de D.

El teorema de Factorización Canónica es un refinamiento del teorema de Riesz en el cual se exhibe una descomposición de las funciones de H^p $(p>0)$ que no se anulan en algún punto del disco unitario. En seguida describiremos aquellas funciones que intervienen en el teorema de Factorización Canónica.

3.22 DEFINICION: Una *función exterior* es una función analítica $F: D \to \mathbb{C}$ de la forma

$$F(re^{i\theta}) = \lambda \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}} \psi(t)\, dt \right\} = \lambda \exp\{(H_r * \psi)(\theta)\}$$

donde $\lambda \in \partial D$ y $\psi \in L^1([-\pi,\pi])$

3.23 OBSERVACION - DEFINICION: Si $f \in H^p$ $(p>0)$ entonces por el teorema 3.7 $\tilde{f}(e^{i\theta}) \in L^p(\partial D)$ y $\log|\tilde{f}(e^{i\theta})| \in L^1(\partial D)$. Luego a cada $f \in H^p$ se le puede asociar de manera natural la siguiente función exterior:

$$F(re^{i\theta}) = \exp\{(H_r * \log|\tilde{f}|)(\theta)\}$$ (Convenimos en que $(\log|\tilde{f}|)(t) = \log|\tilde{f}(e^{it})|$)

Llamaremos *función exterior para la clase H^p* a toda función de la forma:

$$F(re^{i\theta}) = \lambda \exp\{(H_r * \log\psi)(\theta)\} \quad \text{donde } \lambda \in \partial D,\ \psi \geq 0,$$

$\psi \in L^p(\partial D)$, $\log\psi \in L^1([-\pi,\pi])$.

3.24 PROPOSICION: Si F es una función exterior para la clase H^p entonces $F \in H^p$ y $|\tilde{F}| = \psi$ c.d.

demostración:

Por hipótesis $F(re^{i\theta}) = \lambda \exp\{(H_r * \log\psi)(\theta)\}$, con $\psi \geq 0$, $\lambda \in \partial D$

$\psi \in L^p([-\pi,\pi])$ y $\log\psi \in L^1([-\pi,\pi])$, luego:

$$|F(re^{i\theta})|^p = |\lambda \exp\{(H_r * \log\psi)(\theta)\}|^p = (\exp\{(P_r * \log\psi)(\theta)\})^p = \exp\{(P_r * \log\psi^p)(\theta)\}$$

Si $E \subset [-\pi,\pi]$ es medible y $re^{i\theta} \in D$ definimos $\mu(E) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi_E(t)\, P(r,\theta-t)\,dt$

Asi definida μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y $\mu([-\pi,\pi]) = 1$. De aquí que:

$$|F(re^{i\theta})|^p = \exp\{(P_r * \log\psi^p)(\theta)\} = \exp\left\{\int_{-\pi}^{\pi} \log\psi^p(t)\, d\mu(t)\right\}$$

pues $d\mu(t) = P(r,\theta-t)\,dt$. Pero

$$\exp\left\{\int_{-\pi}^{\pi} \log\psi^p(t)\, d\mu(t)\right\} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \psi^p(t)\, d\mu(t)$$ (Por la desigualdad de Jensen)

$$\therefore |F(re^{i\theta})|^p \leq \int_{-\pi}^{\pi} \psi^p(t)\, d\mu(t) = (P_r * \psi^p)(\theta)$$

$\therefore |F(re^{i\theta})|^p \leq (P_r * \psi^p)(\theta)$. Integramos ambos miembros de la desigualdad y aplicamos el teorema de Fubini para obtener:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p\, d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} (P_r * \psi^p)(\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \psi^p(t)\, dt = \ldots$$

pero $\int_{-\pi}^{\pi} \psi^p(t)\,dt < \infty$ porque $\psi \in L^p([-\pi,\pi])$ $\therefore \sup_{0<r<1} M_p(r,f) \leq \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi^p(t)\,dt\right\}^{1/p} < +\infty$

$= \|\psi\|_p < +\infty$

$\therefore F \in H^p$.

Finalmente:

$$|F(re^{i\theta})| = \exp\{(P_r * \log\psi)(\theta)\}$$

$\Rightarrow \log|F(re^{i\theta})| = (P_r * \log\psi)(\theta)$ y por el corolario 2.13

$$\lim_{r\to 1} \log|F(re^{i\theta})| = \log\psi(\theta) \text{ c. d.}$$

$$\therefore \; |\tilde{F}(e^{i\theta})| = \eta(\theta) \text{ c.d.}$$

NOTA: En la primera parte del argumento anterior usamos el siguiente hecho: Si μ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue entonces:

$$\int f\,d\mu = \int f\mu'\,dx$$ donde $\int f\,d\mu$ denota la integral de Lebesgue-Stieltjes.

Introduciremos una caracterización muy útil de las funciones exteriores. Para esto probaremos antes el siguiente teorema:

3.25 TEOREMA: Si $f \in H^p$ con $p>0$ entonces $\log|f(re^{i\theta})| \leq (P_r * \log|\tilde{f}|)(\theta)$ $\forall re^{i\theta} \in D$.

NOTA: Este teorema también será de gran utilidad en otras ocasiones.

demostración:

Caso 1: Si $f(z) \neq 0$ $\forall z \in D$ entonces $\log|f(z)|$ es armónica en D. Luego si $re^{i\theta} \in D$ y $\rho \in (r,1)$ entonces:

$$\log|f(\rho re^{i\theta})| = (P_r * \log|f_\rho|)(\theta)$$ (Solución al problema de Dirichlet en $\bar{D}_\rho$)

Ahora:

$$\lim_{\rho \to 1} |(P_r * \log^+|f_\rho|)(\theta) - (P_r * \log^+|\tilde{f}|)(\theta)| \leq \lim_{\rho\to 1} (P_r * |(\log^+|f_\rho| - \log^+|\tilde{f}|)|)(\theta) \leq$$

$$\leq \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1+r}{1-r}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} |\log^+|f(\rho e^{i\theta})| - \log^+|\tilde{f}(e^{i\theta})||\,d\theta = 0$$ (por el corolario 3.20)

$$\therefore \lim_{\rho\to 1} (P_r * \log^+|f_\rho|)(\theta) = (P_r * \log^+|\tilde{f}|)(\theta) \quad \ldots\ldots (1)$$

Por otro lado:

$$(P_r * \log^-|\tilde{f}|)(\theta) \leq \varliminf_{\rho\to 1} (P_r * \log^-|f_\rho|)(\theta)$$ (Lema de Fatou)

pero $\log^- |f_\rho(e^{it})| = \log^- |f(\rho e^{it})| = \log^+ |f(\rho e^{it})| - \log|f(\rho e^{it})|$ y los límites radiales $\lim\limits_{\rho\to 1}(P_r * \log^+|f_\rho|)(\theta)$; $\lim\limits_{\rho\to 1}(P_r * \log|f_\rho|)(\theta)$ existen y son finitos porque $f\in H^p \subset N$ y $\tilde{f}\neq 0$ c.d. (ver observación 3.8).

$$\therefore \underline{\lim}_{\rho\to 1} (P_r * \log^-|f_\rho|)(\theta) = \lim_{\rho\to 1} (P_r * \log^-|f_\rho|)(\theta)$$

así pues

$$-\lim_{\rho\to 1} (P_r * \log^-|f_\rho|)(\theta) \le -(P_r * \log^-|\tilde{f}|)(\theta) \quad \ldots. (2)$$

Sumando las relaciones (1) y (2) obtenemos

$$\lim_{\rho\to 1} |f(\rho r e^{i\theta})| = \lim_{\rho\to 1} (P_r * \log|f_\rho|)(\theta) \le (P_r * \log|\tilde{f}|)(\theta)$$

$$\therefore |f(re^{i\theta})| \le (P_r * \log|\tilde{f}|)(\theta)$$

Caso 2: Si $f\in H^p$ y $f\not\equiv 0$ entonces por el teorema de factorización de Riesz $f(z) = B(z)\,g(z)$ con $g(z)\neq 0$ $\forall z\in D$ y $|\tilde{f}(e^{i\theta})| = |\tilde{g}(e^{i\theta})|$ casi dondequiera.

Por el caso 1: $\log|g(re^{i\theta})| \le (P_r * \log|\tilde{g}|)(\theta)$

$$\therefore \log|f(re^{i\theta})| \le \log|g(re^{i\theta})| \le (P_r * \log|\tilde{g}|)(\theta) = (P_r * \log|\tilde{f}|)(\theta)$$

$$\therefore \log|f(re^{i\theta})| \le (P_r * \log|\tilde{f}|)(\theta)$$

3.26 OBSERVACION: Existen funciones de clase N para las cuales el teorema 3.25 es falso y funciones en H^∞ para las que la desigualdad es estricta.

- Si $f(z) = \exp\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\}$, sabemos por 3.14 que $f\in N$, $\log|\tilde{f}(e^{it})| = 0$ c.d.

y $\log|f(re^{i\theta})| = P(r,\theta) > 0$ $\forall r\in[0,1)$, $\forall\theta\in[-\pi,\pi]$

$$\therefore \log|f(re^{i\theta})| = P(r,\theta) > 0 = (P_r * \log|\tilde{f}|)(\theta)$$

- Si $g(z) = \exp\left\{-\frac{1+z}{1-z}\right\}$ entonces $g\in H^\infty$ y:

$$\log|g(re^{i\theta})| < 0 = (P_r * \log|\tilde{f}|)(\theta)$$

3.27 <u>TEOREMA</u>: Sea $F \in H^p$, $(p>0)$ $\ni$ $F(z) \neq 0$ $\forall z \in D$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a). F es una función exterior.

(b). Si $f \in H^p$ es tal que $|\tilde{f}| = |\tilde{F}|$ c.d. entonces $|f(z)| \leq |F(z)|$ $\forall z \in D$.

(c). $\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\tilde{F}(e^{i\theta})|\, d\theta$

<u>demostración</u>:

(a). $\Rightarrow$ (b). Sea $f \in H^p$ $\ni$ $|\tilde{f}| = |\tilde{F}|$ c.d. y sea $re^{i\theta} \in D$. Como $F \in H^p$ y es exterior entonces:

$$\log|F(re^{i\theta})| = (P_r * \log|\tilde{F}|)(\theta) = (P_r * \log|\tilde{f}|)(\theta)$$ y por el teorema 3.25:

$$(P_r * \log|\tilde{f}|)(\theta) \geq \log|f(re^{i\theta})|$$

$$\therefore \log|F(re^{i\theta})| \geq \log|f(re^{i\theta})|$$

$$\therefore |F(re^{i\theta})| \geq |f(re^{i\theta})|$$

(b). $\Rightarrow$ (c). Sea $f: D \to \mathbb{C}$ la función definida por $f(re^{i\theta}) = \exp\{(H_r * \log|\tilde{F}|)(\theta)\}$ f es una función exterior para la clase H^p, ya que $F \in H^p$. Por la proposición 3.24 se tiene que $f \in H^p$ y $|\tilde{f}| = |\tilde{F}|$ c.d.

$\therefore$ $|f(z)| \leq |F(z)|$ $\forall z \in D$ (hipótesis). En particular:

$$|F(0)| \geq |f(0)| = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\tilde{F}(e^{it})|\, dt\right\}$$

$$\therefore \log|F(0)| \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\tilde{F}(e^{it})|\, dt$$

Ahora del teorema 3.25:

$$\log|F(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\tilde{F}(e^{it})|\, dt$$

$$\therefore \log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\tilde{F}(e^{it})|\, dt$$

(c) $\Rightarrow$ (a). Como en la parte anterior sea $f(re^{i\theta}) = \exp\{(P_r * \log|\tilde{F}|)(\theta)\}$

La función $\frac{F(z)}{f(z)}$ es analítica en D y:

$$\frac{|F(re^{i\theta})|}{|f(re^{i\theta})|} = \frac{|F(re^{i\theta})|}{\exp\{(P_r * \log|\tilde{F}|)(\theta)\}} \leq 1$$ (Nuevamente por el teorema 3.25). Además $\frac{|F(0)|}{|f(0)|} = 1$ pues por hipótesis $\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\tilde{F}(e^{it})|dt$. Luego por el Principio del Módulo Máximo $\frac{F(z)}{f(z)} \equiv \lambda$ con λ una constante de módulo 1. $\therefore$ $F(z) = \lambda f(z)$ (i.e. F es exterior)

Otras funciones que aparecen en el teorema de factorización canónica son las siguientes:

3.28 DEFINICION: Una función interior es una función, f, analítica en D que satisface: $|f(z)| \leq 1$ $\forall z \in D$ y $|\tilde{f}(e^{i\theta})| = 1$ c.d.

Note que todo producto de Blaschke es una función interior (Teorema de Blaschke 3.12)

3.29 DEFINICION: Una función singular interior es una función de la forma: $S(re^{i\theta}) = \exp\{-2\pi (H_r * \mu)(\theta)\}$ donde $\mu(t)$ es una función acotada, no negativa y singular (i.e. $\mu'(t) = 0$ c.d. respecto a la medida de Lebesgue).

3.30 OBSERVACION: Si $S(re^{i\theta}) = \exp\{-2\pi (H_r * \mu)(\theta)\}$ es una función singular interior entonces S es una función interior.

demostración:

$$|S(re^{i\theta})| = \exp\{-2\pi (P_r * \mu)(\theta)\} \leq 1$$ porque $(P_r * \mu)(\theta) \geq 0$ $\forall re^{i\theta} \in D$. Además por el teorema de Fatou (2.11):

$$\lim_{r \to 1} \log|S(re^{i\theta})| = \mu'(\theta) \quad \text{c.d.}$$

pero $\mu'(\theta)=0$ c.d. (respecto a la medida de Lebesgue)

$$\therefore\ |\tilde{S}(e^{i\theta})| \doteq 1 \text{ c.d.}$$

$$\therefore\ S \text{ es interior}$$

Ahora sí:

3.31 TEOREMA: (Teorema de Factorización Canónica; Smirnov, I.V. 1929):

(a). Sea $f\in H^p$ $(p>0)$, $f\not\equiv 0$, entonces $f(z)=B(z)S(z)F(z)$ donde $B(z)$ es el producto de Blaschke formado con los ceros de f, $S(z)$ es una función singular interior y $F(z)$ es la función exterior para la clase H^p: $F(z)=\lambda\exp\{(H_r * \log|\tilde{f}|)(\theta)\}$ con $\lambda\in\partial D$ y $z=re^{i\theta}$

(b). Si $f(z)=B(z)S_1(z)F_1(z)$, donde S_1 es una función singular interior y F_1 es una función exterior para la clase H^p, entonces $S_1(z)=S(z)$ y $F_1(z)=F(z)$ $\forall z\in D$.

(c). Si $h(z)=B(z)S(z)F(z)$ con B, S y F como antes, entonces $h\in H^p$.

demostración:

(a). Consideremos $f\in H^p$ $(p>0)$ y $F_0(z)=\exp\{(H_r * \log|\tilde{f}|)(\theta)\}$. $z=re^{i\theta}$. Del teorema de factorización de Riesz: $f(z)=B(z)g(z)$ con $B(z)$ el producto de Blaschke formado con los ceros de f y $g(z)$ una función en H^p tal que $g(z)\neq 0$ $\forall z\in D$ y $|\tilde{g}|=|\tilde{f}|$ c.d.

Por otro lado $|\tilde{F}_0|=|\tilde{f}|$ c.d. $\therefore\ |\tilde{F}_0|=|\tilde{g}|$ c.d. usando el teorema 3.27 (b). obtenemos que:

$$|g(z)|\leq |F_0(z)| \quad \forall z\in D.$$

Sea $\lambda=\dfrac{g(0)}{|g(0)|}$ y $S(z)=\bar{\lambda}\,\dfrac{g(z)}{F_0(z)}$. Así definida la función S es analítica en D y satisface:

$$0<|S(z)|\leq 1,\quad |\tilde{S}(e^{i\theta})|=1 \text{ c.d. y } S(0)=\bar{\lambda}\,\frac{g(0)}{F_0(0)}=\frac{|g(0)|}{F(0)}>0$$

Como $0<|S(z)|\leq 1$ entonces $-\frac{1}{2\pi}\log|S(z)|$ es una función armónica positiva, luego por el corolario 2.9 (Representación de Herglotz) $\exists\ \mu$ función acotada, no negativa (y aun más no decreciente) tal que:

$$-\frac{1}{2\pi}\log|S(z)| = (P_r * \mu)(\theta) \qquad z=re^{i\theta}$$

Ahora bien: μ es diferenciable c.d. y $0=\lim_{r\to 1} -\frac{1}{2\pi}\log|S(re^{i\theta})| = \mu'(\theta)$

c.d. por lo tanto μ es singular. Por otro lado:

$$\log|S(re^{i\theta})| = -2\pi(P_r*\mu)(\theta) = \operatorname{Re}\{-2\pi(H_r*\mu)(\theta)\}$$

$$\therefore\ |S(re^{i\theta})| = \exp(\operatorname{Re}\{-2\pi(H_r*\mu)(\theta)\})$$

Luego $S(re^{i\theta}) = \exp\{-2\pi(H_r*\mu)(\theta)\}\cdot\gamma$ donde $\gamma\in\partial D$ pero $S(0)>0 \Rightarrow \gamma=1$.

$$\therefore\ S(re^{i\theta}) = \exp\{-2\pi(H_r*\mu)(\theta)\} = \exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\,d\mu(t)\right\}$$

$\therefore$ S es una función singular interior

Finalmente si F es la función exterior λF_0 tenemos que

$$f(z)=B(z)S(z)F(z)$$

(b). Probaremos únicamente que $F_1(z)=F(z)\ \forall\ z\in D$ (De aquí es evidente que $S_1(z)=S(z)\ \forall\ z\in D$).

Como F_1 es una función exterior para la clase H^p, tenemos que:

$$F_1(z)=\lambda_1\exp\{(H_r*\log\psi)(\theta)\}\quad \text{con } z=re^{i\theta},\ \psi(t)\geq 0$$

$\psi\in L^p([-\pi,\pi])$ y $\log\psi\in L^1([-\pi,\pi])$. Por la proposición 3.24 $|\tilde{F}_1|=\psi$ c.d. y $|\tilde{F}_1| = |\tilde{F}|$ c.d. ya que $|\tilde{B}||\tilde{S}|=1$ c.d.

$$\therefore\ \psi=|\tilde{F}|=|\tilde{f}| \text{ c.d.}$$

$\therefore\ F_1(z)=F(z)\ \forall z\in D$ (Salvo constantes de módulo 1.)

(c). Es inmediato de la proposición 3.24 y de que $|B(z)S(z)F(z)|\leq |F(z)|\ \forall\ z\in D$

3.32 COROLARIO: Si f es una función interior entonces $f(z)=\lambda B(z)S(z)$ con $B(z)$ el producto de Blaschke formado con los ceros de f, $S(z)$ una función singular interior y $\lambda\in\partial D$.

demostración:

Si $f(z)=B(z)S(z)F(z)$ como en 3.31 entonces $F(z)\equiv\lambda$ con $\lambda\in\partial D$.

Las funciones de clase N también admiten una descomposición en términos de productos de Blaschke, funciones exteriores y singulares interiores. De manera análoga al caso H^p comenzamos con la siguiente:

3.33 DEFINICION: Toda función analítica de la forma:

$F(re^{i\theta})=\lambda\exp\{(H_r*\log\psi)(\theta)\}$ donde $\psi(t)\geq 0$ y $\log\psi(t)\in L^1([-\pi,\pi])$ se llamará función exterior para la clase N.

Note que si $f\in N$ entonces $\log|\tilde{f}|\in L^1([-\pi,\pi])$, lo cual proporciona una función exterior para la clase N (en la que $\psi=|\tilde{f}|$) asociada a f.

Observe que ahora no necesariamente $\psi\in L^p([-\pi,\pi])$ para alguna $p>0$.

3.34 PROPOSICION: Sea F una función exterior para la clase N, entonces $F\in N$ y $|\tilde{F}|=\psi$ c.d.

demostración:

Supongamos que $F(re^{i\theta})=\lambda\exp\{(H_r*\log\psi)(\theta)\}$ con $\psi(t)\geq 0$ y $\log\psi(t)\in L^1([-\pi,\pi])$. Entonces:

$$|F(re^{i\theta})|=\exp\{(P_r*\log\psi)(\theta)\}$$

$$\Rightarrow |\log|F(re^{i\theta})||=|(P_r*\log\psi)(\theta)|$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}|\log|F(re^{i\theta})||d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}|(P_r*\log\psi)(\theta)|d\theta=\|P_r*\log\psi\|_1$$

y como $\|P_r * \log\varphi\|_1 \leq \|P_r\|_1 \cdot \|\log\varphi\|_1 = \|\log\varphi\|_1 < \infty$ (Ver 1.)

se sigue que $\displaystyle\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|F(re^{i\theta})||\,d\theta < \infty \quad \therefore F \in \underline{N}.$

En forma análoga a 3.24 se prueba que $|\tilde{F}| = \psi$ c.d.

3.35 TEOREMA (Smirnov, I. V. : 1929): Sea $f \in N$, $f \neq 0$ entonces:

$f(z) = B(z)\dfrac{S_1(z)}{S_2(z)} F(z)$. Donde $B(z)$ es el producto de Blaschke formado con los ceros de f, $S_1(z)$ y $S_2(z)$ son funciones singulares interiores y $F(z)$ es una función exterior para la clase N (con $\psi(t) = |\tilde{f}(e^{it})|$).

Inversamente si $h(z) = B(z)\dfrac{S_1(z)}{S_2(z)} F(z)$ con B, S_1, S_2 y F como antes entonces $h \in N$.

demostración:

Por el teorema de factorización de Riesz $f(z) = B(z)g(z)$ y g es tal que: $g \in N$, $g(z) \neq 0$ $\forall z \in D$ y $|\tilde{g}(e^{i\theta})| = |\tilde{f}(e^{i\theta})|$ c.d.

Ahora $g \in N \Rightarrow \exists\, \psi_1, \psi_2 \in H^\infty$ tales que $g(z) = \dfrac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)}$ $\forall z \in D$.

Sea $B_k(z) S_k(z) F_k(z)$ la factorización canónica de ψ_k $(k=1,2)$. Como g es analítica en D y $g(z) \neq 0$ $\forall z \in D$ entonces $B_1(z) = B_2(z)$ $\forall z \in D$.

Por otro lado:

$$F_k(re^{i\theta}) = \exp\{(H_r * \log|\tilde{\psi}_k|)(\theta)\} \quad k=1,2 \quad \text{y} \quad \log|\tilde{\psi}_k| \in L^1([-\pi,\pi])$$

$\therefore \log|\tilde{g}| = \log\dfrac{|\tilde{\psi}_1|}{|\tilde{\psi}_2|} \in L^1([-\pi,\pi])$ y $F(z) = \exp\{(H_r * \log|\tilde{g}|)(\theta)\}$ es una función exterior para la clase N. Así: $f(z) = B(z)g(z) = B(z)\dfrac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)} =$

$= B(z)\dfrac{S_1(z)}{S_2(z)} F(z)$ $\forall z \in D$.

Ahora si $h(z) = B(z)\frac{S_1(z)}{S_2(z)}F(z)$ entonces $|h(z)| \leq \frac{|F(z)|}{|S_2(z)|}$ $\forall z \in D$.

Como $|F(re^{i\theta})| = \exp\{(P_r * \log\psi)(\theta)\}$ (con $\psi(t) \geq 0$ y $\log\psi \in L^1([-\pi,\pi])$).

$|S_2(re^{i\theta})| = \exp\{-2\pi(P_r * \mu_2)(\theta)\}$ (con μ_2 acotada, no negativa y $\mu_2'(t) = 0$ c.d.)

entonces:

$$|h(re^{i\theta})| \leq \exp\{(P_r * \log\psi)(\theta) + 2\pi(P_r * \mu_2)(\theta)\}$$

$$\Rightarrow |\log|h(re^{i\theta})|| \leq |(P_r * \log\psi)(\theta)| + 2\pi|(P_r * \mu_2)(\theta)|$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |\log|h(re^{i\theta})||\,d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} |(P_r * \log\psi)(\theta)|\,d\theta + 2\pi\int_{-\pi}^{\pi} |(P_r * \mu_2)(\theta)|\,d\theta.$$

$$\Rightarrow \sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|h(re^{i\theta})||\,d\theta < \infty$$ ya que $(P_r * \log\psi)(\theta)$ y

$(P_r * \mu_2)(\theta)$ son integrales de Poisson-Stieltjes y por lo tanto elementos de h^1.

$\therefore\ h \in \underline{N}$.

BIBLIOGRAFIA

[1]. Ahlfors, L. "Complex Analysis" McGraw-Hill, New York, 1979

[2]. Duren, P. "Theory of H^p Spaces" Academic Press, New York, 1970

[3]. Grabinsky, G. "Introducción al Análisis Armónico Clásico" Facultad de Ciencias, UNAM, 1986.

[4]. Hoffman, K. "Banach Spaces of Analytic Functions" Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, New Jersey, 1962.

[5]. Koosis, P. "Introduction to H^p Spaces" Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[6]. Marsden, J. E. "Basic Complex Analysis"

[7] Natanson, I.P. "Theory of Functions of a Real Variable" Ungar, New York, 1955.

[8] Royden, H. L. "Real Analysis" The Macmillan Co., USA, 1968.

[9] Rudin, W. "Analisis Real y Complejo" Ed. Alhambra, Madrid, 1985.

[10] Taylor, A. "Introduction to Functional Analysis" John Wiley, New York, 1961.

[11]. Zygmund, A. "Trigonometric Series"
Cambridge University Press, Cambridge, 1959