2 ej.
27

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL METODO ECONOMETRICO: FUNDAMENTACION TEORICA Y UN EJEMPLO DE APLICACION.

TESIS PROFESIONAL

Presenta

Alejandro Héctor Molina Canales

PARA OBTENER EL TITULO DE
MATEMATICO

MEXICO, D. F. 1986

I N D I C E

INTRODUCCION

En un sentido amplio podemos pensar a la econometría como la ciencia que sirve para contrastar empíricamente y utilizar las afirmaciones que hace la teoría económica. Para esta contrastación la econometría se puede valer de cualquier técnica matemática de acuerdo al modelo que se esté tratando.

El objetivo del presente trabajo es analizar los fundamentos del método econométrico y su aplicación para la explicación e interpretación de fenómenos económicos en el caso en que la teoría económica se puede expresar como un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas.

El objetivo de los economistas es interpetar y explicar fenómenos sobre los cuales, a lo más se cuenta con ciertas bases de teoría económica y con datos generados en forma pasiva y no reproducible. Podemos pensar a la ciencia económica como aquella, cuyo objetivo principal es el estudio de los sistemas de comportamiento surgidos de las relaciones de grupos sociales[1].

Es indudable que la economía y la matemática están interrelacionados. Consideremos la siguiente ecuación:

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + U_t$$

Dicha ecuación, expresa al consumo (C_t) como una función lineal del ingreso (Y_t), más un término aleatorio (U_t)*. La teoría económica permitirá definir la forma de la curva correspondiente a la misma ecuación, pero no un punto (Y_t, C_t) sobre ella, ya que para ello habría que tener un valor numérico de los parámetros α y β. Tampoco permitirá decir cual es el comportamiento

(*) Más adelante se definirá en que consiste este término.

(1) Ver serie temática 2 MODEM 5 pág. 9.

(en cuanto a su distribución) del término aleatorio U_t. Para - todo esto requeriremos de herramienta matemática; específicamen te de la estadística.

En el caso específico de la econometría, podemos decir que la - matemática es un lenguaje que utilizamos para expresar hechos - económicos. La utilización de este lenguaje permite hacer un - fraseo de la teoría económica de un modo preciso y sin ambigüe- dades; permite además, utilizar a las teorías matemáticas ya -- construidas como herramientas de apoyo para el análisis económi co. En este contexto, el papel de la econometría es servir cómo el puente entre la teoría y la realidad con el fin de apoyar o refutar la teoría en función de las inferencias que se hagan con los datos reales y los supuestos.

El contenido del presente trabajo es básicamente el siguiente:

El primer capítulo comprende una descripción de ciertos concep- tos fundamentales para la econometría: Hacemos un análisis de los conceptos de teoría, modelo y estructura desde diferentes - puntos de vista.

En el segundo capítulo se analiza la estructura de los modelos econométricos. Se introducen conceptos básicos para estudiar - la forma de los modelos; sus componentes, sus tipos de varia-- bles; se introducen las fomas estructural y reducida de un mo- delo, así como el carácter estático o dinámico del mismo.

En el capítulo tres se estudia el problema de la identifica-- ción de los modelos econométricos; el cual consiste en recu- perar ciertos parámetros de la forma estructural, a partir de datos observacionales y la forma reducida. Se analizan va-- rias formas de identificación de un modelo económico.

En el cuarto capítulo se analizan algunos aspectos dinámicos de los modelos en estudio. Se introducen los conceptos de forma - final de un modelo, estabilidad y punto de equilibrio.

El quinto capítulo se aboca al problema de la estimación de los parámetros de un modelo a partir de datos observacionales. Se introducen diversos métodos de estimación tales como: Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO), Mínimos Cuadrados Indirectos (MCI), Variables Instrumentales (VI) y Mínimos Cuadrados Bietápicos -- (MCB).

En el capítulo seis se analiza la evaluación econométrica del - modelo lineal; se introducen formas para comprobar si se cumplieron los supuestos bajo los cuales se hizo la estimación.

Finalmente en el capítulo siete se ejemplifica toda la teoría -- expuesta en los anteriores, mediante un modelo concreto.

Los ejemplos citados a lo largo del trabajo solo pretenden aclarar los conceptos que se mencionan.

CAPITULO I.

LOS CONCEPTOS DE TEORIA, MODELO Y ESTRUCTURA. *

Los conceptos de teoría, modelo y estructura son muy importantes no solo en econometría, sino también en otras disciplinas. Por esta razón intentaremos analizarlos en un contexto muy general, para posteriormente particularizar el caso que nos interesa.

Analizaremos los siguientes enfoques:

1. Los conceptos de teoría, modelo y estructura desde el punto de vista del empirismo lógico.

2. Los conceptos de teoría, modelo y estructura desde el punto de vista del estructuralismo.

3. Los conceptos de teoría, modelo y estructura en la lógica matemática.

4. Los conceptos de teoría, modelo y estructura en econometría.

TEORIA, MODELO Y ESTRUCTURA EN EL EMPIRISMO LOGICO.

La escuela lógico-empírica del pensamiento introdujo los conceptos de teoría y modelo dándoles un enfoque totalmente diferente al que actualmente aceptan los investigadores de las ciencias sociales. Esta escuela define una teoría como un sistema axiomático referido a las ciencias empíricas, en el sentido de que --

* : En este capítulo se incorporó información de las citas bibliográficas (2), (11) y (12).

los axiomas deben considerarse como hipótesis con base empírica. Según ello, toda teoría económica debe ser comprobable y pasar las pruebas de falsación, las cuales determinan en que condiciones un sistema de proposiciones empíricas debe ser considerado falso.

Por otra parte esta escuela define un modelo como una construcción puramente teórica, a la que únicamente se le pide coherencia. El sistema axiomático no puede verse como un sistema de hipótesis científicas o empíricas, ya que no puede ser refutado por la falsación de sus consecuencias debido a que no tienen necesariamente un referente real o empírico. Veremos más adelante como esta posición es totalmente opuesta a la manejada en lógica matemática. En esta concepción, el concepto de estructura se confunde con el concepto de modelo.

Cabe aclarar que esta escuela tuvo su auge en los años cincuenta y tiene sus orígenes en el positivismo de Comte y en los autores del Círculo de Viena de los años veinte, aunque no comparte todas las ideas de sus predecesores. Aún dentro de los empiristas lógicos (neopositivistas) existen algunas diferencias sustanciales. Véanse por ejemplo Popper, Carnap, Hermpel, para notar las diferentes mátices del empirismo lógico.

TEORIA, MODELO Y ESTRUCTURA EN EL ESTRUCTURALISMO LOGICO.

Una concepción más actual desde el punto de vista de la Filosofía de la Ciencia, es la concepción estructuralista sostenida entre otros por W. Stegmüller, Ulises Moulines [2] y J.D. Sneed; tiene sus raices en los empiristas lógicos y en la obra de Thomas S. Kuhn [2] quien trata de incorporar aspectos de tipo histórico social para el análisis de las teorías científicas.

En la concepción estructuralista, las teorías no son simplemente construcciones lógicas con base empírica, esto es nada más -- uno de los requisitos que debe satisfacer una teoría. Ellos -- consideran a la teoría como un todo en el que se conjugan además de estos aspectos, la descripción de los posibles mundos -- (modelos potenciales), donde la teoría se puede aplicar y la - descripción de los mundos reales (modelos parciales) donde la - teoría se aplica.

El concepto de estructura no se específica y en ocasiones se entiende como modelo.

TEORIA, MODELO Y ESTRUCTURA EN LOGICA MATEMATICA.

En lógica matemática, vista como rama de las matemáticas cuyo objetivo de estudio son el lenguaje y las teorías matemáticas, se tiene el siguiente panorama:

Una teoría se define como un conjunto de enunciados (escritos - en cierto lenguaje) que tiene la propiedad de ser cerrado bajo deducción. Una teoría puede ser calificada también de axiomatizable (los enunciados de la teoría se derivan de un cierto conjunto de axiomas), finitamente axiomatizable (el conjunto de -- axiomas es finito), completa (cuando dado un enunciado del lenguaje de la teoría, el ó su negación pertenecen a la teoría), - etc.

Cuando se tiene ya un lenguaje, se define el concepto de estructura adecuada a dicho lenguaje. La estructura se forma con un conjunto no vacío sobre el que se definen relaciones y funciones (estas últimas no son necesarias pues toda función n-aria es una relación n+l-aria) que interpretan a los símbolos de -- relación y/o función del lenguaje bajo cuestión. Se dice que una determinada estructura es modelo de una <u>teoría</u> (o de un conjunto de enunciados) si los enunciados de la teoría son verdaderos en la estructura. Obsérvese como aquí los modelos -- son los objetos de la "empiria matemática", de la "realidad matemática" y las teorías son objetos formales con posible interpretación empírica. Veremos que esta posición es en cierta forma la que más se adecuá a la interpretación que de los conceptos bajo análisis se hace en econometría.

Consideremos un ejemplo para aclarar el uso de estos conceptos:

La Teoría de Grupos es el conjunto de los 4 axiomas de grupo -- unido con todas sus consecuencias.(*). Para frasear esta teoría basta un lenguaje cuya parte no lógica consiste de un símbolo, +, para la operación de grupo y un símbolo, e, para nombrar al elemento distinguido del grupo. La estructura $\langle \mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}} \rangle$ no es un modelo de esta teoría. La estructura $\langle \mathbb{Z}, +^{\mathbb{Z}}, 0^{\mathbb{Z}} \rangle$ sí - es un modelo de esta teoría. En otras palabras, los modelos de ésta teoría son las estructuras que comúnmente llamamos grupos.

*) Estos axiomas son los siguientes:

1) $\forall\, a, b \in G\,,\ a \cdot b \in G$

2) $\forall\, a, b, c \in G\,,\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

3) $\exists\, e \in G \ni a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a \in G$

4) $\forall\, a \in G\ \exists\, a^{-1} \in G \ni a \cdot a^{-1} = a^{-1} a = e$

TEORIA, MODELO Y ESTRUCTURA EN ECONOMETRIA.

Comencemos por hacer la observación de que la economía como parte de la ciencia, no es experimental sino real; pues los fenómenos que ocurren no son reproducibles.

En las ciencias sociales (económía específicamente) se dice que teoría es una estructura lógica, un conjunto de proposiciones que deben cumplir con los requisitos lógicos. Si bien se construye con base en la experiencia no debe ser sometido a las pruebas de falsación. La teoría se presenta como un cuerpo completo con ciertas proposiciones centrales que son mantenidas a priori y no sujetas a la comprobación empírica.

Algunas de las proposiciones teóricas de la economía se refieren por lo general a configuraciones de equilibrio, es decir estáticas o en estado de crecimiento equilibrado. Los datos en contraposición se generan casi siempre en el tiempo y no pueden considerarse como realizaciones estadísticas de dichas proposiciones teóricas.

Por otro lado, en economía un modelo es un conjunto de relaciones matemáticas que expresan en forma simplificada e idealizada las características de un fenómeno.

El concepto de estructura aparece ligado al de modelo. De hecho, según veremos en el siguiente capítulo, una estructura es un elemento de un modelo. La estructura aparece cuando se le asignan valores numéricos a los parámetros de un modelo.

CAPITULO II

ESTRUCTURA DE LOS MODELOS ECONOMETRICOS.

Las principales etapas en una investigación econométrica son: -

1. Construcción o especificación del modelo para generar datos observados.

2. Identificabilidad del modelo.

3. Inferencia estadística (estimación de parámetros y pruebas de hipótesis).

4. Control y toma de decisiones (utilización de resultados).

Cabe mencionar que en una investigación específica, estas etapas se convierten en ciclos que se retroalimentan.

La naturaleza de las relaciones entre los componentes de un sistema económico determina y está dada por la estructura del mismo. Es decir, si se conoce la estructura, de ella pueden derivarse las relaciones entre los componentes y viceversa. El mejor conocimiento de estas relaciones constituye una poderosa herramienta para actuar sobre la realidad económica, transformándola y buscando guiarla hacia los objetivos de la sociedad. Este conocimiento de las relaciones es el objeto de estudio del análisis estructural. Los modelos pueden dividirse para su estudio en: modelos estáticos y modelos dinámicos.

Definición II.1: Un modelo dinámico es aquel que representa un fenómeno en el cual el tiempo considerado como variable influye de manera determinante, permitiendo al investigador, predecir los cambios del sistema.

Definición II.2: Un modelo estático es aquel que representa un fenómeno en el cual el tiempo no influye en los cambios que sufra el sistema correspondiente.

Un ejemplo de modelo dinámico es el siguiente:

$$(I) \left\{ \begin{array}{lll} C_t = \alpha + \beta Y_{t-1} & 0 < \alpha < \beta & \text{------ (1)} \\ Y_t = C_t + i_t & & \text{------ (2)} \\ i_t = \gamma Y_t + g_t & \gamma > 0 & \text{------ (3)} \end{array} \right.$$

La ecuación (1) muestra al consumo (C_t) como una función lineal del ingreso (Y_t) en un período inmediato anterior.

La ecuación (2) muestra al ingreso como la suma del consumo más la inversión privada.

La ecuación (3) muestra la inversión privada como función del ingreso más la inversión pública (g_t).

El correspondiente modelo estático es el siguiente:

$$(I') \left\{ \begin{array}{lll} C = \alpha + \beta Y & 0 < \alpha < \beta & \text{------ (1')} \\ Y = C + i & & \text{(2')} \\ i = \gamma Y + g & \gamma > 0 & \text{------ (3')} \end{array} \right.$$

Hacemos la observación que no existe una correspondencia biunívoca entre un modelo estático y un modelo dinámico; pues un mismo modelo estático puede corresponder a varios modelos dinámicos[1].

TIPOS DE VARIABLES EN LOS MODELOS.

Una de las etapas más importantes del método econométrico, es la especificación del modelo, la cual consiste en el planteamiento de hipótesis y su ordenamiento en la forma adecuada para la construcción del mismo. Ahora bien, el planteamiento de hipótesis requiere del conocimiento de las variables involucradas.

El número de relaciones incluidas en un modelo económico depende de los objetivos para los cuales se construye el modelo y del grado de explicación requerido.

La operación simultánea y conjunta de las relaciones incluidas determina el comportamiento de las variables. Por otro lado, aún cuando el modelo simplifica la realidad, captura sin embargo las características determinantes del sector económico o sistema en estudio. Asimismo, se espera que el entendimiento que el modelo proporciona del sistema, nos permita predecir movimientos futuros del sistema y posiblemente controlar esos movimientos para mejorar el bienestar económico.

La especificación del modelo involucra dos tipos de variables:

1. Variables endógenas.

2. Variables predeterminadas $\begin{cases} \text{exógenas} \\ \text{endógenas con retardo} \end{cases}$

(1): ver Wallis [1] págs 58-59

Definición II.3: <u>Una variable endógena</u> es aquella cuyo comportamiento se intenta explicar, en base a las variables predeterminadas o explicativas.

Definición II.4: <u>Una variable predeterminada</u> es aquella que se determina fuera del sistema y cuya finalidad es explicar el comportamiento de las variables endógenas.

Las variables predeterminadas pueden ser exógenas o endógenas con retardo.

En el modelo (I) tenemos:

Variables endógenas: Y_t, C_t, I_t.

Variables exógenas: g

Variables endógenas con retardo: Y_{t-1}

De esta manera según lo anterior, con el estudio de nuestro modelo se pretende conocer el comportamiento de las variables Y_t, C_t, I_t a partir de las variables g_{t-1}, Y_{t-1}, y las constantes α, β y γ.

ECUACIONES EN UN MODELO.

La especificación de un modelo requiere de una o varias ecuaciones (modelo uniecuacional o multiecuacional). Podemos distinguir tres tipos de ecuaciones en un modelo.

a) Las ecuaciones de comportamiento, llamadas así porque describen el comportamiento de un fenómeno económico.

b) Las identidades, llamadas así porque son relaciones que se verifican siempre, ya sea por su construcción lógica o por la definición contable que ellas satisfacen. Las identidades son dadas por la teoría económica.

c) Las relaciones de equilibrio, llamadas así porque son igualdades que resultan de una condición impuesta a un postulado introducido.

De estos tres tipos de ecuaciones las que más interesan al econometrista son las ecuaciones de comportamiento, ya que hacen proposiciones en cuanto a un componente sistemático, pero aceptan desviaciones alrededor de éste, dadas por el componente aleatorio o no sistemático.

Si representamos con Y a la variable que queremos estudiar podemos poner:

$$Y = \bar{Y} + U \qquad (4)$$

Donde $\bar{Y}$ es el componente sistemático y U el componente aleatorio o no sistemático. En la siguiente sección definiremos de manera precisa la parte sistemática y la parte no sistemática de un modelo.

En el modelo (I), las ecuaciones (1) y (3) representan relaciones de comportamiento, mientras que la ecuación (2) representa una identidad.

Una relación de equilibrio está dada por el siguiente ejemplo:

$$D_t = S_t = q_t$$

Esta ecuación expresa la igualdad entre la oferta (S_t) y la demanda (D_t).

Definición II.5: Un parámetro en un modelo, es un factor de ponderación correspondiente a una variable explicativa, que mide el efecto de las fluctuaciones de esta variable sobre la variable explicada.

En el modelo (I) son parámetros α, β y γ.

COMPONENTES SISTEMATICO Y NO SISTEMATICO EN UN MODELO.

El estudio de modelos econométricos persigue fundamentalmente la explicación de un fenómeno de manera "exhaustiva". Esto sin embargo es prácticamente imposible y por lo tanto debemos conformarnos con explicar "lo mejor posible" el fenómeno, dando cuenta de sus aspectos más relevantes a partir de sus relaciones con otros fenómenos.

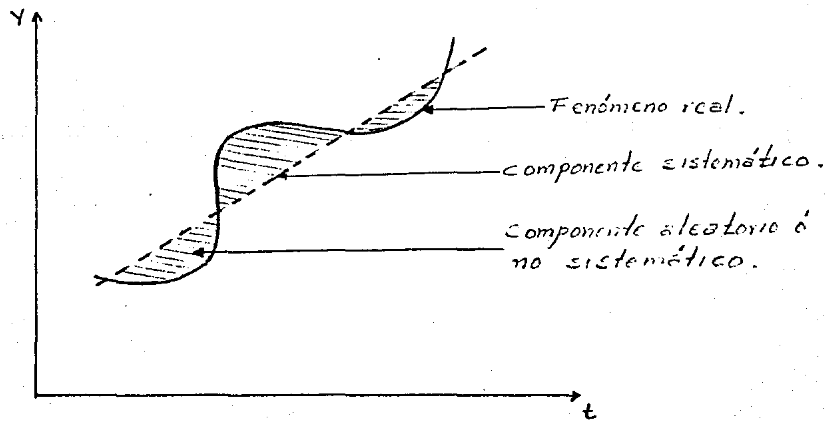
Definición II.6: El componente sistemático de un modelo es la parte de dicho modelo que podemos explicar en base a la observación y a la teoría económica.

Definición II.7: El componente aleatorio o no sistemático de un modelo incluye todas aquellas causas que no podemos explicar en base a los datos. A este componente se le atribuyen problemas de información, observación, etc.

El que no podamos explicar este componente no implica que no hagamos afirmaciones con respecto a su comportamiento, y lo que haremos será tratarlo como variable aleatoria-una variable cuyo --comportamiento se explica con base en leyes probabilísticas-utilizando la aleatoriedad como un enfoque (empírico) de conocimiento.

Las propiedades de este componente aleatorio son de vital importancia para determinar la calidad de la información que se obtiene acerca de los parámetros.

En la ecuación (4) de la sección anterior, el primer sumando del segundo miembro representa el componente sistemático y el segundo sumando el componente no sistemático. La representación gráfica de esta ecuación es:



SUPUESTOS DEL COMPONENTE ALEATORIO.

El tratamiento estadístico del término aleatorio requiere de -- ciertos supuestos básicos, los cuales son:

1) $E(u) = 0$

Si la perturbación aleatoria tiene una media distinta de cero, contiene por definición una parte sistemática que debería ser transferida al término constante (por ejemplo $C = \alpha + \beta Y + U$). Si $E(u)$ tomara un valor distinto de cero, nos encontraríamos con la dificultad de no poder identificar la perturbación, ya que la discrepancia de la media respecto de cero no se podría distinguir del término constante. Esta es la razón principal por la que se introduce el convenio de asignar a la media de - u el valor cero.

2) $Var(u) = E(u^2) = \sigma^2$

La varianza del componente aleatorio es igual a σ^2.

La importancia de este supuesto radica en el hecho de que la - viarianza no cambia durante el período de observación del fenó meno en estudio. Este supuesto se conoce como hemoscedastici-- dad.

3) $E(U_t, U_s) = 0$ para $t \neq s$

Este supuesto conocido como NO AUTOCORRELACION nos dice que la variable aleatoria U_t no está autocorrelacionada. En otras pa labras, los valores que asume para cada t son independientes de los valores precedentes. . Este supuesto bajo normalidad se convierte en independencia.

4) Supuesto de Normalidad con respecto a la distribución del -- término aleatorio.

Los cuatro supuestos se pueden representar mediante la relación

$$U \sim NID(0, \sigma^2 I_6)$$

En la práctica, sólo se utiliza el supuesto que especifica la - función de densidad (supuesto de normalidad en este caso) del - término aleatorio, en algunos métodos de contrastre de hipóte-- sis para muestras pequeñas. No obstante conviene mencionar la importancia de los demás supuestos.

Por ejemplo en el caso del primer supuesto se tiene lo siguiente:

El componente aleatorio no representa sino desviaciones alrededor del componente sistemático, unas hacia arriba y otras hacia abajo, de suerte que van compensándose unas con otras. Implícita queda la idea de que todos los factores no considerados como relevantes para la explicación del fenómeno obedecen, en valor esperado, de manera que el valor esperado del fenómeno solo se ve afectado por cambios en el componente sistemático.

Por otro lado respecto al segundo supuesto se tiene lo siguiente:

Si el modelo en estudio es de series temporales; las implicaciones de este supuesto son, en el tiempo, de estabilidad estructu ral y pueden ser fuertemente restrictivas en un mundo cambian-- te.

Si el modelo en estudio se mueve entre individuos (modelo de -- sección transversal) sus implicaciones dependerán de la homogeneidad de éstos).

La independencia entre los términos aleatorios significa que la realización del componente aleatorio en un período o para un individuo, no tiene nada que ver en absoluto con las realizaciones de dicho componente para otros períodos o individuos.

Definición II.8: La estructura de un modelo es un conjunto de hechos que no cambian durante un período particular de observación.

Este conjunto de hechos determina la forma de las ecuaciones y los valores numéricos de los parámetros.

Una estructura de un modelo se obtiene al asignar valores a los parámetros. Por ejemplo:

$$C_t = 0.5 + 0.7\ Y_{t-1}$$

$$Y_t = C_t + i_t$$

$$i_t = 0.4\ Y_t + g$$

representa una estructura del modelo (I).

NOTACION GENERAL PARA LOS MODELOS LINEALES.

Consideremos el siguiente sistema:

$$
(\mathrm{II}) \cdots\cdots \left\{
\begin{array}{l}
\beta_{11} Y_1 + \beta_{12} Y_2 + \cdots + \beta_{1G} Y_G + \gamma_{11} Z_1 + \gamma_{12} Z_2 + \cdots + \gamma_{1K} Z_K = U_1 \\
\beta_{21} Y_1 + \beta_{22} Y_2 + \cdots + \beta_{2G} Y_G + \gamma_{21} Z_1 + \gamma_{22} Z_2 + \cdots + \gamma_{2K} Z_K = U_2 \\
\vdots \\
\beta_{G1} Y_1 + \beta_{G2} Y_2 + \cdots + \beta_{GG} Y_G + \gamma_{G1} Z_1 + \gamma_{G2} Z_2 + \cdots + \gamma_{GK} Z_K = U_G
\end{array}
\right.
$$

El cual en forma matricial puede representarse como:

$$
\begin{bmatrix}
\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1G} \\
\beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2G} \\
\vdots & & & \vdots \\
\beta_{G1} & \beta_{G2} & \cdots & \beta_{GG}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_G \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1K} \\
\gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2K} \\
\vdots & & & \\
\gamma_{G1} & \gamma_{G2} & \cdots & \gamma_{GK}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_K \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_G \end{bmatrix}
$$

o bien $BY + \Gamma Z = U$

De acuerdo al sistema (II) tenemos

1. Y_i son las variables endógenas $(i = 1,2,\ldots,G)$

2. Z_i son las variables predeterminadas $(i = 1,2,\ldots,K)$

3. β_{ij} $(i,J = 1,2,\ldots G)$ son los parámetros correspondientes a las variables endógenas.

4. γ_{ij} $(i = 1,2,...G;\ j = 1,2,...,K)$ son los parámetros correspondientes a las variables predeterminadas.

Ejemplo: Consideremos el siguiente modelo y calculemos B y Γ

$$(\text{III}) \text{----------} \begin{cases} Y = c + i + g \\ c = \alpha + \beta(Y - t) + u_2 \\ i = \gamma + \delta r \qquad + u_3 \end{cases}$$

donde tenemos:

Variables endógenas: Y, C e i

Variables exógenas: g, t, r

Reacomodando adecuadamente obtenemos:

$$\begin{array}{lllllll} Y - c - i & - g & & & & = & 0 \\ -\beta Y + c & & + \beta t & & - \alpha & = & u_2 \\ \qquad\quad i & & & - \delta r & - \gamma & = & u_3 \end{array}$$

Haciendo las siguientes convenciones:

$$Y_1 = Y,\ Y_2 = C,\ Y_3 = i;\ Z_1 = g,\ Z_2 = t,\ Z_3 = r,\ Z_4 = 1$$

Obtenemos la siguiente forma matricial del sistema (III)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & -\delta & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

RESTRICCIONES EN UN MODELO LINEAL.

Además de los supuestos con respecto al componente aleatorio -- enunciados anteriormente, existen una serie de restricciones en los modelos lineales que dividiremos de la siguiente manera:

1. <u>Restricciones con respecto a las ecuaciones.</u> Estas deben -- ser:

- Consistentes; esto significa que no debe existir contradicción entre las ecuaciones.

- Independientes; ninguna de las ecuaciones que forman un modelo, deberá deducirse a partir de las demás. Es decir no debe existir dependencia lineal entre las ecuaciones.

- Suficientes (supuesto de completez): Las ecuaciones que -- forman un modelo deberán ser suficientes para poder explicar el fenómeno en estudio; es decir deben sintetizar las características permanentes y relevantes del fenómeno en - estudio, para concluir en un conjunto de conocimientos -- "completo y consistente".

2. <u>Restricciones con respecto a las variables:</u>

- Para que el sistema sea "consistente" (es decir, para que tenga una solución determinada, que dé valores únicos a - las variables endógenas, en función de los parámetros estructurales y las variables exógenas) es necesario que el número de ecuaciones del modelo sea igual al número de variables endógenas.

- $Z_K = 1$. Esto significa que él último elemento del vector columna de variables predeterminadas debe ser la unidad.- Esto se hace con la finalidad de introducir los términos independientes de las ecuaciones en la última columna de la matriz Γ.

3. Restricciones con respecto a los parámetros.

Las restricciones en los parámetros se establecen en función de las ecuaciones que representan.

- Si la ecuación de un modelo es una identidad, entonces los parámetros de esta ecuación son iguales a 1 ó -1.

- Regla de Normalización:

Al agregar una variable predeterminada más ($Z_K = 1$), se hace con la finalidad de introducir los términos independientes de las ecuaciones en la última columna de Γ. De esta manera los coeficientes de Z_K en las diferentes ecuaciones (γ_{gK}, $g = 1,2,...G$) son términos constantes.

Sin embargo, si multiplicamos cada ecuación por una constante la ecuación sigue siendo válida. Por lo tanto existe alguna indeterminación respecto a los valores de los parámetros. Esta indeterminación se puede eliminar imponiendo la regla de normalización, de manera que los parámetros tomen valores únicos. Esta regla consiste en asignar el valor 1 a la i-ésima variable de la i-ésima ecuación (βii); haciendo así que la diagonal de la matriz B (parámetros endógenos) conste de puros unos.

- Linealidad en los parámetros:

  Esto significa que los parámetros se combinan linealmente - con las variables; es decir, no deberán existir funciones - producto, cociente o potencia de los parámetros con alguna de las variables. La linealidad en las variables (cuando - no existe) se logra mediante una serie de transformaciones.

  El siguiente ejemplo pretende aclarar la linealidad en las variables:

Ejemplo: Función de producción de Cobb-Douglas:

$$X = \gamma L^{\alpha} K^{\beta}$$

donde:

X = Volumen de producción.
L = Factor de trabajo.
K = Factor capital.

Este es un ejemplo de una función no lineal en las variables. - Sin embargo aplicando logaritmos tenemos:

$$\log X = \log \gamma + \alpha \log L + \beta \log K$$

Es decir: $X' = A + \alpha B + \beta C$

donde hemos definido:

$$X' = \log X; \quad A = \log\gamma; \quad B = \log L \text{ y } C = \log K$$

y donde además

α, β y A son parámetros mientras que X', B y C son variables. De esta manera la función de producción de Cobb-Douglas se vuelve lineal en variables y parámetros.

Definición II.9: La forma estructural de un modelo consiste en expresar a dicho modelo como el conjunto de estructuras.

Si utilizamos el método econométrico como el medio de estudio del sistema económico, entonces la estructura se representa mediante la forma estructural, que se establece a partir de información teórica y empírica en el ciclo de especificación-identificación-inferencia.

Bajo el supuesto de linealidad de las relaciones, la forma estructural del modelo econométrico que representa al sistema económico se puede expresar como

$$BY_t + \Gamma Z_t = U_t \quad \text{-------------- (IV)}$$

Sin embargo el efecto de las variables predeterminadas sobre el nivel de actividad del sistema (variables endógenas) no es inmediato de (IV), sino que es necesario resolver el sistema, lo cual nos lleva a la forma reducida del modelo:

$$Y_t = \Pi Z_t + V_t \quad \text{-------------- (V)}$$

donde: $\Pi = -B^{\prime}\Gamma$ y $V_t = B^{\prime}U_t$

Definición II.10: La forma reducida de un modelo consiste en expresar a las variables endógenas en función de las variables predeterminadas o explicativas.

Ejemplo: Consideremos el siguiente modelo en su forma estructural:

$$\left.\begin{aligned} C_t &= \alpha + \beta Y_t + U_{1t} & \text{-------- (1)} \\ Y_t &= C_t + i_t & \text{------------ (2)} \\ i_t &= \gamma Y_t + g + U_{3t} & \text{------------ (3)} \end{aligned}\right\} \text{---- (VI)}$$

La primera ecuación expresa al consumo como función del ingreso, más un término aleatorio.

La segunda ecuación representa la identidad del ingreso, como la suma del consumo y la inversión privada.

La tercera ecuación expresa a la inversión privada como función del ingreso y la inversión pública (g_t), más un término aleatorio.

La fórma reducida correspondiente al modelo (VI) es:

$$Y_t = \frac{1}{1-\beta-\gamma}\alpha + \frac{1}{1-\beta-\gamma}g + V_{1t}$$

$$C_t = \frac{1-\gamma}{1-\beta-\gamma}\alpha + \frac{\beta}{1-\beta-\gamma}g + V_{2t}$$

$$i_t = \frac{\gamma}{1-\beta-\gamma}\alpha + \frac{1-\beta}{1-\beta-\gamma}g + V_{3t}$$

Si $1-\beta-\gamma \neq 0$ entonces tendremos:

$$V_{1t} = \frac{U_{1t} + U_{3t}}{1-\beta-\gamma'} \quad , \quad V_{2t} = \frac{(1-\gamma')\,U_{1t} + \beta U_{3t}}{1-\beta-\gamma'} \quad , \quad V_{3t} = \frac{\gamma' U_{1t} + (1-\beta)U_{3t}}{1-\beta-\gamma'}$$

La forma reducida del modelo nos proporciona la matriz Π, que en este caso es:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-\beta-\gamma'} & \dfrac{\alpha}{1-\beta-\gamma'} \\ \dfrac{\beta}{1-\beta-\gamma'} & \dfrac{\alpha(1-\gamma')}{1-\beta-\gamma'} \\ \dfrac{1-\beta}{1-\beta-\gamma'} & \dfrac{\alpha\gamma'}{1-\beta-\gamma'} \end{bmatrix}$$

CAPITULO III

LA IDENTIFICACION EN ECONOMETRIA *

La identificación de un modelo consiste en encontrar una solución única para los parámetros estructurales a partir de los coeficientes de la forma reducida. Consecuentemente, la identificación del modelo es anterior a la estimación del mismo. La identificabilidad es una característica propia del modelo, independientemente del tratamiento estadístico que se le dé al mismo. Por tal razón, si un modelo no es identificable (es decir, si no podemos identificar los parámetros estructurales) la estimación resultará en vano.

El problema de la identificación surge a causa de que pueden existir varias estructuras que generan la misma forma reducida o que dan pie a la observación del mismo conjunto de datos. A la inversa, dado un conjunto de datos se podrían formular muchas hipótesis que explicaran las observaciones. Lo que intentamos hacer es suprimir tantas hipótesis como sea posible mediante una selección preliminar basándonos en que tales hipótesis son incompatibles con la teoría económica. De esta manera el problema de la identificación quedará resuelto cuando una hipótesis y sólo una sea compatible a la vez con los datos y con la teoría económica.

Cuando algunas hipótesis resulten incompatibles con la teoría ecónómica habrá que suprimirlas. La forma más usual de representar nuestro conocimiento a priori son las exclusiones de variables o restricciones cero, que implican que ciertas variables no se encuentran en determinadas ecuaciones, es decir que algunos coeficientes estructurales son cero.

* : En este capítulo se recabó información principalmente de [1] y [13]

Consideremos a manera de ejemplo el siguiente modelo de oferta-demanda:

$$D: \; q_d = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 Y \qquad \alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0 \text{ -----}(1)$$

$$O: \; q_o = \beta_0 + \beta_1 P \qquad \beta_1 > 0 \text{ ------}(2)$$

$$q_d = q_o \qquad \text{------}(3)$$

Estamos suponiendo que la demanda depende negativamente del pre cio (P) y positivamente del ingreso (Y).

Si esta estructura genera los datos, entonces las observaciones sobre p, q y Y deben satisfacer cualquier combinación lineal de (1) y (2).

Multiplicando la ec. (1) por 1-h y la ec. (2) por h y sumando ambos resultados obtenemos:

$$q = \left[(1-h)\alpha_0 + h\beta_0\right] + \left[(1-h)\alpha_1 + h\beta_1\right] P + (1-h)\alpha_2 Y \text{ ----------}(3')$$

con $q = q_o = q_d$

La ecuación (3') se ajusta à los datos y queremos ver si se ajus ta al modelo.

Si h = 1 en la ec. (3'); esta ecuación se transforma en la ecuación de oferta, por lo que podemos decir que dicha ecuación está identificada, ya que es admisible respecto a los datos y res pecto al modelo. La admisibilidad significa que se ajusta respecto a los datos y respecto al modelo.

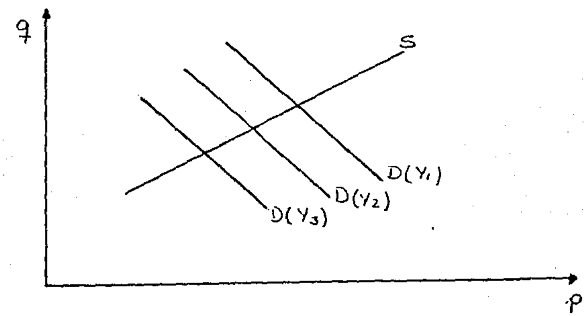
Veamos que sucede con la ecuación de demanda.

Si $h < 1 \Rightarrow 1-h > 0$. Esto significa que (3') podrá considerarse -- como ecuación de demanda siempre y cuando se tenga:

$$(1-h)\alpha_1 + h\beta_1 < 0 \iff 0 \leq h < \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \beta_1}$$

Dadas las restricciones sobre α_1 y β_1 (ecuaciones 1 y 2) exis-- ten un gran número de ecuaciones que se ajustan a los datos y - que satisfacen las restricciones impuestas por la teoría económica y por esta razón son admisibles respecto al modelo como -- ecuaciones de demanda. Por lo tanto la ecuación de demanda no está identificada.

Gráficamente se tiene la siguiente situación:



Para cada nivel de ingreso distinto se tendrá una ecuación de - demanda distinta. Conforme el ingreso varía, la curva de demanda se desplaza en el plano p-q y las observaciones de p y q -- quedan situadas a lo largo de la curva de oferta, con lo que -- esta resulta identificada.

Dada la forma estructural de un modelo es posible calcular la forma reducida del mismo con solo hacer $\Pi = -B\Gamma$. Sin embargo dada la forma reducida de un modelo donde hay G x K elementos en Π, no podemos encontrar (despejando) los G x G + G x K elementos de B y Γ, pues habría más incógnitas que ecuaciones, por lo que no existe una biyección entre la "estructura y la reducción".

Si se pudiera, deberíamos descomponer Π en forma única como $\Pi = AC$ donde $A = -B^{-1}$ y $C = \Gamma$. Pero obsérvese que si $\Pi = AC$; $A^* = AT$, $C^* = T'C$ con T ortonormal. ASí que $A^*C^* = ATT'C = AC = \Pi$; así que hay un número infinito de descomposiciones. Esto significa que "existe un número ilimitado de estructuras posibles correspondientes a la misma reducción".

Para poder hablar de identificabilidad de un modelo, nos interesaría que existiera una relación 1-1 entre la forma estructural y la forma reducida.

El procedimiento a seguir para lograr tal relación es el siguiente.

1. Reducir la dimensión de la estructura en G^2 elementos para que tenga G X K elementos igual que la reducción.

2. Eliminar como "no factibles" todas las posibles transformaciones T de la descomposición de Π hasta que una sola sea admisible: $T = I_G$. Esto se hace agregando restricciones teóricas sobre las formas de B y Γ.

3. Los ceros de la forma estructural no son transmitidos generalmente a π, pues al pasar de $\overline{B}$ a B^{-1} cada elemento de B^{-1} depende de todos los elementos de B. La incorporación de esta información permitirá identificar el sistema.

La identificación consiste en establecer una hipótesis teórica única en consistencia con la información empírica. Los datos nos proporcionan la forma reducida y al agregar teoría obtenemos la forma estructural. Es decir:

Forma reducida + hipótesis teóricas = forma estructural.

El siguiente es un ejemplo de un modelo no identificable: consideremos el modelo:

$$\left.\begin{aligned} Y_{1t} + \beta_{12} Y_{2t} + \gamma_{11} Z_{1t} &= U_{1t} \\ \beta_{21} Y_{1t} + Y_{2t} &= U_{2t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow BY_t + \Gamma Z_t = U_t$$

donde B y Γ son:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{pmatrix} \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las restricciones teóricas de nuestro modelo son:

a) $\beta_{11} = \beta_{22} = 1$

b) $\gamma_{21} = 0$

Premultipliquemos nuestro modelo por una matriz cuadrada A de tamaño 2 x 2. Es decir

$$ABY_t + A\Gamma Z_t = AU_t$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12}\beta_{21} & a_{11}\beta_{12} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22}\beta_{21} & a_{21}\beta_{12} + a_{22} \end{pmatrix}$$

La compatibilidad del modelo exige lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12}\beta_{21} &= 1 \\ a_{21}\beta_{12} + a_{22} &= 1 \\ a_{11}\beta_{12} + a_{12} &= \beta_{12} \\ a_{21} + a_{22}\beta_{21} &= \beta_{21} \end{aligned}$$

La solución de este sistema resulta en:

$$a_{21} = 0 ; \quad a_{22} = 1 ; \quad a_{11} = 1 - a_{12}\beta_{21}$$

Por lo que la matriz A nos queda de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - a_{12}\beta_{21} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde a_{12} puede tomar cualquier valor.

Por lo tanto, previendo que exista A^{-1}, existen infinidad de - matrices A que se obtienen dando diferentes valores a a_{12} y - que producen modelos compatibles con el analizado. Por tal razón el modelo no es identificable.

Definición III.1: Dos estructuras son admisibles respecto a -- los datos, Cuando ambas generan la misma forma reducida.

Una ecuación es compatible con los datos, cuando el conjunto - de datos Z y los correspondientes valores de Y que se obtienen vía la forma reducida satisfacen exactamente la ecuación.

Definición III.2: <u>Una estructura es admisible respecto al modelo.</u> Cuando es compatible con el modelo; es decir, cuando obedece a las restricciones impuestas por la teoría económica.

Definición III.3: <u>R es transformación admisible de la estructura (B,Γ)</u> Si $B^* = RB$ y $\Gamma^* = R\Gamma$ satisfacen las restricciones teóricas impuestas a B y Γ.

Una transformación es admisible si la estructura transformada satisface nuestro conocimiento a priori del sistema.

Lema: Si R es transformación admisible de (B,Γ) entonces -- (B,) y (B^*, Γ^*) tienen la misma forma reducida.

Demostración:

Sean FR y FR* las formas reducidas de (B,Γ) y (B^*, Γ^*) respectivamente $FR^* = -(B^{*-1}\Gamma^*) = -(RB)^{-1}(R\Gamma) = -B^{-1}R^{-1}R\Gamma = -B^{-1}\Gamma = FR$.

Definición III.4: <u>El modelo estará identificado</u> Si la única -- transformación admisible es $R = I_G$.

Existe un método directo para checar si un modelo está identificado o no. Este método consiste en calcular Γ^* de dos modos diferentes apoyándose en la información teórica dada por B y ha-- cer una comparación que permita decidir si R es I_G o nó. El método es el siguiente:

1. Pongamos B^* y Γ^* a partir de B y Γ tomando otros coeficientes en los lugares no cero de B y Γ dejando igual los lugares que tengan ± 1. B^* y Γ^* respetan las restricciones -- teóricas.

2. Calculemos R, haciendo $R = B^* B^{-1}$.

3. En base a (2) calculamos $\Gamma^* = R\Gamma$ (R obtenida en 2).

4. Igualamos Γ^* de (1) con Γ^* de (3) y checamos si esto implica que $R = I_G$. Si es así, el modelo estará identificado.

Ejemplo: Consideremos el siguiente modelo.

$$
\begin{aligned}
Y_t &= C_t + I_t + G_t \\
C_t &= \alpha_0 + \alpha_1 (Y_t - T_t) + U_{2t} \\
I_t &= \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 (G_t - G_{t-1}) + U_{3t}
\end{aligned}
$$

En forma matricial el modelo adquiere la forma:

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\alpha_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} Y_t \\ C_t \\ I_t \end{pmatrix} +
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ -\beta_2 & 0 & -\beta_1 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} G_t \\ T_t \\ Y_{t-1} \\ G_{t-1} \\ 1 \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} 0 \\ U_{2t} \\ U_{3t} \end{pmatrix}
$$

Las matrices B* y Γ^* serán según el paso 1:

$$
B^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\qquad
\Gamma^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & -a_0 \\ -b_2 & 0 & -b_1 & b_2 & 0 \end{pmatrix}
$$

La matriz R de acuerdo al paso 2 será:

$$
R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha_1} & \frac{1}{1-\alpha_1} & \frac{1}{1-\alpha_1} \\ \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} & \frac{1}{1-\alpha_1} & \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_1 - a_1}{1-\alpha_1} & \frac{1-a_1}{1-\alpha_1} & \frac{\alpha_1 - a_1}{1-\alpha_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

La matriz Γ^* según el paso 3 serán:

$$\Gamma^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\alpha_1 - a_1) + \beta_2(\alpha_1 - a_1)}{1-\alpha_1} & \frac{\alpha_1(1-a_1)}{1-\alpha_1} & \frac{\beta_1(a_1-\alpha_1)}{1-\alpha_1} & \frac{\beta_2(\alpha_1 - a_1)}{1-\alpha_1} & \frac{\alpha_0(a_1-1)}{1-\alpha_1} \\ -\beta_2 & 0 & -\beta_1 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando Γ^* de 1 con Γ^* de 3 obtenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\alpha_1 - a_1) + \beta_2(\alpha_1 - a_1)}{1-\alpha_1} & \frac{\alpha_1(1-a_1)}{1-\alpha_1} & \frac{\beta_1(a_1-\alpha_1)}{1-\alpha_1} & \frac{\beta_2(\alpha_1 - a_1)}{1-\alpha_1} & \frac{\alpha_0(a_1-1)}{1-\alpha_1} \\ -\beta_2 & 0 & -\beta_1 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & -a_0 \\ -b_2 & 0 & -b_1 & b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Del segundo renglón obtenemos:

$$\frac{(\alpha_1 - a_1) + \beta_2(\alpha_1 - a_1)}{1-\alpha_1} = 0 \iff (\alpha_1 - a_1)(1+\beta_2) = 0 \iff \begin{cases} \alpha_1 - a_1 = 0 \iff \alpha_1 = a_1 \\ \text{ó} \\ 1 + \beta_2 = 0 \iff \beta_2 = -1 \end{cases}$$

$$\frac{\alpha_1(1-a_1)}{1-\alpha_1} = a_1 \iff a_1 = \alpha_1$$

$$\frac{\beta_1(a_1-\alpha_1)}{1-\alpha_1} = 0 \iff a_1 = \alpha_1$$

$$\frac{\beta_2(\alpha_1 - a_1)}{1-\alpha_1} = 0 \iff a_1 = \alpha_1$$

$$\frac{\alpha_0(a_1-1)}{1-\alpha_1} = -a_0 \iff a_0 = \alpha_0$$

Sustituyendo $a_0 = \alpha_0$ y $a_1 = \alpha_1$ en la matriz R nos queda

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_1 - a_1}{1-\alpha_1} & \frac{1-a_1}{1-\alpha_1} & \frac{\alpha_1 - a_1}{1-\alpha_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$\therefore$ $R = I_G$

$\therefore$ El modelo está identificado.

Definición III.5: <u>Dos estructuras (B, Γ) y (B^*, Γ^*) son equivalentes en observación (E O),</u> Si existe una transformación R no singular que satisface:

$$B^* = RB \quad y \quad \Gamma^* = R\Gamma$$

Como dijimos antes la estructura (B, Γ) está identificada si y sólo si la única transformación admisible es $R = I_G$. Entendiéndose por una transformación admisible aquella para la cual la estructura (B^*, Γ^*) satisface las restricciones teóricas impuestas a (B, Γ).

Veremos ahora un criterio alternativo que permitirá comprobar la identificabilidad de una estructura con un método análitico.

Consideremos la forma estructural del modelo.

$$BY + \Gamma Z = U \quad \text{ó bien} \quad AX = U \quad \text{----------}(I)$$

donde $A = (B, \Gamma)$ y $X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$

A es una matriz $(G, G + K)$ y X una matriz de $(G + K, 1)$.

El sistema (I) lo podemos reescribir como:

$$\left(I_G \otimes X\right)\alpha = u \text{ -------------------- (II)}$$

donde $\alpha =$ Vect. A, $=$ Vect U y $\otimes$ denota producto Kronecker

Hagamos las siguientes consideraciones.

$$X = (Y, Z) = \left(Z\Pi + V, Z\right) + Z(\Pi, I_K) + (V, 0) = ZW + V^* \text{ -------- (III)}$$

donde: $W = (\Pi, I_K)$; $V^* = (V, 0)$

W es $(G+K, K)$; V^* es $(G, G+K)$ y $\rho(W) = K$

$E(X/Z) = E(ZW + V^*/Z) = ZW$; entonces

$$E(I_G \otimes X)\alpha = (I_G \otimes ZW)\alpha = (I_G \otimes Z)(I_G \otimes W)\alpha = 0 \text{ ---------- (IV)}$$

Bajo el supuesto de que $\rho(Z) = K$ se sigue que $(I_G \otimes Z)$ tiene - todas sus columnas linealmente independientes. Por lo tanto - (IV) tiene solución si y sólo si

$$\left(I_G \otimes W\right)\alpha = 0 \text{ ------------------------------ (V)}$$

Esta última igualdad define un sistema lineal homogéneo en el cual $\alpha \in \text{Ker}\ (I_G \otimes W)$ y $\dim \text{Ker}\ (I_G \otimes W) = G(G + K) - GK = G^2$

Es decir α pertenece a un subespacio de dimensión G^2. Lo que deseamos es que α esté determinada en forma única para satisfacer la identificabilidad del modelo. Para ver si esto es posible, incorporamos nuestro conocimiento a priori representado por ejemplo por una matriz Φ, en la forma de un sistema de restricciones lineales del tipo:

$$\Phi\alpha = C \qquad \text{(VI)}$$

De tal forma que cada restricción impuesta a la forma estructural se traduce en una relación lineal entre los coeficientes de una misma ecuación.

Supóngase que Φ incorpora m restricciones; se sigue entonces que Φ es (m, G(G + K)), α es (G(G + K),1) y C es (m, 1). Con esto podemos reescribir (V) incorporando (VI) de la siguiente manera:

$$\Psi\alpha = C^{*} \qquad \text{(VII)}$$

donde
$$\Psi = \begin{pmatrix} I_G \otimes W \\ \Phi \end{pmatrix} \quad y \quad C^{*} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}$$

Ψ es (GK + m, G(G + K)) y C* es (GK + m, 1).

En el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo (VII), estará determinada en forma única si

$$\rho(\Psi) = G(G + K) \qquad \text{(VIII)}$$

Esta última relación <u>se conoce como condición de rango para la identificación de un modelo</u> y es una condición necesaria y suficiente.

Por otro lado de (VII) y (VIII) tenemos:

$$m + GK \geq G(G+K) = G^2 + GK \Rightarrow m \geq G^2 \qquad \text{(IX)}$$

La relación (IX) se conoce como condición de orden para la -- identificación de un modelo y es una condición necesaria pero no suficiente.

Veremos el resultado anterior para el caso de considerar ecuación por ecuación.

Dada la i-ésima ecuación de nuestro modelo, sea Ai la submatriz no singular de dimensión (G-1) X (G-1) contenida en la matriz de los coeficientes correspondientes a las variables - eliminadas de la ecuación cuya posible identificabilidad se - está estudiando y que aparecen en las otras ecuaciones del modelo.

Bajo las hipótesis de normalizaciones y exclusiones podemos - probar el siguiente resultado:

Teorema: La i-ésima ecuación es identificable si y sólo si - $\rho(Ai) = G-1$.

Demostración: consideremos las estructuras A y A* dadas por

$$A = (B, \Gamma) \text{ y } A^* = (B^*, \Gamma^*)$$

Dado que solo hay normalizaciones y exclusiones, existen P_{i1} y P_{i2} matrices de permutaciones tales que

$$P_{i1} P_{i1}' = P_{i1}' P_{i1} = I_G \quad y \quad P_{i2} P_{i2}' = P_{i2}' P_{i2} = I_K$$

Además:

$$B_{i.} = (1, -\beta_i', 0) P_{i1} \quad y \quad \Gamma_{i.} = (-\gamma_i', 0) P_{i2}$$

Aquí sabemos

$$\beta_i = (\beta_{i1}, \ldots \beta_{iG})' \text{ es } (G,1)$$
$$\gamma_i = (\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{iK})' \text{ es } (K,1)$$
$$R_{i1} \text{ es } (G,G) \;;\; R_{i2} \text{ es } (K,K)$$

además: $1 + G_{i1} + G_{i2} = G \;;\; K_{i1} + K_{i2} = K$

o bien:

$$A_{i.} = (B_{i.}, \Gamma_{i.}) = (1, -\beta_i', 0, -\gamma_i', 0) P_i = (-\beta_i', -\gamma_i', 1, 0) P_i Q_i \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow A_{i.} Q_i' P_i' = (-\beta_i', -\delta_i', 1, 0) = (-\delta_i', 1, 0)$$

donde

$P_i = \begin{pmatrix} P_{i1} & 0 \\ 0 & P_{i2} \end{pmatrix}$ es una matriz de permutaciones al igual que Q_i, de forma que : $P_i P_i' = P_i' P_i = Q_i Q_i' = Q_i' Q_i = I_{G+K}$

Asimismo

$$A_{i.}^* = (-\beta_i^{*\prime}, -\delta_i^{*\prime}, 1, 0) P_i Q_i \Longleftrightarrow A_{i.}^* Q_i' P_i' = (-\beta_i^{*\prime}, -\delta_i^{*\prime}, 1, 0) = (-\delta_i^{*\prime}, 1, 0)$$

Entonces:

$$A_i^* = R_{i.} A \Longleftrightarrow A_{i.}^* Q_i' P_i' = R_{i.} A Q_i' P_i'$$

Partimos

$$S_i A Q_i' P_i' = \begin{pmatrix} A_{i.} & Q_i' P_i' \\ A_i^* & Q_i' P_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_i' & 1 & 0 \\ A_i^{K*} & a_i & A_i \end{pmatrix}$$

Donde S_i es una permutación tal que $S_i\, S_i' = S_i'\, S_i = I_G$

Nota: $R_i \cdot S_i' = I_G$

Partimos $R_i \; S_i' = (\Upsilon_{i1}, \Upsilon_{i2}')$

Por lo tanto

$$(-\delta_i^{*\prime}, 1, 0) = (\gamma_{i1}', \gamma_{i2}') \begin{pmatrix} -\delta_i' & 1 & 0 \\ A_i^{**} & a_i & A_i \end{pmatrix} \left(\gamma_{i2}' A_i^{**} - \gamma_{i1}' \delta_i' \, ; \gamma_{i1}' + \gamma_{i2}' a_i ; \gamma_{i2}' A_i \right)$$

Así que:

La ecuación está identificada $\Longleftrightarrow \gamma_{i2} = 0$ y $\gamma_{i1} = 1$

Por lo tanto el sistema $A_i' \, \Upsilon_{i2} = 0$ debe tener como única solución $\Upsilon_{i2} = 0$.

Esto sucede si las columnas de A_i' son linealmente independientes.

Como Ai es (G-1, Gi2 + Ki2), habrá identificabilidad $\Leftrightarrow \rho(A_i) = G-1$

La condición $P(A_i) = G-1$ se conoce como <u>condición de rango para la identificación de la i-ésima ecuación.</u> Esta condición es necesaria y suficiente por el teorema anterior.

Obsérvese por otra parte que para que se dé esta condición es necesario que $G-1 \leq G_{i2} + K_{i2} = \Upsilon \Longleftrightarrow G \leq \Upsilon + 1$

Así que $G \leq 1+r$ es una condición necesaria para la identificación y se conoce como condición de orden para la identificación de la i-ésima ecuación.

PROCEDIMIENTOS PARA LA IDENTIFICACION DE UN MODELO

La identificación de un modelo es necesaria para poder calcular los parámetros estructurales a partir de los parámetros - de la forma reducida. Por esta razón el proceso de la identificación es anterior al proceso de la estimación, ya que si - no podemos inferir los valores de los parámetros estructura-- les a partir de los valores de los coeficientes de la forma - reducida no tiene sentido estimar esta última.

Cabe mencionar que en el caso de las predicciones no es necesario que el modelo sea identificable para que estas puedan - realizarse, ya que es suficiente tener el modelo en su forma reducida.

Hemos visto algunos procedimientos para la identificación de un modelo:

1. El primer procedimiento se basa en el concepto ya establecido de Estructuras Equivalentes en observación (E O). Este caso ya se analizó anteriormente y se dió un ejemplo.

   La identificación de un modelo mediante este procedimiento está sujeta a la existencia de una matriz R no singu-- lar que necesariamente tiene que ser $R = I_G$ $R = B^* B^{-1}$

2. El segundo procedimiento que también ya se analizó se conoce como condición de rango para la identificación de un modelo. Esta condición resulta ser necesaria y suficiente.

Se analizó también la condición de rango para la identificación de la i-ésima ecuación según la cual la i-ésima ecuación será identificable si existe una submatriz cuadrada de dimensión G-1.

La condición de rango para la identificación de la i-ésima ecuación está sujeta a la restricción $G-1 \leq r$. Esta restricción nos lleva directamente a la condición de orden para la identificación de la i-ésima ecuación, la cual resulta ser una condición necesaria pero no suficiente.

Como $r = Gi2 + Ki2$ = endógenas que no aparecen más exógenas que no aparecen = número de ceros que aparecen en la ecuación.

Según lo anterior, la condición de orden para la identificación de la i-ésima ecuación ($r \geq G-1$) se enuncia de la siguiente manera:

La i-ésima ecuación del modelo es identificable si el número de ceros que aparecen en la ecuación es mayor o igual que el número de ecuaciones menos uno.

Definición III.6: Pueden suceder tres casos:

a) Si $r > G-1$ la ecuación es superidentificable, siempre que la condición de rango se cumpla.

b) Si $r = G-1$ la ecuación es <u>exactamente identificable,</u> siempre que la condición de rango se cumpla.

c) Si $r < G-1$ la ecuación <u>no es identificable</u>.

El modelo será identificable si lo son cada una de sus ecuaciones.

3. Este tercer procedimiento consiste en lo siguiente:

Sea $r = G_{i2} + K_{i2}$ y $G = G_{i1} + G_{i2}$

La desigualdad: $r \geq G-1 \Longleftrightarrow G_{i2} + K_{i2} \geq G_{i1} + G_{i2} - 1 \Longleftrightarrow K_{i2} \geq G_{i1} - 1$

<u>Por lo tanto la i-ésima ecuación será identificable</u> si el número de variables predeterminadas que no aparecen es mayor o igual que el número de endógenas que si aparecen menos uno.

Los siguientes son dos ejemplos para analizar la posible identificabilidad de los respectivos modelos utilizando las condiciones de orden y rango analizadas en los párrafos anteriores.

E J E M P L O S

1. Aplique las condiciones de orden y rango para identificar el siguiente modelo

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$
$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t - \alpha_1 T_t$$
$$I_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 G_t - \beta_2 G_{t-1}$$

En este modelo tenemos

Variables endógenas: Y_t , C_t , I_t
Variables predeterminadas: G_t , T_t , Y_{t-1} , G_{t-1}

donde:

Y_t = Ingreso, C_t = consumo, I_t = inversión privada, G_t = gasto público, T_t = impuestos.

Pasando el modelo anterior a su forma estructural y acomodando las restricciones como normalizaciones y exclusiones nos queda

$$
\begin{aligned}
Y_t - C_t - I_t - G_t \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \\
-\alpha_1 Y_t + C_t \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha_1 T_t \qquad\qquad - \alpha_0 &= 0 \\
I_t - \beta_2 G_t - \beta_1 Y_{t-1} \qquad\quad + \beta_2 G_{t-1} \qquad\qquad &= 0
\end{aligned}
$$

En forma matricial nos queda:

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\alpha_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} Y_t \\ C_t \\ I_t \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_0 \\ -\beta_2 & -\beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} G_t \\ Y_{t-1} \\ T_t \\ G_{t-1} \\ 1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Por lo que las matrices B y Γ son respectivamente:

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\alpha_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\qquad
\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_0 \\ -\beta_2 & -\beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix}
$$

La condición de orden exige que el número de ceros que hay en cada ecuación sea mayor o igual que G-1. En este caso G-1 = 2. Por lo tanto se tiene lo siguiente:

1a. ecuación: esta ecuación es una identidad, por lo que no hay necesidad de aplicar condiciones de orden y rango.

2a. ecuación: número de ceros = 4 > 2, entonces la ec. 2 satisface la condición de orden.

3a. ecuación: número de ceros = 4 > 2; se satisface la condición de orden.

La condición de rango exige la existencia de una submatriz cuadrada de dimensión G-1 para que la ecuación correspondiente sea identificable. En este caso tenemos:

Ecuación 1: Es una identidad.

Ecuación 2: La matriz correspondiente es:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\beta_2 & -\beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Las posibles submatrices de dimensión 2 = G-1 son:

$$A_2=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -\beta_2 \end{pmatrix} ; \quad B_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\beta_1 \end{pmatrix} ; \quad C_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\beta_1 \end{pmatrix}$$

$$D_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\beta_2 & -\beta_1 \end{pmatrix} ; \quad E_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\beta_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

Los terminantes respectivos son:

$$\det(A_2)=\beta_2+1 \quad ; \quad \det(B_2)=\beta_1 \quad ; \quad \det(C_2)=\beta_1$$
$$\det(D_2)=B_1 \quad ; \quad \det(E_2)=-\beta_2$$

∴ La ecuación 2 será identificable si se cumple al menos -- una de las siguientes condiciones:

a) $\beta_2+1 \neq 0 \iff \beta_2 \neq -1$

b) $\beta_1 \neq 0$

c) $\beta_2 \neq 0$

Ecuación 3: La matriz correspondiente es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 1 & \alpha_1 & -\alpha_0 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Las posibles submatrices no singulares de dimensión 2 son:

$$A_3=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}; \quad C_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1 & -\alpha_0 \end{pmatrix}$$

$$D_3=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}; \quad E_3=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\alpha_0 \end{pmatrix}$$

Cuyos determinantes respectivos son:

$$\det(A_3)=1-\alpha_1 \;;\; \det(B_3)=\alpha_1 \;;\; \det(C_3)=-\alpha_0$$
$$\det(D_3)=-\alpha_1 \;;\; \det(E_3)=\alpha_0$$

∴ La ecuación 3 es identificable si se cumple al menos una de las siguientes condiciones.

a) $1-\alpha_1 \neq 0$

b) $\alpha_1 \neq 0$

c) $\alpha_0 \neq 0$

Como es muy remoto esperar que no se cumplan cualesquiera de - las condiciones anteriores, podemos decir que nuestro modelo - será seguramente identificable.

2. Analizar la identificabilidad de cada una de las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
P_t + \beta_{12} W_t \quad\quad + \gamma_{11} Q_t \quad\quad + \gamma_{13} P_{t-1} \quad\quad &= U_{1t} \\
\beta_{21} P_t + W_t + \beta_{23} N_t \quad\quad + \gamma_{22} S_t \quad\quad + \gamma_{24} W_{t-1} &= U_{2t} \\
\beta_{32} W_t + N_t \quad\quad + \gamma_{32} S_t + \gamma_{33} P_{t-1} \quad\quad &= U_{3t}
\end{aligned}
$$

donde tenemos:

Variables endógenas:

P_t = Indice de precios.
W_t = Salarios monetarios.
N_t = Número de trabajadores.

Variables predeterminadas:

Q_t = Indice de productividad.
S_t = Número de huelgas.

Si se sabe a priori que:

a) $\gamma_{11} = 0$
b) $\gamma_{22} = \beta_{21} = 0$
c) $\gamma_{33} = 0$

¿Como afectan estas restricciones a las condiciones de orden y rango?

Solución:

La forma estructural en forma de matrices para nuestro modelo es:

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & 1 & \beta_{23} \\ 0 & \beta_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_t \\ W_t \\ N_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma'_{11} & 0 & \gamma'_{13} & 0 \\ 0 & \gamma'_{22} & 0 & \gamma'_{24} \\ 0 & \gamma'_{32} & \gamma'_{33} & \gamma'_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_t \\ S_t \\ P_{t-1} \\ W_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{pmatrix}$$

Las matrices B y Γ son respectivamente:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & 1 & \beta_{23} \\ 0 & \beta_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma'_{11} & 0 & \gamma'_{13} & 0 \\ 0 & \gamma'_{22} & 0 & \gamma'_{24} \\ 0 & \gamma'_{32} & \gamma'_{33} & \gamma'_{34} \end{pmatrix}$$

Analizando cada una de las ecuaciones tenemos:

<u>Condición de orden:</u>

Ecuación 1:

Número de ceros = $3 \geq 2 = G-1$. La ecuación 1 satisface la condición de orden.

Ecuación 2:

Número de ceros = $2 \geq 2$. Se satisface la condición de orden.

Ecuación 3:

Número de ceros = 2 $\geq$ 2. Se satisface la condición de orden.

Condición de rango:

Ecuación 1:

La matriz correspondiente es:

$$\begin{pmatrix} \beta_{23} & \gamma'_{22} & \gamma'_{24} \\ 1 & \gamma'_{32} & \gamma'_{34} \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Las posibles submatrices son:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \beta_{23} & \gamma'_{22} \\ 1 & \gamma'_{32} \end{pmatrix} \; ; \quad B_1 = \begin{pmatrix} \beta_{23} & \gamma'_{24} \\ 1 & \gamma'_{34} \end{pmatrix} \; ; \quad C_1 = \begin{pmatrix} \gamma'_{22} & \gamma'_{24} \\ \gamma'_{32} & \gamma'_{34} \end{pmatrix}$$

Los determinantes correspondientes son:

$$\det(A_1) = \beta_{23}\gamma'_{32} - \gamma'_{22} \; ; \quad \det(B_1) = \beta_{23}\gamma'_{34} - \gamma'_{24} \; ; \quad \det(C_1) = \gamma'_{22}\gamma'_{34} - \gamma'_{32}\gamma'_{24}$$

Por lo tanto, la ecuación 1 es identificable si y sólo si se satisface al menos una de las siguientes condiciones:

a) $\beta_{23}\gamma'_{32} - \gamma'_{22} \neq 0 \iff \beta_{23}\gamma'_{32} \neq \gamma'_{22}$
b) $\beta_{23}\gamma'_{34} - \gamma'_{24} \neq 0 \iff \beta_{23}\gamma'_{34} \neq \gamma'_{24}$
c) $\gamma'_{22}\gamma'_{34} - \gamma'_{32}\gamma'_{24} \neq 0 \iff \gamma'_{22}\gamma'_{34} \neq \gamma'_{32}\gamma'_{24}$

Ecuación 2:

La matriz correspondiente es:

$$A_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{13} \\ 0 & \gamma_{33} \end{pmatrix}$$

Una submatriz de dimensión 2 es ella misma y su determinante - es $\gamma_{11}\gamma_{33}$.

$\therefore$ La ec. 2 es identificable $\iff \gamma_{11}\gamma_{33} \neq 0 \iff \gamma_{11} \neq 0$ y $\gamma_{33} \neq 0$

Ecuación 3:

La matriz correspondiente es:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{11} \\ \beta_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_3) = -\beta_{21}\gamma_{11}$$

$\therefore$ La ecuación 3 es identificable $\iff -\beta_{21}\gamma_{11} \neq 0 \iff \beta_{21} \neq 0 \neq \gamma_{11}$

Por lo tanto concluimos que el modelo es identificable si y -- solo si lo son cada una de sus ecuaciones. Las condiciones para la identificabilidad del modelo son:

a) $\gamma_{11} \neq 0$ y $\beta_{21} \neq 0$
b) $\gamma_{11} \neq 0$ y $\gamma_{33} \neq 0$
c) $\beta_{23}\gamma_{32} \neq \gamma_{22}$
d) $\beta_{23}\gamma_{34} \neq \gamma_{24}$
e) $\gamma_{22}\gamma_{34} \neq \gamma_{32}\gamma_{24}$

El modelo es identificable si y sólo si se satisfacen a) y b) -
y al menos una de c), d) y e).

Veamos ahora como afectan a las condiciones de orden y rango --
las siguientes condiciones:

a) $\gamma_{11} = 0$
b) $\beta_{21} = \gamma_{22} = 0$
c) $\gamma_{33} = 0$

Como las tres ecuaciones satisfacen la condición de orden, las restricciones anteriores solo aumentan el número de ceros en -- cada ecuación, lo cual no afecta la identificabilidad de la -- ecuación correspondiente.

Respecto a la condición de rango tenemos:

$\gamma_{11} = 0$ afecta la identificabilidad de las ecuaciones 2 y 3, - pues en ambas se pide $\gamma_{11} \neq 0$

$\therefore$ $\gamma_{11} = 0$ hace las ecuaciones 2 y 3 no identificables y por - lo tanto el modelo no será identificable.

$\gamma_{22} = \beta_{21} = 0$ afecta a la identificabilidad de la ecuación 3.

$\therefore$ $\beta_{21} = 0$ hace la ecuación 3 no identificable, por lo que el modelo tampoco será identificable.

$\gamma_{33} = 0$ hace la ecuación 2 no identificable y por lo tanto el modelo tampoco será identificable.

Dado que la condición de rango es necesaria y suficiente y como las restricciones anteriores hacen que la condición de rango no se cumpla; tales restricciones afectan la identificabilidad del modelo.

CAPITULO IV

SISTEMAS DINAMICOS

Se definió anteriormente un sistema dinámico como aquel que explica los cambios en los valores de las variables endógenas a medida que transcurre el tiempo, cuando no haya modificaciones en la estructura económica o variables exógenas (excepto el tiempo).

En este capítulo nos ocuparemos del estudio de las relaciones intertemporales entre las variables, es decir; el movimiento en el tiempo del sistema económico y en ese sentido nos dedicaremos a resolver básicamente las siguientes cuestiones.

¿Cuál es la trayectoria del sistema económico a través del tiempo?

¿Existen y bajo que condiciones estados de equilibrio en el sistema, y en caso de existir dichos estados, como se llega a ellos?*.

¿Como influyen los cambios en las variables determinadas fuera del sistema sobre la trayectoria del mismo?

Antes de hacer el tratamiento más general del tema que nos ocupa, motivaremos este con algunos ejemplos.

(*) La definición de estado y/o punto de equilibrio se dará más adelante.

Ejemplo 1: Consideremos el siguiente modelo:

$$C_t = \alpha + \beta Y_{t-1} \quad \text{------------}(1)$$
$$Y_t = C_t + i_t \quad \text{------------}(2)$$

Supongamos que los valores de los parámetros son:

= 120, = 0.5; la inversión i_t = 30 cada año y sea Y_o = 200 el ingreso inicial. Entonces tendremos:

$$C_1 = \quad + \quad Y_o = 120 + 0.5\ (200) = 220$$
$$Y_1 = C_1 + i_1 = 220 + 30 = 250$$
$$C_2 = \quad + \quad Y_1 = 120 + 0.5\ (250) = 245$$
$$Y_2 = C_2 + i_2 = 245 + 30 = 275$$

⋮

Con lo cual obtenemos la siguiente tabla:

t	C_t	Y_t
0	—	200
1	220	250
2	245	275
3	257·5	287·5
4	263·75	293·75
⋮	⋮	⋮
∞	270	300

En dicha tabla nos damos cuenta de lo siguiente:

$$\lim_{t \to \infty} Y_t = 300 \qquad y \qquad \lim_{t \to \infty} C_t = 270$$

Si hacemos un pequeño cambio en nuestro modelo, suponiendo que el ingreso inicial Y_o es igual a 300 y mantenemos α, β e i invariables tendremos:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \alpha + \beta Y_0 = 120 + 0.5(300) = 270 \\
Y_1 &= C_1 + i_1 = 270 + 30 = 300 \\
C_2 &= \alpha + \beta Y_1 = 120 + 0.5(300) = 270 \\
Y_2 &= C_2 + i_2 = 270 + 30 = 300 \\
&\vdots \\
Y_i &= Y_J \quad y \quad C_i = C_J \quad \forall i, J
\end{aligned}$$

Nuevamente tenemos: $\lim_{t \to \infty} Y_t = 300$ y $\lim_{t \to \infty} C_t = 270$

En nuestras circunstancias 300 es un valor de equilibrio para el ingreso; si se consigue se mantiene; además es estable como se muestra más adelante.

Un punto (C^e, Y^e) de equilibrio será un punto tal que(*)

$$C^e = \alpha + \beta Y^e \text{ ---------------- } (1')$$
$$Y^e = C^e + i \text{ ---------------- } (2')$$

Resolviendo (1') y (2') para Y^e, C^e en términos de α, β e i obtenemos la posición de equilibrio:

(*) Adelante se dan definiciones precisas; aquí solo se motivan conceptos.

$$C^e = \frac{1}{1-\beta}(\alpha + \beta i)$$

$$Y^e = \frac{1}{1-\beta}(\alpha + i)$$

Sustituyendo α, β e i por sus respectivos valores obtenemos:

$$C^e = \frac{1}{0.5}(120+15) = 270$$

$$Y^e = \frac{1}{0.5}(120+30) = 300$$

Que coinciden con los valores obtenidos siguiendo el curso temporal de las variables.

La forma reducida del modelo anterior es:

$$C_t = \alpha + \beta Y_{t-1}$$
$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + i_t$$

Si retardamos un período la ecuación (2) de nuestro modelo obtenemos:

$$Y_{t-1} = C_{t-1} + i_{t-1}$$

Sustituyendo esto último en la la. ecuación de la forma reducida del modelo nos queda la siguiente forma particular del modelo:

$$C_t = \alpha + \beta C_{t-1} + \beta i_{t-1}$$
$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + i_t$$

Obsérvese la forma particular de estas 2 ecuaciones en donde cada endógena se expresa con retardos de ella misma pero no de -- otras endógenas. En el siguiente ejemplo veremos como se puede usar la expresión de un modelo en estos términos, para poder analizar el equilibrio y estabilidad del mismo.

Ejemplo 2: consideremos la siguiente ecuación en diferencias finitas de primer orden-un período de retardo-con coeficientes constantes a y b.

$$Y_t = a + bY_{t-1} \quad \text{-----------------} (3)$$

Sea Yo el valor inicial de Y; entonces, Y_1 se obtiene particularizando para t = 1, Y_2 para t = 2, etc. y así sucesivamente, es decir:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= a + bY_0 \\
Y_2 &= a + bY_1 = b^2 Y_0 + a(1+b) \\
Y_3 &= a + bY_2 = b^3 Y_0 + a(1+b+b^2) \\
Y_4 &= a + bY_3 = b^4 Y_0 + a(1+b+b^2+b^3) \\
&\vdots \\
Y_t &= a + bY_{t-1} = b^t Y_0 + a(1+b+b^2+\cdots+b^{t-1})
\end{aligned}$$

Si suponemos que $|b| < 1$ entonces, ésta última igualdad se puede rescribir como:

$$Y_t = b^t Y_0 + a \, \frac{1-b^t}{1-b} \quad \text{-----------------} (4)$$

La igualdad (4) expresa una solución válida para toda t pues utilizando (3) obtenemos:

$$\left[b^t Y_0 + a \, \frac{1-b^t}{1-b} \right] = a + b \left[b^{t-1} Y_0 + a \, \frac{1-b^{t-1}}{1-b} \right]$$

Si b = 1 entonces la solución de (3) está dada por la ecuación:

$$Y_t = Y_0 + a_t \quad \text{-----------------} (5)$$

Así pues; suponiendo que conocemos Yo, obtenemos en (4) ó (5) - una correspondencia entre la variable tiempo y la variable Y - que nos indica el camino recorrido por dicha variable. Expresando la ecuación (3) en posición de equilibrio obtenemos:

$$Y^e = a + bY^e \iff Y^e = \frac{a}{1-b}$$

Utilizando este último resultado en la ecuación (4) obtenemos:

$$Y_t = b^t Y_0 + (1-b^t) Y^e \iff Y^t - Y^e = b^t (Y_0 - Y^e)$$

De acuerdo a ésta última igualdad, concluimos que Yt se aproximará a Y^e si y sólo Yt - Y^e tiende a cero a medida que t se incrementa. Esto exige que $b^t \to 0$ cuando $t \to \infty$

La condición necesaria y suficiente para que $b^t \to 0$ es $|b| < 1$ con lo cual llegamos a la "condición de estabilidad" (Ver def. IV.1). Por lo tanto en este caso la condición de estabilidad - es $|b| < 1$.

Definición IV.0: El vector Y^e es un punto de equilibrio del modelo $BY_t + \Gamma Z_t = 0$ si Y^e es el límite de Yt cuando $t \to \infty$ y Yt se sujeta a las condiciones del modelo.

Definición IV.1: Las condiciones de estabilidad son el conjunto de restricciones sobre los parámetros que nos permiten llegar a un punto de equilibrio.

Una posición de equilibrio es aquella para la que sucede:

$$C_{t-1} = C_t = C_{t+1} = \cdots\cdots = C^e$$
$$Y_{t-1} = Y_t = Y_{t+1} = \cdots\cdots = Y^e$$

El vector Z_t de variables predeterminadas puede partirse de la siguiente manera:

$$Z_t = (Y'_{t-1}, Y'_{t-2}, \ldots Y'_{t-r}; Z'_t, Z'_{t-1}, \ldots Z'_{t-s})$$

donde Y_{t-i} $(i = 1,2,\ldots,r)$ y Z_{t-J} $(J = 1,2,\ldots,S)$ son varia-- bles endógenas y exógenas con retardo, respectivamente.

Definición IV.2: <u>Se dice que un sistema es de orden (r, s)</u> de<u>notado por $\Phi(r,s)$ si contiene desfases máximos de orden r en las endógenas y S en las exógenas.</u>

Para un sistema $\Phi(r,s)$ el número de variables predeterminadas es:

$$K^* = r\,G + (S + 1)K$$

La forma estructural $BY_t + \Gamma Z_t = U_t$ puede expresarse en térmi-- nos intertemporales explícitos partiendo Γ de la siguiente manera:

$$\Gamma = (B_1, B_2, \ldots B_r, \Gamma_0, \Gamma_1, \ldots \Gamma_s)$$

donde :

B_J es (G,G) $J=1,2,\ldots,r$ y Γ_J es (G,K) $J=1,2,\ldots,S$

Según esto, obtenemos para ΓZt lo siguiente:

$$\Gamma Z_t = \sum_{J=1}^{r} B_J Y_{t-J} + \sum_{J=0}^{S} \Gamma_J Z_{t-J}$$

Haciendo la convención Bo = B <u>la forma estructural de un modelo dinámico es:</u>

$$\sum_{J=1}^{r} B_J Y_{t-J} + \sum_{J=0}^{S} \Gamma_J Z_{t-J} = U_t \quad \text{--------(6)}$$

Resolviendo ésta última para Yt suponiendo la existencia de -- B^{-1}- obtenemos <u>la forma reducida de un modelo dinámico.</u>

$$Y_t = \sum_{J=1}^{r} \Pi_{YJ} Y_{t-J} + \sum_{J=0}^{S} \Pi_{ZJ} Z_{t-J} + V_{t-J} \quad \text{---------(7)}$$

donde: $\Pi_{YJ} = -B_0^{-1} B_J \quad J=1,2,\dots,r$ y $\Pi_{ZJ} = -B_0^{-1}\Gamma_J \quad J=1,2,\dots,S$

Ejemplo 3: Consideremos el siguiente modelo:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$
$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + U_{t1}$$
$$I_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 (G_t - G_{t-1}) + U_{t2}$$

La forma reducida de este modelo es:

$$Y_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{\beta_1}{1-\alpha_1} Y_{t-1} + \frac{1+\beta_2}{1-\alpha_1} G_t - \frac{\beta_2}{1-\alpha_1} G_{t-1} + V_{t1}$$

$$C_t = \frac{1}{1-\alpha_1}\alpha_0 + \frac{\alpha_1\beta_1}{1-\alpha_1}Y_{t-1} + \frac{\alpha_1(1+\beta_2)}{1-\alpha_1}G_t - \frac{\alpha_1\beta_2}{1-\alpha_1}G_{t-1} + V_{t2}$$

$$I_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2(G_t - G_{t-1}) + V_{t3}\,.$$

donde: $V_{t1} = \frac{1}{1-\alpha_1}(U_{t1}+U_{t2})$; $V_{t2} = U_{t1} + \alpha_1 V_{t1}$; $V_{t3} = U_{t2}$.

De aquí obtenemos Π_1 y Π_2

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{1-\alpha_1} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_1\beta_1}{1-\alpha_1} & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Pi_2 = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} & \frac{1+\beta_2}{1-\alpha_1} & \frac{-\beta_2}{1-\alpha_1} \\ \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} & \frac{\alpha_1(1+\beta_2)}{1-\alpha_1} & \frac{-\alpha_1\beta_2}{1-\alpha_1} \\ 0 & \beta_2 & -\beta_2 \end{bmatrix}$$

Si W_t es una variable en el tiempo, el operador L tal que $LW_t = W_{t-1}$ se llama el <u>operador desfase.</u>

Utilizando la convención usual de exponentes $L^i L^j = L^{i+j}$ y definiendo $L^0 W_t = W_t$ obtenemos $L^J W_t = W_{t-J}$. Es decir

$$Y_{t-J} = L^J Y_t$$
$$Z_{t-J} = L^J Z_t$$

Aplicando ésto último a (6) obtenemos:

$$Y_t \sum_{J=0}^{r} B_J L^J + Z_t \sum_{J=0}^{s} \Gamma_J L^J = U_t$$

Definiendo

$$B(L) = \sum_{J=0}^{r} B_J \cdot L^J \qquad y \qquad \Gamma(L) = \sum_{J=0}^{s} \Gamma_J L^J$$

Obtenemos formas más sencillas de (6) y (7) que corresponden a las formas estructural y reducida respectivamente. Las nuevas expresiones son:

$$B(L)Y_t + \Gamma(L)Z_t = U_t \text{ ---------------- } (8)$$

$$Y_t = \Pi_Y(L)Y_{t-1} + \Pi_Z(L)Z_t + V_t \text{ ---------- } (9)$$

donde:

$$\Pi_Y(L) = \sum_{J=1}^{r} \Pi_{YJ} L^{J-1} \quad ; \quad \Pi_Z(L) = \sum_{J=0}^{s} \Pi_{ZJ} L^{J}$$

Reducción del orden de un sistema

Proposición: Todo sistema de orden (r,s) es equivalente a un sistema de orden(1, 0)

Demostración:

Consideremos la estructura de primer orden dada por:

$$\begin{bmatrix} B_0 & & & & & & \\ & I_G & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & I_G & & & \\ & & & & I_K & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & I_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-r+1} \\ Z_t \\ Z_{t-1} \\ \vdots \\ Z_{t-s+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_{r-1} & B_r & \Gamma_0 & \cdots & \Gamma_{s-1} & \Gamma_s \\ -I_G & & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & & \\ & & -I_G & 0 & & & & \\ & & & & -I_K & & & \\ & 0 & & & & \ddots & & \\ & & & & & & -I_K & 0 \; 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ \vdots \\ Y_{t-r} \\ Z_t \\ Z_{t-1} \\ \vdots \\ Z_{t-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ---- } (10)$$

que se conoce como la forma estructural adjunta del modelo dinámico $\phi(r,s)$ dada en (6) ó (8). Nótemos que el primer bloque de ecuaciones en (10) corresponde a la forma estructural de dicho modelo. Los siguientes r-1 bloques de G ecuaciones son identidades de la forma $Y_{t-J} - Y_{t-J} = 0 \;\; ; J = 1, 2, \ldots, r-1$.

Los subsiguientes S bloques de K ecuaciones contienen identidades de la forma $Z_{t-j} - Z_{t-j} = 0 \quad J = 1, 2, \ldots S-1$

Con esto la forma estructural adjunta dada en (10) es equivalente a la que aparece en (6) ó (8) y por lo tanto todo modelo $\phi(r,s)$ es reducible a uno de primer orden de rG+SK variables endógenas.

Esta proposición nos permite analizar el modelo de primer orden en el que $B(L) = B_1 L$; $\Gamma(L) = \Gamma_0$ y definimos $\Gamma = \Gamma_0$ con lo que las formas estructurales y reducida serán respectivamente:

$$B(L)Y_t + \Gamma Z_t = U_t \qquad (11)$$

$$Y_t = \Pi_y Y_{t-1} + \Pi_z Z_t + V_t \qquad (12)$$

Además hemos definido: $\Pi_{y1} = \Pi_y \;\; ; \Pi_{z0} = \Pi_z$

Ejemplo 4: Consideremos el siguiente modelo

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha + \beta Y_{t-2} + U_{1t} \\ Y_t &= C_t + i_t \end{aligned} \iff \begin{aligned} C_t \quad\quad - \beta Y_{t-2} \quad - \alpha &= U_{1t} \\ -C_t + Y_t \quad\quad - i_t \quad &= 0 \end{aligned}$$

En forma matricial nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta & 0 & -\alpha \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{t-2} \\ i_t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

o bien, si $C_t = Y_{1t}$, $Y_t = Y_{2t}$; $i_t = Z_t$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y_{1t}\\ Y_{2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\beta & 0 & -\alpha\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y_{t-2}\\ Z_t\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_{1t}\\ 0\end{pmatrix}$$

Aplicando la proposición anterior, obtenemos la siguiente estructura de primer orden:

$$\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} & & \\ & & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} & \\ & & & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}Y_{1t}\\ Y_{2t}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0\\ Y_{t-2}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}Z_t\\ 1\end{pmatrix}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & -\beta\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & -\alpha\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} & 0 & 0\\ & \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} & \ddots\\ & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0\\ Y_{t-2}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}Z_t\\ 1\end{pmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_{1t}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

<u>La forma final del sistema:</u>

Definición IV.3: <u>Una ecuación en su forma final</u> es aquella que expresa una variable endógena actual en términos de las variables exógenas y de valores retardados de ella misma, pero no de otras.

La trayectoria del sistema en el tiempo está dada por la trayectoria de su nivel de actividad, que es el elemento que se determina al interior del sistema; mientras la estructura se considera permanente en el tiempo, las variables exógenas se determinan en forma externa.

Es necesario aclarar por otro lado que esta trayectoria no es determinista sino estocástica en virtud de la naturaleza del sistema; de manera que el nivel de actividad del sistema Y_t, se forma de dos componentes: uno sistemático (determinista) y uno no sistemático (estocástico).

Puesto que (12) es válida para toda t, retardamos un período y obtenemos:

$$Y_{t-1} = \Pi_Y Y_{t-2} + \Pi_Z Z_{t-1} + V_{t-1}$$

Sustituyendo esto último en (12) obtenemos

$$Y_t = \Pi_Y \left(\Pi_Y Y_{t-2} + \Pi_Z Z_{t-1} + V_{t-1} \right) + \Pi_Z Z_t + V_t = \Pi_Y^2 Y_{t-2} + \sum_{J=0}^{1} \Pi_Y^J \Pi_Z Z_{t-J} + \sum_{J=0}^{1} \Pi_Y^J V_{t-J}$$

Sustituyendo ahora Y_{t-2} en función de Y_{t-3}, Z_{t-2} y V_{t-2} obtenemos:

$$Y_t = \Pi_Y^3 Y_{t-3} + \sum_{J=0}^{2} \Pi_Y^J \Pi_Z Z_{t-J} + \sum_{J=0}^{2} \Pi_Y^J V_{t-J}$$

Sustituyendo ahora Y_{t-3} en función de Y_{t-2}, Z_{t-3} y V_{t-3} obtenemos:

$$Y_t = \Pi_Y^4 Y_{t-4} + \sum_{J=0}^{3} \Pi_Y^J \Pi_Z Z_{t-J} + \sum_{J=0}^{3} \Pi_Y^J V_{t-J}$$

Siguiendo este procedimiento obtenemos finalmente:

$$\boxed{Y_t = \Pi_Y^t Y_0 + \sum_{J=0}^{t-1} \Pi_Y^J \Pi_Z Z_{t-J} + \sum_{J=0}^{t-1} \Pi_Y^J V_{t-J}} \text{ - - - - - - - - - - - (FF)}$$

Esta última igualdad representa la <u>forma final del sistema,</u> que - expresa la trayectoria del mismo en función de variables exóge-- nas, un término estocástico y condiciones iniciales del nivel de actividad Yo que se consideran dadas y por lo tanto no estocásti cas.

Si el componente sistemático $\bar{Y}t$ lo igualamos con:

$$\bar{Y}_t = \Pi_Y^t Y_0 + \sum_{J=0}^{t-1} \Pi_Y^J \Pi_Z Z_{t-J}$$

y el componente no sistemático Ut con:

$$U_t = \sum_{J=0}^{t-1} \Pi_Y^J V_{t-J}$$

La forma final puede expresarse como

$$Y_t = \bar{Y}_t + U_t$$

donde $E(Y_t) = \bar{Y}_t$ y $V_y(t, k) = V_u(t, k)$

Según esto último <u>el sistema alcanzará un estado de equilibrio</u> - si y solamente si el componente $\bar{Y}t$ alcanza un nivel estable, -- así como la autocovarianza del componente no sistemático.

Desde el punto de vista teórico, la estabilidad del sistema implica que se han aislado a través de la construcción del modelo en el ciclo especificación-identificación-inferencia-los determinantes del nivel de actividad. Decimos que se han aislado en el sentido de que se han identificado como externos al sistema, es decir como exógenas.

El nivel de actividad se mueve en el tiempo impulsado por fuentes estructurales y coyunturales. Las fuentes estructurales están dadas por la estructura misma del sistema y si este es estable, van disminuyendo sus efectos con el paso del tiempo hasta no provocar cambio alguno.

Por el contrario, si el sistema es inestable, las características estructurales nunca dejan de perturbar el nivel de actividad y de hecho, su acción es cada vez más fuerte. Las fuentes coyunturales de movimiento del nivel de actividad son los estímulos externos; si estos sufren cambios, causan impactos sobre el nivel de actividad mediados por la estructura. Si los estímulos externos se mantienen constantes el sistema alcanzará el equilibrio eventualmente, si es estable, al desaparecer los efectos estructurales de movimiento.

La trayectoria de la función de autocovarianzas depende exclusivamente de la estructura y no de los estímulos externos, mientras que el nivel medio de actividad recibe impulsos tanto estructurales como coyunturales.

CONDICIONES DE EQUILIBRIO PARA LA FUNCION DE AUTOCOVARIANZAS

Estableceremos ahora las condiciones necesarias y suficientes para que la función de autocovarianzas del sistema $V(t, k)$ llegue a un nivel de equilibrio lo que implica un estado de equilibrio para el componente no sistemático. Es decir nos interesa saber bajo que condiciones existe un tiempo t^* tal que si $t > t^*$ entonces:

$$V(t,k) = V(t+1,k) = V(t+2,k) = \cdots\cdots = V(k)$$

de manera que la autocovarianza se vuelve independiente del tiempo. Consideremos la ecuación

$$V(t,k) - V(t-1,k) = \Pi_Y^{t-1}\Omega\,\Pi_Y'^{\,t-k-1} = \Pi_Y^{k}\left[\Pi_Y^{t-k-1}\Omega\,\Pi'^{\,t-k-1}\right]$$

Claramente estamos hablando de un concepto de límite y lo que queremos es que:

$$\lim_{t\to\infty}\left[V(t,k) - V(t-1,k)\right] = 0$$

lo que sucede si y sólo si

$$\lim_{t\to\infty}\Pi_Y^{t-1}\Omega\,\Pi_Y'^{\,t-k-1} = \lim_{t\to\infty}\Pi_Y^{k}\left[\Pi_Y^{t-k-1}\Omega\,\Pi_Y'^{\,t-k-1}\right] = \Pi_Y^{k}\lim_{t\to\infty}\Pi_Y^{t-k-1}\Omega\,\Pi_Y'^{\,t-k-1} = 0$$

consideremos este límite expresando Π_Y en forma canónica, es decir:

$$\lim_{t\to\infty} P\Lambda^{t-k-1}P^{-1}\Omega P'^{-1}\Lambda^{t-k-1}P' = P\left[\lim_{t\to\infty}\Lambda^{t-k-1}W\Lambda^{t-k-1}\right]P'$$

donde $W = P^{-1}\Omega\, P^{T-1} = \|w_{ij}\|$. el límite de una matriz es la - matriz de los límites de sus elementos, por lo que es suficiente considerar el límite del elemento genérico de $\Lambda^{t-k-1} W \Lambda^{t-k-1}$ que es:

$$\left[\Lambda^{t-k-1} W \Lambda^{t-k-1}\right]_{ij} = (\lambda_i \lambda_j)^{t-k-1} W_{ij}$$

y $\lim (\lambda_i \lambda_j)^{t-k-1} w_{ij} = 0 \Longleftrightarrow |\lambda_i \lambda_j| < 1 \Longleftrightarrow |\lambda_i| < 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, G$
pues $|\lambda_i \lambda_j| < 1$ es válida $\forall i$ y $\forall j$.

Por lo tanto la función de autocovarianzas del sistema alcanza - un nivel estable si y solamente si todas las raices características de Π son menores que 1 en módulo; es decir si todas caen - dentro del círculo unitario.

Si el sistema es estable, el estado de equilibrio del componente no sistemático se alcanzará a través de una mezcla de ciclos y - exponenciales que se van desvaneciendo. La velocidad a la cual se alcanza dependerá del tamaño de las raices; en particular de la dominante, siendo más rápida mientras más lejana de 1 en módulo-más cercana a cero-se encuentre esta raíz.

CONDICIONES DE EQUILIBRIO PARA EL COMPONENTE SISTEMATICO

A diferencia de la función de autocovarianzas, el nivel medio de actividad del sistema dado por el componente sistemático $\overline{Y}t$ depende tanto de condiciones estructurales como coyunturales. La - existencia de un nivel medio de equilibrio, es sin embargo puramente estructural.

El que se alcancen eventualmente estos equilibrios depende de -- ambos factores.

Para analizar las condiciones de estabilidad de la estructura -- (en su componente sistemático) los estímulos exógenos serán mantenidos constantes, de manera que partimos de la siguiente ecuación:

$$\Delta \bar{Y}_t = \Pi_y^{t-1} \xi$$

donde $\xi = (\Pi_y - I_g) Y_o + \Pi_z Z_1$ que supone $\Delta Z_t = 0$ para $t > 1$.

Nos interesa determinar bajo que condiciones existe t* tal que - si t > t* entonces:

$$\bar{Y}_t = \bar{Y}_{t+1} = \cdots\cdots = \bar{Y}$$

De manera que el nivel medio de actividad se vuelve constante en el tiempo. En otras palabras nos interesa que:

$$\Delta\bar{Y}_t = \Delta\bar{Y}_{t+1} = \cdots\cdots = 0$$

Si expresamos $\Delta \bar{Y}_t = P \Lambda^{t-1} \bar{P}^1 \xi$

y tomando límites

$$\lim_{t \to \infty} \Delta \bar{Y}_t = P \left(\lim_{t \to \infty} \Lambda^{t-1} \right) \bar{P}^1 \xi$$

que se anula si y sólo si

$$\lim_{t \to \infty} \Lambda^{t-1} = 0 \iff |\lambda_i| < 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, G; \text{ pues } \Lambda \text{ es una matriz}$$

diagonal, es decir $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\} \Rightarrow \Lambda^{t-1} = \text{diag}\{\lambda_i^{t-1}\}$

<u>Por lo tanto la condición de estabilidad del componente sistemático resulta ser la misma que la del componente no sistemático.</u>

Ejemplo: Para ilustrar la FF y las condiciones de estabilidad - consideremos el ejemplo 3 anterior en el cual señalamos cuales - son las matrices Π_1 y Π_2.

La forma final en este caso es:

$$Y_t = \Pi_1^{\,t} Y_0 + \sum_{J=0}^{t-1} \Pi_1^{\,J} \Pi_2 Z_{t-J} + \sum_{J=0}^{t-1} \Pi_1^{\,J} V_{t-J} \ .$$

Por otro lado:

$$\Pi_1^{\,J} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^J & 0 & 0 \\ \alpha_1\left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^J & 0 & 0 \\ (1-\alpha_1)\left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^J & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^J \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 \\ 1-\alpha_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con esto:

$$\Pi_1^{\,J}\Pi_2 = \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^J \frac{1}{1-\alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_0 & 1+\beta_2 & -\beta_2 \\ \alpha_0\alpha_1 & \alpha_1(1+\beta_2) & -\alpha_1\beta_2 \\ \alpha_0(1-\alpha_1) & (1-\alpha_1)(1+\beta_2) & -\beta_2(1-\alpha_1) \end{pmatrix}$$

y entonces:

$$\Pi_1^J \Pi_2 Z_{t-J} = \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^J \frac{1}{1-\alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_0 + (1+\beta_2) G_{t-J} - \beta_2 G_{t-J-1} \\ \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1 (1+\beta_2) G_{t-J} - \alpha_1\beta_2 G_{t-J-1} \\ \alpha_0(1-\alpha_1) + (1-\alpha_1)(1+\beta_2) G_{t-J} - (1-\alpha_1)\beta_2 G_{t-J-1} \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$\Pi_1^t Y_0 = Y_0 \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ 1-\alpha_1 \end{pmatrix} \quad y \quad \Pi_1^J V_{t-J} = \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^J \begin{pmatrix} V_{t-J,1} \\ \alpha_1 V_{t-J,1} \\ (1-\alpha_1) V_{t-J,1} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto las ecuaciones finales son las siguientes:

$$Y_t = \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^t Y_0 + \frac{1}{1-\alpha_1} \sum_{J=0}^{t-1} \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^J \left[\alpha_0 + (1+\beta_2) G_{t-J} - \beta_2 G_{t-J-1}\right] + \sum_{J=0}^{t-1} \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^J V_{t-J,1}$$

$$C_t = \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^t \alpha_1 Y_0 + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \sum_{J=0}^{t-1} \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^J \left[\alpha_0 + (1+\beta_2) G_{t-J} - \beta_2 G_{t-J-1}\right] + \sum_{J=0}^{t-1} \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^J V_{t-J,1}$$

$$I_t = \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^t (1-\alpha_1) Y_0 + \sum_{J=0}^{t-1} \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^J \left[\alpha_0 + (1+\beta_2) G_{t-J} - \beta_2 G_{t-J-1}\right] + (1-\alpha_1) \sum_{J=0}^{t-1} \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right)^J V_{t-J,1}$$

Según estas ecuaciones, la condición de estabilidad es $\left|\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right| < 1$.

Analizaremos sin embargo la estabilidad a través de las raices de Π.

Las raices están dadas por $|\Pi_1 - \lambda I_G| = 0$; esto es

$$|\Pi_1 - \lambda I_G| = \begin{vmatrix} \frac{\beta_1}{1-\alpha_1} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_1\beta_1}{1-\alpha_1} & -\lambda & 0 \\ \beta_1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2\left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1} - \lambda\right) = 0 \iff \lambda = 0$$

o $\lambda = \frac{\beta_1}{1-\alpha_1}$

de donde

$$\lambda_1 = \frac{\beta_1}{1-\alpha_1} \quad ; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

El sistema es estable si y solamente si todas las raices de Π_1 son menores que 1 en valor absoluto; resultando en la condición:

$$\left|\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right| < 1 \iff \frac{\beta_1}{1-\alpha_1} < 1 \iff \beta_1 < 1-\alpha_1 \iff \alpha_1+\beta_1 < 1$$

pues $0 < \alpha_1 < 1$ y $\beta_1 > 0$

Por lo tanto el sistema es estable si y solamente si $\alpha_1+\beta_1 < 1$.

CAPITULO V

ESTIMACION DEL MODELO LINEAL GENERAL

Consideremos nuevamente las formas estructural y reducida de nuestro modelo.

$$BY_t + \Gamma Z_t = U_t$$

$$Y_t = Z_t \Pi + V_t$$

donde $\Pi = -B^{-1}\Gamma$ y $V_t = B^{-1}U_t$

Una vez analizado el problema de la identificación de un modelo, abordaremos ahora el problema de la estimación de parámetros.

Las técnicas de estimación al igual que las propiedades de un modelo, dependen de las características del mismo:

Analizaremos brevemente los siguientes métodos de estimación:

1. Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).
2. Mínimos Cuadrados Indirectos (MCI).
3. Variables Instrumentales (VI).
4. Mínimos Cuadrados Bietápicos (MCB).

La técnica de estimación utilizada depende entre otras cosas de las siguientes:

- Depende de los supuestos que hagamos respecto a los términos de perturbación aleatoria del modelo.

- Depende de los supuestos respecto a las variables predeterminadas.

- Depende también del tipo de ecuación a estimar: estructural o reducida.

- Depende también de si queremos estimar las ecuaciones una a una o todas las ecuaciones del modelo en forma general.

Nuestra intención en lo que respecta a este capítulo, no es profundizarnos en las técnicas de estimación; pues esto lo podemos consultar en muchos libros, por tal razón solo mencionaremos en que consiste cada una de las técnicas mencionadas líneas arriba.

MINIMOS CUADRADOS ORDINARIOS (MCO).

El MCO sirve para estimar los coeficientes de la forma reducida y la varianza del término de perturbación aleatoria t. Este método se aplica ecuación por ecuación y es uno de los más utilizados para la estimación de los parámetros de una ecuación, cuando ésta se encuentra en su forma reducida.

Antes de iniciar el análisis de este método haremos algunos supuestos, los cuales son necesarios para que se cumplan ciertas propiedades de los mínimos cuadrados. Estos supuestos son los siguientes:

Supuesto 1: <u>Permanencia Estructural.</u>

Este supuesto significa que los valores de los parámetros no cambian durante el período de observación.

Supuesto 2: Regresores no estocásticos:

Este supuesto exige que las variables explicativas sean constantes no estocásticas; su comportamiento no se sujeta a leyes probabilísticas (este supuesto excluye regresores dinámicos).

Supuesto 3: Ausencia de multicolinealidad:

Este supuesto exige la independencia lineal entre los K regresores; es decir $\rho(Z) = K$ donde Z es la matriz de las variables explicativas y ρ significa rango.

El cumplimiento de este supuesto exige que el número de observaciones sea mayor o igual que el número de parámetros ($T \geq K$).

Supuesto 4: Las perturbaciones estocásticas tienen media cero; es decir $E(V_t) = 0 \quad \forall t = 1, 2, \ldots, T$

Esto significa que en promedio, el comportamiento de la variable de respuesta (endógena) se puede estudiar a través del comportamiento de la parte sistemática de la ecuación.

Supuesto 5: Homoscedasticidad.

Este supuesto significa que las perturbaciones aleatorias tienen varianza constante en los distintos períodos de observación; es decir $Var(V_t) = \sigma^2$.

Supuesto 6: <u>No autocorrelación.</u>

Este supuesto significa que no debe existir dependencia lineal entre las perturbaciones estocásticas; es decir $E(V_t, V_s) = Cov(V_t, V_s) = 0 \quad \forall\, t \neq s$

Supuesto 7: <u>Las perturbaciones estocásticas se distribuyen como una normal</u>; es decir $V_t \sim NID(0, \sigma^2)$

En el siguiente capítulo veremos como afecta al modelo, el hecho de que no se cumpla algún supuesto de los anteriores.

ESTIMACION POR MCO.

Dado que este método se aplica ecuación por ecuación, consideremos la i-ésima ecuación del modelo en su forma reducida:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{K} Z_{ji} \Pi_j + V_i \qquad i = 1, 2, \ldots, T$$

Supongamos que tenemos T observaciones de cada variable. Matricialmente se tiene:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{21} & \cdots & Z_{K1} \\ Z_{12} & Z_{22} & \cdots & Z_{K2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{1t} & Z_{2t} & \cdots & Z_{Kt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \vdots \\ \Pi_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \\ V_K \end{bmatrix}$$

Nótese que hemos cambiado el orden usual de los súbíndices en la matriz Z. En este caso Z_{kt} corresponde a la t-ésima observación de la k-ésima variable. De esta manera las t-observaciones de - la k-ésima variable forman la k-ésima columna.

Sea $P=(P_1, P_2, \ldots, P_K)'$ el vector columna de los coeficientes - estimados, es decir $\hat{\pi}_i = P_i \quad i=1,2,\ldots,K$

Entonces $\hat{Y} = ZP$ es el vector columna de los coeficientes de regresión y $\hat{V} = Y-\hat{Y}$ es el vector columna de los residuos de la regresión.

El MCO consiste básicamente en minimizar la suma de los cuadrados residuales.

Consideremos:

$$S = \sum_{t=1}^{T} \hat{V}_t^2 = \hat{V}'\hat{V} = (Y-ZP)'(Y-ZP) = (Y'-P'Z')(Y-ZP) \qquad (V.1)$$

Sea P función lineal de Y, entonces P = CY (donde C es una matriz de dimensión K X T). Sustituyendo esto último en (V.1) nos queda:

$$S = (Y'-Y'C'Z')(Y-ZCY) = Y'(I-C'Z')(I-ZC) = Y'(I-C'Z'-ZC+C'Z'ZC)Y$$

sumando y restando el numero real $Z(Z'Z)^{-1}Z'$ obtenemos

$$S = Y'(I-C'Z'-ZC+Z(Z'Z)^{-1}Z'-Z(Z'Z)^{-1}Z'+C'Z'ZC)Y = Y'(I-Z(Z'Z)^{-1}Z')Y +$$
$$+ Y'(Z(Z'Z)^{-1}Z'-C'Z'-ZC+C'Z'ZC)Y.$$

Como el primer sumando de esta última igualdad no depende de C, sólo nos fijamos en el segundo sumando pues nos interesa encontrar C haciendo S mínima. La expresión:

$$Z(Z'Z)^{-1}Z' - C'Z' - ZC + C'Z'ZC = \left(Z(Z'Z)^{-1}Z' - C'Z'\right)\left(Z(Z'Z)^{-1}Z' - ZC\right) = A'A$$

donde $A = Z(Z'Z)^{-1}Z' - ZC$ es una matriz simétrica

Por lo tanto tenemos:

$$S = Y'\left(I - Z(Z'Z)^{-1}Z'\right)Y + Y'A'AY = Y'\left(I - Z(Z'Z)^{-1}Z'\right)Y + (AY)'AY$$

Pero $(AY)'AY = Y'A'AY$ es la suma de los cuadrados de los elementos de AY cuyo valor mínimo (cero) se alcanza cuando $A = 0$; es decir $Z(Z'Z)^{-1}Z' = ZC$.

Esta última igualdad nos permite calcular el vector de parámetros estimado P. Es decir:

$$Z(Z'Z)^{-1}Z' = ZC \Longleftrightarrow Z'Z(Z'Z)^{-1}Z' = Z'ZC \Longleftrightarrow Z' = Z'ZC \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (Z'Z)^{-1}Z' = C \Longleftrightarrow (Z'Z)^{-1}Z'Y = CY \Longleftrightarrow (Z'Z)^{-1}Z'Y = P$$

$$\therefore \quad P = (Z'Z)^{-1} Z'Y$$

Esta última igualdad (V.2) representa el estimador mínimo cuadrático que minimiza la suma de los cuadrados residuales.

MEDIA Y VARIANZA DE P.

El vector de parámetros de la regresión está dado por (V.2). Si las variables explicativas de la matriz Z, son todas ellas exógenas entonces P resulta ser insesgado como se muestra a continuación:

$$P = (Z'Z)^{-1}Z'Y = (Z'Z)^{-1}Z'(Z\pi + V) = \pi + (Z'Z)^{-1}Z'V$$

tomando esperanzas tenemos:

$$E(P) = E(\pi + (Z'Z)^{-1}Z'V) = \pi$$
$$\therefore\ E(P) = \pi$$

Estimación de σ^2.

En nuestro modelo estimado tenemos:

$$\hat{V} = Y - ZP = Y - Z(Z'Z)^{-1}Z'Y = (I_T - N)Y = MY$$

donde : $N = Z(Z'Z)^{-1}Z'$ y $M = I_T - N$

Por otro lado tenemos:

$$NZ = Z(Z'Z)^{-1}Z'Z = Z \quad ; \quad MZ = (I_T - N)Z = Z - Z = 0$$
$$\therefore\ \hat{V} = M(Z\pi + V) = (MZ)\pi + MV = MV \sim N(0, \sigma^2 M)$$
$$S(P) = (Y - ZP)'(Y - ZP) = \hat{V}'\hat{V} = V'MV$$
$$\therefore\ \frac{1}{\sigma^2} V'MV = \frac{1}{\sigma^2} S(P) \sim \chi^2_{T-K} \quad y \quad E\left(\frac{1}{\sigma^2} S(P)\right) = T-K$$

$$\therefore\ E\left(\frac{1}{T-K} S(P)\right) = \sigma^2$$

∴ El estimador MCO de la varianza está dado por:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S(P)}{T-K} = \frac{\hat{V}'\hat{V}}{T-K} \qquad \text{(V.4)}$$

Por otro lado tenemos lo siguiente:

$$Var\ P = E\left[(P-E(P))(P-E(P))'\right] = E\left[(P-\pi)(P-\pi)'\right] = E\left[(Z'Z)^{-1}Z'V\right]\left[V'Z(Z'Z)^{-1}\right] =$$

$$= (Z'Z)^{-1}Z'E(VV')Z(Z'Z)^{-1} = \sigma^2(Z'Z)^{-1}$$

$$\therefore\ Var\ P = \sigma^2(Z'Z)^{-1} \qquad \text{(V.5)}$$

Por lo tanto según (V.3) y V.5) nuestro vector de parámetros estimados tiene la siguiente distribución:

$$P \sim N\left(\pi, \sigma^2(Z'Z)^{-1}\right)$$

donde $\sigma^2(Z'Z)^{-1}$ es la matriz de covarianzas de P.

<u>Sesgo y consistencia de P.</u>

Las propiedades de sesgo y consistencia de P se resumen en las siguientes tablas.

PROPIEDADES DE SESGO.

Zt \ Vt	INDEPENDENCIA SERIAL	AUTOCORRELACION
Exógena	Si	No
Endógena con retardo.	No	No

PROPIEDADES DE CONSISTENCIA

Zt \ Vt	INDEPENDENCIA SERIAL	AUTOCORRELACION
Exógena	Si	Si
Endógena con retardo.	Si	No

<u>Teorema de Gauss-Markov:</u> El estimador P dado por (V.2) es el mejor estimador lineal, insesgado.

Demostración:

Sea P* otro estimador de π tal que P* es también función lineal de Y, es decir $P^* = C^*Y$ (C^* matriz de dimensión K X T).

Sea $C = C^* - (Z'Z)^{-1}Z'$ entonces

$$P^* = C^*Y = (C + (Z'Z)^{-1}Z')Y = (C + (Z'Z)^{-1}Z')(Z\pi + V) =$$
$$= (CZ + I)\pi + (C + (Z'Z)^{-1}Z')V$$

Tomando esperanzas tenemos:

$E(P^*) = (CZ+I)\pi = \pi \Longleftrightarrow CZ = 0_{KXK}$ (pues estamos suponiendo que P* es insesgado).

$$\therefore P^* = \pi + (C + (Z'Z)^{-1}Z')V$$

Calculando la varianza de P* obtenemos:

$$\mathrm{Var}\ P^{*} = \mathrm{Var}\left[C + (Z'Z)^{-1}Z'\right]V = \left[C + (Z'Z)^{-1}Z'\right]E(VV')\left[C' + Z(Z'Z)^{-1}\right] =$$

$$= \sigma^2\left[C + (Z'Z)^{-1}Z'\right]\left[C' + Z(Z'Z)^{-1}\right] = \sigma^2\left[CC' + CZ(Z'Z)^{-1} + (Z'Z)^{-1}Z'C' + (Z'Z)^{-1}\right] =$$

$$= \sigma^2 CC' + \sigma^2 (Z'Z)^{-1} \geq \sigma^2 (Z'Z)^{-1} = \mathrm{Var}\ P$$

$\therefore$ Var P* $\geq$ Var P

La igualdad se cumple si $C \equiv \underline{O}$ (matriz cero).

$\therefore$ P es de varianza mínima.

MINIMOS CUADRADOS INDIRECTOS (MCI).

La técnica MCO resulta adecuada cuando se quiere estimar una ecuación en su forma reducida. Sin embargo una ecuación estructural estimada por MCO, por lo general no proporciona estimadores consistentes ni insesgados. El método MCI es adecuado para estimar los parámetros de una ecuación estructural cuando dicha ecuación está "exactamente identificada"; es decir cuando el número de variables predeterminadas excluidas en la i-ésima ecuación es igual al número de endógenas incluidas menos uno.

Consideremos las ecuaciones de consumo e ingreso ya tratadas a lo largo de este trabajo.

$$Y_t = C_t + I_t \qquad \text{(V.6)}$$

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + U_t \qquad \text{(V.7)}$$

Cuyas ecuaciones en su forma reducida son respectivamente:

$$Y_t = \frac{1}{1-\beta}\,(\alpha + i_t + U_t) \text{ - - - - - - - - - - - - - - - - } (V.8)$$

$$C_t = \frac{1}{1-\beta}\,(\alpha + \beta i_t + U_t) \text{ - - - - - - - - - - - - - - - } (V.9)$$

La ecuación (V.8) muestra la dependencia entre Y_t y U_t. Esta dependencia repercute en las propiedades de los estimadors. Vea mos porque.

Expresando las ecuaciones (V.6) y (V.7) como desviaciones con respecto a la media obtenemos:

$$Y_t - \bar{Y} = C_t - \bar{C} + i_t - \bar{i}$$
$$C_t - \bar{C} = \beta(Y_t - \bar{Y}) + U_t - \bar{U}$$

Para la segunda de estas igualdades tenemos:

$$(C_t-\bar{C})(Y_t-\bar{Y}) = \beta(Y_t-\bar{Y})^2 + (U_t-\bar{U})(Y_t-\bar{Y}) \iff \sum(C_t-\bar{C})(Y_t-\bar{Y}) =$$
$$= \beta\sum(Y_t-\bar{Y})^2 + \sum(U_t-\bar{U})(Y_t-\bar{Y}) \Rightarrow \hat{\beta} = \beta + \frac{\sum(Y_t-\bar{Y})(U_t-\bar{U})}{\sum(Y_t-\bar{Y})^2} =$$
$$= \beta + \frac{m_{yu}}{m_{yy}}.$$

Como Yt es dependiente de Ut entonces $M_{yu} \neq 0$ y asimismo $\frac{m_{yu}}{m_{yy}} \neq 0$

Así que $E(\hat{\beta}) \neq \beta$; esto significa que la estimación de β por MCO no es insesgada a menos que $E\left(\frac{m_{yu}}{m_{yy}}\right) = 0$

Este problema se resuelve aplicando mínimos cuadrados indirectos (MCI), el cual proporciona estimadores consistentes e insesgados de los parámetros de una ecuación en su forma reducida cuando dicha ecuación está exactamente identificada. Este método consiste básicamente en deducir las estimaciones de los parámetros de una ecuación a partir de la estimación de la forma reducida.

Analizaremos el caso general.

Consideremos por ejemplo la primera ecuación de nuestro modelo (aunque puede ser cualquier otra).

$$Y_1 + \beta_2 Y_2 + \cdots + \beta_H Y_H + \gamma_1' Z_1 + \gamma_2' Z_2 + \cdots + \gamma_J' Z_J = U_1 \qquad \text{(V.10)}$$

aquí suponemos que:

a) Se cumple normalización, es decir $\beta_{11} = 1$.

b) Hemos reordenado la ecuación de tal manera que las G_1 variables endógenas que aparecen sean las H primeras variables y las K_1 variables predeterminadas que aparecen sean las J primeras variables. Convenimos pues en que $G_1 = H$ y $K_1 = J$

Haciendo una regresión de las Y_i $(i = 1,2,\ldots,H)$ sobre las Z_k $(k = 1,2,\ldots K)$ obtenemos los coeficientes estimados P_{ik}.

A partir de estas estimaciones podemos deducir estimaciones de $\beta_2,\ldots,\beta_H$ y $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_J'$ resolviendo un sistema de ecuaciones. Es decir obtenemos $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$ a partir del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -\hat{\gamma}_1 = P_{11} + \sum_{i=2}^{H} \hat{\beta}_i P_{i1} \\ -\hat{\gamma}_2 = P_{12} + \sum_{i=2}^{H} \hat{\beta}_i P_{i2} \\ \vdots \\ -\hat{\gamma}_J = P_{1J} + \sum_{i=2}^{H} \hat{\beta}_i P_{iJ} \end{array}\right\} \text{-----------------(A)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = P_{1,J+1} + \sum_{i=2}^{H} \hat{\beta}_i P_{i,J+1} \\ \vdots \\ 0 = P_{1K} + \sum_{i=2}^{H} \hat{\beta}_i P_{iK} \end{array}\right\} \text{-----------------(B)}$$

Podemos expresar la primera ecuación de un modelo en su forma -- estructural mediante la expresión:

$$Y_1 + \beta_2 Y_2 + \cdots + \beta_H Y_H + \gamma_1 Z_1 + \gamma_2 Z_2 + \cdots + \gamma_J Z_J = U_1 \quad \text{--------------(V.11)}$$

Sustituyendo cada una de las Yi por su correspondiente expresión de la forma reducida tendremos a (V.11) en términos de P_{iJ} ; -- donde las P_{iJ} son los estimadores MCO de π_{iJ} en la forma reducida de la ecuación considerada.

Los subsistemas (A) y (B) representan las ecuaciones que igualan a cero los coeficientes que resultan de factorizar las Zi en -- (V.11).

Es decir, la expresión:

$$Y_i = \sum_{J=1}^{K} P_{iJ} Z_J \quad \text{-----------------(V.12)}$$

Se sustituye en (V.11) para obtener:

$$\sum_{J=1}^{K} P_{1J} Z_J + \beta_2 \sum_{J=1}^{K} P_{2J} Z_J + \cdots + \beta_H \sum_{J=1}^{K} P_{HJ} Z_J + \gamma_1 Z_1 + \cdots + \gamma_J Z_J = U_1$$

asociando adecuadamente obtenemos:

$$(P_{11}+\beta_2 P_{21}+\cdots+\beta_H P_{H1}+\gamma_1)Z_1+(P_{12}+\beta_2 P_{22}+\cdots+\beta_H P_{H2}+\gamma_2)Z_2+$$
$$+(P_{1J}+\beta_2 P_{2J}+\cdots+\beta_H P_{HJ}+\gamma_J)Z_J = U_1$$

Ahora bien; suponiendo la independencia lineal entre las Zi, una combinación lineal igualada a cero obliga a que los coeficientes respectivos de las Zi son todos iguales a cero; es decir:

$$\begin{array}{lcl}
P_{11}+\beta_2 P_{21}+\cdots+\beta_H P_{H1}+\gamma_1=0 & \Longleftrightarrow & P_{11}+\beta_2 P_{21}+\cdots+\beta_H P_{H1}=-\gamma_1\\
P_{12}+\beta_2 P_{22}+\cdots+\beta_H P_{H2}+\gamma_2=0 & \Longleftrightarrow & P_{12}+\beta_2 P_{22}+\cdots+\beta_H P_{H2}=-\gamma_2\\
\vdots & & \vdots\\
P_{1J}+\beta_2 P_{2J}+\cdots+\beta_H P_{HJ}+\gamma_J=0 & \Longleftrightarrow & P_{1J}+\beta_2 P_{2J}+\cdots+\beta_H P_{HJ}=-\gamma_J
\end{array}$$

Este sistema genera el subsistema (A) es decir:

$$\left.\begin{array}{l}
-\hat{\gamma}_1 = P_{11}+\sum_{i=2}^{H}\hat{\beta}_i P_{i1}\\
\vdots\\
-\hat{\gamma}_J = P_{1J}+\sum_{i=2}^{H}\hat{\beta}_i P_{i2}
\end{array}\right\} \text{-----------------} (A)$$

Un razonamiento análogo nos permite calcular (B) recordando que $\hat{\gamma}_{J+1}$, $\hat{\gamma}_{J+2}$, ..., $\hat{\gamma}_k$ son iguales a cero.

Si la ecuación está exactamente identificada (K-J = H-1) el sub sistema (B) que consta de K-J ecuaciones podrá resolverse para los H-1 parámetros $\beta_2,\ldots,\beta_H$ y obtener así $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, ..., $\hat{\gamma}_j$ de (A). Sin embargo cuando la ecuación está sobreidentificada debemos aplicar otro método que veremos más adelante.

Ejemplo: las ecuaciones (V.8) y (V.9) expresadas como desviaciones con respecto a la media se transforman en:

$$Y_t - \bar{Y} = \frac{1}{1-\beta}(i_t - \bar{i}) + \frac{1}{1-\beta}(u_t - \bar{u})$$

$$C_t - \bar{C} = \frac{\beta}{1-\beta}(i_t - \bar{i}) + \frac{1}{1-\beta}(u_t - \bar{u})$$

Aplicando MCO a cada una de las igualdades anteriores para estimar los coeficientes respectivos obtenemos:

$$\widehat{\left(\frac{1}{1-\beta}\right)} = \frac{\Sigma(Y_t - \bar{Y})(i_t - \bar{i})}{\Sigma(i_t - \bar{i})^2} = \frac{m_{yi}}{m_{ii}} \text{ -------------- (V.13)}$$

$$\widehat{\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)} = \frac{\Sigma(C_t - \bar{C})(i_t - \bar{i})}{\Sigma(i_t - \bar{i})^2} = \frac{m_{ci}}{m_{ii}} \text{ -------------- (V.14)}$$

Las dos estimaciones de β diferentes son consistentes si se cumple:

$$\widehat{\frac{1}{1-\beta}} - \widehat{\frac{\beta}{1-\beta}} = 1 \Longleftrightarrow m_{yi} - m_{ci} = m_{ii}$$

Demostración: Consideremos la ecuación (V.6) expresada como desviaciones con respecto a la media. Es decir:

$$Y_t - \bar{Y} = C_t - \bar{C} + i_t - \bar{i} \Longleftrightarrow \Sigma(Y_t - \bar{Y})(i_t - \bar{i}) = \Sigma(C_t - \bar{C})(i_t - \bar{i}) +$$

$$+ \Sigma(i_t - \bar{i})^2 \Longleftrightarrow m_{yi} = m_{ci} + m_{ii} \Longleftrightarrow m_{yi} - m_{ci} = m_{ii}$$

que era lo que se quería demostrar. De esta manera obtenemos la misma estimación de β en (V.13) y (V.14).

Por otro lado el coeficiente estimado P_1 de la forma reducida - está dado por:

$$P_1 = \frac{m_{ci}}{m_{ii}} \Longleftrightarrow \frac{\hat{\beta}}{1-\hat{\beta}} = P_1 \Longleftrightarrow \hat{\beta} = \frac{P_1}{1+P_1} \Longleftrightarrow \frac{m_{ci}}{m_{ci}+m_{ii}} = \frac{m_{ci}}{m_{yi}}$$

$$\therefore \hat{\beta} = \frac{m_{ci}}{m_{yi}} \qquad \text{(V.15)}$$

Por lo tanto la estimación por MCI se puede calcular a partir - del cociente de momentos, aunque $\hat{\beta}$ dada por (V.15) resulta con-- sistente pero no necesariamente insesgada.

METODO DE VARIABLES INSTRUMENTALES (VI)

El método de las variables instrumentales (VI) al igual que MCI se aplica solo a ecuaciones "exactamente identificadas" y produce estimadores consistentes aunque no necesariamente insesgados. Por lo tanto parece que la única diferencia entre MCI y VI es - la diferencia de método; es decir la manera de conseguir un estimador (digamos $\hat{\beta}$), pues ambos métodos llegan al mismo estima-- dor.

El método de VI consiste fundamentalmente en utilizar una variable que sea independiente de la perturbación aleatoria (es de-- cir una variable predeterminada) para calcular los momentos respectivos.

La manera general de tratar la estimación por VI es considerar una ecuación cualquiera del modelo (digamos la primera)

$$Y_1 + \beta_2 Y_2 + \cdots + \beta_H Y_H + \gamma_1 Z_1 + \cdots + \gamma_J Z_J = u_1$$

En la cual tenemos H-1 coeficientes β y J coeficientes γ a estimar.

Para conseguir tales estimaciones necesitamos H-1+J ecuaciones; estas ecuaciones las construimos formando los momentos con las variables predeterminadas $Z_1, Z_2, \ldots, Z_j$ que son independientes con U. Por lo tanto estas variables pueden considerarse instrumentales con respecto a ellas mismas. Para los productos cruzados incluimos las variables $Z_{j+1}, Z_{j+2}, \ldots, Z_k$ en lugar de las endógenas $Y_1, Y_2, \ldots, Y_H$.

De esta manera formamos las H-1+J ecuaciones siempre y cuando haya exactamente las suficientes variables predeterminadas excluidas que se puedan utilizar como instrumentales en lugar de las endógenas incluidas, es decir si K-J = H-1. La solución de tales ecuaciones dará las estimaciones por VI que son análogas a las estimaciones por MCI.

EJEMPLO: Considerese la ecuación:

$$C_t - \bar{C} = \beta(Y_t - \bar{Y}) + (U_t - \bar{U})$$

Calculando los momentos para Y_t obtenemos

$$\sum (C_t - \bar{C})(Y_t - \bar{Y}) = \beta \sum (Y_t - \bar{Y})^2 + \sum (Y_t - \bar{Y})(U_t - \bar{U})$$

es decir $m_{CY} = \beta m_{YY} + m_{YU}$

como Y es dependiente de $U \Rightarrow m_{YU} \neq 0$, entonces $\hat{\beta} \neq \frac{m_{CY}}{m_{YY}}$

Esto último significa que $\hat{\beta}$ no es insesgada a menos que $E\left(\frac{m_{yu}}{m_{yy}}\right)=0$

Sin embargo considerando la ecuación (V.6) en la que i_t es una variable exógena podemos calcular los momentos para Y_t utilizando i_t. Es decir i_t se utiliza como variable instrumental para obtener:

$$\sum(c_t-\bar{c})(i_t-\bar{i})=\beta\sum(Y_t-\bar{Y})(i_t-\bar{i})+\sum(U_t-\bar{U})(i_t-\bar{i})\Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow m_{ci}=\beta m_{yi}+m_{ui}=\beta m_{yi}$ (debido a la independencia entre U e i).

Por lo tanto se tiene

$$\hat{\beta}=\frac{m_{ci}}{m_{yi}} \qquad \text{(V.16)}$$

La ecuación (V.16) es la misma que (V.15); es decir, el estimador β obtenido por MCI es el mismo que se obtiene por VI.

Si la ecuación está sobreidentificada (K-J>H-1) entonces se aplica el método de los Mínimos Cuadrados Bietápicos (MCB) que a continuación analizaremos.

MINIMOS CUADRADOS BIETAPICOS (MCB)

Cuando una ecuación del modelo está sobreidentificada (K-J H-1) no sabremos cuales de las variables predeterminadas escoger para utilizarlas como variables instrumentales. Este problema se resuelve utilizando el método de MCB que como su nombre lo indica, se realiza en dos etapas.

El desarrollo de este método es el siguiente:

La forma estructural de un modelo está dada por la expresión:

$$BY_t + \Gamma Z_t = U_t \quad \text{------------------} \quad (V.17)$$

Sin embargo cuando iniciamos el estudio de un modelo la ecuación (V.17) aparece en la forma

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{t1} & z_{11} & z_{21} & \cdots & z_{K1} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{t2} & z_{12} & z_{22} & \cdots & z_{K2} \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ y_{1t} & y_{2t} & \cdots & y_{tt} & z_{1t} & z_{2t} & \cdots & z_{Kt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{t1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \beta_{1t} & \beta_{2t} & \cdots & \beta_{tt} \\ \gamma_{11} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{K1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \gamma_{1t} & \gamma_{2t} & \cdots & \gamma_{Kt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_t \end{bmatrix}$$

o en forma más compacta como:

$$y_t = (Y_t\,, Z_t)\begin{pmatrix} \beta_t \\ \gamma_t \end{pmatrix} + U_t \quad \text{------------------} \quad (V.18)$$

Donde Y_t es la matriz de variables endógenas, Z_t es la matriz de variables predeterminadas (en estas dos matrices aparecerán muchos ceros), β_t y Γ_t son los coeficientes respectivos de Y_t y Z_t: U_t es el vector aleatorio y Y_t es el vector de variables endógenas para el cual se construye el modelo.

Por otro lado la ecuación $Y = -B^{-1}\Gamma Z + U$ nos muestra que $EY = -B^{-1}\Gamma Z$.

La matriz $E\,Y_t$ es entonces la submatriz de EY que corresponde a las variables dependientes de el lado derecho de (V.18). Esta ecuación la podemos expresar en la forma siguiente:

$$y_t = (EY_t, Z_t)\begin{pmatrix}\beta_t \\ \gamma_t\end{pmatrix} + u_t + (Y_t - EY_t)\beta_t \quad \text{(V.19)}$$

La matriz $(E\ Y_t,\ Z_t)$ es no estocástica, pues la aleatoriedad - de Y_j se elimina con el operador esperanza. Por otro lado los elementos de perturbación en (V.19) tienen media cero, varianza constante y no autocorrelacionados.

El problema es que $E\ Y_t$ en virtud de ser una submatriz de EY, - es deconocida. Para estimar EY aplicamos MCO a cada ecuación del modelo en su forma reducida. Dadas las propiedades de la - matriz Z, EY resulta ser la mejor aproximación.

Consideremos por ejemplo la primera columna de Y, la cual puede escribirse como:

$$y_1 = Z(Z'Z)^{-1}Z'Y_1 + W_1$$

donde $W_1 = MY_1$ es el vector residual MCO de la primera ecuación en su forma reducida y $M = I - Z\ (Z'Z)^{-1}Z'$.

De manera general tenemos:

$$(y_1, y_2, \ldots y_t) = Z(Z'Z)^{-1}Z'(Y_1, Y_2, \ldots Y_t) + (W_1, W_2, \cdots, W_t)$$

o en forma más compacta como

$$Y = ZP + W$$

donde: $P = (Z'Z)^{-1}Z'Y$ y $W = MY$

El estimador MCO de EY es entonces $ZP = Y - W \Longleftrightarrow ZP_t = Y_t - W_t$

donde $P_t = (Z'Z)^{-1}Z'Y_t$ y $W_t = M\ Y_t$

Tenemos entonces lo siguiente:

<u>1ª etapa:</u> la primera etapa del metodo MCB consiste en aplicar MCO a cada ecuación en su forma reducida, para conocer $E\ Y_t$ y reemplazarla en la ecuación (V.19) por

$$y_t = (Y_t - W_t, Z_t)\begin{pmatrix} \beta_t \\ \gamma_t \end{pmatrix} + u_t + W_t\beta_t \qquad \text{(V.20)}$$

<u>2ª etapa:</u> la segunda etapa del método MCB consiste en aplicar MCB a (V.20) para obtener estimadores b_t, c_t de β_t y Γ_t.

Esto significa que debemos resolver las ecuaciones normales.

$$\begin{pmatrix} (Y_t - W_t)' y_t \\ Z'_t y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Y_t - W_t)'(Y_t - W_t) & (Y_t - W_t)' Z_t \\ Z'_t (Y_t - W_t) & Z'_t Z_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_t \\ c_t \end{pmatrix}$$

Como $Z'_t\ W_t$ es una matriz cero, pues es una submatriz de $Z'_t = Z'M\ Y_t = 0$; utilizamos este resultado para obtener

$$(Y_t - W_t)'(Y_t - W_t) = (Y_t - W_t)' Z P_t = Y'_t Z P_t = Y'_t (Y_t - W_t) =$$
$$= Y'_t Y_t - Y'_t W_t = Y'_t Y_t - (Z P_t + W_t) W_t = Y'_t Y_t - W'_t W_t \qquad \text{(V.21)}$$

Este último resultado lo sustituimos en (V.20) para obtener:

$$\begin{pmatrix} (Y_t - W_t)' y_t \\ Z'_t y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y'_t Y_t - W'_t W_t & Y'_t Z_t \\ Z'_t Y_t & Z'_t Z_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_t \\ c_t \end{pmatrix} \qquad \text{(V.22)}$$

Este último resultado muestra que la única diferencia con las ecuaciones normales ordinarias (MCO) es la corrección de las sumas de cuadrados y productos de las variables dependientes por medio de MCO a los residuos de la forma reducida.

CAPITULO VI

EVALUACION DEL MODELO LINEAL

La calidad de los resultados tanto teóricos como prácticos, que puede ofrecer un modelo estimado está en función directa de la calidad estadística de los estimadores de sus parámetros. La evaluación econométrica de un modelo consiste precisamente en analizar la calidad del modelo estimado. Por tal razón una vez analizado el problema de la estimación pasamos ahora al tema de la evaluación del modelo.

Analizaremos los siguientes puntos:

1. Coeficiente de Determinación.
2. Multicolinealidad.
3. Heteroscedasticidad.
4. Autocorrelación.

COEFICIENTE DE DETERMINACION

Consideremos el modelo $Y = \beta Z + U = \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + U$

El segundo momento de una distribución nos da una medida de su dispersión, si la distribución depende de sus dos primeros momentos como es el caso de la normal; este segundo momento y la media determinan la distribución. Tenemos además diferentes formas de medir este momento: alrededor de cero, de la media o de algún otro punto.

Uno de los supuestos que hicimos al hablar de la técnica MCO es que los términos de perturbación tengan una distribución normal. Partiendo de este supuesto consideremos el segundo momento muestral alrededor del cero de la variable dependiente como medida de su variabilidad.

$$\sum_{t=1}^{T} Y_t^2 = Y'Y \quad \text{------------------} \quad (VI.1)$$

La ecuación (V.5) del capítulo anterior es:

$$S = \sum_{t=1}^{T} \hat{V}_t^2 = Y'\left[I_T - Z(Z'Z)^{-1}Z'\right]Y = Y'(I_T - N)Y = Y'MY$$

es decir $N = Z\ (Z'Z)^{-1}Z'$ $\quad M = I_T - N = I_T - Z\ (Z'Z)^{-1}Z'$

Notemos que $N + M = I_T$. entonces

$$Y'Y = Y'I_T Y = Y'(N+M)Y = Y'NY + Y'MY$$

Por otro lado también tenemos:

$$Y = (N+M)Y = NY + MY = \hat{Y} + \hat{u}$$

donde $\hat{Y} = Z\hat{\beta} = Z\,(Z'Z)^{-1}Z'\,Y = NY$ $\quad$ y

$$\hat{u} = Y - Z\hat{\beta} = Y - \hat{Y} = (I_T - N)Y = MY$$

Los segundos momentos muestrales alrededor de cero de $\hat{Y}$ y $\hat{U}$ son respectivamente:

$$\hat{Y}'\hat{Y} = Y'NY \quad y \quad \hat{U}'\hat{U} = U'MU = Y'MY$$

En virtud de la simetría e idempotencia de N y M

Por lo tanto la ecuación (VI.1) puede expresarse como:

$$Y'Y = \hat{Y}'\hat{Y} + \hat{U}'\hat{U} \quad \text{-------------(VI.2)}$$

Esta última ecuación expresa la variabilidad de Y en función de dos componentes:

a) Uno que da la variabilidad de Y explicada por su relación lineal con X, $(\hat{Y}'\hat{Y})$.

b) Otro que da la variabilidad de Y no explicada por su relación lineal con X , (U'U).

Dividiendo la ecuación (VI.2) por el término Y'Y obtenemos:

$$\frac{Y'Y}{Y'Y} = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y} + \frac{\hat{U}'\hat{U}}{Y'Y} \Longleftrightarrow \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y} + \frac{\hat{U}'\hat{U}}{Y'Y} = 1 \quad \text{----------(VI.3)}$$

DEFINICION VI.1. <u>El coeficiente de determinación R^2</u> se define como la proporción de la variabilidad de Y explicada por su relación lineal con las k variables predeterminadas Z, es de-- cir:

$$R^2 = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y} = 1 - \frac{\hat{U}'\hat{U}}{Y'Y} \quad \text{--------------(VI.4)}$$

Dado que tanto $Y'Y$, $\hat{Y}'\hat{Y}$ y $\hat{u}'\hat{u}$ son mayores que cero, la ecuación (VI.2) nos dice que $Y'Y \geq \hat{Y}'\hat{Y}$. Así que $0 \leq R^2 \leq 1$. Aún más la fórmula (VI.4) nos dice que mientras mayor relación lineal exista entre Y y Z, R^2 se acercará más a 1 y viceversa. Por ello se dice que R^2 es una medida de la bondad del ajuste de la relación lineal entre Y y Z.

El estadístico para la prueba de significancia y de la regresión:

$$H_0 : \beta = 0 \quad V\cdot S \quad H_1 : \beta \neq 0$$

Se puede expresar como una función de R^2. El estadístico es el ANOVA*

$$h = \frac{\hat{\beta}' Z' Z \hat{\beta}}{K S^2} \sim F(K, T-K) \qquad \text{bajo Ho.}$$

y como $\hat{Y} = Z\hat{\beta}$ y $S^2 = \hat{u}'\hat{u}/(T-K)$, con lo que

$$h = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{\hat{u}'\hat{u}} \cdot \frac{T-K}{K} = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}/Y'Y}{\hat{u}'\hat{u}/Y'Y} \cdot \frac{T-K}{K} = \frac{R^2}{1-R^2}\,\frac{T-K}{K} \text{ ---------- (VI.5)}$$

Con lo que si R^2 crece, h crece y tenderá a caer en la región crítica, rechazando la hipótesis nula y viceversa.

Sin embargo R^2 presenta el problema de crecer siempre o al menos no decrecer al incluir más regresores, ya sea que estos -- sean o no adecuados.

Para corregir este problema se ha definido el coeficiente de determinación corregido $\bar{R}^2$ de la siguiente manera:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\hat{u}'\hat{u}/(T-K)}{Y'Y/(T-1)} = 1 - (1-R^2)\frac{T-1}{T-K} \text{ ---------- (VI.6)}$$

(*) Podría considerarse más bien como una técnica de prueba.

Al dividir por T-K y T-1 respectivamente obtenemos estimadores insesgados, pues esto provee una corrección en los grados de libertad.

De esta manera $\bar{R}^2$ puede decrecer al incluir más regresores, ya que si bien el crecimiento de R^2 lo "empuja hacia arriba", esto se ve compensado por el factor $\frac{T-1}{T-K}$ al incrementarse K.

La raíz de R^2 positiva se define como coeficiente de correlación múltiple.

DEFINICION VI.2 <u>El coeficiente de determinación parcial</u> de una o un subgrupo de variables se define como la proporción de la variabilidad no explicada por los restantes regresores de la variable dependiente que es explicada por este subgrupo. En otras palabras es el coeficiente de determinación dado que ya se incluyeron las demás variables.

Ejemplo:

$R^2_{Y,X_2}/X_1$ es el coeficiente de determinación parcial entre Y y X_2 cuando ya se ha incluido X_1; es decir, que tanto explica X_2 de la variabilidad de Y no explicada por X_1.

Los <u>coeficientes de correlación parcial</u> se definen como las raices positivas de los correspondientes coeficientes de determinación parcial.

En el ejemplo anterior tenemos el coeficiente de determinación parcial entre Y y X_2 cuando ya se ha incluido X_1 dado por

$$R^2_{YX_2}/X_1 = 1 - \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{Y'MY} = 1 - \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{\hat{u}_1'\hat{u}_1}$$

Donde:

$E = M_1 U$ y $M_1 = I_T - N_1$ es una matriz simétrica e idempotente que además anula Z_1; es decir $M_1 Z_1 = 0$

Hemos partido del modelo $Y = \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + U$

MULTICOLINEALIDAD

Al hablar de la multicolinealidad nos estamos refiriendo a la dependencia lineal entre los regresores durante el período muestral. La multicolinealidad entre las variables puede ser alta y exacta o bien alta pero no exacta.

Consideremos la matriz Z'Z.

Cuando det (Z'Z) = 0 decimos que existe una dependencia lineal exacta entre los regresores, en tal caso $Z'Z)^{-1}$ no existe, por lo que no es posible estimar los parámetros.

Cuando det (Z'Z) = 0 la multicolinealidad es alta y exacta.

Por otro lado si det (Z'Z) es muy cercano a cero, entonces tendremos un tipo de multicolinealidad alta pero no exacta. En este caso es posible estimar los parámetros del modelo, pero dicha estimación es imprecisa e ineficiente; esto en el sentido de que al aumentar o quitar algunas observaciones podría traer como consecuencia cambios drásticos en los valores estimados de β.

Consideremos el modelo:

$$Y = \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + U$$

y supongamos que Z_1 y Z_2 presentan multicolinealidad inexacta. Lo que sucede en este caso es que Z_2 es tan cercana a ser función lineal de Z_1 que la regresión no es capaz de distinguir entre ambas en cuanto a su asociación lineal con Y.

Si Z_1 y Z_2 son altamente colineales, entonces las regresiones de Y sobre Z_1, Y sobre Z_2 y Y sobre Z_1 y Z_2 tienen coeficientes de determinación prácticamente iguales; pero mientras los coeficientes de Z_1 y Z_2 son "significativos" en las dos primeras regresiones, uno de los dos o ambos no lo son en la tercera.

Una consecuencia de la multicolinealidad inexacta es que nos puede llevar a conclusiones incorrectas, debido a que puede a veces no ser detectada. La multicolinealidad inexacta puede ser detectada en base a lo siguiente:

a) Estimadores ineficientes, con varianzas muy grandes y por lo tanto poco significativas.

b) A pesar de que todos, o casi todos los coeficientes sean no significativos; el estadístico ANOVA puede ser altamente significativo.

c) Estimadores imprecisos, de modo que la inclusión o exclusión de algunas variables puede causar cambios drásticos en ellos y su significancia.

El problema de la multicolinealidad puede interpretarse básicamente como un problema de falta de información; es decir, los requerimientos de información de nuestro modelo no son satisfechos por los datos.

De acuerdo a esto, la solución adecuada al problema de multicolinealidad es incorporar información téorica o empírica; aunque también existen propuestas puramente estadísticas las cuales presentan la desventaja de carecer de significado económico y serán útiles sólo si el único propósito del modelo es el de predicción.

Estas propuestas son:

- La regresión surco, que consiste en incrementar la diagonal de Z'Z.

- Componentes principales: consiste en seleccionar híbridos de la matriz Z que resuman la mayor parte de la variabilidad de las K variables involucradas.

AUTOCORRELACION

Matemáticamente podemos expresar la independencia entre las perturbaciones aleatorias como:

$$E\left(U_t, U_s\right) = 0 \quad \forall\, t \neq s$$

lo cual significa la NO autocorrelación entre dichas perturbaciones. Sin embargo y sobre todo en Series de Tiempo se presen ta la autocorrelación entre las perturbaciones estocásticas, lo que significa que no hay independencia entre las perturbaciones, de manera que

$$E(U_t, U_s) \neq 0$$

En tal caso la matriz de varianzas y covarianzas U deja de ser diagonal. Así que en presencia de autocorrelación se tiene

$$U \sim N(0, \sigma^2 \Omega)$$

siendo Ω una matriz TXT no diagonal y manteniéndose el supuesto de homoscedasticidad.

Las propiedades de sesgo y consistencia se resumen en los siguientes cuadros:

PROPIEDADES DE SESGO

Z_t \ V_t	INDEPENDENCIA SERIAL	AUTOCORRELACION
EXOGENA	SI	SI
ENDOGENA CON RETARDO	NO	NO

PROPIEDADES DE CONSISTENCIA

Z_t \ V_t	INDEPENDENCIA SERIAL	AUTOCORRELACION
EXOGENA	SI	SI
ENDOGENA CON RETARDO	SI	NO

Las consecuencias de la autocorrelación son entre otras las siguientes:

a) $V(\hat{\beta}) = \sigma^2 (Z'Z)^{-1} Z'\Omega Z (Z'Z)^{-1}$

Esto significa que $\hat{\beta}$ es ineficiente, en el sentido de que podría existir otro estimador con varianza menor que la de $\hat{\beta}$ aunque -- sigue siendo insesgado.

b) $E(\hat{\sigma}^2) = \frac{\sigma^2}{T-K} \, tr \, M\Omega$ con $M = I - Z(Z'Z)^{-1}Z'$

resultando con esto un estimador sesgado para la varianza σ^2.

El ignorar la autocorrelación al igual que la heteroscedastici-- dad trae consecuencias sobre toda la inferencia que se haga a -- partir del modelo y es por ello necesario probar si existe o no, esto es probar

$$H_0 : \text{No autocorrelación } (\Omega = I_T)$$

v.s

$$H_1 : \text{autocorrelación } (\Omega \neq I_T)$$

donde Ho es una hipótesis anidada en el modelo lineal.

Una manera de resolver el problema de la autocorrelación es considerar al término aleatorio como un proceso autorregresivo; es decir un proceso de transmisión lineal de su propia historia en un número de períodos anteriores con desviaciones aleatorias -- que pueden representarse por una perturbación homoscedástica y no autocorrelacionada. Debemos suponer que:

$$U_t = \rho_1 U_{t-1} + \rho_2 U_{t-2} + \cdots + \rho_s U_{t-s} + \varepsilon_t \quad \text{-------(VI.7)}$$

donde $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$ y S es el número de períodos de -- transmisión y donde además el polinomio $1 - \rho_1 Z - \rho_2 Z^2 - \cdots - \rho_S Z^S$ debe tener todas sus raíces mayores que 1 en valor absoluto.

Supongamos que los S coeficientes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_S$ son conocidos y consideremos la t-ésima observación del modelo.

$$Y_t = Z'_t \beta + U_t \quad \text{---------------------} \quad \text{(VI.8)}$$

así como las S anteriores

$$Y_{t-J} = Z'_{t-J} \beta + U_{t-J} \quad ; \quad 1 \leq J \leq S$$

multiplicadas por el coeficiente ρ_J respectivo y sumadas en ambos lados de la igualdad para mantener ésta,

$$\sum_{J=1}^{S} \rho_J Y_{t-J} = \sum_{J=1}^{S} \left(\rho_J Z'_{t-J} \beta_J + \rho_J U_{t-J} \right) \quad \text{----------} \quad \text{(VI.9)}$$

Restando esta última de la anterior (VI.8) obtenemos

$$Y_t - \sum_{J=1}^{S} \rho_J Y_{t-J} = Z'_t \beta - \sum_{J=1}^{S} \rho_J Z'_{t-J} \beta_J + U_t - \sum_{J=1}^{S} \rho_J U_{t-J}$$

De (VI.7) se tiene $\varepsilon_t = U_t - \sum_{J=1}^{S} \rho_J U_{t-J}$

sustituyendo y factorizando β obtenemos:

$$Y_t - \sum_{J=1}^{S} \rho_J Y_{t-J} = \left(Z_t - \sum_{J=1}^{S} \rho_J Z_{t-J} \right)' \beta + \varepsilon_t \quad \text{---------------} \quad \text{(VI.10)}$$

definimos:

$$\left.\begin{array}{l} Y_t^* = Y_t - \sum_{j=1}^{s} \rho_j Y_{t-j} \\ Z_t^* = Z_t - \sum_{j=1}^{s} \rho_j Z_{t-j} \end{array}\right\} \text{------------------(VI.11)}$$

por lo que (VI.10) se puede expresar como:

$$Y_t^* = Z_t^{*\prime} \beta + \varepsilon_t \text{ ------------------(VI.10')}$$

donde $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$ y solo falta agrupar las observaciones en el vector Y* y la matriz Z* que se pueden construir si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$, son conocidos y entonces β y σ^2 se pueden estimar por -- MCO con las características dadas por el Teorema de Gauss-Markov.

$$Y^* = Z^* \beta + \varepsilon \text{ ------------------(VI.10'')}$$

Notemos sin embargo que (VI.10") ya no tiene T observaciones sino solo T-S. Se tiene entonces una fuente de pérdida de eficiencia aunque en general es menor que la de β (MCO). Además - el problema de σ^2 se resuelve, lo que no sucede con MCO, afec-- tando toda la inferencia. Sin embargo es posible diseñar un método general que no pierda observaciones, obteniéndose Ω en forma explícita como función de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$.

Una vez obtenida Ω calculamos

$$\hat{\beta}_A = (Z'Z)^{-1} Z' \Omega Y$$

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{1}{T-K} \hat{u}' \Omega^{-1} \hat{u}$$

donde $\hat{\beta}_A \sim N(\beta, \sigma^2 V_A)$ y $V_A = (Z^{*\prime} Z^*)^{-1} = (Z' \Omega^{-1} Z)^{-1}$

además $\frac{(T-K)\hat{\sigma}_A^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(T-K)}$

La inferencia es idéntica al caso de MCO sustituyendo $\hat{\beta}_A$, $\hat{\sigma}_A^2$ y - V_A por $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}^2$ y V respectivamente.

Ahora bien, en general los parámetros $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ no serán conocidos por lo que será necesario estimarlos y sustituirlos para - la estimación de β y σ^2. Las consecuencias de esto es que los - resultados exactos de insesgamiento y distribución normal no se pueden establecer y solo son aproximaciones cuya calidad depende del tamaño de la muestra.

Para estimar el modelo con ρ_s desconocidos existen varias pro-- puestas en la literatura (hechas básicamente para errores autorregresivos de primer orden); algunas de tales propuestas son - las siguientes:

Cochrane-Orcutt hacen notar que ρ se puede estimar por MCO -- en $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$

lo que resulta en

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2} \qquad \text{(VI.12)}$$

otro procedimiento es la aplicación de mínimos cuadrados no lineales a la ecuación

$$Y_t = \sum_{j=1}^{s} \rho_j Y_{t-j} + Z_t' \beta - \sum_{j=1}^{s} Z_{t-j}' (\rho_j \beta) + \varepsilon_t$$

También Hildreth y Lu sugieren un procedimiento de rastreo -- para perturbaciones de primer orden notando que Y* y Z* son calculables dado ρ.

PRUEBAS PARA AUTOCORRELACION

Consideremos la prueba

$$H_0 : \rho = 0 \qquad \text{(no autocorrelación)}$$
$$\text{v.s} \quad H_1 : \rho \neq 0 \qquad \text{(autocorrelación positiva o negativa).}$$

Una de las pruebas más utilizadas para autocorrelación es la de Durbin Watson (DW) basada en el estadístico.

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2} \approx 2(1-\hat{\rho}) \qquad \text{(vI.12')}$$

En esta prueba se concluye que según el estadístico d:

a) Para valores de d cercanos a 2 <u>ausencia de autocorrelación.</u>

b) Si d decrece de 2 hacia cero, la autocorrelación <u>crece.</u>

Si existe autocorrelación negativa ($\rho < 0$) se utiliza el estadístico:

$$d' = 4 - d \approx 2(1+\hat{\rho})$$

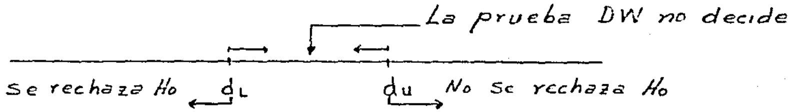
Lo que busca la prueba es ver si d o d' son significativamente diferentes de 2 como para rechazar Ho.

La tabla DW da cotas superior (du) e inferior d_L) y según esto el mecanismo de la prueba es el siguiente:

Si $d < d_L$ ($d' < d_L$) se rechaza, la hipótesis de no autocorrelación (Ho).

si $d > du$ ($d' > du$) no se rechaza Ho.

Sin embargo la prueba de Durbin-Watson presenta el inconveniente de <u>no decidir</u> respecto a rechazar o no rechazar Ho cuando sucede que $d_L < d < du$. En este caso se recurre a otras pruebas como la Razón de Von Neuman que sólo mencionamos.



HETEROSCEDASTICIDAD

Consideremos ahora la violación del supuesto de perturbaciones homoscedásticas, es decir, permitamos que las varianzas sean cambiantes a lo largo del período muestral, de forma que

$$U_t \sim NI\,(0, \sigma_t^2) \qquad t = 1, 2, \ldots, T$$

donde $\sigma_t \neq \sigma_s$ para $t \neq s$. Este fenómeno se conoce con el nombre <u>Heteroscedasticidad.</u>

La presencia de varianzas heteroscedásticas repercute en la estimación de los parámetros. Una de las consecuencias inmediatas es la pérdida de eficiencia, ya que aunque el sesgo del estimador no se ve afectado tampoco se garantiza que la varianza de dicho estimador sea mínima.

Ahora bien, siempre es posible extraer un factor multiplicativo constante a todas las varianzas de forma que podemos expresar

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 d_t^2 \quad \text{(VI.13)}$$

Con lo que $U_t \sim NI(0, \sigma^2 d_t^2)$
o bien $U \sim NI(0, \sigma^2 D)$

donde D = diag $\{ d_1^2, d_2^2, \ldots, d_T^2 \}$.

y donde estamos manteniendo el supuesto de no autocorrelación que se muestra en la diagonalidad de D.

En base a (VI.13) podemos realizar la prueba*:

$$H_0: \text{Homoscedasticidad } (D = I_T)$$
$$\text{V.S} \quad H_1: \text{Heteroscedasticidad } (D \neq I_T)$$

*) Es necesario realizar esta prueba para analizar la confiabilidad de nuestros resultados respecto a las estimaciones de los parámetros. Si Ho es rechazada tenemos evidencia de heteroscedasticidad y la evaluación económica sufrirá sus consecuencias. Por el contrario si Ho no es rechazada, ésto nos da confianza en la evaluación económica aunque no implica la aceptación de homoscedasticidad sino solamente su no rechazo.

Estamos partiendo del modelo

$$Y = Z\beta + U \qquad \text{(VI.15)}$$

Una manera de resolver el problema de la heteroscedasticidad es utilizar el método de los mínimos cuadrados ponderados, el cual consiste básicamente en construir las sumatorias $\sum_{t=1}^{T} Z_t Z_t^*$

donde $Z_t^* = Z_t - \sum_{J=1}^{S} \rho_J Z_{t-J}$

ponderando por $\frac{1}{d_t^2}$, siendo esta la única diferencia con respecto a MCO.

Las pruebas de heteroscedasticidad conocidas requieren que la forma de la heteroscedasticidad se especifique; a este respecto se tienen los siguientes supuestos:

a) El supuesto más sencillo consiste en que la heteroscedasticidad es proporcional a algunas de las variables exógenas, de forma que $d_t = Z_{tJ}$ para alguna J.

b) Otro supuesto un poco más complicado consiste en suponer a las d_t funciones conocidas de uno; varios o todos los estimadores, es decir: (Goldfield y Quandt).

$$d_t = f\left(Z_{tJ_1}, Z_{tJ_2}, \ldots Z_{tJ_r}\right);\ 1 \leq r \leq K \qquad \text{(VI.15)}$$

donde la forma de la función f y sus parámetros respectivos son conocidos.

c) Un enfoque más general consiste en suponer que solamente la forma de f es conocida pero no sus parámetros, que tienen entonces que ser estimados (Glejser).

Probablemente la prueba más usada para (VI.14) es la de Goldfield y Quandt, que requiere que la muestra sea reordenada de acuerdo a la hipótesis alternativa de manera que:

$$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \leq \cdots \leq \sigma_T^2$$

La idea de reordenar la muestra busca darle la potencia a la -- prueba, de manera que la diferencia en el tamaño de la varianza entre las primeras y las últimas observaciones sea notoria y fá cilmente detectable. Para mayores detalles de esta prueba se - puede consultar (Some Tests for Homoscedasticity, JASA, 1965).

Esta prueba se utiliza cuando la heteroscedasticidad es del ti- po (b) . Otra posible prueba para (VI.14) es la sugerida por -- Glejser, que se utiliza cuando la heteroscedasticidad es del ti po (c).

Esta prueba consiste básicamente en lo siguiente:

Consideremos la ecuación (VI.15).

Supongamos que U puede escribirse en la forma

$$U = V P_t(X) = V\{m_0 + m_1 f(X) + \cdots + m_t(f(X))^t\} \qquad \text{(VI.17)}$$

donde V es una variable aleatoria con media cero y varianza -- constante σ^2. Pt (X) es una función polinomial de orden t en la variable X (usualmente X es una de las variables que aparecen - en Z, digamos Z_j). La función f y el orden de f se suponen conocidas, pero al menos uno de los parámetros m_i es desconocido).

Además los términos en la suma de (VI.17) son no negativos, esto es $P_t(X) \geq 0$.

La función f (X_j) puede ser igual a:

a) $X_j^{1/2}$

b) $X_j^{-1/2}$

c) $\log X_j$

Se asegura que el grado de f nunca es mayor que 2.

La ecuación (VI.17) implica:

$$\sigma_u^2 = \sigma^2 \left(P_t(X) \right)^2$$

y los casos especiales de (VI.17) son

1) $m_0 \neq 0; m_1 = m_2 = \cdots = m_i = \cdots = m_t = 0$, lo que significa el caso de - Homoscedasticidad.

2) $m_i \neq 0$ para alguna i $\neq 0$ y $m_j = 0 \quad \forall j \neq i$. Este es el tipo de Heteroscedasticidad más usualmente supuesto en los li-

bros de texto. En este caso la perturbación Homoscedástica puede obtenerse usando $Y/[f(x)]_t$ como un regresor.

Tomando valor absoluto y esperanzas en (VI.17) obtenemos:

$$E(|U|) = E(|V|)P_t(X) = E(|V|)m_0 + E(|V|)m_1 f(x) + \cdots\cdots$$

$$+ E(|V|)m_i[f(X)]^i + \cdots + E(|V|)m_t[f(x)]^t \quad \text{(VI.18)}$$

La función $P_t(x) \geq 0$.

Ya que el valor de la perturbación para la t-ésima observación (U_t) es desconocido, trataremos de estimar $E(|V|)m_i$ de (VI.18) por regresión $|\hat{U}_t|$ sobre los valores $[f(X)]^i$.

$|\hat{U}_t|$ es el valor absoluto de los residuos obtenidos estimando de (VI.15) por MCO.

Desafortunadamente en:

$$|\hat{U}_t| = E(|V|)P_t(X) + |\hat{U}_t| - E(|U_t|) \quad \text{(VI.19)}$$

la perturbación $\varepsilon_t = |\hat{U}_t| - E(|U_t|)$ en general no tiene esperanza cero. Supongamos por ejemplo que U y $\hat{U}$ se distribuyen normales

$$E(\varepsilon) = E(|\hat{U}|) - E(|U|) = (\sigma_{\hat{u}} - \sigma_u)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} < 0 \quad \text{(VI.20)}$$

ya que $\sigma_{\hat{u}} < \sigma_u$ en la hipótesis nula de homoscedasticidad.

Olvidándonos del efecto de este sesgo, esperaremos que en general sea insignificante en comparación con el primer término de (VI.19). Supongamos que en la práctica las funciones P_t (X) - son de la forma

$$m_0 + m_1 X_J^{1/2} \quad ó \quad m_0 + m_1 X_J \quad ó \quad m_0 + m_1 X_J^{-1/2} \quad ó \quad m_0 + m_1 X_J^{-1} \text{ ----------- (VI.21)}$$

Pueden suceder los siguientes dos casos:

1) $E(|V|)m_0$ en VI.18 no difiere significativamente de cero - mientras que $E(|V|)m_1$ es positivo y significativo. En - este caso no se rechaza la hipótesis doble $M_1 = 0$ y $M_1 = 0$, es decir la heteroscedasticidad clásica, y aplicamos mínimos cuadrados generalizados a (VI.15) usando la hipótesis:

$$E(UU') = \sigma^2 \Omega = \sigma^2 m_1^2 \begin{bmatrix} X_{1J}^{2h} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_{2J}^{2h} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_{nJ}^{2h} \end{bmatrix}$$

donde $\sigma^2 m_1^2$ es un factor de escala y h = 1/2, 1, -1/2, -1 según la especificación de (VI.21).

2) Ambos estimadores $E(|V|)m_0$ y $E(|V|)m_1$ son significativos y $\hat{m}_0$ y $m_1 X_J$ son positivos sobre el rango relevante de valores.

En este caso no se rechaza la doble hipótesis $Mo \neq 0$ y $M_1 \neq 0$; es decir heteroscedasticidad mixta.

Esto significa que: $\sigma_u^2 = \sigma^2 (m_0 + m_1 X_J^h)^2$. La matriz de covarianzas de U puede estimarse mediante:

$$\sigma^2 \Omega^* = \sigma^2 \begin{bmatrix} (\hat{m}_0 + \hat{m}_1 X_{1J}^h)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\hat{m}_0 + \hat{m}_1 X_{2J}^h)^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\hat{m}_0 + m_1 X_{nJ}^h)^2 \end{bmatrix}$$

Donde σ^2 juega el papel de factor de escala. Esto nos lleva a los estimadores por mínimos cuadrados ponderados:

$$\beta^* = (\bar{Z}' \Omega^{*-1} \bar{Z})^{-1} \bar{Z}' \Omega^{*-1} Y$$

donde $\bar{Z}$ representa la matriz de observaciones de los regresores.

En todos los otros casos no se rechaza la hipótesis de homoscedasticidad.

Glejser argumenta que esta prueba es en general más potente que la de Goldfield y Quandt pero su argumento se basa solamente en algunos experimentos de Simulación y no es por tanto general. La prueba no requiere reordenar las observaciones pero requiere hacer dos regresiones con T observaciones cada una: la del modelo y la de los residuos.

En el modelo que presentamos en el siguiente capítulo ejemplificamos el uso de esta prueba.

CAPITULO VII

E J E M P L O

En este último capítulo presentamos un modelo que servirá para ejemplificar la teoría desarrollada en los seis anteriores capítulos. El modelo pretende relacionar y explicar las tasas de crecimiento de la inflación y los salarios, variables endógenas, en términos de la inversión privada y la tasa de crecimiento del ingreso nacional (PIB), que son tomadas como variables exógenas puras.

Los problemas de especificación económica que pueda llegar a tener el modelo las discutiremos desde un contexto más amplio en las conclusiones del trabajo. Por ahora nos interesa trabajar la teoría puramente econométrica que hemos desarrollado en los capítulos anteriores.

Los datos que usamos para la estimación fueron tomados de las citas bibliográficas [16] , [17] y [18] . *

Asimismo para las estimaciones y pruebas que se mencionan, se utilizó el Paquete Econométrico (PEM-CIDE) del M.C. Hernán Sabau.

ESPECIFICACION.

La forma estructural (FE) del modelo está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} TP_t &= \alpha_1 TS_t + \alpha_2 INP_t + U_{t1} \\ TS_t &= \beta_1 TP_{t-1} + \beta_2 TY_t + \beta_3 INP_t + U_{t2} \end{aligned}\right\} \text{------ (VIII.1)}$$

(*): Respecto a 16 solo se tomaron los datos del mes de enero del período 1960-1979.

donde las variables endógenas son

$TP_t =$ Tasa de inflación.
$TS_t =$ Tasa de salarios.

y las variables predeterminadas son

$INP_t =$ Inversión privada
$TY_t =$ Tasa de crecimiento de la renta nacional (PIB)
$TP_{t-1} =$ Variable de retardo de la tasa de inflación

La forma reducida (FR) del modelo está dada por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} TP_t &= \Pi_1 TP_{t-1} + \Pi_2 TY_t + \Pi_3 INP_t + V_{t1} \\ TS_t &= \Pi_4 TP_{t-1} + \Pi_5 TY_t + \Pi_6 INP_t + V_{t2} \end{aligned}\right\} \text{------------ (VII.2)}$$

en donde : $\Pi_1 = \alpha_1\beta_1$; $\Pi_2 = \alpha_1\beta_2$; $\Pi_3 = \alpha_1\beta_3 + \alpha_2$
$\Pi_4 = \beta_1$; $\Pi_5 = \beta_2$; $\Pi_6 = \beta_3$
$V_{t1} = U_{t1} + \alpha_1 U_{t2}$; $V_{t2} = U_{t2}$

IDENTIFICABILIDAD.

Antes de iniciar la estimación de los parámetros en (VII.2) veamos si nuestro modelo es identificable, para ello re-expresemos el sistema (VII.1) de la siguiente manera:

$$TP_t - \alpha_1 TS_t \qquad\qquad - \alpha_2 INP_t = U_{t1}$$

$$TS_t - \beta_1 TP_{t-1} - \beta_2 TY_t - \beta_3 INP_t = U_{t2}$$

o bien en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} TP_t \\ TS_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_2 \\ -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} TP_{t-1} \\ TY_t \\ INP_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{t1} \\ U_{t2} \end{pmatrix}$$

El modelo puede entonces expresarse como

$$BY_t + \Gamma Z_t = U_t$$

donde: $B = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_2 \\ -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{pmatrix}$

Según la condición de orden tenemos:

Ecuación 1: Número de ceros = $2 > 1$ = G-1

Ecuación 2: Número de ceros = $1 \geq 1$ = G-1

Por lo tanto ambas ecuaciones satisfacen la condición de orden.

La condición de rango establece la existencia de una submatriz cuadrada de tamaño G-1 cuyo determinante sea distinto de cero para la <u>identificabilidad de una ecuación.</u> Esta condición aplicada a cada una de las ecuaciones del modelo significa lo siguiente:

Ecuación 1: La condición de rango equivale a

$$\beta_1 \neq 0 \quad ó \quad \beta_2 \neq 0$$

Ecuación 2: La condición de rango equivale a

$$1 \neq 0$$

Así pues el modelo será identificable si y solo si

$$\beta_1 \neq 0 \quad ó \quad \beta_2 \neq 0$$

De acuerdo a la especificación que postulamos, esperamos que esta condición se cumpla, para que a partir de ello podamos calcular de manera única los estimadores de α_i, β_J (i = 1,2; J = 1,2,3) a partir de los estimadores de πi (i = 1,2,...,6).

ESTIMACION DE PARAMETROS.

Una vez analizada la identificabilidad del modelo, pasamos a la estimación de parámetros. Esta estimación se realizó aplicando MCO a cada ecuación de (VII.2).

$$TP_t = \pi_1 TP_{t-1} + \pi_2 TY_t + \pi_3 INP_t + V_{t1}$$

Los estimadores de los coeficientes son:

	πi	Desv. estándar	t
1.	0.53449	0.18442	2.89829
2.	-0.34441	0.13833	-2.48984
3.	16.31630	5.06749	3.21980

Si realizamos la siguiente prueba para los $\pi$is se tiene:

$$H_0 : \pi_i = 0 \quad (i = 1,2,3)$$

v.s

$$H_1 : \pi_i \neq 0 \quad (i = 1,2,3)$$

Como t calculada es mayor en valor absoluto que t de tablas - entonces se rechaza la hipótesis Ho al 5% de significancia.

Estadísticos de bondad del ajuste:

Suma de cuadrados residuales	25.48870
Varianza de la perturbación	1.69925
Coeficiente de determinación	0.58822
Coef. de determinación corregido	0.53332

Un valor de R^2 cercano a 1 significaría que efectivamente existe asociación lineal entre las variables explicativas y la explicada.

En este caso el valor obtenido de R^2 no nos permite asegurar - la existencia de tal relación lineal entre las variables involucradas en esta ecuación.

Estadísticos de autocorrelación

Durbin-Watson	2.03736
Cochrane-Orcutt	0.02728

Respecto a estos dos estadísticos se tiene lo siguiente:

Realicemos la prueba:

$H_0 : \rho = 0$ No autocorrelación

V.S.

$H_1: \rho \neq 0$ autocorrelación positiva o negativa

donde ρ tiene por estimador

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2} \text{ ------ estimador de Cochrane-Orcutt}$$

como el estimador de Cochrane-Orcutt es casi igual a cero, es - decir $\hat{\rho} \approx 0$; eso significa que el estadístico de Durbin Watson - es muy cercano a 2 (fórmula VI.12'); lo cual significa ausencia de autocorrelación, por lo que no rechazamos Ho.

Estadísticos de heteroscedasticidad.

Glejser	0.40612

Matriz proporcional de varianzas y covarianzas.

$$\begin{pmatrix} .2001450E-01 & .4812170E-02 & -.4179050E+00 \\ .4812170E-02 & .1126030E-01 & -.2976720E+00 \\ -.4179050E+00 & -.2976720E+00 & .1511220E+02 \end{pmatrix}$$

<u>COMENTARIOS.</u>

Dada la identificabilidad del modelo se tiene lo siguiente:

$$\hat{\alpha}_1 = -0.84732 \quad ; \quad \hat{\alpha}_2 = 37.672178$$

según estos valores podemos concluir lo siguiente:

$\hat{\alpha}_1$ es un valor negativo cercano al cero en comparación con $\hat{\alpha}_2$, por lo que podemos afirmar que para cada unidad de cambio en TS_t se espera que afecte relativamente poco a TPt. Por otro lado como $\hat{\alpha}_2$ estimada es un valor positivo muy grande en relación con $\hat{\alpha}_1$, se espera que cada unidad de cambio en INPt afecte mucho a TPt. En otras palabras podemos decir que los cambios en la inversión privada determinan los cambios en la tasa de inflación.

Segunda ecuación del sistema:

$$TS_t = \Pi_4 TP_{t-1} + \Pi_5 TY_t + \Pi_6 INP_t + V_{t2}$$

Los estimadores de los coeficientes son:

	Πi	Desv. estándar	t
4	-0.63080	0.22671	-2.78236
5	0.67927	0.23771	2.85759
6	25.20760	8.93681	2.82065

Si realizamos la siguiente prueba para los $\Pi$is se tiene:

$$H_0 : \Pi_i = 0 \quad (i = 4,5,6) \qquad v.s \qquad H_1 : \Pi_i \neq 0 \quad (i = 4,5,6)$$

como t calculada es mayor en valor absoluto que t de tablas, entonces rechazamos la hipótesis Ho al 5% de significancia.

Estadísticos de bondad del ajuste.

Suma de cuadrados residuales.	68.55150
Varianza de la perturbación.	4.57010
Coeficiente de determinación.	0.74803
Coef. de determinación corregido.	0.71443

En este caso el valor de R^2 está un poco más cercano a uno que en la 1ª. ecuación, sin embargo manifestamos que el hecho de -- que R^2 no se aproxime mucho a cero, no significa que la especificación del modelo sea totalmente desacertada, sino que posiblemente deban incluirse más variables en tal especificación o bien quizá deban incluirse retardos de 2o., 3er., etc. orden.

Estadísticos de autocorrelación

Durbín-Watson	1.78620
Cochrane-Orcutt	-0.22830

De manera análoga al caso de la primera ecuación el estadístico Durbin-Watson se aproxima a 2 mientras el estadístico Cochrane-Orcutt se acerca a cero, lo cual implica ausencia de autocorrelación.

Estadísticos de heteroscedasticidad

Glejser	0.40612

Matriz proporcional de varianzas y covarianzas.

$$\begin{pmatrix} 0.1124680E-01 & -0.6475630E-04 & -0.3447810E+00 \\ -0.6475630E-04 & 0.1236410E-01 & -0.2287060E+00 \\ -0.3447810E+00 & -0.2287060E+00 & 0.1747590E+02 \end{pmatrix}$$

COMENTARIOS:

Los valores para las β_i son:

$$\beta_1 = -0.63080 \; ; \quad \beta_2 = 0.67927 \; ; \quad \beta_3 = 25.20760$$

Debido a que β_1 es casi el inverso aditivo de β_2(o viceversa), entonces el efecto que pudiera tener un cambio en la tasa de inflación del período inmediato anterior (TP_{t-1}) sobre la tasa de salarios (TS_t); se ve contrarrestado por el efecto de un cambio en la tasa de ingreso del período actual (TY_t).

Comparando el valor de β_3 con β_1 y β_2 concluimos que los cambios en la inversión privada determinan los cambios en la tasa de inflación.

FORMA FINAL Y CONDICIONES DE ESTABILIDAD.

Consideremos nuevamente la forma reducida del modelo.

$$FR \ldots \begin{cases} TP_t = \Pi_1 TP_{t-1} + \Pi_2 TY_t + \Pi_3 INP_t + V_{t1} \\ TS_t = \Pi_4 TP_{t-1} + \Pi_5 TY_t + \Pi_6 INP_t + V_{t2} \end{cases}$$

donde $V_{t1} = U_{t1} + \alpha_1 U_{t2} \quad ; \; V_{t2} = U_{t2}$

Las matrices respectivas son:

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} \pi_1 & 0 \\ \pi_4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 & 0 \\ \beta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & \pi_2 & \pi_3 \\ 0 & \pi_5 & \pi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \beta_2 & \alpha_1 \beta_3 + \alpha_2 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

La matriz Π_1 está formada por los coeficientes de las endógenas retardadas, y la matriz Π_2 es aquella cuyas columnas están formadas por los coeficientes de las variables exógenas, y los términos independientes.

Aplicando la ec. (F F) del capítulo IV tenemos la forma final de nuestro sistema dada por la ecuación:

$$Y_t = \Pi_1^{\,t} Y_0 + \sum_{J=0}^{t-1} \Pi_1^{\,J} \Pi_2 Z_{t-J} + \sum_{J=0}^{t-1} \Pi_1^{\,J} V_{t-J}$$

Desarrollando cada uno de los sumandos se tiene:

$$\Pi_1^{\,J} = \begin{pmatrix} (\alpha_1 \beta_1)^J & 0 \\ \beta_1^J & 0 \end{pmatrix} = \beta_1^J \begin{pmatrix} \alpha_1^J & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_1^{\,J} \Pi_2 Z_{t-J} = \beta_1^J \begin{pmatrix} \alpha_1^J + \alpha_1^{J+1} \beta_2 TY_{t-1} + (\alpha_1^{J+1} \beta_3 + \alpha_1^J \alpha_2) INP_{t-J} \\ \alpha_1 \beta_2 TY_{t-J} + (\alpha_1 \beta_3 + \alpha_2) INP_{t-J} \end{pmatrix}$$

$$\Pi_1^{\,t} Y_0 = Y_0 \beta_1^t \begin{pmatrix} \alpha_1^t & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1^J V_{t-J} = \beta_1^J \begin{pmatrix} \alpha_1^J V_{t-J,1} & 0 \\ V_{t-J,1} & 0 \end{pmatrix}$$

Según lo anterior, las ecuaciones finales son:

$$TP_t = (\alpha_1\beta_1)^t Y_0 + \sum_{J=0}^{t-1}\left[\alpha_1^J \beta_1^J + \alpha_1^{J+1}\beta_2 TY_{t-J} + (\alpha_1^{J+1}\beta_3 + \alpha_1^J\beta_2) INP_{t-J}\right] + \sum_{J=0}^{t-1}\beta_1^J \alpha_1^J V_{t-J,1}$$

$$TS_t = \beta_1^t Y_0 + \alpha_1\beta_2 \sum_{J=0}^{t-1}\left[\beta_1^t TY_{t-J} + (\alpha_1\beta_3 + \alpha_2) INP_{t-J}\right] + \sum_{J=0}^{t-1}\beta_1^J V_{t-J,1}$$

Las raices de π están dadas por la solución del determinante $|\pi_1 - \lambda I| = 0$

$$|\pi_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 - \lambda & 0 \\ \beta_1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda(\lambda - \alpha_1\beta_1) = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda = \alpha_1\beta_1$$

Por lo tanto el sistema es estable si y solo si $|\alpha_1\beta_1| < 1$.

Las estimaciones obtenidas para α_1 y β_1 son:

$$\hat{\alpha}_1 = -0.84732 \quad y \quad \hat{\beta}_1 = -0.63080$$

Por lo tanto $|\alpha_1\beta_1| < 1$

De donde el modelo es estable.

Dado que la condición de estabilidad del sistema se satisface, consideremos los posición de equilibrio dada por:

$$TP^e = \alpha_1 TS^e + \alpha_2 INP = \left(\frac{\alpha_1\beta_2}{1-\alpha_1\beta_1}\right)TY + \left(\frac{\alpha_1\beta_3+\alpha_2}{1-\alpha_1\beta_1}\right)INP$$

$$TS^e = \beta_1 TP^e + \beta_2 TY + \beta_3 INP = \left(\frac{\beta_2}{1-\alpha_1\beta_1}\right)TY + \left(\frac{\alpha_2\beta_1+\beta_3}{1-\alpha_1\beta_1}\right)INP$$

Si fijamos TY = $\overline{TY}$ e INP = $\overline{INP}$ entonces la posición de equi librio está dada por:

$$TP^e = \left(\frac{\alpha_1\beta_2}{1-\alpha_1\beta_1}\right)\overline{TY} + \left(\frac{\alpha_1\beta_3+\alpha_2}{1-\alpha_1\beta_1}\right)\overline{INP}$$

$$TS^e = \left(\frac{\beta_2}{1-\alpha_1\beta_1}\right)\overline{TY} + \left(\frac{\alpha_2\beta_1+\beta_3}{1-\alpha_1\beta_1}\right)\overline{INP}$$

Sustituyendo los valores de $\overline{TY}$, $\overline{INP}$, α_i y β_i obtenemos

$$\left(TP^e, TS^e\right) = \left(4.9648,\ 11.8019\right)$$

y como la condición de estabilidad se satisface, entonces el mo delo tiende a alcanzar el punto de equilibrio.

DATOS UTILIZADOS EN EL ANALISIS DEL MODELO

PERIODO	TP	TS	TY	INP
1960				0.165
1961	1.600	2.952	4.930	0.143
1962	1.083	16.275	4.673	0.150
1963	0.682	8.325	7.988	0.172
1964	2.418	16.028	11.693	0.208
1965	3.494	5.608	6.485	0.274
1966	4.106	10.354	6.932	0.290
1967	3.243	4.447	6.270	0.312
1968	0.764	14.029	8.136	0.340
1969	3.454	6.167	6.324	0.361
1970	5.212	9.929	6.921	0.411
1971	5.108	5.341	3.439	0.436
1972	5.007	12.751	7.269	0.452
1973	12.132	5.265	7.596	0.479
1974	23.640	5.383	8.218	0.550
1975	15.225	10.506	20.092	0.555
1976	15.803	14.614	2.127	0.603
1977	29.075	1.219	3.261	0.584
1978	17.327	4.677	7.289	0.648
1979	18.249	6.492	7.994	0.814

CONCLUSIONES

En la medida de lo posible hemos analizado los fundamentos y la teoría matemática necesaria para hacer estudios econométricos, en el caso particular en que los fenómenos económicos bajo estudio pueden ser representados por un sistema de ecuaciones lineales.

Hemos hecho incapie más en los fundamentos del método econométrico que en las técnicas específicas. Esto obedece a que existe mucha literatura especializada sobre dichas técnicas y creemos más útil comprender el método, limitaciones y su utilización para poder usar con más provecho las técnicas.

En los últimos años los modelos econométricos han sido fuertemente criticados y se ha limitado su uso. Las críticas van en su mayoría dirigidas a la especificación más que a las técnicas estadísticas que se utilizan. Esto se debe a que las especificaciones más comunes se hacen utilizando proposiciones macroeconómicas que no están suficientemente justificadas teóricamente.

En las ecuaciones se incluyen variables que son agregados de los cuales no hay una teoría convincente que explique como se forman dichos agregados y si están bien formados a partir de las conductas de los agentes que intervienen en la economía; algunas de estas variables son por ejemplo: ingreso nacional, inversión, etc.

Tal es el caso del modelo presentado en el capítulo siete en el cual:

El problema está en que no existe una teoría suficientemente buena que explique como se interrelacionan las variables bajo cuestión. Posiblemente para explicar precios y salarios se necesiten más variables y otras especificaciones.

Los modelos debieran incluir todos los determinantes del sistema económico.

B I B L I O G R A F I A

1 **KENNETH F. WALLIS:** Introducción a la Econometría. Alianza Editorial, S.A. Madrid, 1976.

2 **CAMILO DAGUM Y ESTELA M. BEE DE DAGUM:** Introducción a la Econometría. Ed. Siglo XXI México, 1983.

3 **J. JOHNSTON:** Econometric Methods. International Student - Editions. England, 1972.

4 **HERNAN SABAU:** El Método Econométrico; Una visión Intuitiva. Material Docente CIDE. Serie Matemática Aplicada -- Num. 8202-A.

5 **I.J.S. RUPRAH Y HERNAN SABAU:** Economía Mexicana. Serie - Temática 2 MODEM. CIDE pp. 9-24 1984.

6 **HERNAN SABAU:** Evaluación Econométrica del Modelo Uniecuacional. Centro de Investigación y Docencia Económica CIDE, 1981. Notas no publicadas.

7 **PEDRO URIBE:** La Expresión Matemática de la Teoría Económica. Serie Matemática Aplicada CIDE DT 8301 A 1981.

8 **HERNAN SABAU:** Análisis Estructural de Modelos Econométricos. 1981 Notas no publicadas.

9 **HENRY THEIL:** Principles of Econometrics. John Wiley & - Sons Inc.

10 **CARL F. CHRIST:** Modelos y Métodos Econométricos. Ed. Limusa.

11 **MAX WATOFSKY:** Texto General sobre Filosofía de la Ciencia (Corriente Empirismo Lógico). Introducción a la Filosofía de la Ciencia. Alianza Universidad. Serie Textos 38, 39.

12 **ULISES MOULINES:** Texto General sobre Filosofía de la Ciencia (Corriente Moderna). Exploraciones Metacientíficas. - Alianza Universidad. Serie Textos 38.

13 **TA-CHUNG LIU:** Underidentification, Structural Stimation, and Forecasting. Econométrica, Vol. 28, 4 pp. 338-379, - 1960.

14 **H. GLEJSER:** A New Test for Heteroscedasticity. Journal American Statistic Association. (JASA) Vol. 64 pp. 316-323 1969.

15 **INDICE DE PRECIOS:** Revista Indicadores Económicos del -- Banco de México.

16 **PRODUCTO INTERNO BRUTO Y GASTO:** Banco de México. Revista Anual, 1979.

17 **LA ECONOMIA MEXICANA:** Editada por NAFINSA, 1981.