93

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

SIMULACION DIGITAL DEL COMPORTAMIENTO DINAMICO DE SISTEMAS DE TRANSMISION DE ENERGIA ELECTRICA EMPLEANDO TECNICAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A

PABLO MORENO VILLALOBOS

DIR. ING. JACINTO VIQUEIRA LANDA

MEXICO, D. F. 1985

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

Los Sistemas Eléctricos de Potencia estan sujetos a diferentes clases de fenómenos transitorios, que van desde las relativamente lentas oscilaciones electromecánicas asociadas con la inestabilidad de las máquinas síncronas, hasta las rápidas variaciones de voltaje y de corriente ocasionadas por repentinos cambios en los valores de estado estable de estas variables.

Los cambios repentinos en el voltaje y la corriente pueden ser el resultado de alguna falla, de anomalías en el funcionamiento del sistema o del cierre y apertura de interruptores. Las fallas pueden ocurrir por muchas razones, por ejemplo, pueden ser ocasionadas por descargas atmosféricas o por el contacto de las líneas de transmisión con objetos extraños, como ramas de árboles. Las anomalías en el funcionamiento del sistema pueden originarse en un gran número de formas y tener una variedad de consecuencias, por ejemplo, algunas veces las operaciones de maniobra y la ocurrencia de fallas pueden provocar condiciones de resonancia ya sea a la frecuencia fundamental o alguna de las armónicas.

Cuando se opera un interruptor se producen sobretensiones transitorias que, dependiendo de la complejidad de la red, pueden alcanzar magnitudes peligrosas para el sistema. Las características de estas sobretensiones, su amplitud, frecuencia y puntos de ocurrencia afectan el diseño del aislamiento de las líneas de transmisión, la selección de los equipos y la operación del sistema, por lo que se hace necesario un conocimiento profundo de este tipo de disturbios en la etapa de diseño de los sistemas de transmisión.

A causa de su importancia en el diseño de interruptores, los voltajes transitorios originados por la desenergización de circuitos fueron considerados originalmente como de mayor importancia que los causados por energizaciones. Estos últimos no afectan el funcionamiento de los interruptores y en el pasado no excedían los niveles de aislamiento de los sistemas debido a los bajos voltajes de operación utilizados. Sin embargo, a traves de los años, los niveles de voltaje a que se transmite la energía eléctrica a grandes distancias se han venido incrementando continuamente, de tal manera que de acuerdo con el "Plan de expansión del sector eléctrico al año 2000", se deben de construir en México en el período de 1983 al año 2000 aproximadamente 9000 kms. de líneas de 400 kV y probablemente 500 kms. de líneas de 750 kV. Debido a este incremento en los niveles de voltaje, los grandes márgenes de seguridad usados en tensiones menores, en donde el soporte para sobretensiones de maniobra ha sido típicamente de alrededor de cinco veces el voltaje nominal, sea demasiado costoso en niveles de extra y ultra alta tensión.

En este contexto, los sobrevoltajes originados por la energización de líneas de transmisión son particularmente - significativos, pues si se dan las condiciones necesarias es posible tener niveles de sobretensión de hasta tres veces el voltaje nominal, y como el nivel de aislamiento debe de ser lo suficientemente alto para no comprometer la confiabilidad del sistema, a la vez de que existen fuertes razones económicas para mantener dicho nivel lo más bajo posible, es necesario tener la habilidad para predecir las sobretensiones a - que se veran sometidos los sistemas con el fin de tomar medidas para reducirlos y para disminuir lo más posible el nivel de aislamiento.

Para el estudio de transitorios electromagnéticos se - pueden utilizar con una eficacia razonable los Analizadores de Transitorios en Redes (TNA), pero inevitablemente estos dispositivos son muy caros y de propósitos particulares, a diferencia de las computadoras digitales que nos permiten la utilización de programas para propósitos generales. Para desarrollar programas para cubrir un rango de problemas tan amplio como sea posible, es necesario realizar en principio,un análisis teórico detallado.

La mayoría de los trabajos en este campo, se han basado en técnicas en el dominio del tiempo, tales como el método de "celosías" y el método de las "características" o de "Bergeron". A partir de este último, H. W. Dommel desarrolló un programa conocido en la industria eléctrica como "Programa de transitorios electromagnéticos" (EMTP), el cual es muy eficiente computacionalmente, además de tener un grado de precisión bastante bueno. Sin embargo, los métodos en el dominio del tiempo presentan dificultades para incluir la dependencia con respecto a la frecuencia de los parámetros básicos de las líneas de transmisión, ocasionada por el efecto Kelvin en los conductores y por la penetración del campo electromagnético en el terreno.

Las dificultades señaladas arriba se pueden superar con el empleo del método de las "Transformadas integrales". La utilidad de este método es reconocida para aquellos problemas en que las integrales pueden resolverse analiticamente. En los problemas en donde no es posible un enfoque analítico, la tendencia seguida ha sido la de abandonar dicho método. No obstante, actualmente gracias al desarrollo del algoritmo de la "Transformada Rápida de Fourier", no existe razón aparente para que las integrales no puedan ser evaluadas numéricamente.

El objetivo de este trabajo es presentar,un método de análisis de transitorios electromagnéticos en el dominio de la frecuencia -concebido originalmente por L.M. Wedephol-, para sistemas de transmisión de energía eléctrica tomando en cuenta la multiplicidad de conductores, con el fin de desarrollar programas de computadora que sirvan de apoyo a los ya existentes basados en técnicas en el dominio del tiempo, pués el método de las transformadas integrales es mas exacto para el caso de fenómenos lineales ya que tiene bases analíticas más sólidas.

El método combina el empleo de la "Transformada modificada de Fourier" con la teoría en estado estable de los "modos naturales de propagación". La ventaja de este método es que la dependencia con respecto a la frecuencia de los parámetros de los sistemas de transmisión se toma en cuenta con suma facilidad sin importar la complejidad de las expresiones que definan sus valores en estado estable.

La evaluación de fenómenos transitorios en líneas multiconductoras es complicada, ya que se trata de fenómenos en cuatro dimensiones : el tiempo y tres dimensiones espaciales. Asumiendo que la propagación de la energía se efectua por medio de ondas planas, es posible separar las dos variables espaciales ortogonales a la dirección de propagación y expresarlas en términos de impedancias y admitancias equivalentes, tal como se hace en el capítulo 1 al deducir las ecuaciones de propagación, mientras que en el capítulo 2 se muestra la forma de calcular las impedancias y admitancias. Esto nos deja la variable espacial en la dirección de propagación y el tiempo, este último se elimina aplicando la transformada de Fourier.

Una vez aplicada la transformada de Fourier, el problema final consiste en resolver las ecuaciones de propagación en estado estable. Como consecuencia de la multiplicidad de conductores de las líneas de transmisión, la solución de las ecuaciones diferenciales resultantes se debe de obtener por medio del análisis modal, el cual se trata en el capítulo 3.

Para encontrar la solución al problema en estado estable para un sistema de transmisión compuesto por diversos elementos, en el capítulo 4, se describe el modelado de las líneas de transmisión por medio de ecuaciones matriciales de redes de dos puertos, así como la forma de incluir el efecto de discontinuidades tales como transposiciones y elementos de parámetros concentrados.

El análisis en estado estable se realiza en el dominio fasorial, y los parámetros de los sistemas, tanto eléctricos como modales, se obtienen a una determinada frecuencia, que puede ser la de operación o alguna otra de interes. Este tipo de análisis es importante en problemas de resonancia, inducción entre líneas paralelas, acoplamientos para onda portadora, etc.

En un fenómeno transitorio, un sistema de transmisión se ve sujeto a un amplio rango de variaciones de frecuencia y para calcular la respuesta transitoria del sistema, es necesario evaluar la respuesta en estado estable en todo el espectro de frecuencia y después efectuar la conversión al dominio del tiempo. En el capítulo 5, se expone la forma de realizar dicha conversión, así como las técnicas empleadas para la eliminación de los errores originados por la evaluación numérica de las integrales. Se describe el empleo de la transformada modificada de Fourier para eliminar los errores por discretización y la inclusión en los integrandos de las funciones "ventana" para disminuir los errores por truncamiento.

En el capítulo 6, se conjugan los desarrollos de todos los capítulos anteriores en el análisis de transitorios electromagnéticos, haciendo especial énfasis en los problemas de energización de líneas de transmisión.

Finalmente se presentan las conclusiones obtenidas del presente trabajo y se dan algunas recomendaciones para estudios futuros tanto del comportamiento estático como del comportamiento dinámico de los sistemas de transmisión con múltiple número de conductores.

C A P I T U L O 1

E C U A C I O N E S D E P R O P A G A C I O N

1. SISTEMA MONOFASICO O EQUIVALENTE DE FASE Y NEUTRO.

Al aplicar a una línea de transmisión de energía eléctrica una excitación que varía con el tiempo, se produce un campo electromagnético que también es variable en el tiempo y que se propaga en el espacio en forma de ondas, las cuales transfieren la energía de un punto a otro. En similitud con la propagación de las ondas electromagnéticas, ocurre una propagación de corrientes y de voltajes en la línea de transmisión. Este fenómeno se puede representar por medio de dos ecuaciones diferenciales parciales, las cuales pueden ser obtenidas a partir de las ecuaciones de Maxwell si se supone que: (1) los conductores son paralelos entre sí y al plano de tierra; (2) la energía se propaga por medio de ondas planas; (3) se desprecia el efecto de proximidad.

Una forma más sencilla de obtener las ecuaciones que definen el fenómeno de propagación en las líneas de transmisión consiste en emplear la teoría de circuitos, considerando a las líneas como sistemas de parámetros distribuidos uniformemente a lo largo de ellas. Consideremos los dos modelos de fase y neutro mostrados en la fig.1.1, que representan una sección elemental de línea.

En la fig. 1.1

r = resistencia en serie por unidad de longitud.

l = inductancia en serie por unidad de longitud.

g = conductancia en paralelo por unidad de longitud.

c = capacitancia en paralelo por unidad de longitud.

$v = f_1(x,t)$

$i = f_2(x,t)$

Δx = longitud de la sección de línea

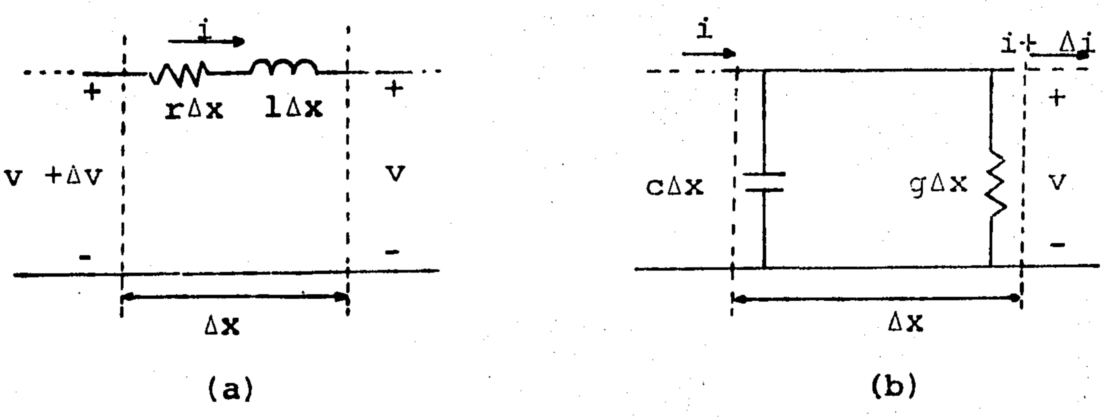


fig.1.1 Sección elemental de una línea de transmisión.

De la fig.1.1(a)

$$-\Delta v = ri\Delta x + l\Delta x \frac{\partial i}{\partial t}$$

dividiendo por x y tomando el límite cuando $x \longrightarrow 0$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = ri + l\frac{\partial i}{\partial t} \tag{1.1}$$

de la fig.1.1(b)

$$-\Delta i = gv\Delta x + c\Delta x\frac{\partial v}{\partial t}$$

dividiendo por x y tomando el límite cuando $x \longrightarrow 0$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = gv + c\frac{\partial v}{\partial t} \tag{1.2}$$

Aplicando la transformada de Fourier a las ecuaciones (1.1) y (1.2) eliminamos el tiempo y las derivadas parciales se convierten en derivadas totales

$$-\frac{dV}{dx} = (r + j\omega l)I \tag{1.1.a}$$

$$-\frac{dI}{dx} = (g + j\omega c)V \tag{1.2.a}$$

donde

$V = F_1(x,\omega)$

$I = F_2(x,\omega)$

ω = frecuencia angular en rad/seg

Definamos a la impedancia serie o longitudinal por unidad de longitud como

$$z(\omega) = r + j\omega l \qquad (1.3)$$

y la admitancia en paralelo o transversal por unidad de longitud como

$$y(\omega) = g + j\omega c \qquad (1.4)$$

empleando estas dos definiciones las ecuaciones (1.1.a) y (1.2.a) quedarán como

$$-\frac{dV}{dx} = z(\omega)\ I \qquad (1.5)$$

$$-\frac{dI}{dx} = y(\omega)\ V \qquad (1.6)$$

Derivando (1.5) y (1.6) con respecto a "x" y combinando las ecuaciones resultantes obtenemos

$$\frac{d^2V}{dx^2} = z(\omega)y(\omega)\ V \qquad (1.7)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = z(\omega)y(\omega)\ I \qquad (1.8)$$

La solución de las ecuaciones (1.7) y (1.8) puede ser dada en forma exponencial ó en forma hiperbólica. En forma exponencial

$$V = V_1 \exp(-\gamma x) + V_2 \exp(\gamma x) \qquad (1.9)$$

$$I = I_1 \exp(-\gamma x) + I_2 \exp(\gamma x) \qquad (1.10)$$

donde

$$\gamma = \sqrt{z(\omega) y(\omega)} = \text{constante de propagación} \qquad (1.11)$$

Cada solución representa la suma de dos ondas, una viajando en el sentido positivo de "x" y la otra en el sentido negativo.

Derivando (1.9) y sustituyendo en (1.5)

$$I = \frac{V_1 \exp(-\gamma x)}{\sqrt{z(\omega) y(\omega)}} - \frac{V_2 \exp(\gamma x)}{\sqrt{z(\omega) y(\omega)}} \qquad (1.12)$$

La impedancia característica z_0 de una línea de transmisión se define como la razón del voltaje a la corriente en cualquier punto de la línea en las condiciones en que no exista onda reflejada. Para la onda que viaja en sentido positivo de "x"

$$\frac{V_1}{I_1} = z_0 = \sqrt{\frac{z(\omega)}{y(\omega)}} \qquad (1.13)$$

mientras que para la onda que viaja en sentido negativo

$$\frac{V_2}{I_2} = - z_0 = - \sqrt{\frac{z(\omega)}{y(\omega)}} \qquad (1.14)$$

y se define la admitancia característica como

$$y_0 = 1/z_0 \tag{1.15}$$

La constante de propagación es una cantidad compleja, por lo que podemos escribir que

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

donde

α = constante de amortiguamiento ó de atenuación

β = constante de fase

La constante de amortiguamiento esta dada en nepers por unidad de longitud (u.l.) y proporciona la atenuación que sufren las ondas al viajar por la línea de transmisión. Como generalmente la atenuación se expresa en decibeles, tenemos que

$$\alpha' = 20 \log_{10}(\exp(\alpha)) \quad \text{db/u.l.}$$

La constante de fase esta dada en radianes por unidad de longitud. A partir de β se determina la velocidad de propagación de acuerdo con

$$v = \omega/\beta \tag{1.16}$$

donde

v = velocidad de propagación en u.l./seg

ω = frecuencia angular en rad/seg

Para una línea sin pérdidas, $r = 0$ y $g = 0$, entonces

$$z_0 = \sqrt{l/c}$$

y

$$\gamma = \sqrt{j\omega l \cdot j\omega c} = j\omega\sqrt{lc}$$

como no hay pérdidas en la línea, la atenuación es cero, entonces

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = \omega\sqrt{lc} \quad , \quad v = 1/\sqrt{lc}$$

Por medio de la teoría electromagnética se puede probar que para una onda que se propaga en un medio sin pérdidas, como el aire, la velocidad de propagación es la velocidad de la luz

$$v = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \doteq 3 \times 10^8 \text{ metros/seg}$$

Como el voltaje alterno que se aplica a una línea de transmisión crea un campo electromagnético que al igual que el voltaje y la corriente se propaga a lo largo de la línea ,por analogía, tenemos que para una línea de transmisión sin pérdidas la velocidad de propagación será

$$v = 1/\sqrt{lc} \doteq 3 \times 10^8 \text{ metros/seg}$$

En una línea con pérdidas, que es el caso real, la velocidad de propagación será menor que la velocidad que se tiene en una línea sin pérdidas.

La solución en forma hiperbólica de las ecuaciones (1.7) y (1.8) es

$$V = A_1 \cosh(\gamma x) + B_1 \operatorname{senh}(\gamma x) \tag{1.17}$$

$$I = A_2 \cosh(\gamma x) + B_2 \operatorname{senh}(\gamma x) \tag{1.18}$$

Las constantes A_1, A_2, B_1 y B_2 se encuentran aplicando las condiciones de frontera, si

$$V = V_R \quad , \quad I = I_R \quad \text{en} \quad x = 0$$

$$V = V_S \quad , \quad I = I_S \quad \text{en} \quad x = x_1$$

entonces empleando estas relaciones en (1.17) y (1.18) y con las ecuaciones (1.5) y (1.6) tenemos que

$$V_S = V_R \cosh(\gamma x_1) - z_0 I_R \operatorname{senh}(\gamma x_1) \tag{1.19}$$

$$I_S = I_R \cosh(\gamma x_1) - y_0 V_R \operatorname{senh}(\gamma x_1) \tag{1.20}$$

Generalmente se toma como referencia el extremo receptor como se muestra en la fig.1.2 , haciendo $x'=-x_1$, las ecuaciones (1.19) y (1.20) quedan como

$$V_S = V_R \cosh(\gamma x') + z_0 I_R \operatorname{senh}(\gamma x') \tag{1.21}$$

$$I_S = I_R \cosh(\gamma x') + y_0 V_R \operatorname{senh}(\gamma x') \tag{1.22}$$

Las ecuaciones (1.21) y (1.22) dan el voltaje y la corriente a una distancia "x'" del extremo receptor.

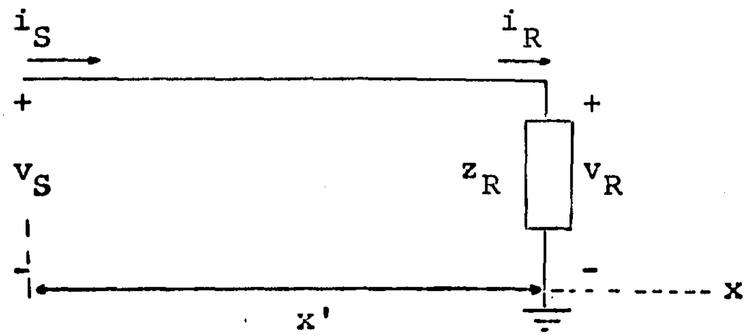


Fig. 1.2

2. SISTEMA CON MULTIPLE NUMERO DE CONDUCTORES.

En realidad las líneas de transmisión de energía eléctrica estan compuestas de varior conductores,esto es, se trata de líneas con "múltiple número de conductores" o "líneas multiconductoras", por lo que es conveniente expresar las ecuaciones de propagación en forma matricial. De esta forma las ecuaciones (1.5) y (1.6) quedan como

$$- \frac{d\hat{V}}{dx} = \mathbf{Z}\ \hat{I} \qquad (1.23)$$

$$- \frac{d\hat{I}}{dx} = \mathbf{Y}\ \hat{V} \qquad (1.24)$$

donde

$\hat{V}$, $\hat{I}$ son los vectores de voltaje y de corriente respectivamente de la línea de transmisión.

Z es la matriz de impedancia serie por unidad de longitud.

Y es la matriz de admitancia en paralelo por unidad de longitud.

Siguiendo el mismo procedimiento que para el caso monofásico pero respetando las reglas de algebra matricial

$$\frac{d^2\hat{V}}{dx^2} = \mathbf{Z}\,\mathbf{Y}\,\hat{V} \qquad (1.25)$$

$$\frac{d^2\hat{I}}{dx^2} = \mathbf{Y}\,\mathbf{Z}\,\hat{I} \qquad (1.26)$$

El orden de multiplicación de las matrices **Z** y Y en las dos ecuaciones anteriores debe de ser precisamente el mostrado, pués en general

$$\mathbf{Z}\,\mathbf{Y} \neq \mathbf{Y}\,\mathbf{Z}$$

Definamos ahora a la matriz

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}\,\mathbf{Y} \qquad (1.27)$$

como las matrices **Z** y **Y** son simétricas (para las impedancias mutuas $Z_{ij} = Z_{ji}$ y para las admitancias $Y_{ij} = Y_{ji}$), entonces

$$\mathbf{Y}\,\mathbf{Z} = \mathbf{Y}_t\,\mathbf{Z}_t = (\,\mathbf{Z}\,\mathbf{Y}\,)_t = \mathbf{A}_t \qquad (1.28)$$

De acuerdo con (1.27) y (1.28) las ecuaciones de propagación matriciales serán

$$\frac{d^2\hat{V}}{dx^2} = \mathbf{A}\,\hat{V} \qquad (1.29)$$

$$\frac{d^2\hat{I}}{dx^2} = \mathbf{A}_t\,\hat{I} \qquad (1.30)$$

Tratar de encontrar la solución general para las ecuaciones (1.29) y (1.30) no es nada práctico, pués por ejemplo, para una línea de "n" conductores tendríamos para cada ecuación matricial, "n" ecuaciones diferenciales de segundo orden con las "n" incógnitas involucradas en todas y cada una de las ecuaciones escalares. Las dos ecuaciones matriciales se pueden resolver para casos particulares encontrando la solución a las incógnitas una a una, pero este procedimiento no nos permite analizar las propiedades generales de la solución y por lo tanto del fenómeno.

Una alternativa mucho más práctica para la solución de las ecuaciones de propagación (1.29) y (1.30) consiste en hacer uso de la teoría del análisis modal, el cual se basa en la obtención de los eigenvalores y eigenvectores de la matriz $\mathbf{A}$. Este método de análisis se expone en el Capítulo 3.

C A P I T U L O   2

P A R A M E T R O S   E L E C T R I C O S   D E
L I N E A S   D E   T R A N S M I S I O N

Antes de entrar al estudio del fenómeno de propagación en líneas de transmisión multiconductoras, se expondrá la forma de calcular los parámetros eléctricos de este tipo de líneas, ya que de ellos dependen las características generales de la propagación.

Los parámetros eléctricos de una línea de transmisión se definen completamente con las matrices de impedancia serie y de admitancia en paralelo por unidad de longitud.

1. CALCULO DE LA MATRIZ DE IMPEDANCIA SERIE.

La matriz de impedancia serie o logitudinal se calcula a partir de las características geométricas y eléctricas de las líneas de transmisión. En su forma general la matriz de impedancia serie se compone de la suma de tres matrices, y esta dada por [1]

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_T + \mathbf{Z}_c \qquad (2.1)$$

donde

$\mathbf{Z}_g$: matriz de impedancia geométrica.

Z_T : matriz de impedancia debida al retorno por tierra.

Z_C : matriz de impedancia interna de los conductores.

1.1. Impedancia geométrica.

La matriz de impedancia geométrica depende basicamente de la configuración geométrica de la línea. Para el cálculo de esta matriz debemos de encontrar la inductancia debida - sólo al flujo magnético externo a los conductores, ya que - el efecto del flujo interno se toma en cuenta en el cálculo de la impedancia interna.

Inductancia entre dos puntos externos a un conductor. Consideremos un conductor cilíndrico recto de longitud infinita con una densidad uniforme de corriente, así, las líneas de flujo magnético serán concéntricas al eje del conductor y su dirección estará dada por la regla de la mano derecha. La intensidad de campo magnético es proporcional a la corriente que circula por el conductor y tangencial a las líneas de flujo magnético.

La ley de Ampere establece que la integral de línea de la componente tangencial de la intensidad de campo magnético alrededor de una trayectoria cerrada es igual a la corriente encerrada por la trayectoria.

$$\oint H \cdot dl = I$$

donde

H = componente tangencial de la intensidad de campo magnético.

dl = diferencial de línea de la trayectoria de integración.

I = corriente encerrada por la trayectoria.

Considerando que la integración se realiza sobre una trayectoria circular y que la intensidad de campo magnético es constante en todos los puntos que se encuentran a una misma distancia alrededor del centro del conductor

$$\oint H \cdot dl = H(2\pi x) = I$$

de donde

$$H = \frac{I}{2\pi x} \qquad \text{Amp-vuelta/m} \qquad (2.2)$$

siendo "x" la distancia al centro del conductor en metros.

Como la densidad de flujo magnético esta dada por

$$B = \mu H \qquad wb/m^2 \qquad (2.3)$$

donde

$\mu = \mu_0\ \mu_r$ = permeabilidad absoluta del material en henrys/m

μ_r = permeabilidad relativa del material.

μ_0 = permeabilidad del espacio vacio

$= 4\pi \times 10^{-7}$ henrys/m

entonces

$$B = \frac{\mu I}{2\pi x} \qquad wb/m^2 \qquad (2.4)$$

El flujo magnético por metro que rodea al conductor se determina considerando un área elemental de ancho "dx" y una longitud de 1 m. situada a una distancia "x" como se muestra en la fig.2.1

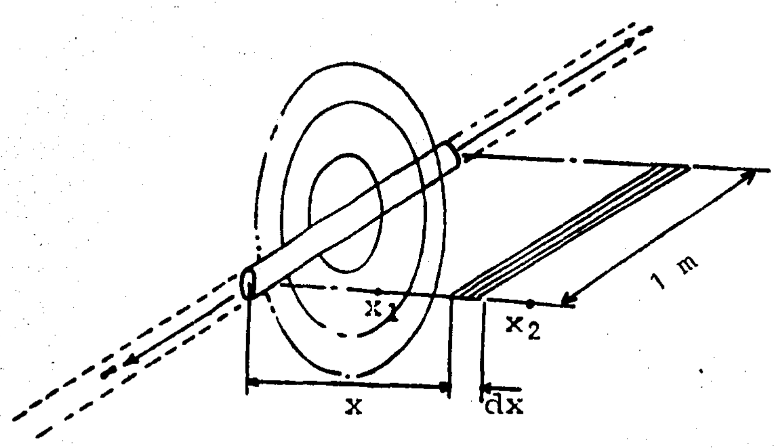


Fig. 2.1

El flujo que atravieza el área elemental es

$$d\phi = B \cdot 1 \cdot dx = \frac{\mu I}{2\pi x}\, dx \qquad wb$$

integrando para obtener el flujo externo al conductor entre dos puntos x_1 y x_2 cualesquiera

$$\Phi = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu I}{2\pi x}\, dx = \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \qquad \text{wb} \qquad (2.5)$$

El flujo magnético se puede expresar como

$$\Phi = N\ L\ I \qquad (2.6)$$

donde

L = Inductancia externa al conductor en henrys.

N = núm. de veces que el flujo magnético enlaza al conductor.

I = corriente que produce al campo magnético.

para nuestro caso, el flujo magnético enlaza al conductor sólo una vez, entonces

$$N = 1$$

con las ecuaciones (2.5) y (2.6), tenemos que

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \qquad \text{henrys} \qquad (2.7)$$

<u>Inductancia de un sistema n-fásico</u>. Considerese ahora el circuito n-fásico cuya sección transversal se muestra en la fig. 2.2, en el que se cumple que

$$I_1 + I_2 + \ldots + I_n = 0$$

y donde r_i es el radio del i-ésimo conductor

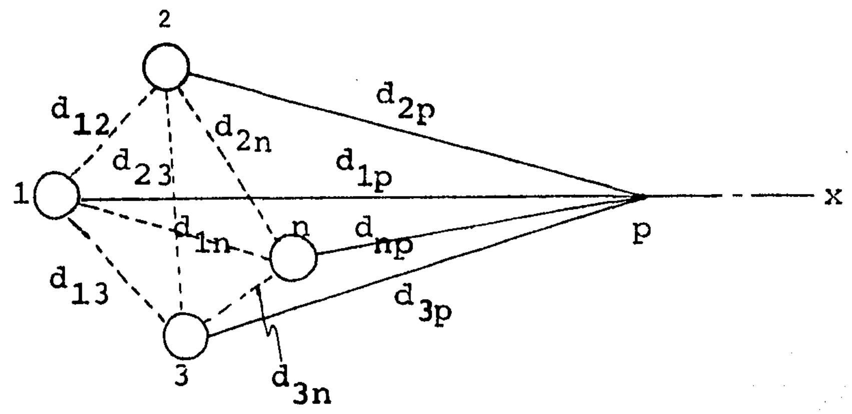


fig.2.2 Sección transversal de un circuito n-fásico.

El flujo total que enlaza al conductor 1 será la suma del flujo debido a él mismo y los flujos debidos a los de-- **más conductores.** De acuerdo con la ecuación (2.5) y conside rando el flujo hasta un punto "p"

$$\Phi_{1p} = \frac{\mu}{2\pi} I_1 \ln\frac{d_{1p}}{r_1} + \frac{\mu}{2\pi} I_2 \ln\frac{d_{2p}}{d_{12}} + \ldots + \frac{\mu}{2\pi} I_n \ln\frac{d_{np}}{d_{1n}}$$

como

$$I_n = - I_1 - I_2 - \ldots - I_{n-1}$$

entonces

$$\Phi_{1p} = \frac{\mu}{2\pi} I_1 \ln\frac{d_{1p}}{r_1} + \ldots + \frac{\mu}{2\pi} I_{n-1} \ln\frac{d_{(n-1)p}}{d_{1(n-1)}}$$

$$- \frac{\mu}{2\pi} I_1 \ln\frac{d_{np}}{d_{1n}} - \ldots - \frac{\mu}{2\pi} I_{n-1} \ln\frac{d_{np}}{d_{1n}}$$

agrupando los términos logarítmicos

$$\Phi_{1p} = \frac{\mu}{2\pi}\left[I_1 \ln\left(\frac{d_{1n}}{r_1}\frac{d_{1p}}{d_{np}}\right) + \ldots + I_{n-1} \ln\left(\frac{d_{1n}}{d_{1(n-1)}}\frac{d_{(n-1)p}}{d_{np}}\right)\right]$$

Para calcular el flujo total que envuelve al conductor 1, supongamos que el punto "p" se aleja hasta el infinito, así

$$\frac{d_{1p}}{d_{np}} \longrightarrow 1 \ , \ \frac{d_{2p}}{d_{np}} \longrightarrow 1 \ , \ \ldots \ , \ \frac{d_{(n-1)p}}{d_{np}} \longrightarrow 1$$

de acuerdo con esto y factorizando los térm[illegible] nemos que el flujo total que e[illegible]nductor 1 es

$$\Phi_1 = \frac{\mu}{2\pi}\left(I_1 \ln\frac{1}{r_1} + I_2 \ln\frac{1}{d_{12}} + \ldots + I_n \ln\frac{1}{d_{1n}} \right)$$

y similarmente para el resto de los conductores

$$\Phi_2 = \frac{\mu}{2\pi}\left(I_1 \ln\frac{1}{d_{1n}} + I_2 \ln\frac{1}{r_2} + \ldots + I_n \ln\frac{1}{d_{2n}} \right)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\Phi_n = \frac{\mu}{2\pi}\left(I_1 \ln\frac{1}{d_{1n}} + I_2 \ln\frac{1}{d_{2n}} + \ldots + I_n \ln\frac{1}{r_n} \right) \qquad (2.8)$$

De la ecuación (2.6) y del sistema (2.8), la inductancia de un sistema n-fásico será

$$L = \frac{\mu}{2\pi}\begin{bmatrix} \ln\frac{1}{r_1} & \cdots & \ln\frac{1}{d_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \ln\frac{1}{d_{1n}} & \cdots & \ln\frac{1}{r_n} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

El efecto del retorno por tierra y la impedancia geométrica. Cuando un sistema polifásico esta desbalanceado o cuando ocurren fenómenos transitorios, el terreno sobre el que se encuentra la línea se convierte en una trayectoria de retorno para las corrientes producidas por estas condiciones de operación. Consideremos un conductor colocado a una altura "h" del suelo por el cual circula una corr "I" y que el suelo tiene una resistividad igual a cero, - esto es, el suelo se comporta como un conductor perfecto. De acuerdo con las condiciones de frontera para campos e-- lectromagnéticos alternos, el campo magnético bajo la su-- perficie del suelo debe de ser cero. La configuración de campo magnético que cumple con las condiciones anteriores se muestra en la fig.2.3 .

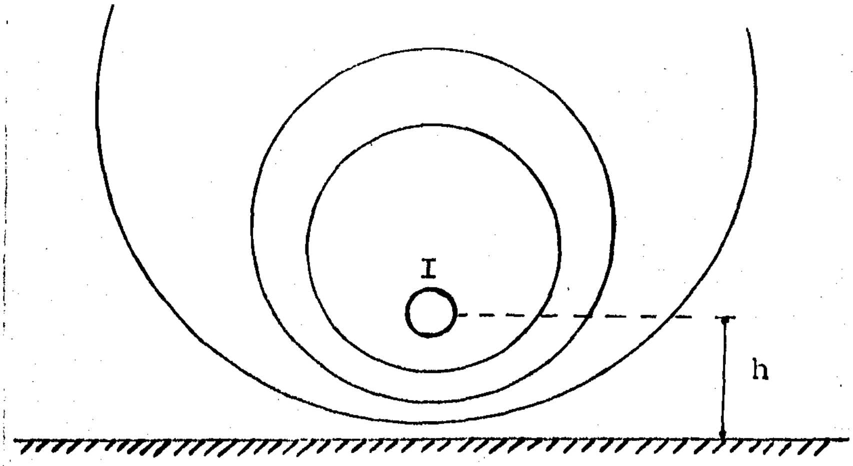


Fig. 2.3

La configuración mostrada en la fig.2.3 que se tiene arriba de la superficie de la tierra, se puede obtener si removemos el plano de tierra y colocamos un conductor ficticio que lleve una corriente "-I" a una distancia "h" abajo del plano de tierra, fig.2.4.

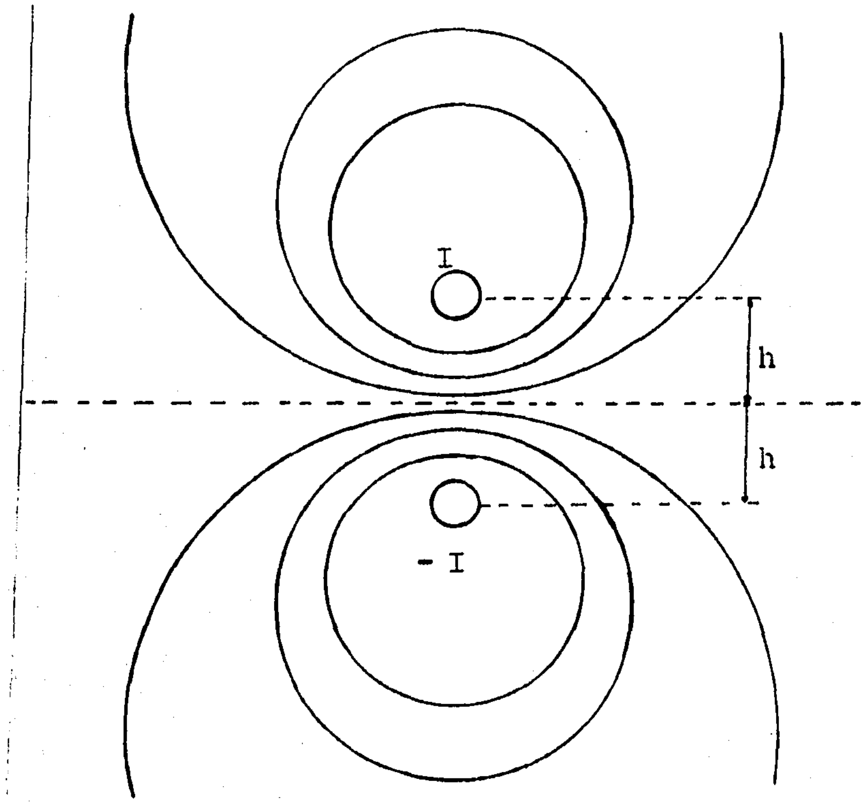


Fig.2.4 Sustitución del plano de tierra por un conductor ficticio

Este procedimiento, conocido como "método de las imágenes", nos permite salvar la dificultad que representa el conocer la distribución real de la corriente de retorno, que es muy irregular.

Para calcular la inductancia de un circuito n-fásico con retorno por tierra consideremos el sistema de conducto res reales e imágenes mostrado en la fig.2.5 .

En la fig.2.5

D_{ij} = distancia del conductor "i" a la imagen del conductor "j".

d_{ij} = distancia del conductor "i" al conductor "j" cuando "i"≠"j" .

= r_i = radio del conductor "i" si "i"="j" .

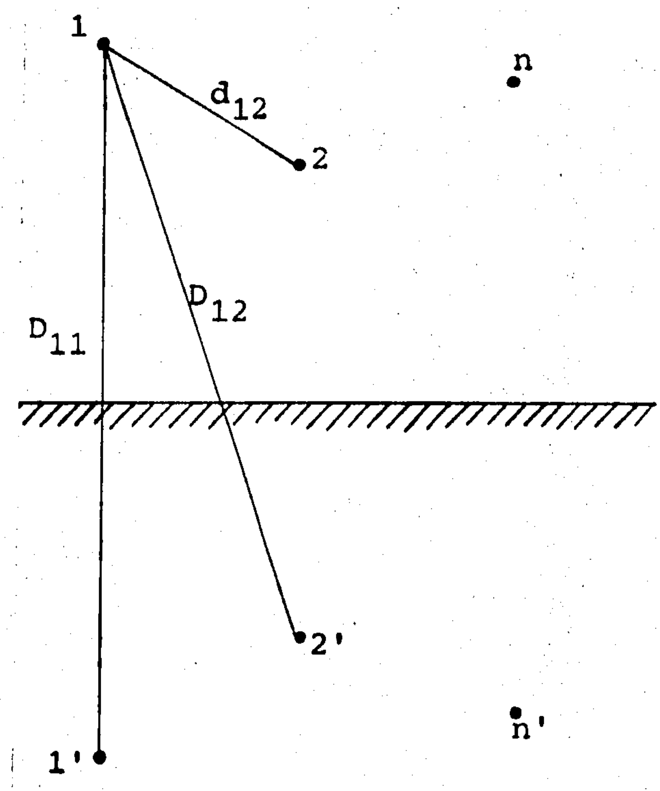


Fig. 2.5 Sistema de conductores reales y sus imágenes.

Con las expresiones (2.8) y de la fig.2.5, el flujo - total que enlaza al conductor 1 es

$$\Phi_1 = \frac{\mu}{2\pi}\Big(I_1 \ln\frac{1}{d_{11}} + \ldots + I_n \ln\frac{1}{d_{1n}}$$

$$- I_n \ln\frac{1}{D_{11}} - \ldots - I_n \ln\frac{1}{D_{1n}} \Big)$$

agrupando los términos logarítmicos

$$\Phi_1 = \frac{\mu}{2\pi}\Big(I_1 \ln\frac{D_{11}}{d_{11}} + \ldots + I_n \ln\frac{D_{1n}}{d_{1n}} \Big)$$

de la misma forma se puede encontrar el flujo para todos los conductores reales. La serie completa de ecuaciones se puede expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{bmatrix} = \frac{\mu}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln\frac{D_{11}}{d_{11}} & \ldots & \ln\frac{D_{1n}}{} \\ & & \\ \ln\frac{D_{1n}}{d_{1n}} & \ldots & \ln\frac{D_{nn}}{d_{nn}} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

esto es

$$\hat{\Phi} = L\,\hat{I} \tag{2.11}$$

Llamemos a la matriz de términos logarítmicos de la ecuación (2.10) "matriz de coeficientes de potencial", de -

tal manera que el elemento "i-j" de esta matriz (designada como **P**) esta definido por

$$P_{ij} = \ln \frac{D_{ij}}{d_{ij}} \qquad (2.12.a)$$

En términos de la matriz de coeficientes de potencial la inductancia esta dada por

$$\mathbf{L} = \frac{\mu}{2\pi}\,\mathbf{P} \qquad (2.12.b)$$

Finalmente la matriz de impedancia geométrica se defi fine como

$$\mathbf{Z}_g = j\,\frac{\omega\mu}{2\pi}\,\mathbf{P} \qquad (2.13)$$

1.2. Impedancia debida al retorno por tierra.

En la realidad la tierra tiene una determinada resisti vidad, que ocasiona que las corrientes de retorno sigan tra yectorias por abajo de la superficie del terreno. En los años 20, Carson y Pollaczek desarrollaron fórmulas para tomar en cuenta la contribución del retorno por tierra a la impedancia de líneas telefónicas, las cuales proporcionan resultados bastante aceptables para el caso de líneas de transmisión de energía eléctrica. Estas fórmulas, que son una aproximación a integrales que no admiten una solución analítica, se calculan por medio de series infinitas, pero este cálculo es complicado y laborioso sobre todo para el caso en que se trabaje con altas frecuencias.

El método que se expone aquí, es una idea original de C. Dubanton y se basa en considerar una capa de corrientes de retorno paralela al plano de tierra y situada a una profundidad llamada "profundidad compleja de penetración", que se define como

$$p = \frac{1}{\sqrt{j\mu\omega\sigma}} \tag{2.14}$$

donde

p = profundidad compleja de penetración.

$\mu = \mu_0\mu_r$ = permeabilidad absoluta.

σ = conductividad del terreno en mhos/m

ω = frecuencia angular.

Gracias al concepto de la profundidad compleja de penetración es posible emplear el método de las imágenes para - es cálculo de la impedancia debida al retorno por tierra. - Consideremos la configuración que se tiene cuando se supone que la resistividad del terreno es cero, que se muestra en la fig.2.6, para este caso los elementos de la matriz de inductancias estan dados por

$$L_{ij} = \frac{\mu}{2\pi} P_{ij} = \frac{\mu}{2\pi} \ln\frac{D_{ij}}{d_{ij}} \tag{2.15}$$

De la fig.2.6

$$D_{ij} = \sqrt{(y_i + y_j)^2 + x^2} \tag{2.16}$$

$$d_{ij} = \sqrt{(y_i - y_j)^2 + x^2} \tag{2.17}$$

$$\frac{y_i + y_j}{D_{ij}} = \cos \Theta \tag{2.18}$$

$$\frac{x}{D_{ij}} = \operatorname{sen} \Theta \tag{2.19}$$

sustituyendo (2.16) y (2.17) en (2.15)

$$L_{ij} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(y_i+y_j)^2 + x^2}{(y_i-y_j)^2 + x^2}} \tag{2.20}$$

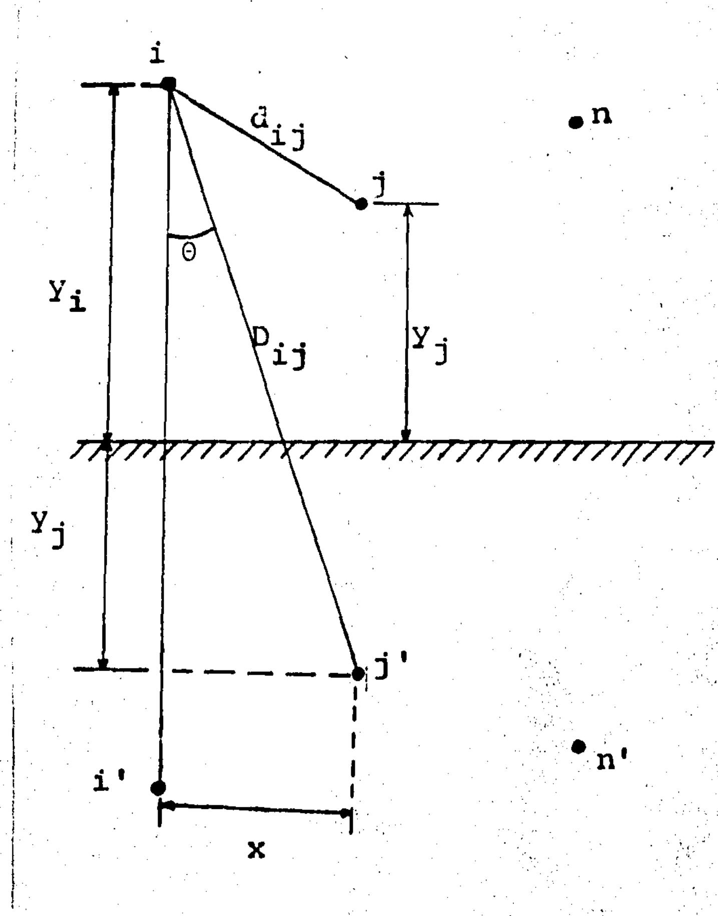


Fig. 2.6

Introduciendo el concepto de la profundidad compleja de penetración, de acuerdo con la fig.2.7, tenemos que

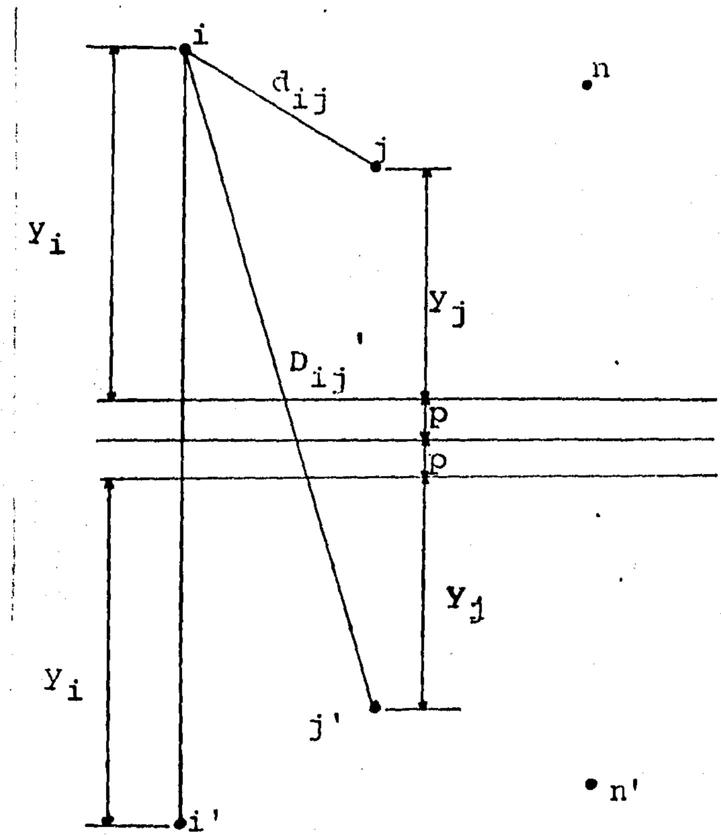


Fig. 2.7 Sistema de conductores reales e imágenes y la profundidad compleja de penetración.

$$L'_{ij} = \frac{\mu}{2\pi} P'_{ij} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D'_{ij}}{d_{ij}} \tag{2.21}$$

donde

L'_{ij} = elemento "ij-ésimo" de la matriz de inductancias para el sistema de la fig.2.7

D'_{ij} = distancia del conductor "i" a la imágen del del conductor "j".

d_{ij} = distancia del conductor "i" al "j".

P'_{ij} = elemento "ij-ésimo" de la matriz de coeficientes de potencial del sistema de la -- fig.2.7 .

de la fig.2.7

$$D'_{ij} = \sqrt{(y_i+y_j+2p)^2 + x^2} \qquad (2.22)$$

sustituyendo (2.17) y (2.22) en (2.21)

$$L'_{ij} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(y_i+y_j+2p)^2 + x^2}{(y_i-y_j)^2 + x^2}} \qquad (2.23)$$

multiplicando por

$$\sqrt{\frac{(y_i+y_j)^2 + x^2}{(y_i+y_j)2 + x^2}} = 1$$

y empleando las reglas de los logarítmos

$$L'_{ij} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(y_i+y_j)^2+x^2}{(y_i-y_j)^2+x^2}} + \frac{\mu}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(y_i+y_j+2p)^2+x^2}{(y_i+y_j)^2 + x^2}}$$

de la ec.(2.20) tenemos entonces que

$$L'_{ij} = L_{ij} + \frac{\mu}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(y_i+y_j+2p)^2 + x^2}{(y_i+y_j)^2 + x^2}} \qquad (2.24)$$

El segundo sumando de la ecuación (2.24) es la inductancia debida al retorno por tierra, que llamaremos L_{Tij}.

Eliminando el radical y desarrollando el argumento del logarítmo

$$L_{Tij} = \frac{\mu}{2\pi}\,\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{(y_i+y_j)^2+4p(y_i+y_j)+4p^2+x^2}{(y_i+y_j)^2+x^2}\right) \qquad (2.25)$$

de (2.16), (2.18) y (2.19)

$$D_{ij}^{\,2} = (\, y_i + y_j \,)^2 + x^2 \qquad (2.26)$$

$$\cos^2\theta = \frac{(\, y_i + y_j \,)^2}{(\, y_i + y_j \,)^2 + x^2} \qquad (2.27)$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{x^2}{(y_i + y_j \,)^2 + x^2} \qquad (2.28)$$

por otra parte

$$\frac{4p\ (y_i + y_j)}{(y_i+y_j)^2+x^2} = 4\left(\frac{p}{D_{ij}}\right)\cos\theta \qquad (2.29)$$

con (2.26), (2.27), (2.28) y (2.29) 2n (2.25)

$$L_{Tij} = \frac{\mu}{4\pi}\ln\left(\, 1 + 4\left(\frac{p}{D_{ij}}\right)\cos\theta + 4\left(\frac{p}{D_{ij}}\right)^2 \right) \qquad (2.30)$$

L_{Tij} es una inductancia generalizada compleja que al multiplicarla por j nos da la contribución del retorno por tierra a la impedancia total de la línea, esto es

$$Z_{Tij} = j\frac{\omega\mu}{4\pi} \ln\left(1 + 4\left(\frac{p}{D_{ij}}\right) \cos\theta + 4\left(\frac{p}{D_{ij}}\right)^2 \right) \qquad (2.31)$$

donde

Z_{Tij} = elemento "ij-ésimo" de la matriz de impedancia debida al retorno por tierra Z_T .

La forma general de la solución que da Carson es

$$Z_{ij} = \frac{\omega\mu}{\pi} \Delta R_{ij} + j \frac{\omega\mu}{\pi} \Delta X_{ij}$$

donde

ΔR_{ij} y ΔX_{ij} son los llamados "términos de corrección de Carson".

De la ecuación (2.30) podemos escribir

$$L_{Tij} = \frac{\mu}{\pi} (1 - jr) \qquad (2.32)$$

donde

$$(1 - jr) = \frac{1}{4}\ln\left(1 + 4\left(\frac{p}{D_{ij}}\right)\cos\theta + 4\left(\frac{p}{D_{ij}}\right)^2 \right) \qquad (2.33)$$

multiplicando (2.32) por j

$$Z_{Tij} = \frac{\omega\mu}{\pi} r + j \frac{\omega\mu}{\pi} 1 \qquad (2.34)$$

Comparando la ec.(2.34) con la solución que da Carson, se puede observar que existe gran similitud en las estructura de las dos expresiones, en realidad esta similitud va más allá, ya que C. Gary [3] comprobó que las dos soluciones proporcionan resultados muy cercanos entre sí.

1.3. Impedancia interna de los conductores.

La impedancia interna de los conductores se debe al fenómeno conocido como "efecto Kelvin" ó "efecto piel", que consiste en que la corriente alterna tiende a circular cerca de la superficie de los conductores.

La causa básica del efecto Kelvin es muy simple, para explicarla, pensemos en un conductor ... m-- puesto por una infinidad de filamentos normales a la sec ción transversal del conductor. Si asumimos que la corriente total es la misma en cualquier sección transversal, entonces esta corriente debe de fluir paralela a los filamentos y toda sección transversal será una superficie equipotencial y por lo tanto todos los filamentos tendrán la misma caída de potencial a lo largo de ellos. Con corriente directa estas condiciones se satisfacen si se considera una densidad uniforme de corriente, pero cuando la corriente es alterna, se produce un campo magnético alterno que induce un determinado voltaje en cada filamento. Como la líneas de flujo magnético son concéntricas alrededor del eje del conductor, habrá líneas que enlacen a los filamentos más cercanos al eje y que no enlacen a los que se encuentren más cerca de la superficie del conductor, por lo que la reactancia de estos últimos será menor. Para cumplir con la condición de igual caída de voltaje a lo largo de todos los filamentos, la densidad de corriente debe de ser mayor en los filamentos con menor reactancia.

El cálculo de la impedancia interna de los conductores reales es muy complicado debido a la configuración irregular de su superficie causada por el trenzado de los hilos, por lo cual, deduciremos primero la ecuación diferencial de distribución de densidad de corriente para un conductor cilíndrico recto y posteriormente daremos aproximaciones ra bajas y altas frecuencias para conductores reales.

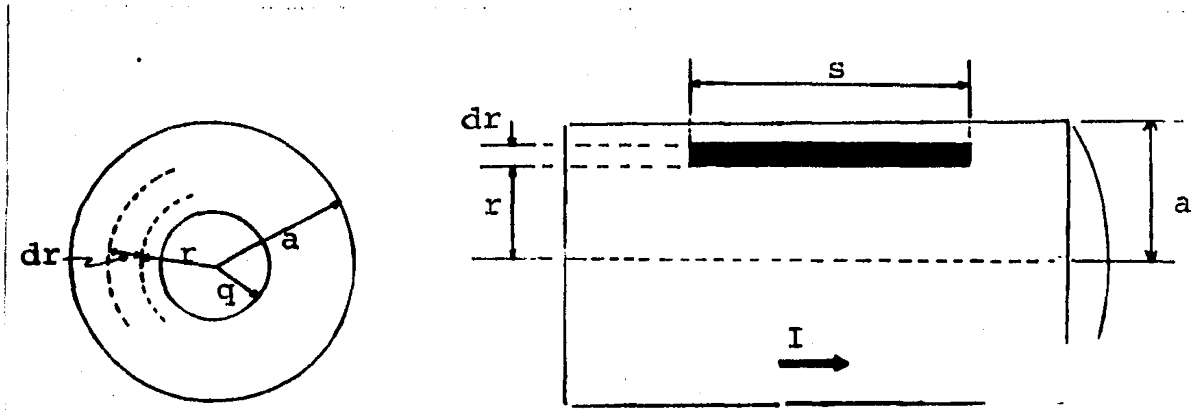
<u>Ecuación diferencial de distribución de densidad de corriente</u>. Consideremos un corte transversal y un corte longitudinal de un conductor cilíndrico recto, como se muestra en la fig.2.8 . Si i(r) es la densidad de corriente a un radio "r" del eje del conductor (en amp/m^2), la corriente total dentro de una capa cualquiera será

$$I_r = \int_q^r 2\pi i(r) r \, dr \qquad \text{Amp} \qquad (2.35)$$

y la caida de voltaje "e" en una longitud "s" de tubo es

$$e = \rho s i(r) + \frac{d\Phi}{dt} \qquad \text{volts} \qquad (2.36)$$

siendo "ρ" la resistividad del conductor .



corte transversal

corte longitudinal

Fig.2.8 Cortes de un conductor cilíndrico recto.

La densidad de flujo magnético a una distancia "r" - del eje del conductor es

$$B = \frac{\mu I_r}{2\pi r} \qquad wb/m^2 \qquad (2.37)$$

y el flujo total en una superficie formada de un radio "r" al radio exterior "a" y con una longitud "s" es

$$\Phi = s\int_r^a \frac{\mu I_r}{2\pi r}\, dr = -\, s\int_a^r \frac{\mu I_r}{2\pi r}\, dr \qquad wb$$

entonces

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\, s\,\frac{\mu I_r}{2\pi r} \qquad (2.38)$$

sustituyendo (2.35) en (2.38) y derivando con respecto a "t"

$$\frac{d}{dt}\frac{d\Phi}{dr} = \frac{d}{dr}\frac{d\Phi}{dt} = -s\,\frac{\mu I_r}{2\pi r}\int_q^r 2\pi r\,\frac{d\,i(r)}{dt}\,dr \tag{2.39}$$

derivando (2.36) con respecto a "r", sustituyendo en (2.39) y como toda sección transversal es una superficie equipotencial

$$\frac{de}{dr} = 0 = \rho s\,\frac{d\,i(r)}{dr} - s\,\frac{\mu I_r}{r}\int_q^r r\,\frac{d\,i(r)}{dt}\,dr \tag{2.40}$$

de aquí

$$r\,\frac{d\,i(r)}{dr} = \frac{\mu}{\rho}\int_q^r r\,\frac{d\,i(r)}{dt}\,dr \tag{2.41}$$

derivando con respecto a "r" y definiendo a

$$m^2 = \frac{\mu\omega}{\rho} \tag{2.42}$$

obtenemos

$$\frac{d^2\,i(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\,i(r)}{dr} = \frac{m^2}{\omega}\,\frac{d\,i(r)}{dt} \tag{2.43}$$

si la corriente es senoidal

$$\frac{d^2\,i}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{di}{dr} - jm^2 i = 0 \tag{2.44}$$

La ecuación (2.44) es conocida como "ecuación diferencial de distribución de densidad de corriente" para un conductor cilíndrico recto y tiene la forma de una ecuación diferencial de Bessel de segundo orden.

La solución general de la ecuación (2.44) es

$$i = (A + jB)\, J_0(mr\sqrt{-j}) + (C + jD)\, K_0(mr\sqrt{-j}) \qquad (2.45)$$

donde

$J_0(mr\sqrt{-j})$ es una función de Bessel de primera clase y orden cero.

$K_0(mr\sqrt{-j})$ es una función de Bessel de segunda clase y orden cero.

A, B, C y D son constantes que deben de ser determinadas.

Por definición

$$J_0(mr\sqrt{-j}) = \mathrm{ber}(mr) + j\,\mathrm{bei}(mr) \qquad (2.46)$$

$$K_0(mr\sqrt{-j}) = \mathrm{ker}(mr) + j\,\mathrm{kei}(mr) \qquad (2.47)$$

donde

ber(mr), bei(mr), ker (mr) y kei(mr) son funciones modificadas de Bessel.

<u>Aproximacion para bajas frecuencias para conductores trenzados</u> . Los conductores reales utilizados en líneas de transmisión estan formados por capas de alambres

que siguen una trayectoria helicoidal alrededor de un eje. Generalmente las cararacterísticas eléctricas de estos conductores se pueden aproximar a las que tienen los conductores macizos con la misma área transversal. En los conductores ACSR el núcleo de acero produce un efecto de magnetización, pero si el conductor tiene dos o más capas de aluminio, los flujos magnéticos se cancelan ya que capas contiguas estan espiradas en sentidos contrarios. De este modo, el comportamiento eléctrico de un conductor ACSR se puede aproximar al comportamiento de un conductor tubular con radio externo igual al radio total del conductor ACSR y con radio interno igual al radio del núcleo de acero. Si el material magnético tiene gran influencia, los cáculos no proporcionan resultados satisfactorios y es necesario realizar mediciones. Como los conductores sólidos son un caso especial de los conductores tubulares, es suficiente con la fórmula para estos últimos [2]:

$$\frac{Zcond}{Rdc} = j\frac{mr}{2}\left(1-\frac{q^2}{r^2}\right)\frac{(ber(mr) + jbei(mr)) + Q(ker(mr)+jkei(mr))}{(ber'(mr)+jbei'(mr))+Q(ker'(mr)+jkei'(mr))} \quad (2.48)$$

donde

$$Q = -\frac{ber'(mq) + j\,bei'(mq)}{ker'(mq) + j\,kei'(mq)} \quad (2.49)$$

Rdc = resistencia a la corriente directa en Ω/m

q = radio interno

r = radio externo

Si

$$u = q/r \qquad (2.50)$$

entonces

$$(mr)^2 = \frac{k}{1 - u^2} \qquad (2.51)$$

$$(mq)^2 = \frac{ku^2}{1 - u^2} \qquad (2.52)$$

donde

$$k = \frac{8\pi\, f\, \mu_r\, 10^{-7}}{Rdc} \qquad (2.53)$$

siendo "f" la frecuencia de operación en hertz y μ_r la permeabilidad relativa de la parte conductora.

las funciones modificadas de Bessel ber(..)+jbei(..), ber'(..)+jbei'(..), ker(..)+jkei(..) y ker'(..)+jkei'(..) se pueden calcular según [4] por medio de aproximaciones polinomiales.

<u>Aproximaciones para altas frecuencias para conductores trenzados</u>. En altas frecuencias es indistinto que los conductores tengan un núcleo de material distinto a la parte conductora o no, pués la corriente circula por una capa muy delgada cerca de la superficie del conductor, entonces, el comportamiento de los conductores depende de las condiciones en que se encuentre su superficie.

Una aproximación muy utilizada es la propuesta por Galloway, Shorrock y Wedephol [1] . Esta aproximación se basa en la suposicion de que a muy altas frecuencias la intensidad de campo magnético es tangencial a la superficie de las espiras de la capa externa y proporcional a la densidad de corriente superficial :

$$Zc = \frac{k\,\rho}{\pi r(2+n)\;p} \tag{2.54}$$

donde

Zc = impedancia interna del conductor

ρ = resistividad del material conductor

r = radio de los hilos externos

n = núm. de hilos en la capa externa

k = factor que para 6, 12, 18, 24 hilos en la última capa es igual a 2.25

$p = \sqrt{\frac{\rho}{j\mu\omega}}$: profundidad de penetración compleja

μ = permeabilidad absoluta del material conductor

Esta aproximación es más exacta cuando la profundidad compleja de penetración es pequeña comparada con el radio de los hilos. Para los conductores comúnmente usados se obtiene una buena aproximación para frecuencias arriba de 2-5 kHz.

Otra aproximación que es muy utilizada para frecuencias mayores de 50 kHz, es la que propone C. Gary [3] :

$$Rc = \frac{t}{2\pi nr} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \tag{2.55}$$

donde

t = coeficiente de trenzado (entre 3 y 3.5)

n = número de conductores en haz

$\mu = \mu_0\mu_r$ = permeabilidad absoluta de los conductores.

σ = conductividad de los conductores.

Rc = resistencia del haz

como en altas frecuencias

$$Xc = Rc \tag{2.56}$$

la impedancia será

$$Zc = (1 + j)\ Rc \tag{2.57}$$

como

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{j}}{1 + j}$$

entonces

$$Zc = \frac{t}{2\pi nr} \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \tag{2.58}$$

empleando la profundidad compleja de penetración tenemos finalmente que

$$Zc = \frac{t}{2\pi nrp} \tag{2.59}$$

2. CALCULO DE LA MATRIZ DE ADMITANCIA EN PARALELO.

La admitancia en paralelo para el caso monofásico esta dada por

$$y(\omega) = g + j\omega c \tag{2.60}$$

donde

g es la conductancia transversal .

c es la capacitancia del conductor a tierra.

En las líneas de transmisión, generalmente la conductancia es despreciable, por lo que la admitancia será entonces

$$y(\omega) = j\omega c \tag{2.61}$$

Campo eléctrico producido por un conductor.

Al aplicar una diferencia de potencial entre los conductores de una línea de transmisión, éstos se cargan como si fueran las placas de un capacitor. La carga que adquieren los conductores esta dada por

$$q = c\ V \tag{2.62}$$

donde

V : voltaje aplicado.

q : carga eléctrica .

c : capacitancia .

Si el voltaje aplicado es alterno, la carga variará en forma alterna también. Como la variación de la carga en el tiempo representa una corriente, en una línea de transmisión a la que se le aplica un voltaje alterno se producirá una corriente que circula aún cuando la línea esté en circuito abierto. Esta corriente recibe el nombre de "corriente de carga" .

Por definición el flujo eléctrico se origina en cargas positivas y termina en cargas negativas. Un coulomb de carga eléctrica produce un coulomb de flujo eléctrico, lo que significa que el flujo eléctrico que se origina un conductor es numericamente igual al número de coulombs de carga que posee.

Si en un conductor cilíndrico la carga esta uniformemente repartida, la líneas de flujo eléctrico serán radiales y todos los puntos equidistantes al eje del conductor formaran una superficie equipotencial, fig.2.9 .

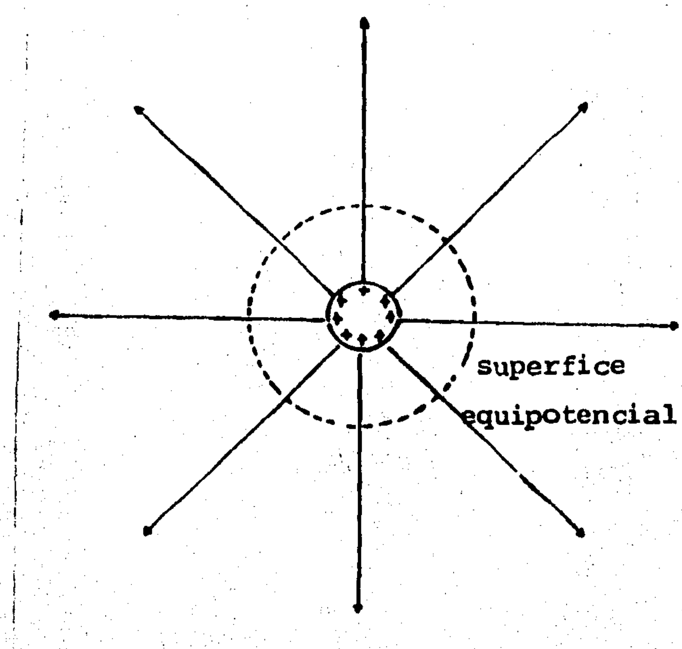


Fig. 2.9

La ley de Gauss establece que "el flujo total que sale de una superficie cerrada es igual a la carga neta contenida dentro de la superficie ".

$$\oint \hat{D} \cdot \hat{ds} = Qenc \qquad (2.63)$$

de acuerdo con (2.63) y basándonos en la fig. 2.10, en la que se muestra una superficie gaussiana apropiada para este caso, la carga contenida en una longitud "a" de conductor es

$$Q = \int_1 \hat{D} \cdot \hat{ds} + \int_2 \hat{D} \cdot \hat{ds} + \int_3 \hat{D} \cdot \hat{ds} \qquad (2.64)$$

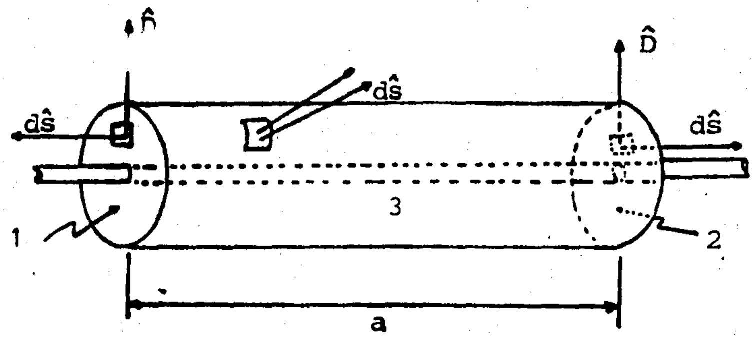


Fig. 2.10

como $\hat{D}$ y $\hat{ds}$ son ortogonales en las superficies 1 y 2 las - integrales se anulan, en 3,$\hat{D}$ y $\hat{ds}$ son paralelas y del mismo sentido si Q es positiva y paralelas con sentidos contra--- rios si Q es negativa, además como el radio del conductor - es constante, $\hat{D}$ también lo es. Así pues

$$Q = D \int_s ds = D\ (2\pi x a) \qquad (2.65)$$

para a=1 m

$$D = \frac{Q}{2\pi x} \quad \text{coulomb/m}^2 \qquad (2.66)$$

donde

Q es la carga que tiene el conductor en 1 metro de longitud.

x es el radio de la superficie equipotencial.

D es la densidad de flujo eléctrico.

La intensidad de campo eléctrico a una distancia "x" del conductor es

$$E = \frac{Q}{2\pi x \varepsilon} \quad \text{volt/m} \qquad (2.67)$$

donde

ε = constante dieléctrica de la región alrededor del conductor en farad·m

Diferencia de potencial entre dos puntos externos a un conductor.

El potencial de un punto "p_1" con respecto a un punto "p_2" se define como el trabajo realizado al mover una carga positiva unitaria "q" de p_2 a p_1, esto es

$$v_{12} = \frac{W}{q} = -\int_{p_2}^{p_1} E\cdot dx \quad \text{volts} \qquad (2.68)$$

o

$$v_{12} = \int_{p_1}^{p_2} E\cdot dx \quad \text{volts} \qquad (2.69)$$

Como la diferencia de potencial entre los puntos p_1 y p_2 es independiente de la trayectoria de integración, esta diferencia de potencial se puede calcular encontrando la tensión que existe entre las superficies equipotenciales - que pasan por estos puntos. Según la fig. 2.11, la diferencia de potencial entre p_1 y p_2 es

$$v_{12} = \int_{d_1}^{d_2} \frac{Q}{2\pi x \varepsilon}\, dx \qquad (2.70)$$

realizando la integración

$$v_{12} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon} \ln\frac{d_2}{d_1} \quad \text{volts} \qquad (2.71)$$

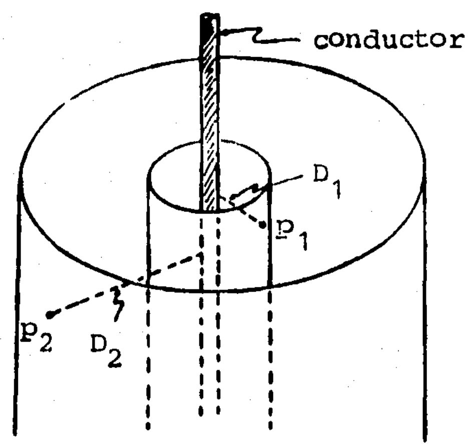


Fig. 2.11

Capacitancia de un circuito n-fásico.

Consideremos un circuito de "n" fases con un conductor por fase de radios r_1, r_2, ... ,r_n como se muestra en la -

fig. 2.12

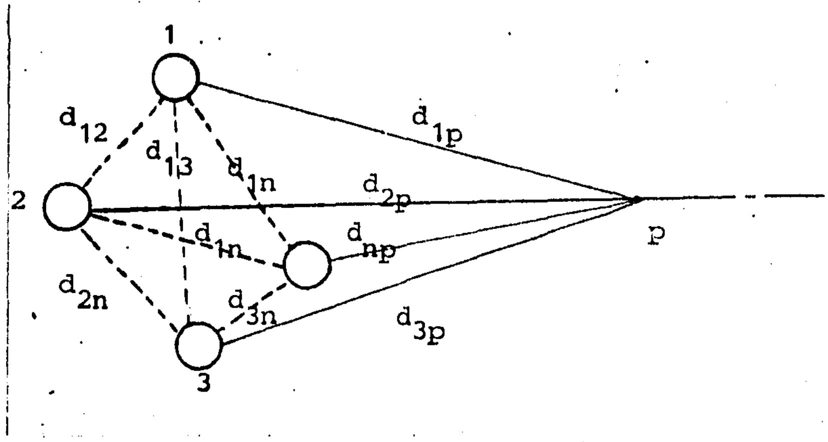


Fig. 2.12

Si Q_1, Q_2, ... , Q_n son las cargas eléctricas de los "n" conductores, se cumple que

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = 0 \tag{2.72}$$

La diferencia de potencial entre un punto de la superficie del conductor 1 y el punto "p", será la suma de las diferencias de potencial debidas a las cargas de los "n" conductores entre estos dos puntos. De la ec.(2.71)

$$V_{1p} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{d_{1p}}{r_1} + \ldots + \frac{Q_n}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{d_{np}}{d_{1n}} \tag{2.73}$$

como

$$Q_n = - Q_1 - Q_2 - \ldots - Q_n \tag{2.74}$$

y si se aleja el punto "p" hasta el infinito (hasta un potencial cero), entonces

$$V_1 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon} \ln\frac{d_{1n}}{r_1} + \dots + \frac{Q_{(n-1)}}{2\pi\varepsilon} \ln\frac{d_{1n}}{d_{1(n-1)}} \qquad (2.75)$$

separando los numeradores y los denominadores y con la ec. (2.74)

$$V_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \left(Q_1 \ln\frac{1}{r_1} + \dots + Q_n \ln\frac{1}{d_{1n}} \right) \qquad (2.76)$$

y en forma similar para el resto de los conductores

$$V_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \left(Q_1 \ln\frac{1}{d_{12}} + \dots + Q_n \ln\frac{1}{d_{1n}} \right)$$

$$\vdots$$

$$V_n = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \left(Q_1 \ln\frac{1}{d_{1n}} + \dots \quad Q_n \ln\frac{1}{r_n} \right) \qquad (2.77)$$

en forma matricial

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \begin{bmatrix} \ln\frac{1}{r_1} & \dots & \ln\frac{1}{d_{1n}} \\ & & \\ \ln\frac{1}{d_{1n}} & \dots & \ln\frac{1}{r_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_n \end{bmatrix} \qquad (2.78)$$

en forma simplificada y de acuerdo con la ec.(2.62)

$$\hat{V} = C^{-1} \hat{Q} \qquad (2.79)$$

El efecto del retorno por tierra y la matriz de admitancia en paralelo.

Si la tierra se considera como un conductor perfecto, de acuerdo con las condiciones de frontera, el campo eléctrico bajo la superficie de la tierra es cero. Esta condición se cumple si bajo de la superficie del terreno se concentra el mismo número de cargas, pero de signo contrario, que las que posee el conductor, como se muestra en la fig. 2.13

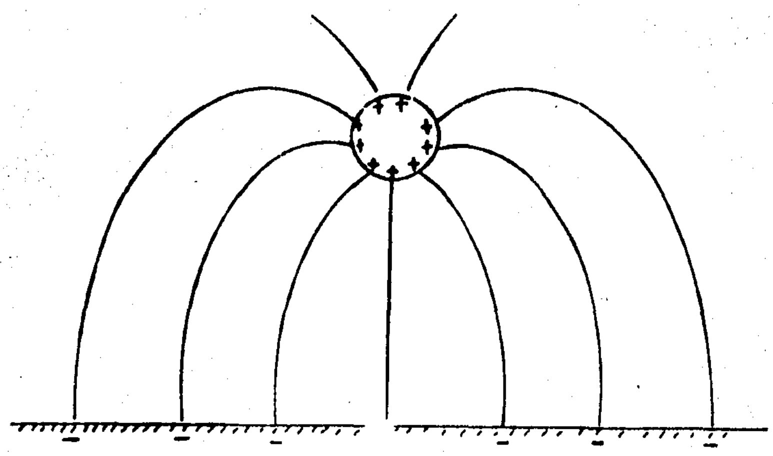


Fig. 2.13 Efecto de la tierra sobre el campo eléctrico.

La configuración de la fig. 2.13 se puede obtener si sustituimos el plano de tierra por un conductor ficticio, que contenga una carga de signo contrario y de igual magnitud que la del conductor real, situado a una distancia "h" bajo del plano de tierra (fig. 2.14)

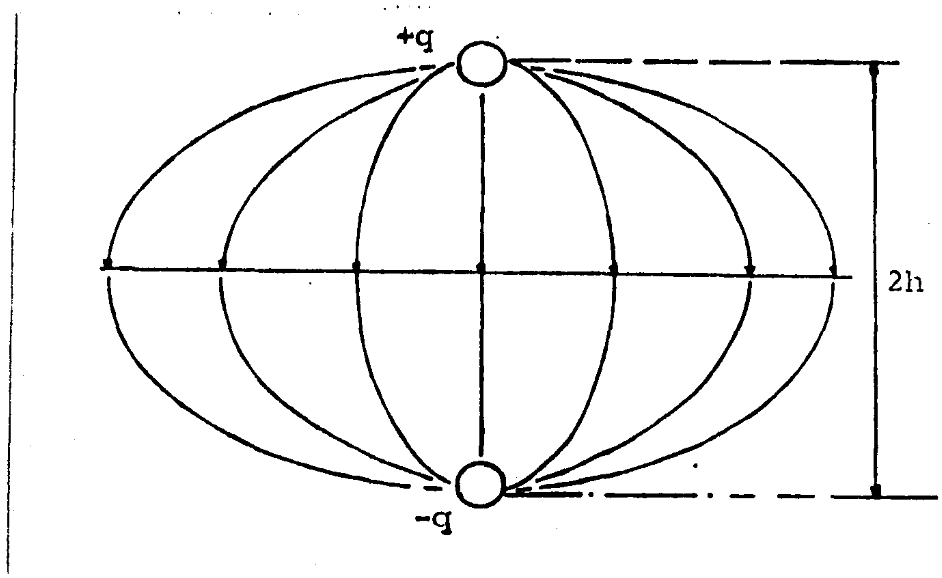


Fig. 2.14 Sustitución del plano de tierra por un conductor ficticio.

Empleando el método de las imágenes para un circuito -n-fásico tendremos la configuración mostrada en la fig.2.15 donde

D_{ij} = distancia del conductor "i" a la imagen del conductor "j".

d_{ij} = distancia del conductor "i" al "j" .

= r_i = radio del conductor "i" cuando i=j .

de la ec.(2.77) y agrupando términos tenemos que

$$V_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \left(Q_1 \ln\frac{D_{11}}{d_{11}} + \ldots + Q_n \ln\frac{D_{1n}}{d_{1n}}\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$V_n = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \left(Q_1 \ \ln\frac{D_{1n}}{d_{1n}} + \ldots + Q_n \ \ln\frac{D_{nn}}{d_{nn}} \right) \qquad (2.80)$$

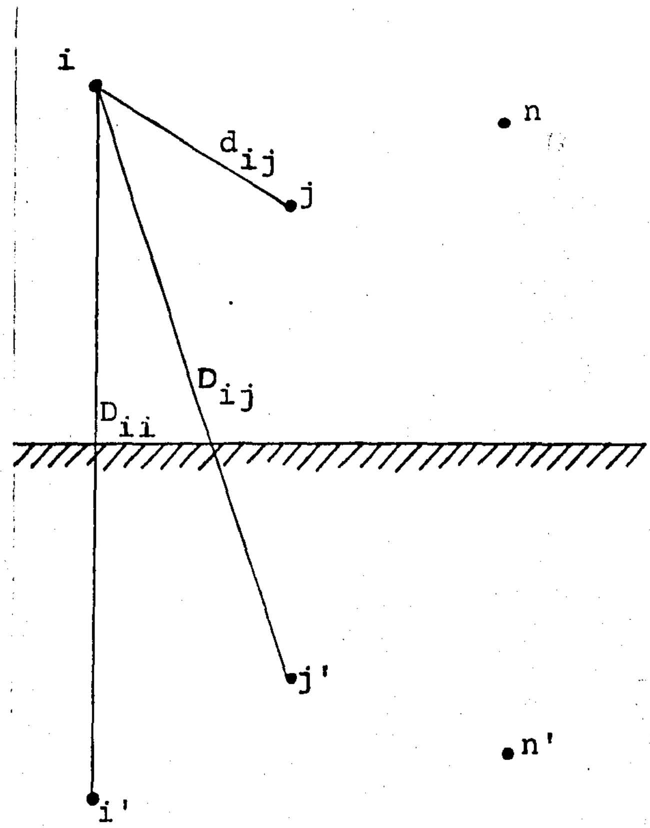


Fig. 2.15

en forma matricial

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \begin{bmatrix} \ln\frac{D_{11}}{d_{11}} & \ldots & \ln\frac{D_{1n}}{d_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \ln\frac{D_{1n}}{d1n} & \ldots & \ln\frac{D_{nn}}{d_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_n \end{bmatrix} \qquad (2.81)$$

la matriz de términos logarítmicos de la ec.(2.81) es la matriz de coeficientes de potencial, así que

$$\hat{V} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \mathbf{P} \hat{Q} \tag{2.82}$$

y como

$$\hat{V} = \mathbf{C}^{-1} \hat{Q}$$

entonces

$$\mathbf{C} = 2\pi\varepsilon \, \mathbf{P}^{-1} \tag{2.83}$$

finalmente la matriz de admitancia en paralelo será

$$\mathbf{Y} = j\omega 2\pi\varepsilon \mathbf{P}^{-1} \tag{2.84}$$

Hay que notar que no se ha empleado el concepto de la profundidad compleja de penetración, esto es posible porque la admitancia no varía en forma apreciable a menos que el terreno tenga un comportamiento muy cercano al de un dieléctrico.

En la ec.(2.83) la matriz de capacitancia se encuentra en forma nodal, esto es, que el elemento C_{ii} de la diagonal principal es la suma de las capacitancias entre el conductor "i", tierra y el resto de los conductores, y el elemento $C_{ij}=C_{ji}$, que esta fuera de la diagonal principal es el negativo de la capacitancia entre el conductor "i" y el "j"

El modelo que representa a la matriz de capacitancia, para el caso de un circuito trifásico con un conductor por fase se muestra en la fig.2.16

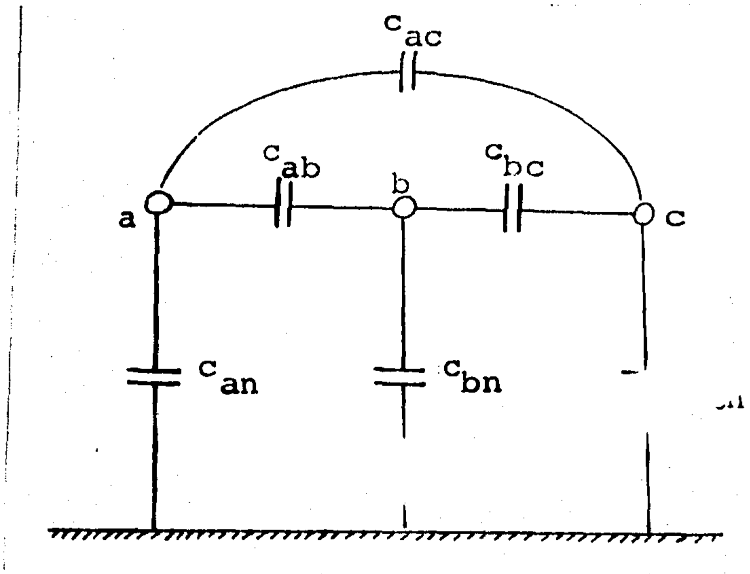


Fig. 2.16 Modelo nodal de capacitancias .

3. REDUCCION DE LAS MATRICES DE IMPEDANCIA Y ADMITANCIA .

En las líneas de transmisión en alto voltaje se utilizan varios conductores por fase y uno o dos cables de guarda. Los conductores de guarda, que estan aterrizados en cada torre, tienen la finalidad de proteger al circuito contra descargas atmosféricas, y los haces de conductores, son utilizados para aumentar el radio equivalente del circuito para reducir el "efecto corona".

El uso de conductores en haz y de conductores de guarda origina que las matrices de impedancia y admitancia sean de un orden muy grande y difíciles de manejar, además de que contienen más información de la que usualmente es necesaria, debido a esto es conveniente reducir las matrices de manera que nos representen un sistema con un solo conductor por fase por circuito y sin conductores de guarda.

3.1. Reducción de haces de conductores con configuración simétrica.

Generalmente en una línea de transmisión de energía eléctrica con varios conductores por fase se puede suponer sin mucho error que (fig. 2.17) :

a). Los "n" conductores del haz estan dispuestos simétricamente sobre un círculo de radio "R".

b). La corriente se distribuye uniformemente en todos los subconductores. Esto implica que todos los subconductores tienen el mismo radio.

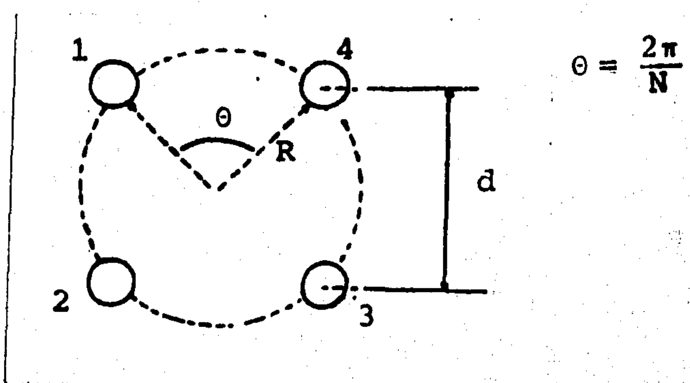


Fig. 2.17

De esta manera el haz de conductores se puede reemplazar por un conductor equivalente de radio

$$r_{eq} = (N\ r\ R^{N-1})^{1/N} \tag{2.85}$$

donde

r = radio de los conductores

N = núm. de conductores en haz.

R = radio del haz

Si se conoce sólo el número de conductores y la distancia entre conductores contiguos

$$R = \frac{d}{2\ \mathrm{sen}(\pi/2N)}$$

donde

d = distancia entre conductores contiguos.

Debemos señalar que esta reducción se efectúa antes de generar las matrices de impedancia y admitancia.

3.2. Reducción de haces de conductores con configuración no simétrica.

Cuando la configuración del haz no es simétrica en una forma muy notoria y/o los subconductores tienen radios diferentes se produce una distribución no uniforme de corriente , por lo que se tendrá un error muy grande si se efectúa la reducción a un conductor equivalente. En este caso se recurre a la reducción que se expone en seguida, la cual se - efectúa despues de haber generado las matrices de paráme---

tros eléctricos. Este procedimiento de reducción puede ser empleado también para reducir circuitos paralelos a un solo circuito equivalente.

Las ecuaciones de voltaje de una línea de transmisión con múltiple número de conductores son

$$-\frac{d\hat{V}}{dx} = \mathbf{Z}\ \hat{I} \tag{2.86}$$

$$\hat{V} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\mathbf{P}\ \hat{Q} \tag{2.87}$$

Si consideramos que todos los subconductores en un haz se encuentran a un mismo potencial y que la corriente total se distribuye en todos ellos, para una cierta fase "i" se cumple que

$$\frac{dV_{i1}}{dx} = \ . \ . \ . = \frac{dV_{in}}{dx}$$

$$I_{i1} + \ . \ . \ . + I_{in} = I_T$$

$$Q_{i1} + \ . \ . \ . + Q_{in} = Q_T$$

$$V_{i1} = \ . \ . \ . = V_{in} \tag{2.88}$$

Desarrollando la ecuación (2.86) suponiendo que se tienen tres conductores en la línea para facilitar la explicación

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \qquad (2.89)$$

Si los conductores 2 y 3 forman un haz, entonces la - reducción se efectúa restando el segundo renglón el tercer renglón

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31}-Z_{21} & Z_{32}-Z_{22} & Z_{33}-Z_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3-I_2 \end{bmatrix}$$

para restablecer la simetría de la matriz :

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13}-Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23}-Z_{22} \\ Z_{31}-Z_{21} & Z_{32}-Z_{22} & Z'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3-I_2 \end{bmatrix} \qquad (2.90)$$

donde

$$Z'_{33} = Z_{33} - Z_{23} - Z_{32} + Z_{22} \qquad (2.91)$$

para la ecuación (2.87) se sigue el mismo procedimiento.

La ec.(2.90) tiene la misma forma que la que se obtiene con los conductores de guarda -como se verá más adelante- por lo que la reducción se realiza con el procedimiento que se muestra en la siguiente sección.

3.3. Reducción de los conductores de guarda.

Para reducir el orden de las matrices de impedancia y admitancia de sistemas con conductores de guarda, debemos incluir el efecto de estos conductores en la impedancia y - admitancia de los conductores de fase. Como los conductores de guarda se conectan a tierra en cada torre [illegible] ner que se encuentran a un potencial [illegible] ca suposición es válida para distancias entr[illegible]es mucho menores que la longitud de onda, lo que generalmente se cumple para las - frecuencias de interes (hasta 300 kHz), si no es así, el - voltaje que se puede presentar en algún punto de los conductores de guarda puede ser bastante significativo.

Volviendo a las ecuaciones de voltaje de una línea multiconductora, desarrollemos por medio de una partición la ec.(2.86)

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{d\hat{V}_\phi}{dx} \\ \\ -\dfrac{d\hat{V}_g}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\phi\phi} & Z_{\phi g} \\ \\ Z_{g\phi} & Z_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_\phi \\ \\ \hat{I}_g \end{bmatrix} \qquad (2.92)$$

donde

$Z_{\phi\phi}$ matriz de impedancias mutuas y propias entre los conductores de fase.

Z_{gg} matriz de impedancias mutuas y propias entre los conductores de guarda.

$Z_{g\phi}$, $Z_{\phi g}$ matrices de impedancia mutua entre los conductores de fase y los de guarda.

desarrollando

$$-\frac{d\hat{V}_\phi}{dx} = Z_{\phi\phi}\ \hat{I}_\phi + Z_{\phi g}\ \hat{I}_g \tag{2.93}$$

$$-\frac{d\hat{V}_g}{dx} = Z_{g\phi}\ \hat{I}_\phi + Z_{gg}\ \hat{I}_g \tag{2.94}$$

como

$\frac{d\hat{V}_g}{dx} = 0$, entonces de la ec.(2.94)

$$\hat{I}_g = -\ Z_{gg}^{-1}\ Z_{g\phi}\ \hat{I}_\phi \tag{2.95}$$

sustituyendo (2.95) en (2.93)

$$-\frac{d\hat{V}_\phi}{dx} = Z_{redu}\ \hat{I}_\phi \tag{2.96}$$

donde

$$Z_{redu} = Z_{\phi\phi} - Z_{\phi g}\ Z_{gg}^{-1}\ Z_{g\phi} \tag{2.97}$$

de la ec.(2.97) definimos a la matriz de aportacion de los conductores de guarda a la matriz de impedancia como

$$Z_{HG} = -\ Z_{\phi g}\ Z_{gg}^{-1}\ Z_{g\phi} \tag{2.98}$$

Siguiendo el mismo procedimiento en la ec.(2.87) tenemos que

$$\hat{V}_\phi = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \mathbf{P}_{redu} \hat{Q}_\phi \tag{2.99}$$

donde

$$\mathbf{P}_{redu} = \mathbf{P}_{\phi\phi} - \mathbf{P}_{\phi g} \mathbf{P}_{gg}^{-1} \mathbf{P}_{g\phi} \tag{2.100}$$

de la ec.(2.99)

$$\hat{Q}_\phi = 2\pi\varepsilon (\mathbf{P}_{redu})^{-1} \hat{V}_\phi \tag{2.101}$$

para condiciones de estado estable, el vector de cargas como fasor se relaciona con el vector de corrientes de fuga $d\hat{I}/dx$ por

$$\hat{Q} = -\frac{1}{j\omega} \frac{d\hat{I}}{dx} \tag{2.102}$$

entonces tenemos que

$$-\frac{d\hat{I}_\phi}{dx} = j\omega 2\pi\varepsilon (\mathbf{P}_{redu})^{-1} \hat{V}_\phi \tag{2.103}$$

Las ecuaciones (2.96) y (2.103) son las ecuaciones de propagación reducidas para una línea con conductores de guarda.

Al procedimiento de reducción descrito en esta sección se le conoce con el nombre de "reducción de Kron".

Una forma más sencilla de reducir la matriz de admitancia consiste en partir de la ecuación

$$- \frac{d\hat{I}}{dx} = \mathbf{Y}\ \hat{V}$$

desarrollando

$$\begin{bmatrix} - \dfrac{d\hat{I}_{\phi\phi}}{dx} \\ \\ - \dfrac{d\hat{I}_{g}}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{\phi\phi} & \mathbf{Y}_{\phi g} \\ \\ \mathbf{Y}_{g\phi} & \mathbf{Y}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}_{\phi} \\ \\ \hat{V}_{g} \end{bmatrix}$$

como $\hat{V}_g = 0$, entonces

$$- \frac{d\hat{I}_{\phi}}{dx} = \mathbf{Y}_{\phi}\ \ \hat{V}_{\phi}$$

De las dos formas presentadas para reducir la matriz **Y**, ninguna presenta ventaja apreciable en tiempo de computo, pues si bien en la segunda forma solo es necesario invertir la matriz **P**, sin tener que efectuar antes la reducción de Kron, esta matriz, es de mayor orden que la matriz $\mathbf{P}_{redu}$, la cual se debe de invertir si se emplea la primera forma, además, cabe mencionar que los dos procedimientos proporcionan los mismos resultados.

4. RESUMEN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO PARA EL CALCULO DE PARAMETROS ELECTRICOS DE LINEAS DE TRANSMISION.

1). Obtener los datos necesarios : Configuración geométrica de la línea, tipo y material de los conductores, - datos geométricos de los conductores, resistividad del terreno, frecuencia.

2). Efectuar la reducción de los haces de conductores a un conductor equivalente. Se utiliza el radio medio geométrico.

3). Formar la matriz de coeficientes de potencial **P** a partir de la geometría de la línea.

4). Calcular la impedancia geométrica $\mathbf{Z}_g$.

5). Calcular la impedancia debida al retorno por tierra $\mathbf{Z}_T$

6). Calcular la impedancia interna de los conductores con alguna de las aproximaciones dependiendo de la frecuencia de operación.

7). Formar la matriz de impedancia serie completa

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_T + \mathbf{Z}_c$$

debemos notar que la matriz $\mathbf{Z}_c$ es diagonal por lo que solo afecta la diagonal principal de **Z**.

8). Se efectúa la reducción de Kron en **Z** para obtener $\mathbf{Z}_{redu}$.

9). Se calcula la matriz $\mathbf{Y}_{redu}$

Ejemplo de aplicación :

Con el fin de mostrar una aplicación práctica de las rutinas para computadora digital desarrolladas, se calcularon los parámetros eléctricos de una línea de 400 kV similar a las utilizadas por la Comisión Federal de Electricidad. La configuración de la línea se muestra en la fig.2.18

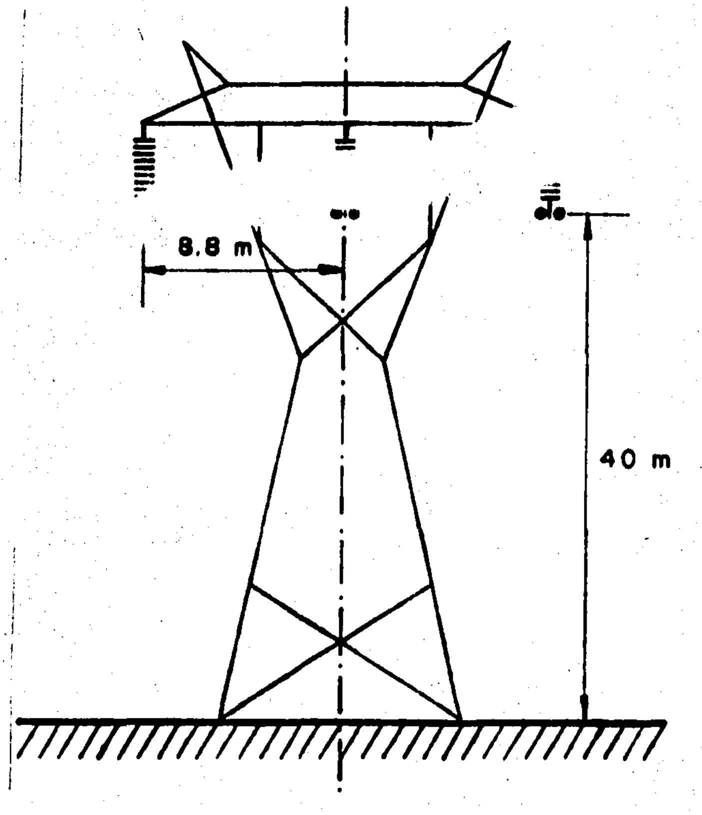


Fig. 2.18

Se consideraron los siguientes datos

conductores de fase :

ACSR de 1.113 MCM

conductores de guarda :

conductores de acero galvanizado

resistividad del terreno = 100 ohm-m

frecuencia = 250 kHz

Los resultados que se obtuvieron son los siguientes :

MATRIZ DE COEFICIENTES DE POTENCIAL

6.49245	1.69427	1.04935	1.92003	1.22418
1.69427	6.49245	1.69427	1.73959	1.73959
1.04935	1.69427	6.49245	1.22418	1.92003
1.92003	1.73959	1.22418	9.60244	1.65671
1.22418	1.73959	1.92003	1.65671	9.60244

MATRIZ DE IMPEDANCIA GEOMETRICA OHM/METRO

0+J4.07933	0+J1.06454	0+J0.65933	0+J1.20639	0+J0.76918
0+J1.06454	0+J4.07933	0+J1.06454	0+J1.09302	0+J1.09302
0+J0.65933	0+J1.06454	0+J4.07933	0+J0.76918	0+J1.20639
0+J1.20639	0+J1.09302	0+J0.76918	0+J6.03339	0+J1.04094
0+J0.76918	0+J1.09302	0+J1.20639	0+J1.04094	0+J6.03339

IMPEDANCIA DE TIERRA OHMS/M

.0734399+J.0827813	.0715361+J.0800972	.0663659+J.0729791	.0642995+J.0713630	.0608730+J.0667643
.0715361+J.0800972	.0734399+J.0827813	.0715361+J.0800972	.0638129+J.0707035	.0638129+J.0707035
.0663659+J.0729791	.0715361+J.0800972	.0734399+J.0827813	.0608730+J.0667643	.0642995+J.0713630
.0642995+J.0713630	.0638129+J.0707035	.0608730+J.0667643	.0573833+J.0629752	.0556717+J.0607396
.0608730+J.0667643	.0638129+J.0707035	.0642995+J.0713630	.0556717+J.0607396	.0573833+J.0629752

IMPEDANCIA SKIN DE FASES OHMS/M (3.9647678E-03,3.9647678E-03)

IMPEDANCIA SKIN DE HGs. OHMS/M (2.7296219E-02,2.7296219E-02)

IMPEDANCIA TOTAL OHMS/METRO

0.7740E-01+J0.4166E+01	0.7154E-01+J0.1145E+01	0.6637E-01+J0.7323E+00	0.6430E-01+J0.1278E+01	0.6087E-01+J0.8359E+00
0.7154E-01+J0.1145E+01	0.7740E-01+J0.4166E+01	0.7154E-01+J0.1145E+01	0.6381E-01+J0.1164E+01	0.6381E-01+J0.1164E+01
0.6637E-01+J0.7323E+00	0.7154E-01+J0.1145E+01	0.7740E-01+J0.4166E+01	0.6087E-01+J0.8359E+00	0.6430E-01+J0.1278E+01
0.6430E-01+J0.1278E+01	0.6381E-01+J0.1164E+01	0.6087E-01+J0.8359E+00	0.8468E-01+J0.6124E+01	0.5567E-01+J0.1102E+01
0.6087E-01+J0.8359E+00	0.6381E-01+J0.1164E+01	0.6430E-01+J0.1278E+01	0.5567E-01+J0.1102E+01	0.8468E-01+J0.6124E+01

IMPEDANCIA REDUCIDA OHMS/M

0.465937E-01+J0.383796E+01	0.393115E-01+J0.804682E+00	0.359334E-01+J0.443063E+00
0.393115E-01+J0.804682E+00	0.435660E-01+J0.379168E+01	0.393115E-01+J0.804682E+00
0.359334E-01+J0.443063E+00	0.393115E-01+J0.804682E+00	0.465937E-01+J0.383796E+01

MATRIZ DE CAPACITANCIA FDS/M

0.9661E-11	-.1826E-11	-.6614E-12	-.1426E-11	-.5224E-12
-.1826E-11	0.1007E-10	-.1826E-11	-.1046E-11	-.1046E-11
-.6614E-12	-.1826E-11	0.9661E-11	-.5224E-12	-.1426E-11
-.1426E-11	-.1046E-11	-.5224E-12	0.6436E-11	-.6347E-12
-.5224E-12	-.1046E-11	-.1426E-11	-.6347E-12	0.6436E-11

MATRIZ DE ADMITANCIA MHO/M

0+J0.3035E-04	0+J-.5738E-05	0+J-.2078E-05	0+J-.4481E-05	0+J-.1641E-05
0+J-.5738E-05	0+J0.3164E-04	0+J-.5738E-05	0+J-.3286E-05	0+J-.3286E-05
0+J-.2078E-05	0+J-.5738E-05	0+J0.3035E-04	0+J-.1641E-05	0+J-.4481E-05
0+J-.4481E-05	0+J-.3286E-05	0+J-.1641E-05	0+J0.2022E-04	0+J-.1994E-05
0+J-.1641E-05	0+J-.3286E-05	0+J-.4481E-05	0+J-.1994E-05	0+J0.2022E-04

MATRIZ DE ADMITANCIA REDUCIDA MHO/M

0+J0.3035E-04	0+J-.5738E-05	0+J-.2078E-05
0+J-.5738E-05	0+J0.3164E-04	0+J-.5738E-05
0+J-.2078E-05	0+J-.5738E-05	0+J0.3035E-04

R E F E R E N C I A S :

1 "Calculation of electrical parameters for short and long polyphase transmission lines"
R. H. Galloway, W. B. Shorrocks, L. M. Wedephol
Proc. IEE, vol.III, No.12, December, 1964 .

2 "The resistance and reactance of Aluminum conductors, Steel Reinforced"
W.A. Lewis, P. D. Tutle
IEEE trans.,vol 77, February 1958 .

3. "Estudio de la propagación en altas frecuencias en líneas multiconductoras utilizando matrices complejas"
C. Gary .
E. D. F. Bulletin de la direction des etudes et recherches, No. 3/4, 1976 serie B.

4 "Handbook of mathematical functions"
M. Abramowitz and J. A. Stegun
U.S. Dept. of Commerce, 1964

CAPITULO 3

ANALISIS MODAL

1. SOLUCION A LAS ECUACIONES DE PROPAGACION MATRICIALES.

Al emplear el análisis modal para encontrar la solu-- ción de las ecuaciones de propagación matriciales, se lo-- gra una separación de variables, de tal manera que un sis- tema de "n" ecuaciones con "n" incógnitas, con todas las incógnitas involucradas en todas y cada una de las ecuacio nes, se convierte en una serie de "n" ecuaciones con una - sola incógnita en cada ecuación.

Considerese las ecuaciones de propagación para una - línea de transmisión multiconductora

$$\frac{d^2\ \hat{V}}{dx^2} = \mathbf{A}\ \hat{V} \tag{3.1}$$

$$\frac{d^2\ \hat{I}}{dx^2} = \mathbf{A}_t\ \hat{I} \tag{3.2}$$

donde

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}\ \mathbf{Y} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_t = \mathbf{Y}\ \mathbf{Z} \tag{3.3}$$

Si **M** es la matriz que diagonaliza a **A** , se tiene que

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\,\lambda\,\mathbf{M}^{-1} \tag{3.4}$$

donde

λ = matriz diagonal de eigenvalores de $\mathbf{A}$

$\mathbf{M}$ = matriz de eigenvectores de $\mathbf{A}$

de la ec.(3.4)

$$\lambda = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{M} \tag{3.5}$$

Sustituyendo (3.4) en (3.1)

$$\frac{d^2\,\hat{V}}{dx^2} = \mathbf{M}\,\lambda\,\mathbf{M}^{-1}\,\hat{V} \tag{3.6}$$

A la matriz $\mathbf{M}$ tambien se le conoce con el nombre de "matriz de modos de propagación de voltaje" y sus columnas reciben el nombre de "modos de propagación de voltaje".

Premultiplicando ambos miembros de la ec.(3.6) por $\mathbf{M}^{-1}$ y como $\mathbf{M}$ es independiente de la variable espacial "x"

$$\frac{d^2\,\mathbf{M}^{-1}\,\hat{V}}{dx^2} = \lambda\,\mathbf{M}^{-1}\,\hat{V} \tag{3.7}$$

Definamos al vector de voltajes "modales" o de "contenidos modales" como

$$\hat{V}m = \mathbf{M}^{-1}\,\hat{V} \tag{3.8}$$

de la ec.(3.8)

$$\hat{V} = \mathbf{M}\,\hat{V}m \qquad (3.9)$$

Haciendo una partición por columnas y desarrollando la ec.(3.9)

$$\hat{V} = Vm_1\,\hat{M}_1 + Vm_2\,\hat{M}_2 + \ldots + Vm_n\,\hat{M}_n \qquad (3.10)$$

donde

$\hat{M}_i$ = columna "i" de la matriz $\mathbf{M}$

Vm_i = elemento "i" del vector $\hat{V}m$

De la ec.(3.10) podemos concluir que el vector de voltajes $\hat{V}$ es una combinación lineal de los modos de propagación cuyos coeficientes son los voltajes modales.

Sustituyendo (3.8) en (3.7) se tiene que

$$\frac{d^2\,\hat{V}m}{dx^2} = \boldsymbol{\lambda}\,\hat{V}m \qquad (3.11)$$

como ya señalamos antes, la matriz $\boldsymbol{\lambda}$ es diagonal, por lo que hemos reducido el problema a encontrar la solución de "n" ecuaciones diferenciales de la forma general

$$\frac{d^2\,Vm_i}{dx^2} = \lambda_{ii}\,Vm_i \qquad (3.12)$$

donde

λ_{ii} es el "ii-ésimo" elemento de $\boldsymbol{\lambda}$

La solución general de la ec.(3.12) es

$$Vm_i = \exp(-\gamma_i x) Vma_i + \exp(\gamma_i x) Vmb_i \qquad (3.13)$$

donde

Vma_i y Vmb_i son constantes modales a determinar

$\gamma_i = \sqrt{\lambda_{ii}}$ = constante de propagación del modo "i"

Como la constante de propagación modal es una cantidad compleja podemos escribir

$$\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$$

donde

α_i = constante de atenuación del modo "i"

β_i = constante de fase del modo "i"

Expresemos las "n" ecuaciones de la forma (3.13) matri_ cialmente

$$\hat{Vm} = \exp(-\gamma x)\hat{Vma} + \exp(\gamma x)\hat{Vmb} \qquad (3.14)$$

donde

γx es la matriz diagonal cuyo elemento "i" es $\gamma_i x$.

Empleando la ec.(3.8) y despues premultiplicando por $\mathbf{M}$ obtenemos

$$\hat{V} = \exp(-\Gamma x)\hat{Va} + \exp(\Gamma x)\hat{Vb} \qquad (3.15)$$

donde

$$\exp(-\boldsymbol{\Gamma} x) = \mathbf{M} \exp(\boldsymbol{\gamma} x)\ \mathbf{M}^{-1} \tag{3.16}$$

$$\exp(\boldsymbol{\Gamma} x) = \mathbf{M} \exp(\boldsymbol{\gamma} x)\ \mathbf{M}^{-1} \tag{3.17}$$

$\boldsymbol{\Gamma}$ es una matriz cuadrada cuyos eigenvalores son los elementos de la matriz diagonal $\boldsymbol{\gamma}$ y sus eigenvectores son las columnas de $\mathbf{M}$. Nótese que

$$\boldsymbol{\Gamma}^2 = \mathbf{M}\,\boldsymbol{\gamma}^2\,\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}\,\boldsymbol{\lambda}\,\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{A} \tag{3.18}$$

y

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{M}\,\boldsymbol{\gamma}\,\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{A}^{1/2}$$

La ec.(3.15) nos da la solución de la ecuación de propagación matricial de voltaje en el dominio de la frecuencia (o en el dominio fasorial para estudios en estado estable con excitación senoidal).

La solución para la propagación de corriente se puede obtener facilmente de

$$-\frac{d\hat{V}}{dx} = \mathbf{Z}\,\hat{I}$$

de donde

$$\hat{I} = -\mathbf{Z}^{-1}\frac{d\hat{V}}{dx} \quad ,$$

sustituyendo la ec.(3.15) y efectuando las derivadas de a-- cuerdo con la teoría de funciones de matrices

$$\hat{I} = \mathbf{Z}^{-1}\,\mathbf{\Gamma}\,(\exp(-\mathbf{\Gamma}x)\hat{V}a - \exp(\mathbf{\Gamma}x)\hat{V}b) \tag{3.19}$$

Para una línea semi-infinita para la cual no existen reflexiones desde el final de la línea, $\hat{V}b = 0$. Bajo estas condiciones las ecuaciones (3.15) y (3.19) quedan como

$$\hat{V} = \exp(-\mathbf{\Gamma}x)\hat{V}a$$

$$\hat{I} = \mathbf{Z}^{-1}\,\mathbf{\Gamma}\,\exp(-\mathbf{\Gamma}x)\hat{V}a$$

de estas dos ecuaciones

$$\hat{V} = \mathbf{\Gamma}^{-1}\,\mathbf{Z}\,\hat{I} \tag{3.20}$$

de la ecuación (3.20) se define a la matriz de "impedancia característica" $\mathbf{Z}_0$ como

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{\Gamma}^{-1}\,\mathbf{Z} \tag{3.21}$$

entonces

$$\hat{V} = \mathbf{Z}_0\,\hat{I} \tag{3.22}$$

En la ec.(3.22) se observa que existe una relación, - constante e independiente de la distancia, entre el voltaje y la corriente en cualquier punto de la línea, dada por $\mathbf{Z}_0$.

Consideremos ahora la ecuación matricial de propaga--

ción de corrientes

$$\frac{d^2 \hat{I}}{dx^2} = \mathbf{A}_t \hat{I}$$

siguiendo el mismo procedimiento que para los voltaje

$$\frac{d^2 \hat{I}m}{dx^2} = \lambda \hat{I}m \qquad (3.23)$$

donde

$\hat{I}m = \mathbf{N}^{-1} \hat{I}$ = vector de corrientes modales

y

λ = matriz de eigenvalores de $\mathbf{A}_t$

$\mathbf{N}$ = matriz de eigenvectores de $\mathbf{A}_t$

De la teoría de eigenvalores y eigenvectores se puede demostrar que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}_t$ tienen los mismos eigenvalores y que sus matrices de eigenvectores o matrices modales se relacionan de acuerdo con

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}_t^{-1} \quad \text{ó} \quad \mathbf{N} = \mathbf{M}_t^{-1} \qquad (3.24)$$

Resolviendo la ec.(3.23) y siguiendo el mismo procedimiento que para la propagación de voltajes se puede encontrar la siguiente relación entre el vector de corrientes y el vector de voltajes para una línea semi-infinita

$$\hat{I} = \mathbf{Y}\,\mathbf{\Gamma}^{-1} \hat{V} \qquad (3.25)$$

De la ec.(3.25) se define a la matriz de admitancia característica $\mathbf{Y}_0$ como

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}\, \Gamma^{-1} \qquad (3.26)$$

con (3.25) y (3.36)

$$\hat{I} = \mathbf{Y}_0\, \hat{V} \qquad (3.27)$$

con las ecs.(3.22) y (3.27) tenemos que

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Z}_0^{-1} \qquad (3.28)$$

2. IMPEDANCIA Y ADMITANCIA MODAL .

De la misma manera como se han definido voltajes y - corrientes modales, se puede definir matrices de impedan-- cia y admitancia modales . Regresando a las ecuaciones del telegrafista en forma matricial

$$-\frac{d\hat{V}}{dx} = \mathbf{Z}\, \hat{I} \qquad (3.29)$$

$$-\frac{d\hat{I}}{dx} = \mathbf{Y}\, \hat{V} \qquad (3.30)$$

transformando (3.29) y (3.30) al dominio modal

$$-\frac{d\hat{V}m}{dx} = \mathbf{Z}m\, \hat{I}m \qquad (3.31)$$

$$- \frac{d\hat{I}m}{dx} = \mathbf{Ym}\ \hat{V}m \qquad (3.32)$$

donde Zm y Ym son las matrices de impedancia y admitancia modales respectivamente, definidas por

$$\mathbf{Zm} = \mathbf{M}^{-1}\ \mathbf{Z}\ \mathbf{N} \qquad (3.33)$$

$$\mathbf{Ym} = \mathbf{N}^{-1}\ \mathbf{Y}\ \mathbf{M} \qquad (3.34)$$

Derivando (3.31) y (3.32) y combinando los resultados

$$\frac{d^2\ \hat{V}m}{dx^2} = \boldsymbol{\lambda}\ \hat{V}m \qquad (3.35)$$

$$\frac{d^2\ \hat{I}m}{dx^2} = \boldsymbol{\lambda}\ \hat{I}m \qquad (3.36)$$

donde,de acuerdo con las definiciones (3.33) y (3.34)

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Zm}\ \mathbf{Ym} = \mathbf{Ym}\ \mathbf{Zm} \qquad (3.37)$$

Empleando la ec.(3.37) tenemos que

$$\mathbf{Zm}\ \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Zm}\ \mathbf{Ym}\ \mathbf{Zm} = \boldsymbol{\lambda}\ \mathbf{Zm}$$

como $\boldsymbol{\lambda}$ es diagonal

$$Zm_{ij}\ \lambda_{jj} = \lambda_{ii}\ Zm_{ij}$$

entonces

$$(\ \lambda_{ii} - \lambda_{jj}\ )\ Zm_{ij} = 0 \qquad (3.38)$$

En la ec.(3.38), para $i \neq j$, en general $\lambda_{ii} \neq \lambda_{jj}$, entonces Zm_{ij} debe de ser cero. Esto significa que **Zm** es diagonal y en forma similar se puede probar que **Ym** tambien es diagonal.

De las ecuaciones (3.22) y (3.25), transformando al dominio modal

$$\hat{I}m = \mathbf{Y}m_0 \; \hat{V}m \tag{3.39}$$

$$\hat{V}m = \mathbf{Z}m_0 \; \hat{I}m \tag{3.40}$$

donde $\mathbf{Z}m_0$ y $\mathbf{Y}m_0$ son las matrices de impedancia y admitancia características modales respectivamente, dadas por

$$\mathbf{Y}m_0 = \mathbf{N}^{-1} \; \mathbf{Y}_0 \; \mathbf{M} \tag{3.41}$$

$$\mathbf{Z}m_0 = \mathbf{M}^{-1} \; \mathbf{Z}_0 \; \mathbf{N} \tag{3.42}$$

3. INTERPRETACION DE LOS MODOS DE PROPAGACION .

La expresión que nos proporciona los voltajes en cualquier punto de una línea es

$$\hat{V} = \exp(-\mathbf{\Gamma} x)\hat{V}a + \exp(\mathbf{\Gamma} x)\hat{V}b$$

para una línea semi-infinita, con $\hat{V}b = 0$

$$\hat{V} = \exp(-\mathbf{\Gamma} x)\hat{V}a$$

donde $\hat{V}a$ es el vector de voltajes aplicado en $x = 0$. Supongamos ahora que excitamos la línea con un modo de propagación puro, esto es

$$\hat{V}a = \hat{M}_k \tag{3.43}$$

donde $\hat{M}_k$ es la "k-ésima" columna de $\mathbf{M}$. Así el voltaje en cualquier punto de la línea es

$$\hat{V} = \exp(-\boldsymbol{\Gamma} x)\ \hat{M}_k \tag{3.44}$$

de la ec.(3.16)

$$\hat{V} = \mathbf{M} \exp(-\boldsymbol{\gamma} x)\ \mathbf{M}^{-1}\ \hat{M}_k \tag{3.45}$$

Antes de proseguir realicemos el producto

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}^{-1}\ \mathbf{M}$$

por medio de una partición por renglones de $\mathbf{M}^{-1}$ y una por columnas de $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}^{-1}\ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \\ \hat{r}_n \end{bmatrix} [\ \hat{c}_1, \ . \ . \ ., \ \hat{c}_n\ ]$$

donde

$\hat{r}_k$ es el renglón "k" de $\mathbf{M}^{-1}$

$\hat{c}_k$ es la columna "k" de $\mathbf{M}$

realizando la multiplicación de vectores renglón por vectores columna

$$\mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1\hat{c}_1 & \cdots & \hat{r}_1\hat{c}_n \\ \\ \hat{r}_n\hat{c}_1 & \cdots & \hat{r}_n\hat{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

como

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{r}_n \end{bmatrix}$$

se observa que la columna "k" de $\mathbf{U}$ esta dada por

$$\mathbf{M}^{-1}\,\hat{c}_k = \mathbf{M}^{-1}\,\hat{M}_k = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

De acuerdo con lo anterior la ec.(3.45) se puede escribir como

$$\hat{V} = \mathbf{M}\exp(-\gamma x)\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

finalmente, recordando que γx es diagonal

$$\hat{V} = \exp(-\gamma_k x)\ \hat{M}_k \tag{3.46}$$

De la ec.(3.46) podemos dar las siguientes conclusiones :

a). Si excitamos a una línea de transmisión con un modo puro, la propagación de este modo queda determinada completamente por el factor

$$\exp(\ -\gamma_k x)$$

b). Cada modo se propaga conservando la magnitud y fase relativas entre sus elementos, pués todos ellos se multiplican por el mismo factor $\exp(-\gamma_k x)$, esto es, cada modo se propaga a lo largo de la línea sin distorsionarse.

c). Se justifica el nombre de "constante de propagación modal del modo k " dado a

$$\gamma_k = \alpha_k + j\beta_k$$

La velocidad de propagación del modo "k" será

$$v_k = \frac{\omega}{\beta_k}$$

d). El voltaje en cualquier punto de la línea es la suma de los modos de propagación, afectados debidamente por sus constantes de propagación.

4. ANALISIS MODAL Y COMPONENTES SIMETRICAS .

En un trabajo publicado en 1918, Fortescue presentó una de las más poderosas herramientas para el estudio de circuitos polifásicos desequilibrados. Fortescue demostró que un - sistema de "n" fasores desbalanceados puede descomponerse en "n-1" sistemas n-fásicos balanceados de diferente secuencia de fases y un sistema de fasores de secuencia cero, el cual se define como un sistema en que todos los fasores tienen la misma magnitud y ángulo. El método se puede aplicar a cualquier sistema polifásico, pero nos limitaremos al caso trifásico. Un sistema trifásico desbalanceado se puede descomponer en tres componentes simétricas, que son

1. Un sistema de secuencia positiva, formado por tres vectores de igual módulo, con una diferencia de fases de -- 120^0 y con una secuencia de fases igual al sistema original

2. Un sistema de secuencia negativa, formado por tres - vectores de igual módulo, con una diferencia de fases de 120^0 y una secuencia de fases opuesta a la del sistema original.

3. Un sistema de secuencia cero formado por tres vectores idénticos.

El sistema original en función de sus componentes simétricas es

$$Va = Va_0 + Va_1 + Va_2$$

$$Vb = Vb_0 + Vb_1 + Vb_2 \qquad (3.47)$$

$$Vc = Vc_0 + Vc_1 + Vc_2$$

donde

Va, Vb, Vc es un sistema trifásico desbalanceado.

Va_1, Vb_1, Vc_1 es el sistema de secuencia positiva.

Va_2, Vb_2, Vc_2 es el sistema de secuencia negativa.

Va_0, Vb_0, Vc_0 es el sistema de secuencia cero con

$$Va_0 = Vb_0 = Vc_0 \quad .$$

El sistema (3.47) en función del operador $a = 1\angle 120^0$ que ocasiona una rotación de 120^0 en sentido contrario a las manecillas del reloj, es

$$\begin{aligned} Va &= Va_0 + Va_1 + Va_2 \\ Vb &= Va_0 + a^2\, Va_1 + a\, Va_2 \\ Vc &= Va_0 + a\, Va_1 + a^2\, Va_2 \end{aligned} \qquad (3.48)$$

en forma matricial

$$\hat{V}abc = \mathbf{T}\, \hat{V}a_{012} \qquad (3.49)$$

donde

$$\hat{V}abc = [\, Va \;,\; Vb \;,\; Vc \,]_t \qquad (3.50)$$

$$\hat{V}a_{012} = [\, Va_0 \;,\; Va_1 \;,\; Va_2 \,]_t \qquad (3.51)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \qquad (3.52)$$

además

$$T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

El método de análisis de circuitos trifásicos con el método de las componentes simétricas, consiste en determinar estas componentes para las tensiones y corrientes, y después efectuar las sumas vectoriales.

En esta sección demostraremos que las componentes simétricas pueden obtenerse a partir del análisis modal, en particular se verá, que la matriz **T** es la matriz de modos de propagación de voltaje para una línea perfectamente simétrica.

Consideremos una línea perfectamente simétrica o perfectamente balanceada, tal línea podría ser una perfectamente transpuesta o una línea cuyas fases formen un triángulo equilátero y en donde se puede despreciar el efecto de la tierra. Para este caso las matrices de impedancia serie y de admitancia en paralelo tienen la forma

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_p & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z_p & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z_p \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_p & Y_m & Y_m \\ Y_m & Y_p & Y_m \\ Y_m & Y_m & Y_p \end{bmatrix}$$

donde los subíndices "p" y "m" significan "propia" y - "mutua" respectivamente.

El producto $\mathbf{Z}\,\mathbf{Y}$ es igual a

$$\mathbf{Z}\,\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} B & C & C \\ C & B & C \\ C & C & B \end{bmatrix} = \mathbf{A} \tag{3.54}$$

con

$$B = Z_p\,Y_p + 2\,Z_m\,Y_m \tag{3.55}$$

$$C = Z_p\,Y_m + Z_m\,Y_p + Z_m\,Y_m \tag{3.56}$$

Para encontrar los eigenvalores y los eigenvectores de $\mathbf{A}$ debemos resolver la ecuación

$$\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} = \lambda\,\hat{\mathbf{x}} \tag{3.57}$$

entonces

$$(\,\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{U}\,)\,\hat{x} = 0$$

para que la ecuación anterior tenga una solución diferente de cero se debe cumplir que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{U}) = 0 \tag{3.58}$$

desarrollando llegamos a la ecuación característica

$$\lambda^3 - 3B\lambda^2 + 3(B^2 - C^2)\lambda + 3C^2B - B^3 - 2C^3 = 0$$

resolviendo esta ecuación, los eigenvalores de $\mathbf{A}$ son

$$\lambda_1 = B + 2C$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = B - C$$

sustituyendo estos valores en la ec.(3.58) se obtienen los sistemas de ecuaciones a partir de las cuales se obtienen los eigenvalores de $\mathbf{A}$.

Para $\lambda_1 = B + 2C$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{U})\hat{x} = \begin{bmatrix} -2C & C & C \\ C & -2C & C \\ C & C & -2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \hat{0}$$

$$C\ (-2x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

$$C\ (x_1 - 2x_2 + X_3) = 0$$

$$C\ (x_1 + X_2 - 2x_3) = 0$$

de donde

$$x_1 = x_2 = x_3 \tag{3.59}$$

Para $\lambda_2 = \lambda_3 = B - C$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{U})\ \hat{x} = \begin{bmatrix} C & C & C \\ C & C & C \\ C & C & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$C (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

$$C (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

$$C (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

entonces

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad (3.60)$$

De (3.59) y (3.60) se tiene que los eigenvalores de **A** son : un vector que tenga todos sus elementos iguales y un par de vectores cuyos elementos sumen cero. Existe una infinidad de vectores que cumplen con (3.59) y (3.60), unos de ellos son las componentes simétricas

$$\hat{x} = [\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ]_t$$

$$\hat{y} = [\ 1\ ,\ a^2,\ a\ ]_t$$

$$\hat{z} = [\ 1\ ,\ a\ ,\ a^2]\ _t$$

Otra posible solución son las componentes de Clarke, que tienen especial importancia en estudios de propagación en líneas horizontales . Estas componentes son

$$\hat{x} = [1 \ , 1 \ , 1]_t$$

$$\hat{y} = [1 \ , 0 \ ,-1]_t$$

$$\hat{z} = [1 \ ,-2 \ , 1]_t$$

Si tomamos la solución dada por las componentes simé-- tricas, la matriz modal de voltaje será

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \qquad (3.61)$$

y la matriz modal de corriente será

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}_t^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \qquad (3.62)$$

de acuerdo con el análisis modal

$$\hat{V} = \mathbf{M}\,\hat{V}m$$

donde

$\hat{V}$ es el vector de fasores de voltaje.

$\hat{V}m$ es el vector de los fasores de los contenidos modales.

Desarrollando la ecuación anterior

$$\begin{bmatrix} Va \\ Vb \\ Vc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Vm_1 \\ Vm_2 \\ Vm_3 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{aligned} Va &= Vm_1 + Vm_2 + Vm_3 \\ Vb &= Vm_1 + a^2 Vm_2 + aVm_3 \\ Vc &= Vm_1 + aVm_2 + a^2 Vm_3 \end{aligned} \qquad (3.63)$$

Comparando las ecuaciones (3.48) y (3.63), es facil ver que los contenidos modales Vm_1, Vm_2 y Vm_3, son los voltajes de secuencia cero, positiva y negativa respectivamente de la fase "a", que es la que se toma como referencia. Entonces

$$\hat{V}m = \hat{V}_{a012} \qquad (3.64)$$

La igualdad que se cumple entre el vector de voltajes de las componentes simétricas y el vector de contenidos modales, no se cumple exactamente para las corrientes, pues

$$\hat{I} = T\,\hat{I}a_{012}$$

e

$$\hat{I} = T^{-1}\,\hat{I}m$$

De aquí se puede pensar, que existe una gran diferencia entre las corrientes modales y las corrientes de las compo-- nentes simétricas, pero esto no es asi, pues se puede encontrar facilmente una relación entre estas corrientes. Igualando las dos ecuaciones de corrientes anteriores

$$\mathbf{T}^{-1}\,\hat{I}m = \mathbf{T}\,\hat{I}a_{012}$$

premultiplicando por $\mathbf{T}$ y como $\mathbf{T}^2 = 3\,\mathbf{U}$, se tiene que

$$\hat{I}m = 3\,\hat{I}a_{012} \qquad (3.65)$$

5. INVARIANZA DE LA POTENCIA.

La invarianza de la potencia es un aspecto importante del análisis modal y para determinar si la transformación modal es invariante para la potencia, evaluemos en el dominio fasorial el flujo de potencia en una línea de transmisión

$$\hat{S} = \hat{I}^H\,\hat{V} = \hat{V}_t\,\hat{I}^* \qquad (3.66)$$

donde

- $\hat{S}$ es el vector de potencia aparente.
- $\hat{V}$ es el vector de fasores de voltaje.
- $\hat{I}$ es el vector de fasores de corriente.
- $\hat{I}^H$ vector transpuesto conjugado de $\hat{I}$.
- $\hat{I}^*$ vector conjugado de $\hat{I}$.

Transformando al dominio modal de acuerdo con

$$\hat{V} = \mathbf{M}\,\hat{V}m \qquad \text{y} \qquad \hat{I} = \mathbf{M}_t^{-1}\,\hat{I}m$$

tenemos que

$$\hat{S} = (\,\mathbf{M}_t^{-1}\,\hat{I}m\,)^H\,\mathbf{M}\,\hat{V}m$$

de donde

$$\hat{S} = \hat{I}m^H\,(\mathbf{M}^*)^{-1}\,\mathbf{M}\,\hat{V}m \tag{3.67}$$

De acuerdo con (3.67) la propiedad de invarianza de la potencia se mantiene si

1). Las matrices modales son reales. Si esto ocurre las matrices conjugadas no tienen sentido, así que

$$\hat{S} = \hat{I}m^H\,\mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{M}\,\hat{V}m$$

$$\hat{S} = \hat{I}m^H\,\hat{V}m = \hat{V}m_t\,\hat{I}m^* \tag{3.68}$$

La ec.(3.68) nos indica que la potencia transmitida es la suma de las potencias de los modos. Un ejemplo de esta clase de matrices modales son las componentes de Clarke.

2). Si las matrices modales son complejas la invarianza de la potencia se mantiene si

$$(\mathbf{M}^*)^{-1}\,\mathbf{M} = \mathbf{U} \tag{3.69}$$

pero como

$$\mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{M} = \mathbf{U}$$

entonces

$$(\mathbf{M}^*)^{-1} \neq \mathbf{M}^{-1} \tag{3.70}$$

por lo que en general la transformación al dominio modal - no es invariante con respecto a la potencia, esto significa que si estamos trabajando en el dominio modal, para calcular la potencia aparente es necesario transformar al dominio fasorial.

Hagamos dos suposiciones en cuanto a las propiedades de la matriz modal **M**:

$$\mathbf{M}^{-1} = c\,\mathbf{M}^* \tag{3.71}$$

$$\mathbf{M}^2 = (1/c)\,\mathbf{U} \tag{3.72}$$

donde "c" es un escalar cualesquiera.

Entonces, si se cumplen (3.71) y (3.72)

$$(\mathbf{M}^*)^{-1}\,\mathbf{M} = \mathbf{U}$$

que es la condición necesaria para la invarianza de la potencia. Un ejemplo de esta clase de matrices modales son - las componentes simétricas en donde

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{3}\,\mathbf{T}^*$$

y

$$\mathbf{T}^2 = 3\,\mathbf{U}$$

6. PROCESOS DE DIAGONALIZACION.

6.1. Teoria de matrices idempotentes.

La teoria de matrices idempotentes nos proporciona un método sencillo para la obtención de los eigenvalores y eigenvectores y nos permite desarrollar un algoritmo de rápida convergencia.

Se puede definir cualquier eigenvector columna de **A** asociado a un eigenvalor de acuerdo con

$$\mathbf{A}\,\hat{c}_i = \lambda_i\,\hat{c}_i \qquad (3.73)$$

donde

λ_i es el "i-ésimo" eigenvalor de **A**
$\hat{c}_i$ es el eigenvector columna asociado con λ_i

Tambien se pueden definir eigenvectores renglón de **A** de acuerdo con

$$\hat{r}_j\,\mathbf{A} = \lambda_j\,\hat{r}_j \qquad (3.74)$$

donde

λ_j es el "j-ésimo" eigenvalor de **A**
$\hat{r}_j$ es el eigenvector renglón asociado a λ_j

La serie completa de eigenvalores y eigenvectores se pueden representar de la siguiente forma

$$\mathbf{A}\,\mathbf{C} = \mathbf{C}\,\boldsymbol{\lambda} \qquad (3.75)$$

donde

$\mathbf{C}$ es la matriz cuyas columnas son los eigenvectores columna de $\mathbf{A}$

$\boldsymbol{\lambda}$ es la matriz diagonal de eigenvalores de $\mathbf{A}$

también

$$\mathbf{R}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda}\,\mathbf{R} \tag{3.76}$$

donde

$\mathbf{R}$ es la matriz cuyos renglones son los eigenvectores renglón de $\mathbf{A}$

Definamos las siguientes particiones

$$\mathbf{C} = [\hat{C}_1 \ , \ \hat{C}_2 \ , \ \ldots \ , \ \hat{C}_n] \tag{3.77}$$

donde

$\hat{C}_i$ es el "i-ésimo" eigenvector columna de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \hat{R}_1 \\ \hat{R}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{R}_n \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

donde

$\hat{R}_i$ es el "i-ésimo" eigenvector renglón de $\mathbf{A}$

De las ecuaciones (3.75) y (3.76)

$$\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{C} = \lambda$$

$$\mathbf{R}\,\mathbf{A}\,\mathbf{R}^{-1} = \lambda$$

por comparación

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}^{-1} \tag{3.79}$$

entonces

$$\mathbf{R}\,\mathbf{C} = \mathbf{C}\,\mathbf{R} = \mathbf{U} \tag{3.80}$$

podemos escribir tambien

$$\mathbf{R}\,\mathbf{A}\,\mathbf{C} = \lambda \tag{3.81}$$

de donde

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\,\lambda\,\mathbf{R} \tag{3.82}$$

Desarrollando la segunda igualdad de (3.80) de a-- cuerdo con las particiones (3.77) y (3.78)

$$[\hat{C}_1 \ \cdots \ \hat{C}_n] \begin{bmatrix} \hat{R}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{R}_n \end{bmatrix} = \hat{C}_1\hat{R}_1 + \ldots + \hat{C}_n\hat{R}_n = \mathbf{U} \tag{3.83}$$

Definamos ahora la matriz

$$\mathbf{I}_i = \hat{C}_i \; \hat{R}_i \tag{3.84}$$

como $\hat{C}_i$ es de orden nx1 y $\hat{R}_i$ de 1xn, entonces $\mathbf{I}_i$ es una matriz cuadrada de nxn.

Empleando (3.84) en (3.83)

$$\mathbf{C}\,\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}_i = \mathbf{U} \tag{3.85}$$

Por otra parte

$$\mathbf{R}\,\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \hat{R}_1 \\ \vdots \\ \hat{R}_n \end{bmatrix} [\hat{C}_1 \; , \; \ldots \; , \; \hat{C}_n \,] = \begin{bmatrix} \hat{R}_1\hat{C}_1 & \ldots & \hat{R}_1\hat{C}_n \\ & & \\ \hat{R}_n\hat{C}_1 & \ldots & \hat{R}_n\hat{C}_n \end{bmatrix} = \mathbf{U}$$

donde los productos $\hat{R}_j\hat{C}_i$ dan como resultado un escalar. Se puede ver facilmente que los productos $\hat{R}_j\hat{C}_i$ solo pueden tomar los valores de 1 o 0, esto es

$$\hat{R}_j\hat{C}_i = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad i = j \\ & \\ 0 & \text{para} \quad i \neq j \end{cases} \tag{3.86}$$

A las matrices $\mathbf{I}_i$ se les conoce como "matrices idempotentes", y tienen las siguientes propiedades

1. Son SINGULARES. Toda columna de $\mathbf{I}_i$ es proporcional al vector columna $\hat{C}_i$ y todo renglón es proporcional al vector renglón $\hat{R}_i$.

2. Como ya se definió en la ec.(3.85) la suma de todas las matrices idempotentes de una matriz es igual a la matriz unidad.

3. Una matriz idempotente elevada a cualquier potencia es igual si misma

$$\mathbf{I}_i^n = \mathbf{I}_i \tag{3.87}$$

por ejemplo

$$\mathbf{I}_i{}^2 = C_iR_iC_iR_i = C_i\ 1\ R_i = \mathbf{I}_i$$

De esta propiedad es de donde toman estas matrices el nombre de "idempotentes".

4. El producto de dos matrices idempotentes diferentes es igual a la matriz nula

$$\mathbf{I}_j\ \mathbf{I}_i = 0 \tag{3.88}$$

$$\mathbf{I}_j\mathbf{I}_i = C_jR_jC_iR_i = C_i\cdot 0\cdot \mathbf{R}_j = 0$$

Las propiedades de las matrices idempotentes, se utilizan para determinar los eigenvalores y los eigenvectores de una matriz por medio del algoritmo conocido como "de potenciación". Este algoritmo se basa en elevar a la matriz $\mathbf{A}$ a la potencia 2^n .

6.2. Método de potenciación.

La matriz A esta dada en función de sus eigenvalores y eigenvectores columna y renglón por

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\,\boldsymbol{\lambda}\,\mathbf{R}$$

realizando los productos con una partición de **C** por columnas y de **R** por renglones

$$\mathbf{A} = \lambda_1 C_1 R_1 + \ldots + \lambda_n C_n R_n \tag{3.89}$$

o sea

$$\mathbf{A} = \Sigma\, \lambda_i\, \mathbf{I}_i \tag{3.90}$$

Trabajando con la ec.(3.90) se desarrolla el método de potenciación

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{I}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{I}_n$$

elevando al cuadrado

$$\mathbf{A}^2 = \lambda_1\mathbf{I}_1(\lambda_1\mathbf{I}_1+\ldots+\lambda_n\mathbf{I}_n)+\ldots+\lambda_n\mathbf{I}_n(\lambda_1\mathbf{I}_1+\ldots+\lambda_n\mathbf{I}_n)$$

$$\mathbf{A}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i\mathbf{I}_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\mathbf{I}_j \right)$$

el producto $\lambda_i\mathbf{I}_i\lambda_j\mathbf{I}_j = 0$ para $i \neq j$, entonces, en los productos dentro del corchete solo existe uno diferente de cero, que es $\lambda_i\mathbf{I}_i\lambda_i\mathbf{I}_i$ (haciendo $i = j$), asi que

$$\lambda_i\mathbf{I}_i\lambda_i\mathbf{I}_i = \lambda_i^2\,\mathbf{I}_i$$

de donde

$$\mathbf{A}^2 = \lambda_i^2 \, \mathbf{I}_i$$

elevando nuevamente al cuadrado

$$(\mathbf{A}^2)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^2 \, \mathbf{I}_i \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \, \mathbf{I}_j)$$

entonces

$$(\mathbf{A}^2)^2 = \Sigma \, (\lambda_i^2)^2 \, \mathbf{I}_i$$

por medio de elevaciones sucesivas al cuadrado se llega a

$$\mathbf{A}^{2^n} = \Sigma \lambda_i^{2^n} \, \mathbf{I}_i = \lambda_1^{2^n} \mathbf{I}_1 + .. + \lambda_n^{2^n} \, \mathbf{I}_n$$

factorizando

$$\mathbf{A}^{2^n} = \lambda_1^{2^n} (\mathbf{I}_1 + \ldots + (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^{2^n} \, \mathbf{I}_n \,)$$

si $\lambda_1 > \lambda_2 \ldots > \lambda_n$, los coeficiente

λ_2/λ_1 , ... , λ_n/λ_1 son menores a 1

y si $2^n \to \infty$ los coeficientes anteriores elevados a la potencia 2^n tienden a cero.

Asi pues, para una determinada potencia podemos decir que

$$\mathbf{A}^{2^n} = \lambda_1^{2^n} \, \mathbf{I}_1 = \lambda_1^{2^n} \, C_1 R_1$$

multiplicando una vez más por $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^{2^n}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}^{2^n+1} = \lambda_1{}^{2^n}\,\lambda_1\,\mathbf{I}_1$$

La razón de cualquier elemento de $\mathbf{A}^{2^n+1}$ a el elemento correspondiente de $\mathbf{A}^{2^n}$ es λ_1 . Hay que señalar que prácti camente cualquier columna de la matriz $\mathbf{A}^{2^n}$ es proporcional a $\hat{C}_1$ y cualquier renglón a $\hat{R}_1$, esta proporcionalidad esta dada por el factor de escala

$$k = \hat{R}_1\hat{C}_1$$

y basta con dividir $\hat{R}_1$ o $\hat{C}_1$ por k para encontrar el par de eigenvectores correspondientes a λ_1 .

Ahora

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}_1 = \lambda_2\mathbf{I}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{I}_n$$

y se pueden efectuar las elevaciones al cuadrado sucesivas de $\mathbf{A}'$ con el fin de encontrar λ_2, $\hat{R}_2$ y $\hat{C}_2$. Siguiendo este procedimiento se pueden encontrar los "n" λ_i's, $\hat{C}_i$'s y $\hat{R}_i$'s.

De las ecuaciones (3.4), (3.24), (3.75) y (3.76)

$$\mathbf{M} = \mathbf{C} \tag{3.91}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}_t{}^{-1} = \mathbf{R}_t \tag{3.92}$$

A continuación se enlistan los pasos del procedimiento computacional para la diagonalización de matrices por medio del método de potenciación. Sea $\mathbf{A}$ la matriz por diagonali zar :

1. Copiar **A** en una matriz auxiliar **B**.
2. Normalizar **B** con su mayor elemento

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}/B_{ij}\max$$

3. Elevar **B'** al cuadrado

$$\mathbf{D} = (\mathbf{B}')^2$$

4. Probar la convergencia
   a. Se localiza el mayor elemento de **D** (d1).
   b. Se localiza el segundo mayor elemento de **D** (d2) que haya en la misma columna o el mismo renglón de d1 .
   c. Se realiza la diferencia

$$(d1/b1) - (d2/b2)$$

   siendo b1 y b2 los elementos de **B'** que tienen la misma posición que d1 y d2 tienen en **D**. Para lograr la convergencia el resultado de la diferencia debe de ser menor que 10^{-6} .
5. Si falla la convergencia hacer

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}$$

   y repetir los pasos 2,3 y 4 .
6. Si hay convergencia realizar el producto

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\,\mathbf{D}$$

   y encontrar λ_1 como la razón del mayor elemento de **B** al correspondiente elemento de **D**.

7. Extraer $\hat{C}_1$ y $\hat{R}_1$

$\hat{C}_1$ = columna de **B** que contiene al mayor elemento.

$\hat{R}_1$ = renglón de **B** que contiene al mayor elemento.

8. Encontrar el factor de escala

$$k = \hat{R}_1 \hat{C}_1$$

9. Dividir $\hat{C}_1$ o $\hat{R}_1$ por k .

10. Formar la matriz idempotente

$$\mathbf{I}_1 = \hat{C}_1 \hat{R}_1$$

11. Formar la nueva matriz

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_1$$

Este proceso se repite hasta encontrar todos los eigenvalores y eigenvectores.

6.3. Alternativas de diagonalización.

En un principio, lo primero que se puede pensar es diagonalizar directamente el producto **Z Y** , pero esto no es recomendable, pues si utilizamos el método de potenciación, los primeros eigenvctores que se obtienen son los pertenecientes a los eigenvalores de mayor módulo y por último los correspondientes a los eigenvalores de menor módulo.

Como

$$\lambda_i = (\alpha_i + j\beta_i)^2 \qquad (3.93)$$

primero obtenemos los modos que sufren una mayor atenuación y que son los que tienen menor influencia en la propagación, así, al llegar al último eigenvalor, que es el de menor módulo y de mayor importancia, se llega arrastrando un error muy grande como consecuencia de los redondeos y los truncamientos. Por otra parte, si los eigenvalores son muy cercanos entre sí el método de potenciación tiene una convergencia muy lenta.

Diagonalización de la matriz inversa.

Una segunda alternativa es diagonalizar la matriz $\mathbf{A}^{-1}$. Invirtiendo la ec.(3.82)

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}\,\boldsymbol{\lambda}^{-1}\,\mathbf{R} \tag{3.94}$$

desarrollando

$$A^{-1} = \frac{1}{\lambda_1}\hat{C}_1\hat{R}_1 + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}\hat{C}_n\hat{R}_n \tag{3.95}$$

si

$$\lambda_1 > \ldots > \lambda_n$$

entonces

$$\frac{1}{\lambda_1} < \ldots < \frac{1}{\lambda_n} \tag{3.96}$$

Tomando en cuenta esto, al aplicar el método de potenciación a la matriz $\mathbf{A}^{-1}$, el primer eigenvalor que obtendremos será $1/\lambda_n$ y el último $1/\lambda_1$, esto es, primero obtendremos los eigenvalores correspondientes a los modos de menor atenuación y despues los correspondientes a los de mayor atenuación.

Al diagonalizar $\mathbf{A}^{-1}$ obtenemos los modos y las constantes modales en el orden que nos conviene y se reduce la influencia de los errores numéricos, sin embargo, aún tenemos el problema de la lenta convergencia en el caso en que existan eigenvalores con módulos muy cercanos entre sí.

<u>Convergencia acelerada del método de potenciación en la diagonalización de la matriz **A**.</u> Consideremos una línea de transmisión sin cables de guarda, la matriz de impedancia serie es

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_T \tag{3.97}$$

donde

$$\mathbf{Z}_g = j\frac{\omega\mu}{2\pi}\ \mathbf{P} \tag{3.98}$$

la matriz de admitancia en paralelo es

$$\mathbf{Y} = j\omega 2\pi\varepsilon\ \mathbf{P}^{-1} \tag{3.99}$$

De (3.97), (3.98) y (3.99) se tiene que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}\ \mathbf{Y} = (\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_T)\ \mathbf{Y} - \omega^2\mu\varepsilon\ \mathbf{U} \tag{3.100}$$

diagonalizando la matriz **A**

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_T)\mathbf{Y}\mathbf{M} - \omega^2\mu\varepsilon\ \mathbf{U}$$

de donde

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}' - \omega^2 \mu\varepsilon\, \mathbf{U} \qquad (3.101)$$

Como los elementos de $\mathbf{Z}_c$ y $\mathbf{Z}_T$ son muy pequeños comparados con los de $\mathbf{Z}_g$ todos los eigenvalores son muy cercanos al valor $-\omega^2\mu\varepsilon$. Si se diagonaliza la matriz

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{Z}_c + \mathbf{Z}_T)\, \mathbf{Y}$$

se obtendrá la matriz de eigenvalores

$$\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda} - (-\omega^2 \mu\varepsilon\, \mathbf{U})$$

Los eigenvalores λ_i' son la diferencia entre los verdaderos eigenvalores y su valor límite $-\omega^2\mu\varepsilon$. De esta manera, la diferencia relativa de modulos entre los eigenvalores es lo bastante significativa para permitir una rápida convergencia.

La velocidad de convergencia se puede aumentar aún más si dividimos a $\mathbf{A}$ por $-\omega^2\mu\varepsilon$, ya que para las frecuencias de interes este valor es muy pequeño:

$$-\omega^2\mu\varepsilon \cong \frac{-\omega^2}{c^2} \cong \frac{-\omega^2}{9} \times 10^{-16}$$

donde "c" es la velocidad de la luz en m/seg .

De acuerdo con esto

$$\frac{\mathbf{A}}{-\omega^2 \mu\varepsilon} = \frac{(\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_T)\ \mathbf{Y}}{-\omega^2 \mu\varepsilon} + \mathbf{U}$$

y la matriz **A'** será ahora

$$\mathbf{A'} = \frac{(\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_T)\ \mathbf{Y}}{-\omega^2 \mu\varepsilon} = \frac{\mathbf{A}}{-\omega^2 \mu\varepsilon} - \mathbf{U}$$

y al diagonalizar esta matriz obtendremos

$$\boldsymbol{\lambda}' = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{-\omega^2 \mu\varepsilon} - \mathbf{U}$$

Con este procedimiento, además de aumentar la diferencia relativa entre los módulos de los eigenvalores restando la matriz **U**, al dividir por $-\omega^2\mu\varepsilon$ estamos multiplicando por $-(c^2/\omega^2) = (9 \times 10^{16})/\omega^2$, con lo que conseguimos trabajar con cantidades más grandes que nos permiten emplear presición sencilla. Despues de obtener los eigenvalores λ_i' se calculan los verdaderos eigenvalores de acuerdo con

$$\lambda_i = (\lambda_i' + 1)\ (-\omega^2\mu\varepsilon) \qquad (3.102)$$

Normalización de las matrices de parámetros eléctricos de las líneas de transmisión. En esta sección se describe un procedimiento para la diagonalización de la ma triz **A** en donde se realiza la división por $-\omega^2\mu\varepsilon$ desde el cáculo mismo de las matrices **Z** y **Y**, además se incorpora el caso en que existan conductores de guarda y se efectúe su reducción.

Dividamos a la matriz de impedancia serie por $j\omega\mu/2\pi$

$$\mathbf{Z}/(j\omega\mu/2\pi) = (\mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_c + \mathbf{Z}_T)/(j\omega\mu/2\pi)$$

definamos ahora las siguientes matrices

$$\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/(j\omega\mu/2\pi) \tag{3.103}$$

$$\mathbf{Z}_{cn} = \mathbf{Z}_c/(j\omega\mu/2\pi) \tag{3.104}$$

$$\mathbf{Z}_{Tn} = \mathbf{Z}_T/(j\omega\mu/2\pi) \tag{3.105}$$

donde el subíndice "n" significa "normalizada", además

$$\mathbf{Z}_g/(j\omega\mu/2\pi) = \mathbf{P} \tag{3.106}$$

de acuerdo con las definiciones anteriores

$$\mathbf{Z} = (j\omega\mu/2\pi)\ (\ \mathbf{P} + \mathbf{Z}_{cn} + \mathbf{Z}_{Tn}\ ) \tag{3.107}$$

La matriz de admitancia en paralelo es

$$\mathbf{Y} = j2\pi\omega\varepsilon\ \mathbf{P}^{-1} \tag{3.108}$$

Efectuando en $\mathbf{Z}$ la reducción de Kron

$$\mathbf{Z}_{redu} = (j\omega\mu/2\pi)(\mathbf{P} \quad +\mathbf{Z}_{cn} + \mathbf{Z}_{Tn} + \mathbf{Z}_{HGn}) \qquad (3.109)$$

donde

$$\mathbf{Z}_{HGn} = - \mathbf{Z}_{n\phi g} \mathbf{Z}_{ngg}^{-1} \mathbf{Z}_{ng\phi} \qquad (3.110)$$

Similarmente la matriz de admitancia reducida es

$$\mathbf{Y}_{redu} = j2\pi\omega\varepsilon(\mathbf{P}_{\phi} - \mathbf{P}_{HG})^{-1} \qquad (3.111)$$

donde

$$\mathbf{P}_{HG} = \mathbf{P}_{\phi g} \mathbf{P}_{gg}^{-1} \mathbf{P}_{g\phi} \qquad (3.112)$$

Sumando dentro del paréntesis de (3.109) el término - $\mathbf{P}_{HG}$ - $\mathbf{P}_{HG}$ y efectuando el producto

$$\mathbf{A}_{redu} = \mathbf{Z}_{redu} \mathbf{Y}_{redu}$$

tenemos que

$$\mathbf{A}_{redu} = -\omega^2\mu\varepsilon(\mathbf{Z}_{cor}\mathbf{Y}_{cor} + \mathbf{U}) \qquad (3.113)$$

donde

$$\mathbf{Z}_{cor} = \mathbf{Z}_{Tn\phi} + \mathbf{Z}_{cn\phi} + \mathbf{Z}_{HGn} + \mathbf{P}_{HG} \qquad (3.114)$$

= impedancia de corrección.

$$\mathbf{Y}_{cor} = (\mathbf{P}\phi - \mathbf{P}_{HG})^{-1} \qquad (3.115)$$

= admitancia de corrección.

De (3.113)

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Z}_{cor}\mathbf{Y}_{cor} = \frac{\mathbf{A}_{redu}}{-\omega^2\mu\varepsilon} - \mathbf{U} \qquad (3.116)$$

Al diagonalizar $\mathbf{A}'$ se obtiene

$$\boldsymbol{\lambda}' = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{-\omega^2 \mu \varepsilon} - \mathbf{U} \qquad (3.117)$$

y los eigenvalores correctos se obtienen con

$$\boldsymbol{\lambda} = -\omega^2 \mu \varepsilon \; (\boldsymbol{\lambda}' + \mathbf{U}) \qquad (3.118)$$

7. RESUMEN DEL PROCEDIMIENTO COMPUTACIONAL PARA EL CALCULO DE PARAMETROS MODALES DE LINEAS DE TRANSMISION.

Se emplea el procedimiento de normalización para el **cálculo de los parámetros eléctricos con el fin de dismi-- nuir los errores numéricos y aumentar la velocidad de con-**vergencia.

La matriz que se diagonaliza se obtiene extrayendo la matriz unidad :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Z}'_{redu} \, \mathbf{Y}'_{redu} - \mathbf{U}$$

siendo $\mathbf{Z}'_{redu}$ y $\mathbf{Y}'_{redu}$ las matrices normalizadas reduci-- **das.**

Los pasos para el cálculo de parámetros modales son - los siguientes :

1. Se calculan $\mathbf{P}$, $\mathbf{Z}_{cn}$, $\mathbf{Z}_{Tn}$.

2. Se calculan

$$\mathbf{Z}'_{redu} = \mathbf{P}_{\phi} + \mathbf{Z}_{cn\phi} + \mathbf{Z}_{Tn\phi} + \mathbf{Z}_{HGn}$$

y

$$\mathbf{Y}'_{redu} = (\mathbf{P}_{\phi} - \mathbf{P}_{HG})^{-1}$$

ó

$$\mathbf{Y}'_{redu} = (\mathbf{P}^{-1})_{\phi}$$

3. Se forma la matriz por diagonalizar

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Z}'_{redu}\,\mathbf{Y}'_{redu} - \mathbf{U}$$

4. Se aplica el método de potenciación para obtener $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ y λ' .

5. Se obtienen los eigenvalores correctos con

$$\lambda_i = -\omega^2\mu\varepsilon(\lambda_i' + 1) \quad 1/\text{u.l.}$$

6. Se calculan las constantes de propagación, velocidades y atenuaciones de los modos.

$$\gamma_i = \alpha_i + j\beta_i = \lambda^{1/2} \qquad 1/\text{u.l.}$$

$$a_i = 20\log_{10}(\exp(\alpha_i)) \qquad \text{db/u.l.}$$

$$v_i = \omega/\beta_i \qquad \text{u.l./seg}$$

7. Se calcula la matriz de propagación

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{C}\,\text{diag}(\gamma_i)\,\mathbf{R}$$

8. Se calculan la impedancia y la admitancia caracte--

rísticas

$$\mathbf{Z}_0 = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\,\mathbf{Z} = \mathbf{C}\ \mathrm{diag}(\ 1/\gamma_i\ )\ \mathbf{R}\ \mathbf{Z}$$

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}\,\Gamma^{-1} = \mathbf{Y}\ \mathbf{C}\ \mathrm{diag}(\ 1/\gamma_i\ )\ \mathbf{R}$$

Para obtener $\mathbf{Z}_0$ en ohms y $\mathbf{Y}_0$ en mhos , las matrices $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Y}$ deben de estar desnormalizadas.

C A P I T U L O 4

M O D E L A D O D E S I S T E M A S

D E T R A N S M I S I O N

Un sistema de transmisión de energía eléctrica esta formado por elementos de parámetros distribuidos y por elementos de parámetros concentrados, además de que presenta ciertas irregularidades que afectan la transmisión de la energía. En estos sistemas generalmente se desea conocer la relación que existe entre los voltajes y corrientes en un punto emisor con los voltajes y corrientes de un punto receptor. Para encontrar tal relación, es conveniente representar a las líneas de transmisión por medio de redes de dos puertos, para posteriormente incorporar los elementos de parámetros concentrados y las irregularidades que existan.

1. LINEAS DE TRANSMISION HOMOGENEAS.

Una línea de transmisión homogénea es aquella en la cuál no existen elementos de parámetros concentrados o irregularidades que afecten la propagación de corrientes y de voltajes.

Para encontrar el modelo de dos puertos de una línea homogénea, consideremos las soluciones de las ecuaciones de propagación dadas en el capítulo 3

$$\hat{V} = \exp(-\Gamma x)\hat{V}a + \exp(\Gamma x)\hat{V}b \tag{4.1}$$

$$\hat{I} = Y_0(\exp(-\Gamma x)\hat{V}a - \exp(\Gamma x)\hat{V}b) \tag{4.2}$$

Estas dos ecuaciones estan dadas en **términos** de "2n" constantes de integración ("n" voltajes en el punto "a" y "n" en el punto "b"), estas constantes se refieren a las condiciones de operación que presenta la línea en sus extremos.

Adoptemos la convención de que las corrientes que entran a un nodo son positivas y consideremos que la línea tiene una longitud "l", como se muestra en la fig.4.1

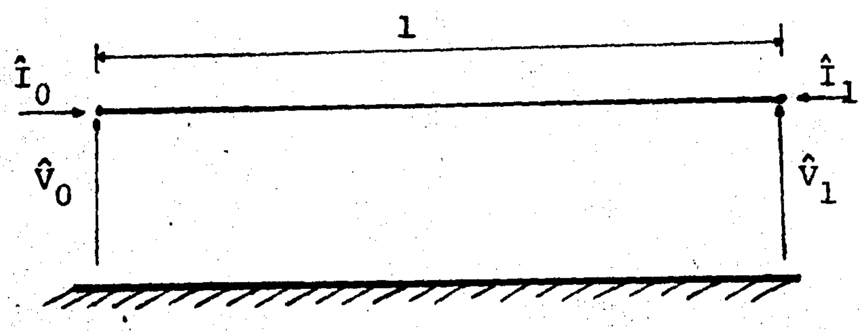


Fig. 4.1

en la fig.4.1

$\hat{V}_0, \hat{I}_0$ son los vectores de voltaje y de corrien te en $x=0$.

$\hat{V}_1, \hat{I}_1$ son los vectores de voltaje y corriente en $x=1$.

Introduciendo estas condiciones en (4.1) y (4.2)

$$\hat{V}_0 = \hat{V}a + \hat{V}_b \tag{4.3}$$

$$\hat{I}_0 = \mathbf{Y}_0(\hat{V}a + \hat{V}b) \tag{4.4}$$

$$\hat{V}_1 = \exp(-\Gamma l)\hat{V}a + \exp(\Gamma l)\hat{V}b \tag{4.5}$$

$$\hat{I}_1 = -\mathbf{Y}_0(\exp(-\Gamma l)\hat{V}a + \exp(\Gamma l)\hat{V}b) \tag{4.6}$$

de (4.4)

$$\hat{V}b = \hat{V}a - \mathbf{Z}_0\hat{I}_0 \tag{4.7}$$

$$\hat{V}a = Z_0\hat{I}_0 + \hat{V}b \tag{4.8}$$

primero con (4.7) y despues con (4.8) en (4.3)

$$\hat{V}a = (\hat{V}_0 + \mathbf{Z}_0\hat{I}_0)/2 \tag{4.9}$$

$$\hat{V}b = (\hat{V}_0 - \mathbf{Z}_0\hat{I}_0)/2 \tag{4.10}$$

sustituyendo (4.9) y (4.10) en (4.5)

$$\hat{V}_1 = (\exp(-\Gamma l)\hat{V}_0 + \exp(\Gamma l)\hat{V}_0)/2$$

$$-(\exp(\Gamma l)\mathbf{Z}_0\hat{I}_0 - \exp(-\Gamma l)\mathbf{Z}_0\hat{I}_0)/2$$

de donde

$$\hat{V}_1 = \cosh(\Gamma l)\hat{V}_0 - \operatorname{senh}(\Gamma l)\mathbf{Z}_0\hat{I}_0 \qquad (4.11)$$

sustituyendo (4.9) y (4.10) en (4.6) y simplificando

$$\hat{I}_1 = \mathbf{Y}_0 \operatorname{senh}(\Gamma l)\hat{V}_0 - \mathbf{Y}_0 \cosh(\Gamma l)\mathbf{Z}_0\hat{I}_0 \qquad (4.12)$$

Las ecuaciones (4.11) y (4.12) son las soluciones en forma hiperbólica de las ecuaciones de propagación de una línea de transmisión con múltiple número de conductores.

De la ec.(4.11)

$$\operatorname{senh}(\Gamma l)\mathbf{Z}_0\hat{I}_0 = \cosh(\Gamma l)\hat{V}_0 - \hat{V}_1$$

de donde

$$\hat{I}_0 = \mathbf{Y}_0 \coth(\Gamma l)\hat{V}_0 - \mathbf{Y}_0 \operatorname{csch}(\Gamma l)\hat{V}_1 \qquad (4.13)$$

con (4.13) en (4.12)

$$\hat{I}_1 = -\mathbf{Y}_0(\cosh(\Gamma l)\coth(\Gamma l) - \operatorname{senh}(\Gamma l))\hat{V}_0$$
$$+\mathbf{Y}_0(\cosh(\Gamma l)\operatorname{csch}(\Gamma l))\hat{V}_1$$

simplificando las funciones hiperbólicas

$$\hat{I}_1 = -\mathbf{Y}_0 \operatorname{csch}(\Gamma l)\hat{V}_0 + \mathbf{Y}_0 \coth(\Gamma l)\hat{V}_1 \qquad (4.14)$$

agrupando las ecuaciones (4.13) y (4.14)

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_0 \\ \\ \hat{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_0 \cot(\Gamma l) & -\mathbf{Y}_0 \operatorname{csch}(\Gamma l) \\ \\ -\mathbf{Y}_0 \operatorname{csch}(\Gamma l) & \mathbf{Y}_0 \coth(\Gamma l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \\ \hat{V}_1 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

de la ec.(4.15) se puede llegar a

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \\ \hat{V}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \coth(\Gamma l)\mathbf{Z}_0 & \operatorname{csch}(\Gamma l)\mathbf{Z}_0 \\ \\ \operatorname{csch}(\Gamma l)\mathbf{Z}_0 & \coth(\Gamma l)\mathbf{Z}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_0 \\ \\ \hat{I}_1 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Las ecuaciones (4.15) y (4.16) se pueden escribir en -forma simplificada como

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_0 \\ \hat{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \hat{V}_1 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

y

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \hat{V}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_0 \\ \hat{I}_1 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

donde

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}_0 \coth(\Gamma l)$$

$$B = \mathbf{Y}_0 \operatorname{csch}(\boldsymbol{\Gamma} l)$$

$$C = \coth(\boldsymbol{\Gamma} l)\mathbf{Z}_0$$

$$D = \operatorname{csch}(\boldsymbol{\Gamma} l)\mathbf{Z}_0$$

Las ecuaciones (4.18) y (4.19) son la representación - simplificada en forma de red de dos puertos de una línea de transmisión homogénea. Los modelos que nos representan estas ecuaciones se muestran en la fig.4.2

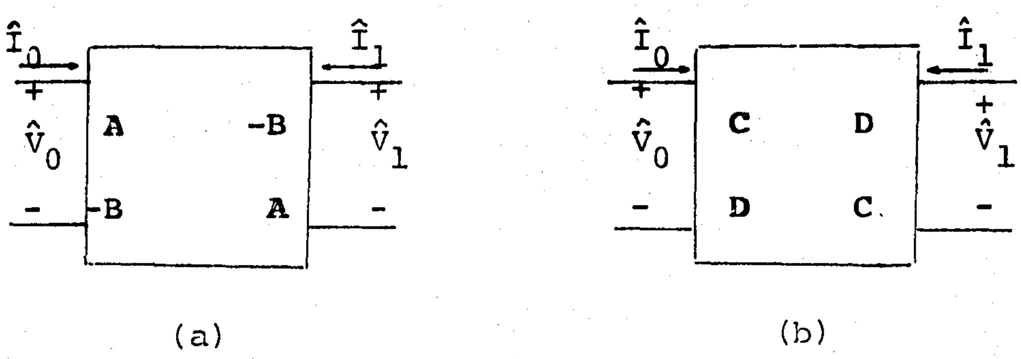


Fig. 4.2 Modelos de dos puertos de una línes de transmisión homogenea.

Se debe tener cuidado al calcular las funciones hiperbó licas matriciales, pues éstas, estan dadas en términos de - funciones exponenciales, por ejemplo

$$\coth(\boldsymbol{\Gamma} l\ ) = (\exp(\boldsymbol{\Gamma} l)-\exp(-\boldsymbol{\Gamma} l))^{-1}(\exp(\boldsymbol{\Gamma} l)+\exp(-\boldsymbol{\Gamma} l))$$

de esta manera, al calcular el triple producto

$$\exp(\boldsymbol{\Gamma} l) = \mathbf{M} \exp(\boldsymbol{\gamma} l)\ \mathbf{M}^{-1}$$

se puede producir saturación numérica, además $\exp(\gamma l)$ es -- una matriz en la que tiene mayor importancia el eigenvalor de mayor módulo, que pertenece al modo con mayor atenuación y por lo tanto de menor importancia en el fenómeno de propagación. Expresando $\coth(\Gamma l)$ con sus triples productos y recordando que

$$(\exp(\gamma l))^{-1} = \exp(-\gamma l)$$

tenemos que

$$\coth(\Gamma l) = \mathbf{M}(\mathbf{U}-\exp(-2\gamma l))^{-1}(\mathbf{U}+\exp(-2\gamma l))\mathbf{M}^{-1}$$

y similarmente

$$\operatorname{csch}(\Gamma l) = \mathbf{M}2\exp(-\gamma l)(\mathbf{U}-\exp(-2\gamma l))^{-1}\mathbf{M}^{-1}$$

Estas dos últimas expresiones tienen la ventaja de que se evita la saturación numérica y además se da mayor importancia al eigenvalor de menor módulo.

2. SISTEMA DE TRANSMISION HOMOGENEO.

Un sistema de transmisión homogéneo esta compuesto por una fuente de tensión, representada por una fuente ideal y una impedancia en serie, una línea de transmisión homogé-- nea y una impedancia terminal o de carga. Este tipo de sistema se muestra en la fig.4.3

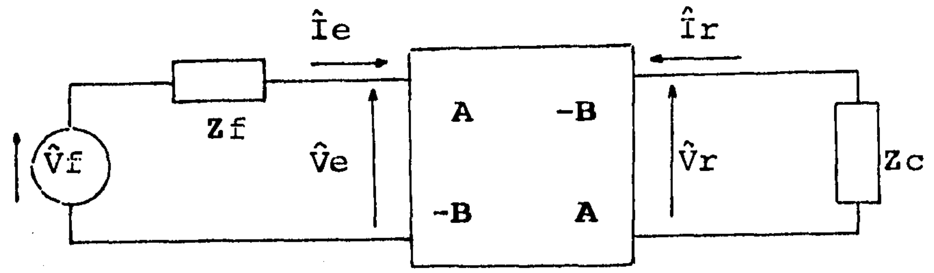


Fig. 4.3 Sistema de transmisión homogeneo

en la fig. 4.3

$\hat{V}f$ = voltaje de la fuente ideal.

Zf = impedancia de la fuente.

$\hat{I}e$ = vector de corrientes en el extremo emisor.

$\hat{V}e$ = vector de voltajes en el extremo emisor.

$\hat{I}r$ = vector de corrientes en el extremo receptor.

$\hat{V}r$ = vector de voltajes en el extremo receptor.

Zc = impedancia de carga.

El modelo de red de dos puertos de la línea de transmisión es

$$\begin{bmatrix} \hat{I}e \\ \hat{I}r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ -B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}e \\ \hat{V}r \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

para la carga

$$\hat{I}r = -Zc^{-1}\, \hat{V}r = -Yr\, \hat{V}r \tag{4.21}$$

del sistema (4.20)

$$\hat{I}r = -\mathbf{B}\,\hat{V}e + \mathbf{A}\,\hat{V}r$$

sustituyendo la ec.(4.21)

$$-\mathbf{Y}r\,\hat{V}r = -\,\mathbf{B}\hat{V}e + \mathbf{A}\,\hat{V}r$$

de donde

$$\hat{V}r = (\mathbf{A} + \mathbf{Y}r)^{-1}\,\mathbf{B}\,\hat{V}e \qquad (4.22)$$

Nuevamente de (4.20)

$$\hat{I}e = \mathbf{A}\,\hat{V}e - \mathbf{B}\,\hat{V}r$$

con (4.22)

$$\hat{I}e = (\mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{A} + \mathbf{Y}r)^{-1}\mathbf{B})\hat{V}e \qquad (4.23)$$

De la ec.(4.23) se define a la impedancia de entrada a la línea vista desde el extremo emisor como

$$\mathbf{Y}in = \mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{A} + \mathbf{Y}r)^{-1}\mathbf{B} \qquad (4.24)$$

de esta manera

$$\hat{I}e = \mathbf{Y}in\,\hat{V}e \qquad (4.25)$$

De acuerdo con (4.25) el sistema original se ha reducido a un sistema equivalente como el mostrado en la Fig.4.4. De la fig.4.4

$$\hat{I}e = (\mathbf{Y}f^{-1} + \mathbf{Y}in^{-1})^{-1}\,\hat{V}f$$

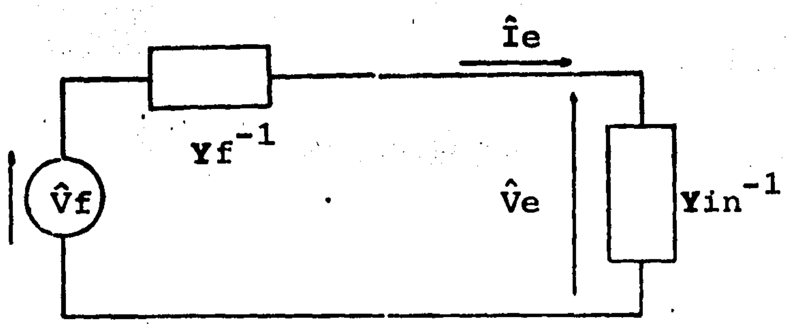


Fig. 4.4

con (4.25) y simplificando

$$\hat{V}e = (\mathbf{Y}f + \mathbf{Y}in)^{-1}\mathbf{Y}f\ \hat{V}f \qquad (4.26)$$

Las ecuaciones (4.21),(4.22), (4.25) y (4.26) nos dan la respuesta en estado estable en los extremos de una línea de transmisión homogénea en función de las condiciones de operación en sus extremos.

3. SISTEMAS DE TRANSMISION NO HOMOGENEOS.

El sistema homogéneo tratado en la sección anterior rara vez se encuentra en la realidad, sin embargo, las expresiones desarrolladas nos permitirán modelar sistemas no homogéneos.

Los sistemas no homogéneos estan constituidos por líneas o secciones de línea homogéneas unidas a traves de discontinuidades. En este trabajo tomamos el término "discontinuidad" para referirnos en forma general ya sea a los elementos de parámetros concentrados o a las irregularidades de las líneas de transmisión. Las discontinuidades que más comunmente se presentan en las líneas de transmisión - son las transposiciones. Los bancos de capacitores en serie y los reactores en paralelo generalmente se encuentran en - las subestaciones, por lo que se tienen que considerar como equipo terminal, no obstante, por generalidad se trataran - los casos en que exista una impedancia en serie o una admitancia en paralelo intercaladas entre secciones de línea homogeneas.

Para ilustrar el procedimiento a sequir en el modelado de líneas de transmisión no homogeneas, consideremos un sistema como el mostrado en la fig.4.5, con dos discontinuidades, que pueden ser de cualquier tipo, y equipo terminal en el extremo receptor.

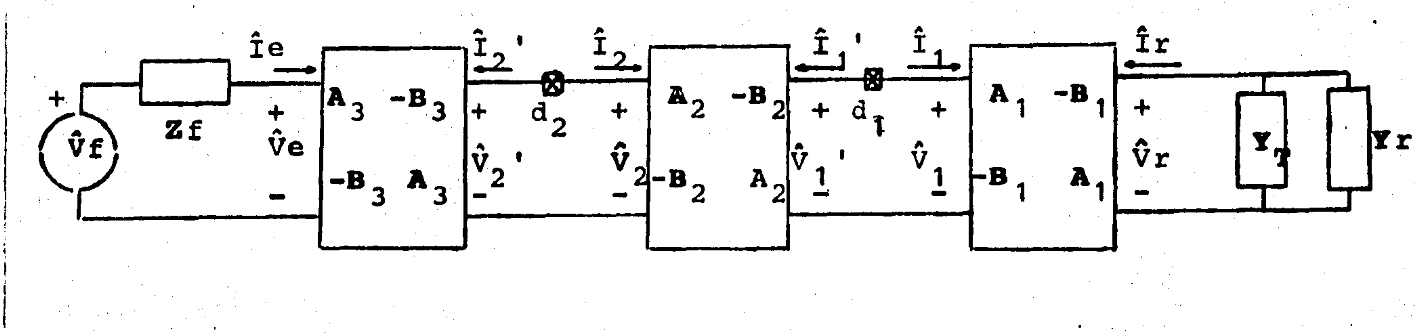


Fig. 4.5 Sistema de transmisión no Homogeneo

En la fig. 4.5

Yl = admitancia del equipo terminal

Yc = admitancia de carga.

dj = "j-ésima" discontinuidad.

Ai, Bi : constantes de la red de dos puertos de la sección de línea homogenea "i" .

$\hat{I}j$, $\hat{V}j$ corrientes y voltajes a la salida de la "j-ésima" discontinuidad.

$\hat{I}j'$, $\hat{V}j'$ corrientes y voltajes a la entrada de la "j-ésima" discontinuidad.

$\hat{V}f$, $\hat{I}e$, $\hat{V}e$, $\hat{V}r$, $\hat{I}r$ y Zf tienen el mismo significado que para el sistema homogeneo de la fig.4.3

Como primer paso calculemos la admitancia equivalente de la carga y el equipo terminal en el extremo receptor

$$Yr = Yl + Yc \tag{4.27}$$

aplicando a la primera sección de línea las expresiones encontradas para el caso de un sistema homogéneo

$$\hat{I}r = -Yr\hat{V}r \tag{4.28}$$

$$\hat{V}r = (A_1 + Yr)^{-1}B_1\ \hat{V}_1 \tag{4.29}$$

$$Yin_1 = A_1 - B_1(A_1+Yr)^{-1}B_1 \tag{4.30}$$

$$\hat{I}_1 = Yin_1\ \hat{V}_1 \tag{4.31}$$

Se ha reducido la parte del sistema compuesto por la primera sección de línea homógenea y la admitancia en el extremo receptor, a una sola admitancia equivalente Yin_1, como se muestra en la fig.4.6

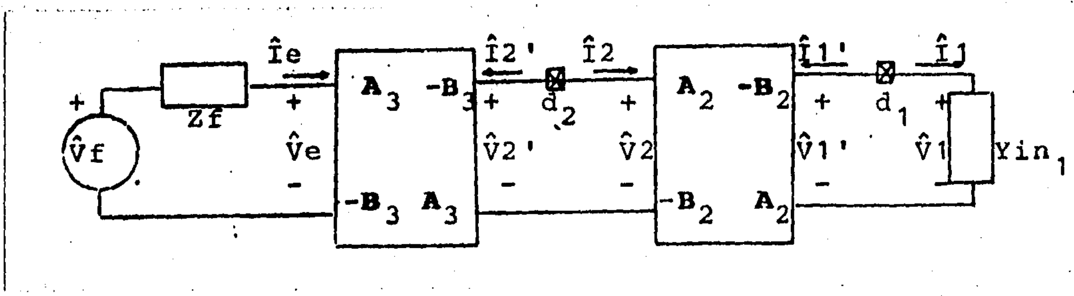


Fig. 4.6

Hagamos dos suposiciones, la primera, que es posible encontrar una relación entre los voltajes a la salida y los voltajes a la entrada de la primera discontinuidad, esto es

$$\hat{V}_1 = H_1 \, \hat{V}_1{}' \qquad (4.32)$$

y la segunda, que se puede calcular una admitancia de entrada, que llamaremos Yin_1' en el punto de inicio de esta primera discontinuidad. De acuerdo con esto, tendremos un sistema como el mostrado en la fig.4.7, en el cual es posible aplicar nuevamente las expresiones para un sistema homogé-- neo.

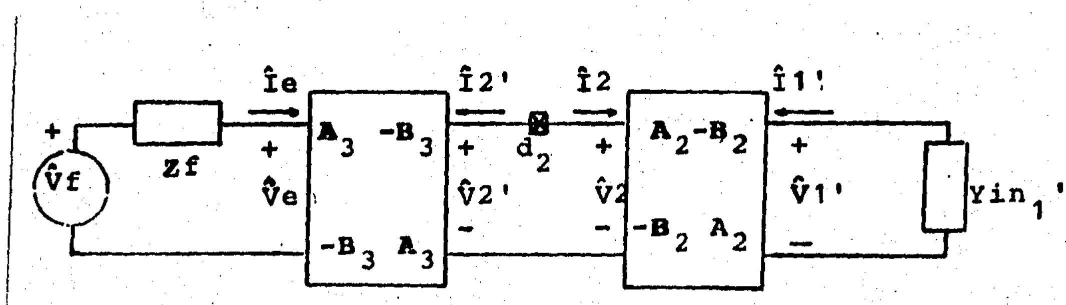


Fig. 4.7

$$\hat{I}_1' = - Yin_1' \hat{V}_1' \qquad (4.33)$$

$$\hat{V}_1' = (A_2+Yin_1')^{-1}B_2 \hat{V}_2 \qquad (4.34)$$

$$Yin_2 = A_2 - B_2(A_2+Yin_1')^{-1} B_2 \qquad (4.35)$$

$$\hat{I}_2 = Yin_2 \hat{V}_2 \qquad (4.36)$$

Al calcular Yin_2 el sistema se reduce al mostrado en la fig.4.8

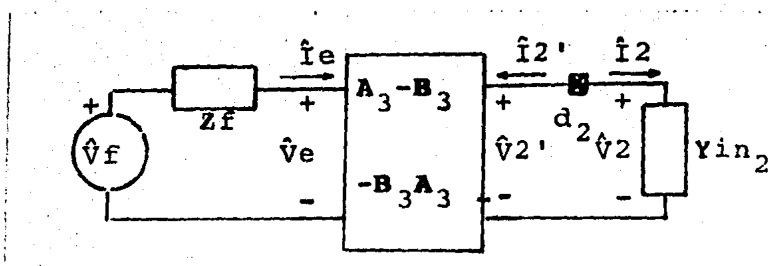


Fig. 4.8

Calculando la admitancia de entrada Yin_2' al inicio de la segunda discontinuidad y encontrando la relación

$$\hat{V}_2 = H_2 \hat{V}_2' \qquad (4.36)$$

tendremos el sistema de la fig.4.9. De acuerdo con esta figura

$$\hat{I}_2' = - Yin_2' \hat{V}_2' \qquad (4.37)$$

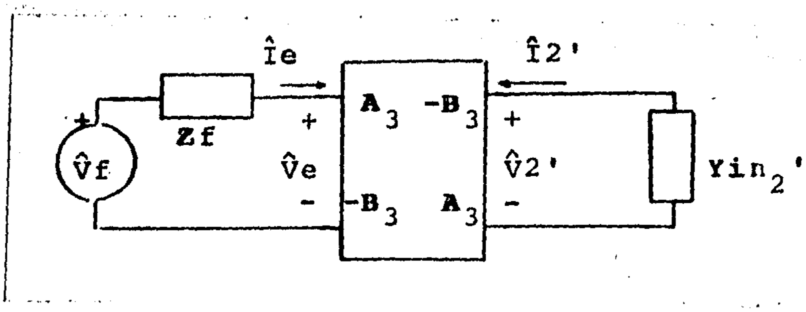


Fig. 4.9

$$\hat{V}_2' = (A_3 + Yin_2')^{-1} B_3 \hat{V}e \qquad (4.38)$$

$$Yin_3 = A_3 - B_3(A_3 + Yin_2')^{-1} B_3 \qquad (4.39)$$

$$\hat{I}e = Yin_3 \hat{V}e \qquad (4.40)$$

$$\hat{V}e = (Yf + Yin_3)^{-1} Yf \hat{V}f \qquad (4.41)$$

Agrupando en una sola expresión las ecuaciones para - los voltajes $\hat{V}r$, $\hat{V}_1$, $\hat{V}_1'$, $\hat{V}_2$ y $\hat{V}_2'$

$$\hat{V}r = (A_1+Yr)^{-1}B_1H_1(A_2+Yin_1')^{-1}B_2H_2(A_3+Yin_2')^{-1}B_3 \hat{V}e \qquad (4.42)$$

De la ecuación (4.42) se puede ver que es posible desarrollar un procedimiento recursivo para el calculo de la respuesta en estado estable de un sistema con cualquier número de discontinuidades. Se ha mostrado también la necesidad de encontrar la forma de calcular la admitancia de entrada a cualquier conjunto discontinuidad-línea-carga, así como la relación entre los voltajes en los extremos de una discontinuidad.

En general para "n" discontinuidades, la relación entre los voltajes en el extremo receptor y los voltajes en el extremo emisor de una línea no homogenea es

$$\hat{V}r = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{Y}r)^{-1}\mathbf{B}_1 \prod_{i=1}^{n}\{\mathbf{H}_i(\mathbf{A}_{i+1}+\mathbf{Y}in_i')^{-1}\mathbf{B}_{i+1}\}\hat{V}e \qquad (4.43)$$

$$\mathbf{Y}in_i' = f(\mathbf{Y}in_i, d_i) \quad , \; i = 1,\ldots,n \qquad (4.44)$$

En las siguientes secciones veremos la forma de encontrar las admitancias de entrada $\mathbf{Y}in_i'$ y las matrices de transferencia $\mathbf{H}_i$, que son la base de las dos suposiciones establecidas al inicio del desarrollo del modelado del sistema no homogéneo.

La matriz de transferencia para la línea completa es

$$\mathbf{H}_{linea} = (\mathbf{A}_1+\mathbf{Y}r)^{-1}\,\mathbf{B}_1 \prod_{i=1}^{n}\{\mathbf{H}_i(\mathbf{A}_{i+1}+\mathbf{Y}in_i')^{-1}\,\mathbf{B}_{i+1}\} \qquad (4.45)$$

3.1. Transposiciones.

Las transposiciones son las discontinuidades que más comunmente se encuentran en las líneas de transmisión y -

consisten simplemente en un cambio de posición de los conductores. Las transposiciones se pueden llevar a cabo de - dos diferentes formas : cambiando en un determinado ciclo de transposición la fase 1 a la posición de la fase 3 (-- transposición de 1 a 3) o cambiando la fase 3 a la posi--- ción de la fase 1 (transposición de 3 a 1) .

En la fig. 4.10 se muestra un esquema de transposición de 3 a 1, en dicha figura $\hat{V}'$, $\hat{I}'$ son los vectores de voltaje y de corriente antes de la transposición y $\hat{V}$, $\hat{I}$ son los vectores de estas mismas cantidades pero despues de la -- transposición.

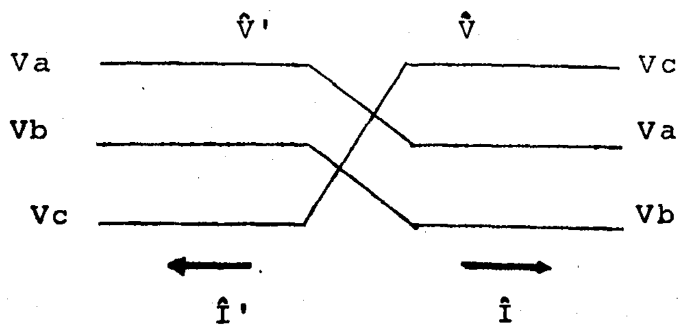


Fig. 4.10

Los vectores $\hat{V}'$, $\hat{I}'$ se pueden obtener a partir de $\hat{V}$, $\hat{I}$ por medio de la matriz de rotación $\mathbf{R}_{31}$:

$$\hat{V}' = \mathbf{R}_{31}\ \hat{V} \tag{4.46}$$

$$\hat{I}' = -\ \mathbf{R}_{31}\ \hat{I} \tag{4.47}$$

con

$$\mathbf{R}_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

La matriz de rotación cumple con las siguientes propiedades

$$\mathbf{R}_{31}^{\;2} = \mathbf{R}_{31}^{\;-1} \tag{4.49}$$

$$\mathbf{R}_{31t} = \mathbf{R}_{31}^{\;-1} \tag{4.50}$$

En la fig.4.11 se muestra el esquema de transposiciones de 1 a 3, en donde las variables tienen el mismo significado que para la fig.4.10

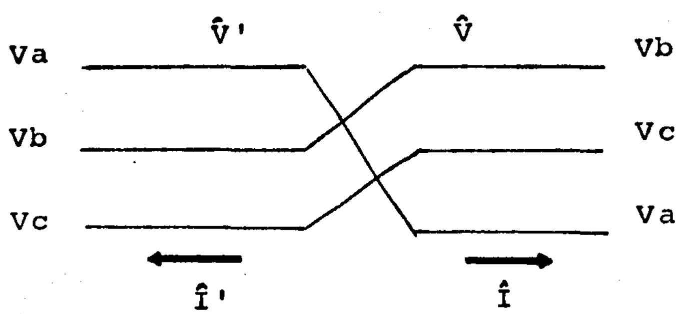


Fig. 4.11

En la fig. 4.11

$$\hat{V}' = \mathbf{R}_{13}\ \hat{V} \tag{4.51}$$

$$\hat{I}' = - R_{13}\ \hat{I} \tag{4.52}$$

donde

$$\mathbf{R}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

y al igual que la matriz $\mathbf{R}_{31}$, la matriz $\mathbf{R}_{13}$ cumple con

$$\mathbf{R}_{13}^{\ 2} = \mathbf{R}_{13}^{\ -1} \tag{4.54}$$

$$\mathbf{R}_{13t} = \mathbf{R}_{13}^{\ -1} \tag{4.55}$$

Para modelar las transposiciones consideremos una parte de un sistema de transmisión no homogéneo, como se muestra en la fig. 4.12

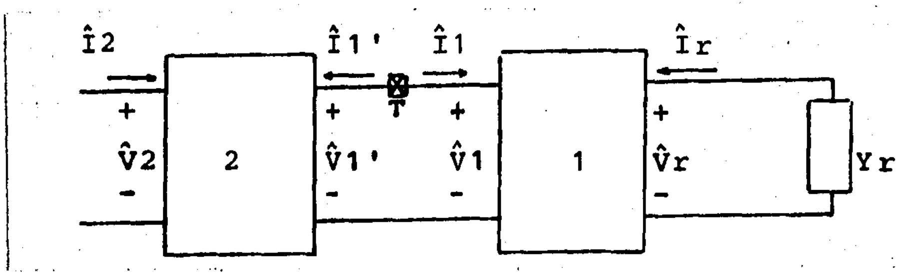


Fig. 4.12

De la fig.4.12

$$\hat{V}_1{}' = \mathbf{R}\ \hat{V}_1 \tag{4.56}$$

$$\hat{I}_1' = -\mathbf{R}\,\hat{I}_1 \tag{4.57}$$

De las expresiones para un sistema homogéneo

$$\hat{V}r = -(\mathbf{A}_1 + \mathbf{Y}r)^{-1}\,\mathbf{B}_1\,\hat{V}_1 \tag{4.58}$$

$$\mathbf{Y}in_1 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1(A_1 + \mathbf{Y}r)^{-1}\,\mathbf{B}_1 \tag{4.59}$$

$$\hat{I}_1 = \mathbf{Y}in_1\,\hat{V}_1 \tag{4.60}$$

de (4.56)

$$\hat{V}_1 = \mathbf{R}^{-1}\,\hat{V}_1' \tag{4.61}$$

sustituyendo (4.60) en (4.57)

$$\hat{I}_1' = -\mathbf{R}\,\mathbf{Y}in_1\,\hat{V}_1$$

con (4.61)

$$\hat{I}_1' = -\mathbf{R}\,\mathbf{Y}in_1\,\mathbf{R}^{-1}\,\hat{V}_1' \tag{4.62}$$

De la ec.(4.62) se define la impedancia de entrada de la línea en el punto de la transposición como

$$\mathbf{Y}in_1' = \mathbf{R}\,\mathbf{Y}in_1\,\mathbf{R}^{-1} \tag{4.63}$$

de donde

$$\hat{I}_1' = -\mathbf{Y}in_1'\,\hat{V}_1' \tag{4.64}$$

con (4.58) y (4.51)

$$\hat{V}r = (A_1 + Yr)^{-1} B_1 R^{-1} \hat{V}_1' \qquad (4.65)$$

entonces

$$H = R^{-1} \qquad (4.66)$$

En este punto, hemos reducido el sistema original al sistema equivalente que se muestra en la fig.4.13

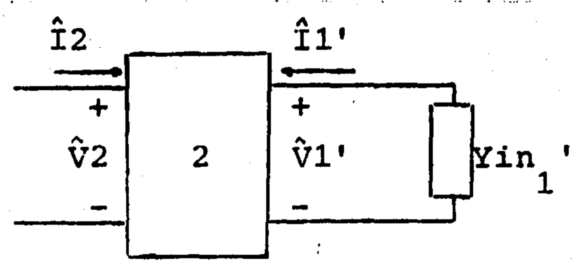


Fig. .4.13

Las ecuaciones (4.59), (4.63), (4.64) y (4.65) nos permiten incluir cualquier número de transposiciones en el modelado de un sistema no homogéneo, por ejemplo, siguiendo el procedimiento ya mostrado, para dos transposiciones tendriamos que

$$\hat{V}r = (A_1+Yr)^{-1}B_1R^{-1}(A_2+Yin_1')^{-1}B_2R^{-1} \hat{V}_2'$$

En la práctica, los productos $R\, Yin\, R^{-1}$ y $M\, R^{-1}$, siendo M una matriz cualesquiera, no se efectúan, pués debido a las características de **R** solo es necesario intercambiar - las posiciones de los elementos de las matrices de acuerdo - al esquema de transposiciones.

El procedimiento de intercambio de posiciones se conoce como "direccionamiento indirecto". Mostraremos este procedimiento solo para el caso de una transposición de 3 a 1, ya - que para una transposición de 1 a 3 el procedimiento es similar. La matriz de admitancia de entrada a la línea en el punto de la transposición esta dada según (4.63) por

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{R}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{R}^{-1}$$

realizando el triple producto

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} Y_{22} & Y_{23} & Y_{21} \\ Y_{32} & Y_{33} & Y_{31} \\ Y_{12} & Y_{13} & Y_{11} \end{bmatrix}$$

Comparando **Y** y **Y'**

$$Y_{11}' = Y_{22} \quad , \quad Y_{12}' = Y_{23} \quad , \quad Y_{13}' = Y_{21}$$

$$Y_{21}' = Y_{32} \quad , \quad Y_{22}' = Y_{33} \quad , \quad Y_{23}' = Y_{31}$$

$$Y_{31}' = Y_{12} \quad , \quad Y_{32}' = Y_{13} \quad , \quad Y_{33}' = Y_{11}$$

Los renglones y las columnas de Y' se relacionan con los renglones y columnas de Y de acuerdo con los subíndices :

$$- 2 - 3 - 1$$

Si definimos el vector k **con estos valores**

$$k(1) = 2 \quad , \quad k(2) = 3 \quad , \quad k(3) = 1$$

la rotación se puede efectuar de la siguiente manera

```
DO  I = 1,N
  DO  j = 1,N
    Yp(I,J) = Y(K(I),K(J))
END DO
```

Para el caso de una transposición de 1 a 3 el vector k es

$$k(1) = 3 \quad , \quad k(2) = 1 \quad , \quad k(3) = 2$$

y el proceso para realizar la rotación es el mismo que para la rotación de 3 a 1.

Para realizar la operación

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}\, R^{-1}$$

el procedimiento es

```
DO  I = 1,N
   DO  J = 1,N
      Mp(I,J)  = M(I,K(J))
END DO
```

3.2. Impedancias en serie.

Para modelar inpedancias en serie intercaladas entre -- secciones de línea, se sigue un procedimiento similar al del modelado de transposiciones. Consideremos una parte de un - sistema de transmisión que contenga dos secciones de línea, una impedancia en serie y una admitancia de carga (fig.4.14)

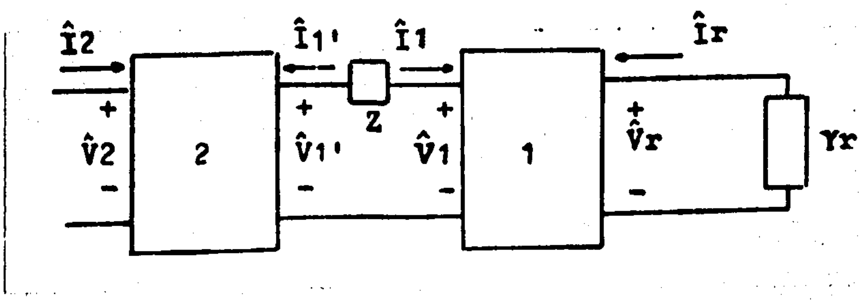


Fig. 4.14

De la fig. 4.14

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$$

$$\hat{V}r = (A_1+Yr)^{-1}B_1\ \hat{V}_1 \tag{4.67}$$

$$Yin_1 = A_1 - B_1(A_1+Yr)^{-1}B_1 \tag{4.68}$$

$$\hat{I}_1 = Yin_1\ \hat{V}_1 \tag{4.69}$$

$$\hat{I}_1' = -\ \hat{I}_1 \tag{4.70}$$

$$\hat{V}_1' = \hat{V}_1 + Y^{-1}\hat{I}_1 \tag{4.71}$$

con (4.69) en (4.71) y simplificando

$$\hat{V}_1' = Y^{-1}(Y + Yin_1)\ \hat{V}_1$$

de donde

$$\hat{V}_1 = (Y + Yin_1)^{-1}\ Y\ \hat{V}_1' \tag{4.72}$$

De (4.72) definimos a la matriz de transferencia como

$$H = (Y + Yin_1)^{-1}\ Y \tag{4.73}$$

El sistema original se ha reducido al mostrado en la -- fig. 4.15

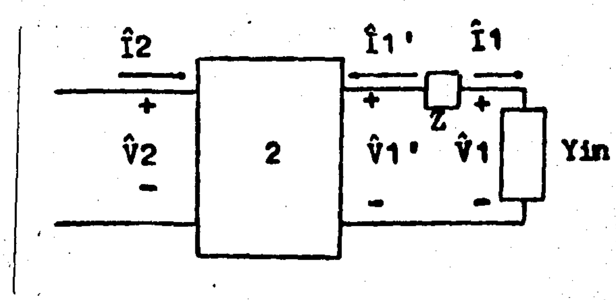


Fig. 4.15

Basándonos en la fig. 4.15 se puede calcular la admitancia de entrada de la parte del sistema formada por la impedancia en serie, la sección de línea y la carga

$$\mathbf{Yin}_1' = (\mathbf{Y}^{-1} + \mathbf{Yin}_1^{-1})^{-1}$$

de donde

$$\mathbf{Yin}_1' = \mathbf{Yin}_1 \ (\mathbf{Yin}_1+\mathbf{Y})^{-1} \ \mathbf{Y} \tag{4.74}$$

y

$$\hat{\mathbf{I}}_1' = - \mathbf{Yin}_1' \ \hat{\mathbf{V}}_1' \tag{4.75}$$

Agrupando las expresiones encontradas para los voltajes

$$\hat{\mathbf{V}}\mathbf{r} = (\mathbf{A}_1+\mathbf{Yr})^{-1} \ \mathbf{B}_1 \ \mathbf{H} \ \hat{\mathbf{V}}_1' \tag{4.76}$$

3.3. Admitancias en paralelo.

Para modelar las admitancias en paralelo, consideremos el sistema de la fig.4.16

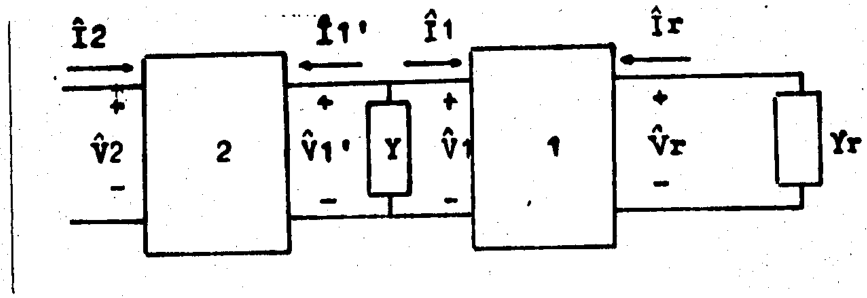


Fig. 4.16

De la fig. 4.16

$$\hat{V}r = (\mathbf{A}_1+\mathbf{Y}r)^{-1}\, B_1\, \hat{V}_1 \tag{4.77}$$

$$\mathbf{Y}in_1 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1(\mathbf{A}_1 + Yr)^{-1}\, \mathbf{B}_1 \tag{4.78}$$

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_1{}' \tag{4.79}$$

De acuerdo con (4.79) la matriz de transferencia es la matriz unidad

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \tag{4.80}$$

Ahora el sistema original tiene la forma mostrada en la fig. 4.17

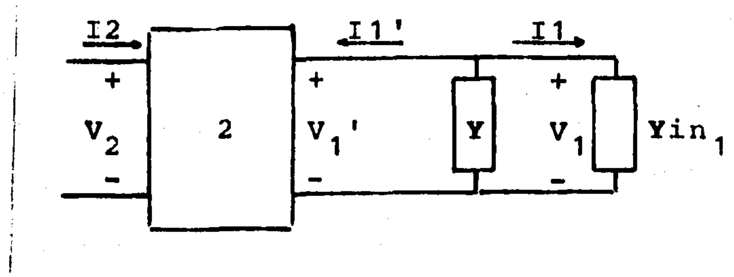


Fig. 4.17

De la fig. 4.17

$$\mathbf{Y}in_1{}' = \mathbf{Y} + \mathbf{Y}in_1 \tag{4.81}$$

con (4.79) en (4.77)

$$\hat{V}r = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{Y}r)^{-1}\, \mathbf{B}_1\, \hat{V}_1{}' \qquad (4.82)$$

3.4. Cambios de configuración.

Los cambios de configuración que se pueden presentar en una línea de transmisión son por ejemplo, un cambio de una - línea horizontal a una configuración en "delta" o incluso a una vertical, o cambios en la resistividad del terreno. En general podemos considerar como cambios de configuración cualquier cambio de las características físicas de las líneas de transmisión que afecte los valores de los parámetros eléctricos y modales.

El modelado de los cambios de configuración por medio de redes de dos puertos es muy simple, ya que solo consiste en una conexión en cascada de las diferentes secciones de línea. La verdadera complicación que se presenta, es que es necesario recalcular los parámetros eléctricos y modales de la línea.

Considerando el sistema de la fig.4.18 . De esta figura

$$\hat{V}r = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{Y}r)^{-1}\, \mathbf{B}_1\, \hat{V}_1 \qquad (4.83)$$

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_1{}' \qquad (4.84)$$

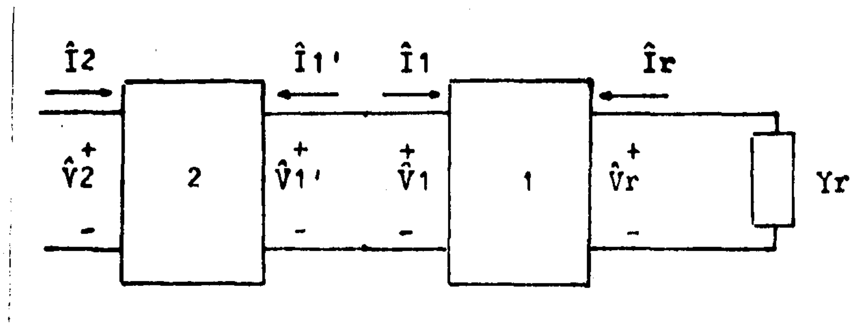


Fig. 4.18

$$\hat{I}_1{}' = \hat{I}_1 \tag{4.85}$$

$$\mathbf{Yin}_1{}' = \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1(\mathbf{A}_1+\mathbf{Yr})^{-1}\,\mathbf{B}_1 \tag{4.86}$$

$$\mathbf{Yin}_1{}' = \mathbf{Yin}_1 \tag{4.87}$$

de (4.83) y (4.84)

$$\hat{V}r = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{Yr})^{-1}\,\mathbf{B}_1\,\hat{V}_1{}' \tag{4.88}$$

además

$$\hat{V}_1{}' = (\mathbf{A}_2 + \mathbf{Yin}_1{}')^{-1}\mathbf{B}_2\,\hat{V}_2 \tag{4.89}$$

$$\mathbf{Yin}_2 = \mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_2\,(\mathbf{A}_2 + \mathbf{Yin}_1{}')^{-1}\,\mathbf{B}_2 \tag{4.90}$$

Para encontrar $\hat{V}r$ en función de $\hat{V}_2$ debemos de sustituir (4.89) en (4.88) pero como se trata de un cambio de configuración, antes es necesario calcular los parámetros eléctricos y modales de acuerdo con las características de la segunda sección de línea.

4. PROCEDIMIENTO COMPUTACIONAL.

En las figuras 4.19 y 4.20 se muestra la secuencia de ejecución para el cálculo de propagación en estado estable en un sistema de transmisión de energía eléctrica. El contenido de los bloques es el siguiente:

B1. Lectura de datos.

B2. Modelado de la línea de transmisión. Se calculan los parámetros eléctricos y modales, la admitancia de entrada y la función de transferencia.

B3. Modelado de la fuente de alimentación. Se calcula la impedancia equivalente de Thévenin de la fuente de alimentación.

B4. Cálculo de voltajes. Se calculan los vectores de voltaje en el extremo emisor y en el extremo receptor de la línea.

B2.1. Cálculo de parámetros eléctricos. Se realiza el cálculo de las matrices de impedancia y admitancia normalizadas.

B2.2. Cálculo de parámetros modales. Una vez calculadas las matrices de parámetros eléctricos normalizadas, se forma la matriz a diagonalizar y se evalúan las constantes y modos de propagación y las matrices de impedancia y admitancia características.

B2.3. Procedimiento recursivo de modelado. Se evalúa la admitancia de entrada y la función de transferencia de la línea

B2.3.1. Admitancia terminal. Se calcula la admitancia equivalente de la carga y del equipo terminal.

B2.3.2. Primera sección de línea. Se calculan las admitancias de red de dos puertos de la primera sección de línea y la admitancia de entrada al inicio de esta sección de línea.

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{Y}_0 \coth(\mathbf{\Gamma} l_1)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{Y}_0 \operatorname{csch}(\mathbf{\Gamma} l_1)$$

$$\mathbf{Yin}_1 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1 (\mathbf{A}_1 + \mathbf{Yr})^{-1} \mathbf{B}_1$$

B2.3.3. Parte no homogénea de la línea. Este procedimiento se realiza "n" veces para "n" discontinuidades. Se calculan $\mathbf{Yin}_i'$ y $\mathbf{H}_i$ de acuerdo al tipo de la discontinuidad "i", y se calculan $\mathbf{H}_j$ y $\mathbf{Yin}_j$ para la "j-ésima" sección de línea, siendo j=i+1 .

B2.3.4. Elementos en el extremo emisor Se introduce el efecto de los elementos de parámetros concentrados conectados en el extremo emisor de la línea.

B2.3.3.1. Modelado de discontinuidades. Se efectúa el cálculo de $\mathbf{Yin}_i'$ y de $\mathbf{H}_i$ de acuerdo con el tipo de la discontinuidad "i".

B2.3.3.2. Modelado de secciones de línea. Se calculan

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{Y}_0 \coth(\mathbf{\Gamma} l_j)$$

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{Y}_0 \operatorname{csch}(\mathbf{\Gamma} l_j)$$

$$\mathbf{H}_j = \mathbf{H}_i (\mathbf{A}_j + \mathbf{Yin}_i')^{-1} \mathbf{B}_j$$

$$\mathbf{Yin}_j = \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j (\mathbf{A}_j + \mathbf{Yin}_i')^{-1} \mathbf{B}_j$$

con $j = i+1$

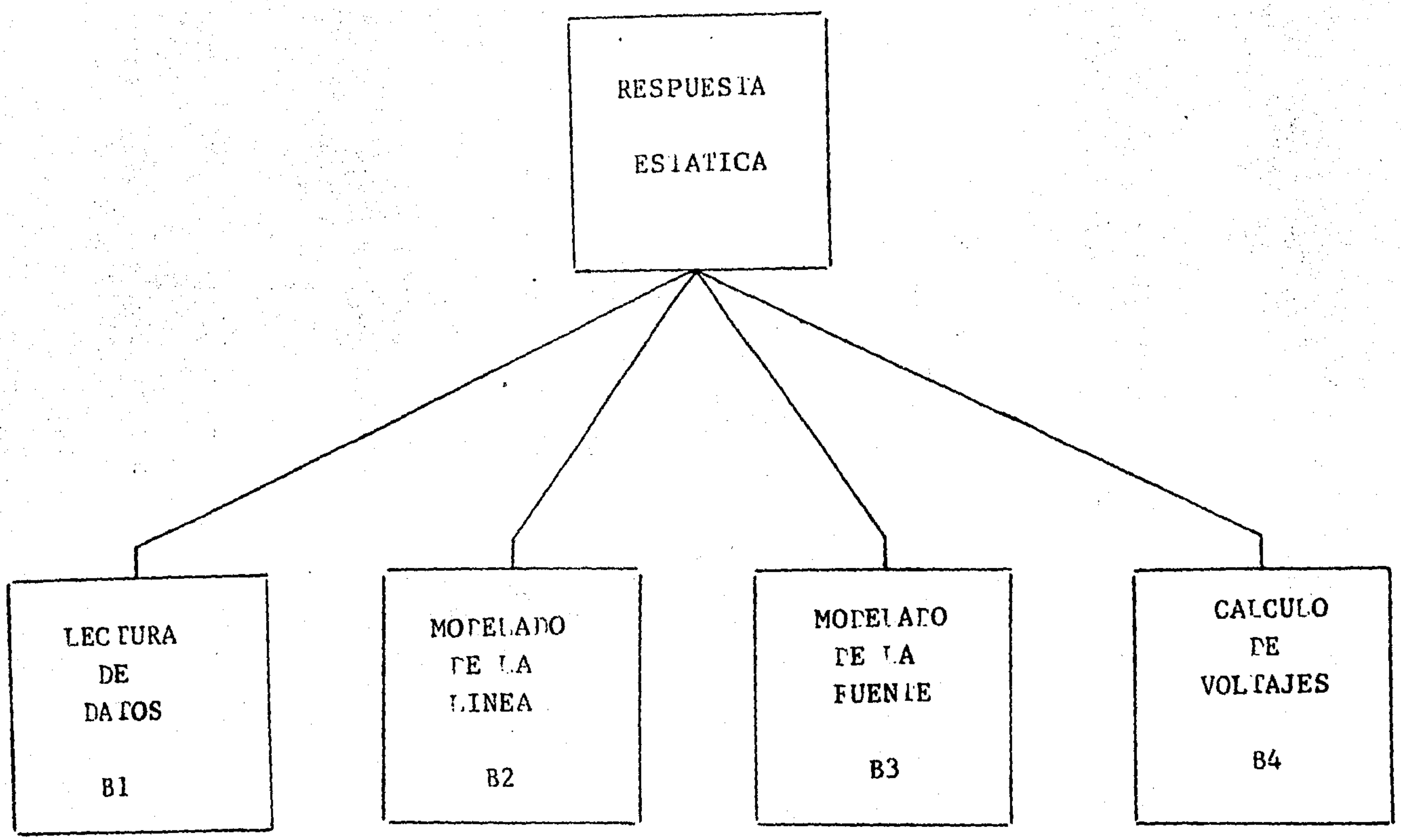


Fig. 4.19 Secuencia de ejecución para el calculo de propagación en estado es<u>s</u>table en un sistema de transmisión de energía eléctrica .

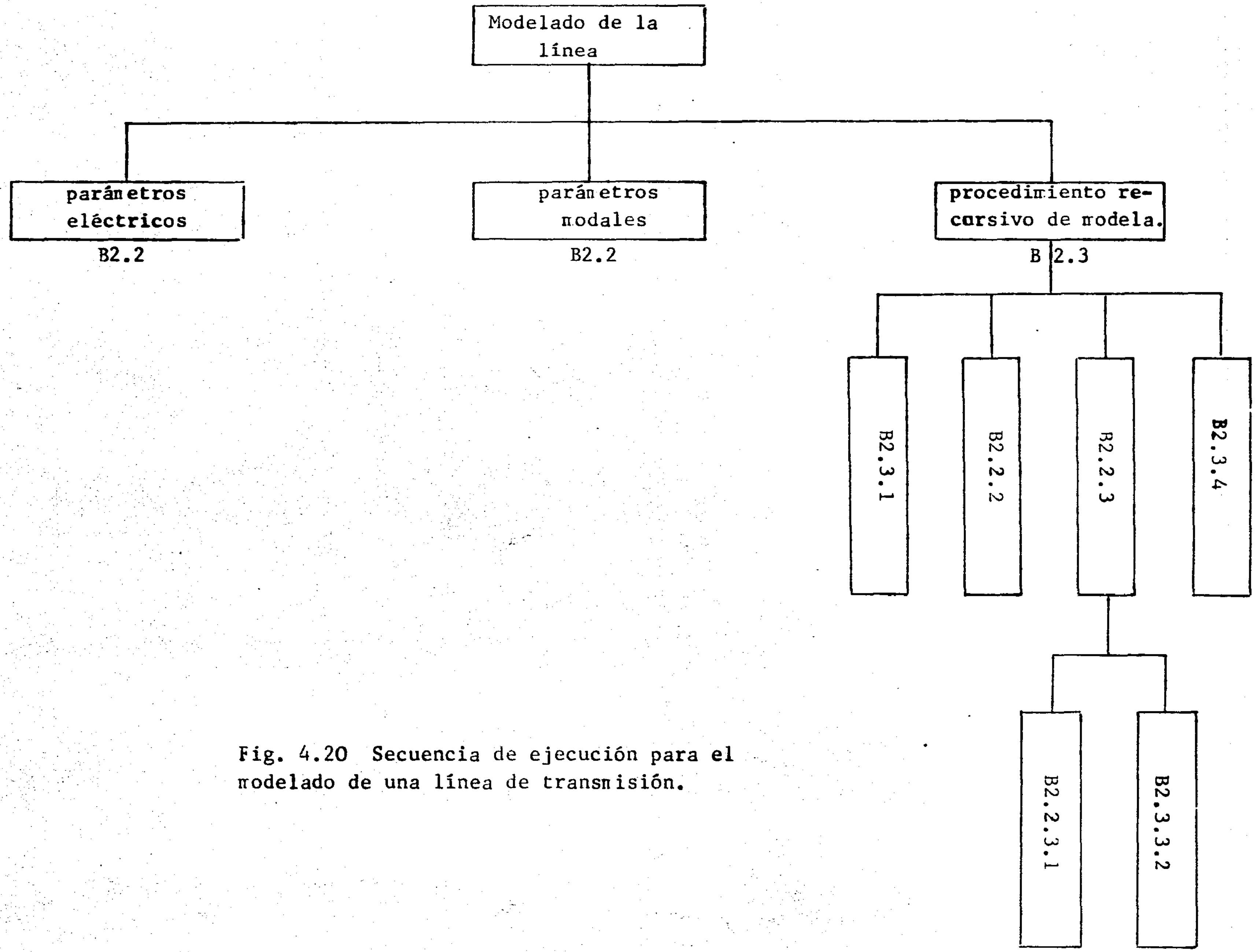


Fig. 4.20 Secuencia de ejecución para el modelado de una línea de transmisión.

C A P I T U L O 5

R E S P U E S T A E N F R E C U E N C I A

1. RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LINEALES CON PARAMETROS DEPENDIENTES DE LA FRECUENCIA.

En un sistema lineal de parámetros concentrados la relación entre la función de excitación y la función de respuesta se describe por medio de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes de la forma

$$b_n \frac{d^n f(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + b_0 f(t) = g(t) \qquad (5.1)$$

Expresando la ec.(5.1) en forma operacional

$$T(D)\{f(t)\} = g(t) \qquad (5.2)$$

donde

$g(t)$ es la función de excitación.

$f(t)$ es la función respuesta.

$T(D)$ es un operador definido por

$$T(D) = b_n \frac{d^n}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + b_0 \qquad (5.3)$$

Si los parámetros del sistema (los coeficientes "b_i", $i=0, \ldots, n$), son dependientes de la frecuencia, la ecuación (5.2) se puede escribir como

$$T(D,\omega)\{f(t)\} = g(t) \tag{5.4}$$

La solución de la ec.(5.4) se encuentra aplicando la transformada integral de Fourier.

El par de transformadas de Fourier se define como

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) \, dt \tag{5.5}$$

y

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) \, d\omega \tag{5.6}$$

donde

$f(t)$ es una función del tiempo.

$F(j\omega)$ es la "transformada" o "espectro" de $f(t)$.

A (5.5) se le conoce como "transformada directa" y a (5.6) como "transformada inversa".

Este método de solución consiste en descomponer la función de excitación en términos de sus componentes senoidales, calcular la respuesta del sistema a cada una de estas componentes y reunirlas para obtener la respuesta total o "respuesta en frecuencia del sistema", para finalmen te encontrar la respuesta en el dominio del tiempo mediante la aplicación de la transformada inversa.

Transformando la ec.(5.4) al dominio de la frecuencia

$$T(j\omega,\omega)\ F(j\omega) = G(j\omega) \tag{5.7}$$

donde

$F(j\omega)$ y $G(j\omega)$ se calculan de acuerdo con (5.5).

De (5.7) la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia o respuesta en frecuencia es

$$F(j\omega) = (T(j\omega,\omega))^{-1}\ G(j\omega) \tag{5.8}$$

La respuesta en el dominio del tiempo se obtiene aplicando a (5.8) la transformación inversa dada por (5.6)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (T(j\omega,\omega))^{-1} G(j\omega) \exp(j\omega t)\, d\omega \tag{5.9}$$

En el caso de sistemas sencillos es posible dar una solución analítica para (5.9) . Sin embargo, en el caso de los sistemas de transmisión, dado que se presentan elementos de parámetros distribuidos cuyas características dependen en forma no lineal de la frecuencia, es muy dificial determinar analiticamente la respuesta en frecuencia del sistema y por consiguiente la respuesta en el dominio del tiempo. Por otra parte, como se describe en los capítulos anteriores, mediante el análisis modal y la teoría de re--

des de dos puertos, es posible determinar la respuesta de las líneas de transmisión en estado estable para cualquier frecuencia, lo que nos permite evaluar el espectro de la respuesta a cualquier excitación en forma discreta. Por estas razones la ec.(5.9) se debe evaluar numéricamente.

2. EFECTOS DE LA EVALUACION NUMERICA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

La evaluación numérica de la transformada inversa de Fourier conduce a la aparición de dos tipos de errores: errores por truncamiento o fenómeno de Gibbs y errores por discretización o encimamiento. Estos dos tipos de errores y la forma de reducirlos se tratará por separado en las siguientes secciones.

2.1. Errores por truncamiento.

Al evaluar numéricamente la ec.(5.9), las integrales se convierten en sumatorias, y si se desea obtener un valor numérico, no se puede tomar la suma de una serie infinita de muestras. El efectuar las sumatorias para una serie finita de muestras, equivale a truncar las integrales evaluándolas en un determinado intervalo. Consideremos la transformación inversa de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\exp(j\omega t)d\omega \qquad (5.10)$$

evaluando la integral en un intervalo finito de frecuen--

cias, digamos $(-\Omega, +\Omega)$

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{+\Omega} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega \tag{5.11}$$

La integral (5.11) se puede representar como

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\ H(\omega)\ \exp(j\omega t) d\omega \tag{5.12}$$

donde

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 , & -\Omega < \omega < \Omega \\ \\ 0 , & \Omega < \omega < \Omega \end{cases} \tag{5.13}$$

De la definición de la transformada de Fourier y de (5.12)

$$F'(j\omega) = F(j\omega)\ H(\omega) \tag{5.14}$$

y en el dominio del tiempo

$$f'(t) = f(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \tag{5.15}$$

esto es, $f'(t)$ es la convolución de $f(t)$ y $h(t)$.Por otra parte

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)\ \exp(j\omega t)\ d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \exp(j\omega t)\ d\omega$$

realizando la integral

$$h(t) = \frac{\Omega}{\pi}\,\frac{\text{sen}(\Omega t)}{\Omega t} = \frac{\Omega}{\pi}\,\text{sinc}(\Omega t) \qquad (5.16)$$

Para visualizar el efecto del truncamiento del rango de integración, supongamos que f(t) es una función escalón unitario. Al efectuar la convolución entre f(t) y h(t), que se muestran en las figs. 5.1(a) y 5.1(b), se obtiene la función mostrada en la fig. 5.1(c).

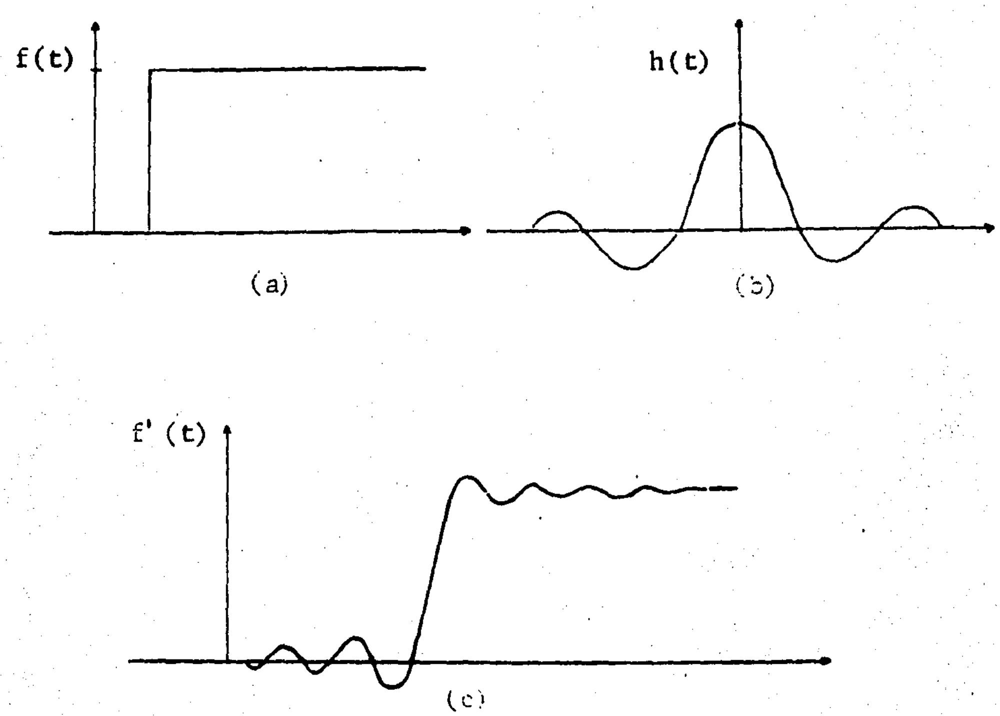


Fig. 5.1

En la fig. 5.1(c) se observa que la función resultante presenta oscilaciones rápidas o "rizo" en las cercanías de las discontinuidades, estas son las llamadas "oscilaciones de Gibbs" o "fenómeno de Gibbs".

Las oscilaciones de Gibbs pueden ser reducidas o "suavizadas" por medio del uso de funciones de peso conocidas - como "ventanas". La técnica consiste en efectuar en cada - instante un promedio de la función f'(t) multiplicada por - una función de peso v(t) en el período de las oscilaciones:

$$f_{\sigma}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f'(t)v(t)dt \qquad (5.17)$$

Con esto se consigue que la función $f_{\sigma}(t)$ sea una mejor a-- proximación a f(t) que la que representa f'(t).

En el estudio de transitorios esta muy extendido el empleo de la ventana de Lanczos conocida con el nombre de "factor σ", sin embargo en estudios más recientes Wedephol ha introducido el uso de la ventana de Hamming.

<u>Ventana de Lanczos.</u> Lanczos encontró que el período de las oscilaciones de Gibbs se relaciona con la frecuen-- cia de truncamiento "Ω" de acuerdo con

$$T = 2\pi/\Omega$$

Así, Lanczos propuso que se realizara un promedio de la - función en el período (t-T/2,t+T/2). En este caso la fun--

ción de peso es un rectángulo, es decir, ningún valor de la función a promediar se pondera más que otros. Empleando la ventana de Lanczos la ec.(5.17) queda como

$$f_\sigma(t) = \frac{\Omega}{2\pi}\int_{t-\pi/\Omega}^{t+\pi/\Omega} f'(t)\,dt \qquad (5.18)$$

$$f_\sigma(t) = \frac{\Omega}{2\pi}\int_{t-\pi/\Omega}^{t+\pi/\Omega}\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{+\Omega} f(j\omega)\,\exp(j\omega t)\,d\omega\}\,dt$$

intercambiando el orden de integración

$$f_\sigma(t) = \frac{\Omega}{4\pi^2}\int_{-\Omega}^{+\Omega} f(j\omega)\{\int_{t-\pi/\Omega}^{t+\pi/\Omega}\exp(j\omega t)dt\}\,d\omega$$

entonces

$$f_\sigma(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{+\Omega} f(j\omega)\sigma(\omega)\,\exp(j\omega t)d\omega \qquad (5.19)$$

siendo

$$\sigma(\omega) = \frac{\mathrm{sen}(\pi\omega/\Omega)}{\pi\omega/\Omega} \qquad (5.20)$$

La función $\sigma(\omega)$ es el llamado factor σ standard de - Lanczos. En la fig.5.2(a) se muestra la función $\sigma(\omega)$ y en la fig. 5.2(b) se muestra esta misma función pero en el dominio del tiempo.

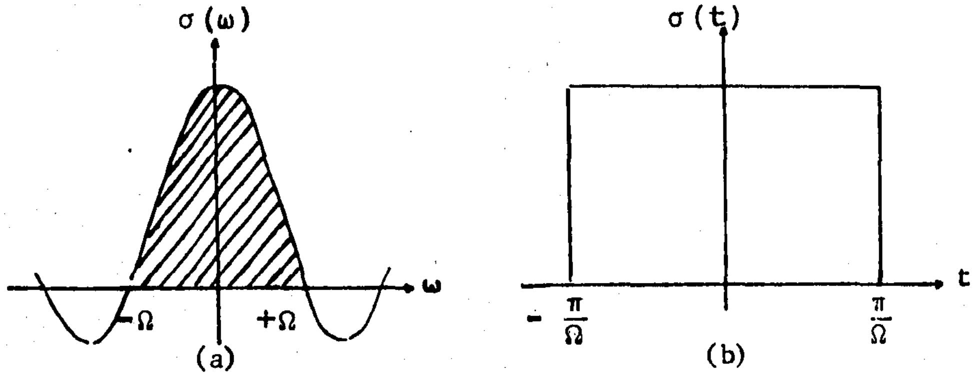


Fig. 5.2. Ventana de Lanczos

Comparando las ecuaciones (5.11) y (5.19) se observa que el uso de las funciones ventana consiste simplemente en introducir la función $\sigma(\omega)$ en el integrando para atenuar -- las componentes de alta frecuencia de la señal (ver la fig. 5.2(a)). Esta interpretación es bastante importante, pues nos da la pauta para utilizar otros tipos de funciones ventana, que simplemente deben de cumplir con el requisito de que los lóbulos laterales de su espectro sean pequeños comparados con el lóbulo principal.

Para dar una explicación en el dominio del tiempo del efecto de la utilización de las ventanas, sigamos el mismo procedimiento empleado para determinar el efecto del truncamiento. La ec,(5.19) se puede expresar como

$$f_\sigma(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)H(\omega)\sigma(\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega$$

entonces

$$f_\sigma(t) = f(t)*h(t)*\sigma(t) \tag{5.21}$$

con (5.15) tenemos que

$$f_\sigma(t) = f'(t)*\sigma(t)$$

Con fines de ilustración $f'(t)$ y $\sigma(t)$ aparecen nuevamente el las figuras 5.3(a) y 5.3(b) y en la fig.5.3(c) aparece $f_\sigma(t)$.

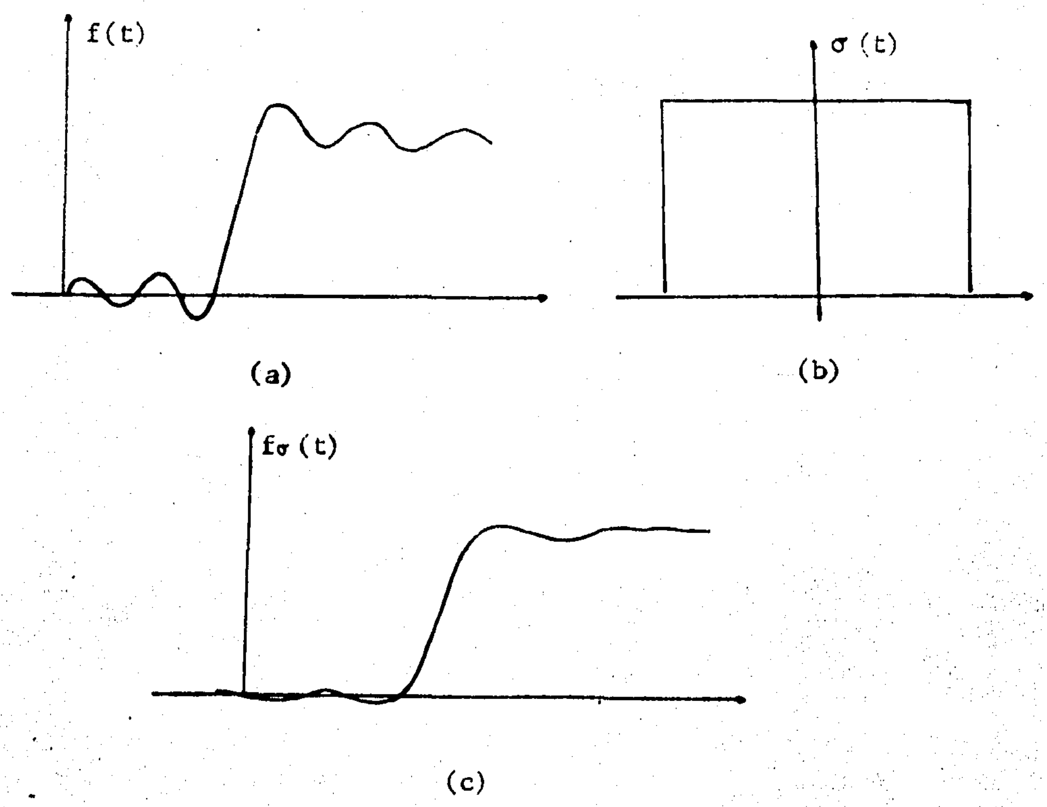


Fig. 5.3

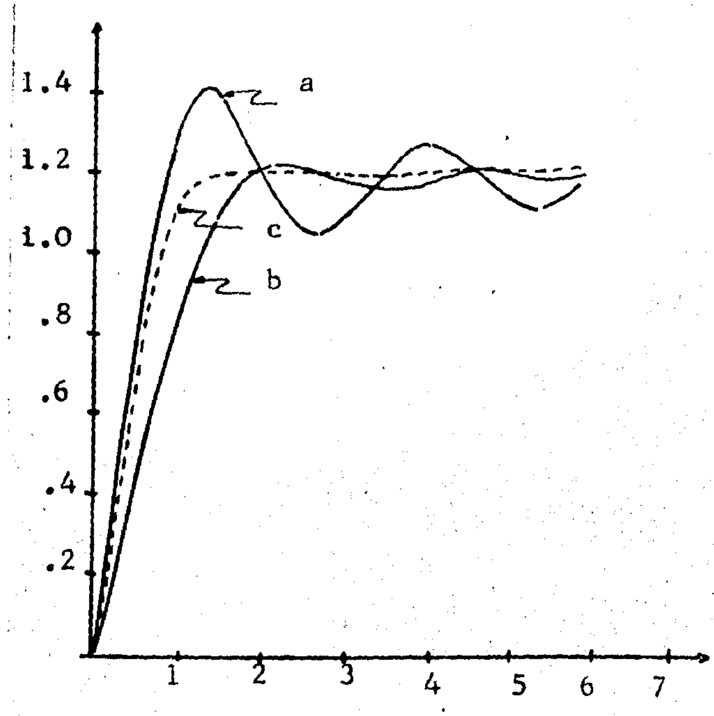
En la fig.5.3(c) se observa que las oscilaciones disminuyen, pero esto se logra a costa de que el tiempo de elevación aumente. Este aumento en el tiempo de elevación se debe a que el intervalo $(t-\Omega/\pi, t+\Omega/\pi)$ en donde se realiza el promedio resulta demasiado grande en las cercanías del origen. Si se considera el promedio sobre un intervalo arbitrario (t-a,t+a) y se desarrolla la ec.(5.18) se obtiene el factor "σ-modificado"

$$\sigma\ (\omega) = \frac{\text{sen}(\omega a)}{\omega a} \tag{5.22}$$

El tiempo de elevación se puede disminuir utilizando el factor σ-modificado desde el inicio de la respuesta hasta el tiempo en que ocurre el primer máximo y de ahí en adelante emplear el factor σ-standar.

En la fig. 5.4 se muestra el efecto del truncamiento y del empleo de los factores σ-standar y σ-modificado en la obtención de una función escalón.

En el estudio de transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión el parámetro más importante es la amplitud de los sobrevoltajes, mientras que el tiempo de elevación no tiene mayor relevancia. El tiempo de elevación es un factor importante sólo cuando se desea determinar con cierto detalle la respuesta dinámica inicial de los sistemas.



a.- Aproximación sin factor de corrección.

b.- Aproximación con el factor σ- standar .

c.- Aproximación con el factor σ- modificado.

Fig. 5.4

Ventana de Hamming. Para reducir las oscilaciones de Gibbs, Hamming propuso una ventana de la forma general

$$\sigma(\omega) = \alpha + (1-\alpha)\cos(\pi\omega/\Omega) \qquad (5.23)$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier de (5.23) para encontrar la ventana de Hamming en el dominio del tiempo obtenemos

$$\sigma(t) = \alpha\delta(t) + \frac{1-\alpha}{2}\,\delta(t+\pi/\Omega) + \frac{1-\alpha}{2}\,\delta(t-\pi/\Omega) \qquad (5.24)$$

En la fig. 5.5(a) se muestra la ventana de Hamming en el dominio del tiempo y en la fig. 5.5(b) en el dominio de la -- frecuencia.

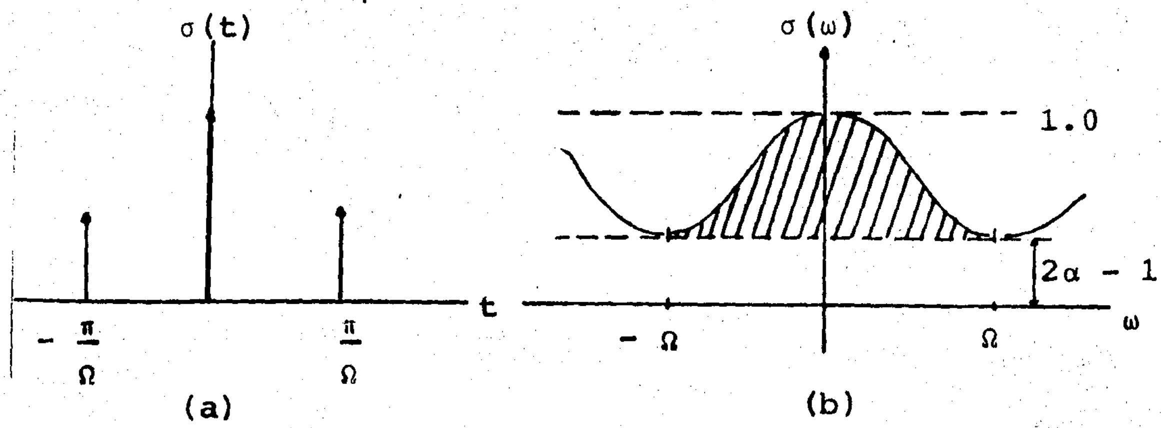


Fig. 5.5 Ventana de Hamming

Para explicar el efecto del empleo de la ventana de -

Hamming, consideremos la obtención de la función en el dominio del tiempo del espectro mostrado en la fig. 5.6, que es una ventana similar a la utilizada para truncar el rango de frecuencias en la ec.(5.12).

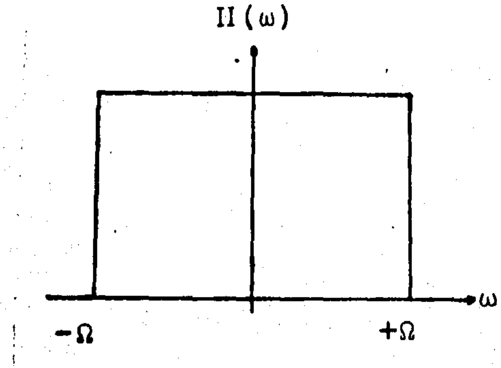


Fig. 5.6

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)\exp(j\omega t)d = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{+\Omega} \exp(j\omega t)\ d\omega \qquad (5.25)$$

de donde

$$h(t) = \frac{\Omega}{\pi}\ \frac{\mathrm{sen}(\Omega t)}{\Omega t} \qquad (5.26)$$

introduciendo la ventana de Hamming en (5.25)

$$h'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)\sigma(\omega)\ \exp(j\omega t)d\omega$$

de donde

$$h'(t) = h(t) * \sigma(t) \qquad (5.27)$$

Antes de proseguir recordemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \tau(t-\tau)\ d\tau = f(t) \tag{5.28}$$

De acuerdo con (5.28) y sustituyendo (5.24) y (5.26) en (5.28) tenemos que

$$h'(t) = \frac{\Omega}{\pi}\ \frac{\alpha\,\mathrm{sen}(\Omega t)}{\Omega t} + \frac{1-\alpha}{2}\ \frac{\mathrm{sen}(\Omega(t+\pi/\Omega))}{\Omega(t+\pi/\Omega)}$$

$$+ \frac{1-\alpha}{2}\ \frac{\mathrm{sen}(\Omega(t-\pi/\Omega))}{\Omega(t-\pi/\Omega)} \tag{5.29}$$

Para cada valor de t, $f'(t)$ es la suma de tres muestras espaciadas entre sí por un intervalo de tiempo π/Ω. Esto - se muestra esquemáticamente en la fig. 5.7

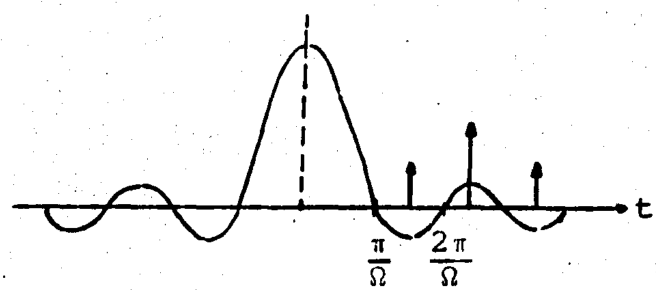


Fig. 5.7

Para la posición mostrada en la fig. 5.7

$$h'(t) = \frac{\Omega}{\pi}\left\{-\frac{1-\alpha}{2(3\pi/2)} + \frac{\alpha}{(5\pi/2)} - \frac{1-\alpha}{2(7\pi/2)}\right\} \tag{5.30}$$

de aquí es de esperarse que el pico positivo sea reducido por los picos negativos. En esto se basa la aplicación de - la ventana de Hamming, pues como ya mencionamos la función pulso rectangular de la fig. 5.6 es la misma que se emplea para truncar el rango de integración en la ec.(5.12) y es - la que provoca las oscilaciones de Gibbs. De este modo, es claro que se debe de eliminar o al menos diminuir el efecto de la función h(t), esto se logra aplicando la ventana de Hamming de tal manera que

$$h'(t) = h(t) * \sigma(t) = 0$$

igualando a cero la ec.(5.30)

$$-\frac{1-\alpha}{6} + \frac{\alpha}{5} + \frac{1-\alpha}{14} = 0$$

de donde

$$\alpha = 0.54$$

con este valor particular de α el rizo del fenómeno de -- Gibbs es minimizado. Sustituyendo el valor encontrado de en la ec.(5.23)

$$\sigma(\omega) = 0.54 + 0.46\cos(\pi\omega/\Omega) \qquad (5.31)$$

2.2. Errores por discretización.

En la practica, la respuesta en frecuencia de los sistemas de transmisión no se conoce analíticamente, por lo que es necesario evaluar la transformada inversa de Fourier numéricamente muestreando el espectro a intervalos regulares de frecuencia, de este modo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

se debe de evaluar como

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} F(jm\Delta\omega)\exp(jm\Delta\omega t)\Delta\omega \tag{5.32}$$

Si designamos a $F_s(j\omega)$ como la versión muestreada de $F(j\omega)$, se puede escribir

$$F_s(j\omega) = F(j\omega)\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-m\Delta\omega) \tag{5.33}$$

empleando la propiedad de convolución en el tiempo

$$f_s(t)=\mathfrak{F}^{-1}\{F_s(j\omega)\} = \mathfrak{F}^{-1}\{F(j\omega)\}*\mathfrak{F}^{-1}\{\sum_m \delta(\omega-m\Delta\omega)\}$$

$$= f(t) * \frac{1}{\Delta\omega}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT) \quad , \quad T = 2\pi/\Delta\omega$$

$$= \frac{1}{\Delta\omega}\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t-mT) \tag{5.34}$$

La transformada de (5.33) tambien se puede escribir como

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_s(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} F(jm\Delta\omega)\ \delta(\omega - m\Delta\omega)\}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_s(j\omega)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(jm\Delta\omega)\ \mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega - m\Delta\omega)\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(jm\Delta\omega)\ \frac{1}{2\pi}\exp(jm\Delta\omega t) \qquad (5.35)$$

como (5.34) y (5.35) son iguales

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} F(jm\Delta\omega)\ \exp(jm\Delta\omega t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t-mT)\frac{1}{\Delta\omega}$$

de acuerdo con (5.32)

$$f'(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t-mT) \qquad (5.36)$$

La función $f'(t)$ definida por la ec.(5.32) es solo una a---proximación de $f(t)$. En la fig. 5.8, se muestra la relación que existe entre $f(t)$ y $f'(t)$. Puede notarse que para que $f'(t)$ sea una buena aproximación de $f(t)$ en el intervalo - $0 < t < T$, es necesario que $f(t)$ sea despreciable para - $t < T$. Como $T=2\pi/\Delta\omega$, podemos escoger $\Delta\omega$ lo suficientemente pequeño para asegurar la condición anterior. Esto se puede hacer cuando se estudian fenómenos de corta duración. Sin embargo para otro tipo de fenómenos como es el caso de la energización de líneas de transmisión, en donde es necesario conocer la respuesta de la línea en un intervalo de tiempo relativamente grande, al hacer $\Delta\omega$ muy pequeña se tendría un tiempo de cómputo muy alto y por consecuencia un costo muy alto.

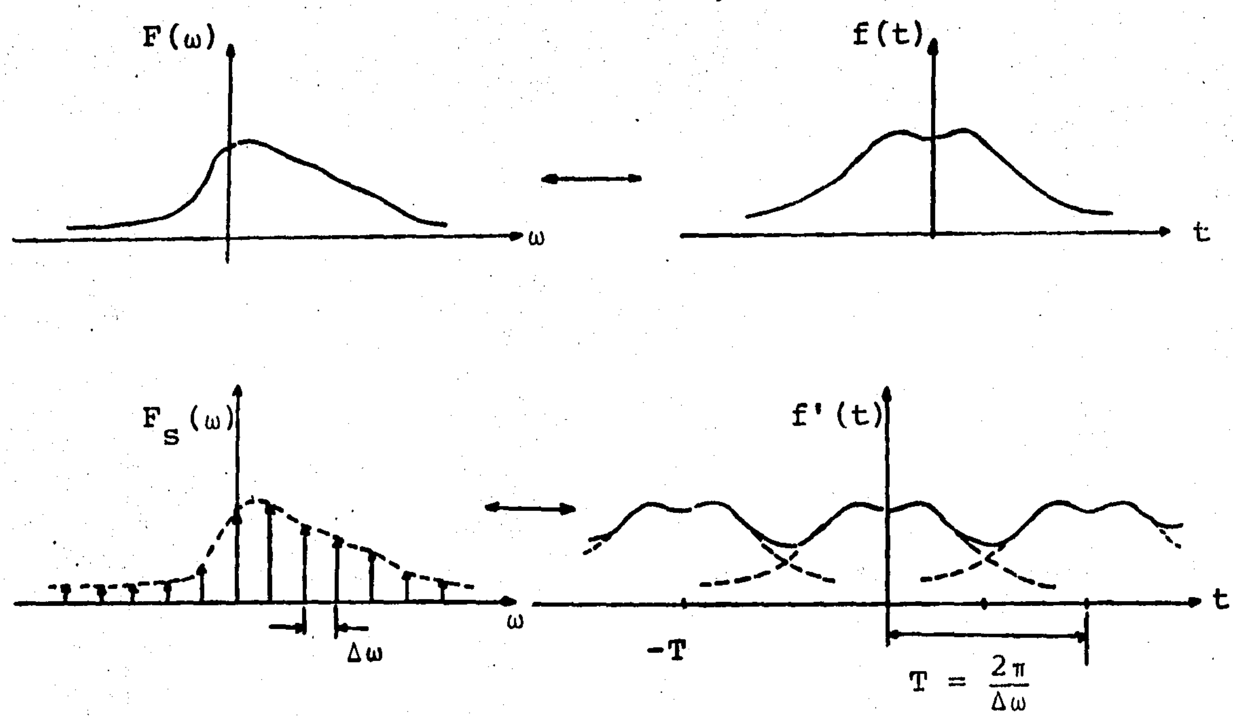


Fig. 5.8

3. TRANSFORMADA MODIFICADA DE FOURIER.

Supongamos que f(t) es cero para $t < 0$, pero de larga duración para $t > 0$. Pra lograr una buena aproximación en la evaluación numérica de f(t), en lugar de disminuir $\Delta\omega$ con el fin de aumentar el período T, se puede hacer decaer artificialmente a f(t) multiplicandola por una exponencial decreciente "exp(-at)", con $a > 0$. La transformada de Fou--- rier de f(t)exp(-at) es

$$\{f(t)\exp(-at)\} = \int_0^\infty f(t)\exp(-at)\exp(-j\omega t)dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\exp(-(a+j\omega)t)\ dt$$

sí

$$F(a + j\omega) = \int_0^\infty f(t)\exp(-(a+j\omega)t)dt \qquad (5.37)$$

La ec.(5.37) nos indica que el hacer decaer artificialmente a f(t) con la función exp(-at) equivale en el dominio de Fourier a sustituir "$j\omega$" por "$a+j\omega$".

Una vez que se tiene $F(a+j\omega)$, f(t) se puede obtener mediante la transformada inversa de Fourier convencional

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(a+j\omega)\exp(j\omega t)d\omega = \exp(-at)\ f(t)$$

esto es

$$f(t) = \frac{\exp(at)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(a+j\omega)\exp(j\omega t)d\omega \qquad (5.38)$$

Las ecuaciones (5.37) y (5.38) representan el par de -- transformadas modificadas de Fourier. Este par de Transformadas se pueden aplicar en la misma manera en que se aplica el par de transformadas convencionales de Fourier.

Otra forma de interpretar el empleo de la Transformada modificada de Fourier consiste en considerar la posición de los polos de $F(j\omega)$. Como las líneas de transmisión son sistemas reales y estables todos los polos de $F(j\omega)$ estan si-- tuados sobre o a la izquierda del eje imaginario $j\omega$, en el plano $s = \rho + j\omega$, como se indica en la fig.5.9 .

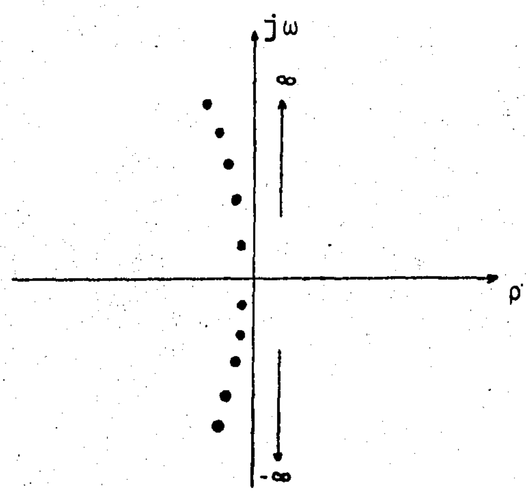


Fig. 5.9 Diagrama de polos típico de una línea de transmisión

Al evaluar la transformada inversa de Fourier convencional de $F(j\omega)$ la trayectoria de integración es el eje imaginario $j\omega$, desde $-\infty$ hasta $+\infty$. La presencia de polos -

sobre o cerca del eje imaginario ocasiona que el integrando $F(j\omega)$ tenga variaciones muy rápidas y pronunciadas, como se muestra en la fig. 5.10, de tal manera que para tomarlas en cuenta es necesario que el paso de integración sea muy - pequeño.

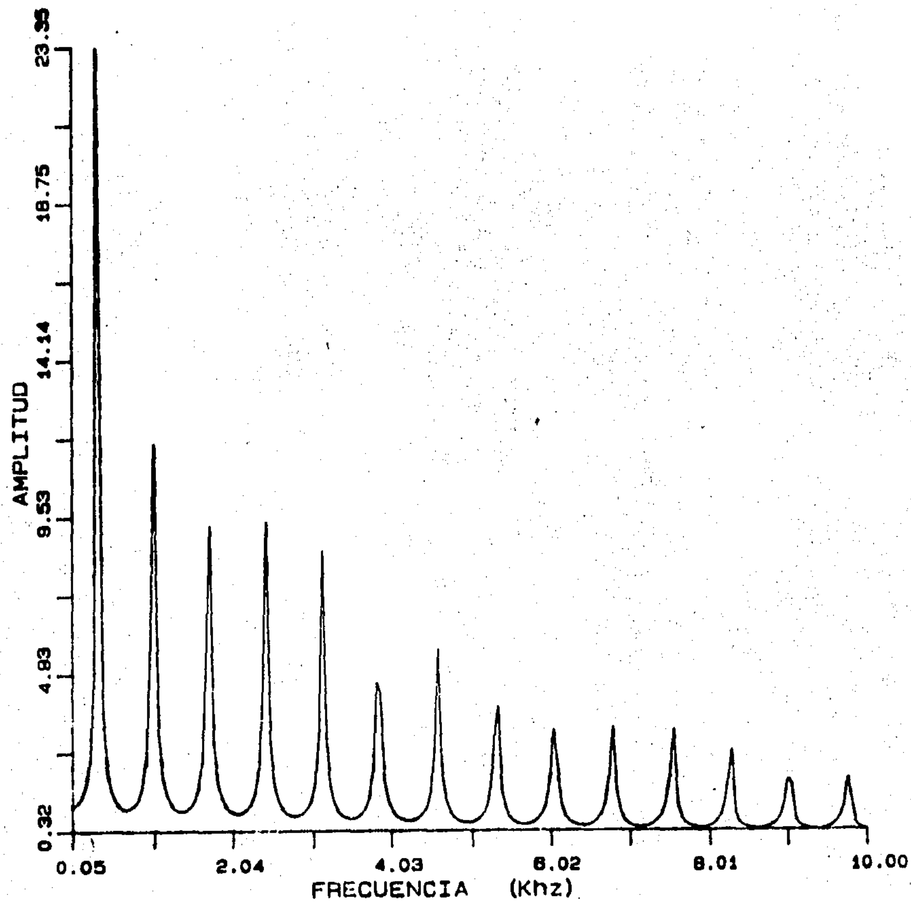


Fig. 5.10 Respuesta en frecuencia típica de una línea de transmisión.

La transformada modificada de la ec.(5.38) se puede escribir como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-ja}^{\infty-ja} F(j\omega')\exp(j\omega' t)d\omega' \qquad (5.39)$$

con $j\omega'=a+j\omega$ y donde la trayectoria de integración es la línea $\omega'=-ja$ (en el plano $s'=\omega+j\rho$). Esto equivale en el plano $s=\rho+j\omega$ a desplazar la trayectoria de integración - una distancia "a" a la derecha del eje "$j\omega$", tal como se - muestra en la fig. 5.11

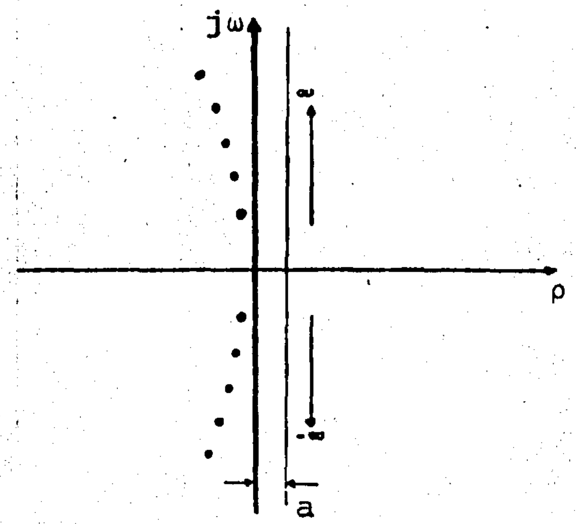


Fig. 5.11

Este desplazamiento da como resultado que $F(j\omega')=F(a+j\omega)$ sea una versión "suavizada" de $F(j\omega)$, como se ve en la - fig.5.12.

La característica "suave" de $F(a+j\omega)$ nos permite te-- ner una mayor aproximación en la evaluación numérica de la transformada inversa de Fourier sin tener que disminuir -- $\Delta\omega$. Cabe señalar que es posible desplazar la trayectoria de integración hacia la derecha del eje "jω" porque no existen polos en este lado del plano complejo "s".

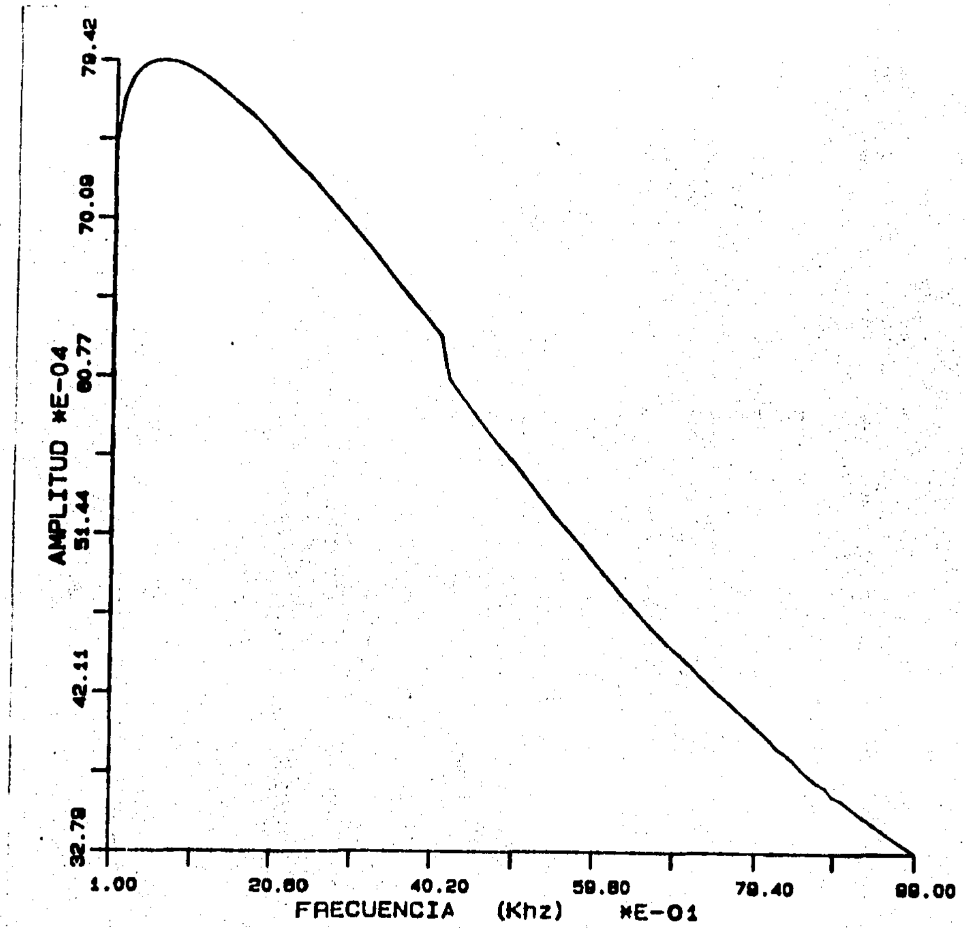


Fig. 5.12

La introducción de la función exp(-at) en la transformada de Fourier, además de permitirnos reducir los errores ocasionados por la discretización opera como un factor de convergencia. Como exp(-at) tiende a cero cuando 't' tiende a infinito, cuando multiplica a f(t) para producir una función f'(t)=f(t)exp(-at), da como resultado que para un -

gran número de funciones "f(t)" que no son absolutamente integrables, "f'(t)" si lo sea, esto es, la condición

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

puede no cumplirse, pero si se cumplirá que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|\,dt < \infty$$

4. EVALUACION NUMERICA DE LA TRANSFORMADA MODIFICADA DE FOURIER.

4.1. Transformada inversa.

Las consideraciones hechas en las secciones anteriores nos han conducido a la necesidad de utilizar la transformada modificada de Fourier. Consideremos la ec.(5.38)

$$f(t)= \frac{\exp(at)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(a+j\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega \qquad (5.40)$$

Expresemos $F(a+j\omega)$ en términos de sus partes real e imaginaria

$$F(a+j\omega) = P(a,\omega) + jQ(a,\omega)$$

en donde P y Q son funciones con coeficientes reales. Entonces

$$f(t)=\frac{\exp(at)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\{P(a,\omega)+jQ(a,\omega)\}\{\cos\omega t + j\,\mathrm{sen}\,\omega t\}\,d\omega \qquad (5.41)$$

como estamos considerando un sistema real en el que las señales de entrada y de salida son reales y susceptibles ser medidas, f(t) es real e igual a cero para $t < 0$. Entonces

$$f(t) = \frac{\exp(at)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\{P(a,\omega)\cos\omega t - Q(a,\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega t\}\,d\omega$$

como $P(a,\omega)$ es par y $Q(a,\omega)$ es impar

$$f(t) = \frac{\exp(at)}{\pi}\int_{0}^{\infty}\{P(a,\omega)\cos\omega t - Q(a,\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega t\}\,d\omega$$

pero como $f(t) = 0$, para $t < 0$, entonces

$$P(a,\omega)\cos\omega t = -Q(a,\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

de este modo

$$f(t)= \frac{\exp(at)}{\pi}\,2\int_{0}^{\infty}\{P(a,\omega)\cos\omega t\}\,d\omega \qquad (5.42)$$

ó

$$f(t)= \frac{\exp(at)}{\pi}\,\mathrm{Real}\{\int_{0}^{\infty}F(a+j\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega\} \qquad (5.43)$$

ya que

$$\mathrm{Real}\{\int_{0}^{\infty}F(a+j\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega\} = \int_{0}^{\infty}(P(a,\omega)\cos\omega t - Q(a,\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega t)\,d\omega$$
$$= 2\int_{0}^{\infty}P(a,\omega)\cos\omega t\;d\omega$$

tomando un rango finito de integración e incorporando la función ventana $\sigma(\omega)$

$$f(t) = \frac{\exp(at)}{\pi} \text{Real}\{\int_0^{\Omega} G(a+j\omega)\exp(j\omega t)d\omega\} \tag{5.44}$$

donde

$$G(a+j\omega) = F(a + j\omega)\sigma(\omega) \tag{5.45}$$

La forma de evaluar numéricamente la ec.(5.44)

$$f(n\ t) = \frac{\exp(an\Delta t)}{\pi} \text{Real}\{ \sum_{m=0}^{N-1} G(a+jm\Delta\omega)\exp(jm\Delta\omega n\Delta t)\Delta\omega\} \tag{5.46}$$

donde

$\Delta\omega$ = paso de integración del espectro.

Δt = paso de discretización de la función en el dominio del tiempo.

N = número de muestras.

$n, m = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

Además

$$\Delta t = T/N \quad \text{y} \quad \Delta\omega = \Omega/N$$

con

T = tiempo de observación

Ω = frecuencia de truncamiento.

y

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

La evaluación de la ecuación (5.46) puede presentar dificultades para $\omega=0$, pues generalmente $F(j\omega)$ tiene singularidades en este punto. Para evitar este problema, el rango de integración se divide en intervalos de ancho $2\Delta\omega$ y la ec. (5.46) se evalúa para frecuencias impares $(\omega_0, 3\omega_0, \ldots)$. Modificando la ec. (5.46)

$$f(n\Delta t) = \frac{\exp(an\Delta t)}{\pi}\text{Real}\{\sum_{m=0}^{N-1} G(a+j(2m+1)\Delta\omega)\exp(j(2m+1)\Delta\omega n\Delta t)2\Delta\omega\} \qquad \text{-------}(5.47)$$

en (5.47) el paso de integración es $\Delta\omega' = 2$, así

$$\Delta\omega' = \frac{2\pi}{T} = \frac{\Omega}{N}$$

entonces

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega}{2N} \qquad (5.48a)$$

$$\Delta t = \frac{T}{N} \qquad (5.48b)$$

Simplificando la ecuación (5.47) de acuerdo con (5.48a) y (5.48b)

$$f_n = \text{Real}\{C_n \sum_{m=0}^{N-1} G(a+j(2m+1)\Delta\omega)\exp(j2\pi mn/N)\} \qquad (5.49)$$

donde

$$f_n = f(n\Delta t) \qquad (5.50)$$

$$C_n = \frac{\exp(an\Delta t)\ \exp(j\pi n/N)\ 2\Delta\omega}{\pi} \quad (5.51)$$

$$G(a+j(2m+1)\Delta\omega) = F(a+j(2m+1)\Delta\omega)\sigma((2m+1)\Delta\omega) \quad (5.52)$$

4.2. Transformada directa.

Consideremos ahora la transformada modificada de Fourier directa definida por

$$F(a+j\omega) = \int_0^\infty f(t)\ \exp(-(a+j\omega)t)\ dt \quad (5.53)$$

o

$$F(a+j\omega) = \int_0^\infty f(t)\exp(-at)\exp(-j\omega t)\ dt \quad (5.54)$$

La forma de evaluar numéricamente la ec.(5.54) es

$$F(a+j(2m+1)\Delta\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t)\exp(-an\Delta t)\exp(-j(2m+1)\Delta\omega n\Delta t)\Delta t$$

$$n,m = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

incorporando los valores de (5.48a) y (5.48b) y simplificando

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t)\ D_n\ \exp(-j2\pi mn/N) \quad (5.55)$$

donde

$$F_m = F(a + j(2m+1)\Delta\omega) \quad (5.56)$$

$$D_n = \exp(-an\Delta t)\ \exp(-j\pi n/N)\ \Delta t \qquad (5.57)$$

Las ecuaciones (5.49) y (5.55) nos proporcionan las -- expresiones a partir de las cuales se realiza la evaluación numérica del par de transformadas modificadas de Fourier.

4.3. Transformada rápida de Fourier.

La expresión para el cálculo numérico de la transformada de Fourier modificada es

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t)\ D_n\ \exp(-j2\pi mn/N) \qquad (5.58)$$

$$m = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

y para la transformada inversa

$$f_n = \mathrm{Real}\{C_n \sum_{m=0}^{N-1} G(a+j(2m+1)\Delta\omega)\exp(j2\pi mn/N)\} \qquad (5.59)$$

$$n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

Se puede ver que la mayor parte del trabajo computacional requerido para la evaluación de cualquiera de las dos - ecuaciones es consumido por el cáculo de los términos implicados en las sumatorias : para una serie de N muestras se - requieren N^2+N multiplicaciones y N^2-N sumas algebraicas , esto significa que si N es muy grande, cualquier intento de utilizar el método de la transformada de Fourier sería - incosteable.

Afortunadamente, debido a la periodicidad de las funciones exponenciales, es posible realizar el cálculo efectuando solo $(N\log_2 N)/2$ multiplicaciones y $N\log_2 N$ sumas algebraicas, siempre y cuando N se escoja como potencia entera de 2, esto es

$$N = 2^M \quad , \quad M \text{ es un entero}$$

este es el llamado algoritmo de la "transformada rápida de Fourier" (TRF).

El principio del algoritmo de la TRF, lo expondremos a partir del cálculo de la ec.(5.59). Consideremos el caso en que $N = 8 = 2^3$ y definamos a

$$f_{cn} = \sum_{m=0}^{N-1} g_n\, W^{mn} \quad , \; n = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1 \qquad (5.60)$$

donde

$$W = \exp(j2\pi/N) \qquad (5.61)$$

desarrollando la ec.(5.60)

$$\begin{aligned}
f_{c0} &= g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 \\
f_{c1} &= g_0 + g_1W + g_2W^2 + g_3W^3 + g_4W^4 + g_5W^5 + g_6W^6 + g_7W^7 \\
f_{c2} &= g_0 + g_1W^2 + g_2W^4 + g_3W^6 + g_4W^8 + g_5W^{10} + g_6W^{12} + g_7W^{14} \\
f_{c3} &= g_0 + g_1W^3 + g_2W^6 + g_3W^9 + g_4W^{12} + g_5W^{15} + g_6W^{18} + g_7W^{21} \\
f_{c4} &= g_0 + g_1W^4 + g_2W^8 + g_3W^{12} + g_4W^{16} + g_5W^{20} + g_6W^{24} + g_7W^{28} \\
f_{c5} &= g_0 + g_1W^5 + g_2W^{10} + g_3W^{15} + g_4W^{20} + g_5W^{25} + g_6W^{30} + g_7W^{35} \\
f_{c6} &= g_0 + g_1W^6 + g_2W^{12} + g_3W^{18} + g_4W^{24} + g_5W^{30} + g_6W^{36} + g_7W^{42} \\
f_{c7} &= g_0 + g_1W^7 + g_2W^{14} + g\ W^{21} + g\ W^{28} + g\ W^{35} + g\ W^{42} + g\ W^{49}
\end{aligned}$$

se tiene la siguiente identidad

$$W^{(N/2)L} = \begin{cases} -1 & \text{, para } L \text{ impar} \\ 1 & \text{, para } L \text{ par} \end{cases} \tag{5.62}$$

para nuestro caso

$$W^{(N/2)L} = W^{4L}$$

entonces

$$f_{c0} = g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7$$

$$f_{c1} = g_0 + g_1W + g_2W^2 + g_3W^3 - g_4W - g_5W - g_6W^2 - g_7W^3$$

$$f_{c2} = g_0 + g_1W^2 - g_2 - g_3W^2 + g_4 + g_5 - g_6 - g_7W^2$$

$$f_{c3} = g_0 - g_1W^3 - g_2W^2 + g_3W^5 - g_4 + g_5W^3 + g_6W^2 - g_7W^5$$

$$f_{c4} = g_0 - g_1 + g_2 - g_3 + g_4 + g_5 + g_6 - g_7$$

$$f_{c5} = g_0 - g_1W + g_2W^2 - g_3W^3 - g_4 + g_5W - g_6W^2 + g_7W^3$$

$$f_{c6} = g_0 - g_1W^2 - g_2 + g_3W^2 + g_4 - g_5W^2 + g_6 + g_7W^2$$

$$f_{c7} = g_0 - g_1W^3 - g_2W^2 + g_3W^5 - g_4 + g_5W^3 + g_6W^2 - g_7W^5$$

reagrupando términos tenemos que

$$f_{c0} = ((g_0+g_4)+(G_2+g_6)) + ((g_1+g_5)+(g_3+g_7))$$

$$f_{c1} = ((g_0-g_4)+(g_2-g_6)W^2) + ((g_1-g_5)W+(g_3-g_7)W^3)$$

$$f_{c2} = ((g_0+g_4)-(g_2+g_6)) + ((g_1+g_5)-(g_3+g_7))W^2$$

$$f_{c3} = ((g_0-g_4)-(g_2-g_6)W^2) - ((g_1-g_5)W-(g_3-g_7)W^3)W^2$$

$$f_{c4} = ((g_0+g_4)+(g_2+g_6)) - ((g_1-g_5)+(g_3+g_7))$$

$$f_{c5} = ((g_0-g_4)+(g_2-g_6)W^2)-((g_1-g_5)W+g_3-g_7)W^3)$$

$$f_{c6} = ((g_0+g_4)-(g_2-g_6)) - ((g_1+g_5)-(g_3+g_7))W^2$$

$$f_{c7} = ((g_0-g_4)-(g_2-g_6)W^2) - ((g_1-g_5)W-(g_3-g_7)W^3)W^2$$

La secuencia de cálculo se muestra en la fig. 5.13

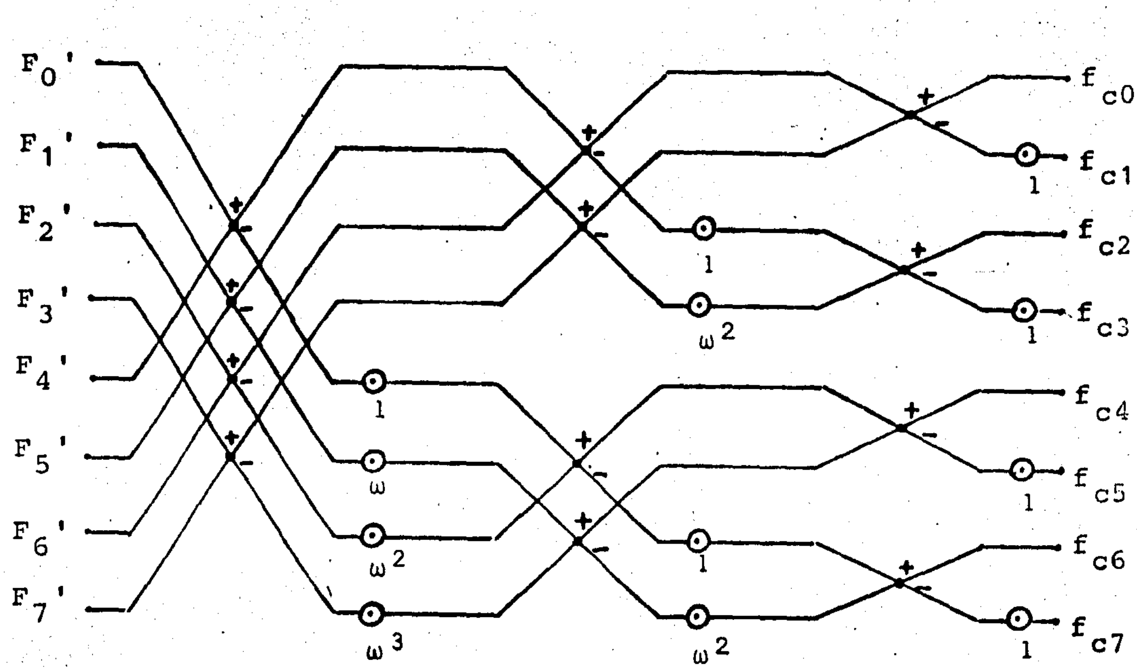


Fig. 5.13

En la fig.5.13 el símbolo ($\cdot^{+}_{-}$) significa que se efectúa una suma y una resta, y el símbolo (⊙) indica que se realiza una multiplicación entre el resultado que llega al símbolo y el factor indicado abajo de él.

De la fig.5.13 se ve que para el caso en que $N=8$, se necesitan $(1/2)8\log_2 8=12$ multiplicaciones y $8\log_2 8=24$ -- sumas algebraicas, en lugar de las 72 multiplicaciones y 56 sumas que se realizan en el cálculo directo. A medida que - aumenta el número de muestras, la diferencia entre el número de operaciones y por lo tanto en el tiempo de cómputo entre los dos procedimientos se hace más grande, ya que en el -- cálculo directo el número de operaciones totales es $2N^2$ y mediante la TRF es de $(3/2)N\log_2 N$.

Si denotamos las operaciones de suma por "S" y las de resta-multiplicación por "RM", tenemos que para nuestro e-- ejemplo hay tres ciclos de cálculo:

Ciclo 1. Se tienen dos grupos, en el primer prupo se tiene solo la operación S y el el segundo la operacion RM.

Ciclo 2. Se tienen cuatro grupos, con las operaciones realizadas en la secuencia S,RM,S,RM.

Ciclo 3. Hay ocho grupos en que las operaciones se e-- fectúan en la secuencia S,RM,S,RM,S,RM,S,RM

Se requieren solo 8 registros para almacenar sucesivamente la serie original de datos, los resultados intermedios y el resultado final. El resultado final se obtiene en el - llamado "orden de bits invertidos", el cual se muestra en la tabla 5.1 . En esta tabla el subíndice "i" de g_i se reemplaza por su equivalente binario y se ve que los equivalentes binarios de los resultados corresponden a las imágenes espejo de las muestras originales.

TABLA 5.1

REGISTRO	CONTENIDO ANTES DEL CALCULO	CONTENIDO DESPUES DEL CALCULO
0 0 0	$g_{0\,0\,0}$	$f_{c\,0\,0\,0}$
0 0 1	$g_{0\,0\,1}$	$f_{c\,1\,0\,0}$
0 1 0	$g_{0\,1\,0}$	$f_{c\,0\,1\,0}$
0 1 1	$g_{0\,1\,1}$	$f_{c\,1\,1\,0}$
1 0 0	$g_{1\,0\,0}$	$f_{c\,0\,0\,1}$
1 0 1	$g_{1\,0\,1}$	$f_{c\,1\,0\,1}$
1 1 0	$g_{1\,1\,0}$	$f_{c\,0\,1\,1}$
1 1 1	$g_{1\,1\,1}$	$f_{c\,1\,1\,1}$

En general :

1. Para $N=2^M$ muestras se tienen M ciclos de cálculo.
2. En el "i-ésimo" ciclo los N resultados del ciclo anterior se dividen en 2^i ciclos de cálculo con las operaciones S y RM efectuadas alternativamente.
3. En el ciclo "i" se ncesitan $N2^{-i}$ distintos valores del multiplicador para la operación RM. Estos son

$$1,\ W^{(2^{i-1})\,1},\ W^{(2^{i-1})\,2}, \ldots,\ W^{(2^{i-1})\,(N2^{i}-1)}$$

4. Para N muestras se requieren solamente N/4 dis-- tintos valores de W^k, pues

$$W^k = \exp((j2\pi mn/N)k) \tag{5.63}$$

$$\begin{aligned} W^{k+N/4} &= \exp((j2\pi mn/N)(k+N/4)) \\ &= j\ \exp((j2\pi mn/N)k) \end{aligned} \tag{5.64}$$

con

$$0 < k < \frac{N}{4} - 1$$

Para el caso de la transformada directa el algoritmo es el mismo, solo que

$$W_d = \exp(-j2\pi/N) = (\exp(j2\pi/N))^* \tag{5.65}$$

5. APLICACION DE LA TRANSFORMADA MODIFICADA DE FOURIER.

En las secciones anteriores se ha expuesto la conveniencia de usar la transformada modificada de Fourier, por lo -- que es necesario exponer la forma de aplicar esta transformación. Consideremos nuevamente la ec:(5.4)

$$T(D,\omega)\ \{f(t)\} = g(t) \tag{5.66}$$

multiplicando ambos miembros por exp(-at)

$$T(D,\omega)\{f(t)\}\exp(-at) = g(t)\exp(-at) \qquad (5.67)$$

Aplicando la siguiente regla del operador diferencial

$$\exp(\beta t)Q(D)f(t) = Q(D-\beta)\{\exp(\beta t)f(t)\}$$

la ec. (5.67) se puede escribir como

$$T(D+a,\omega)\{f(t)\exp(-at)\} = g(t)\exp(-at)$$

aplicando la transformada de Fourier

$$\int_0^\infty T(D+a,\omega)\{f(t)\exp(-at)\}\exp(-j\omega t)\,dt=\int_0^\infty g(t)\exp(-at)\exp(-j\omega t)\,dt$$

de acuerdo con la ec.(5.37) y como la aplicación de la transformada de Fourier tiene el efecto de reemplazar el operador "D" por "j "

$$T(a+j\omega,\omega)\ F(a+j\omega) = G(a+j\omega) \qquad (5.68)$$

5.1. **Aplicación a las ecuaciones de propagación.** Consideremos ahora las ecuaciones básicas de una línea de transmisión multiconductora

$$-\frac{\partial \hat{v}(x,t)}{\partial t} = \mathbf{L}\frac{\partial \hat{i}(x,t)}{\partial t} + \mathbf{R}\ \hat{i}(x,t) \qquad (5.69)$$

$$-\frac{\partial \hat{i}(x,t)}{\partial t} = \mathbf{C}\frac{\partial \hat{v}(x,t)}{\partial t} + \mathbf{G}\ \hat{v}(x,t) \qquad (5.70)$$

Aplicando la transformada modificada de Fourier

$$-\frac{d\hat{V}}{dx} = \mathbf{Z}\ \hat{I} \tag{5.71}$$

$$-\frac{d\hat{I}}{dx} = \mathbf{Y}\ \hat{V} \tag{5.72}$$

donde

$$\hat{V} = F_1(x, a+j\omega) \tag{5.73}$$

$$\hat{I} = F_2(x, a+j\omega) \tag{5.74}$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R} + (a+j\omega)\mathbf{L} \tag{5.75}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G} + (a+j\omega)\mathbf{C} \tag{5.76}$$

Derivando (5.71) y (5.72) y combinando los resultados

$$\frac{d^2\hat{V}}{dx^2} = \mathbf{A}\ \hat{V} \tag{5.77}$$

$$\frac{d^2\hat{I}}{dx^2} = \mathbf{A}_t\ \hat{I} \tag{5.78}$$

donde

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}\,\mathbf{Y}$$

Las ecuaciones 5.77) y (5.78) se resuelven por medio del análisis modal siguiendo el mismo procedimiento expuesto en el capítulo 3.

5.2. Diagonalizacion de la matriz básica del sistema. Para el caso de la utilización de la transformada modificada de Fourier, las matrices de impedancia y admitancia estan dadas , en términos de las matrices de impedancia y admitancia normalizadas, por

$$\mathbf{Z} = (a + j\omega)\frac{\mu}{2\pi}\,\mathbf{Z}m_n \tag{5.79}$$

$$\mathbf{Y} = (a + j\omega)2\pi\varepsilon\,\mathbf{Y}m_n \tag{5.80}$$

o

$$\mathbf{Z} = (a + j\omega)\frac{\mu}{2\pi}\,(\mathbf{P} + \mathbf{Z}_{cn} + \mathbf{Z}_{Tn}) \tag{5.81}$$

$$\mathbf{Y} = (a + j\omega)2\pi\varepsilon\mathbf{P}^{-1} \tag{5.82}$$

Siguiendo el mismo procedimiento del capítulo 3, tenemos que despues de eliminar los conductores de guarda las matrices $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Y}$ estan dadas por

$$\mathbf{Z} = (a + j\omega)\frac{\mu}{2\pi}\,(\mathbf{P}_{\phi} + \mathbf{Z}_{cn\phi} + \mathbf{Z}_{Tn\phi} + \mathbf{Z}_{HGn}) \tag{5.83}$$

$$\mathbf{Y} = (a + j\omega)2\pi\varepsilon\,(\mathbf{P}\phi - \mathbf{P}_{HG})^{-1} \tag{5.84}$$

realizando el producto $\mathbf{Z}\ \mathbf{Y}$

$$\mathbf{A} = (a+j\omega)^2\mu\varepsilon\{(\mathbf{Z}_{cn\phi}+\mathbf{Z}_{Tn\phi}+\mathbf{Z}_{HG}+\mathbf{P}_{HG})(\mathbf{P}_{\phi}-\mathbf{P}_{HG})^{-1}+\mathbf{U}\}$$

de donde

$$\mathbf{A} = (a + j\omega)^2\mu\varepsilon(\mathbf{A}' + \mathbf{U}) \tag{5.85}$$

$$\mathbf{A}' = \frac{\mathbf{A}}{(a+j\omega)^2\mu\varepsilon} - \mathbf{U} = \mathbf{Z}m_n\ Ym_n - \mathbf{U} \tag{5.86}$$

Diagonalizando tenemos que

$$\boldsymbol{\lambda}' = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{(a+j\omega)^2\mu\varepsilon} - \mathbf{U} \tag{5.87}$$

Si diagonalizamos la matriz A' obtendremos los eigenvalores λ_i' y los eigenvalores correctos estarán dados por

$$\lambda_i = (\lambda_i' + 1)\ (a + j\omega)^2\mu\varepsilon \tag{5.88}$$

5.3. Modificación de las matrices normalizadas de parámetros eléctricos. Despues de eliminar los conductores de guarda la matriz de admitancia se puede escribir en forma general como

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L} \tag{5.89}$$

y la impedancia que se obtiene al aplicar la transformada modificada de Fourier es

$$\mathbf{Z}m = \mathbf{R} + (a + j\omega)\mathbf{L} \tag{5.90}$$

Dividiendo Zm por $(a + j\omega)\mu/2\pi$ para normalizar

$$\mathbf{Z}m_n = \frac{\mathbf{R}}{(a + j\omega)\frac{\mu}{2\pi}} + \frac{\mathbf{L}}{\mu/2\pi} \tag{5.91}$$

pero

$$\mathbf{R} = \text{Real}\{\mathbf{Z}\}$$

$$\mathbf{L} = (1/\omega)\ \text{Imag}\{\mathbf{Z}\}$$

por otra parte

$$\mathbf{Z} = j\,\frac{\omega\mu}{2\pi}\,\mathbf{Z}_n$$

sustituyendo estos valores en (5.91)

$$\mathbf{Z}m_n = \frac{\text{Real}\{j\mathbf{Z}_n\}}{(j + a/\omega)} + \text{Imag}\{j\mathbf{Z}_n\}$$

Si consideramos que

$$\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}r + j\ \mathbf{Z}i$$

entonces

$$j\,\mathbf{Z}_n = -\mathbf{Z}i + j\mathbf{Z}r$$

de donde

$$\mathrm{Real}\{j\mathbf{Z}_n\} = -\mathrm{Imag}\{\mathbf{Z}_n\}$$

$$\mathrm{Imag}\{j\mathbf{Z}_n\} = \mathrm{Real}\{\mathbf{Z}_n\}$$

por lo tanto

$$\mathbf{Z}m_n = \mathrm{Real}\{\mathbf{Z}_n\} - \frac{\mathrm{Imag}\{\mathbf{Z}_n\}}{(j + a/\omega)} \qquad (5.92)$$

La matriz de admitancia esta dada por

$$\mathbf{Y} = j\omega 2\pi\varepsilon\, \mathbf{Y}_n$$

introduciendo el factor de convergencia de la transformada modificada de Fourier

$$\mathbf{Y}m = (a + j\omega)2\pi\varepsilon\, \mathbf{Y}_n$$

dividiendo por $(a+j\omega)2\pi\varepsilon$ para normalizar

$$\mathbf{Y}m_n = \mathbf{Y}_n \qquad (5.93)$$

Las ecuaciones (5.92) y (5.93) nos proporcionan la forma de introducir el factor de convergencia de la transformada de Fourier modificada en las matrices de impedancia y admitancia normalizadas.

5.4. Elección de constantes para el estudio de fenómenos transitorios. La respuesta transitoria de un sistema físico estable a disturbios impuestos repentinamente, esta generalmente caracterizada, en los primeros instantes, por una más o menos violenta reacción al cambio de condiciones. Esta etapa inicial es seguida por una actividad sistemática en donde los cambios se transmiten a todo el sistema. La respuesta se va haciendo cada vez menos violenta hasta ir alcanzando las condiciones de estado estable. De esta forma, es aparente que se requiere un paso entre muestras muy pequeño para los instantes iniciales de la respuesta, y a medida que aumenta el tiempo, se puede aumentar dicho paso.

La teoria desarrollada en este capítulo esta basada en un muestreo a intervalos constantes. En general no es eficiente tratar de obtener una respuesta exacta en un intervalo de tiempo muy grande en una sola simulación; la razón es que si se eligen Ω y N lo suficientemente grandes para tomar en cuenta con exactitud los rápidos cambios que caracterizan a la respuesta inicial, entonces, para los instantes en que se tiene una respuesta menos violenta, la distancia entre muestras será excesivamente pequeña, lo que implica un trabajo inecesario de cómputo.

Un procedimiento más recomendable, consiste en fijar N a un determinado valor, que generalmente es de 128 o 256, y obtener la respuesta del sistema en un tiempo de observación lo suficientemente grande para observar las características generales del transitorio o "respuesta global". Posteriormente si se considera necesario, se realiza una segunda simulación para obtener las características de la respuesta inicial.

Una vez elegidos el número de muestras N y el tiempo de observación T, quedan fijos automaticamente $\Delta t, \Delta\omega, \Omega$:

$$\Delta t = T/N \quad , \quad \Delta\omega = \pi/T \quad , \quad \Omega = 2N\Delta\omega$$

Si se asume que no existen polos en el lado derecho de plano "$\rho+j\omega$", "a" puede elegirse arbitrariamente pequeño. - Sin embargo esto puede conducir a errores, pues si "a" es - muy pequeño, la trayectoria de integración seguirá estando muy cerca del eje imaginario y por lo tanto cerca de los polos, y la respuesta en frecuencia del sistema será aún abrupta.

El efecto de incrementar "a" es, alejar la trayectoria de integración del eje imaginario provocando un suavizamiento del integrando. Este argumento sugiere que sería ventajoso escoger un valor grande de "a", pero esto puede ocasio--

nar que los errores por truncamiemto séan aumentados en la evaluación de la transformada inversa, pues en esta aparece el factor "exp(at)".

De acuerdo con lo expuesto arriba, el factor de convergencia "a" debe de ser escogido ni "muy grande" ni "muy pequeño". Aún permanece el problema de la elección apropiada de "a" entre estos vagos límites, pués en la actualidad no existen reglas de aplicación general. En este trabajo despues de una serie de pruebas se eligió un valor de

$$a = 1.3\ \Delta\omega$$

obteniendose resultados satisfactorios.

CAPITULO 6

ANALISIS DE FENOMENOS TRANSITORIOS

En este capítulo se reune la teoría y los modelos desarrollados en los capítulos anteriores para conformar el método de análisis de fenómenos transitorios en el dominio de la frecuencia. Este método combina el uso de la transformada modificada de Fourier con la teoría de estado estable de los modos naturales de propagación. La ventaja de esta formulación es que la dependencia con respecto a la frecuencia de los parámetros de los sistemas de transmisión es facil de tomar en cuenta, sin importar la complejidad de las expresiones que los definan.

Antes de abordar la forma de realizar el análisis de fenómenos transitorios, en particular los ocasionados por la energización de líneas de transmisión, es conveniente dar una descripción general de la teoría desarrollada hasta el momento.

1. DESCRIPCION GENERAL DE LAS BASES TEORICAS DEL METODO.

Transformada modificada de Fourier.

En su forma usual la transformada de Fourier da lugar a espectros con variaciones bastante pronunciadas, que obligan a emplear pasos de integración demasiados pequeños, además de que las integrales no convergen para algunas funciones muy importantes como el escalón y la rampa. Por estas razones se introduce el uso de la transformada modificada de Fourier, si $f(t)=0$ para $t<0$, esta transformada esta dada por

$$F(a + j\omega) = \int_0^\infty f(t)\exp(-(a+j\omega)t)\ dt \tag{6.1}$$

y la transformada inversa es

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F(a+j\omega)\exp((a+j\omega)t)\ d\omega\ , t>0 \tag{6.2}$$

donde "a" es una constante que se emplea para estabilizar el integrando.

Si la integral de la ec.(6.2) se evalúa numéricamente es necesario truncar el rango de integración de $(-\infty,+\infty)$ a $(-\Omega,+\Omega)$. Esto origina inevitablemente la aparición del fenómeno de Gibbs, el cual se reduce con la inclusión en el integrando de una función "ventana" $\sigma(\omega)$.

En general la evaluación numérica de la transformada inversa se lleva a cabo a partir de la siguiente ecuación

$$f(t) = \mathrm{Real}\{\frac{\exp(at)}{\pi}\int_0^{\Omega} \sigma(a,\omega)\ F(a+j\omega)\exp(j\omega t)\ d\omega\} \qquad (6.3)$$

Análisis Modal.

La aplicación de la transformada modificada de Fourier a las ecuaciones básicas de una línea de transmisión nos conduce a:

$$\frac{d^2\ \hat{V}}{dx^2} = \mathbf{A}\ \hat{V} \quad , \quad \frac{d^2\ \hat{I}}{dx^2} = \mathbf{A}_t\ \hat{I} \qquad (6.4)$$

donde **A, Z, Y** son matrices cuadradas de orden igual al número de fases, con

$$\mathbf{Z} = (a + j\omega)\ \mathbf{L} + \mathbf{R}$$

$$\mathbf{Y} = (a + j\omega)\ \mathbf{C} \qquad (6.5)$$

Por medio del análisis modal la ecuación de propagación de voltajes da la siguiente solución

$$\hat{V} = \exp(-\mathbf{\Gamma}x)\ \hat{V}a + \exp(\mathbf{\Gamma}x)\hat{V}b \qquad (6.6)$$

donde

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{M}\ \gamma\ \mathbf{M}^{-1}$$

La solución para la propagación de corrientes se puede obtener facilmente de

$$\hat{I} = -\mathbf{Y}^{-1} \frac{d\hat{V}}{dx} \tag{6.7}$$

Considerando que el flujo positivo de corriente es hacia dentro de la línea en los dos extremos, se evalúan las constantes de integración $\hat{V}a$ y $\hat{V}b$ y se obtienen las ecuaciones de red de dos puertos de las líneas de transmisión homogéneas

$$\begin{bmatrix} \hat{I}r \\ \\ \hat{I}e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \\ -\mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}r \\ \\ \hat{V}e \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

donde

$\mathbf{A} = \mathbf{Y}_0 \coth(\mathbf{\Gamma} l)$

$\mathbf{B} = \mathbf{Y}_0 \operatorname{csch}(\mathbf{\Gamma} l)$

$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{M} \; (\boldsymbol{\gamma})^{-1} \; \mathbf{M}^{-1} \; \mathbf{Y}$

l = longitud de la línea.

La ec. (6.8) proporciona la solución completa en estado estable de la línea o sección de línea considerada en función de sus constantes básicas. En el capítulo 4 se expuso la forma de interconectar varias secciones de línea y de incluir el efecto de las discontinuidades que puedan existir con el fin de calcular la admitancia de entrada y la función de transferencia de la línea de transmisión en estudio.

En el análisis en estado estable la respuesta del sistema se obtiene calculando las constantes del sistema a una determinada frecuencia, siendo las componentes de los vectores de voltaje los fasores de los voltajes reales.

Bajo condiciones transitorias las líneas de transmisión estan sujetas a un amplio rango de variaciones de frecuencia, y para evaluar la respuesta tra[illegible] ma, se debe de calcular la respuesta en frecuencia originada por la aplicación, en este caso, de las transformadas de los voltajes reales y posteriormente realizar la conversión al dominio del tiempo.

2. ENERGIZACION DE LINEAS DE TRANSMISION.

2.1. Cierre monopolar

Consideremos una línea de transmisión alimentada desde una subestación, que puede ser parte de una red, como se muestra en la fig.6.1. Este sistema se puede reducir al equivalente de Thévenin de la fig.6.2. El voltaje que existe en el extremo emisor de la línea antes del cierre del interruptor es igual a cero, mientras que el voltaje $\hat{E}$,es el voltaje del bus de alimentación antes de conectar la línea.

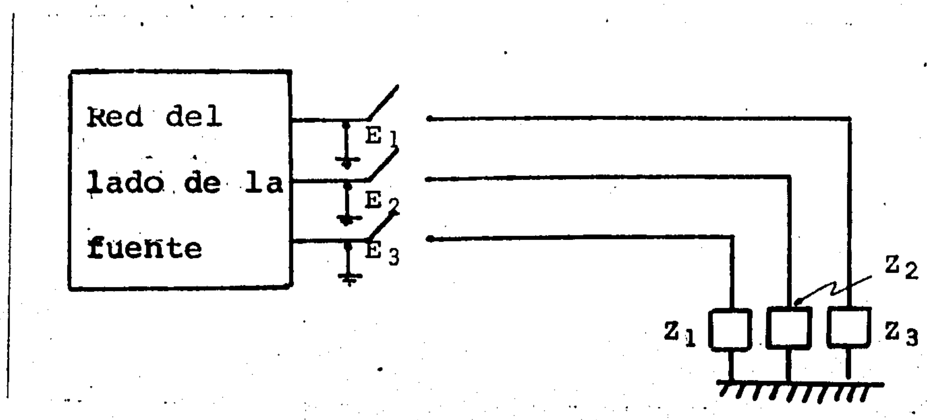


Fig. 6.1

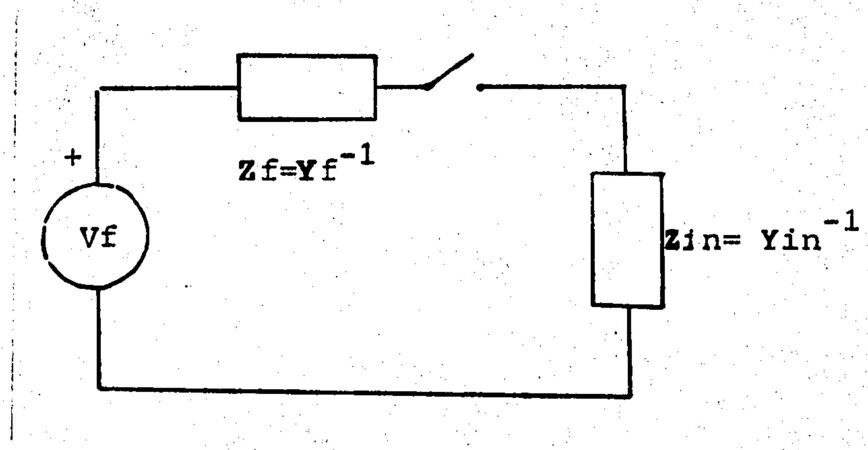


Fig. 6.2

Al cerrar el interruptor en t=0, el voltaje en el extremo emisor de la línea esta dado por

$$\hat{V}e = (Yf + Yin)^{-1}\ Yf\ \hat{E} \tag{6.9}$$

y el voltaje en el extremo receptor de la línea es

$$\hat{V}r = \mathbf{H}_L\ \hat{V}e \qquad (6.10)$$

en donde $\mathbf{H}_L$ es la función de transferencia de la línea. Debemos recordar que según el procedimiento descrito en el capítulo 4, **Yin** y $\mathbf{H}_L$ se obtienen simultaneamente.

En la ec.(6.9) las componentes del vector $\hat{E}$ correspondientes a las fases que permanecen abiertas son igual a cero en todo el rango de frecuencias, mientras que la componente de la fase que cierra es al transformada del voltaje que se aplica a esta fase.

Para simular correctamente el cierre monopolar es necesario introducir un factor de cierre, de la fig.6.3 se ve facilmente que la corriente que circula a traves del interruptor en los polos de las fases flotantes es cero, esto es, la impedancia de estos polos es infinita. La representa

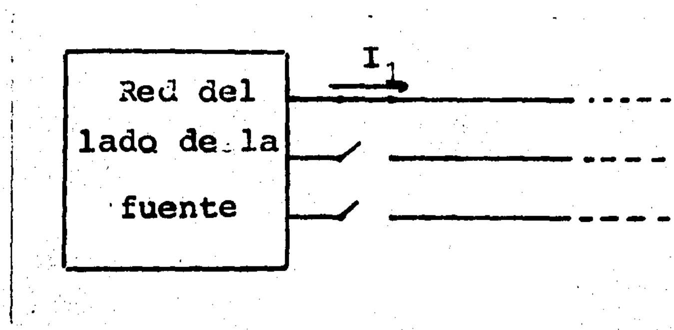


Fig. 6.3

ción matemática de esta condición se logra haciendo cero - los elementos de la diagonal principal de la matriz de admitancia de entrada a la red del lado de la fuente Yf, que correspondan a los polos abiertos.

2.2. Cierre Simultaneo.

En el caso en que los tres polos de una línea de transmisión cierren simultáneamente, se sigue el mismo procedimiento que para el cierre monopolar, con la diferencia de que en este caso no es necesario introducir el factor de cierre en Yf y los elementos del vector $\hat{E}$ son las transformadas de los voltajes aplicados. Estos voltajes estan dados por

$$e_1(t) = V\cos(\omega_0 t + \theta_1 + \phi)$$

$$e_2(t) = V\cos(\omega_0 t + \theta_2 + \phi)$$

$$e_3(t) = V\cos(\omega_0 t + \theta_3 + \phi) \qquad (6.11)$$

donde $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, son los desplazamientos angulares de los voltajes de alimentación, normalmente son 0^0, 240^0 y 120^0 para un sistema balanceado. ϕ es el angulo de cierre, es cero en t=0 con el primer polo cerrando en el instante en que se aplica el voltaje de pico y los dos restantes a un medio del voltaje de pico. V es el voltaje de pico.

La transformada modificada de Fourier de $e_1(t)$ es

$$E_1(\omega) = \frac{V}{\omega_0^2+(a+j\omega)^2}\{(a+j\omega)\cos(\theta_1+\phi)-\omega_0 \operatorname{sen}(\theta_1+\phi)\} \quad (6.12)$$

las transformadas de $e_2(t)$ y $e_3(t)$ se definen similarmente.

2.3. Procedimiento computacional.

En las figuras 6.4 y 6.5 se muestran los diagramas del procedimiento de cálculo del programa de computadora digital para la simulación de la energización de líneas de transmisión. La descripción de los bloques se da a continuación

B1. Lectura de datos.

B2. Se calculan las constantes para la aplicación de la transformada modificada de Fourier.

B3. Respuesta del sistema. Se evalúa la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia. En la fig. 6.5. se muestra el diagrama de proceso para este calculo.

B4. Inversión al dominio del tiempo.

B3.1. Impedancia de la fuente. Se calcula la impedancia equivalente de Thévenin de la red del lado de la fuente.

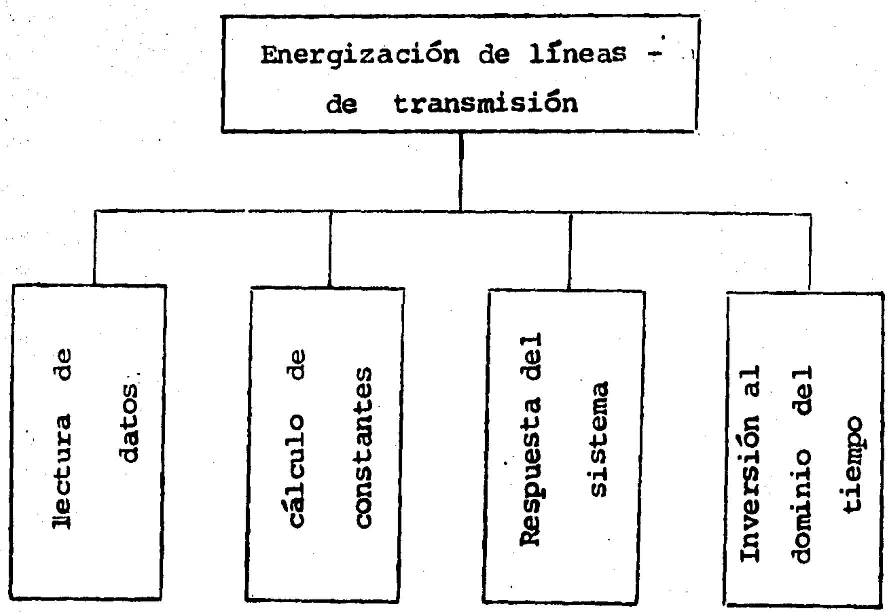
B3.2. Modelado de la línea principal. En esta parte se calcula la admitancia de entrada de la línea.

B3.3. Cálculo del voltaje de excitación. Se calcula a cada frecuencia el valor de las transformadas de

De los elementos del vector de voltajes de excitación, ya sea para cierre monopolar o cierre simultaneo.

B3.4. Cálculo de los voltajes en el extremo emisor.

B3.5. Cálculo de los voltajes en el extremo receptor.



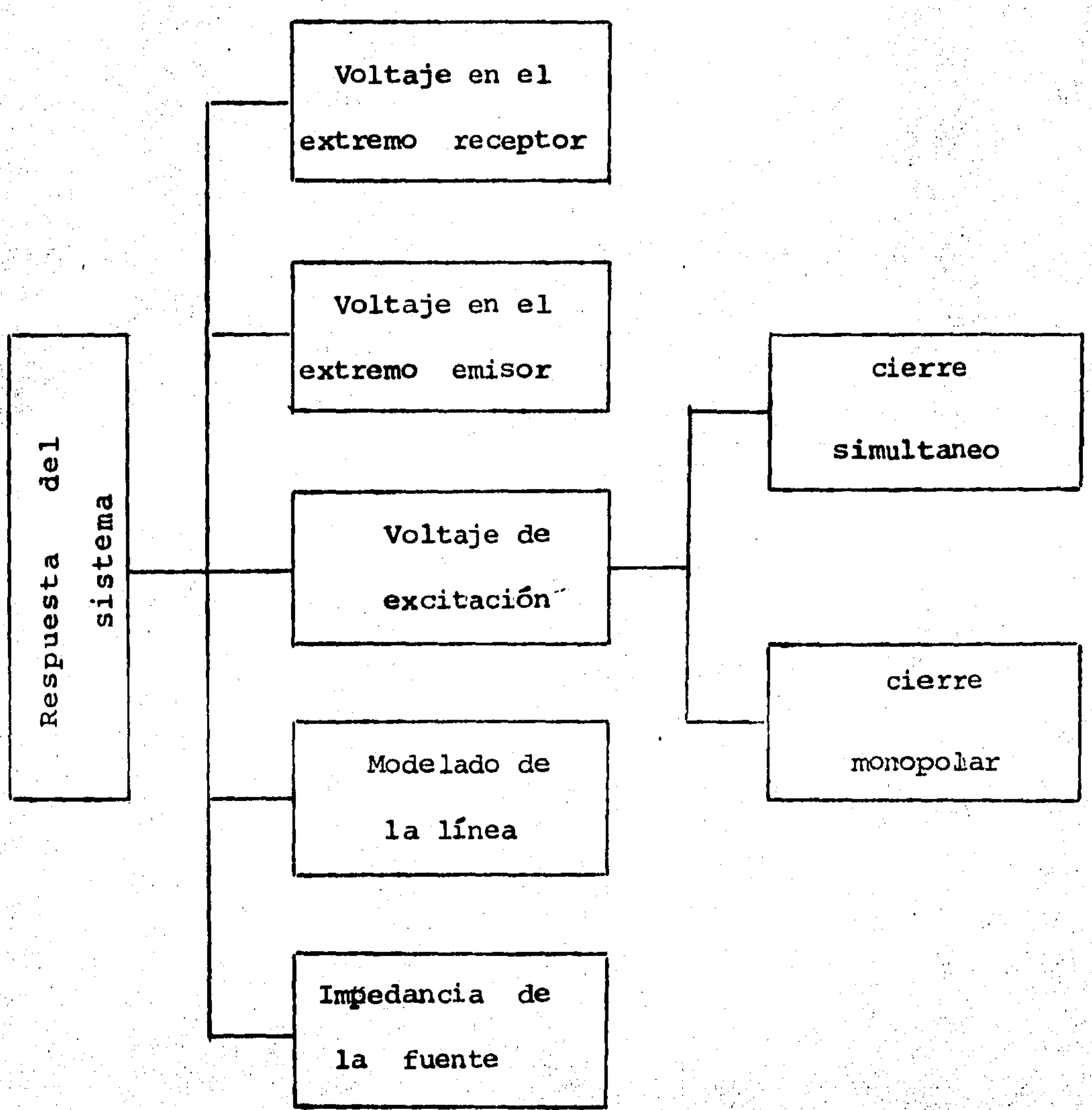

Respuesta del sistema
Voltaje en el extremo receptor
Voltaje en el extremo emisor
Voltaje de excitación
Modelado de la línea
Impedancia de la fuente
cierre simultaneo
cierre monopolar

Fig. 6.5

3. SIMULACION DEL CIERRE DE INTERRUPTORES EMPLEANDO EL TEOREMA DE SUPERPOSICION.

3.1. Desarrollo teórico.

Consideremos el caso de la fig.6.6 en que se muestra la unión de dos redes por medio de un interruptor

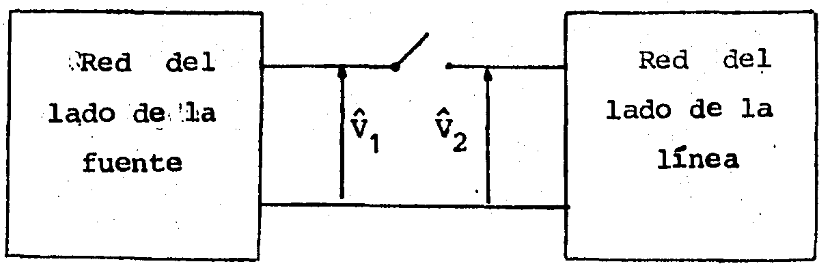


Fig. 6.6

Los voltajes que existen antes del cierre del interruptor son los voltajes en estado estable del sistema. Las redes de la fig.6.6 se pueden sustituir por sus circuitos equivalentes de Thévenin y el interruptor se puede representar por un generador de voltaje, con f.e.m. igual a la diferencia de potencial que existe entre sus terminales, como se muestra en la fig.6.7 .

En la fig.6.7

$$Zf = Yf^{-1}$$

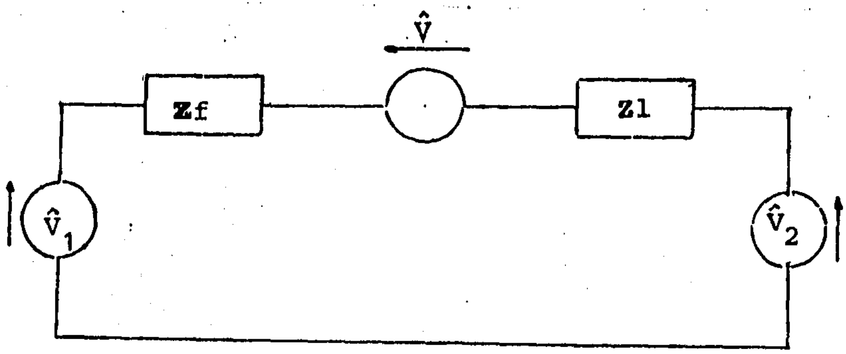


Fig. 6.7

$$Zl = Yin^{-1}$$

$$\hat{V} = \hat{V}_1 - \hat{V}_2 \qquad (6.13)$$

Para simular el cierre del interruptor, es necesario - inyectar en el punto del circuito en donde está, un voltaje de igual magnitud pero de sentido contrario que la diferencia de potencial que existía entre los dos contactos del interruptor antes del cierre. Por el principio de superposición el voltaje a traves del interruptor es cero,así, el interruptor esta efectivamente cerrado. Para encontrar la respesta total del sistema, se determina la respuesta transitoria debida al voltaje inyectado y el resultado se superpone a la respuesta en estado estable antes del cierre.

De acuerdo con la fig.6.8, la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia debida al voltaje inyectado es,

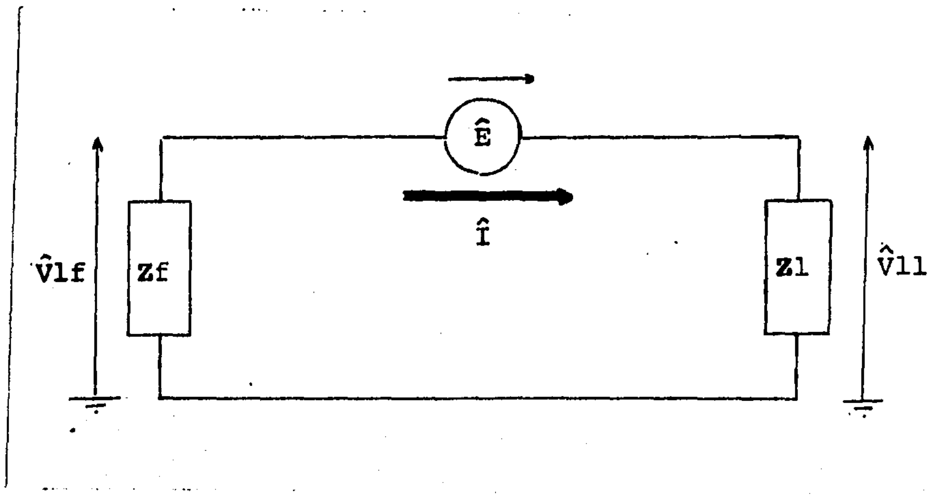


Fig. 6.8

en el extremo emisor de la línea

$$\hat{V}_{11} = \mathbf{Z}_1 \ (\mathbf{Z}f + \mathbf{Z}_1)^{-1} \ \hat{E} \tag{6.14}$$

en términos de admitancias

$$\hat{V}_{11} = (\mathbf{Y}f + Yin)^{-1} \ \mathbf{Y}f \ \hat{E} \tag{6.15}$$

en el lado de la fuente

$$\hat{V}_{1f} = - \mathbf{Z}f \ (\mathbf{Z}f + \mathbf{Z}_1)^{-1} \ \hat{E} \tag{6.16}$$

en términos de admitancias

$$\hat{V}_{1f} = - \ (\mathbf{Y}f + \mathbf{Y}in)^{-1} \mathbf{Y}in \ \hat{E} \tag{6.17}$$

El voltaje inyectado esta dado por

$$\hat{E} = \hat{V}_1 - \hat{V}_2 \tag{6.18}$$

con la dirección mostrada en la fig.6.8

El voltaje total en el extremo emisor de la línea es

$$\hat{V}e = \hat{V}_2 + \hat{V}_{11} \tag{6.19}$$

Una vez calculado $\hat{V}e$, se puede calcular el voltaje en el extremo receptor de la línea de acuerdo con (6.9).

El procedimiento de superposición descrito en esta sección es muy importante, pues nos permite analizar los problemas de recierres con carga atrapada y de apertura de interruptores (en este caso se inyecta una corriente), además de que es el primer paso para el análisis del problema del cierre secuencial.

3.2. Procedimiento computacional.

El procedimiento de cálculo general es básicamente el mismo que el de la fig.6.4, la diferencia radica en la forma de realizar el cálculo de la respuesta del sistema. El procedimiento para la evaluación de la respuesta del sistema se muestra en la fig.6.9

El contenido de los bloques es el siguiente:

B1. Cálculo de la impedancia equivalente de Thévenin - de la red del lado de la fuente (Zf) .

B2. Cálculo de la admitancia de entrada a la línea (Yin).

B3. Evaluación de las operaciones matriciales

$$(\mathbf{Y}f + \mathbf{Y}in)^{-1}\ \mathbf{Y}f$$

y

$$-\ (\mathbf{Y}f + \mathbf{Y}in)^{-1}\ \mathbf{Y}in$$

B4. Cálculo del voltaje inyectado $\hat{E} = \hat{V}_1 - \hat{V}_2$.

B5. Cálculo de los voltajes originados en el extremo emisor ($\hat{V}_{1f}$ y $\hat{V}_{11}$) por el voltaje inyectado.

B6. Evaluación de la respuesta total tanto en el extremo emisor como en el extremo receptor.

B4.1. Cálculo del voltaje del lado de la fuente $\hat{V}_1$.

B4.2. Cálculo del voltaje del lado de la línea $\tilde{V}_2$.

B4.1.1. Voltaje para cierre monopolar.

B4.1.2. Voltaje para cierre simultaneo .

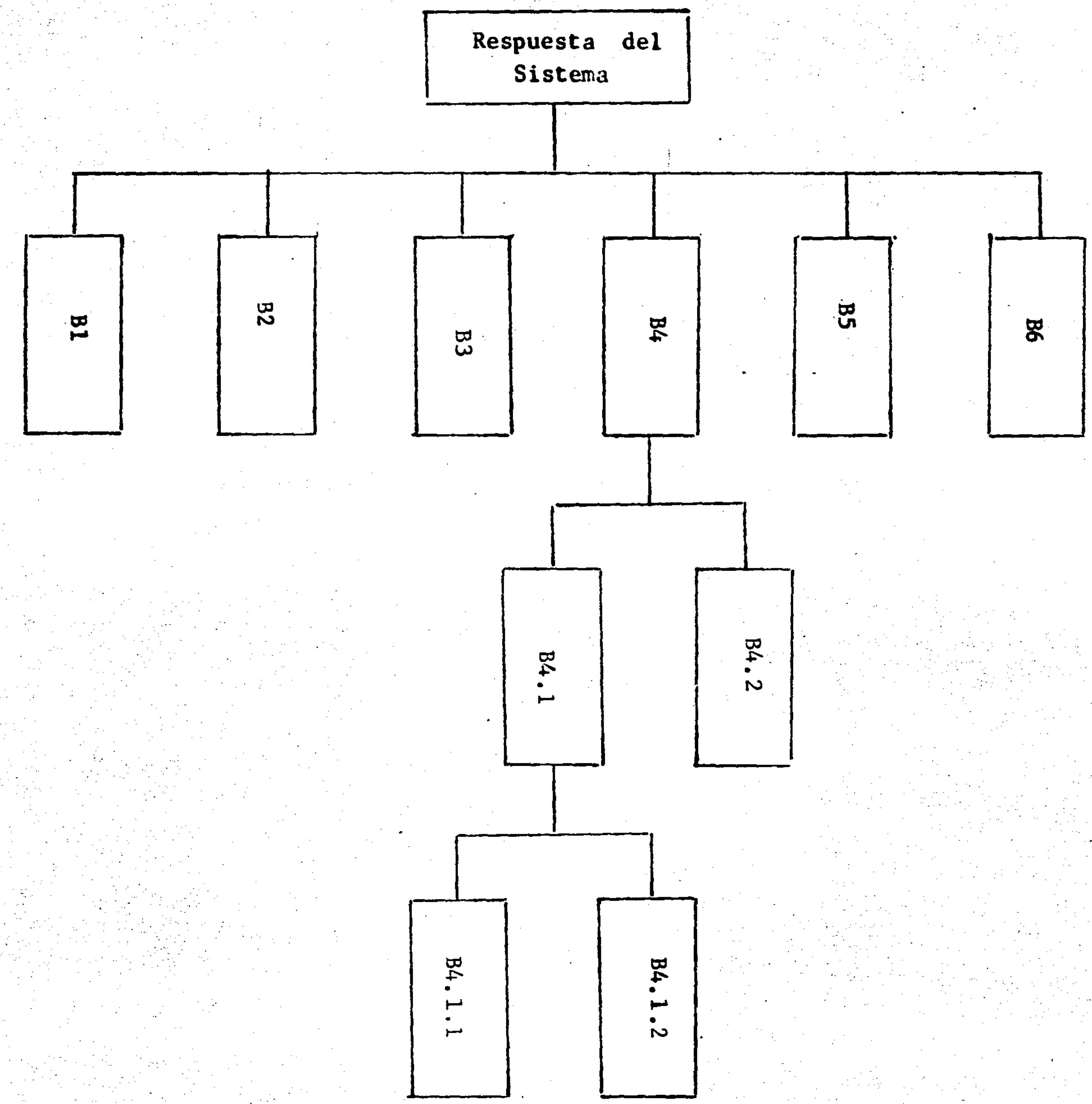


Fig. 6.9

4. ENERGIZACION SECUENCIAL DE LINEAS DE TRANSMISION.

Es importante, en estudios del comportamiento de los sistemas de transmisión bajo condiciones de energización o desenergización, reconocer que los polos de los interruptores no cierran ni abren al mismo tiempo, sino que lo hacen en forma secuencial y el efecto que pueda tener esta acción en la respuesta transitoria de los sistemas debe de ser tomada en cuenta. El problema de la acción secuencial de los polos de los interruptores involucra cambios de la configuración del sistema a traves del tiempo, por lo que el problema deja de ser lineal. El procedimiento que se presenta en esta sección puede extenderse a otra clase de problemas no lineales, como el empleo de resistencias de preinserción o de otros dispositivos no lineales que puedan aproximarse en forma piezolineal.

4.1. Descripción del método.

La teoría del método para el análisis de problemas no lineales será expuesta haciendo referencia a la energización secuencial de una línea de transmisión trifásica.

El problema del cierre del primer polo se puede tratar como se describió en las secciones anteriores. Después de un corto período de tiempo el segundo polo cierra y más tarde el tercero. Durante el intervalo de tiempo entre el primer y segundo cierre, se lleva a cabo una cierta transferencia de energía entre la fase energizada y las que permanecen flotantes. Así, los conductores de éstas últimas adquiren un voltaje que depende de las condiciones del sistema. Cuando el segundo polo cierra, induce un determinado voltaje al conductor previamente energizado, mientras que el tercer conductor, aún flotante, adquiere un nuevo voltaje transitorio. Por último, al cerrar el tercer polo, se inducen otros voltajes en los conductores energizados anteriormente.

Consideremos la red de la fig.6.10, donde $e_1(t)$, $e_2(t)$ y $e_3(t)$ son los voltajes de circuito abierto de los buses de alimentación. $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ son los voltajes e-xistentes en el extremo emisor de la línea.

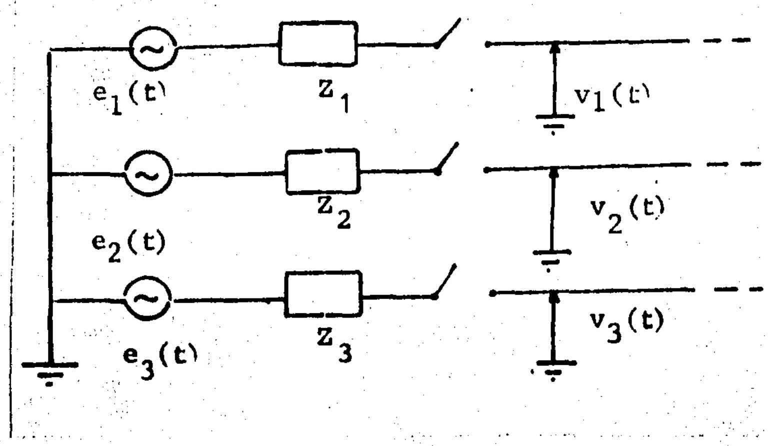


Fig.6.10

El procedimiento a seguir es el siguiente :

1. El primer polo cierra en $t=t_1$. Empleando el principio de superposición se calcula la respuesta del sistema en el extremo emisor de la línea (fig.6.11), en todo el tiempo de observación

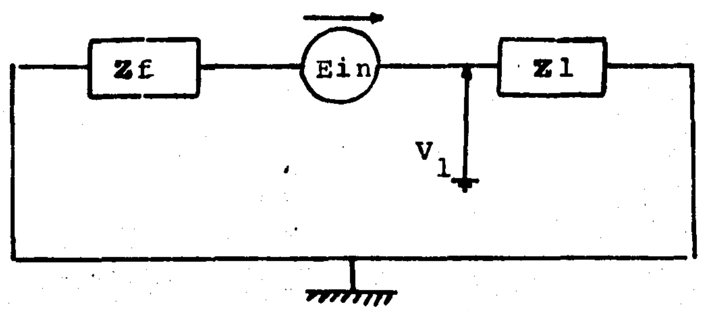


Fig. 6.11

El voltaje inyectado es

$$\hat{E}in(\omega) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}\{e_1(t)-v_1(t)\ u(t-t_1)\} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

Se calcula V_1 y el voltaje total en el extremo emisor es

$$\hat{V}e = \hat{V}_1 + \hat{V} \tag{6.21}$$

con

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}\{v_1(t)\} \\ \mathcal{F}\{v_2(t)\} \\ \mathcal{F}\{v_3(t)\} \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

2. El segunpo polo cierra en $t=t_2$. En la fig. 6.10 con

$$\hat{E}in(\omega) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{F}\{ (e_2(t)-ve_2(t))u(t-t_2)\} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

se calcula nuevamente $\hat{V}_1$ en todo el tiempo de observación y se superpone al voltaje en el extremo emisor calculado en - el paso 1

$$\hat{V}e' = \hat{V}_1 + \hat{V}e \tag{6.24}$$

3. El tercer polo cierra en $t=t_3$. Con la fig.6.10 y con

$$Ein(\omega) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{F}\{ (e_3(t)-ve_3'(t))u(t-t_3)\} \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

se calcula $\hat{V}_1$ en todo el tiempo de observación y se superpo ne al voltaje en el extremo emisor calculado en el paso 2.

$$\hat{V}e'' = \hat{V}_1 + \hat{V}e' \tag{6.26}$$

En este paso, una vez calculado $\hat{V}e''$ a una determinada frecuencia, se calcula el voltaje en el extremo receptor

$$\hat{V}r = \mathbf{H}_L\ \hat{V}e'' \qquad (6.27)$$

Como se puede ver en el procedimiento anterior, cada vez que cierra un polo, esto es, cada vez que cambia la configuración del sistema, es necesario efectuar el cálculo en todo el tiempo de observación y por lo tanto en todo el rango de frecuencias. Al final del primer paso de cálculo se obtienen las transformadas de los voltajes en el extremo emisor como si solo cerrara el primer polo y así se conservara el sistema en todo el tiempo de observación. Después del segundo paso el resultado son las transformadas de los voltajes con el efecto del segundo cierre incluido. En el tercer paso, se van obteniendo las transformadas tanto de los voltajes en el extremo emisor como de los voltajes en el extremo receptor, ocasionados por el cierre secuencial de los tres polos.

Es muy importante observar que las transformadas de los voltajes inyectados se componen de una parte analítica y otra que debe de ser encontrada numéricamente (excepto para el cierre del primer polo, pues en este caso, el voltaje inyectado se conoce por completo analíticamente). Por ejemplo, el voltaje inyectado en el segundo cierre es

$$Ein_2(\omega) = \mathcal{F}\{(e_2(t)-ve_2(t))u(t-t_2)\}$$

$$Ein_2(\omega) = \mathcal{F}\{e_2(t)u(t-t_2)\} - \mathcal{F}\{ve_2(t)u(t-t_2)\}$$

la transformada $\mathcal{F}\{e_2(t)u(t-t_2)\}$ se conoce analíticamente mientras que la transformada $\mathcal{F}\{ve_2(t)u(t-t_2)\}$ se debe de encontrar numéricamente.

4.2. Procedimiento de cálculo.

En la fig.6.12 se muestra el diagrama de flujo del programa de computadora digital para la simulación de la energización secuencial de líneas de transmisión. En el diagrama nc indica el número de cierre que se esta simulando y N es el número de muestras utilizadas en el estudio.

5. APLICACIONES.

En las secciones anteriores se presentó el método de análisis en el dominio de la frecuencia de transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión. En esta sección, utilizando el sistema de rutinas para computadora digital desarrollado, se simulan varios casos de fenómenos transitorios originados por la energización de una línea de transmisión.

La línea es energizada a 400 kV y tiene una longitud de 203 km entre Manzanillo y Atequiza. Esta línea es operada por la Comisión Federal de Electricidad y sus características físicas son las siguientes (fig.6.13)

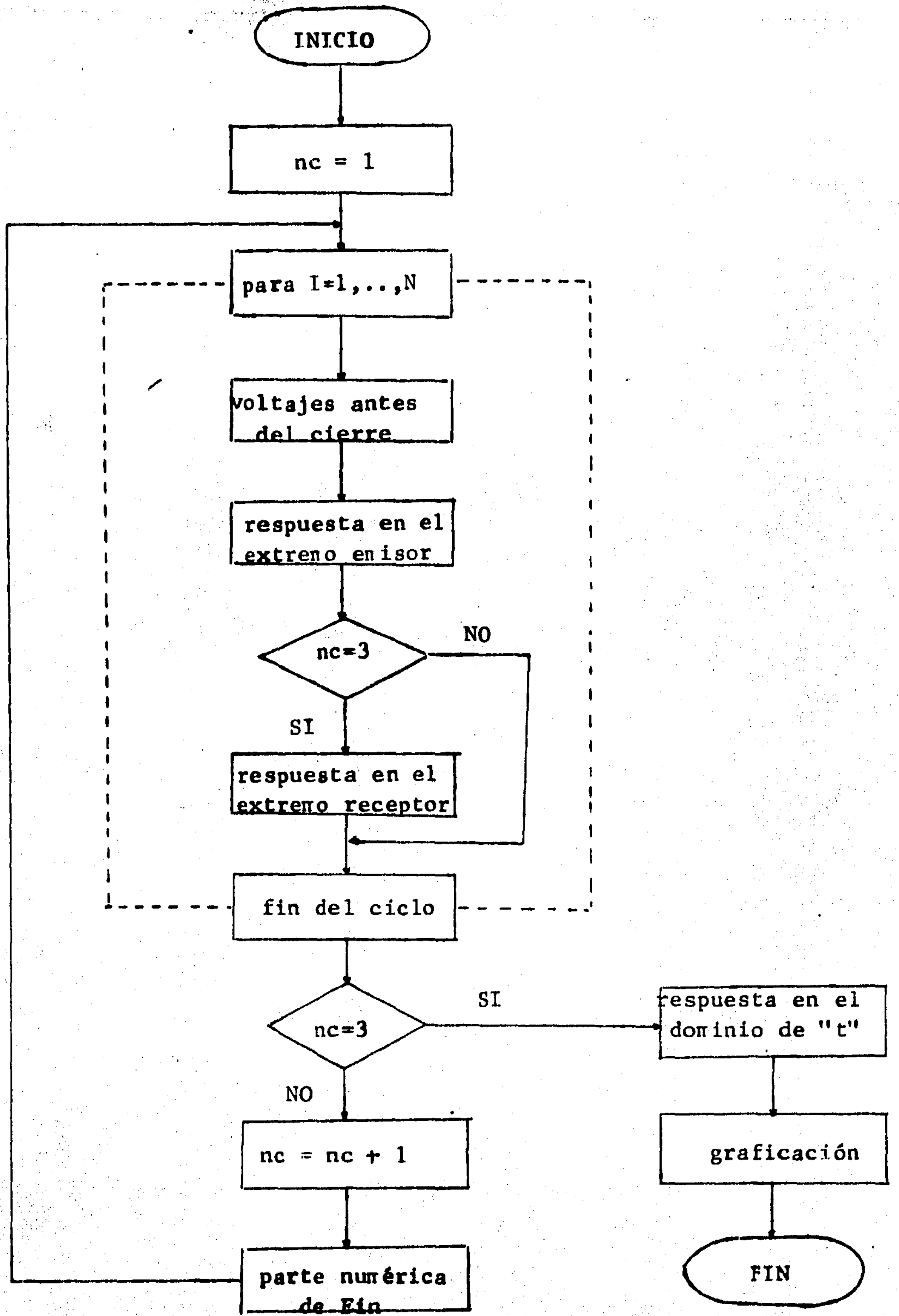

INICIO
nc = 1
para I=1,..,N
voltajes antes del cierre
respuesta en el extremo emisor
nc=3
NO
SI
respuesta en el extremo receptor
fin del ciclo
nc=3
SI
respuesta en el dominio de "t"
NO
nc = nc + 1
graficación
parte numérica de Ein
FIN

Fig. 6.12

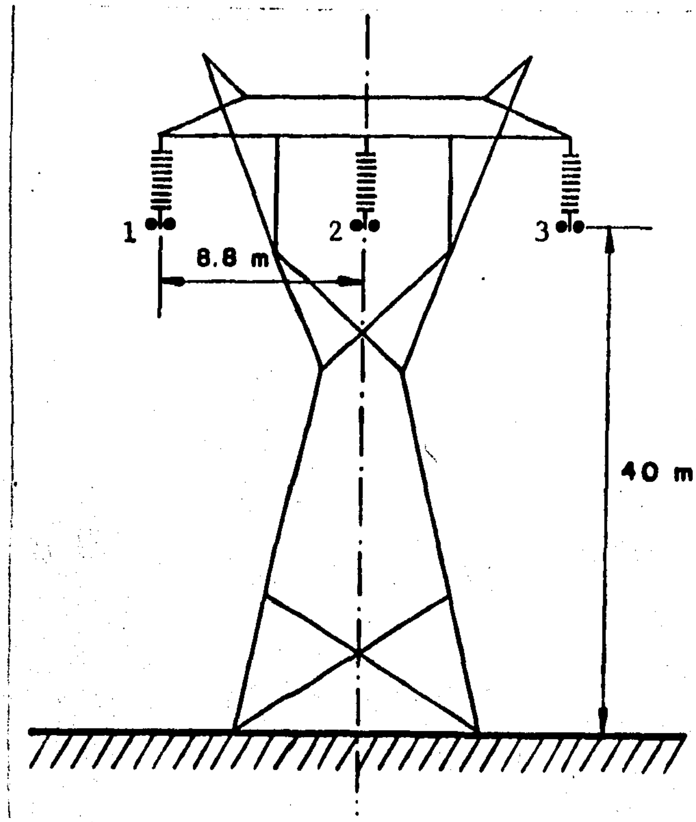


Fig.6.13

CASO 1. Cierre monopolar con bus infinito.

En la fig.6.14 se muestran los voltajes en el extremo emisor y en la fig.6.15 los voltajes en el extremo receptor, en los instantes iniciales del transitorio. Se energiza la fase 1 al voltaje de pico.

En la fig.6.14 se puede observar que la onda cosenoidal toma algunos microsegundos en alcanzar su valor inicial; este tiempo de levantamiento es originado por la eva

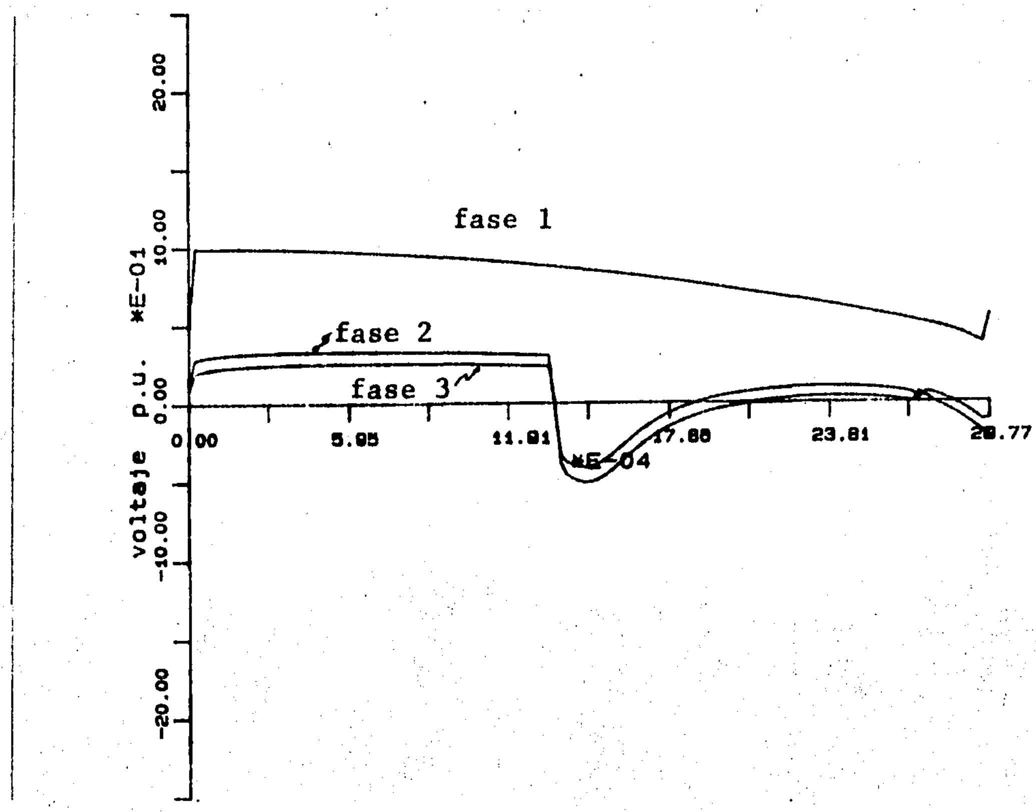


Fig.6.14

luación numérica de la transformada de Fourier. Se puede - observar el voltaje positivo adquirido por los conductores flotantes y el efecto posterior del arrivo de la onda refleja desde el extremo receptor.

En la fig.6.15 se puede ver facilmente el tiempo de - viaje de las ondas desde el extremo emisor al receptor, así como el efecto de duplicación de la amplitud de los voltajes ocasionado por la reflexión de las ondas. Los valores - de los voltajes en el extremo receptor no son exactamente - el doble que los del extremo emisor por la atenuación causada por las pérdidas en los conductores y tierra.

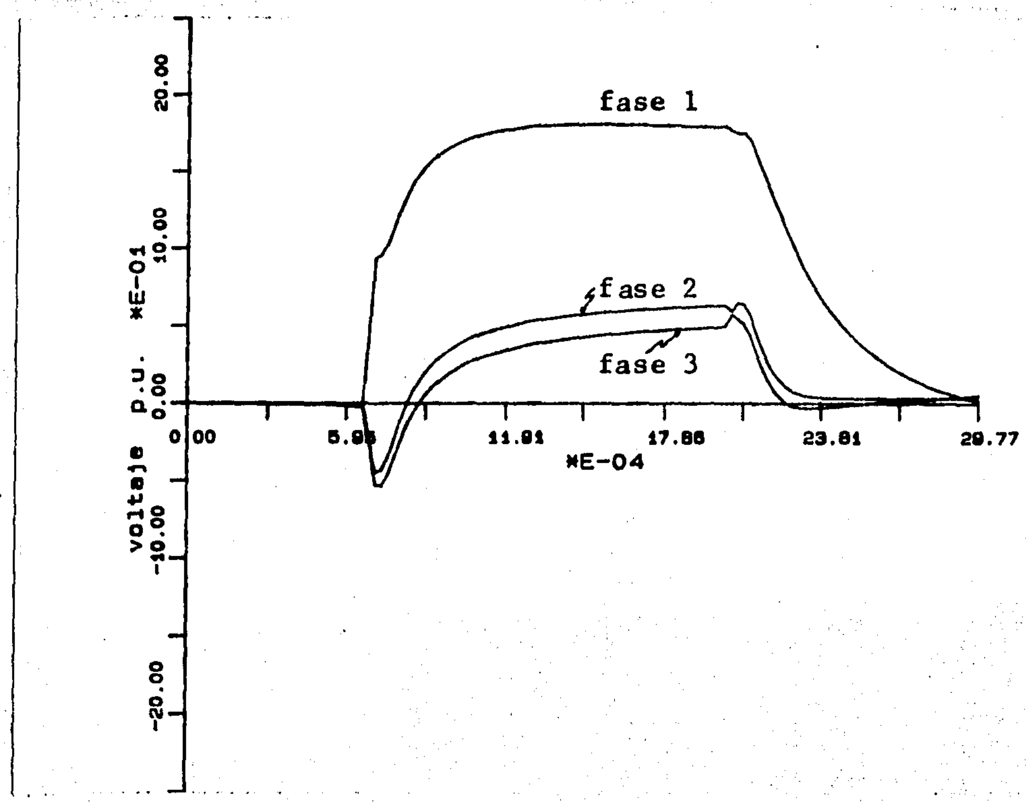


Fig. 6.15

En las figuras 6.16 y 6.17 se muestra la respuesta transitoria en un período de tiempo de aproximadamente 10 mseg.

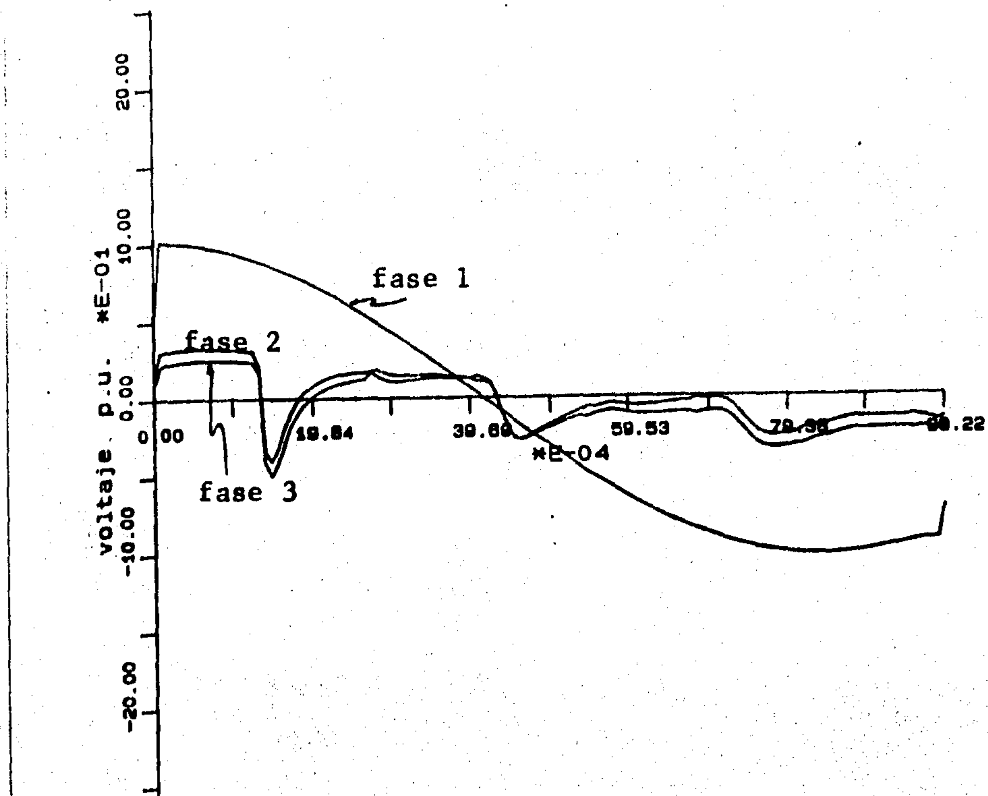


Fig. 6.16

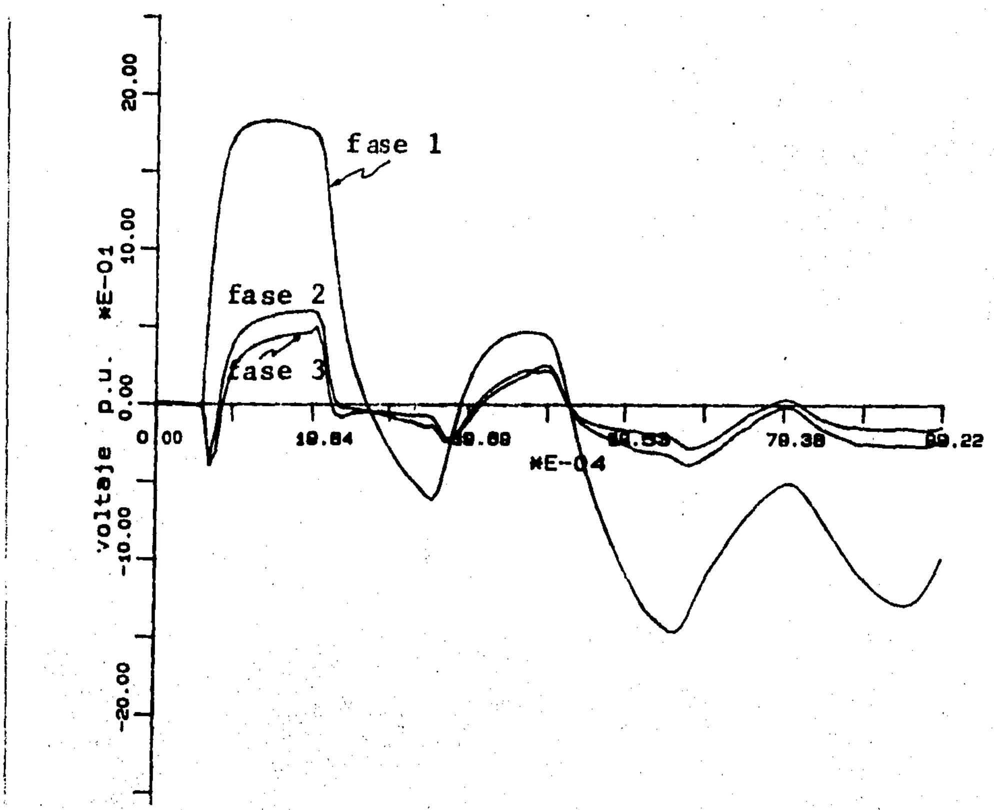


Fig. 6.17

En la fig. 6.17 se observa que el transitorio tiene una frecuencia natural de oscilación superpuesta a la frecuencia de operación del sistema. La frecuencia natural de oscila--- ción de la línea es complicada por el hecho de que existen tres tiempos de viaje para los tres modos de propagación, o al menos dos tiempos, si se desprecia la diferencia entre - los dos modos aéreos.

CASO 2. Cierre simultaneo con bus infinito.

Los resultados de la simulación de este caso se muestran en la fig.6.18 para el extremo emisor y en las figuras 6.19,6.20 y 6.21 para el extremo receptor. La fase 1 cierra al voltaje de pico y las fases 2 y 3 a un medio del voltaje de pico. En este caso el voltaje del extremo emisor es el mismo de la fuente de alimentación. Como las fases 2 y 3 cierran a voltajes menores que la fase 1, los voltajes transitorios en el extremo receptor para estas fases antes de la reflexión de las ondas son menores también. Como en el caso del cierre monopolar se ve claramente la existencia de una frecuencia fundamental de oscilación superpuesta a la frecuencia de operación del sistema

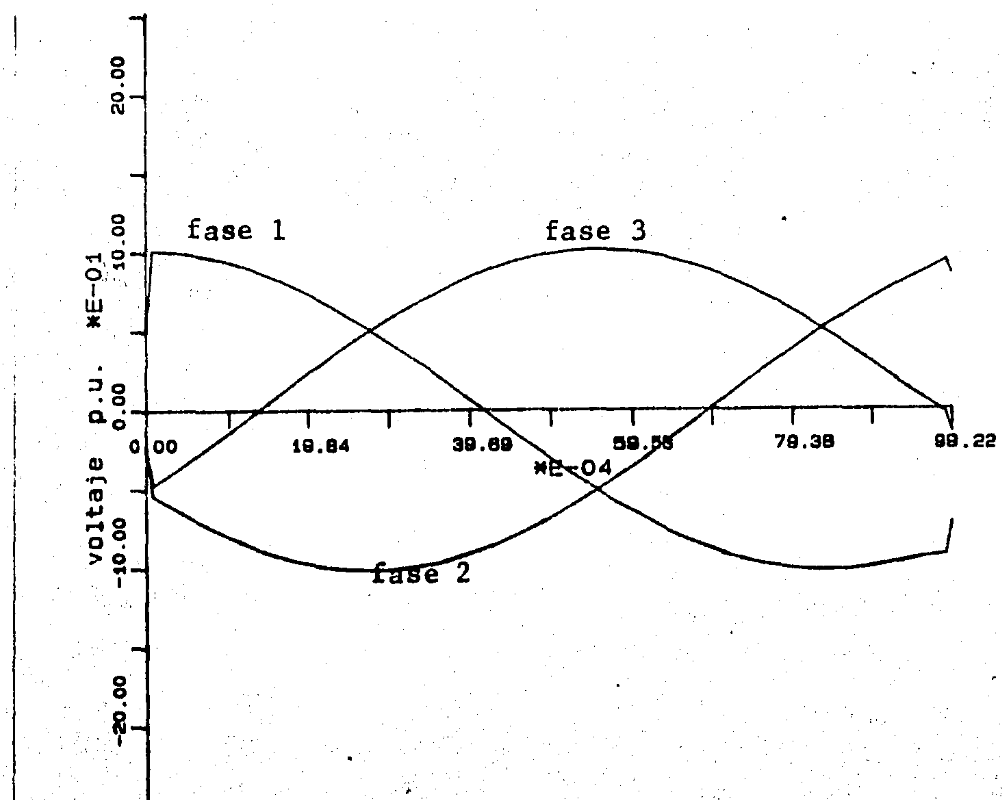


Fig. 6.18

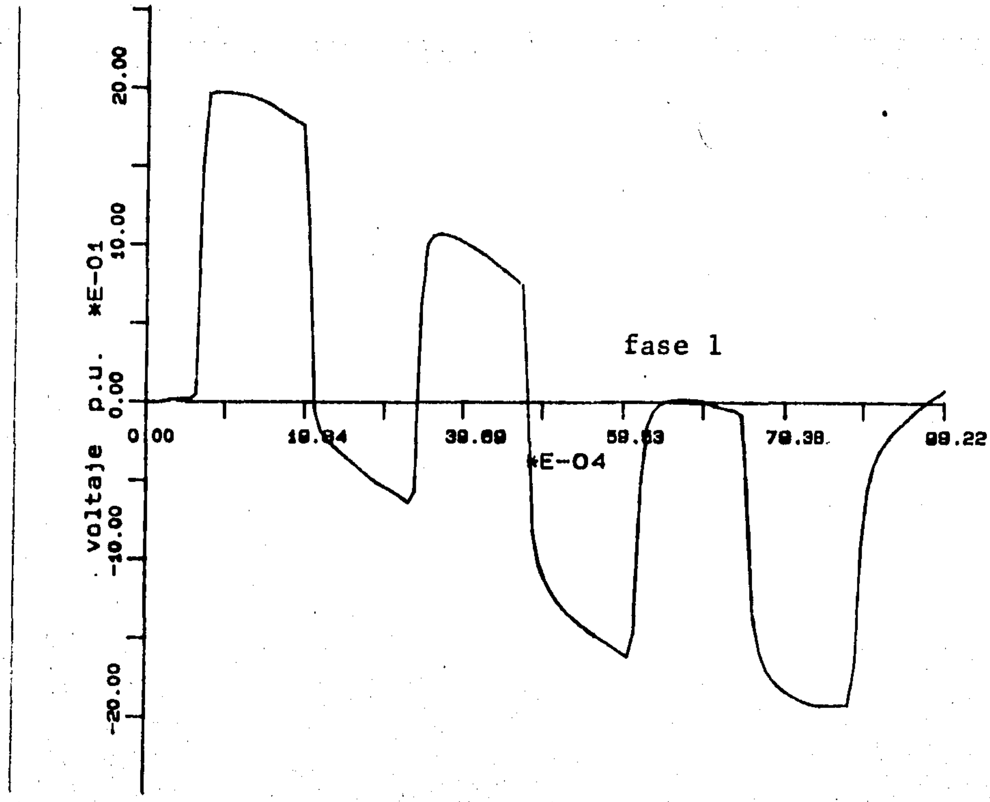


Fig. 6.19

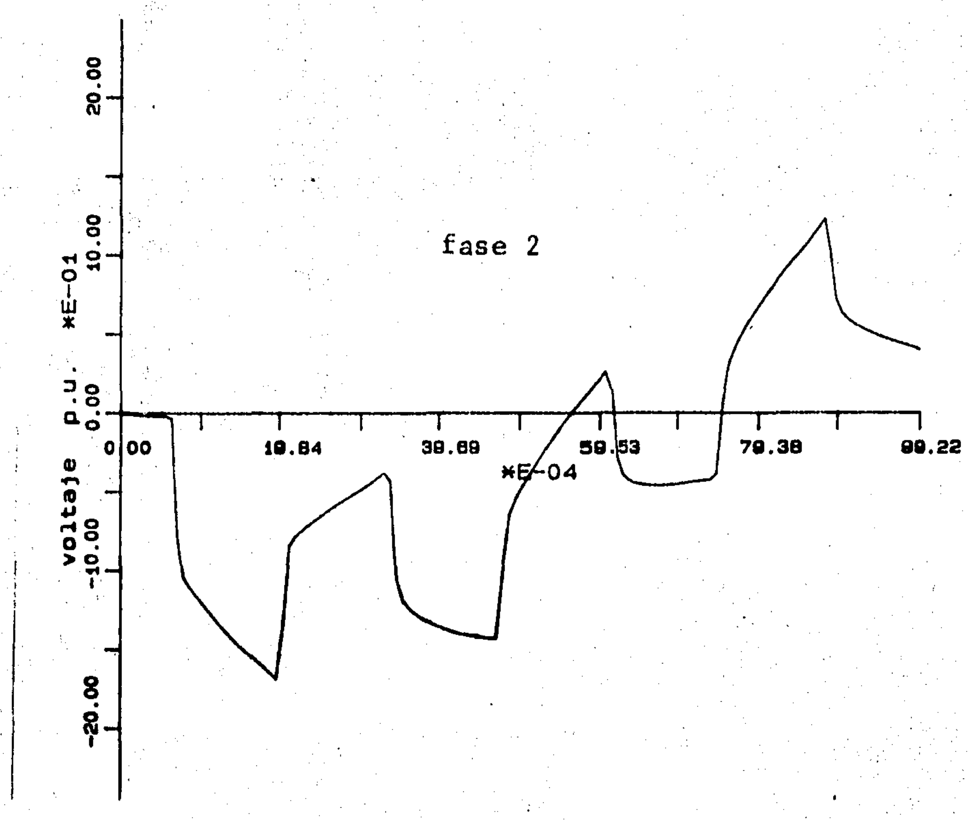


Fig. 6.20

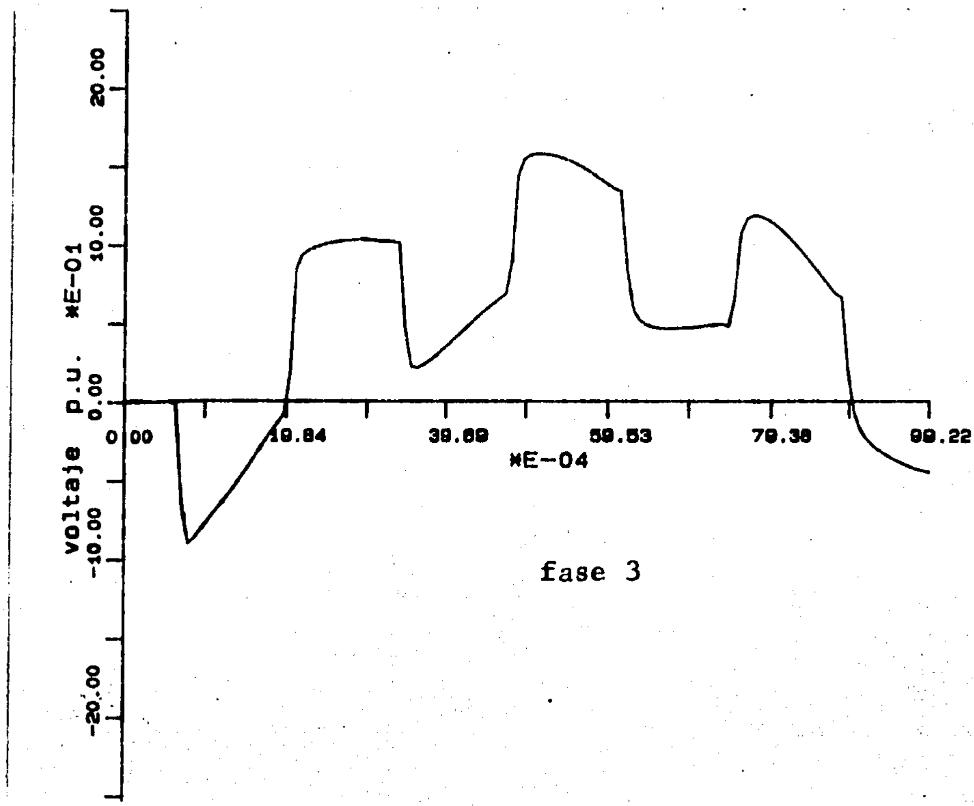

voltaje p.u. *E-01
20.00
10.00
0.00
-10.00
-20.00
0.00
19.84
39.69
59.53
79.38
99.22
*E-04
fase 3

Fig. 6.21

CASO 3. Cierre monopolar con fuente inductiva.

El sistema empleado para la simulación se muestra en la fig. 6.22 .

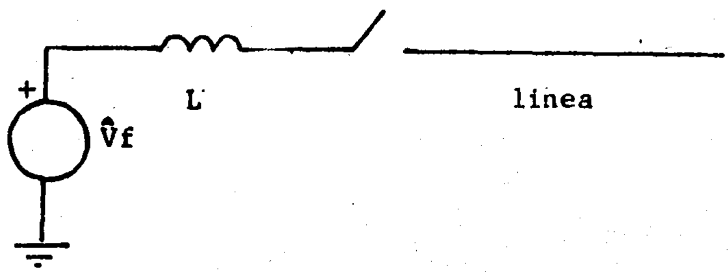


Fig. 6.22

Se consideró una potencia de corto circuito de 20 000 MVA y un voltaje de operación de 400 kV. En las figuras 6.23 y 6.24 se muestran los voltajes transitorios en el extremo emisor y en el extremo receptor respectivamente. En estas figuras se muestra la importancia que tiene la fuente de alimentación en la forma de onda y magnitud de los voltajes transitorios. En particular para este caso, son notorios los "picos" que presentan las ondas, esto es característico de las fuentes inductivas.

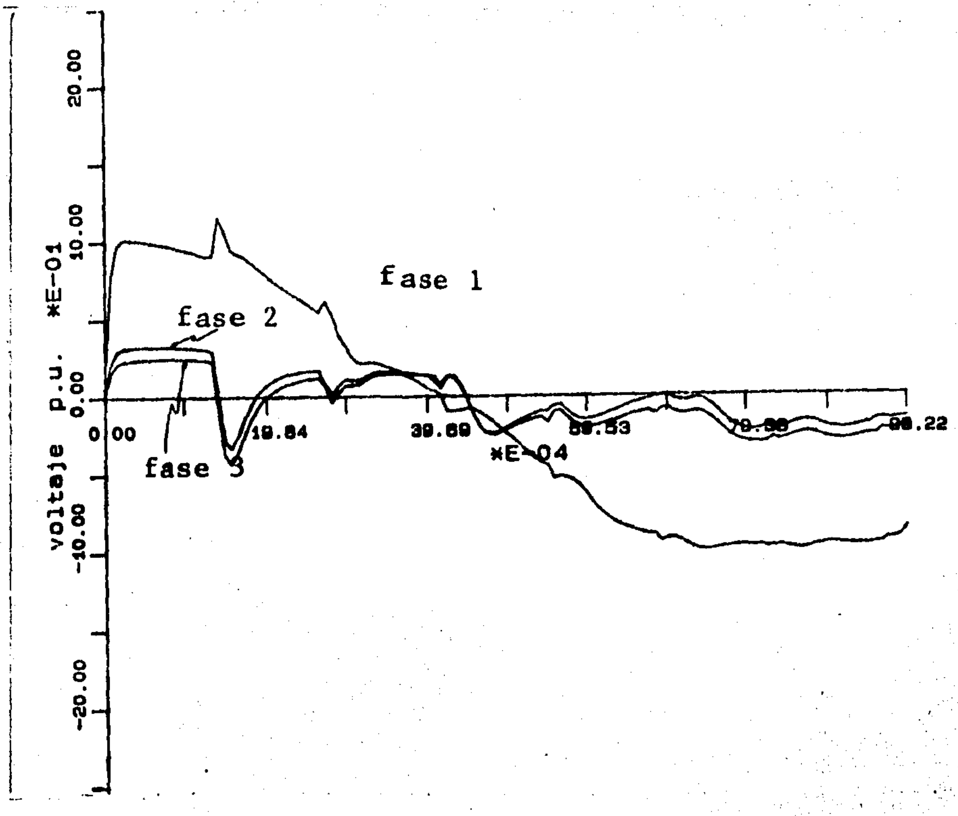


Fig. 6.23

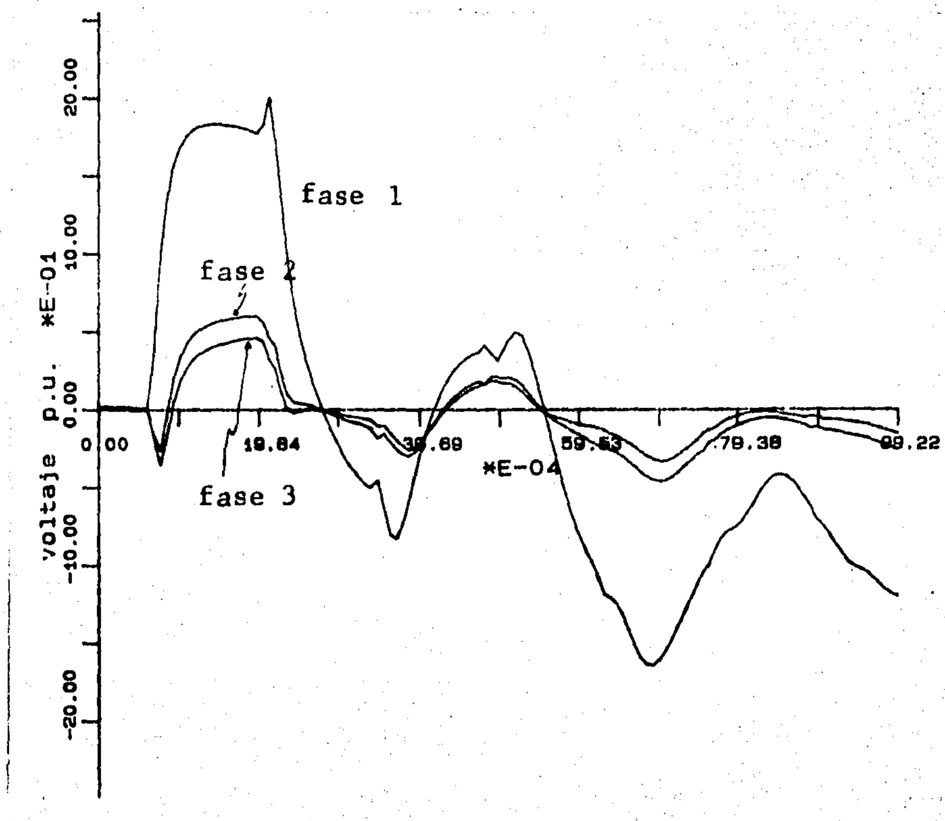


Fig. 6.24

CASO 4. Cierre simultaneo con fuente inductiva.

En la fig.6.25 se muestra la respuesta en el extremo emisor y en las figuras 6.26,6.27 y 6.28 la respuesta en el extremo receptor.

En la fig.6.26

a. Arrivo al extremo receptor de la onda que sigue inmediatamente al cierre del interruptor del extremo emisor.

b. Efecto de la fuente de alimentación.

c. Arrivo al extremo receptor de la onda reflejada desde el extremo emisor.

Las características a,b y c se repiten para reflexiones suscesivas y como ya se mencionó anteriormente se encuentran superpuestas a la onda cosenoidal de alimentación.

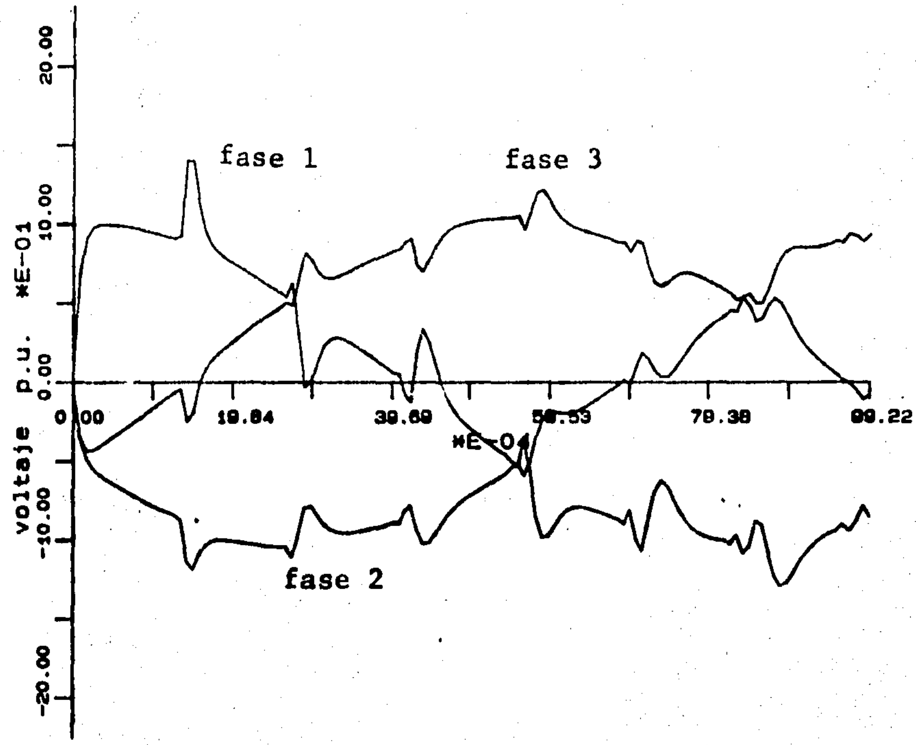


Fig. 6.25

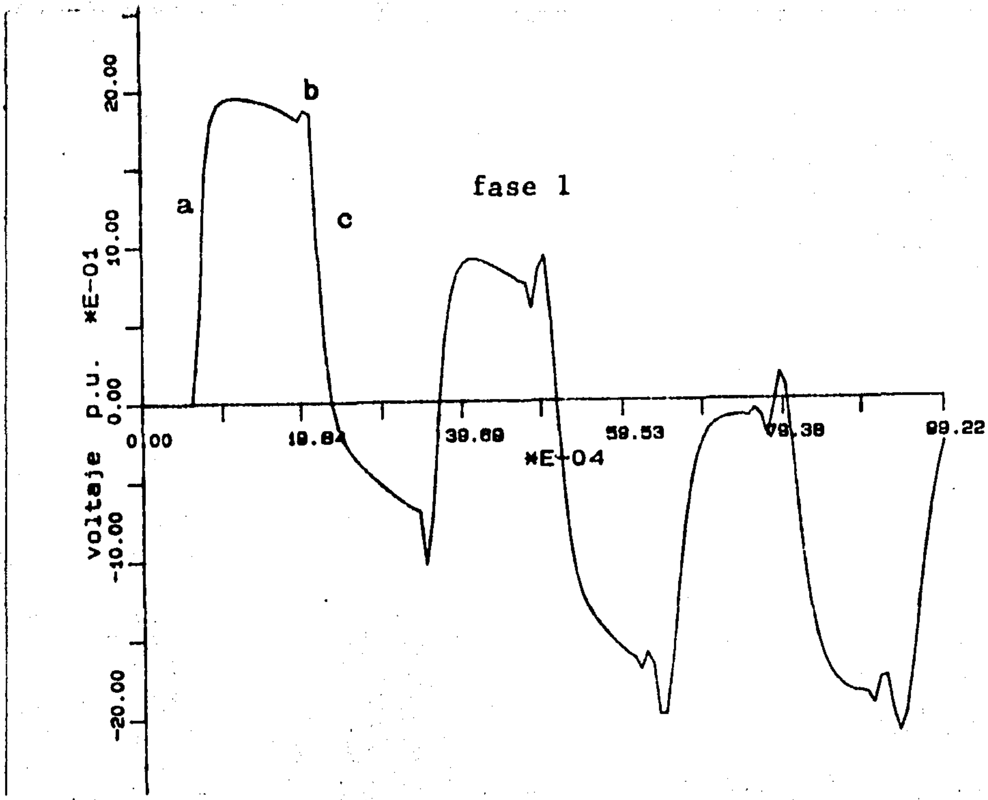


Fig. 6.26

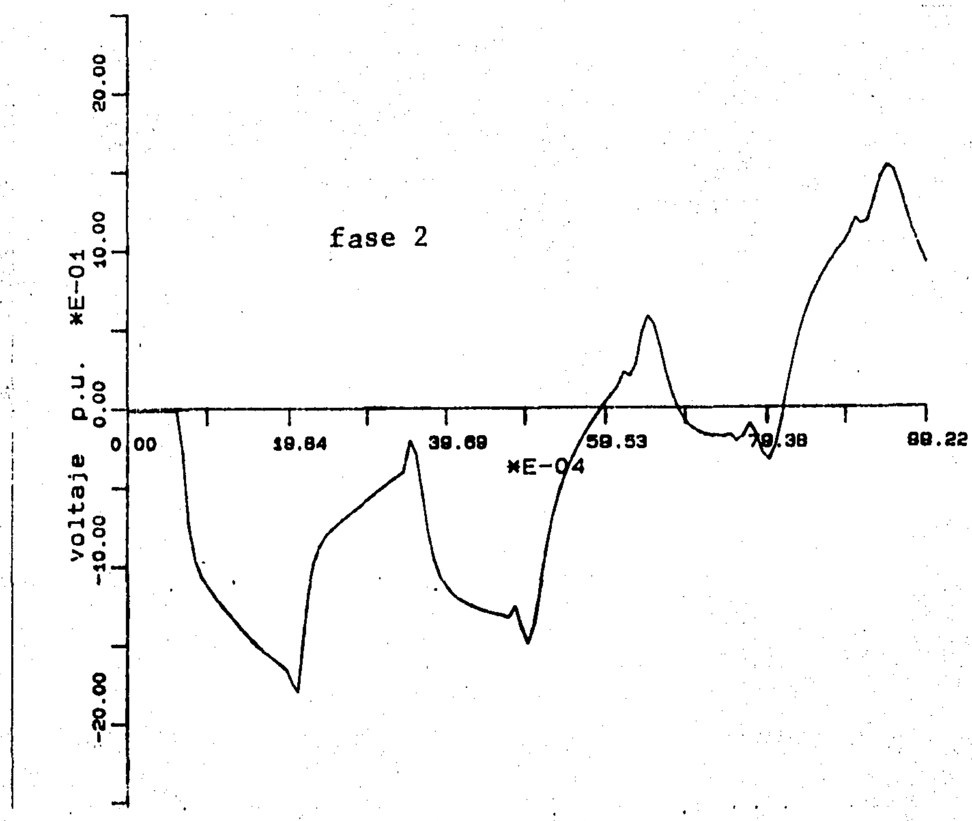
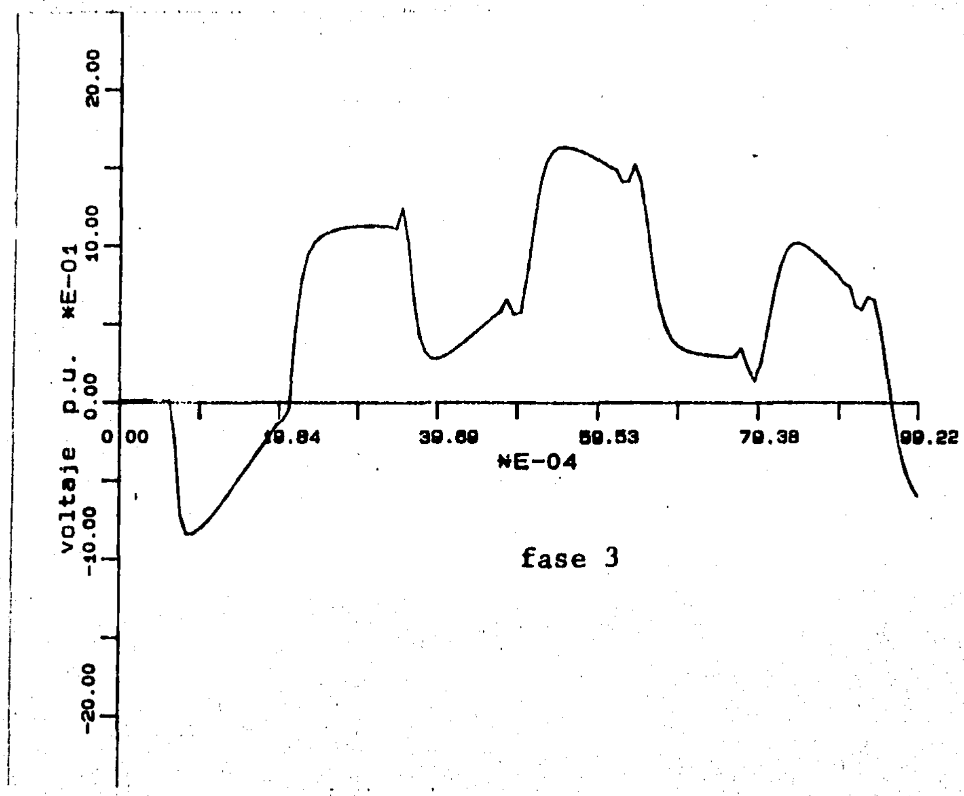


Fig. 6.27



20.00
10.00
0.00
-10.00
-20.00
voltaje p.u. *E-01
0.00
19.84
39.69
59.53
79.38
99.22
*E-04
fase 3

Fig. 6.28

CASO 5. Cierre secuencial con bus infinito.

La fase 1 cierra al voltaje de pico en t=0, seguida por la fase 2 en t=3 mseg. y despues por la fase 3 en t=5 mseg. En la fig 6.29 se muestran los voltajes en el extremo emisor y en las figuras 6.30, 6.31 y 6.32 los voltajes de las fases 1, 2 y 3 respectivamente del extremo receptor En la fig. 6.29 inmediatamente despues del cierre de la segunda fase, el voltaje que aparece en el conductor es el voltaje de la fuente de alimentación y ocurre lo mismo con el cierre de la tercera fase.

En el extremo emisor de la línea, como el segundo polo cierra a un voltaje negativo, la aplicación re
este voltaje tiene influencia en el voltaje inducido de la tercera fase. La energización de la segunda y tercera fase no tiene efecto en las fases que ya esten energizadas por tratarse de un bus infinito.

El efecto del cierre del segundo polo será un voltaje inducido en la primera y en la tercera fase. Esto es tomado en cuenta correctamente por el método, como se ve en las respuestas en el extremo receptor de las figuras 6.30, 6.31 y 6.32. El efecto de la energización secuencial de las fases es el de provocar voltajes suplementarios inducidos que se ven como discontinuidades en las ondas.

En el extremo receptor de la línea, hay una casi duplicación del voltaje en la primera fase y despues de los apropiados tiempos de cierre este efecto también aparece en las otras fases. Los voltajes de la segunda y tercera fases, dependen en cierto grado de los voltajes inducidos existentes en los conductores flotantes antes del cierre de los polos.

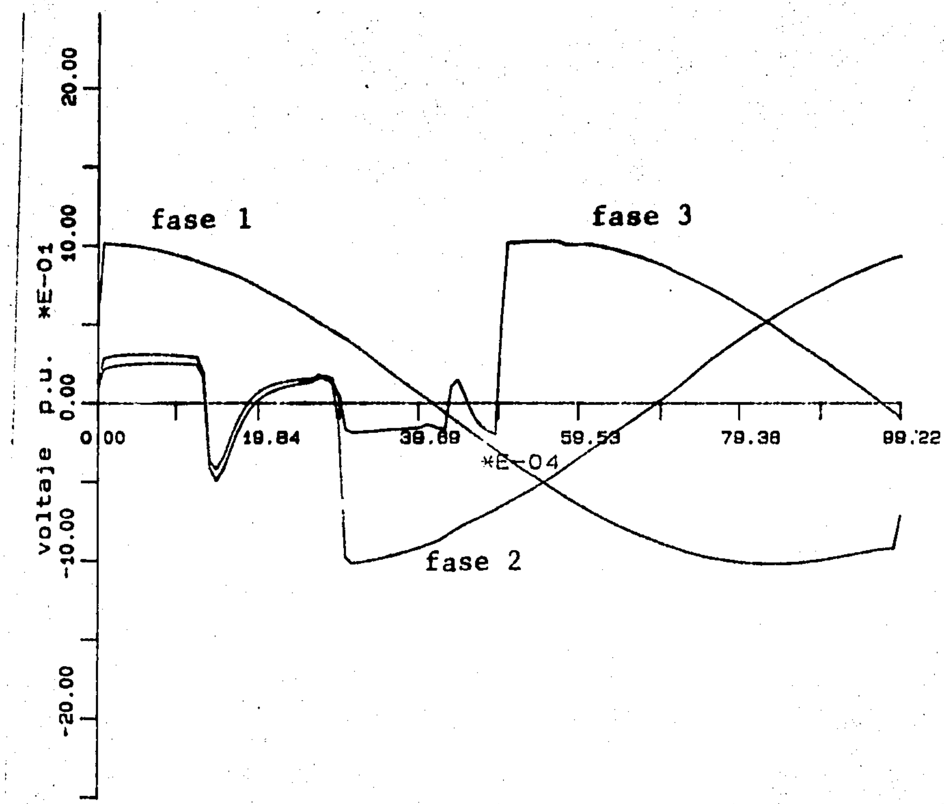


Fig. 6.29

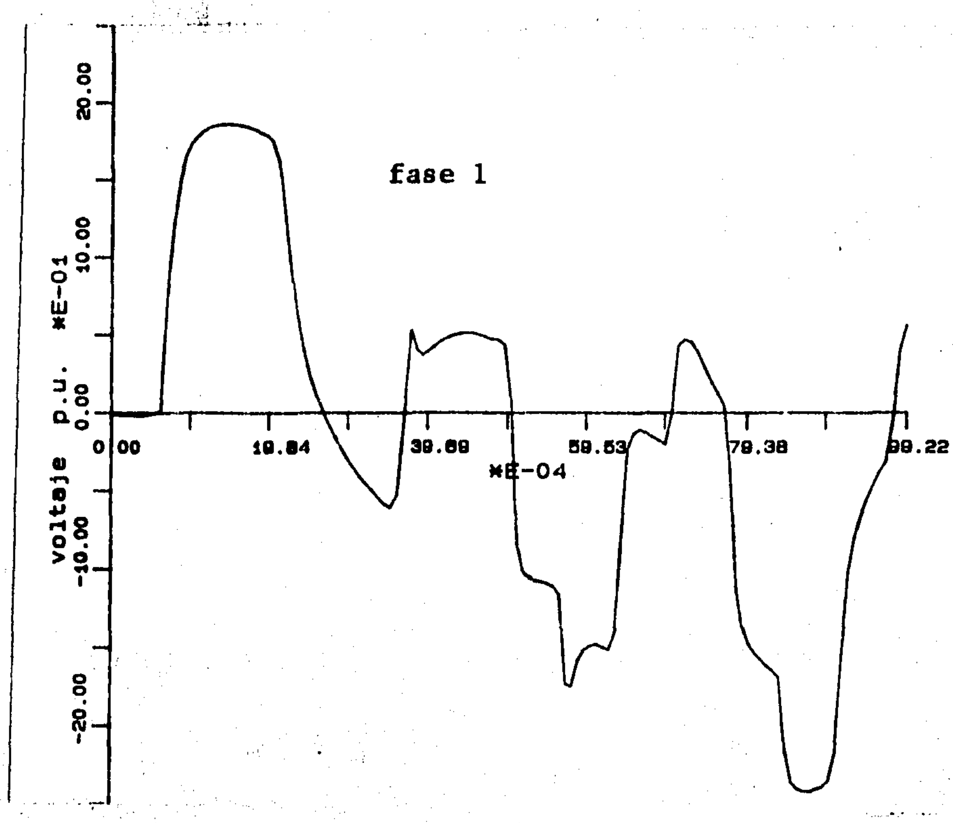


Fig. 6.30

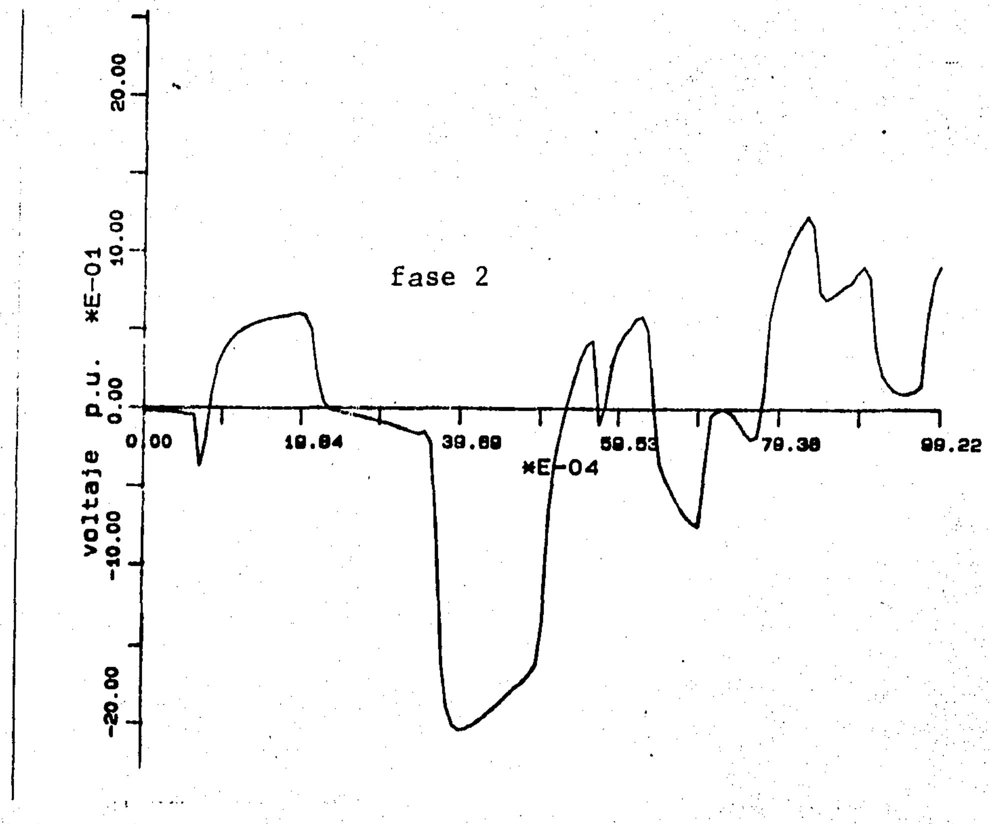


Fig. 6.31

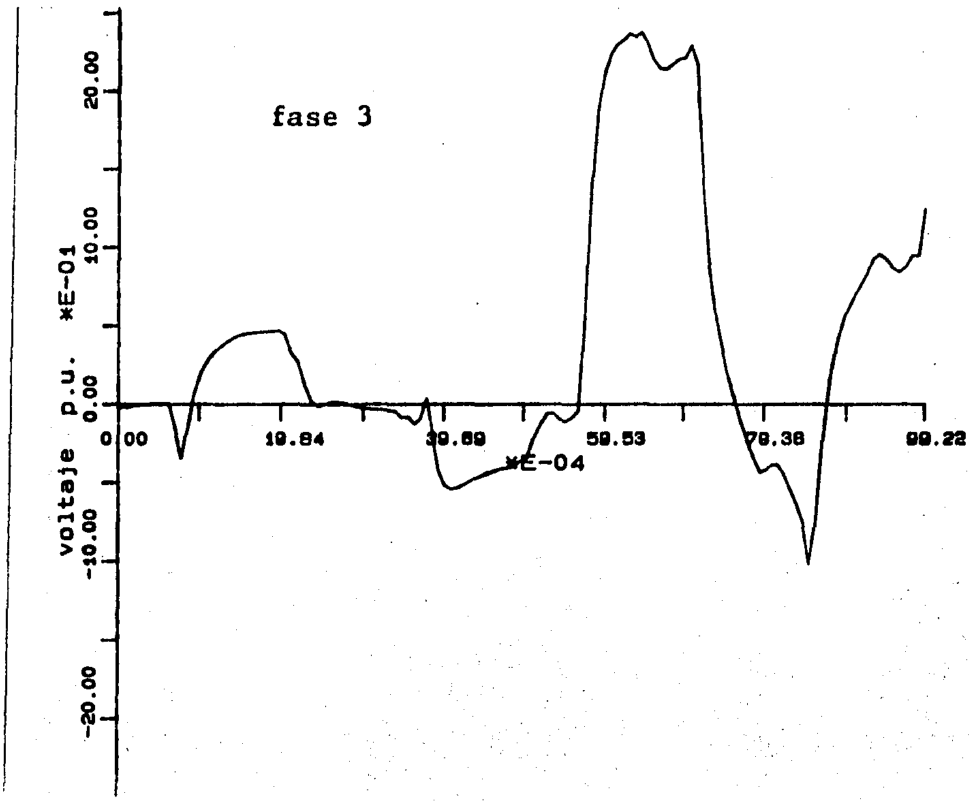

fase 3
voltaje p.u. *E-01
20.00
10.00
0.00
-10.00
-20.00
0.00
19.84
39.69
59.53
79.38
99.22
*E-04

Fig. 6.32

CASO 6. Cierre secuencial con fuente inductiva.

Los voltajes en el extremo emisor se muestran en la fig.6.33 y los voltajes en el extremo receptor en las figuras 6.34, 6.35 y 6.36. Siguiendo las interpretaciones dadas en los casos anteriores, se pueden describir facilmente las características de este caso, por lo que no se dará una discusión más detallada.

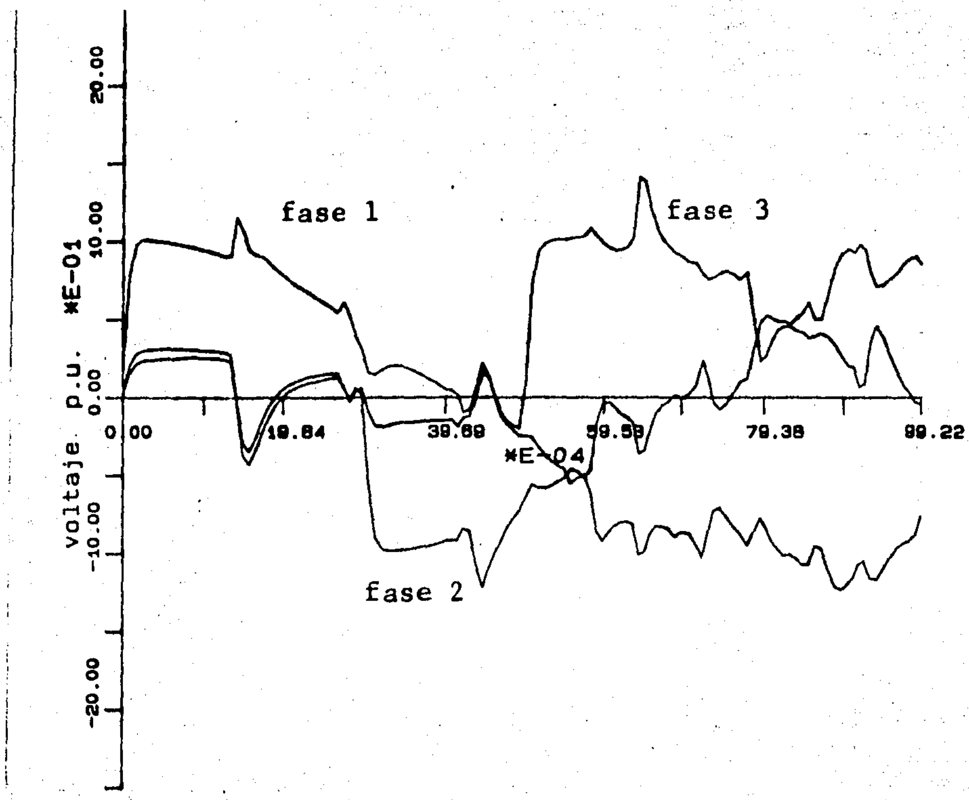


Fig. 6.33

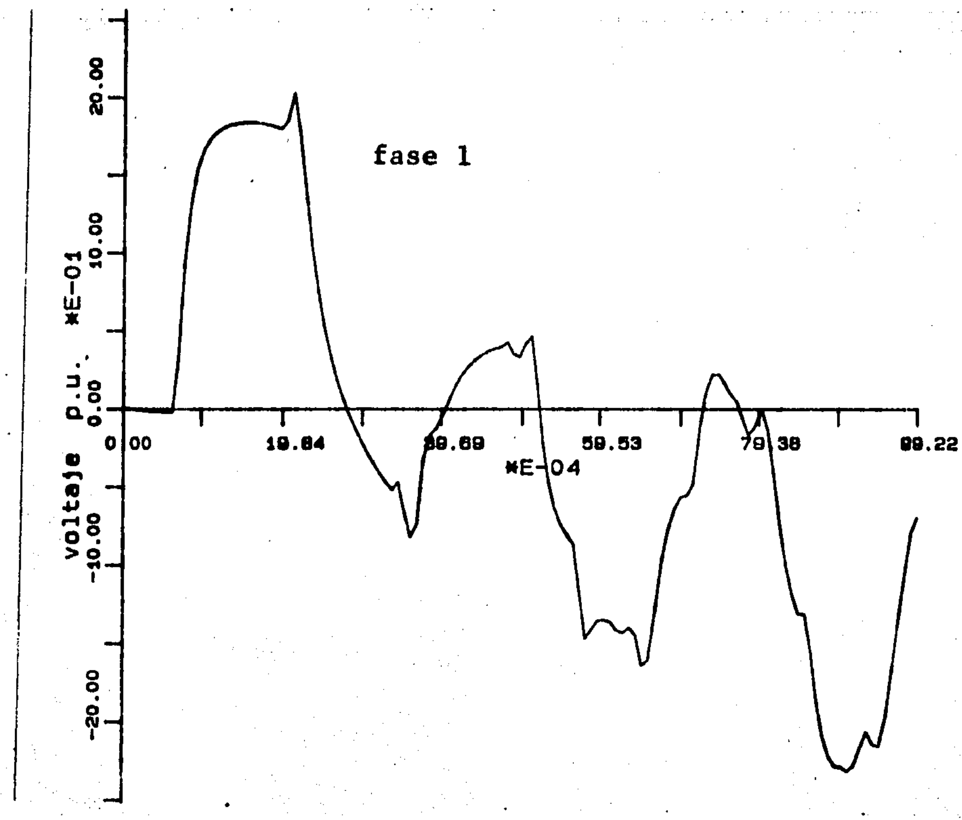


Fig. 6.34

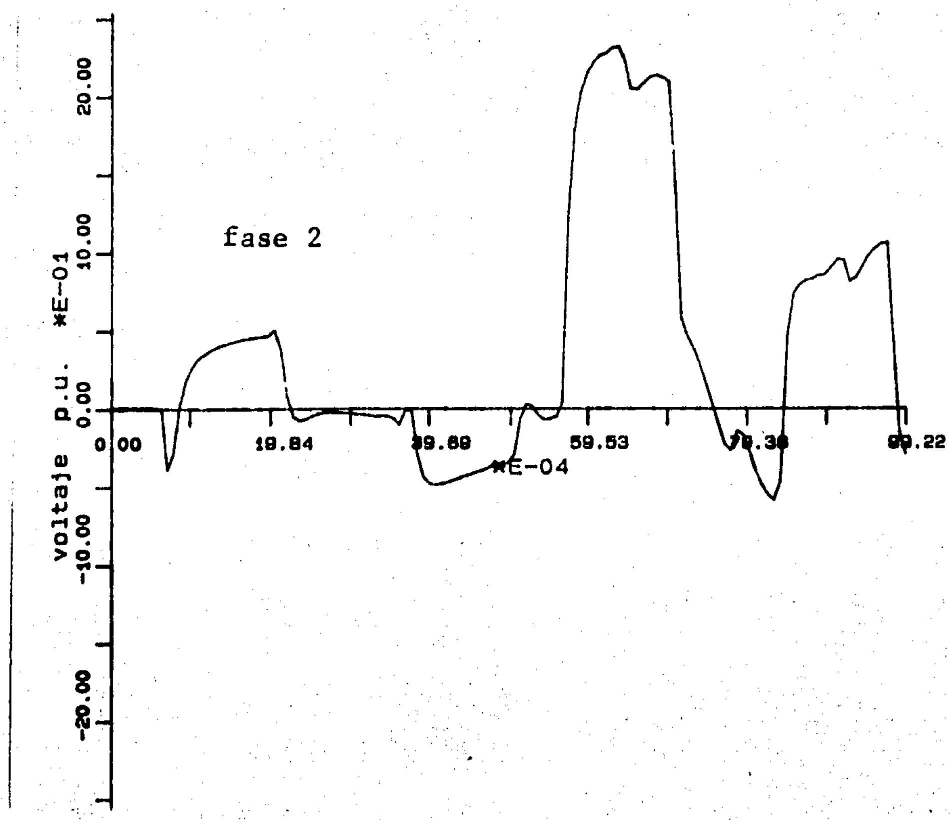


Fig. 6.35

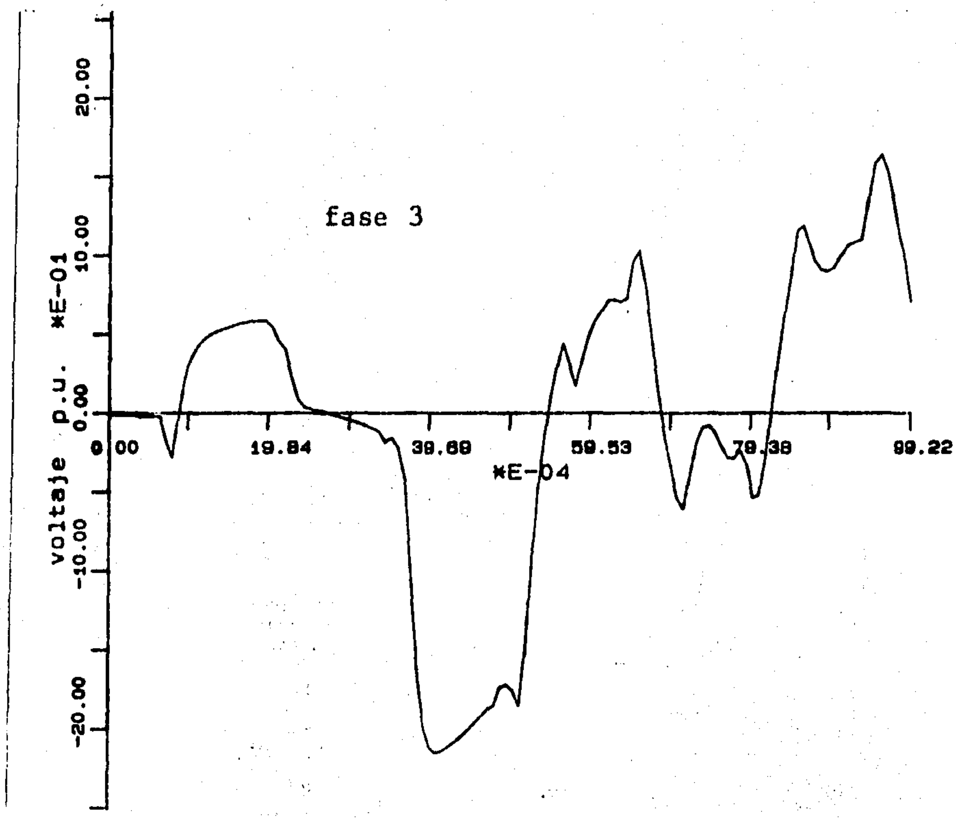

fase 3
voltaje p.u. *E-01
20.00
10.00
0.00
-10.00
-20.00
0.00
19.84
39.68
59.53
79.38
99.22
*E-04

Fig. 6.36

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES PARA ESTUDIOS FUTUROS

En este trabajo se ha presentado un método para el análisis en el dominio de la frecuencia de fenómenos transitorios en sistemas de transmisión de energía eléctrica. Se ha generalizado la teoría de propagación en sistemas de un solo conductor a el caso de sistemas multiconductores solucionando, en forma rigurosa , las ecuaciones matriciales de propagación por medio de la teoría de los modos naturales de propagación y empleando la transformada de Fourier para obtener la respuesta transitoria de los sistemas en el dominio del tiempo a partir de la respuesta en frecuencia.

Se han expuesto los diferentes aspectos teóricos necesarios para la aplicación del método; tales como el cálculo de parámetros eléctricos y modales de líneas de transmisión; modelado de líneas, elementos de parámetros concentrados y de transposiciones; empleo de la transformada modificada de Fourier y de las funciones "ventana" para disminuir los errores originados por la evaluación numérica de la transformada integral de Fourier convencional.

Este método tiene la ventaja inherente, de que las -- rutinas para computadora digital desarrolladas pueden ser u tilizadas tanto para estudios en estado estable como para estudios de fenómenos transitorios.

Se ha presentado la forma de analizar problemas lineales, como la energización monopolar y la energización simul tanea, así como el procedimiento para extender esta teoría al manejo de problemas no lineales, en especial al caso - de la energización simultanea de lineas de transmisión.

El método presenta limitaciones en tiempo de cómputo cuando se analizan problemas no lineales, pues para cada cambio en la configuración del sistema es necesario realizar el cálculo nuevamente en todo el espectro de frecuen-- cias.

La teoría presentada así como las rutinas para compudadora digital desarrolladas, sientan las bases para estudios futuros de varios problemas en el área del comportami ento dinámico de los sistemas de transmisión de energía - eléctrica, estos son :

1. Análisis y evaluación de transitorios electromagnéticos en cables subterraneos.

2. Análisis y evaluacion de transitorios originados por la ocurrencia de fallas.

3. Cálculo de la tensión transitoria de restablecimiento durante la apertura de interruptores.

4. Análisis y evaluación de fenómenos transitorios en sistemas de corriente directa.

5. Determinación de la distribución de ocurrencia de sobretensiones por energización de una línea en vacío, que es de gran importancia en estudios de coordinación de aislamiento. Con el método aquí desarrollado no es necesario calcular, para cada cierre aleatorio del interruptor, todo el transitorio, por lo que presenta ventajas sobre las técnicas en el dominio del tiempo.

A P E N D I C E

A. MATRICES

B. VECTORES Y ESPACIOS VECTORIALES

C. EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

D. FUNCIONES DE MATRICES

A. MATRICES

A.1. DEFINICIONES.

Empecemos definiendo el concepto de "matriz":

Una matriz de orden mxn es un arreglo de "m" renglones y "n" columnas que se denota por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

El elemnto aij de la matriz A puede ser un número real o un número complejo o una función de ciertas variables. Los **elementos "aij" para** i=j , **forman la diagonal principal** de la matriz.

A continuación listamos diversos tipos de matrices:

1. Matriz cuadrada. Una matriz cuadrada es **una** matriz que tiene el mismo número de columnas y de renglones.

2. Matriz transpuesta. La matriz que se obtiene por el intercambio de todos los renglones y columnas de una matriz **A, es llamada matriz transpuesta** y **se representa por** $\mathbf{A}^T$. **En este trabajo tambien utilizamos la notación** $\mathbf{A}_t$**, y se utiliza cualquiera de las dos notaciones indistintamente para dar mayor claridad a las expresiones matriciales.**

3. Matriz columna. Toda matriz de una sola columna recibe el nombre de "matriz columna" o "vector columna" y se representa por $\hat{A}$, $\hat{a}$ etc.

4. Matriz renglón. Una matriz de un solo renglón recibe el nombre de "matriz renglón" o "vector renglón" y se repreta por (A), (a), etc., además

$$(A) = \hat{A}_t \tag{A.2}$$

5. Matriz diagonal. Si los elementos "aij" de una matriz cuadrada son todos nulos para $i \neq j$ la matriz se conoce con el nombre de "matriz diagonal".

6. Matriz unidad. La matriz unidad de orden "n" es una matriz de nxn en la cual todos los elementos de la diagonal principal son igual a 1 y el resto son igual a cero.

7. Matriz cero o nula. La matriz cero o nula es una matriz en que todos sus elementos son igual a cero.

8. Matriz simétrica. Una matriz cuadrada cuyos elementos "aij" son simétricos con respecto a su diagonal principal, tal que $aij = aji$ se conoce como "matriz simétrica", y se puede probar que

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{A} \tag{A.3}$$

9. Matriz inversa. Sea **A** una matriz de orden "n" y **U** la matriz unidad tambien de orden "n", si existe una matriz **X** tal que

$$\mathbf{X}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{U} \tag{A.4}$$

se dice que **X** es la "matriz inversa" de **A**, Y se puede representar como $\mathbf{A}^{-1}$.

10. Matrices songulares y no singulares. Si **A** es una matriz cuadrada y existe la matriz $\mathbf{A}^{-1}$, entonces **A** es una matriz no singular y en caso contrario será una matriz singular.

11. Matriz transpuesta conjugada. La matriz transpuesta conjugada de una matriz **C** compleja, se obtiene al conjugar todos los elementos de $\mathbf{C}_t$ y se representa por $\mathbf{C}^H$.

12. Matriz hermitiana. Una matriz cuadrada compleja se llama hermitiana si

$$\mathbf{C}^H = \mathbf{C} \qquad \text{(A.5)}$$

13. Matrices unitarias y ortogonales. Una matriz **C** compleja de orden "n" se llama "unitaria" si

$$\mathbf{C}^H = \mathbf{C}^{-1} \qquad \text{(A.6)}$$

Una matriz unitaria con elementos todos reales se llama "ortogoanl", y se cumple que

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{R}^{-1} \qquad \text{(A.7)}$$

14. Semejanza. Se dice que una matriz **A** es semejante a otra matriz **B** si existe una matriz **C** no singular tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C}^{-1} \qquad \text{(A.8)}$$

A.2. TEOREMAS UTILES SOBRE MATRICES.

1. Potencias positivas de una matriz cuadrada

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{A}\,\mathbf{A}\,\ldots\,\mathbf{A}\ , \text{ hasta "n" factores} \qquad \text{(A.9)}$$

2. potencias negativas de una matriz cuadrada

$$\mathbf{A}^{-n} = (\mathbf{A}^{-1})^n \qquad \text{(A.10)}$$

3. Reglas para las matrices transpuestas

$$(\mathbf{B}\ \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T\ \mathbf{B}^T \qquad \text{(A.11)}$$

$$(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C})^T = \mathbf{C}^T\ \mathbf{B}^T\ \mathbf{A}^T \qquad \text{(A.12)}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \qquad \text{(A.13)}$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} \qquad \text{(A.14)}$$

4. Ley distributiva

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \qquad \text{(A.15)}$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})\ \mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA} \qquad \text{(A.16)}$$

5. Inversa de un producto

$$(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\ \mathbf{B}^{-1}\ \mathbf{A}^{-1} \qquad \text{(A.17)}$$

6. Inversa transpuesta

$$(\mathbf{A}^{-1})_t = (\mathbf{A}_t)^{-1} \tag{A.18}$$

7. Reglas para las matrices transpuestas conjugadas

$$(\mathbf{A}^H)^H = \mathbf{A} \tag{A.19}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H \tag{A.20}$$

$$(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C})^H = \mathbf{C}^H\ \mathbf{B}^H\ \mathbf{A}^H \tag{A.21}$$

$$(\mathbf{A}^H)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^H \tag{A.22}$$

8. Funciones de matrices diagonales

Para encontrar cualquier función de una matriz diagonal, basta con encontrar la función de cada uno de sus elementos

$$f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} f(a_{11}) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & f(a_{nn}) \end{bmatrix}$$

---(A.23)

B. VECTORES Y ESPACIOS VECTORIALES

Un vector de orden "n" es una "n-upla" ordenada de elementos que pueden ser números reales o complejos, o funciones de alguna variable. En este trabajo llamaremos vectores a las matrices de orden nx1 que rigurosamente son vectores columna y a los vectores reglón, que son matrices de 1xn los consideraremos como vectores transpuestos. En general representaremos a los vectores por $\hat{X}, \hat{x}$, etc.

Independencia lineal.

Se dice que un número "m" de vectores son linealmente independientes si para la igualdad

$$c_1\hat{v}_1 + c_2\hat{v}_2 + \ldots + c_m\hat{v}_m =$$

los escalares $c_1, \ldots, c_m$ son todos igual a cero. En caso contrario se dice que los vectores son linealmente dependientes.

Espacio vectorial.

Un espacio vectorial es un conjunto de vectores junto con reglas para la suma vectorial y para la multiplicación por escalares; la suma y la multiplicación deben de producir vectores que pertenescan al mismo conjunto y se deben de satisfacer las condiciones siguientes

1. $\hat{x} + \hat{y} = \hat{y} + \hat{x}$

2. $\hat{x} + (\hat{y} + \hat{z}) = (\hat{x} + \hat{y}) + \hat{z}$

3. Existe un vector "cero" único denotado por "$\hat{0}$", tal que

$$\hat{x} + \hat{0} = \hat{x} \text{ , para cualquier } \hat{x}$$

4. Para todo vector $\hat{x}$ existe un vector $-\hat{x}$ único, tal que

$$\hat{x} + (-\hat{x}) = \hat{0}$$

5. $1\,\hat{x} = \hat{x}$

6. $c_1c_2\hat{x} = c_1\,(c_2\hat{x})$

7. $c\,(\hat{x} + \hat{y}) = c\hat{x} + c\hat{y}$

8. $(c_1 + c_2)\,\hat{x} = c_1\hat{x} + c_2\hat{x}$

donde $\hat{x}, \hat{y}$ y $\hat{z}$ son cualesquiera vectores del conjunto y c_1, c_2 y c son escalares.

Combinación lineal.

Sean $\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_n$ vectores de un espacio vectorial y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ escalares, el vector

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{v}_j = c_1\hat{v}_1 + \ldots + c_n\hat{v}_n \tag{B.2}$$

se llama "combinación lineal" de $\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_n$ con coeficientes $c_1, \ldots, c_n$.

Base de un espacio vectorial.

Un conjunto de vectores $\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n$ general o expanden un espacio vectorial si cualquier vector que pertenesca a dicho espacio, puede ser representado como una combinación lineal de ellos. Si además el conjunto de vectores $\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n$ son linealmente independientes, se dice entonces que forman una base del espacio vectorial. Al número de vectores que tienen las bases de un espacio vectorial se le llama "dimensión" del espacio vectorial

Producto interno y ortogonalidad de vectores.

El producto interno entre dos vectores complejos se define como

$$\hat{x}^H \hat{y} = \hat{x}_1^* \hat{y}_1 + \ldots + \hat{x}_n^* \hat{y}_n \qquad (B.3)$$

donde

$\hat{x}^H$ es el vector transpuesto conjugado de $\hat{x}$.

si $\hat{x}^H \hat{y} = \hat{0}$ se dice que $\hat{x}$ y $\hat{y}$ son ortogonales entre sí.

La longitud de un vector $\hat{x}$, denotada por $\|\hat{x}\|$ se define como

$$\|\hat{x}\| = (\hat{x}^H \hat{x})^{1/2} \qquad (B.4)$$

Si un conjunto de vectores $\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n$ cumple con

$$\hat{x}_i^H \hat{x}_j = \begin{cases} \| \hat{x}_i \|^2 & \text{si} \quad j=i \\ \hat{0} & \text{si} \quad j \neq i \end{cases} \tag{B.5}$$

el conjunto es ortogonal. Si $\|\hat{x}\|^2 = 1$ para los "n" vectores se trata de un conjunto ortonormal y si el conjunto es una base del espacio vectorial se dice que es una base ortogonal si $\|x_i\|^2 \neq 1$, o una base ortonormal si $\| x_i\|^2 =1$.

Transformación lineal.

Sean W y V dos espacios vectoriales, sin que sea necesario que sean diferentes. La función $T : W \rightarrow V$, se llama transformación lineal si

$$T(c_1\hat{w}_1 + c_2\hat{w}_2) = c_1T(\hat{w}_1) + c_2T(\hat{w}_2) \tag{B.6}$$

donde

$$T(\hat{w}_1) = \hat{v}_1 \quad y \quad T(\hat{w}_2) = \hat{v}_2$$

para vectores cualesquiera $\hat{w}_1$ y $\hat{w}_2$ en W, $\hat{v}_1$ y $\hat{v}_2$ en V y escalares cualesquiera c_1 y c_2 .

C. EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

Sea **A** una matriz de nxn y $\hat{x}$ un vector de orden "n". Si **A** multiplica a $\hat{x}$, la operación puede considerarse como una transformación del vector $\hat{x}$ en un nuevo vector $\mathbf{A}\hat{x}$. La transformación producida por la matriz **A** cumple con la siguiente propiedad

$$\mathbf{A}(b\hat{x} + c\hat{y}) = b(\mathbf{A}\hat{x}) + c(\mathbf{A}\hat{y}) \qquad (C.1)$$

para cualesquiera vectores $\hat{x}$ y $\hat{y}$, y escalares b y c . De acuerdo con (C.1) podemos decir que una matriz conduce a una transformación lineal.

En general los vectores $\hat{x}$ y $\mathbf{A}\hat{x}$ tienen diferentes módulos y dirección, pero existen ciertos vectores que al aplicarles la transformación definida por **A**, sólo cambia su módulo pero no su dirección, esto es, se cumple que

$$\mathbf{A}\,\hat{x} = \lambda\,\hat{x} \qquad (C.2)$$

donde λ es un escalar.

Cuando se cumple (C.2) se dice que $\hat{x}$ es un vector característico", "vector propio" o "eigenvector" de **A**, y que corresponde al "valor característico", "valor propio" o "eigenvalor" λ .

Determinemos el escalar λ , de (c.2)

$$\lambda\hat{x} - \mathbf{A}\hat{x} = 0$$

factorizando $\hat{x}$

$$(\lambda\mathbf{U} - \mathbf{A})\ \hat{x} = 0 \qquad (C.3)$$

Para que (C.3) tenga una solución diferente de cero se debe cumplir que

$$\det(\lambda\mathbf{U} - \mathbf{A}) = p(\lambda) = 0 \qquad (C.4)$$

A la matriz $(\lambda\mathbf{U} - \mathbf{A})$, se le conoce como "matriz característica" de **A**. El determinante $\det(\lambda\mathbf{U} - \mathbf{A})$, es llamado - "función característica" o "polinomio característico" de **A**. La ecuación $p(\lambda) = 0$ es la "ecuación característica" de **A**. El polinomio $p(\lambda)$ es un polinomio en λ de grado "n", y la ecuación característica tiene la forma

$$p(\lambda) = \lambda^{n} + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0 \qquad (C.5)$$

De la ec.(C.5), es aparente que alguna de las raices de la ecuación es el escalar λ . En realidad, las "n" raices son eigenvalores de **A**, y para todas y cada una de ellas se puede encontrar una solución para la ec.(C.3). Podemos entonces escribir

$$(\lambda_i\mathbf{U} - \mathbf{A})\ \hat{x} = 0 \quad , i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (C.6)$$

$$\mathbf{A}\, x_i = \lambda_i\, \hat{x}_i \tag{C.7}$$

donde

$\hat{x}_i$ es el eigenvector de **A** asociado al eigenvalor λ_i .

MATRIZ MODAL DE **A**.

Sea **M** la matriz formada por los "n" eigenvectores $\hat{m}_i$ de **A**, de la siguiente manera

$$\mathbf{M} = (\hat{m}_1,\ \hat{m}_2,\ \ldots,\ \hat{m}_n) \tag{C.8}$$

esto es, las columnas de **M** son los eigenvectores de **A**. A la matriz **M** se le conoce como "matriz modal" .

Supongamos que **A** es de 2x2, entonces **A** tendrá dos eigenvalores (λ y λ') y dos eigenvectores ($\hat{m}$ y $\hat{m}'$). Para λ y $\hat{m}$ se cumple que

$$\mathbf{A}\, \hat{m} = \lambda\, \hat{m} \tag{C.9}$$

expandiendo

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \tag{C.10}$$

desarrollando

$$\begin{aligned} A_{11}m_1 + A_{12}m_2 &= \lambda m_1 \\ A_{21}m_1 + A_{22}m_2 &= \lambda m_2 \end{aligned} \tag{C.11}$$

Similarmente para λ' y m' tenemos que

$$
\begin{aligned}
A_{11}m_1' + A_{12}m_2' &= \lambda' \ m_1' \\
A_{21}m_1' + A_{22}m_2' &= \lambda' \ m_2'
\end{aligned}
\tag{C.12}
$$

Los sistemas (C.11) y (C.12) se pueden expresar conjuntamente en forma matricial como

$$
\begin{bmatrix} A_{11}m_1 + A_{12}m_2 & A_{11}m_1' + A_{12}m_2' \\ A_{21}m_1 + A_{22}m_2 & A_{21}m_1' + A_{22}m_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda m_1 & \lambda' m_1' \\ \lambda m_2 & \lambda' m_2 \end{bmatrix}
$$

--------------(C.13)

De las reglas de la multiplicación de matrices se puede comprobar que la relación matricial (C.13) se obtiene al desarrollar el siguiente sistema

$$
\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & m_1' \\ m_2 & m_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_1' \\ m_2 & m_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}
$$

----------------(C.14)

en donde vemos que la matriz

$$
\begin{bmatrix} m_1 & m_1' \\ m_2 & m_2' \end{bmatrix}
$$

es la matriz modal de **A** .

La ec.(C.14) se puede generalizar facilmente para una matriz **A** de orden nxn. La serie completa de ecuaciones de la forma (C.7) se puede escribir como

$$\mathbf{A}\,\mathbf{M} = \mathbf{M}\,\boldsymbol{\lambda} \tag{C.15}$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es la matriz diagonal de orden "n" de eigenvalores de **A** y **M** la matriz modal .

RELACION ENTRE LAS MATRICES MODALES DE **A** Y $\mathbf{A}_t$.

Para $\mathbf{A}_t$, su ecuación característica es

$$\det(\lambda\mathbf{U} - \mathbf{A}_t) = \det(\lambda\mathbf{U} - \mathbf{A})^T = 0$$

pues

$$(\lambda\,\mathbf{U}\,)^T = \lambda\,\mathbf{U}$$

entonces

$$\det(\lambda\mathbf{U} - \mathbf{A})^T = \det(\lambda\mathbf{U} - \mathbf{A}) = p(\lambda) = 0 \tag{C.16}$$

ya que el determinante de una matriz no se altera al transponer la matriz.

De (C.16) se concluye que las matrices **A** y $\mathbf{A}_t$ tienen los mismos eigenvectores.

Supongamos que el vector columna $\hat{n}_i$ es el eigenvector de $\mathbf{A}_t$ asociado al eigenvalor λ_i, por lo que se satisface la ecuación

$$A_t \ \hat{n}_i = \lambda \ \hat{n}_i \quad ,i=1,..,n \qquad (C.17)$$

La matriz modal de A_t es

$$\mathbf{N} = (\hat{n}_1 \ , \ \hat{n}_2 \ , \ \ldots \ , \ \hat{n}_n) \qquad (C.18)$$

y la serie completa de ecuaciones de la forma (C.17) se puede escribir como

$$\mathbf{A}_t \ \mathbf{N} = \mathbf{N} \ \boldsymbol{\lambda} \qquad (C.19)$$

además

$$\mathbf{A} \ \mathbf{M} = \mathbf{M} \ \boldsymbol{\lambda} \qquad (C.20)$$

multiplicando (C.20) por $\mathbf{M}^{-1}$ y (C.19) por $\mathbf{N}^{-1}$

$$\mathbf{M}^{-1} \ \mathbf{A} \ \mathbf{M} = \boldsymbol{\lambda} \qquad (C.21)$$

$$\mathbf{N}^{-1} \ \mathbf{A}_t \ \mathbf{N} = \boldsymbol{\lambda} \qquad (C.22)$$

transponinendo (C.22)

$$\mathbf{N}_t \ \mathbf{A} \ \mathbf{N}_t^{-1} = \boldsymbol{\lambda} \qquad (C.23)$$

comparando (C.21) y (C.23) tenemos que

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}_t^{-1} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{N} = \mathbf{M}_t^{-1} \qquad (C.24)$$

OBSERVACIONES RESPECTO A LA DIAGONALIZACION DE MATRICES

Antes de pasar a la siguiente sección agregaremos algunas observaciones importantes con respecto a los eigenvalores y eigenvectores de una matriz:

1. Si la matriz **A** no tiene valores propios repetidos, entonces los "n" vectores propios son linealmente independientes automaticamente.

2. La matriz modal **M** de **A** no es única. Un vector propio puede multiplicarse por una constante y seguir siendo un vector propio. Por lo tanto se pueden multiplicar las columnas de **M** por cualquier constante diferente de cero y sí producir una nueva matriz modal.

3. Una matriz cuadrada **A** de orden "n" es diagonalizable si y solo si tiene "n" eigenvectores linealmente independientes.

4. Algunas matrices con valores propios repetidos pueden diagonalizarse; otras son "defectuosas" y no es posible diagonalizarlas. El único criterio es ver si para una matriz de orden "n" existen "n" eigenvectores linealmente independientes.

D. FUNCIONES DE MATRICES

La teoría de funciones de matrices nos permite extender las reglas del algebra y cálculo para escalares a el caso de las matrices diagonalizables. Expondremos esta teoría a partir de dos ejemplos. Consideremos una matriz diagonalizable **A**, que esta asociada con su matriz de eigenvectores **M** y con su matriz de eigenvalores λ, de tal manera que

$$\lambda = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M} \tag{D.1}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} \lambda \mathbf{M}^{-1} \tag{D.2}$$

elevando al cuadrado (D.2)

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{M} \lambda \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \lambda \mathbf{M}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{M} \lambda^2 \mathbf{M}^{-1}$$

multiplicando por **A**

$$\mathbf{A}^2 \mathbf{A} = \mathbf{M} \lambda^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \lambda \mathbf{M}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{M} \lambda^3 \mathbf{M}^{-1}$$

elevando **A** a la n-ésima potencia

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{M} \lambda^n \mathbf{M}^{-1} \tag{D.3}$$

La función exponencial de una matriz se define como

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \tag{D.4}$$

desarrollando

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{U} + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \ldots\ldots$$

de acuerdo con (D.3)

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{M}\,\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}\,\boldsymbol{\lambda}\mathbf{M}^{-1} + \frac{\mathbf{M}\,\boldsymbol{\lambda}^2\mathbf{M}^{-1}}{2!} + \frac{\mathbf{M}\,\boldsymbol{\lambda}^3\mathbf{M}^{-1}}{3!} + \ldots$$

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{M}\,(\mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^2/2! + \ldots)\,\mathbf{M}^{-1}$$

de donde

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{M}\exp(\boldsymbol{\lambda})\,\mathbf{M}^{-1} \tag{D.5}$$

De los ejemplos anteriores podemos generalizar y definir una función cualquiera de una matriz diagonalizable como

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{M}\,f(\boldsymbol{\lambda})\,\mathbf{M}^{-1} \tag{D.6}$$

Como es una matriz diagonal, para evaluar cualquier función de **A** solo se evalúa la función en cada elemento de $\boldsymbol{\lambda}$ y se realiza el triple producto mostrado en (D.6) .

A continuación daremos algunas propiedades importantes de las funciones de matrices. Consideremos la misma matriz **A** :

1. El producto de dos diferentes funciones de una misma matriz es conmutativo

$$f_1(\mathbf{A})\ f_2(\mathbf{A}) = f_2(\mathbf{A})\ f_1(\mathbf{A}) \quad \text{(D.7)}$$

2. La suma algebraica de un escalar a la diagonal de la matriz **A** es equivalente a sumar el mismo escalar a la diagonal de λ

$$\mathbf{A} \pm s\,\mathbf{U} = \mathbf{M}(\lambda + s\,\mathbf{U})\ \mathbf{M}^{-1} \quad \text{(D.8)}$$

3. El producto de la matriz **A** por un escalar es equivalente a multiplicar λ por el mismo escalar

$$s\,\mathbf{A} = \mathbf{M}\ s\lambda\ \mathbf{M}^{-1} \quad \text{(D.9}$$

4. Si **A** y B son dos matrices que se diagonalizan por medio de la misma transformación, el producto de estas dos matrices es equivalente a multiplicar sus matrices de eigenvalores

si $\quad \mathbf{A} = \mathbf{M}\ \lambda_1\ \mathbf{M}^{-1}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{M}\ \lambda_2\ \mathbf{M}^{-1}$

entonces

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{M}\ \lambda_1\lambda_2\ \mathbf{M}^{-1} \quad \text{(D.10)}$$

B I B L I O G R A F I A

L I B R O S

1. H. Skilling
"Electric transmission lines"
Mc Graw Hill Co., 1951 .

2. W.H. Stevenson
"Análisis de sistemas eléctricos de potencia"
Mc Graw Hill Co., 1981.

3. Jacinto Viqueira L.
"Redes eléctricas"
Servicios y representaciones de Ingeniería", 1970 .

4. Westinghouse Electric Corporation
"Electrical transmission and distribution
reference book "

5. Robert A. Gabel, Richard A. Roberts
"Signal and linear circuits"
John Wiley & Sons, Inc., 1973

6. Kinariwalla B., Kuo F., Tsao N.
"Linear circuits and computation"
John Wiley & Sons, Inc., 1973

7. M. Abramowitz and J.A. Stegun
"Handbook of mathematical functions"
U.S. Dept. of Commerce, 1964

8. H. W. Dommel
"Line constants of overhead lines and underground cables "
Notes used for course E.E.553 at the University of British Columbia.

9. L.M. Wedephol
"Theory of natural modes in multiconductor transmission lines"
Notes used at the University of British Columbia, 1982 .

10. Zaborszki J., Rittenhouse J.W.
"Electric Power transmission"
The Rensseloer Bookstore-troy, N.Y.

11. L.R. Rabiner, B. H. Gold
"Theory and aplication of digital signal processing"
Prentice Hall, Inc., 1975

12. R.E. Ziemer ,W. H. Tranter
"Principles of Communications : Systems Modulation and Noise"
Houghton Mifflin Co., 1976

13. J. P. Bickford, N. Mullinex and J.R. Reed
"Computation of power-system transients"
IEE MONOGRAPH SERIES 18

14. D.L. Bentley, K. L. Cooke
"Linear algebra with differential equations"
Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1973

15. Gilbert Strang
"Algebra lineal y sus aplicaciones"
Fondo educativo interamericano, S.A.

16. Serge Lang
"Algebra lineal"
Fondo educativo interamericano, S.A.

ARTICULOS :

1. R. H. Galloway, W. B. Shorrocks, L. M. Wedephol
   "Calculation of electrical parameters for short and long polyphase transmission lines"
   Proc. IEE,vol.III, No.12, December 1964 .

2. H. B. Dwight
   "Skin effect in tubular and flat conductor"
   IEEE, vol.37, pt.II, 1918 .

3. W. A. Lewis, P. D. Tutle
   "The resistance and reactance of Aluminum conductors, Steel Reinforced"
   IEEE trans., vol. 77, February 1958

4. C. Dubanton
   "Cálculo aproximado de los parámetros primarios y secundarios de una línea de transmisión -valores homopolares- "
   E. D. F., Bulletin de la Direction des etudes et recherches No.1, 1969 serie B .

5. C. Gary
"Estudio de la propagación en altas frecuencias en líneas multiconductoras utilizando matrices complejas "
E.D.F. Bulletin de la direction des etudes et recherches, No. 3/4, 1976 serie B .

6. L. M. Wedephol
"Electrical characteristics of polyphase transmission systems with special reference to boundary-value calculations at power-line carrier frecuencies"
Proc. IEE, vol.112, No.11, November 1965

7. D. J. Wilcox
"Numerical Laplace transformation and inversion"
Int. J. Elect. Enging Educ., vol 15, pp.247-265
Manchester U.P., 1978

8. Day Sylvia J., Mullineux N., and Reed J.R.
"Developments in obtaining transient response using Fourier transforms"
Int. J. Elect. Engng. Educ.
Part I : vol.3, pp.501-506, 1965
Part II ; vol.4, pp.31-40, 1966
Part III : vol.6, pp.259-265,1968
Part IV : vol 10, pp.256-267, 1973.

9. Ametani A.
"The aplication of the fast Fourier transform to electrical transient phenomena"
Int., J. Elect. Engn Educ., vol 10, pp.277-287, 1973

10. L. M. Wedephol
"Multiconductor transmission lines, theory of natural modes and Fourier integral applied to transient analysis"
Proc. IEE, vol. 166, No.9, September 1969

11. L. M. Wedephol
"Transient analysis of multic[illegible] transmission lines with special reference to nonlinear problems"
Proc. IEE, vol.117, No.5, May 1970

12. Hedman D.E.
"Propagation on overhead transmission lines : I-Theory of modal analysis "
IEEE trans. on Pas., March 1965, pp.200-205

13. Hedman D. E.
"Propagation on overhead transmission lines : II-earth conduction effects and practical results"
IEEE trans. on Pas., March 1965 ,pp.205-211

14. W. Derek Humpage and Kit-po Wong
"Electromagnetic transient analysis in EHV"
Proc. IEE, vol.70,No.4, April 1982

15. G. D. Bergland
"A guided tour of the fast Fourier transform"
IEEE Spectrum, vol.6,pp.41-52, July 1969

16. J. W. Cooley, P. A. W. Lewis, P. D. Welch
"Aplication of the fast Fourier transform to computation of Fourier integrals, Fourier Series, and Convolution Integrals"
IEEE Trans. Audio Electroacoustics, AU-15(2), 79-85(1967)

17. Cochran,Cooley,Favin,Helms, Kaenel,Lang, Malig,Nelson Rader and Welch.
"What is the Fast Fourier Transform?"
IEEE Trans. Audio Electroacoust.,vol.AU-15,pp. 45-55 June 1967

18. Cooley, Lewis and Welch
"Historical notes on the Fast Fourier Transform"
IEEE Trans. Audio Electroacoust.,pp.76-79 June 1967 .