2 ej.
32

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN ALGORITMO PARA TRANSVERSALES DE CARDINALIDAD MINIMA.

TESIS PROFESIONAL

ZEFERINO PARADA GARCÍA

MEXICO, D.F. 1986.

Indica.

CAPITULO III. Un par equicardinal.

CAPITULO IV. EL Algoritmo

Apéndice

Introducción.

En 1969 Younger conjeturó la existencia de una familia ajena de cortes dirigido con igual cardinalidad que una transversal de los cortes dirigidos en una digráfica. En su artículo [8] demostró un caso particular. Posteriormente Lucchesi y Younger lo probaron para cualquier digráfica [5], estableciendo el resultado como el teorema de Lucchesi y Younger. Ambos artículos omiten la forma de encontrar una familia ajena de cortes dirigidos y una transversal equicardenales; es de notarse que este hecho depende de la digráfica.

La finalidad de este trabajo es desarrollar un algoritmo que permita encontrar esta pareja equicardinal en las digráficas bipartitas dirigidas; para este caso, el resultado se sigue de un artículo debido a Mc.Whirter [7], que es anterior a [5].

El Capítulo I se dedica a los conceptos necesarios en digráficas para arribar a la relación minimax entre familias ajenas de cortes dirigidos y las transversales; relación que llevó a Younger a la conjetura mencionada. Algunos conceptos son importantes en este tema como la conexidad.

En el capítulo II se definen las digráficas bipartitas dirigidas y se da un criterio que reduce la cardinalidad de una transversal a otra, basado en una clase especial de trayectorias denominadas decrementales. Esto conduce al estudio de ciertas trayectorias hasta obtener las que son necesarias.

Una vez teniendo una transversal a la que no es posible cambiar por otra de cardinalidad menor, en el Capítulo III se menciona la forma de encontrar un par equicardinal de una familia ajena de cortes dirigidos y una transversal, por contracciones de subdigráficas en las cuales es verdadera la relación mini-max.

El Capítulo IV, con ayuda de Inducción sobre el número de vértices, se prueba algoritmicamente el Teorema de Lucchesi y Younger para las digráficas bipartitas dirigidas. Se muestran ejemplos utilizando el material expuesto.

En el Apéndice A estan los algoritmos en trayectorias que nos interesan los cuales llevan a las decrementales. Estos algoritmos son variaciones de uno muy conocido en Teoría de Gráficas; el de la trayectoria de longitud mínima entre un par de vértices, que puede consultarse en [2]. Además se da otro algoritmo para encontrar las subdigráficas que necesitamos contraer en Cap III.

Para mayor comprensión del Tema en el Apéndice B se muestra con detalle el Teorema de Lucchesi y Younger para digráficas, La demostración es debida a Lóvasz [4]. El Lector que llevó un curso de Gráficas y Juegos o de Teoría de Gráficas tendrá mejor perspectiva de la demostración y de todo el trabajo. En caso contrario se recomienda [1] y [3] sobre los conceptos de Teoría de Gráficas mencionados.

Finalmente deseo decir que este trabajo se basó en una serie de problemas propuestos por Younger resueltos por su servidor.

Zeferino Parada García

1986.

"La prueba no está en la maratón.
Sino desde que uno decide meterse
en la bronca y se pone los tenis
para prepararse en la montaña"

Rodolfo Gómez.

CAPITULO I

Conceptos Fundamentales

1.1. Digráficas.

1.1. Definición. Una digráfica D es una tripleta ordenada $(V(D), F(D), \psi_D)$ consistente de un conjunto finito no vacio $V(D)$ de vértices, un conjunto finito $F(D)$, ajeno de $V(D)$, de flechas y una función de incidencia ψ_D que asocia a cada flecha un par ordenado de vértices de D. Si α es una flecha y u, v son los vértices tales que $\psi_D(\alpha) = (u, v)$, u y v son llamados los extremos de α, u será el extremo positivo y v el extremo negativo; en ocasiones los denotaremos como $p\alpha$ y $n\alpha$ respectivamente.

Un ejemplo servirá para aclarar la definición 1.1.

Ejemplo 1.

Sea $D = (V(D), F(D), \psi_D)$

donde

$$V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

$$F(D) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9\}$$

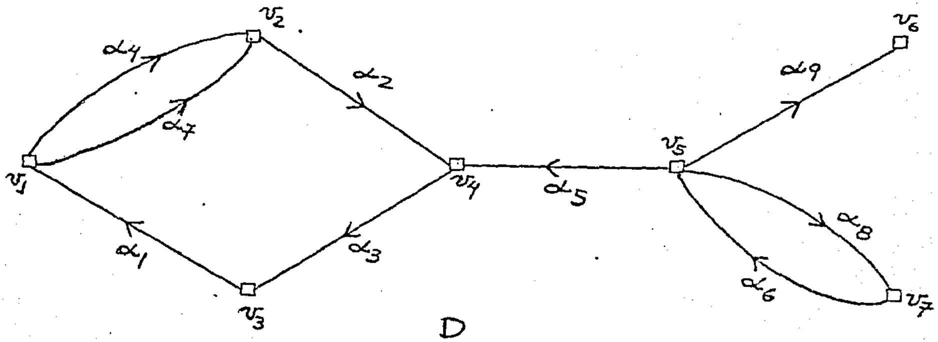
y ψ_D esta definida por

$\psi_D(\alpha_1) = (v_3, v_1)$ $\psi_D(\alpha_4) = (v_1, v_2)$ $\psi_D(\alpha_7) = (v_1, v_2)$

$\psi_D(\alpha_2) = (v_2, v_4)$ $\psi_D(\alpha_5) = (v_5, v_4)$ $\psi_D(\alpha_8) = (v_5, v_7)$

$\psi_D(\alpha_3) = (v_4, v_3)$ $\psi_D(\alpha_6) = (v_7, v_5)$ $\psi_D(\alpha_9) = (v_5, v_6)$.

Una digráfica tiene una representación geométrica, donde los vértices son puntos en el plano y cada flecha es un segmento ó arco que une a sus extremos con una flecha apuntando al extremo negativo. La digráfica del ejemplo 1 se representa en la figura 1.1.



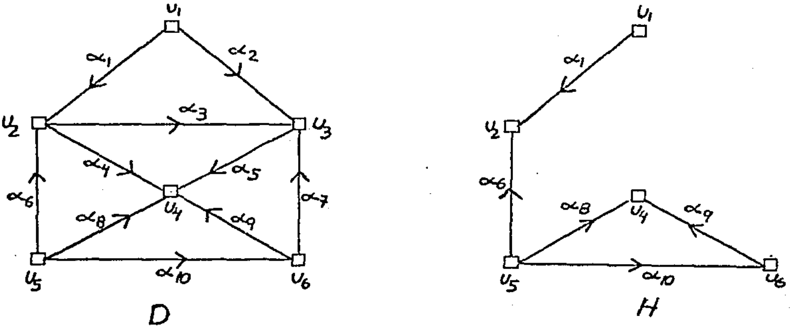
D

fig. 1.1.

En adelante una digráfica se considera como su representación geométrica.

<u>1.2. Definición</u>. Una <u>subdigráfica</u> de una digráfica D, es una digráfica H, donde $V(H) \subset V(D)$, $F(H) \subset F(D)$ y ψ_H es la restricción de ψ_D sobre H.

De entre las subdigráficas son importantes para efectos de este trabajo <u>las inducidas</u> por subconjuntos de vértices. Estas se forman al considerar como conjunto



Una subdigráfica de D
fig. 1.2.

de vértices un subconjunto no vacío de vértices de la digráfica, digamos V', y conjunto de flechas aquellas de la digráfica con ambos extremos en V'. La denotaremos como $D[V']$. La figura 1.3. muestra un ejemplo de una digráfica inducida por el conjunto de vértices $V' = \{v_1, v_5, v_6, v_7\}$.

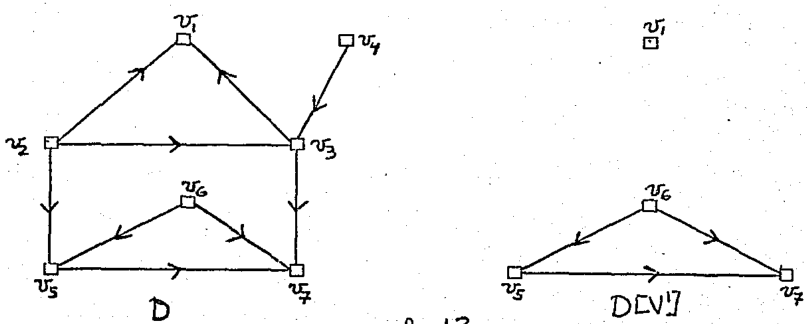


fig. 1.3.

1.2. Cofronteras, Conexidad y Cortes.

<u>1.3. Definición.</u> En una digráfica D <u>la función cofrontera</u> se define como:

$$T: 2^{V(D)} \longrightarrow 2^{F(D)}$$

a cada subconjunto de vértices W le asigna el conjunto de flechas $T(W)$ cuyos elementos tienen un extremo en W y el otro en W^c.

T no es una función inyectiva ya que $T(W)=T(W^c)$. Por vacuidad $T(\phi)=\phi$ y de aquí $T(V(D))=\phi$. Como ejemplo al concepto que acabamos de definir consideremos la digráfica de la figura 1.4.

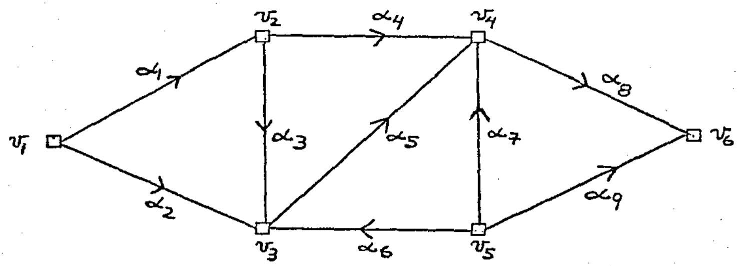


fig. 1.4

De aquí tenemos que

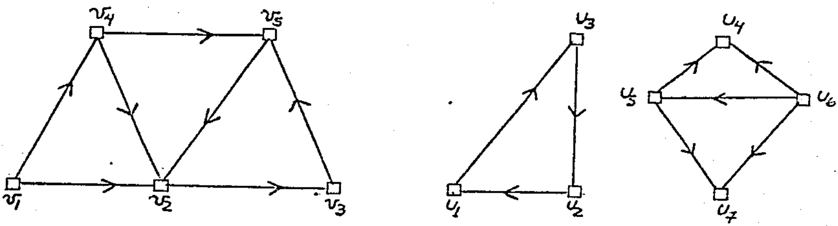
$$T(\{v_5\}) = \{\alpha_6, \alpha_7, \alpha_9\} \qquad T(\{v_1, v_2, v_3\}) = \{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$$

$$T(\{v_6\}) = \{\alpha_8, \alpha_9\}$$

<u>1.4. Definición.</u> La digráfica D <u>es conexa</u>, si para todo subconjunto propio no vacío W de V(D) se tiene que $T(W) \neq \emptyset$.

Si una digráfica no es conexa, diremos que es <u>disconexa</u>.

Las digráficas que constan de un sólo vértice son conexas.



Digráfica conexa Digráfica disconexa.

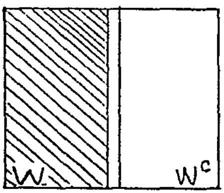
fig. 1.5

Si una digráfica es disconexa a partir de la definición 1.4. tiene subdigráficas conexas, la caracterización de las subdigráficas máximas con esta propiedad es de la siguiente forma:

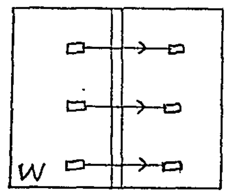
<u>1.5. Definición</u>. Una <u>componente</u> <u>conexa</u> de la digráfica D es una subdigráfica inducida por un subconjunto de vértices V' tal que $D[V']$ es conexa y $\Gamma(V') = \phi$

De la definición de una digráfica disconexa tenemos que T no es inyectiva (salvo complementos), sin embargo T cumplirá esta propiedad cuando la digráfica sea conexa.

Cuando se haga referencia al valor de la función cofrontera del subconjunto de vértices W usaremos el siguiente diagrama.

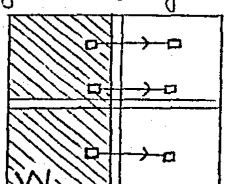


El conjunto W y su complemento

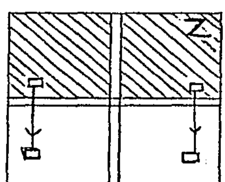


La cofrontera $T(W)$

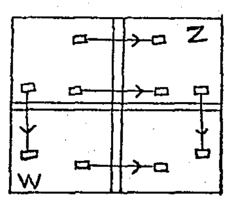
Cuando mencionemos dos cofronteras, $T(W)$ y $T(Z)$ usaremos el siguiente diagrama.



El conjunto W y $T(W)$



EL conjunto Z y $T(Z)$



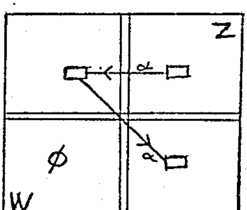
$T(W)$ y $T(Z)$

1.1. Teorema. Sea D una digráfica conexa, $T(W)$ y $T(Z)$ cofronteras en D; si $T(W)=T(Z)$ entonces $W=Z$ ó $W=Z^c$.

Demostración.

Si las cofronteras son vacías y como D es conexa los únicos subconjuntos que lo cumplen son el vacío y el conjunto de vértices, en tal caso el resultado se da.

Supongamos que las cofronteras son no vacías y que $W \neq Z$ y $W \neq Z^c$. Entre W y Z no existe contención alguna; ya que si por ejemplo $W \subset Z$, como ambos conjuntos son distintos sucede que $Z-W$ es no vacío, siendo D conexa tenemos $T(Z-W) \neq \phi$. Si α es una flecha de esta cofrontera existen dos posibilidades, fig. 1.6.



Casos de la flecha α

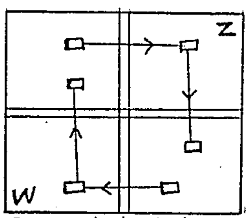
fig. 1.6.

(i) $\alpha \in \Gamma(Z) - \Gamma(W)$

(ii) $\alpha \in \Gamma(W) - \Gamma(Z)$.

En ambos casos $\Gamma(Z) \neq \Gamma(W)$, lo cual por hipótesis no sucede.

También W y Z son ajenos; ya que si $W \cap Z \neq \phi$, por lo anterior se tiene que $W-Z$ y $Z-W$ son no vacíos de donde su unión, llamémosla, $W \triangle Z$ es no vacía y como D es conexa $\Gamma(W \triangle Z) \neq \phi$, ahora bien; si $\beta \in \Gamma(W \triangle Z)$ suceden dos posibilidades, fig. 1.7.



Casos de la flecha β

fig. 1.7.

(i) $\beta \in \Gamma(W) - \Gamma(Z)$

(ii) $\beta \in \Gamma(Z) - \Gamma(W)$.

En cualquier caso $\Gamma(Z) \neq \Gamma(W)$, lo cual no puede suceder.

De lo anterior concluimos que

$$W \subset Z^c \qquad (1)$$

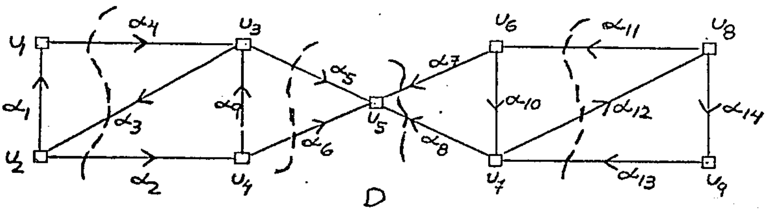
Como $T(W)=T(Z^c)$ y suponemos que $W \neq Z^c$, no existe contención alguna entre W y Z^c, en particular

$$W \not\subset Z^c$$

En ocasiones nos interesarán las cofronteras como el conjunto de flechas que las forman y en otras como el subconjunto de vértices que al aplicar la función T, nos dé las flechas de la cofrontera por tal motivo aplicaremos el término cofrontera y el símbolo T al conjunto de flechas que sean valor de la función T.

1.6. Definición. Un conjunto de corte es una cofrontera no vacía, cuyos subconjuntos propios no vacíos no son cofronteras.

La digráfica de la figura 1.8 muestra algunos de sus conjuntos de corte.



D

Conjuntos de corte en D.

fig. 1.8

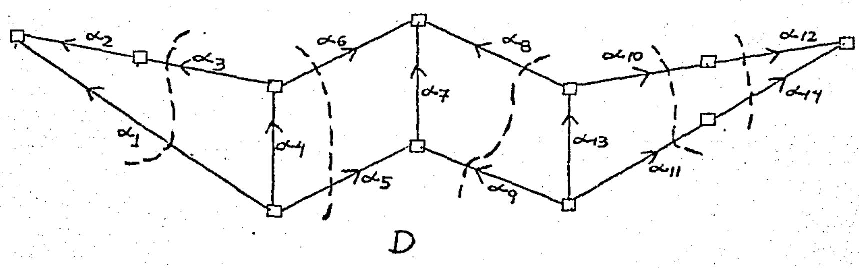
1.3. Cofronteras dirigidas y Cortes dirigidos.

1.7. Definición. La cofrontera $T(W)$ es dirigida si para toda $\alpha \in T(W)$, $p\alpha \in W$ ó $n\alpha \in W$. En el primer caso $T(W)$ es dirigida hacia adelante y en el segundo dirigida hacia atrás.

En una digráfica conexa D, si T_0 es una cofrontera dirigida no vacía, V^+T_0 es el subconjunto de vértices cuya cofrontera es T_0 y contiene los extremos positivos de cada flecha de T_0. De como se define el conjunto V^+T_0 también definimos $V^-T_0 = (V^+T_0)^c$. Por el Teorema 1.1. V^+T_0 y V^-T_0 estan univocamente definidos.

En adelante, a menos que se especifique lo contrario, trabajamos con digráficas conexas. Los resultados para éstas se aplican a cada componente conexa de una digráfica disconexa.

<u>1.8. Definición.</u> Un <u>conjunto de corte dirigido</u> es un conjunto de corte que es cofrontera dirigida.



Algunos cortes dirigidos en la digráfica D.

figura-1.9

El siguiente resultado es una condición necesaria y suficiente para que una cofrontera dirigida sea conjunto de corte dirigido.

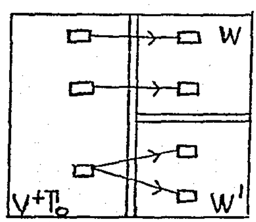
1.2. Teorema. Sea T_0 cofrontera dirigida no vacía en la digráfica conexa D.

T_0 es corte dirigido si y solo si $D[V^+T_0]$ y $D[V^-T_0]$ son conexas.

Demostración

Supongamos que $D[V^-T_0]$ es disconexa y sea $D[W]$ una componente conexa de ella además $W' = V^-T_0 - W$.

Como D es conexa $T(W) \neq \emptyset$ y si $\alpha \in T(W)$ tenemos que



La cofrontera T_0

fig. 1.10

$\alpha \in T_0$ y $n\alpha \in W$. fig.1.10; es decir $T(W)$ es cofrontera, también dirigida contenida en T_0. Estas mismas propiedades las cumple $T(W')$. Ambas cofronteras, $T(W)$ y $T(W')$ son ajenas y su unión es T_0. De donde T_0 no es conjunto de corte.
Concluimos que $D[V^-T_0]$ es conexa.
Analogamente probamos la conexidad de $D[V^+T_0]$.

Supongamos que T_0 no es conjunto de corte, sea T_* cofrontera no vacía contenida propiamente en T_0 y $W \subset V(D)$ tal que

$$T(W)=T_*$$

Como $\{V^+T_0, V^-T_0\}$ es una partición de $V(D)$ tenemos que

$$W \cap V^+T_0 \neq \emptyset \quad \text{o} \quad W \cap V^-T_0 \neq \emptyset.$$

s.p.g. supongamos que

$$W \cap V^+T_0 \neq \emptyset$$

Ahora bien si V^+T_0 no esta contenido en W como $D_1=D[V^+T_0]$ es conexa entonces $T_{D_1}(W \cap V^+T_0)$ es no vacia, de donde si $\beta \in T_{D_1}(W \cap V^+T_0)$ se tiene que $\alpha \in T_D(W) = T_*$, ya que ambos extremos de α estan en V^+T_0 fig. 1.11, tenemos

$$\alpha \notin T_0$$

Por lo cual $V^+T_0 \subset W$.

Claramente $W \neq V^+T_0$, la igualdad nos diría que $T_0 = T_*$.

Entonces

$$W \cap V^-T_0 \neq \emptyset$$

y de forma análoga concluimos que $V^-T_0 \subset W$.

Es decir $W = V(D)$ y $T_* = \emptyset$

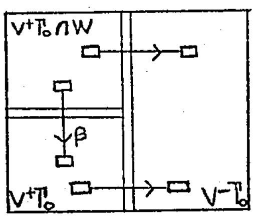


fig 1.11

Si una cofrontera dirigida no es corte dirigido, en la demostración del teorema 1.2, se dió una manera de descomponerla en cofronteras dirigidas ajenas. Este argumento nos lleva a establecer el siguiente resultado

1.3. Teorema. Una cofrontera dirigida es la unión de cortes dirigidos ajenos.

Demostración.

Usamos inducción sobre el número de flechas de la cofrontera

Si T_0 es una cofrontera dirigida y $|T_0| = 1$, claramente T_0 es corte dirigido.

Hipótesis de Inducción. Supongamos que si una cofrontera dirigida tiene menos de n flechas es la unión de cortes dirigidos ajenos.

Sea T_0 una cofrontera dirigida con n-flechas.

En caso que $D[V^+T_0]$ y $D[V^-T_0]$ sean conexas por el teorema 1.2. T_0 es corte dirigido.

Supongamos s.p.g que $D[V^-T_0]$ es disconexa, sea $D[W]$ una de sus componentes conexas y $W' = V - T_0 - W$. Como en la demostración del teorema 1.2. tenemos que $T(W)$ y $T(W')$ son cofronteras dirigidas no vacías y ajenas. Además su unión es T_0 y cada una de ellas tiene menos de n flechas, por la hipótesis de inducción cada cofrontera es la unión ajena de cortes dirigidos, todos estos cortes dirigidos son ajenos y su unión es T_0.

1.4. Transversales, una relación mini-max.

1.9. Definición. Un conjunto t de flechas en una digráfica D es una transversal de los cortes dirigidos de D si t intersecta a todos los cortes dirigidos no vacíos de D.

En la figura 1.12. se muestra una transversal de los cortes dirigidos de D formado por el conjunto de flechas $t=\{\alpha_1,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\}$

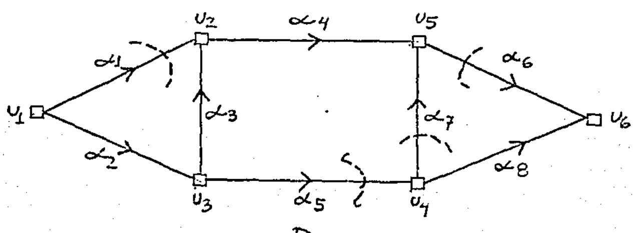


fig. 1.12.

En adelante a un transversal de los cortes dirigidos le llamaremos simplemente transversal. Trivialmente $F(D)$ es transversal en la digráfica D.

1.4. Teorema. Sea Δ una familia de cortes dirigidos ajenos dos a dos y t __ transversal entonces $|\Delta| \leq |t|$.

Demostración.

Sea $\Delta = \{T_1, \ldots, T_m\}$,

para $T_j \in \Delta$, $1 \leq j \leq m$ se tiene que $T_j \cap t \neq \emptyset$, sea $d_j \in T_j \cap t$.

Si $i \neq j$, $d_j \neq d_i$ ya que $T_j \cap T_i = \emptyset$.

Entonces $\{d_1, \ldots, d_m\} \subseteq t$ de donde

$$m = |\Delta| \leq |t|.$$

∎

1.1. Corolario. Sean Δ y t como en el teorema 1.4.

Si $|\Delta| = |t|$ entonces Δ es una familia máxima en cardinalidad de cortes dirigidos ajenos y t es transversal mínima, en cardinalidad.

Demostración.

sean Δ', una familia ajena de cortes dirigidos y t' un transversal, por el teorema 1.4. se tiene

$$|\Delta'| \leq |t| = |\Delta| \leq |t'|$$

es decir Δ es una familia máxima de cortes dirigidos ajenos y t una transversal mínima.

Younger conjeturó que para cualquier digráfica una familia máxima de cortes dirigidos ajenos tiene la misma cardinalidad que transversal mínima. Esta relación le llamaremos mini-max. Para digráficas con pocos vértices la relación mini-max se puede checar encontrando una familia Δ y transversal t. La demostración de la relación se desarrolla en el Apéndice de este trabajo y es debida a L. Lovász [ ]. La digráfica de la figura 1.13. muestra una familia máxima de cortes dirigidos ajenos y una transversal mínima.

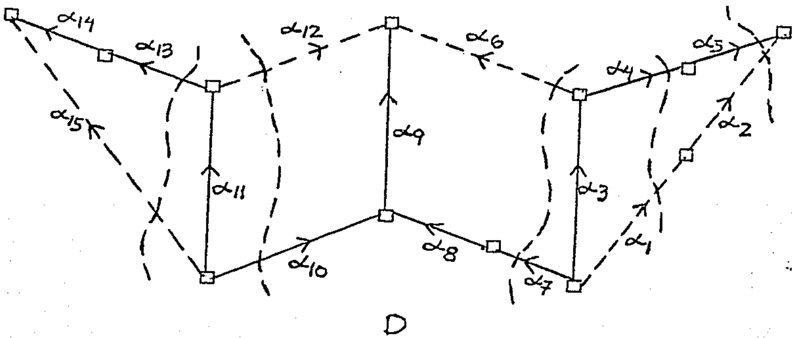


fig. 1.13.

Tenemos $\Delta = \{\{\alpha_1, \alpha_4\}, \{\alpha_2, \alpha_5\}, \{\alpha_6, \alpha_7\}, \{\alpha_{10}, \alpha_{12}\}, \{\alpha_{13}, \alpha_{15}\}$

y $\quad t = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6, \alpha_{12}, \alpha_{15}\}$. (*)

(*) En la figura 1.3. estas flechas estan punteadas.

"I'm a poor lonesome cowboy, far away from home"

Lucky Luke.

CAPITULO II.

Bipartitas dirigidas.
Un criterio para reducir la transversal.

2.1. Trayectorias y Transversales en digráficas bipartitas dirigidas

2.1. Definición. La digráfica D es bipartita dirigida si $V(D)$ tiene una bipartición $\{V^+, V^-\}$, tal que $F(D)$ es cofrontera dirigida y los extremos positivos de cada flecha estan en V^+

En adelante, a menos que se especifique lo contrario D es conexa, bipartita dirigida de donde $V(D)$ tiene una sola bipartición; suponemos que $F(D)$ es no vacío; $\{V^+, V^-\}$. La figura 2.1 muestra un ejemplo de una digráfica con bipartición dirigida,

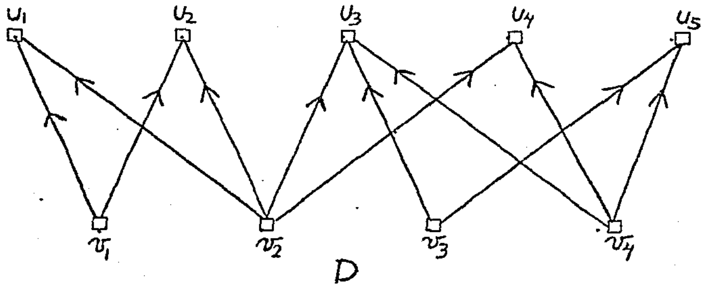


fig. 2.1.

2.2. Definición. Sean $u, v \in V(D)$, una *uv-trayectoria* Π en D es una sucesión alternada de vértices y flechas

$$\Pi = u_1 \alpha_1 u_2 \alpha_2 u_3, \ldots, u_n \alpha_n u_{n+1}.$$

donde $u_1 = u$, $u_{n+1} = v$; $u_i \neq u_j$ para $i \neq j$

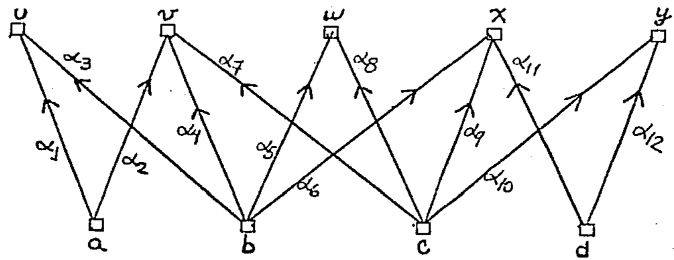
y $\alpha_i = (u_i, u_{i+1})$ ó $\alpha_i = (u_{i+1}, u_i)$ para $i = 1, \ldots, n$.

La longitud de la trayectoria es el número de flechas en Π y lo denotaremos como $l(\Pi)$, es decir $l(\Pi) = n$.

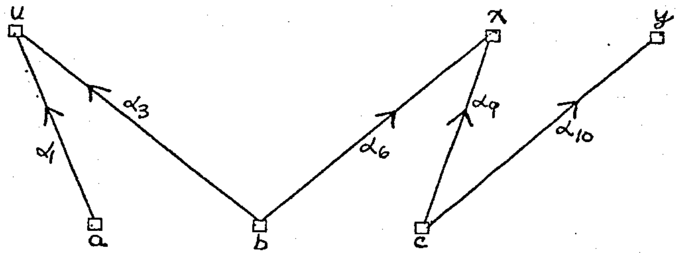
las flechas usadas en Π las denotamos como el conjunto $\mathcal{A}\Pi$.

2.3. Definición. Sean $u, v \in V(D)$ y Π_1, Π_2 uv-trayectorias, decimos que Π_1 y Π_2 son *internamente ajenas* si los únicos vértices que tienen en común son u y v.

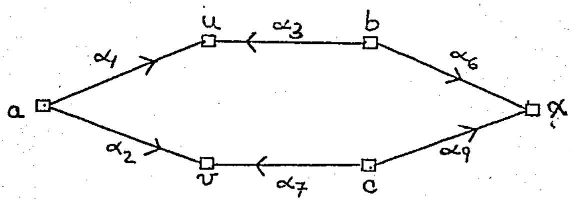
Una digráfica y tres trayectorias



D



$\Pi = a\alpha_1 u\alpha_3 b\alpha_6 x\alpha_9 c\alpha_{10} y$



$\Pi_1 = a, \alpha_2, v$, $\Pi_2 = a\alpha_1 u\alpha_3 b\alpha_6 x\alpha_9 c\alpha_7 v$.

Trayectorias internamente ajenas

fig. 2.2.

Si Π es uv-trayectoria, su longitud se caracteriza por lo siguiente.

(a) Si ambos vértices, u y v, pertenecen al mismo conjunto de la bipartición $\{V^+, V^-\}$, $l(\Pi)$ es par.

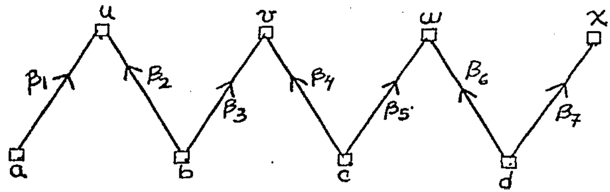
(b) Si u y v estan en conjuntos diferentes de la bipartición $\{V^+, V^-\}$, $l(\Pi)$ es impar.

En particular trabajamos con trayectorias donde $u \in V^+$ y $v \in V^-$, para estas definimos los siguientes conceptos.

<u>2.4. Definición.</u> Sea $\Pi = u_1 \alpha_1 u_2 \alpha_2 u_3, \ldots, u_n \alpha_n u_{n+1}$ una $u_1 u_{n+1}$-trayectoria con $u_1 \in V^+$, $u_{n+1} \in V^-$, el <u>conjunto de flechas hacia adelante</u> de Π es $a_f \Pi = \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq n,\ i \text{ es impar}\}$, y el <u>conjunto de flechas hacia atrás</u> de Π es

$$a_r \Pi = \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq n,\ i \text{ es par}\}.$$

En esta clase de trayectorias, de la definición, el conjunto $a_f \Pi$ tiene un elemento más que $a_r \Pi_1$. La figura 2.3. muestra un ejemplo



$$\pi = a\beta_1 u \beta_2 b \beta_3 v \beta_4 c \beta_5 w \beta_6 d \beta_7 x$$

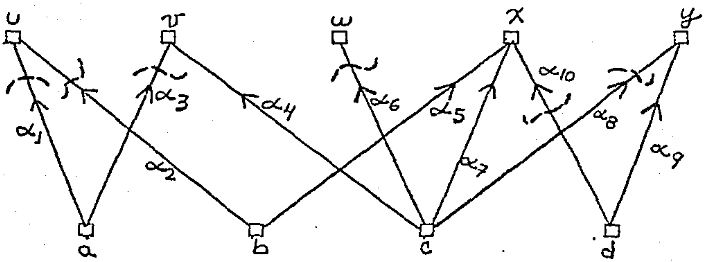
$$\mathcal{C}_f\pi = \{\beta_1, \beta_3, \beta_5, \beta_7\} \quad \mathcal{C}_i\pi = \{\beta_2, \beta_4, \beta_6\}.$$

fig. 2.3

Introducimos los conceptos relacionados con trayectorias y transversales.

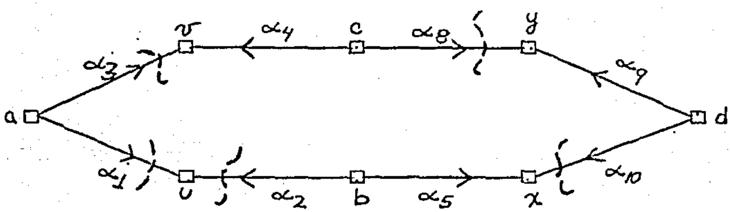
<u>2.5. Definición.</u> Sean t transversal, $a \in V^+$, $b \in V^-$, diremos que la ab-trayectoria π es <u>t-trayectoria</u> si $\mathcal{C}_f\pi \subset t$.

<u>2.6. Definición.</u> Sean t transversal, $a \in V^+$, $b \in V^-$ y π_1, π_2 ab-trayectorias diremos que π_1, π_2 es un <u>par de t-trayectorias decrementales</u> si son t-trayectorias e internamente ajenas.



D

$t = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_{10}\}$.



$\Pi_1 = a\alpha_1 u$, $\Pi_2 = a\alpha_3 v \alpha_4 c \alpha_8 y \alpha_9 d \alpha_{10} x \alpha_5 b \alpha_2 u$

par de trayectorias decrementales

fig. 2.4.

2.2. Un criterio para reducir Transversales.

En las digráficas bipartitas dirigidas es posible dar un criterio para cambiar de un transversal a otro de cardinalidad menor, para esto, una pareja de trayectorias decrementales es la base. La dificultad sería probar que el conjunto de flechas propuesto es un transversal, sin embargo, el hecho de trabajar con t-trayectorias facilita la demostración, aunque ésta sea un poco larga.

<u>2.1. Teorema.</u> Sea t transversal en D y Π_1, Π_2 un par de t-trayectorias decrementales con inicio en $a \in V^+$ y final $b \in V^-$ entonces $t' = (t - a_f\Pi_1) \cup a_r\Pi_1$ es una transversal tal que $|t'| < |t|$.

<u>Demostración.</u>

tenemos que $\quad |t'| = |(t - a_f\Pi_1) \cup a_r\Pi_1|$

i.e. $\quad |t'| = |t - a_f\Pi_1| + |a_r\Pi_1| - |(t - a_f\Pi_1) \cap a_r\Pi_1|$

entonces $\qquad |t'| \leq |t - a_f\Pi_1| + |a_r\Pi_1|$

ya que $\quad a_f\Pi_1 \subset t$. tenemos

$$|t'| \leq |t| - |a_f\Pi_1| + |a_r\Pi_1|. \qquad (*)$$

como Π_1 es t-trayectoria sucede que $\; |a_f\Pi_1| = |a_r\Pi_1| + 1.$

por lo cual $\qquad |t| - |a_f\Pi_1| + |a_r\Pi_1| \leq |t| - 1$

finalmente $(*)$ se convierte a

$$|t'| \leq |t| - 1$$

i.e. $\qquad |t'| < |t|.$

Ahora probemos que t' es transversal.

Sean

$\Pi_1 = u_1 \alpha_1 u_2 \dots u_n \alpha_n u_{n+1} \quad , \; \Pi_2 = v_1 \beta_1 v_2 \dots v_m \beta_m v_{m+1}.$

donde $\; u_1 = v_1 = a \;$ y $\; u_{n+1} = v_{m+1} = b.$

Consideremos T_0 corte dirigido y los conjuntos V^+T_0 y V^-T_0.

Con respecto a los vértices a y b se tiene:

(1) a y b pertenecen a conjuntos diferentes.

(2) a y b pertenecen al mismo conjunto.

(1.a). Supongamos que $a \in V^+T_0$ y $b \in V^-T_0$. Entonces $\mathbb{C}\Pi_2 \cap T_0 \neq \phi$ sea $j \in \{1, \dots, m\}$ el primer elemento tal que $\beta_j \in T_0$, entonces en la trayectoria $\Pi = v_1\beta_1, \dots, v_j\beta_j v_{j+1}$ se tiene que $v_j \in V^+T_0$ y $v_{j+1} \in V^-T_0$, de donde $\beta_j \in T_0$ y $\beta_j = (v_j, v_{j+1})$; como $l(\Pi)$ es impar y sus flechas estan en las de Π_2 concluimos que $\beta_j \in \mathbb{C}_f\Pi_2$, ya que Π_2 es t-trayectoria, $\beta_j \in t$, i.e. $\beta_j \in T_0 \cap t'$. Ver figura

(1.b). Supongamos que $a \in V^-T_0$ y $b \in V^+T_0$.

Se tiene que $\mathbb{C}\Pi_1 \cap t \neq \phi$, en caso contrario $b \in V^-T_0$. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ el primer índice tal que $\alpha_i \in T_0$, consideremos la trayectoria $\Pi' = u_1\alpha_1 u_2 \dots u_i \alpha_i u_{i+1}$ donde $u_i \in V^-T_0$ y $u_{i+1} \in V^+T_0$, entonces $\alpha_i \in T_0$ y $\alpha_i = (u_{i+1}, u_i)$, como $l(\Pi')$ es par y sus flechas pertenecen a Π_1 se tiene que $\alpha_i \in \mathbb{C}_r\Pi_1$, por lo cual $\alpha_i \in T_0 \cap t'$. ver figura

(2.a). $a, b \in V^+T_0$.

Si $\mathbb{C}\Pi_1 \cap T_0 = \phi$, entonces $T_0 \cap t' \neq \phi$.

Supongamos que $\mathbb{C}\Pi_1 \cap T_0 \neq \phi$, si en esta intersección

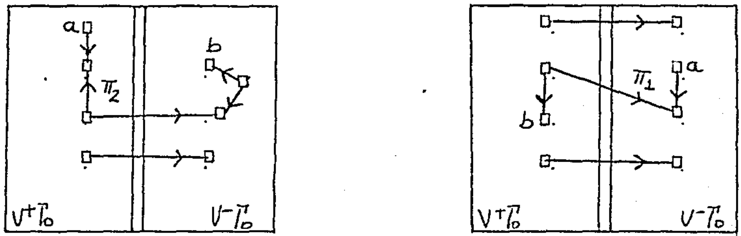


fig. 2.5.

consta de una flecha pasaríamos de V^+T_0 a V^-T_0 de donde $b \in V^-T_0$, que por hipótesis no sucede. Sean $i, k \in \{1, \ldots, n\}$ el primer y segundo índice, respectivamente, tal que $\alpha_i, \alpha_k \in T_0$, como en (1a) concluimos que $\alpha_i \in \mathcal{C}_f \Pi_1$, en la trayectoria $\Pi^* = u_1 \alpha_1, \ldots, u_k \alpha_k u_{k+1}$ se tiene que $u_k \in V^-T_0$ y $u_{k+1} \in V^+T_0$, es decir $\alpha_k = (u_{k+1}, u_k)$ análogo a (1.b) $\alpha_k \in \mathcal{C}_f \Pi_1$, Por lo tanto $T_0 \cap t' \neq \phi$. figura

(2.b) $a, b \in V^-T_0$.

Si $\mathcal{C}\Pi_1 \cap T_0 = \phi$, claramente $T \cap t' \neq \phi$.

Supongamos que $\mathcal{C}\Pi_1 \cap T_0 \neq \phi$

Si $i \in \{1, \ldots, n\}$ es el primer índice tal que $\alpha_j \in T_0$, análogo a (1.b) tenemos $\alpha_i \in \mathcal{C}_f \Pi_1$, entonces $T_0 \cap t' \neq \phi$. figura.

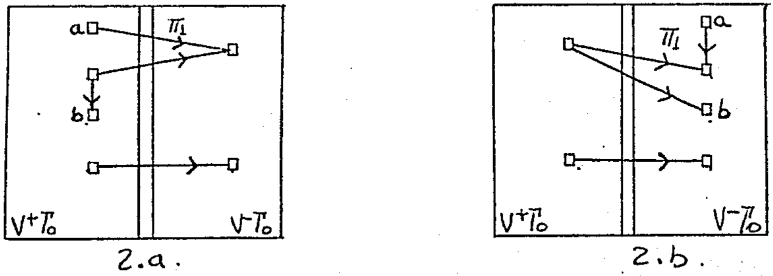


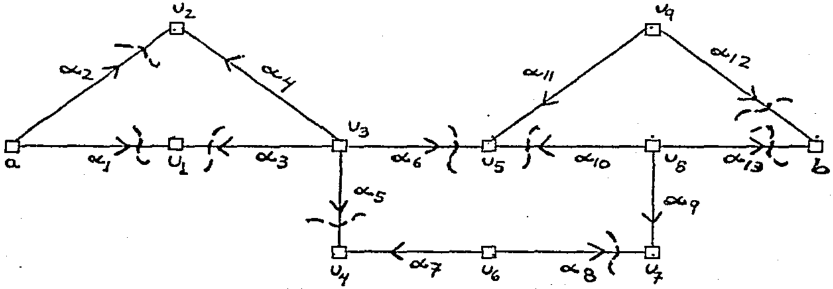
fig. 2.6.

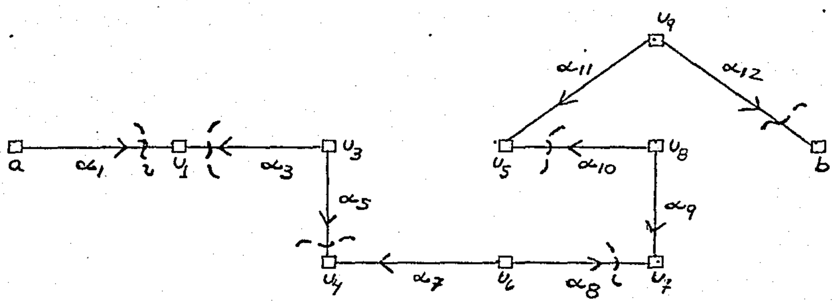
2.3. Trayectorias ajenas hacia adelante.

2.7 Definición. Sean $a \in V^+$, $b \in V^-$, t-transversal y Π_1, Π_2 ab-trayectorias, decimos que Π_1, Π_2 es un par de t-trayectorias ajenas hacia adelante si Π_1 y Π_2 son t-trayectorias y $\mathcal{A}_f \Pi_1 \cap \mathcal{A}_f \Pi_2 = \phi$.

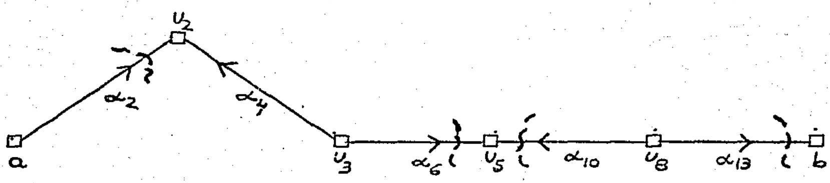
Estas son las trayectorias con las cuales trabajamos inicialmente. Sus recorridos no son tan exigentes como las decrementales. Se implementa un algoritmo para encontrar un par de t-trayectorias ajenas hacia adelante ó un corte dirigido hacia adelante $T(X)$ donde $a \in X$, $b \in X^c$. Ver Apéndice A.

La figura 2.7. muestra un caso de un par de t-trayectorias ajenas hacia adelante.





π_1



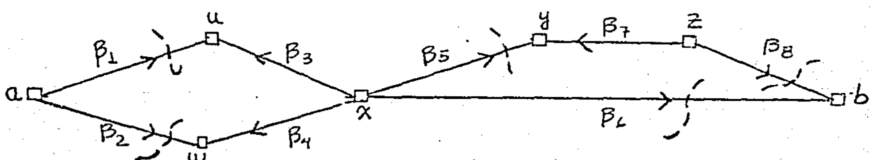
π_2

π_1, π_2 par de t-trayectorias ajenas hacia adelante.

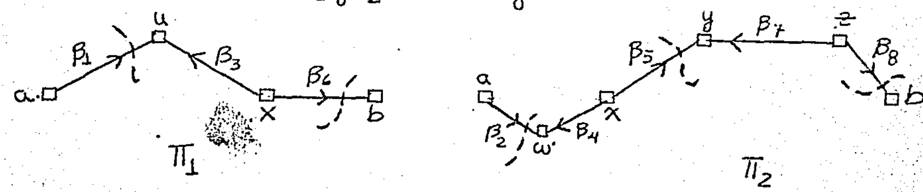
fig. 2.7

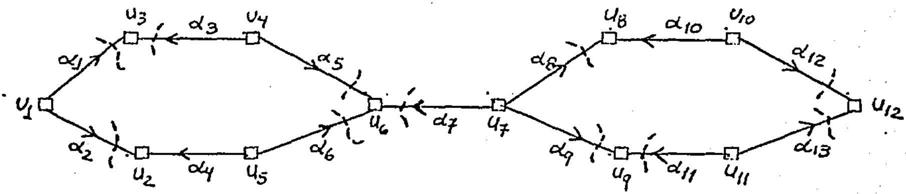
2.8. Definición. Sean $a \in V^+$, $b \in V^-$, t transversal y π_1, π_2 ab-trayectorias decimos que π_1, π_2 es un <u>par de t-trayectorias fuertemente ajenas hacia adelante</u> si π_1, π_2 son t-trayectorias y $\mathcal{C}_f\pi_1 \cap \mathcal{C}\pi_2 = \phi = \mathcal{C}_f\pi_2 \cap \mathcal{C}\pi_1$.

El recorrido de estas trayectorias tendrá en común vértices y si una flecha pertenece a ambas estará en $\mathcal{C}_r\pi_1 \cap \mathcal{C}_r\pi_2$. De aquí que este tipo de trayectorias se parecen a las trayectorias decrementales. fig. 2.8

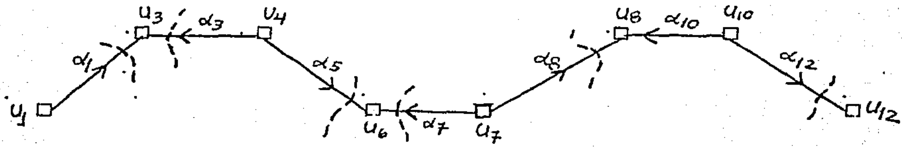


π_1 y π_2 ab-t-trayectorias.

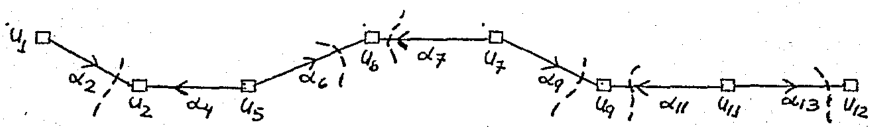




un par de t-trayectorias
fuertemente ajenas hacia adelante



u_1u_{12}-t-trayectoria



u_1u_{12}-t-trayectoria

fig. 2.9

<u>2.2 Teorema</u>. De un par de t-trayectorias ajenas hacia adelante se pueden convertir a un par de t-trayectorias fuertemente ajenas hacia adelante.

<u>Demostración</u>.

Sean Π_1, Π_2 ab-t-trayectorias ajenas hacia adelante, la prueba es por inducción sobre $|\mathcal{A}\Pi_1 \cap \mathcal{A}\Pi_2|$.

Claramente si $|\mathcal{A}\Pi_1 \cap \mathcal{A}\Pi_2| = 0$, Π_1, Π_2 son fuertemente ajenas hacia adelante.

Hipótesis de Inducción. Supongamos que si Π_1', Π_2' es un par de t-trayectorias ajenas hacia adelante con menos de m flechas en común el resultado se cumple.

Sean Π_1, Π_2 par de t-trayectorias ajenas hacia adelante donde $|\mathcal{A}\Pi_1 \cap \mathcal{A}\Pi_2| = m$.

Si las m flechas en común pertenecen a $\mathcal{A}_f\Pi_1 \cap \mathcal{A}_f\Pi_2$, Π_1, Π_2 es un par de t-trayectorias fuertemente ajenas hacia adelante. Supongamos que no tenemos este caso.

Entonces en Π_1 y Π_2 tenemos trayectorias -al menos dos- del siguiente tipo.

$$\Pi_1^* = x\alpha v_1\alpha_1 v_2 \ldots v_{n-1}\alpha_{n-1}v_n\beta y.$$

$$\Pi_2^* = z\gamma v_n \alpha_{n-1} v_{n-1}, \ldots, v_2\alpha_1 v_1 \xi w.$$

donde

$v_i \in V(\Pi_1) \cap V(\Pi_2)$; $x, y \in V(\Pi_1) - V(\Pi_2)$; $z, w \in V(\Pi_2) - V(\Pi_1)$

$\alpha_i \in \mathcal{C}\Pi_1 \cap \mathcal{C}\Pi_2$; $\alpha, \beta \in \mathcal{C}\Pi_1 - \mathcal{C}\Pi_2$; $\gamma, \xi \in \mathcal{C}\Pi_2 - \mathcal{C}\Pi_1$

el índice i varía de 1 a n en los vértices y de 1 a $n-1$ en las flechas. Además $\alpha_1 \notin \mathcal{C}_r\Pi_1 \cap \mathcal{C}_r\Pi_2$.

Para v_1 tenemos dos opciones

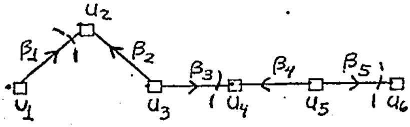
(i.a). $v_1 \in V^+$

(i.b) $v_1 \in V^-$

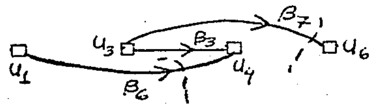
(i.a). tenemos que $\alpha \in \mathcal{C}_r\Pi_1$, $\alpha_1 \in \mathcal{C}_f\Pi_1 \cap \mathcal{C}_r\Pi_2$ y $\xi \in \mathcal{C}_f\Pi_2$ entonces

$$\Pi_1' = (a, \Pi_1, v_1) \cup (v_1, \Pi_2, b) \text{ es } ab\text{-}t\text{-trayectoria}$$

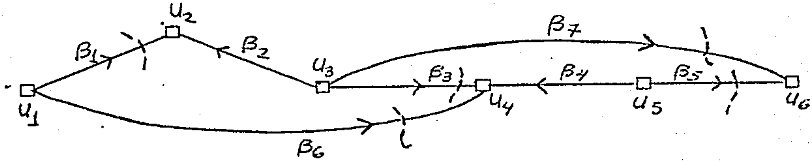
Ver figura 2.10.



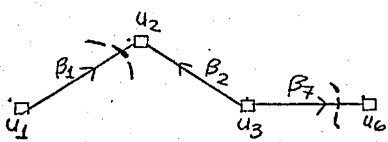
π_1
u_1u_6-t-trayectoria



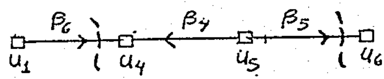
π_2
u_1u_6-t- trayectoria



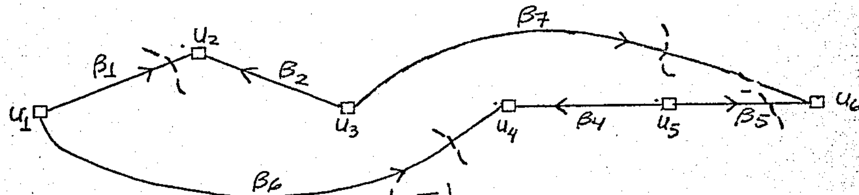
π_1 y π_2.



π_1'



π_2'



π_1' y π_2'

fig. 2.10.

(1.b). tenemos que $\alpha \in \mathcal{C}_f\Pi_1$, $\alpha_1 \in \mathcal{C}_i\Pi_1 \cap \mathcal{C}_f\Pi_2$ y $\xi \in \mathcal{C}_i\Pi_2$ entonces

$$\Pi_1' = (a, \Pi_1, v_1) \cup (v_1, \Pi_2, b)$$

es ab-t-trayectoria. Ver figura 2.11.

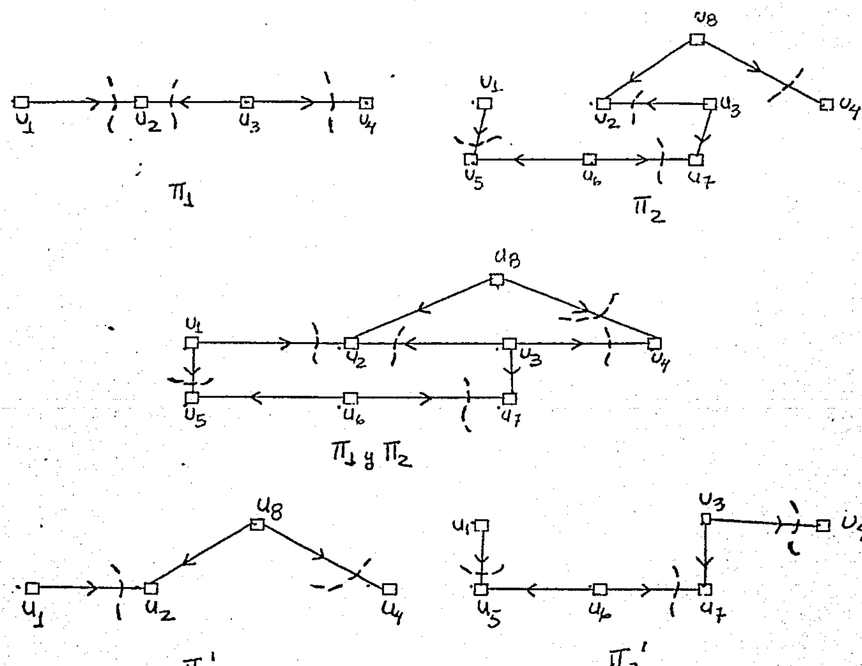


fig. 2.11.

También para v_n se tienen dos opciones

(ii.a) $v_n \in V^+$

(ii.b) $v_n \in V^-$

En cualquier caso, análogo a (i.a) a (i.b) concluimos que

$$\Pi_2' = (a, \Pi_2, v_n) \cup (v_n, \Pi_1, b)$$

es una ab-t-trayectoria.

Además Π_1', Π_2' es un par de t-trayectorias ajenas hacia adelante, donde

$$|\mathcal{C}\Pi_1' \cap \mathcal{C}\Pi_2'| < |\mathcal{C}\Pi_1 \cap \mathcal{C}\Pi_2| = m.$$

Por hipótesis de inducción, Π_1', Π_2' se pueden convertir a un par de t-trayectorias fuertemente ajenas hacia adelante

2.4. Un par de trayectorias decrementales.

<u>2.3. Teorema</u>. De un par de t-trayectorias fuertemente ajenas hacia adelante es posible extraer un par de t-trayectorias decrementales, tal vez con diferente origen o final.

<u>Demostración</u>.

Usamos inducción sobre el número de vértices internos en común en el par de trayectorias.

Si el par de trayectorias son internamente ajenas forman un par de t-trayectorias decrementales.

Hipótesis de Inducción. Supongamos que si un par de t-trayectorias fuertemente ajenas hacia adelante tienen menos de n vértices internos en común ($n>0$) es posible extraer un par de t-trayectorias decrementales.

Sean $a \in V^+$, $b \in V^-$ y Π_1, Π_2 ab-t-trayectorias fuertemente ajenas hacia adelante donde tienen n vertices internos en común y v_1 es el primer vertice de Π_1 que también esta en Π_2. v_1 tiene dos opciones.

1.a.- $v_1 \in V^-$

1.b. $v_1 \in V^+$

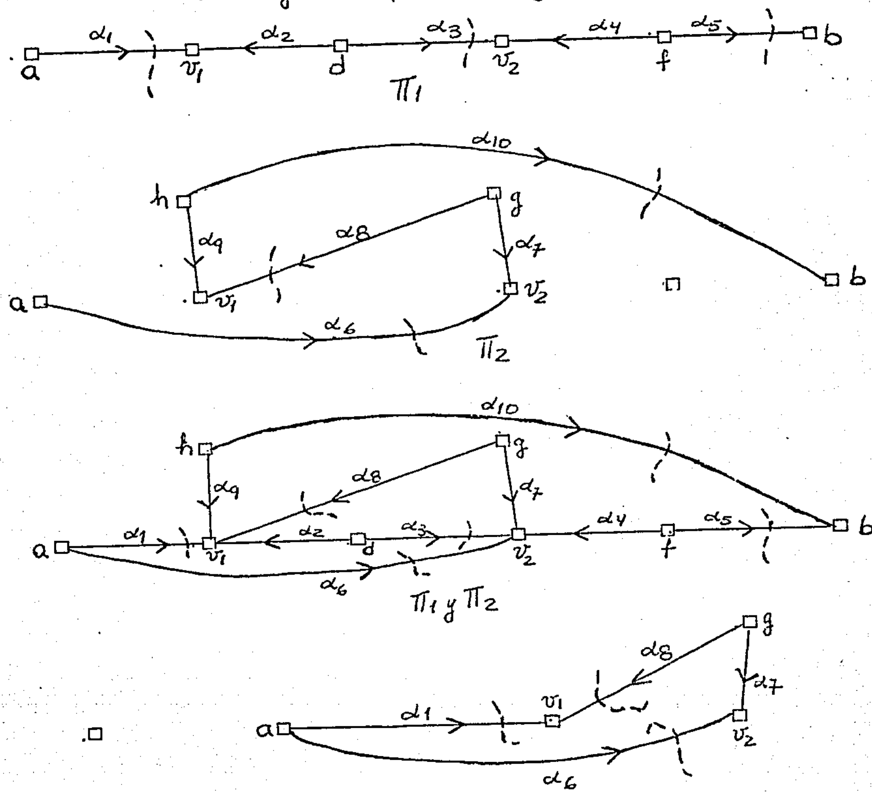
1.a: tenemos que

$\Pi_1' = (a, \Pi_1, v_1)$, $\Pi_2' = (a, \Pi_2, v_1)$ es un par de t-trayectorias decrementales.

1.b: Entonces

$\Pi_1^* = (v_1, \Pi_1, b)$ y $\Pi_2^* = (v_1, \Pi_2, b)$ es un par de t-trayectorias con menos de n vértices internos en común, por hipótesis de inducción es posible extraer de ellas un par de t-trayectorias decrementales.

Dos trayectorias fuertemente ajenas hacia adelante



Π_1' y Π_2'
un par de trayectorias decrementales.

fig. 2.12.

"Que no siempre se está en los templos, no siempre se ocupan los oratorios: horas hay de recreación donde el afligido espíritu descanse".

Miguel de Cervantes Saavedra.

CAPITULO III

Un par equicardinal.

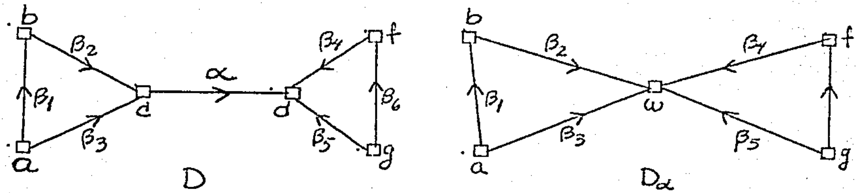
3.1. Contracciones y transversales.

De las secciones anteriores, es posible empezar con una transversal cualquiera, que puede ser $F(D)$, y modificarlo a otra que no contenga pares de trayectorias decrementales, sin embargo, este hecho no garantiza que sea de cardinalidad menor. Esto se demostrará exhibiendo una familia ajena de cortes dirigidos de igual cardinalidad que la transversal – Corolario 2.1.–; el camino es algorítmico basado en inducción sobre el número de vértices de la digráfica.

<u>3.1. Definición</u>. Sea D una digráfica y $\alpha \in F(D)$. <u>la contracción de la flecha α</u> es una nueva digráfica D_α

donde se suprime la flecha α y se identifican sus extremos.

Ejemplo



contracción de α

fig. 3.1.

<u>3.2. Definición.</u> Dado un subconjunto de vértices Y de la digráfica D al contraer sucesivamente las flechas en $D[Y]$ obtenemos una digráfica que denotaremos $Dctr[Y]$.

Estas definiciones y el teorema 3.1. son para cualquier digráfica.

3.1. Teorema. Sea D una digráfica, $T_0 \subset F(D)$ y $\alpha \in F(D) - T_0$; T_0 es corte dirigido en D si y solo si T_0 es corte dirigido en D_α.

Demostración.

$\Rightarrow$) Como $\alpha \notin T_0$, α es una flecha de $D[V^+T_0]$ ó $D[V^-T_0]$, supongamos s.p.g. que α esta en $D[V^+T_0]$ y sea $\omega = \{p\alpha, n\alpha\}$, tenemos que

$$V(D_\alpha) = V(D) \cup \{\omega\} - \{p\alpha, n\alpha\}.$$

Mostremos que

$$T_{D_\alpha}(V^-T_0) = T_0$$

sea $\beta \in T_0$

entonces $n\beta \in V^-T_0$ y $p\beta \in V^+T_0$, es decir $p\beta \in V^+T_0 \cup \{\omega\} - \{p\alpha, n\alpha\}$ en D_α; de donde $p\beta \in V(D_\alpha) - V^-T_0$ y $\beta \in T_{D_\alpha}(V^-T_0)$

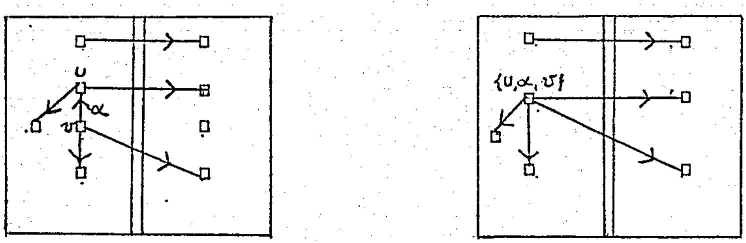
sea $\beta \in T_{D_\alpha}(V^-T_0)$ y u, v sus extremos donde $v \in V^-T_0$, entonces $u \in V^+T_0 \cup \{\omega\} - \{p\alpha, n\alpha\}$; en D $u \in V^+T_0$, es decir $\beta = (u, v)$ y $\beta \in T_0$.

Por lo cual concluimos que

$$\Gamma_{D_\alpha}(V^- T_0) = T_0$$

Además en D_α las subdigráficas $D[V_\alpha^+ T_0]$ y $D[V^- T_0]$ son conexas. $-$ $V_\alpha^+ T_0 = V^+ T_0 \cup \{w\} - \{p_\alpha, n_\alpha\}$.

($\Leftarrow$. Unicamente quitamos la identificación w en D_α para pasar a D. T_0 también es cofrontera dirigida en D y como $D[V^- T_0]$ y $D[V^+ T_0]$ son conexas, en D, T_0 será corte dirigido.



T_0 en D T_0 en D_α.

fig. 3.2

3.2. Teorema. Si t es una transversal sin trayectorias decrementales en la digráfica bipartita dirigida entonces existe una familia de subconjuntos de vértices ajenos $\{Y_i / i \in I\}$ tal que

$$V^- \subset \bigcup_{i \in I} Y_i$$

Para cada $i \in I$, $T(Y_i)$ es corte dirigido hacia adentro donde

$$|T(Y_i) \cap t| = 1 \quad .$$

y $T(\bigcup_{i \in I} Y_i)$ es cofrontera dirigida hacia adentro.

Demostración

Inducción sobre el número de vértices.

Los casos en que $|V(D)| = 2, 3$ no tenemos problemas en dar la familia $\{Y_i / i \in I\}$, la figura 3.3. muestra las digráficas con 2 ó 3 vértices así como sus familias de vértices $\{Y_i\}$.

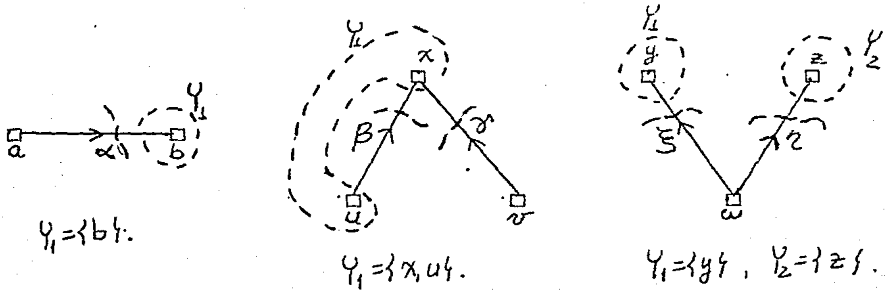


fig. 3.3.

Hipótesis de Inducción. Supongamos que si t' es una transversal sin trayectorias decrementales en una digráfica con menos de n vértices $(n\geq 4)$ el resultado se cumple.

Sea D una digráfica bipartita dirigida con n vértices y t una transversal sin par de trayectorias decrementales. Si para todo $v\in V^-$ se cumple que

$$|T(v)\cap t|=1$$

la familia $\{Y_v=\{v\}/ v\in V^-\}$ cumple las condiciones del Teorema .

Supongamos que existe $c \in V^-$ tal que

$$|T(c) \cap t| > 1.$$

para este vértice aplicamos el algoritmo A.3. Apéndice A . y obtenemos un subconjunto de vértices Y_0 tal que $c \in Y_0$, $T(Y_0)$ es corte dirigido hacia adentro donde

$$|T(Y_0) \cap t| = 1$$

y $Dctr[Y_0]$ es bipartita dirigida.

Consideremos $t' = t - F(D[Y_0])$, el teorema nos dice que los cortes dirigidos de $Dctr[Y_0]$ son aquellos de D que no usan flechas de $D[Y_0]$, estos cortes dirigidos se intersectan con t con flechas de t', es decir t' es una transversal en $Dctr[Y_0]$.

Probemos que en $Dctr[Y_0]$ no existen t'-trayectorias decrementales.

Supongamos que en $Dctr[Y_0]$ existe un par de t'-trayectorias decrementales Π_1, Π_2 y sea y_0 el vértice correspondiente a Y_0 al contraerse. Si y_0 no es vértice de ninguna trayectoria Π_1, Π_2; éstas son t-trayectorias decrementales en D. Por lo cual y_0 es vértice en alguna trayectoria de Π_1, Π_2; y_0 no es vértice final de ambas ya que

$$|\Gamma(y_0) \cap t'| = 1$$

entonces y_0 es vértice interno de una sola trayectoria, digamos Π_1, sea

$$\Pi_1 = a_1 \alpha_1 a_2, \ldots, a_m \alpha_m y_0 \alpha_{m+1} a_{m+2}, \ldots, a_r.$$

en D se tiene que

$$\alpha_m = (a_m, b_1), \quad \alpha_{m+1} = (a_{m+2}, b_2) \quad , b_1, b_2 \in V^- \cap Y_0.$$

en caso que $b_1 = b_2$, hacemos $b_1 = a_{m+1}$ y entonces

$$\Pi_1 = a_1 \alpha_1 a_2, \ldots, a_m \alpha_m a_{m+1} \alpha_{m+1} a_{m+2}, \ldots a_r$$

y Π_2 es un par de t-trayectorias decrementales en D !/

entonces $b_1 \neq b_2$.

Por el algoritmo A.3. $D[Y_0]$ es conexa, es decir existe $a_* \in V^+ \cap Y_0$ tal que $(a_*, b_1) \in F(D[Y_0])$,

Además $t_* = t \cap (F[Y_0])$ es una transversal en $D[Y_0]$.

De donde existe Π_* a_*b_2-t_*-trayectoria en $D[Y_0]$

Entonces

$$\Pi_1' = (a_1, \Pi_1, b_1) \cup (a_*, b_1) \cup (a_*, \Pi_*, b_2) \cup (b_2, \Pi_1, a_r)$$

es una t-trayectoria internamente ajena a Π_2. Ver fig. 3.4.

es decir Π_1, Π_2 es un par de t-trayectorias decrementales en D. ∇

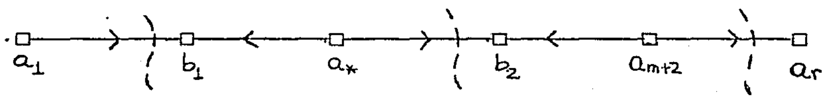


fig. 3.4

En $D_{ctr}[Y_0]$ no existen t'-trayectorias decrementales, y tiene menos de n vértices, ya que $|Y_0|>1$, por hipótesis de inducción existe una familia ajena de vértices

$$\{Y_i \mid i \in I\},\ I \subsetneq \mathbb{N},\ I \text{ finito}.$$

tal que

$$V^- \subset \bigcup_{i \in I} Y_i$$

para cada $i \in I$, $T(Y_i)$ es corte dirigido hacia adentro donde

$$|T(Y_i)\cap t'|=1.$$

y $T(\bigcup_{i\in I} Y_i)$ es cofrontera dirigida hacia adentro.

el vértice y_0 cumple uno de los casos

(i) $\{y_0\}=Y_i$ para algún $i\in I$

(ii) $y_0\in Y_i$ y $Y_i-\{y_0\}\neq\emptyset$ para algún $i\in I$.

en cualquier situación $\{Y_i \mid i\in I\}$ cumple las propiedades del Teorema en D.

■

3.2. La relación mini-max.

Esta familia de vértices $\{Y_i \mid i\in I\}$ servirá para formar una familia de cortes dirigidos ajenos en D y una transversal de cardinalidad mínima, para esto convenimos en la siguiente notación.

para $i\in I$ sea $D_{Y_i}=D\,ctr[V(D)-Y_i]$

y $D_0=D\,ctr[\bigcup_{i\in I} Y_i]$, $t_0=t\cap F(D_0)$.

3.3. Teorema. Si para cada $i \in I$, D_{φ_i} tiene un par equicardenal $t_{\varphi_i}, \mathcal{D}_{\varphi_i}$ tal que $t_{\varphi_i} \cap T(\varphi_i) = t_0 \cap T(\varphi_i)$ entonces

$t_* = \bigcup_{i \in I} t_{\varphi_i}$ es una transversal de los cortes dirigidos en D

y

$\mathcal{D} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{D}_{\varphi_i}$ es una familia ajena de cortes dirigidos en D tal que

$$|t_*| = |\mathcal{D}|.$$

Demostración.

Notemos que si $i, j \in I$, $i \neq j$ se tiene que $F(D_{\varphi_i}) \cap F(D_{\varphi_j})$ es vacío; ya que si $\alpha \in F(D_{\varphi_i})$ por construcción $n_\alpha \in \varphi_i$, como $\varphi_i \cap \varphi_j = \phi$ entonces $\alpha \notin F(D_{\varphi_j})$.

Con esto aseguramos que $\mathcal{D}$ es una familia ajena de cortes dirigidos, no vacía, y que

$$|t_*| = |\mathcal{D}|$$

Probemos que t_* es una transversal.

Sea T_0 un corte dirigido en D.

si T_0 es un corte dirigido en algún D_{φ_i}, se tiene que

$$T_0 \cap t_* \neq \phi.$$

Ahora bien si T_0 es un corte dirigido en D_0, sabemos que $T_0 \cap t_0 \neq \phi$, sea $\alpha \in T_0 \cap t_0$ entonces $n\alpha = y_i$ para alguna $i \in I$, es decir $\alpha \in \Gamma(\varphi_i) \cap t_0$, como por hipótesis $\Gamma(\varphi_i) \cap t_0 = \Gamma(\varphi_i) \cap t_{\varphi_i}$ tenemos que $\alpha \in t_*$, de donde

$$T_0 \cap t_* \neq \phi.$$

Para demostrar que t_* intersecta a un corte dirigido que no esta en D_{φ_i} $\forall i \in I$, ni en D_0 usemos lo siguiente.

Sea $\Gamma(X)$ el corte dirigido hacia adentro, no vacio, donde

$$\Gamma(X) \cap t_* = \phi$$

y X es el subconjunto de vértices mayor en cardinalidad con esta propiedad.

Como $T(X)$ no es corte dirigido en D_{φ_i} $\forall i \in I$, ni en D_0, existe $p \in I$ tal que

$\varphi_p \cap X \neq \phi$, $\varphi_p \cap X^c \neq \phi$, $X - \varphi_p \neq \phi$ y $X^c - \varphi_p \neq \phi$.

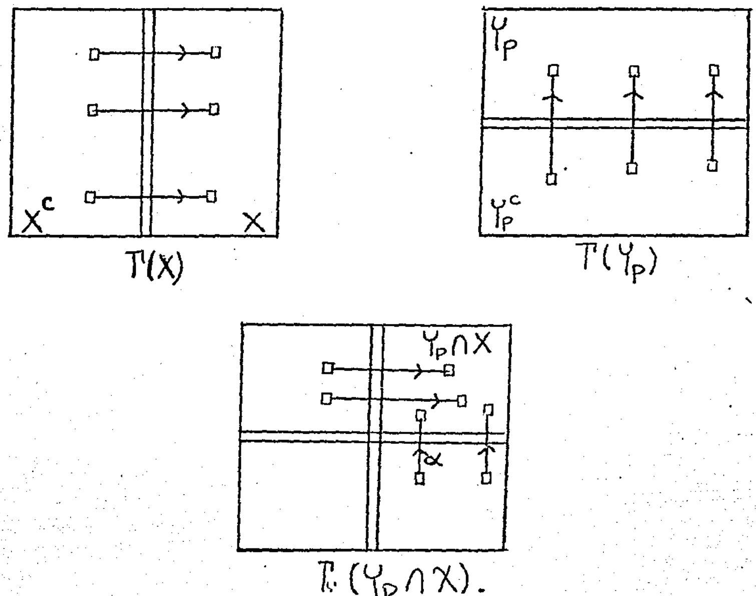


fig. 3.5

Ya que $\varphi_p \cap X \subset \varphi_p$ y D_{φ_p} es conexa se tiene que $T_{D_{\varphi_p}}(X \cap \varphi_p)$ es cofrontera dirigida hacia adentro, no vacia de donde

$$T_{D_{Y_p}}(Y_p \cap X) \cap t_Y \neq \emptyset .$$

Si α es una flecha en esta intersección cumple que $p\alpha \in X - Y_p$; ya que si $p\alpha \in X^c$ tenemos que $\alpha \in T(X) \cap t_*$, lo cual no sucede por hipótesis. fig. 3.5.

Ahora bien en D, $T(X \cup Y_p)$ es cofrontera no vacia dirigida hacia dentro donde

$$|X| < |X \cup Y_p|$$

Como se escogió X se tiene que

$$T(X \cup Y_p) \cap t_* \neq \emptyset .$$

Sea β una flecha en esta intersección,

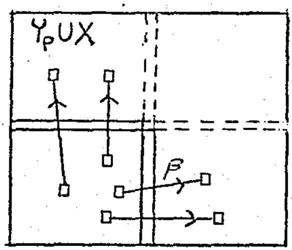


fig. 3.6.

si $n\beta \in \Psi_p$ como $p\beta \in \Psi_p^c \cap X^c$ se tiene que

$$\beta \in T(\Psi_p) \cap t_{\Psi_p}$$

además $\alpha \neq \beta$, porque $p\beta \in X^c$ y $n\alpha \in X$, pero

$$|T(\Psi_p) \cap t_{\Psi_p}| = 1$$

de donde $n\beta \notin \Psi_p$.

entonces $n\beta \in X - \Psi_p$ y $p\beta \in X^c$, es decir

$$\beta \in T(X) \cap t_* \quad \text{!`}$$

Ver fig. 3.6.

Con esto probamos que t_* es una transversal de los cortes dirigidos en D. ∎

CAPITULO IV.

EL Algoritmo

EL Algoritmo.

Antes de establecer el algoritmo con ayuda del material desarrollado con anterior, probaremos un resultado cuya utilidad esta relacionado con el Teorema 2.1.

<u>4.1 Lema</u>. Sea D una digráfica bipartita dirigida y t una transversal de los cortes dirigidos, si $v \in V^+$ es tal que $\Gamma(v) \cap t = \{\alpha\}$ y β es una flecha distinta de α donde $p\beta = v$ entonces existe una transversal t_* tal que $\beta \in t_*$ y $\Gamma(v) \cap t_* = \{\beta\}$ y $|t_*| \leq |t|$

Demostración

Sea π, v-$\eta\beta$-t-trayectoria; como $T(v) \cap t = \{\alpha\}$ π utiliza como flecha inicial a α.

También $t_\beta = t \cup \{\beta\}$ es una transversal de los cortes dirigidos, y $\pi' = v\beta(\eta\beta)$ es una $(v$-$\eta\beta)$-t_β-trayectoria, es decir π y π' es un par decremental de t_β-trayectorias. fig. 4.1.

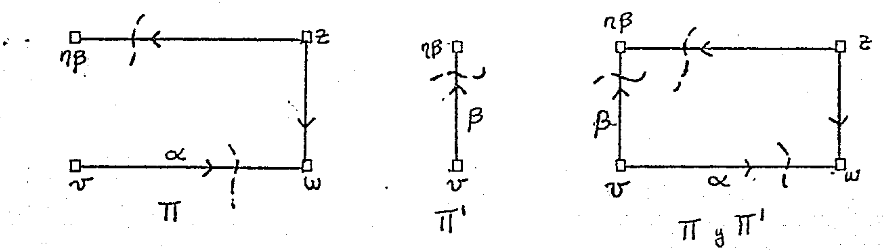


fig. 4.1.

entonces por el teorema

$$t_* = (t_\beta \cup \mathcal{C}_r\pi) - \mathcal{C}_f\pi$$

es una transversal donde $\beta \in t_*$, $|t_*| \leq |t|$.

$$T(v) \cap t_* = \{\beta\}$$

4.1. Teorema (Algoritmo). Sea D una digráfica bipartita conexa y t una transversal de los cortes dirigidos en D entonces Existen t' una transversal de los cortes dirigidos en D y $\mathcal{D}$ una familia ajena de cortes dirigidos tales que

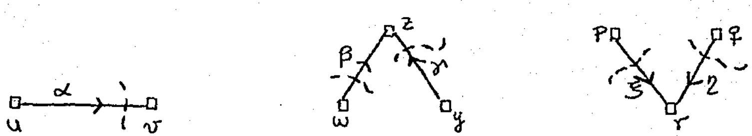
(i) $|t'| = |\mathcal{D}|$.

(ii) $|\Gamma(v) \cap t'| \leq |\Gamma(v) \cap t| \quad \forall\, v \in V(D)$.

Demostración.

Inducción sobre el número de vertices.

Para $n = 2, 3$. no tenemos problemas. fig. 4.2.



$t = \{\alpha\}$ es la única transversal y $\mathcal{D} = \{\{\alpha\}\}$ único corte dirigido.

$t = \{\beta, \gamma\}$, la única transversal. $\mathcal{D} = \{\{\beta\}, \{\gamma\}\}$.

$t = \{\xi, \eta\}$ la única transversal. $\mathcal{D} = \{\{\xi\}, \{\eta\}\}$.

fig. 4-2.

Hipótesis de Inducción. Supongamos que si D' es una digráfica bipartita dirigida y $\hat{t}$ es una transversal el teorema se cumple. - Donde $|V(D')|<n$ - .

Sea D una digráfica bipartita dirigida conexa y t una transversal. - Donde $|V(D)|=n$. - .

Si encontramos un par de t-trayectorias decrementales Π_1 y Π_2 entonces $t_1=(t \cup a_f \Pi_1)-a_f \Pi_2$ es una transversal

sea $v \in V(D)$

(a) Si v no es vértice de Π_1 se tiene que

$$|\Gamma(v) \cap t_1| = |\Gamma(v) \cap t|$$

(b) Si v pertenece a Π_1 tenemos

$$|\Gamma(v) \cap t_1| \leq |\Gamma(v) \cap t| .$$

Al llegar a una transversal $\hat{t}_0$ sin trayectorias decrementales entonces

$$|\Gamma(v) \cap \hat{t}_0| \leq |\Gamma(v) \cap t| \quad \forall v \in V(D)$$

(a.1) Si $\forall\, v \in V^-$, cumple
$$|T(v) \cap \hat{E}_0| = 1$$
$\mathcal{D} = \{T(v) \mid v \in V^-\}$ es una familia ajena de cortes dirigidos donde $|\hat{E}_0| = |\mathcal{D}|$.

(a.2). Si $\forall\, v \in V^+$
$$|T(v) \cap \hat{E}_0| = 1$$
$\mathcal{D} = \{T(v) \mid v \in V^+\}$ es una familia ajena de cortes dirigidos donde $|\hat{E}_0| = |\mathcal{D}|$.

Supongamos que no sucede (a.1) o (a.2), por el teorema 3.2. sea $\mathcal{Y} = \{Y_i \mid i \in J\}$ la familia ajena de subconjuntos de vértices tales que
$$V^- \subset \bigcup_{i \in J} Y_i .$$

$T(Y_i)$ es corte dirigido hacia adentro donde
$$|T(Y_i) \cap \hat{E}_0| = 1 .$$

y $T(\bigcup_{i\in J} \varphi_i)$ es cofrontera dirigida hacia adentro.

Sea $D_i = D^-_{\varphi_i}$ $i\in J$.

para cada $i\in J$, D_i cumple las hipótesis de inducción, donde $t_i^\circ = \hat{t}_0 \cap F(D_i)$ es una transversal de los cortes dirigidos en D_i, es decir existen t_i^* transversal y $\mathcal{D}_i$ familia ajena de cortes dirigidos en D_i tales que

(i) $|t_i^*| = |\mathcal{D}_i|$

(ii) $|T(v)\cap t_i^*| \leq |T(v)\cap t_i^\circ| \quad \forall v\in V(D_i)$.

la relación (ii) en particular nos dice que

$$|T(\varphi_i)\cap t_i^*| \leq |T(\varphi_i)\cap t_i^\circ|$$

como

$$|T(\varphi_i)\cap t_i^\circ| = |T(\varphi_i)\cap t_0| = 1$$

entonces

$$|T(\varphi_i)\cap t_i^*| = 1.$$

Ahora bien si $D_0 = D\,ctr[\bigcup_{i\in J} Y_i]$, $t_0 = \hat{t}_0 \cap F(D_0)$ es una transversal de los cortes dirigidos en D_0

Si $\qquad \Gamma(Y_i) \cap t_i^* \neq \Gamma(Y_i) \cap t_0$

sea $\{d_i\} = \Gamma(Y_i) \cap t_0$, por el lema 4.1. existe una transversal t_i tal que $d_i \in t_i$, $\Gamma(Y_i) \cap t_i = \{d_i\}$ y $|t_i| \leq |t_i^*|$, como t_i^* es una transversal de cardinalidad mínima; $|t_i| = |t_i^*|$, tenemos entonces para cada $i \in J$ una pareja equicardinal $t_i, \mathcal{D}_i$ por

$t' = \bigcup\{t_i \mid i \in J\}$ es una transversal de los cortes dirigidos en D y

$\mathcal{D} = \bigcup\{\mathcal{D}_i \mid i \in J\}$ es una familia ajena de cortes dirigidos en D.

Por otra parte, sea $v \in V(D)$

si $v \in Y_i$ para alguna $i \in J$, tenemos

$$|\Gamma(v) \cap t_i| = |\Gamma(v) \cap t'| \leq |\Gamma(v) \cap t|$$

si $v \in V^+(D) \cap V(D_0)$.

$$|\Gamma(v) \cap t'| = |\Gamma(v) \cap \hat{t}_0| \leq |\Gamma(v) \cap t|$$

es decir

$$|\Gamma(v) \wedge t'| \leq |\Gamma(v) \wedge t| \qquad \forall\, v \in V(D).$$

$\blacksquare$

Algoritmo.

P.1. Sea t una transversal.

P.2. Encuéntrese t' transversal sin trayectorias decrementales.

P.3. (i) Si $\forall\, v \in V^+$, $|\Gamma(v) \cap t'| = 1$, t' y $\mathcal{D} = \{\Gamma(v) \mid v \in V^+\}$ es el par equicardinal.

(ii) Si $\forall\, v \in V^-$, $|\Gamma(v) \cap t'| = 1$, t' y $\mathcal{D} = \{\Gamma(v) \mid v \in V^-\}$ es el par equicardinal.

P.4. Si P.3. no sucede. Hállese la familia $\{Y_i\}$.

P.5. Para D_{Y_i} encuéntrese una par t_i, $\mathcal{D}_i$

P.6. Sea $t_o = t' \cap F(D_o)$, hagamos que

$$|\Gamma(Y_i) \cap t_i| = |\Gamma(Y_i) \cap t_o| = 1.$$

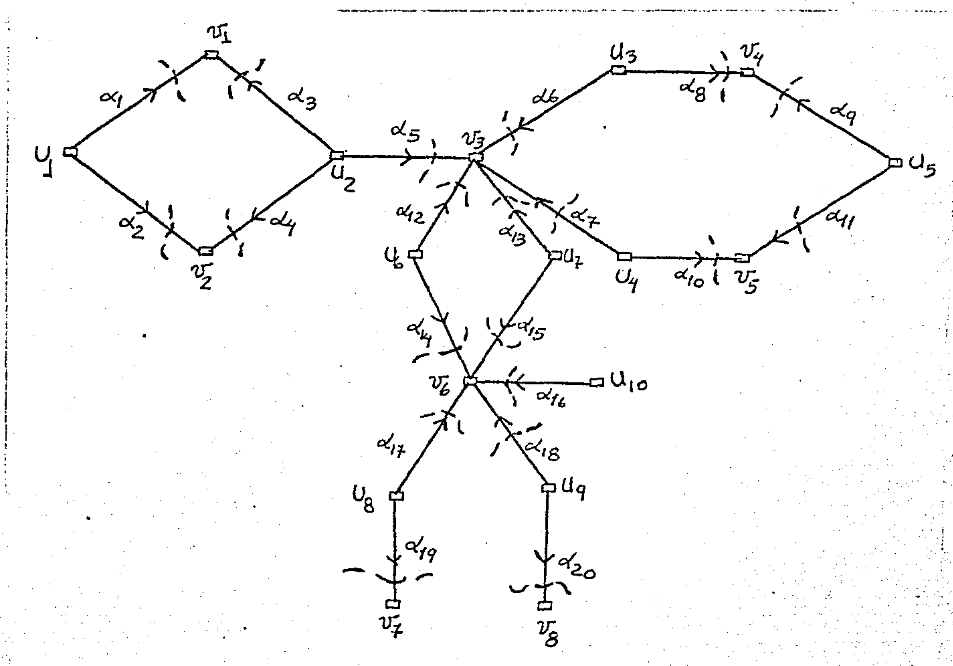
P.7. $t = \bigcup t_i$, $\mathcal{D} = \bigcup \mathcal{D}_i$ es el par equicardinal.

4.2 Ejemplos.

Ilustramos el uso del algoritmo, omitiendo algunos pasos que pueden ser reconstruidos fácilmente.

Ejamplo. 1

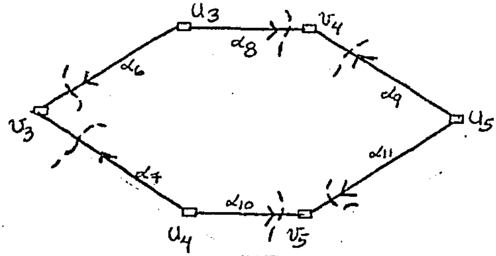
1). Iniciamos con $t = F(D)$.



D

(2) Encontramos una transversal sin trayectorias decrementales.

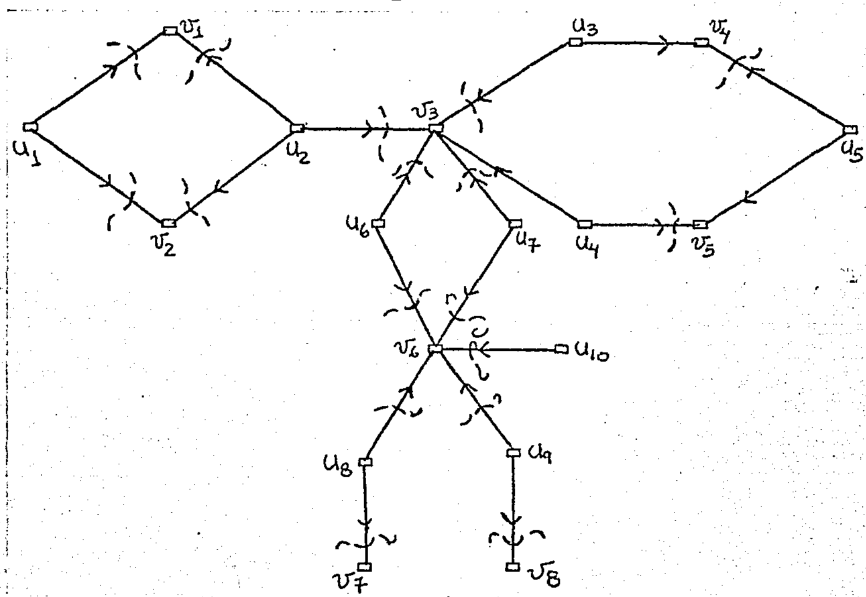
(2.a).



$\Pi_1 = u_4 \alpha_7 v_3 \alpha_6 u_3 \alpha_8 v_4 \alpha_9 u_5 \alpha_{11} v_5$; $\Pi_2 = u_4 \alpha_{10} v_5$.

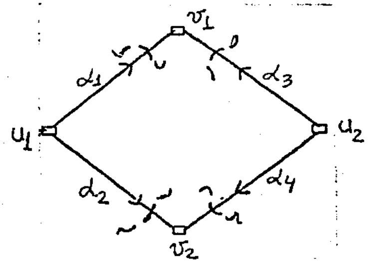
Par de trayectorias decrementales.

Nueva transversal, t_1.



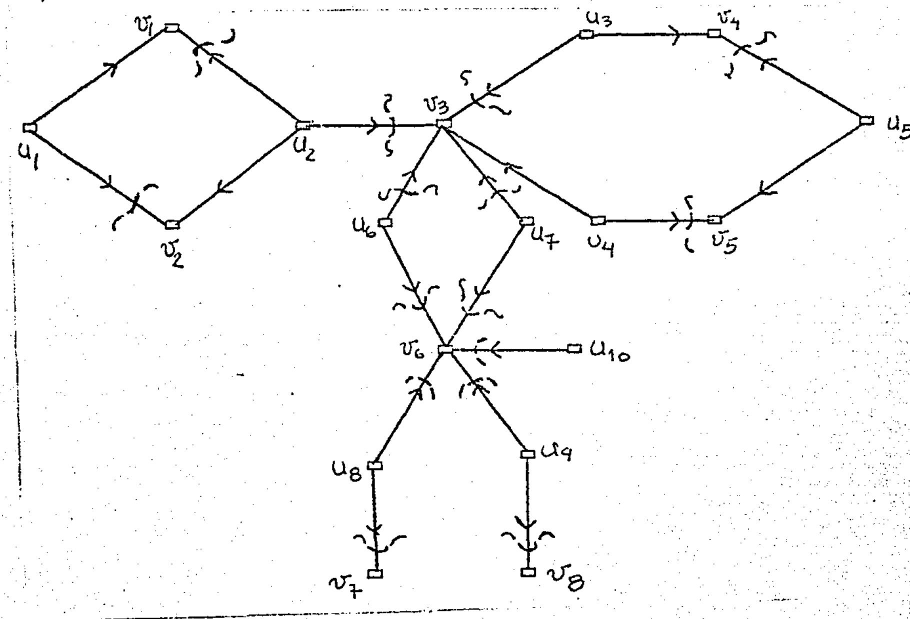
2

(2.b)

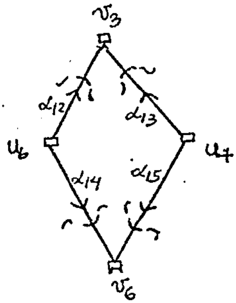


$\Pi_1 = u_1 \alpha_1 v_1 \alpha_3 u_2 \alpha_4 v_2$; $\Pi_2 = u_1 \alpha_2 v_2$
par de trayectorias decrementales

Nueva transversal, t_2

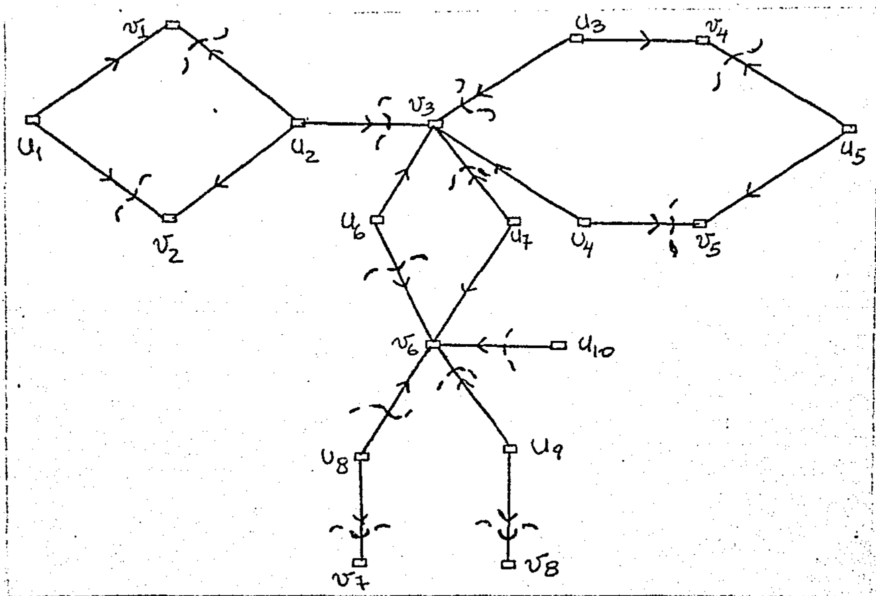


(2.c).



$\Pi_1 = v_6 \alpha_{12} v_3 \alpha_{13} u_7 \alpha_{15} v_6$; $\Pi_2 = v_6 \alpha_{14} v_6$
par de trayectorias decrementales.

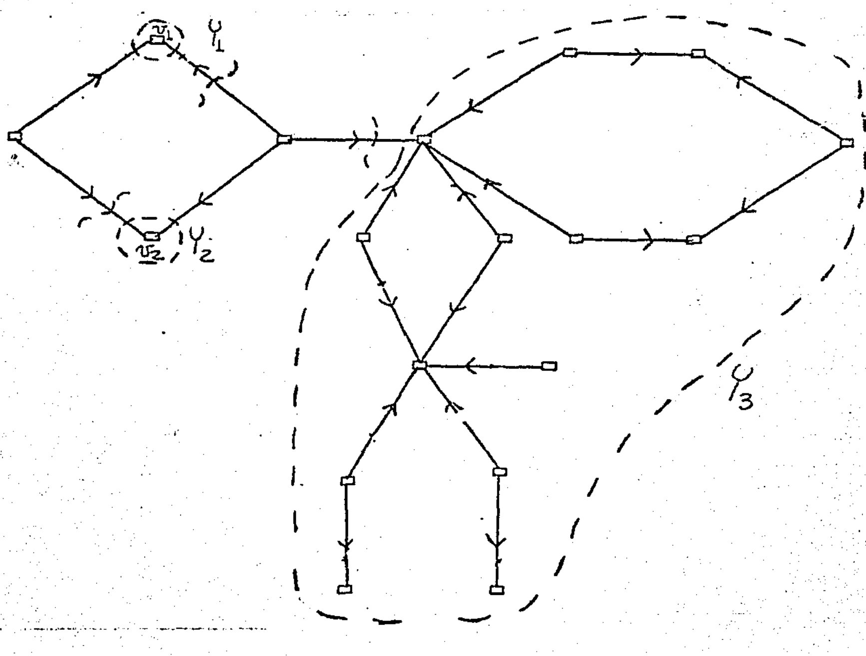
Nueva transversal. t_3



t_3 no tiene trayectorias decrementales.

3. (a) $v_3 \in V^-$ y $|\Gamma(v_3) \cap t_3| = 3$.
   (b) $u_2 \in V^+$ y $|\Gamma(u_2) \cap t_3| = 2$.

4. Encontramos la familia $\{\Psi_i\}$.
   $\Psi_1 = \{v_1\}$, $\Psi_2 = \{v_2\}$ y $\Psi_3 = \{u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$.



5. las subdigráficas D_{φ_i} $i = 1, 2, 3$.

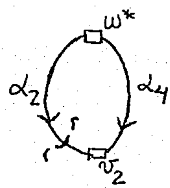
D_{φ_1}

D_{φ_1}

Un par equicardinal.

$t_1' = \{\alpha_3\}$ $\mathcal{D}_1 = \{T(v_1)\}$.

D_{φ_2}

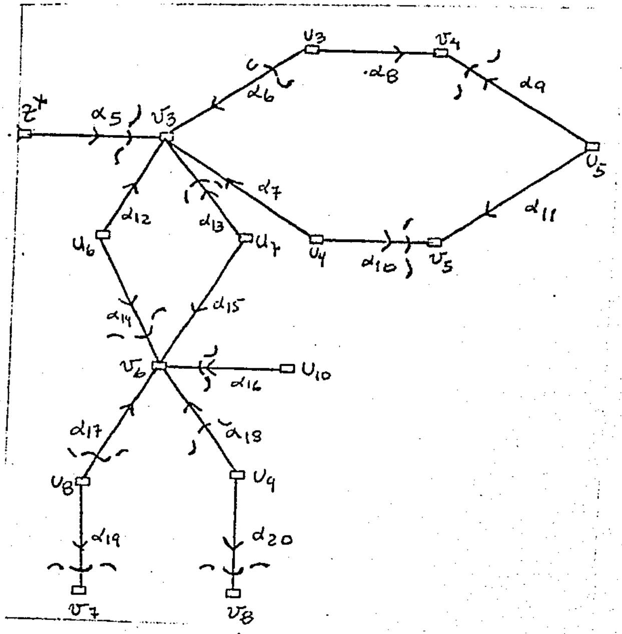


D_{φ_2}

Un par equicardinal.

$t_2' = \{\alpha_2\}$ $\mathcal{D}_2 = \{T(v_2)\}$.

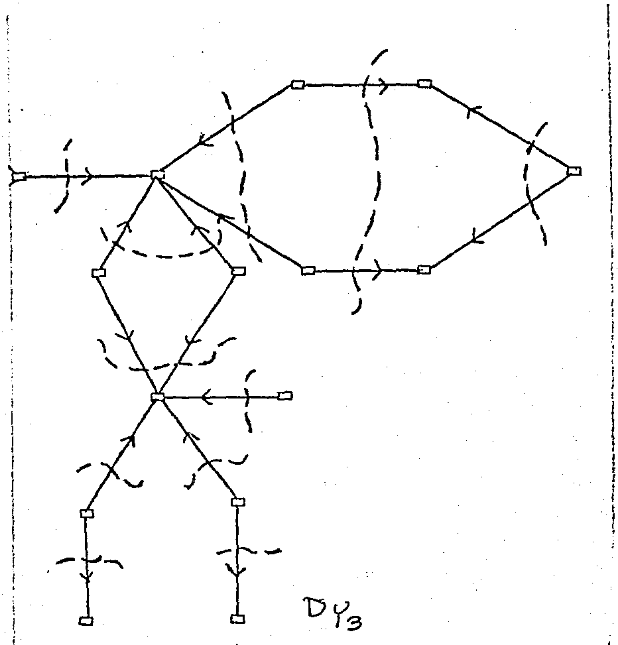
D_{Y_3}



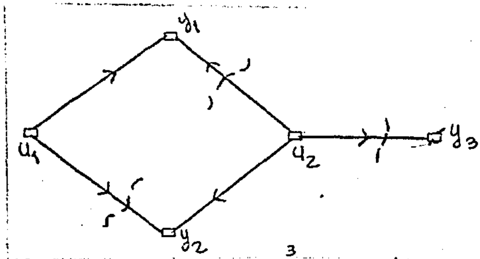
D_{Y_3}

Un par equicardinal.

$t_3' = \{\alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{16}, \alpha_{17}, \alpha_{18}, \alpha_{19}, \alpha_{20}\}$.



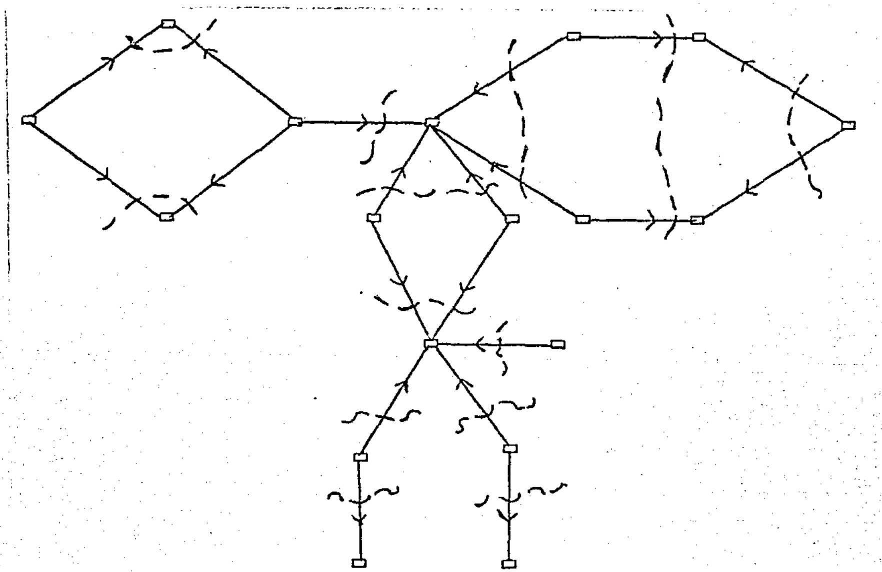
Familia ajena de cortes dirigidos.



$D_0 = D\,ctr[\bigcup_{i=1}^{3} Y_i]$, t_0 una transversal.

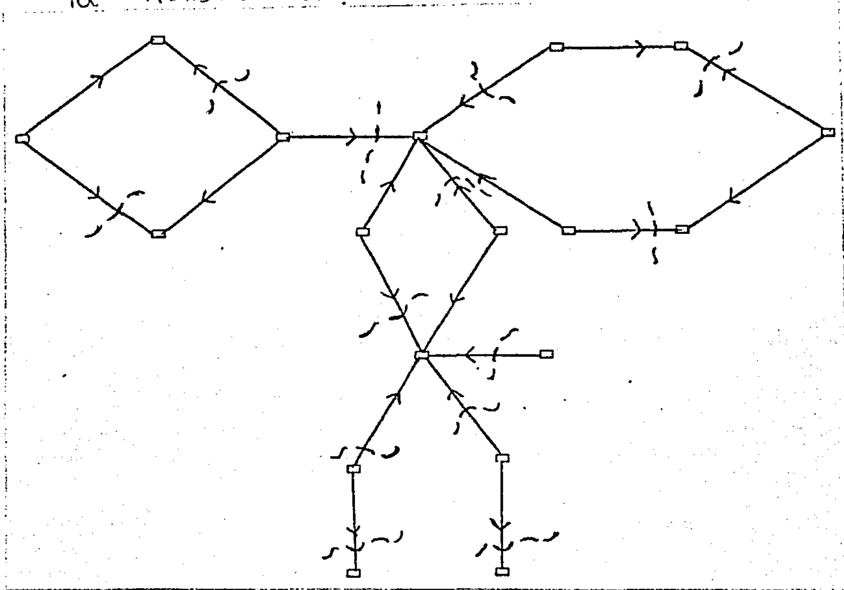
Se tiene que $T(Y_i) \cap t_i' = T(Y_i) \cap t_0$

6. Un par equicardinal.



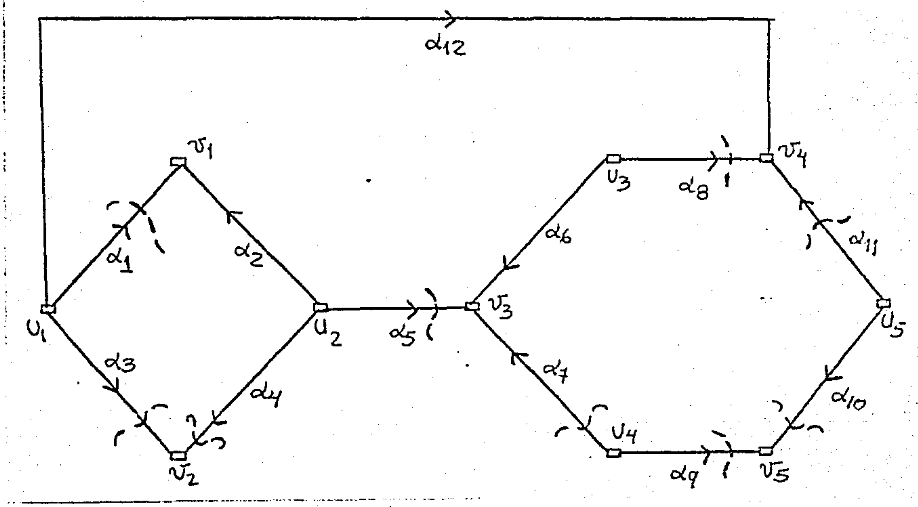
Familia ajena de cortes dirigidos.

la transversal



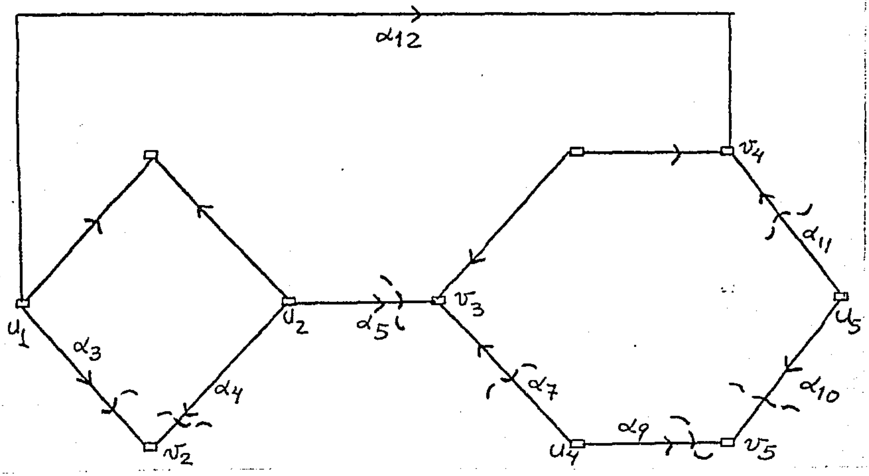
Ejemplo 2.

Iniciamos con
$t=\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}\}$.



D

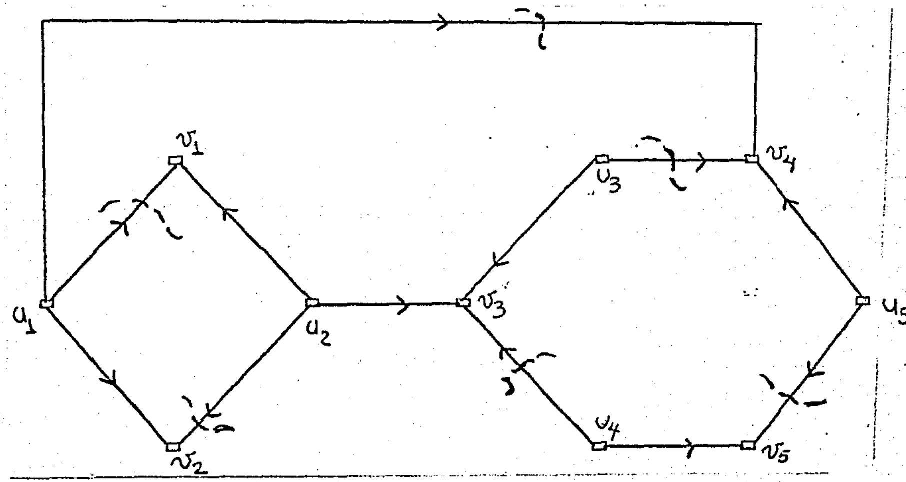
2. Encontrar trayectorias decrementales.



$\Pi_1 = u_5\alpha_{11}v_4\alpha_{12}u_1\alpha_3 v_2\alpha_4 u_2\alpha_5 v_3\alpha_7 u_4\alpha_9 v_5$; $\Pi_2 = u_5\alpha_{10}v_5$

Par de Trayectorias decrementales.

Nueva transversal. t_1.



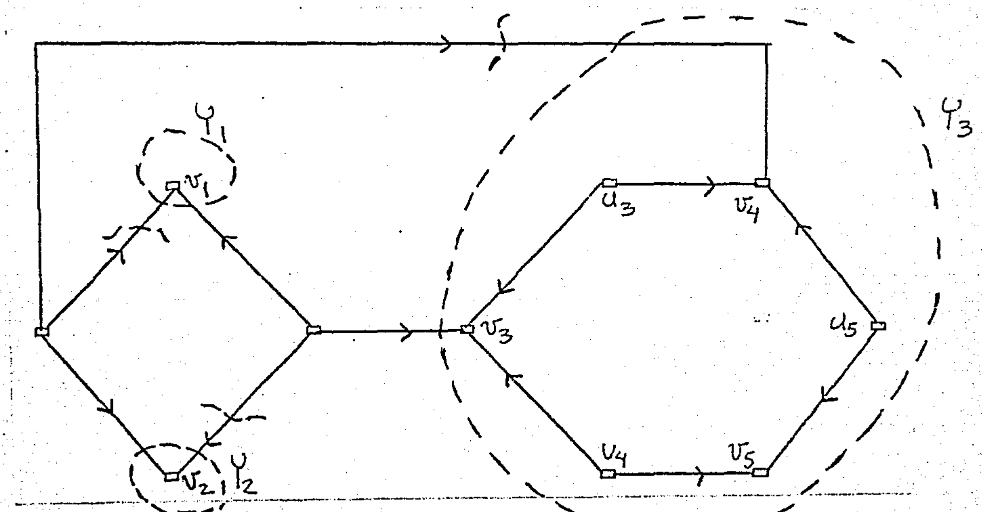
t_1 no tiene trayectorias decrementales.

3. (a) $v_4 \in V^-$ y $|\Gamma(v_4) \cap t_1| = 2$

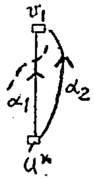
(b) $u_1 \in V^+$ y $|\Gamma(u_1) \cap t_1| = 2$.

4. Encontrar la familia $\{Y_i\}$.

$Y_1 = \{v_1\}$, $Y_2 = \{v_2\}$, $Y_3 = \{v_3, u_3, u_4, v_4, v_5, u_5\}$.

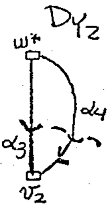


5. Trabajar con D_{Y_i}.



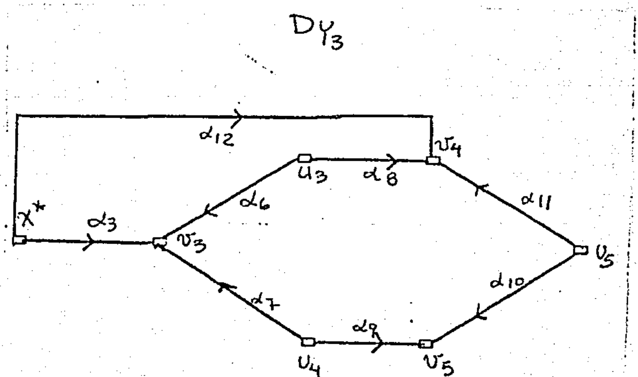
Un par equicardinal en D_{Y_1},

$t^{(1)} = \{\alpha_1\}$, $\mathcal{D}_1 = \{T(v_1)\}$.

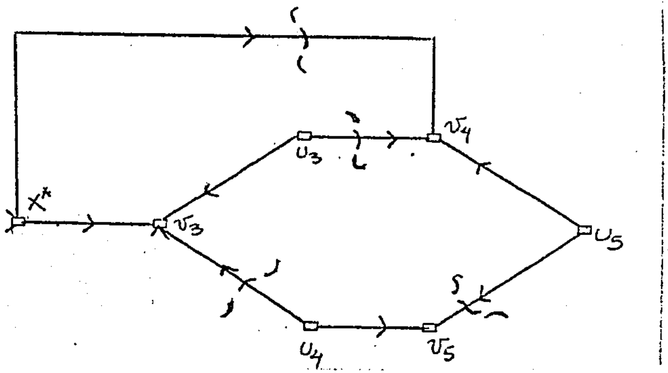


Un par equicardinal en D_{Y_2}

$t^{(2)} = \{\alpha_4\}$, $\mathcal{D}_2 = \{T(v_2)\}$.

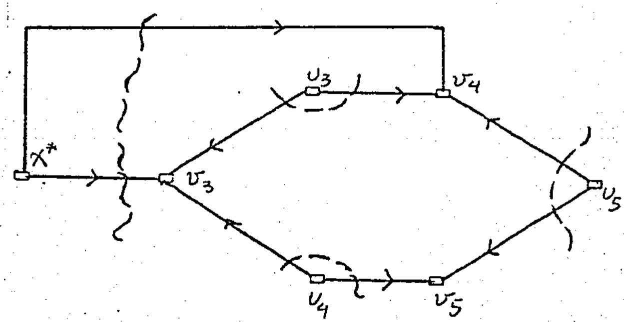


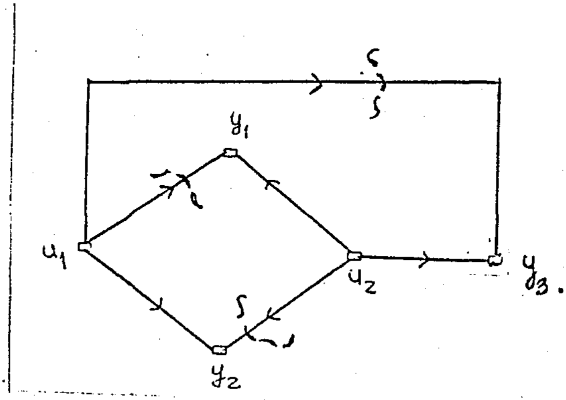
una transversal . $t^{(3)}$



Notamos que $|\Gamma(v) \cap t^{(3)}| = 1 \quad \forall v \in V^+$

Familia ajena de cortes dirigidos





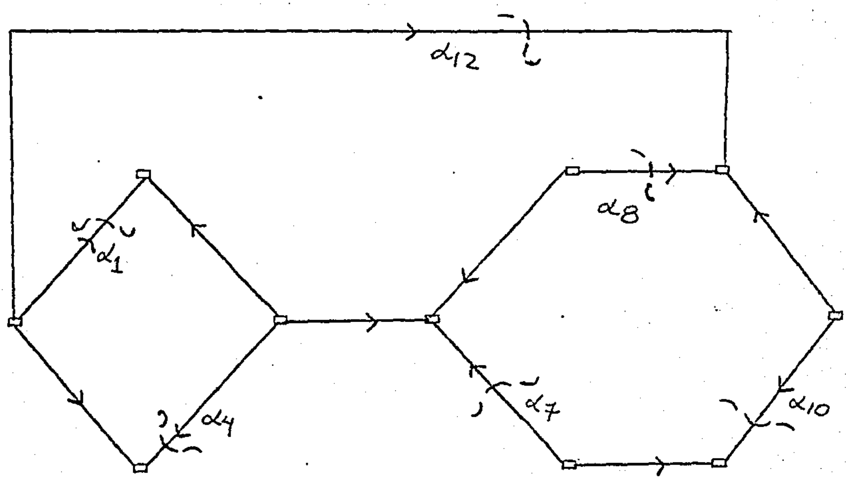
$D_0 = D\,art[\bigcup_{i=1}^{3} Y_i]$

una transversal $t_0 = t_1 \cap F(D_0)$.

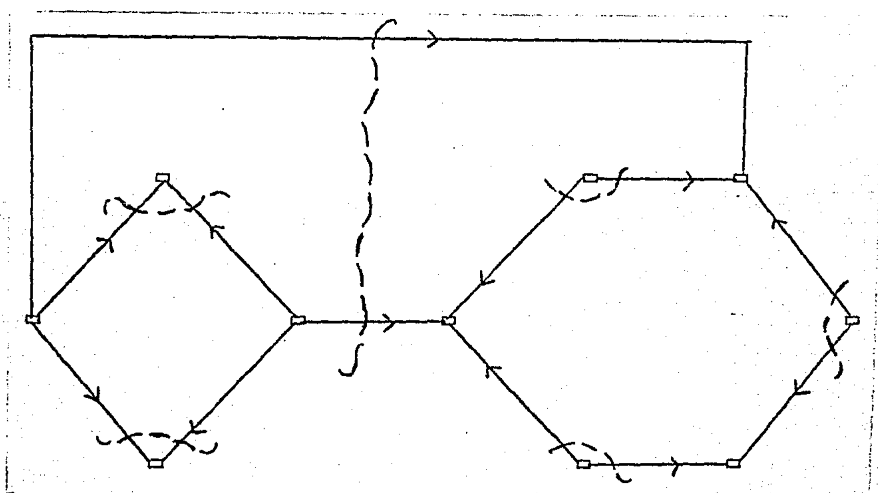
Notemos que

$$|T(Y_i) \cap t^{(i)}| = |T(Y_i) \cap t_0| = 1.$$

6. Formar la pareja equicardinal.



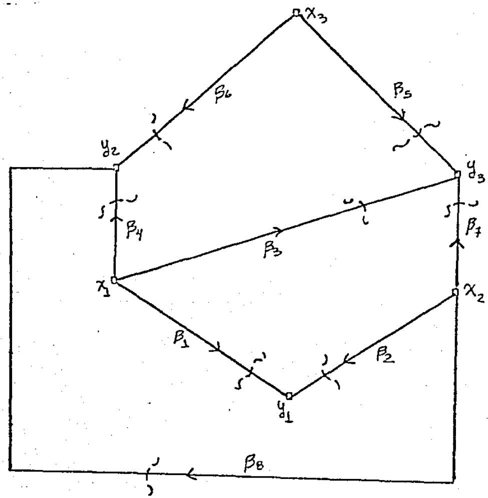
Transversal



Familia ajena de cortes dirigidos.

Ejemplo. 3

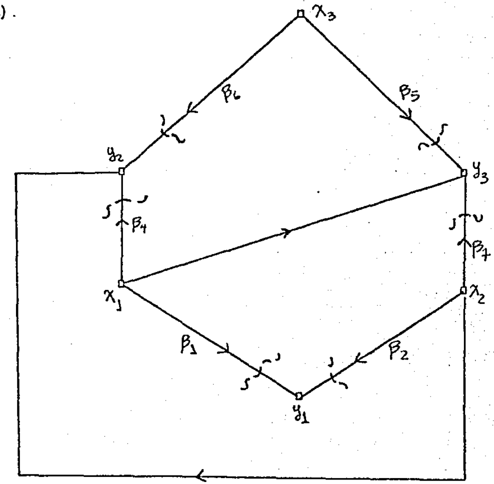
1. Iniciamos con $t = F(D)$.



D.

2. Encontrar trayectorias decrementales.

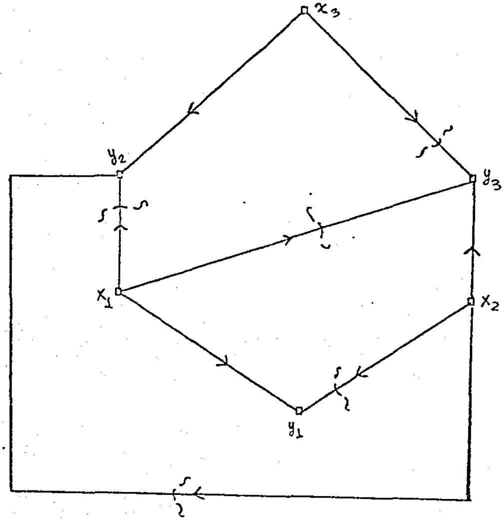
2.(a).



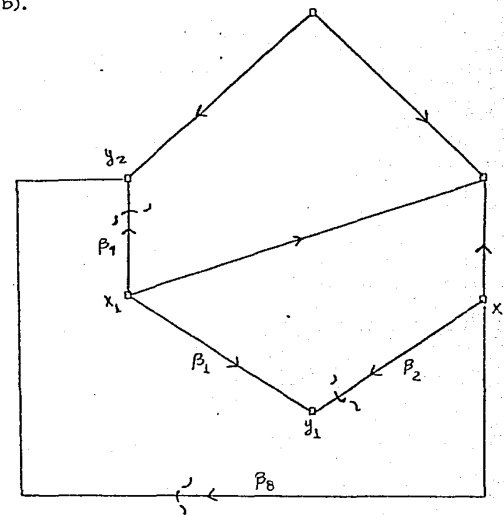
$\Pi_1 = x_1 \beta_1 y_1 \beta_2 x_2 \beta_7 y_3 \beta_5 x_3 \beta_6 y_2$; $\Pi_2 = x_1 \beta_4 y_2$

par de trayectorias decrementales.

Nueva transversal. t_1



2.(b).

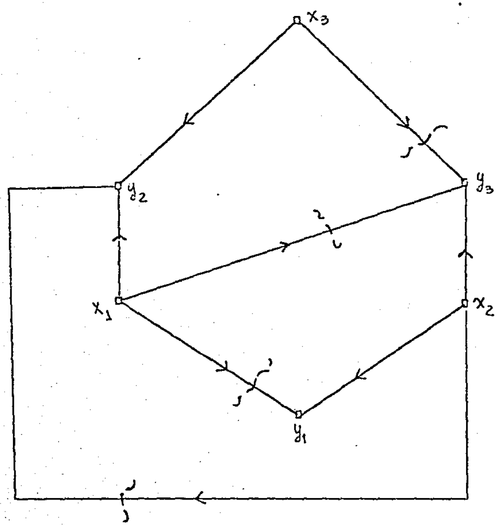


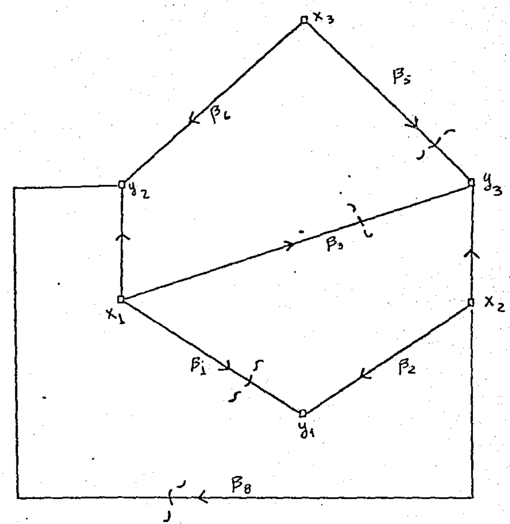
$\Pi_1 = x_2 \beta_2 y_1 \beta_1 x_1 \beta_4 y_2$; $\Pi_2 = x_2 \beta_8 y_2$

par de trayectorias decrementales

Nueva transversal t_2

2(c).

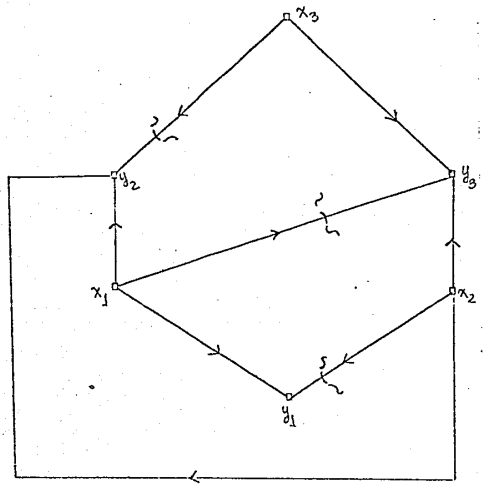




$\Pi_1 = x_1 \beta_1 y_1 \beta_2 x_2 \beta_8 y_2 \beta_6 x_3 \beta_5 y_3$; $\Pi_2 = x_1 \beta_3 y_3$

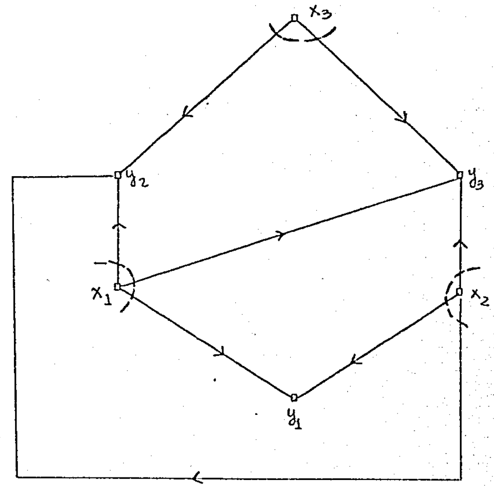
par de trayectorias decrementales.

Nueva transversal. t_3



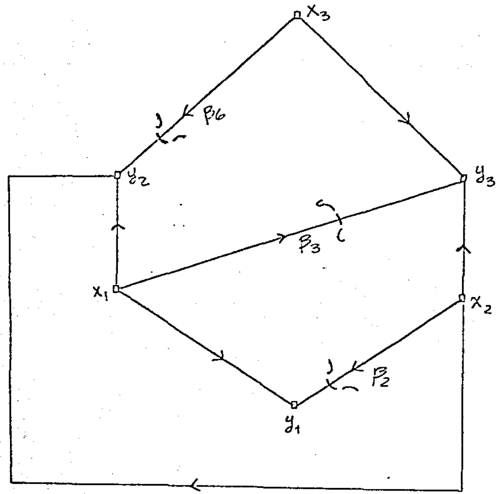
t_3 no tiene trayectorias decrementales.

3. $\forall\, x \in V^+,\ |\Gamma(x) \cap t| = 1$



Familia ajena de cortes dirigidos.

transversal de cardinalidad mínima.



$t_3 = \{\beta_2, \beta_3, \beta_6\}$.

"Usted compró mucho de mí y por nada. Por una sonrisa, una inclinación de cabeza, un saludo con la mano y algunas copas tomadas en un bar tranquilo y confortable. Fue agradable mientras duró. Hasta la vista. No le digo adios. Se lo dije cuando tenia algún significado. Se lo dije cuando era triste solitario y final"

Philip Marlowe.
en el "Largo adios".

APENDICE

A.

Algunos Algoritmos

A.1. Algoritmo para encontrar una t-trayectoria.

El algoritmo para una t-trayectoria es el que se utiliza en gráficas y digráficas para trayectorias de longitud mínima [2], . Para establecerlo necesitamos el siguiente concepto.

<u>a.1. Definición</u>. Para $u \in V(D)$, los vecinos de u en D es el conjunto de vértices

$$N(u) = \{ v \in V(D) / (u,v) \in F(D) \text{ ó } (v,u) \in F(D) \}.$$

también se usan las siguientes etiquetas temporales y permanentes para los vértices.

$\varepsilon(v)$ etiqueta temporal en el vértice v.

$\varepsilon^*(v)$ etiqueta permanente en el vértice v.

$h(v)$ etiqueta permanite en el vértice v.

Los conjuntos

$$E = \{v \in V(D) \mid v \text{ tiene etiqueta temporal } \varepsilon(v)\}$$

$$E^* = \{v \in V(D) \mid v \text{ tiene etiqueta permanente } \varepsilon^*(v)\}.$$

La etiqueta permanente $\varepsilon^*(v)$ nos dirá cuando alcanzemos el vértice deseado en V^-. La etiqueta $h(v)$ permite recobrar la t-trayectoria.

Los pasos P.6 y P.7 funcionan como un "loop", igualmente los pasos P.8 y P.2 (en ese orden).

A.1. Algoritmo para encontrar una t-trayectoria con origen $a \in V^+$ y final $b \in V^-$.

A.1. Algoritmo para encontrar una t-trayectoria con origen $a \in V^+$ y final $b \in V^-$.

P.0. (Peso a las flechas). Sea $\omega: F(D) \to \{0,1\}$ dada por $\omega(\alpha) = 0$, si $\alpha \in t$; $\omega(\alpha) = 1$ si $\alpha \notin t$.

P.1. (Inicio). Hagamos $\mathcal{E}^*(a) = 0$ y $\mathcal{E}(v) = \infty$ para $v \neq a$.

Sea $a = p$

P.2. (Actualización de etiquetas) Si $u \in N(p)$ y tiene etiqueta temporal, actualizar de acuerdo con

$$\mathcal{E}(u) = \min\{\mathcal{E}(u), \omega(p,u)\}.$$

P.3. Sea $\mathcal{U} = \{u \mid \mathcal{E}(u) = 0\}$

P.4. (Etiquetación permanente). Si $u \in \mathcal{U}$, sea $\mathcal{E}^*(u) = 0$ y $h(u) = p$.

P.5. (i) Si $b \in \mathcal{U}$, hemos encontrado una ab-t-trayectoria

$$\Pi = a, \ldots, h(h(b)), h(b), b.$$

(ii) Si $b \notin \mathcal{U}$, ir a P.6.

P.6. Para cada $u \in \mathcal{U}$, sea $u = \varphi$

P.7. (Etiquetación permanente). Si $x \in N(\varphi)$ y tiene etiqueta temporal $\varepsilon(x)$, sea $\varepsilon^*(x) = 0$ y $h(x) = \varphi$.

P.8. Sea $x = p$ ir a P. 2.

P.9. (Final) terminamos cuando P. 5.(i) se cumpla.

Como $T(a)$ es cofrontera dirigida, el inicio del algoritmo puede hacerse. Ahora bien lo que garantiza encontrar la t-trayectoria es el siguiente resultado.

<u>a.1. Teorema.</u> En cualquier iteración de A.1. si no hemos llegado a b, se tiene en P.3. que $\mathcal{U} \neq \emptyset$. En consecuencia una nueva iteración de A.1. se puede realizar.

<u>Demostración</u>.

Supongamos que hemos realizado n-iteraciones de A.1. y no hemos llegado al vértice b. (hasta antes de P.2).

Sea $E_n^* = \{ v \in V(D) \mid \varepsilon^*(v) = 0$, hasta la iteración $n \}$.

entonces $E_n^* \neq \emptyset$, ya que $a \in E_n^*$, y $(E_n^*)^c \neq \emptyset$, ya que $b \notin E_n^*$.

Como D es conexa, $T(E_n^*) \neq \emptyset$.

Sea $\alpha = (y, z) \in T(E_n^*)$

si $z \in E_n^*$, tenemos que $\varepsilon^*(z) = 0$ se hizo en la iteración m, $1 \leq m \leq n$; de donde y tiene etiqueta temporal después de la iteración n, también tiene etiqueta temporal en la iteración m, por lo cual en P.7. de la iteración m hicimos $\varepsilon^*(y)=0$ i.e. $y \in E_n^*$ ¡!

De donde $y \in E_n^*$ y $\Gamma(E_n^*)$ es cofrontera dirigida hacia adelante, por lo cual existe $\beta \in \Gamma(E_n^*) \cap t$ con $\varepsilon^*(p\beta)=0$, $\varepsilon(n\beta)$ temporal y $\omega(\beta)=0$

$\therefore \mathcal{U} \neq \phi$.

A.2. Algoritmo para encontrar un par de t-trayectorias ajenas hacia adelante.

Usamos las etiquetas permanentes y temporales descritas en A.1. Iniciamos con una ab-t-trayectoria Π, obtenida posiblemente de A.1., que puede cambiar en el transcurso del algoritmo, ésta trayectoria sirve de pivote. Se define una función de peso en las flechas que dependen de t y Π.

La idea del algoritmo es la misma que en A.1., se hace crecer una red de t-trayectorias con origen en a, ajenas hacia adelante con Π. Cuando no sea posible seguir este camino será por dos motivos.

(1) La cofrontera dirigida hacia adelante que se analiza tiene una sola flecha en t. De aquí la imposibilidad de obtener el par de t-trayectorias ajenas hacia adelante.

(2) La cofrontera dirigida hacia adelante tiene más de una flecha en t, las cuales pertenecen a Π, entonces cambiamos de trayectoria pivote, de función de peso en las flechas, etiquetamos nuevos vértices y seguimos creciendo la red de t-trayectorias. La recuperación de la t-trayectoria es como en A.1.

A.2. Algoritmo para encontrar un par de t-trayectorias ajenas hacia adelante con origen $a \in V^+$ y final en $b \in V^-$.

M.0. (Peso a las flechas). Π es una ab-t-trayectoria
Sea $\omega : F(D) \to \{0,1\}$ dada por $\omega(\alpha) = 0$ si $\alpha \in t\text{-}c_f\Pi$, $\omega(\alpha) = 1$ si $\alpha \notin t\text{-}c_f\Pi$.

M.1. (Inicio). Hagamos $\varepsilon^*(a) = 0$ y $\varepsilon^*(v) = \infty$ para $v \neq a$
Sea $a = p$, incorporar a en E^*.

M.2. (Actualización de etiquetas). Para $v \in N(p)$ con etiqueta temporal actualizar de acuerdo a

$$\mathcal{E}(v) = \min\{\mathcal{E}(v), \omega(p,v)\}$$

M.3. Sea $\beta = \{v \mid \mathcal{E}(v) = 0\}$.

(i) Si $\beta \neq \phi$ ir a M.4.

(ii) Si $\beta = \phi$ ir a R.1.

M.4. (Etiquetación permanente). Si $v \in \beta$, hacer $\mathcal{E}^*(v) = 0$ y $h(v) = p$, incorporar v en E^*

M.5. (Buscando la t-trayectoria ajena hacia adelante con Π)

(i) Si $b \in \beta$, $\Pi' = a, \ldots, h(h(b)), h(b), b$ es ab-t-trayectoria ajena hacia adelante con Π.

(ii) Si $b \notin \beta$ ir a M.6.

M.6. Para cada $v \in \beta$ sea $v = \varphi$.

M.7. (Etiquetación permante). Si $y \in N(\varphi)$ con etiqueta temporal hacer $\varepsilon^*(y)=0$, $h(y)=\varphi$, incorporar y en E^*

M.8. Sea $y=p$ ir a M.2.

Cambio de trayectoria Π.

R.1. $\beta = \phi$

Como $T(E^*) \cap t \neq \phi$, tenemos dos casos.

(i) $|T(E^*) \cap t| = 1$

sea $X=E^*$ entonces $a \in X$ y $b \in V(D)-X$.

(ii) $|T(E^*) \cap t| > 1$ ir a R.2.

R.2. Sea $\alpha \in T(E^*) \cap C_f \Pi$ la última flecha de Π con esta propiedad, y sea

$$W = \{v \in V(D) \mid v \text{ esta en } \Pi \text{ antes de } p\alpha\}.$$

$\Pi' = a, \ldots, h(h(p\alpha)), h(p\alpha), p\alpha.$

R.3. (Etiquetación Permante). Sea $v \in W$ con etiqueta temporal, hacer $\varepsilon^*(v)=0$, incorporar v en E^*; $h(v)=z$ si y solo si (z,v) esta en Π ó (v,z) esta en Π.

R.4. (Etiquetación permanente) Si $x \in V^- \cap W$ y $u \in N(x)$ tiene etiqueta temporal, hacer $\varepsilon^*(u)=0$, $h(u)=x$. incorporar x en E^*.

R.5. (Cambio de t-trayectoria).

Sea $\Pi = (a, \Pi', p\alpha) \cup (n\alpha, \Pi, b)$

la nueva ab-t-trayectoria pivote.

R.6. (Cambio de peso en las flechas).

Hacer M.0.

R.7. Para cada vértice con etiqueta permanente hacer $v=p$ ir a M.2.

F. (Final) Terminamos cuando $M.5.(i)$ ó $R.1.(i)$ se cumpla.

A.3. Algoritmo para encontrar un corte dirigido hacia adentro con una sola flecha en t.

En ésta parte trabajamos con una transversal que no contiene pares de trayectorias decrementales. el algoritmo es similar a A.1. usamos sus etiquetas temporales y permanentes. Si $c \in V^-$ y tiene más de una flecha de t en $\Gamma(c)$, se encontrará un subconjunto de vértices Y donde $c \in Y$, $\Gamma(Y)$ sea corte dirigido hacia adentro con una sola flecha en t.

A.3. Algoritmo para encontrar un corte dirigido hacia adentro con una sola flecha en t.

S.0. Sea t una transversal de cortes dirigidos que no contiene pares de trayectorias decrementales.

Sea $c \in V^-$ tal que $\Gamma(c) \cap t = \{d_1, \ldots, d_r\}$ $r > 1$.

Definimos $\omega : F(D) \to \{0,1\}$ como $\omega(d) = 0$ si $d \in t - \{d_1\}$.

y $\omega(\alpha)=1$ si $\alpha\notin t-\{\alpha_1\}$.

S.1. (Inicio). Sea $\mathcal{E}^*(c)=0$ y $\mathcal{E}(v)=\infty$ para $v\neq a$.
Sea $c=p$. incorporamos c en E^*.

S.2. (Actualización de etiquetas). Para $v\in N(p)$ con etiqueta temporal actualizar de acuerdo con

$$\mathcal{E}(v)=\min\{\mathcal{E}(v),\omega(v,p)\}.$$

S.3. Sea $Z=\{v\mid \mathcal{E}(v)=0\}$.

S.4. (Etiquetación permanente). Para $v\in Z$ hacer
$\mathcal{E}^*(v)=0$ y incorporamos $v\in E^*$

S.5. Sea $v=q$.

S.6. Para cada $u\in N(q)$ con etiqueta temporal hacer
$\mathcal{E}^*(u)=0$ y incorporamos $u\in E^*$

S.7. Sea $u=p$ ir a S.2.

S.8. (Final). terminamos cuando en S.3. $Z=\phi$.
sea $Y=E^*$

En el paso S.2. formamos una cofrontera dirigida hacia adentro, en S.3. tomamos las flechas de ésta cofrontera en el transversal, es evidente que en algun momento Z es vacio. Si E^* es el conjunto de vértices etiquetados permanentemente al final de aplicar el algoritmo A.3. se tiene que para todo $v \in V^+ \cap E^*$ existe una vc-t-trayectoria cuya flecha final esta en $\{\alpha_2,\dots,\alpha_r\}$. si $p\alpha_1 \in E^*$, tendríamos un par de trayectorias decrementales, lo cual por hipótesis no sucede. Finalmente sea $Y=E^*$, $T(Y)$ es cofrontera dirigida hacia adentro donde $T(Y) \cap t = \{\alpha_1\}$.

B

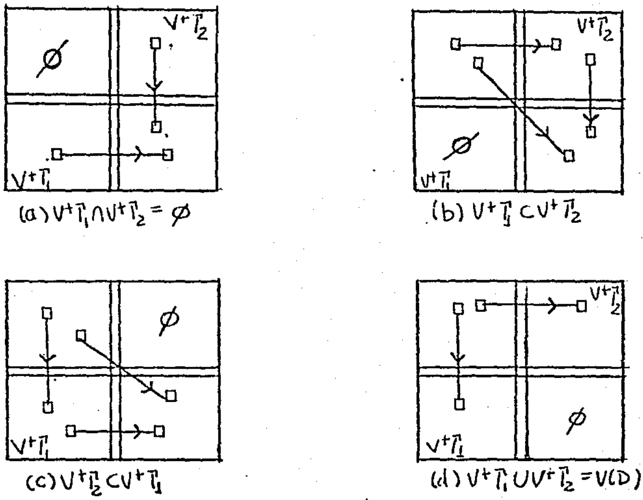
EL Teorema de Lucchesi y Younger

Laminar.

El primer concepto se establece en [4] y se refiere a cofronteras dirigidas, aunque Younger lo implanta para cortes dirigidos.

a.2.1 <u>Definición</u>. Sean Γ_1, Γ_2 cofronteras dirigidas distintas en D diremos que Γ_1 y Γ_2 son <u>laminar</u> si
(a) $V^+\Gamma_1 \cap V^+\Gamma_2 = \phi$; ó (b) $V^+\Gamma_1 \subset V^+\Gamma_2$ ó $V^+\Gamma_2 \subset V^+\Gamma_1$; ó
(c) $V^+\Gamma_1 \cup V^+\Gamma_2 = V(D)$.
De otra forma diremos que se <u>cruzan</u>.

En la definición a.2.1 nunca suceden dos casos a la vez, de (a), (b) y (c), como intuitivamente ilustra la figura a.2.1.



(a) $V^+T_1 \cap V^+T_2 = \varnothing$ (b) $V^+T_1 \subset V^+T_2$

(c) $V^+T_2 \subset V^+T_1$ (d) $V^+T_1 \cup V^+T_2 = V(D)$

EL concepto de Laminar

fig. a.2.1.

a.2.1 Teorema. Si T_1 y T_2 son cofronteras dirigidas, no vacías y distintas entonces

$$\Gamma(V^+T_1 \cap V^+T_2) = T_\xi \quad y \quad \Gamma(V^+T_1 \cup V^+T_2) = T_\eta$$

son co-fronteras dirigidas, además

$$T_1 \cap T_2 = T_\xi \cap T_\eta \quad y \quad T_1 \cup T_2 = T_\xi \cup T_\eta .$$

Demostración.

Supongamos que $V^+T_1 \cap V^+T_2 \neq \phi$ – en caso contrario $T_5 = \phi$ – como D es conexa, $T_5 \neq \phi$,

sean $\alpha \in T_5$, $u, v \in V(D)$ los extremos de α donde

$u \in V^+T_1 \cap V^+T_2$ y $v \in V^-T_1 \cup V^-T_2$.

el vértice v tiene tres posibilidades

(i) $v \in V^-T_1 - V^-T_2$ (ii) $v \in V^-T_2 - V^-T_1$ (iii) $v \in V^-T_1 \cap V^-T_2$.

en cualquiera de ellas, concluimos respectivamente que, ver fig. a.2.2.

(i) $\alpha = (u, v) \in T_1$, (ii) $\alpha = (u, v) \in T_2$ (iii) $\alpha = (u, v) \in V^-T_1 \cap V^-T_2$

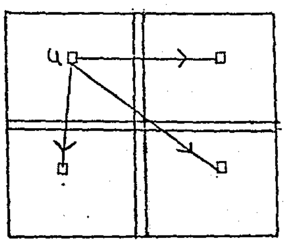


fig. a.2.2

Por lo tanto $u \in V^+T_1 \cap V^+T_2$, es decir T_5 es cofrontera dirigida

Ahora supongamos que $V^+T_1 \cup V^+T_2 \neq V(D)$ — en caso contrario $T_2 = \phi$ —.

Como D es conexa, $T_2 \neq \phi$

Sean $\alpha \in T_2$, $w, z \in V(D)$ los extremos de α, donde $w \in V^+T_1 \cup V^+T_2$ y $z \in V^-T_1 \cap V^-T_2$, con el vertice w se tienen dos posibilidades.

(i) $w \in V^+T_1$ (ii) $w \in V^+T_2$

concluimos respectivamente que, ver fig. a.2.3.

(i) $\alpha = (w, z) \in T_1$ (ii) $\alpha = (w, z) \in V^+T_2$

es decir $w \in V^+T_1 \cup V^+T_2$; T_2 es cofrontera dirigida

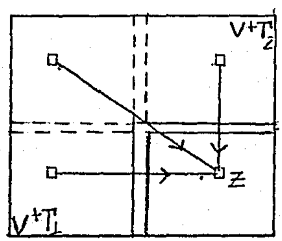


fig. a.2.3.

Probemos que $T_1 \cap T_2 = T_\xi \cap T_\eta$,

para esto tenemos

$$V^+T_1 \cap V^+T_2 \subset V^+T_1 \cup V^+T_2 \quad y \quad V^-T_1 \cap V^-T_2 \subset V^-T_1 \cup V^-T_2 . \qquad (1)$$

Si $\alpha \in T_1 \cap T_2$ entonces

$$p\alpha \in V^+T_1 \cap V^+T_2 \qquad y \quad n\alpha \in V^-T_1 \cap V^-T_2$$

por (1) concluimos que $\alpha \in T_\xi \cap T_\eta$.

Sea $\alpha \in T_\xi \cap T_\eta$, que $\alpha \in T_\xi$ tenemos que

$$p\alpha \in V^+T_1 \cap V^+T_2$$

y que $\alpha \in T_\eta$ se tiene

$$n\alpha \in V^-T_1 \cap V^-T_2$$

es decir $\alpha \in T_1 \cap T_2$.

De ambas contenciones obtemos

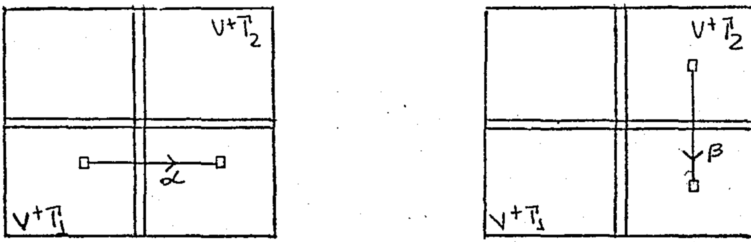
$$T_1 \cap T_2 = T_\xi \cap T_\eta .$$

Probemos que $T_1 \cup T_2 = T_\xi \cup T_2$ con ayuda de

$$T_1 \cap T_2 = T_\xi \cap T_2 . \qquad (2)$$

Sea $\alpha \in T_1 - T_2$, entonces $\alpha \in T_2$ - fig-a.2.4(a)

sea $\beta \in T_2 - T_1$ tenemos que $\beta \in T_2$ - fig a.2.4(b)



(a) (b)

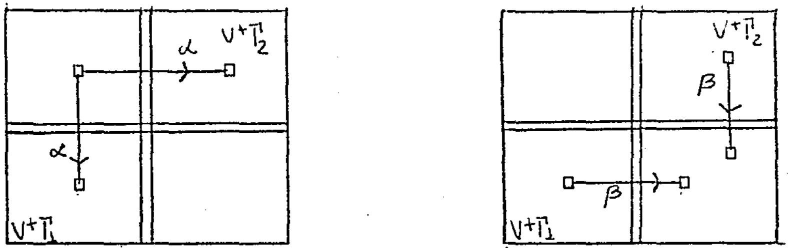
fig. a.2.4.

Con (2) concluímos que

$$T_1 \cup T_2 \subset T_\xi \cap T_2 .$$

Ahora bien sea $\alpha \in T_\xi - T_2$ entonces $\alpha \in T_1$ ó $\alpha \in T_2$ ver fig a.2.5(a).

sea $\beta \in T_2 - T_\xi$, tenemos que $\beta \in T_1$ ó $\beta \in T_2$ ver fig. a.2.5(b)



(a) (b)

fig.a.2.5

Con (2) tenemos que

$$T_\xi \cup T_\eta \subset T_1 \cup T_2$$

De ambas contenciones se tiene

$$T_1 \cup T_2 = T_\xi \cup T_\eta .$$

■

1.2.1. Corolario. Si T_1, T_2 se cruzan entonces T_ξ y T_η son laminar

Demostración

$T_\xi, T_\eta \neq \emptyset$ y $V^+T_\xi \subset V^+T_\eta$ ■

El siguiente resultado es para una clase de multi-familias de cofronteras dirigidas donde el corolario es la base.

a.2.2. Teorema. Si F es una multi-familia de cofronteras dirigidas, donde cualquier flecha en estas cofronteras pertenece a lo más a dos de èllas; entonces existe F' familia de cofronteras dirigidas, dos a dos laminar, $|F|=|F'|$ y F' cumple la misma propiedad que F.

Demostración.

Sean $T_1, T_2 \in F$ que se cruzan, por el corolario a.2.1. T_ξ y T_η son laminar.

Consideremos $F_0 = F \cup \{T_\xi, T_\eta\} - \{T_1, T_2\}$, claramente

$$|F_0| = |F|.$$

Ahora probemos que F_0 cumple la misma propiedad de F.

Sea $\alpha \in T_1 \cap T$, $T \in F - \{T_2\}$ por la hipótesis en F $\alpha \notin T_2$ y como $T_1 \cap T_2 = T_\xi \cap T_\eta$. se tiene

$$\alpha \notin T_\xi \cap T_\eta . \qquad (1)$$

además $T_1 \cup T_2 = T_\xi \cup T_\eta$ nos dice

$$\alpha \in T_\xi \cup T_\eta \qquad (2)$$

de (1) y (2) α pertenece a uno solo de los conjuntos T_ξ y T_η ; y dentro de F_0 a T.

Si $\alpha \in T_1 \cap T_2$ claramente T_ξ y T_η son las únicas cofronteras en F_0 que pertenece α.

También si $\alpha \in T \cap T'$, $T, T' \in F - \{T_1, T_2\}$ se tiene que

$\alpha \notin T_\xi \cap T_\eta$.

F_0 cumple la misma propiedad de F.

Por otra parte es fácil deducir

$$|V^+T_1|^2 + |V^+T_2|^2 < |V^+T_\xi| + |V^+T_\eta|^2 .$$

de donde

$$\sum_{T \in F} |V^+T|^2 < \sum_{T \in F_0} |V^+T|^2 . \qquad (3)$$

Reemplazamos F por F_0; y en F_0 cambiamos dos cofronteras que se cruzen por dos nuevas cofronteras que laminar. Repetimos el procedimiento y la relación (3) nos garantiza que llegaremos a una multi-familia F' con las condiciones requeridas ya que para cualquier multifamilia obtenida en el proceso, digamos F^*

$$\sum_{T \in F^*} |V^+T|^2 < K$$

con $K = |F|\,|V(D)|^2$.

$\blacksquare$

Un Lema.

El paso importante en la demostración del Teorema de Luchesi y Younger es un resultado establecido por Lovász en [4], donde intervienen la multi-familia de cofronteras dirigidas del Teorema; así como algunos conceptos de Teoría de Gráficas que pueden consultarse en [1], [2] y [3]: también se da una definición entre cofronteras dirigidas útil en el caso laminar.

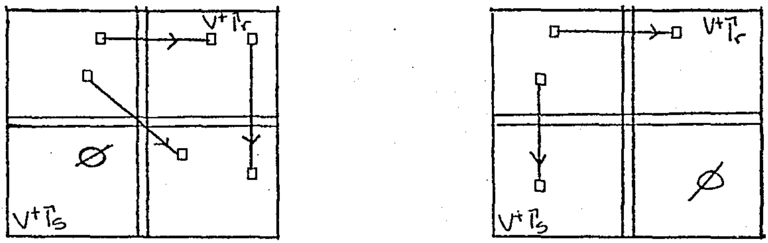
a.2.2 <u>Definición</u>. Sean T_s y T_r cofronteras dirigidas distintas;

(i) T_s esta a la izquierda de T_r si

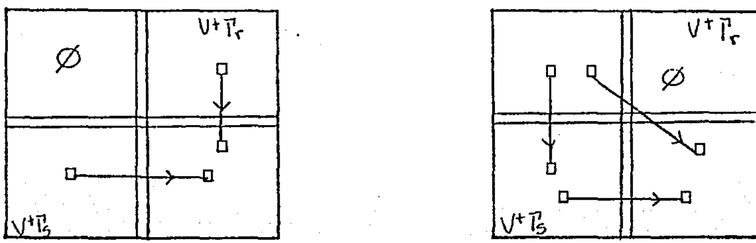
$$V^+T_s \subset V^+T_r \quad ó \quad V^-T_s \subset V^+T_r$$

(ii) T_s esta a la derecha de T_r si

$$V^+T_s \subset V^-T_r \quad ó \quad V^-T_s \subset V^-T_r .$$



T_s a la izquierda de T_r



T_s a la derecha de T_r

fig. a.2.6

a.2.1. <u>Lema</u>. Si una digráfica D contiene a lo más k cortes dirigidos ajenos y F es cualquier multifamilia de cofronteras dirigidas en $\dot{D}$ tal que cualquier flecha de una cofrontera en F pertenece a lo más a dos de ellas entonces $|F| \leq 2k$.

<u>Demostración</u>

Por el Teorema suponemos que F consiste de cofronteras laminares dos a dos.

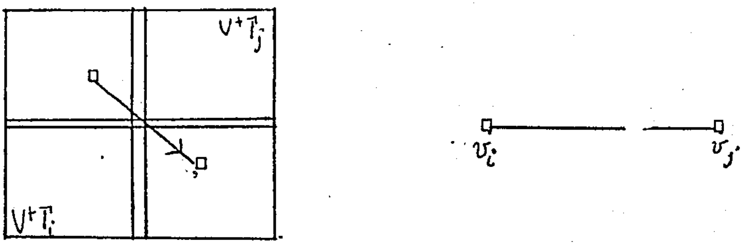
Sea $F = \{T_1, \ldots, T_N\}$, construimos la gráfica G' como sigue:

$V(G') = \{v_1, \ldots, v_N\}$;

$$v_i \text{ ady } v_j \iff T_i \cap T_j \neq \emptyset .$$

Probemos que G' es bipartita, esto implicará que G' tiene a lo más $2k$ vértices (k en cada clase de color).

Consideremos un ciclo en G', digamos.



Construcción de G'.
fig. a.2.7

$C = v_1, v_2, \ldots, v_m v_1$

y los correspondientes conjuntos

$$V^+T_i = V_i^+ \qquad i = 1, \ldots, m.$$

$T_1, \ldots, T_m$ son distintos, ya que si $T_u = T_v$, cada flecha de T_v pertenece a T_u, y por la propiedad de F a ninguna otra cofrontera en ella, es decir v_v tiene grado 1 en G' y no puede pertenecer a un ciclo de G'.

Como T_i, T_{i+1} son laminar ($i \equiv 1, 2, \ldots m \mod(m)$). y $T_i \cap T_{i+1} \neq \phi$ (No puede suceder que $V_i^+ \cup V_{i+1}^+ \neq V(D)$ y $V_i^+ \cap V_{i+1}^+ = \phi$) tenemos que.

$$V_i^+ C V_{i+1}^+ \quad ó \quad V_{i+1}^+ C V_i^+ \qquad (1)$$

dentro de C las dos posibilidades deben ocurrir alternativamento (esto nos dice que m es par) Supongamos que no sucede, es decir que

$$V_0^+ C V_1^+ C V_2^+ . \qquad (2)$$

De (2) tenemos

T_2 esta a la derecha de T_1

T_0 esta a la izquierda de T_1. $\quad (T_0 = T_m)$.

entonces existe una j, $2 \leq j \leq m-1$ tal que

T_j esta a la derecha de T_1

T_{j+1} esta a la izquierda de T_1.

es decir, fig. a.2.8.

T_j a la derecha de T_1

(a) $V_j^+ C V_1^-$ (b) $V_j^- C V_1^-$

T_{j+1} a la izquierda de T_1

(c) $V_{j+1}^{+} \subset V_1^{+}$ (d) $V_{j+1}^{-} \subset V_1^{+}$.

$$\overset{*}{T}_{j+1} \; \cdots \; \overset{*}{T}_0 \qquad \overset{*}{T}_1 \qquad \overset{*}{T}_2 \; \cdots \; \overset{*}{T}_j$$

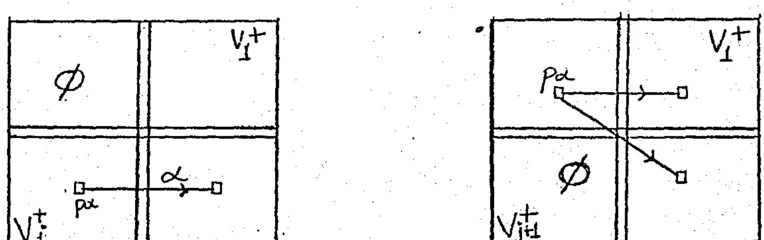
T_j a la derecha de T_1 y T_{j+1} a la izquierda de T_1

fig. a.2.8

Ahora bien $T_j \cap T_{j+1} \neq \phi$,

sea $\alpha \in T_j \cap T_{j+1}$, veamos que α deberá pertenecer a T_1 .

Caso (a) y (c); tendríamos que $p\alpha \notin V_1^{+}$, esto por (a) ; y por (c) $p\alpha \in V_1^{+}$, fig. a.2.9 . Esto no sucede.



(a) (c)

fig. a.2.9

Caso (b) y (d). de (b) se tiene que $n\alpha \notin V_1^+$; de (d) obtenemos que $n\alpha \in V_1^+$. Esto no sucede. fig. a.2.10

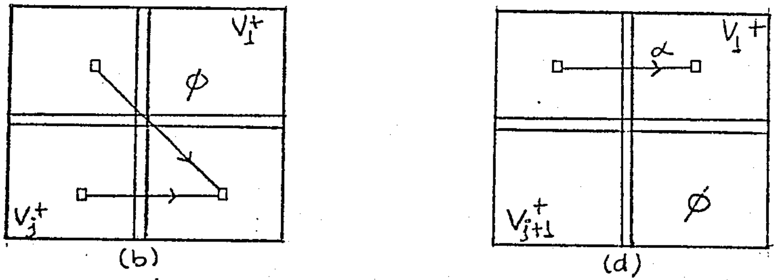


fig. a.2.10.

Caso (a) y (d). de (a) $p\alpha, n\alpha \notin V_1^+$, de (d) $p\alpha, n\alpha \in V_1^+$.
este caso no sucede. fig. a.2.11

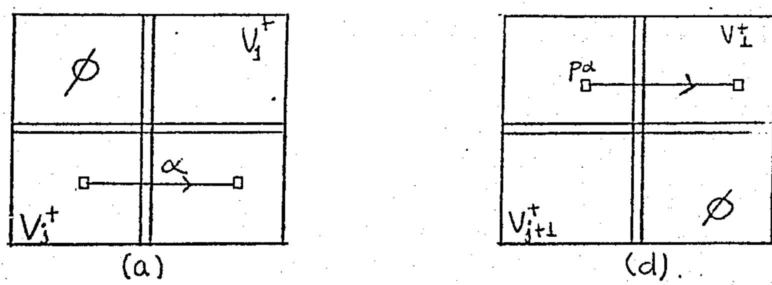


fig. a.2.11

Caso (b), y (c). De (b) $n\alpha \in V_1^-$ y de (c) $p\alpha \in V_1^+$, es decir $\alpha \in T_1$.

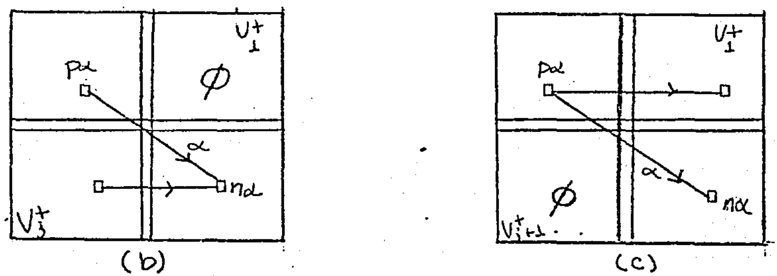


fig. a.2.12.

Como $T_j \neq T_1$ y $T_{j+1} \neq T_1$, por la propiedad en F

$$\alpha \notin T_1 \qquad !$$

entonces (1) sucede alternativamente en G^q, es decir m es par. G^q es bipartita, es decir dos clases de color cada una con a lo más k vértices

i.e. $$|F| \leq 2k$$

El Teorema de Lucchesi y Younger

La demostración del Teorema mini-max será por inducción en el número de flechas de la digráfica. Para usar de manera conveniente la hipótesis de inducción, necesitamos definir una operación en digráficas, la subdivisión de flechas, que permitirá aumentar el número de cortes dirigidos ajenos con respecto a la digráfica original.

0.2.3. Definición. Sea $A \subseteq F(D)$, $A=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$. $\alpha_i=(u_i,v_i)$ con $1\le i\le n$, diremos que las flechas de A son subdivididas si cada α_i, $1\le i\le n$ es reemplazada por las flechas $\alpha_{i_1}=(u_i,w_i)$, $\alpha_{i_2}=(w_i,v_i)$, $w_i\notin V(D)$, $1\le i\le n$. A la digráfica resultante se denotará como D_A^s; si $A=F(D)$ lo denotaremos como $S(D)$.

subdivisión de una flecha.

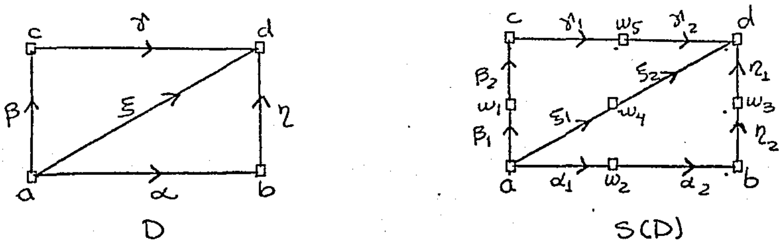


fig. a.2.13.

El primer resultado que necesitamos donde aparece la operación de subdivisión con cortes dirigidos es intuitivamente claro, por tal motivo se omite su demostración. Ver fig. a.2.14.

<u>a.2.2.Teorema.</u> Si T_0 es corte dirigido en D al subdividir las flechas de T_0 se obtienen dos nuevos cortes dirigidos ajenos

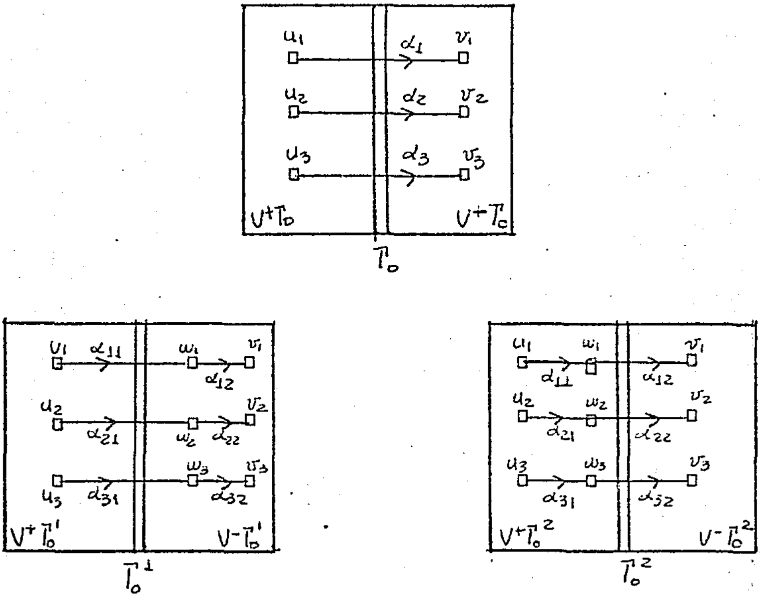


fig. a.2.14.

De lo anterior, es posible pensar en una subdivisión de D con la propiedad de que la nueva digráfica tenga el mismo número de cortes dirigidos ajenos que D, digamos k, pero al subdividir una cierta flecha tendrá $k+1$ cortes dirigidos ajenos.

a.2.3 Teorema. Sea D con a lo más k- cortes dirigidos ajenos ($k>0$) entonces existe una subdivisión H de D tal que H contiene a lo más k-cortes dirigidos ajenos, pero si subdividimos una cierta flecha α de H, se tienen $k+1$ cortes dirigidos ajenos. Además H contiene $k+1$ cortes dirigidos donde solamente dos de ellos tienen una flecha en común la cual es α.

Demostración.

Sean las flechas α_1, α_2 la subdivisión de α y $T_1, \ldots, T_{k+1}$ cortes dirigidos ajenos en H_α^i.
Si α_1 y α_2 no pertenecen a ningún corte T_j entonces para cada $j=1,\ldots,k+1$, $T_j \subset F(H)$, es decir H tiene $k+1$ cortes dirigidos ajenos. ↯
Si una y sola una de α_1, α_2 pertenece a algún corte T_j; en H reemplazamos α_i ($i=1$ ó 2) por

α ; entonces $T_j' = T_j \cup \{\alpha\} - \{\alpha_i\}$ es corte dirigido en H.

De donde $T_1, \ldots, T_j', \ldots, T_{k+1}$ son $k+1$ cortes dirigidos ajenos en H. ¡!.

Por lo tanto α_1, α_2 pertenecen a algunos cortes T_r y T_s.

Claramente se tiene que $r \neq s$. En caso que $r = s$ por la definición de corte dirigido, α_1, α_2 no pueden estar en un mismo T_j —.

S.P.G. supongamos que $\alpha_1 \in T_1$. $\alpha_2 \in T_2$.

En H tenemos. fig. a.2.15

$T_1' = T_1 \cup \{\alpha\} - \{\alpha_1\}$ y $T_2' = T_2 \cup \{\alpha\} - \{\alpha_2\}$ son cortes dirigidos además como $T_1, \ldots, T_{k+1}$ son ajenos en H_α'.

$$T_1', T_2', T_3, \ldots, T_{k+1}$$

son $k+1$ cortes dirigidos en H y solamente dos de ellos, T_1' y T_2', tienen una flecha en común que es α. ■

T_1 en H_α' $\qquad$ T_1' en H.

fig. a.2.15.

En todos estos resultados relacionados con la subdivisión y los cortes dirigidos existe un razonamiento que intuitivamente es claro.

Si $B_1, \ldots, B_k$ son cortes dirigidos ajenos en D y $\alpha \in B_1$, al subdividir la flecha α en α_1 y α_2 los cortes dirigidos $B_1', \ldots B_k$ son ajenos en D_α', donde $B_1' = B \cup \{\alpha_1\} - \{\alpha\}$.

Así sucesivamente al subdividir el conjunto $A \subset F(D)$ los cortes originales se convierten en otros, digamos $B_1^*, \ldots, B_k^*$ ajenos en D_A'.

Los temas anteriores son la herramienta necesaria para nuestro objetivo.

a.2.<u>4. Teorema</u> (Lucchesi y Younger). En una digráfica el máximo número de cortes dirigidos ajenos es igual al mínimo número de flechas las cuales intersectan a todos los cortes dirigidos de la digráfica.

<u>Demostración</u>.

Usaremos inducción sobre el número de flechas.

Si el número de flechas de la digráfica es 0 la proposición es verdadera.

Hipótesis de Inducción.
Supongamos que si la digráfica tiene n flechas y a lo más m cortes dirigidos ajenos existen m flechas que intersectan a todos los cortes dirigidos de la digráfica.

Sea D una digráfica con $n+1$ flechas y a lo más k cortes dirigidos ajenos.
Si $k=0$, la proposición es cierta.
Supongamos $k \geq 1$.
Si existe $\alpha \in F(D)$, tal que D_α tiene a lo más $k-1$ cortes dirigidos por la hipótesis de inducción existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ flechas en D_α que intersectan a todos los cortes dirigidos en D_α; y por el Teorema 2.4, $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ son k flechas que intersectan a todos los cortes dirigidos en D.

Supongamos que D_α tiene k cortes dirigidos ajenos para cada $\alpha \in F(D)$.

Sea H una subdivisión de D, tal que H contiene a lo más k cortes dirigidos ajenos, pero si subdividimos una cierta flecha β de H, H_β° tiene $k+1$ cortes dirigidos ajenos. Esto es el teorema 2.6, que nos dice que existen

$$T_1, \ldots, T_{k+1} \qquad (1)$$

cortes dirigidos en H tal que solamente dos de ellos tienen una flecha en común y es β.

Ahora bien H_β se puede obtener de D ó D_β por subdivisión.

Como D_β tiene k cortes dirigidos ajenos al subdividir hasta obtener H_β, llegamos a otros k cortes dirigidos en H_β; que pueden ser los iniciales; sean $C_1, \ldots, C_k$ tales cortes, en H_β, dirigidos y ajenos donde $\beta \notin C_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Consideremos $F=\{T_1,\dots,T_{k+1},C_1,\dots,C_k\}$

Sea $\xi\in T_j$, $\xi\neq\beta$, por la propiedad en (1) $\xi\notin T_i$, $i\neq j$; y como $C_1,\dots,C_k$ son ajenos a lo más ξ pertenece a uno solo de C_t, $t=1,\dots,k$.

Análogamente cada flecha en C_t como no es β a lo más pertenece a uno solo de T_j.

Es decir F es una familia que cumple las condiciones del lema.

Por lo cual $|F|\le 2k$

¡Pero $|F|=2k+1$!

De donde existe $\alpha\in F(D)$ tal que D_α tiene a lo más $k-1$ cortes dirigidos.

$\blacksquare$

Bibliografía.

1. Abrín, V. Rivera, E. Teoría de Gráficas. Comunicaciones internas del Departamento de Matemáticas. Serie Notas de clase. Facultad de Ciencias U.N.A.M. 1985.

2. Christofides, N. Graph Theory: An algorithmic Approach. Academic Press, New York 1975.

3. Harary, F. Graph Theory. Addison Wesley, Reading M.A. Segunda Edición 1971.

4. Lovász, L. "On Two Minimax Theorems in Graphs". Journal of Combinatorial Theory. Vol. B. 21, pp 96-103 1976.

5. Lucchesi, C. Younger, D.H. "A minimal Theorem for directed graphs". Journal London Math. Soc. Vol 12.(17) PP 369-374. 1978.

6. Tutte, W.T.: Recent Progress in Combinatories. Academic Press, New York. 1969.

7. Mc.Whirter, I.P. Younger, D.H. "Strong Covering of a bipartite graph". Journal London Math. Soc. VoL. 2. (2). pp-86-90, 1971.

8. Younger, D.H. "Maximun families of disjoint directed cut sets" de Recent Progress in Combinatories PP 329-333. 1969.