Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

EL TEOREMA DEL PASO DE LA MONTAÑA, RESULTADOS ANALOGOS Y APLICACIONES

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a

JULIO ROBERTO MURILLO TORRES

México, D. F   1984

INDICE

0.- INTRODUCCION.-

Un resultado clásico del analisis funcional es la caracterización de los valores propios de un operador compacto autoadjunto L, mediante un principio minimax como en el siguiente caso:

Ordenemos los valores propios positivos de L, λ_k^+ en orden decreciente (contando multiplicidades).

Sea $\Lambda_k := \{V \text{ subespacio de } H \mid \text{codim } V = k-1\}$

entonces: $$\lambda_k^+ = \min_{V \in \Lambda_k} \max_{x \in V} \frac{\langle Lx, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

ó equivalentemente: si $S := \{x \in H \mid |x| = 1\}$

$$\Gamma_k := \{A = S \cap V \mid V \in \Lambda_k\}$$

$$\lambda_k^+ = \min_{A \in \Gamma_k} \max_{x \in A} \langle Lx, x\rangle$$

Por otro lado: si $\dim H < \infty$ y si definimos
$$F : H \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \langle Lx, x\rangle = \langle Lx, Idx\rangle$$

tenemos: $DF(x)(y) = [\langle Lx, DI(x)(y)\rangle + \langle DL(x)(y), I(y)\rangle]$

$$= [\langle Lx, y\rangle + \langle Ly, x\rangle] \underset{\substack{\uparrow \\ L \text{ autoadjunto}}}{=} [\langle Lx, y\rangle + \langle y, Lx\rangle] =$$

$$= 2\langle Lx, y\rangle \quad \therefore \quad \nabla F(x) = 2L(x)$$

Analogamente:

si $g(x) := \langle x, x \rangle$, $Dg(x)(v) = 2\langle x, v \rangle$

$\therefore \quad \nabla g(x) = 2x$

entonces: $S = g^{-1}(1)$ y el teorema de multiplicadores de Lagrange dice que x_0 es punto critico de $F/_S$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ + $\nabla F(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$

i.e.: $L(x_0) = \lambda x_0$

en este caso. $F(x_0) = \langle L(x_0), x_0 \rangle = \lambda$ y los valores criticos de F coinciden con los valores propios de L, podemos entonces usar la misma caracterizacion para los valores criticos de F:

$$\lambda_k^+ = \min_{A \in \Gamma_k} \max_{x \in A} F(x).$$

Entre los años 1925 y 1950, los matematicos L. Lusternik y L. Schnirelman estudiaron puntos criticos de funcionales y valores propios de operadores mediante un analogo del principio minimax anterior. y en los años siguentes se ha trabajado mucho en esa direccion (Ver por ejemplo: [13] cap VI §4 para referencias de 1925 a 1965)

Aqui estudiaremos el trabajo de Krasnoselski, y algunos resultados más recientes debidos principalmente a P.H. Rabinowitz, A. Ambrosetti, R. Palais, H. Berestycki, W. M. Ni y otros

La herramienta mas importante que usaremos para demostrar la existencia de puntos criticos, será un teorema que nos permite deformar de manera adecuada el dominio de una funcional, lo demostraremos en la seccion 1 en el caso de dimension finita, y haciendo varios ajustes, veremos en la seccion 4 una generalizacion que sera la mas utilizada.

En la seccion 2 veremos el que es posiblemente, uno de los principios minimax más fáciles de visualizar; el teorema del paso de la montaña, y veremos tambien un resultado menos intuitivo pero igualmente fácil de demostrar (Teorema 2.2).

Es claro que si una funcional posee ciertas simetrias, podemos aprovecharlas para aumentar el numero de puntos criticos que encontremos, siguiendo esta idea, en 3 encontramos a uno de los primeros sucesores del trabajo de Lusternik y Schnirelman, un principio minimax dedicado a las funcionales pares y en 8 tenemos otro para las funcionales invariantes bajo rotaciones

En 7 tenemos una generalizacion de 2.2 en dimension infinita, aqui, la principal dificultad está en definir un numero de enlace adecuado (Ver 7.1).

En un apendice, resumimos la notacion y los resultados básicos que serán utilizados aqui. mencionemos especialmente A. 4.10, donde se encuentra una generalizacion del teorema de Borsuk - Ulam, especial para acciones de S^1 en H con puntos fijos que será usada en 5.

1. TEOREMA DE DEFORMACION (En $\mathbb{R}^n$).

Sea $F \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, entonces, $\nabla F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es C^1 y en particular es localmente Lipschitz, de donde, por el teorema de existencia y unicidad local de curvas integrales (Ver por ejemplo A.1.6); para todo $p \in \mathbb{R}^n$, existe U_p - vecindad de p, $\varepsilon > 0$, y una funcion:

$$g_p : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{- (curva integral)}$$

tal que:

$$g_p'(t) \underset{\text{Ver A.1.1}}{=} Dg_p(t)(1) = \nabla F(g_p(t)) \quad \text{y} \quad g_p(0) = p$$

Examinando el comportamiento de F a lo largo de una curva integral g, tenemos:

$$F \circ g : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(F \circ g)'(t) = D(F \circ g)(t)(1) = DF(g(t))(Dg(t)(1)) =$$

$$= DF(g(t))(\nabla F(g(t))) \underset{\text{Ver A.1.1}}{=} \langle \nabla F(g(t)), \nabla F(g(t)) \rangle = \|\nabla F(g(t))\|^2$$

Es decir, F es no decreciente a lo largo de las curvas integrales, y si $\nabla F(g(t)) \neq 0$, F es estrictamente creciente.

De la misma manera, se demuestra que F es no creciente a lo largo de las curvas integrales del campo $-\nabla F$, y estrictamente decreciente si $\nabla F \neq 0$.

Esto nos permitirá deformar ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, dejando simplemente que "escurran" a lo largo del flujo generado por $-\nabla F$, como en el teorema siguiente:

1.1.- TEOREMA.

(Ver, por ejemplo: [5])

Sea $F \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una función propia, (i.e., para todo $K \subset \mathbb{R}$ compacto, $F^{-1}(K)$ es compacto).

Sea $c \in \mathbb{R}$, entonces $\forall\, \bar{\delta} > 0$, y $\forall\, U$-abierto en $\mathbb{R}^n$ tal que $K_c := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla F(x) = 0, \text{ y } F(x) = c\} \subset U$, existen $\delta \in (0, \bar{\delta})$ y $\eta \in C(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tales que:
$(I := [0,1])$

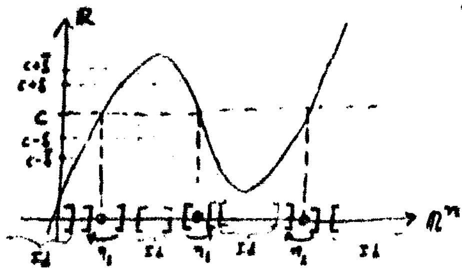
1) $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\eta(0, x) = x$
2) $F(x) \notin [c-\bar{\delta}, c+\bar{\delta}] \Rightarrow \forall t \in I$: $\eta(t, x) = x$
3) Si $\forall r \in \mathbb{R}$: $F^r := \{x \in \mathbb{R}^n / F(x) \le r\}$:

   $x \in (F^{c+\delta} - U) \Rightarrow \eta(1, x) \in F^{c-\delta}$
4) $K_c = \emptyset \Rightarrow \forall x \in F^{c+\delta}$: $\eta(1, x) \in F^{c-\delta}$
5) $\forall t \in I$: $\begin{array}{l} \eta_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto \eta(t, x) \end{array}$ - es homeomorfismo.

OBSERVACION:

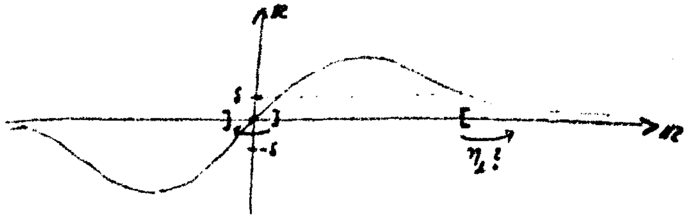
Este teorema asegura la existencia de una familia $\{\eta_t\}_{t \in I}$ de homeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ tales que,

$\eta_0 = Id_{\mathbb{R}^n}$ (por 1)) y η_1 deforma a $\mathbb{R}^n$, en una vecindad de $F^{-1}(c)$, en la dirección en que F decrece, sin mover el resto de esa vecindad, ni a K_c cuando c es valor crítico.



Si F no es propia, este teorema no es necesariamente cierto, como lo muestra el siguiente ejemplo:

$F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$
$x\longmapsto \frac{x}{1+x^2}$



Aquí, 0 es valor regular, pero para ningún $\delta>0$ podremos deformar la parte positiva de F^{δ} a $F^{-\delta}$.

DEMOSTRACION de 1.1:

Si $K:=(\nabla F)^{-1}\{0\}$, entonces K es cerrado en $\mathbb{R}^n$ (∇F es continuo) y $K_c=K\cap F^{-1}\{c\}$, como $\{c\}\subset\mathbb{R}$ es compacto, $F^{-1}\{c\}$ es compacto y K_c también lo es.

Sean U y ξ como en las hipótesis, entonces: $d(K_c,\mathbb{R}^n-U)>0$ y existe $\varepsilon>0$ tal que

$$U_\varepsilon:=\{x\mid d(x,K_c)<\varepsilon\}\subset U$$

Será pues, suficiente demostrar el teorema para U_ε en lugar de U porque $x\in(F^{c+\delta}-U)\Rightarrow x\in(F^{c+\delta}-U_\varepsilon)$.

Afirmamos que, $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, b_1>0,\ d_2>0 \ni$

$$x\in F^{c+d_2}-F^{c-d_2}-U_{\varepsilon/3}\Rightarrow\|\nabla F(x)\|\geq b_1 \quad\cdots\cdots(*)$$

En efecto, si existiera $\varepsilon>0$ tal que, para todo $b_1>0$, $d_2>0$, existiera $x\in F^{c+d_2}-F^{c-d_2}-U_{\varepsilon/3}$ con $\|\nabla F(x)\|<b_1$, podríamos construir una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $F(x_n)\to c$, $\nabla F(x_n)\to 0$ y para algún $r>0$: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset F^{-1}[c-r,c+r]$ - compacto

Entonces, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ debería tener una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\} \to x$ con $F(x)=c$, $\nabla F(x)=0$, i.e.: $x \in K_c$,
pero: $\forall n$: $x_n \notin U_{\varepsilon/3}$ $\therefore$ $d(x_n, K_c) \geq \varepsilon/3$ $\lightning$

Sean entonces ε, b_1, d_2, tales que se satisface (*).

Si b y d_1 son tales que: $0<d_1<d_2$, $0<b<b_1$, también se satisface (*), tomemos entonces, b, d_1 y d t.q.
$b := \min(b_1, 1)$, $\quad 0<d<d_1 \leq \min(d_2, \frac{b\varepsilon}{6}, \frac{b^2}{2}, \bar{\delta})$

Definamos $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, I)$ t.q.

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & x \notin F^{c+d_1} - F^{c-d_1} \\ 1 & x \in F^{c+d} - F^{c-d} \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & x \in U_{\varepsilon/3} \\ 1 & x \notin U_{\varepsilon/2} \end{cases}$$

Sean: $\varphi(x) := \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)$

$\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \mathbb{R})$ del apéndice A.2, i.e. t.q.

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{2}{t^2} & 2 \leq t \end{cases} \qquad \text{con: } t^2\alpha(t) \text{ no decreciente y } t\,\alpha(t) \text{ acotada}$$

Definamos el campo vectorial:

$$V: H \to H \quad \text{t.} \ \forall x \in H: V(x) := -\varphi(x)\,\alpha(\|\nabla F(x)\|)\,\nabla F(x)$$

Entonces, V es localmente Lipschitz y:
$\|V(x)\| \leq \alpha(\|\nabla F(x)\|)\,\|\nabla F(x)\|$ - acotado

Entonces, por el teorema A.1.10, existe el flujo global $\eta: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que, $\forall\ x \in H$:

$$\frac{d\eta(t,x)}{dt} = V(\eta(t,x)) \qquad \eta(0,x) = x \quad ---- \ (1)$$

y si $F(x) \notin [c-\bar{\delta}, c+\bar{\delta}]$, entonces $F(x) \notin [c-d_1, c+d_1]$ $(d_1 \leq \bar{\delta})$ y $x \notin F^{c+d_1} - F^{c-d_1}$ $\therefore$ $\varphi_1(x) = 0$, $V(x) = 0$

$$y \ \forall t: \ \eta(t,x) = x \ \text{----} \ ②$$

Tomemos ahora $x \in F^{c+d} - U_\varepsilon$, demostraremos que $\eta(1,x) \in F^{c-d}$:

Si $x \in F^{c-d_1}$, entonces $V(x) = 0$ y:

$\forall t: \eta(t,x) = x \in F^{c-d_1} \subset F^{c-d}$ y no hay mas que demostrar.

Supongamos entonces que $x \in F^{c+d} - F^{c-d_1} - U_\varepsilon$

Tenemos:

$(F \circ g_x)'(t) = DF(g_x(t))\,(g_x'(t)) = DF(g_x(t))\,(V(g_x(t))) =$

$= -\varphi(g_x(t))\,\alpha(\|\nabla F(g_x(t))\|)(\langle \nabla F(g_x(t)), \nabla F(g_x(t))\rangle) =$

$= -\varphi(g_x(t))\,\alpha(\|\nabla F(g_x(t))\|)\,\|\nabla F(g_x(t))\|^2 \leq 0$

Luego, F es no creciente en las lineas de flujo de V, y como $V \equiv 0$ en F^{c-d_1}, si $x \in F^{c+d} - F^{c-d_1}$ entonces $\forall t: g_x(t) \in F^{c+d} - F^{c-d_1}$ y:

$$0 \leq F(x) - F(g_x(t)) \leq c+d-(c-d_1) = d+d_1 < 2d_1 \quad \text{----} (**)$$

Queremos ver que, $\forall t: g_x(t) \notin U_{\varepsilon/2}$

Sea $T := \inf\{t \in [0,\infty) \mid g_x(t) \in U_{\varepsilon/2}\}$

Supongamos que $T < \infty$, entonces, para $0 \leq t < T$: $g_x(t) \notin U_{\varepsilon/2}$ y como $g_x(t) \in F^{c+d} - F^{c-d_1}$ por $(*)$:

$\|\nabla F(g_x(t))\| \geq b_1 \geq b$ y como:

$$-(F\circ g_x)'(s) = \varphi(g_x(s))\,\alpha(\|\nabla F(g_x(s))\|)\,\|\nabla F(g_x(s))\|^2 =$$

$$= \|V(g_x(s))\|\,\|\nabla F(g_x(s))\| \geq b\,\|g_x'(s)\|$$

tenemos:

$$2d_1 \overset{(**)}{\geq} F(x) - F(g_x(t)) = -\int_0^t (F\circ g_x)'(s)\,ds \geq b\int_0^t \|g_x'(s)\|\,ds \geq$$

$$\geq b\left\|\int_0^t g_x'(s)\,ds\right\| \geq b\,\|g_x(t) - g_x(0)\|$$

$\therefore\ \frac{2d_1}{b} \geq \|g_x(t) - g_x(0)\|$ pero por definición: $d_1 \leq \frac{b\varepsilon}{6}$

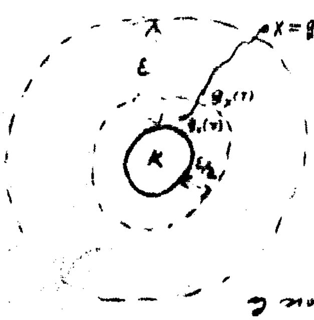
entonces $\frac{2d_1}{b} \leq \frac{2b\varepsilon}{6b} = \frac{\varepsilon}{3}$

y $\forall t \ni 0 \leq t < T := \inf\{t / g_x(t) \in U_{\varepsilon/2}\}$: $\|g_x(t) - g_x(0)\| < \varepsilon/3$

por la continuidad de g_x en t.

$$\|g_x(T) - g_x(0)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

y si hubiera un $\tau \in [0,\infty)$ tal que $g_x(\tau) \in U_{\varepsilon/2}$, entonces $\|g_x(T) - g_x(0)\| \geq \varepsilon/2$ ↯



Luego $T = \infty$ y $\forall t \in [0,\infty)$: $g_x(t) \notin U_{\varepsilon/2}$ así; si $x \in F^{c+d} - F^{c-d_1} - U_\varepsilon$, entonces $\forall t \in [0,\infty)$: $g_x(t) \in F^{c+d} - F^{c-d_1} - U_{\varepsilon/2}$ y por (*): $\|\nabla F(g_x(t))\| \geq b$ ---(a)

Si $g_x(1) \in F^{c-d}$ entonces $F(\eta_1(x)) \leq c-d$ y no hay más que demostrar

Supongamos pues, que $g_x(1) \notin F^{c-d}$, entonces:

$\forall t \in I$: $g_x(t) \in F^{c+d} - F^{c-d} - U_{\varepsilon/2}$, y por la definicion de φ: $\varphi(g_x(t)) = 1$ en el mismo intervalo

$\therefore$ $V(g_x(t)) = -\alpha(\|\nabla F(g_x(t))\|)\nabla F(g_x(t))$

y: $F(g_x(1)) = F(g_x(0)) + \int_0^1 (F\circ g_x)'(t)\,dt =$

$= \int_0^1 \alpha(\|\nabla F(g_x(t))\|)\|\nabla F(g_x(t))\|^2\,dt$

pero por (a) y por ser $t^2\alpha(t)$ no decreciente,

$\alpha(\|\nabla F(g_x(t))\|)\|\nabla F(g_x(t))\|^2 \geq \alpha(b)b^2 = b^2 \quad (0<b\leq 1,\ \alpha(t)|_{[0,1]} = 1)$

$\therefore F(g_x(1)) \leq F(x) - b^2 \underset{d<\frac{b^2}{2}\text{ por def.}}{<} F(x) - 2d \leq c+d-2d = c-d$.

Por lo anterior, si $\delta := d$, $U_\varepsilon \subset U$:

$x \in F^{c+\delta} - U \Rightarrow x \in F^{c+d} - U_\varepsilon \Rightarrow \eta(1,x) \in F^{c-d}$ ---- 3

En el caso $K_c = \emptyset$, c es valor regular de F i.e. $c \notin F(K)$, pero $F(K)$ es cerrado, pues si $r \in \overline{F(K)}$: existe una sucesion $\{r_n\}_1^\infty \subset F(K)$ $\ni$ $r_n \to r$, y $\forall n$: $r_n \in [r-1, r+1]$.

Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$: $x_n \in K$ $\ni$ $F(x_n) = r_n$, entonces, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset F^{-1}[r-1, r+1]$ - compacto, y existe $\{x_{n_k}\}$ subsucesion convergente: $x_{n_k} \to x$, $0 = \nabla F(x_{n_k}) \to \nabla F(x) \doteq 0$ i.e. $x \in K$

$F(x_{n_k}) \to F(x) \doteq r$ i.e. $r \in F(K)$.

Por lo anterior, existe $d_2 > 0$ tal que:

$(F^{c+d_2} - F^{c-d_2}) \cap K = \emptyset$

Sean $0 < d < d_1 < d_2$, α y φ_1 como antes, $\varphi_2(x) = 1 \ \forall x$

Existe b t. $0 < b < 1$ y $x \in F^{c+d_1} - F^{c-d_1} \Rightarrow \|\nabla F(x)\| \geq b$

Tomemos $0 < \delta < \min\left(\frac{d}{2}, \frac{b^2}{2}\right)$, $x \in F^{c+\delta}$:

Si $x \in F^{c-d}$, no hay mas por demostrar

Sea $x \in F^{c+\delta} - F^{c-d}$, por definicion de φ_1:

$\varphi_1(x) = 1$ y $V(x) = -\alpha(\|\nabla F(g_x(t))\|)\|\nabla F(g_x(t))\|$

y $F(g_x(1)) = F(x) + \int_0^1 (F \circ g_x)'(t)\, dt =$

$= F(x) - \int_0^1 \alpha(\|\nabla F(g_x(t))\|)\|\nabla F(g_x(t))\|^2 dt \leq$

$\leq F(x) - \alpha(b)\, b^2 = F(x) - b^2 < F(x) - 2\delta \leq c + \delta - 2\delta = c - \delta$

i.e.: $K_c = \emptyset \Rightarrow \forall x \in F^{c+\delta}$: $\eta(1, x) \in F^{c-\delta}$ ... (4)

Observemos que, como V es continuo, $\forall t$: η_t - es continuo y $\eta_t^{-1} = \eta_{-t}$ - es continuo

$\therefore \ \forall t$: η_t es homeomorfismo ... (5)

$\blacksquare$

2. EL TEOREMA DEL PASO DE LA MONTAÑA.

Ahora podremos demostrar el primer teorema relativo a puntos críticos (Ver [1] y [26])

2.1. TEOREMA: Sea $F \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ propia

$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \rho\}$ para algún $\rho > 0$, entonces $\bar{0} \in \Omega$,

y sea $x_0 \notin \bar{\Omega}$ + $\max(F(0), F(x_0)) < c_0 \leq \min\limits_{x \in \partial\Omega} F(x)$

Entonces F tiene un valor crítico $c \geq c_0$ caracterizado como sigue.

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in I} F(g(t))$$

donde $\Gamma := \{g \in C(I, \mathbb{R}^n) \mid g(0) = 0,\ g(1) = x_0\}$

DEMOSTRACION:

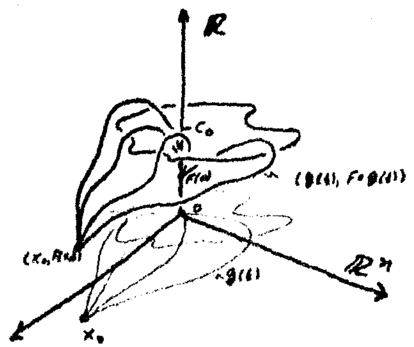
$\forall g \in \Gamma$: $\max\limits_{t \in I} F(g(t))$ existe porque $F \circ g$ es continua e I es compacto.

Sea $G: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto d(x, \Omega)$ y para $g \in \Gamma$ sea

$t_g := \max\{t \mid G(g(t)) = 0\}$, entonces $g(t_g) \in \partial\Omega$,

$F(g(t_g)) \geq c_0$ y $c_0 \leq \max\limits_{t \in I} F(g(t))$

$\therefore$ $c := \inf\limits_{g \in \Gamma} \max\limits_{t \in I} F(g(t))$ existe y $c \geq c_0$



Supongamos que c no es valor crítico de F i.e. $K_c = \emptyset$, sea $\tilde{\delta} := \frac{1}{2}(c - \max(F(0), F(x_0)))$.

Sean entonces $\delta \in (0, \tilde{\delta})$ y $H \in C(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ del teorema 1.1.

Por la definición de c, existe $g_0 \in \Gamma$ tal que:

$$\max_{t \in I} F(g_0(t)) \leq c+\delta \quad \therefore \quad \forall t \in I: \; g_0(t) \in F^{c+\delta}$$

y por 1.1 (4): $\forall t \in I: H(1, g_0(t)) \in F^{c-\delta}$

i.e. $\forall t \in I: F(H(1, g_0(t))) \leq c - \delta$

$$\therefore \quad \max_{t \in I} F(H(1, g_0(t))) \leq c - \delta \quad \cdots \quad (*)$$

Pero $H(1, g_0(\_)) \in C(I, \mathbb{R}^n)$

$$\left.\begin{array}{l} F(0) \notin [c-\tilde{\delta}, c+\tilde{\delta}] \;\therefore\; H(1, g_0(0)) = H(1,0) = 0 \\ F(x_0) \notin [c-\tilde{\delta}, c+\tilde{\delta}] \;\therefore\; H(1, g_0(1)) = H(1, x_0) = x_0 \end{array}\right\} \text{por } 1.1.(2)$$

i.e. $H(1, g_0(\_)) \in \Gamma$ y $\max_{t \in I} F(H(1, g_0(t))) \geq c \;\; \underset{(*)}{\lightning}$

$\therefore$ c es valor crítico de F

■

De manera análoga se demuestra la siguiente variante del teorema anterior. (Ver [22])

2.2.- TEOREMA:

Sean $\Phi : S^k \to \mathbb{R}^n$, $\Psi : S^{n-k-1} \to \mathbb{R}^n$ $k \leq n-1$ continuas, tales que, para toda extensión:

$\tilde{\Phi} : B^{k+1} \to \mathbb{R}^n$: $\tilde{\Phi}(B^{k+1}) \cap \Psi(S^{n-k-1}) \neq \emptyset$

(Φ y Ψ se enlazan de manera no trivial, Ver A.4.8)

Sea $F \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ propia tal que:

$$F|_{\Phi(S^k)} \leq c_0 < c_1 \leq F|_{\Psi(S^{n-k-1})}$$

$$\Gamma := \{ g : B^{k+1} \to \mathbb{R}^n \text{ continuas} \mid g|_{S^k} = \Phi \}$$

Entonces $c := \inf_{g \in \Gamma} \max_{b \in B^{k+1}} F(g(b)) \geq c_1$

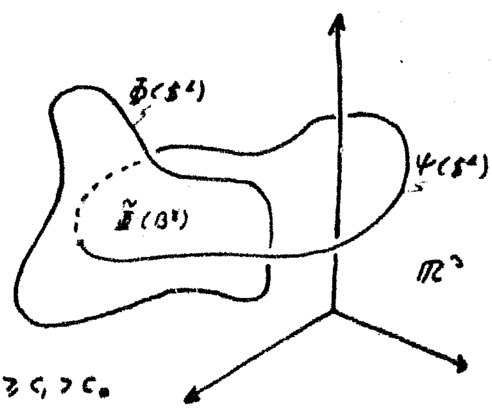
es un valor crítico de F.

DEMOSTRACION:

$\forall g \in \Gamma$: $\max F(g(B^{k+1}))$ existe por ser B^{k+1} compacto y $F \circ g$ continua, además:

$g(B^{k+1}) \cap \Psi(S^{n-k-1}) \neq \emptyset$

$\therefore \max F(g(B^{k+1})) \geq F|_{\Psi(S^{n-k-1})} \geq c_1$



y $c := \inf_{g \in \Gamma} \max_{b \in B^{k+1}} F(g(b))$ existe $\Rightarrow$ $c \geq c_1 > c_0$

Si c no fuera valor critico, sea $\bar{\delta} := \frac{1}{2}(c_1 - c_0)$ y $\delta \in (0, \bar{\delta})$ $H \in C(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ del teorema 1.1

Sea $g_0 \in \Gamma$ t $\max_{b \in B^{k+1}} F(g_0(b)) \leq c + \delta$

$\therefore \forall b \in B^{k+1}$: $g_0(b) \in F^{c+\delta}$ $\Rightarrow$ $H_1(g_0(B^{k+1})) \subset F^{c-\delta}$

de donde $\max_{b \in B^{k+1}} F \circ H_1 \circ g_0(b) \leq c - \delta$ ---- (*)

Pero $H_1 \circ g_0 \in C(B^{k+1}, \mathbb{R}^n)$ y $\forall x \in \phi(S^k)$:

$x = \phi(b_x)$ para algun $b_x \in S^k$, $F(x) = F(\phi(b_x)) \leq c_0$

$\therefore -F(x) \geq -c_0$, $\bar{\delta} < c - c_0 \leq c - F(x)$, $F(x) < c - \bar{\delta}$

$\Rightarrow F(x) \notin [c - \bar{\delta}, c + \bar{\delta}]$, de donde:

$H_1 \circ g_0(b_x) = H_1 \circ \phi(b_x) = H_1(x) = x = \phi(b_x)$ i.e: $H_1 \circ g_0 |_{S^k} = \phi$

$\therefore H_1 \circ g_0 \in \Gamma$ $\Rightarrow$ $\max_{b \in B^{k+1}} F \circ H_1 \circ g_0(b) \geq c$ $\quad \underset{(*)}{\lightning}$

$\therefore$ c es valor critico de F

■

Observemos que, si $\Omega \in \mathbb{R}^n$ es una vecindad de $\bar{0}$, homeomorfa a B^n, $\partial\Omega \cong S^{n-1}$, y si $x_0 \notin \bar{\Omega}$, $\{\bar{0}, x_0\} \cong S^0$, entonces 2.2 se reduce a 2.1 con $k = 0$

En ambos casos, dividimos a $\mathbb{R}^n$ en una familia $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ ($\mathcal{F} = \{g(I) \mid g \in \Gamma\}$ en 2.1, $\mathcal{F} = \{g(B^{k+1}) \mid g \in \Gamma\}$ en 2.2) tal que $A \in \mathcal{F} \Rightarrow H_1(A) \in \mathcal{F}$, y demostramos que $c := \inf_{A \in \mathcal{F}} \max_{a \in A} F(a)$ es valor critico. En los siguientes secciones, veremos procedimientos mas elaborados para construir $\mathcal{F}$.

3.- EL INDICE DE KRASNOSELSKI.

Como mencionamos en el comentario final de la seccion 2, describiremos otra manera de construir los conjuntos de $\mathcal{F}$, usaremos para ésto, una funcion que asocia, a ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, un numero natural, que llamaremos el indice de Krasnoselski ó el genero.

Una breve historia de este indice se encuentra en "Topological methods in the theory of nonlinear integral equations" de M. A. Krasnoselski, Macmillan Co. 1964 capitulo VI. seccion 4.1

Los parrafos siguientes están tomados del articulo "The mountain pass theorem: theme and variations" de P. H. Rabinowitz, Lecture Notes in Mathematics Vol. 957, Springer-Verlag pp. 237-271.

Demostraremos la existencia de puntos criticos para funciones pares, i.e: $F(x)=F(-x)$, y como los conjuntos de nivel de funciones asi, son simetricas con respecto al origen, empezaremos con la siguiente definicion:

3.1.- DEFINICION:

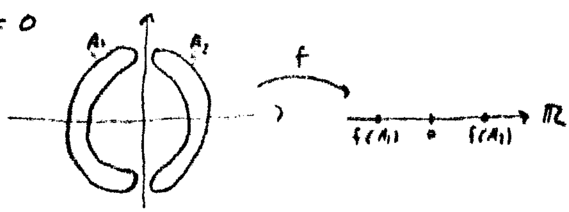
Sea $E := \{K \subset \mathbb{R}^n - \{0\} \mid K \cdot \text{cerrado y } x \in K \Rightarrow -x \in K\}$

Para cada $A \in E$, definamos el GENERO de A; $\gamma(A)$, como el minimo entero k tal que existe $f \in C(A, \mathbb{R}^k - \{0\})$ con f impar. $\gamma(\emptyset) := 0$

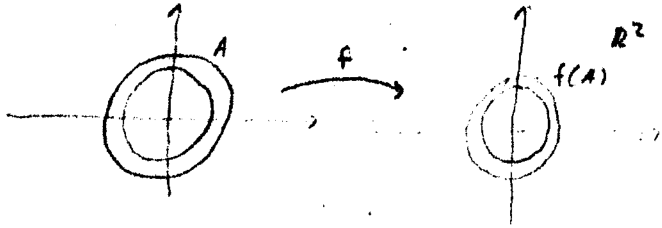
EJEMPLOS:

$A := A_1 \cup A_2$

$\gamma(A) = 1$



$\gamma(A)=2$



Como para todo $A\in E$: $\begin{array}{l} i: A \hookrightarrow \mathbb{R}^n-\{0\} \\ \quad a \longmapsto a \end{array}$ es continua e impar, y $\mathbb{R}^0-\{0\}=\emptyset$, entonces $1\leq \gamma(A)\leq n$.

3.2.- TEOREMA:

Este indice tiene las siguientes propiedades:

1) Si $x\in \mathbb{R}^n-\{0\}$, $A:=\{x,-x\}\in E$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \phi: A \longrightarrow \mathbb{R}-\{0\} \\ \quad x \longmapsto |x| \\ \ -x \longmapsto -|x| \end{array}\right\}$$ es una funcion continua e impar $\therefore\ \gamma\{x,-x\} = 1$

2). Si $A,B\in E$, $\phi\in C(A,B)$- impar, entonces.

$$\gamma(A)\leq \gamma(B)$$

DEMOSTRACION:

Si $\gamma(B)=n$, entonces existe $\psi: B\to \mathbb{R}^n-\{0\}$ continua e impar, luego: $\psi\circ\phi: A\to \mathbb{R}^n-\{0\}$ es continuo e impar $\therefore\ \gamma(A)\leq n=\gamma(B)$ ♦

3) $A,B\in E \Rightarrow \gamma(A\cup B)\leq \gamma(A)+\gamma(B)$

DEMOSTRACION:

Como $0\notin A$ y $0\notin B$, entonces $0\notin A\cup B$, union de cerrados es cerrado y $x\in A\cup B \Rightarrow x\in A$ ó $x\in B \Rightarrow -x\in A$ ó $-x\in B \Rightarrow$ $\Rightarrow -x\in A\cup B$ $\therefore\ A\cup B\in E$ y $\gamma(A\cup B)$ está definido.

Si $\gamma(A)=m$, $\gamma(B)=k$, entonces existen funciones continuas e impares $\phi: A\to \mathbb{R}^m-\{0\}$ $\psi: B\to \mathbb{R}^k-\{0\}$

Como A y B son cerrados en $\mathbb{R}^n$- normal, por el teorema de extensión de Tietze, existen:

$\tilde{\phi}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\qquad \tilde{\varphi}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ extensiones continuas

Sean: $\hat{\phi}(x) := \dfrac{\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(-x)}{2}$ $\qquad \hat{\varphi}(x) := \dfrac{\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(-x)}{2}$

entonces $\hat{\phi}$ y $\hat{\varphi}$ son extensiones continuas e impares de ϕ y φ respectivamente.

Definimos: $f: A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$
$x \longmapsto (\hat{\phi}(x), \hat{\varphi}(x))$

f es continua, impar, y si $x \in A \cup B$. $x \in A$ ó $x \in B$ de donde $\hat{\phi}(x) = \phi(x) \neq 0$ ó $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x) \neq 0$ $\therefore$ $\forall x \in A \cup B$; $f(x) \neq 0$, y de hecho: $f: A \cup B \to \mathbb{R}^{m+k} - \{0\}$

$\therefore$ $\gamma(A \cup B) \leq m+k = \gamma(A) + \gamma(B)$

4) Si $K \in E$ es compacto y $N_\delta(K) := \{x \in \mathbb{R}^n / d(x,K) \leq \delta\}$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $N_\delta \in E$ y $\gamma(N_\delta(K)) = \gamma(K)$

DEMOSTRACION:

Como $\bar{0} \notin K$ - compacto, entonces $d(\bar{0}, K) > 0$, y para δ t.q. $0 < \delta < d(\bar{0}, K)$: $0 \notin N_\delta(K)$ - que es cerrado y simetrico con respecto al origen $\therefore$ $N_\delta(K) \in E$.

Ahora, si $\gamma(K) = j$, existe $\phi: K \to \mathbb{R}^j - \{0\}$ continua e impar, y como en el inciso anterior existe una extension impar $\hat{\phi}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^j$ continua.

Como $\hat{\phi}^{-1}(0)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$ y K- compacto:

$$d(\hat{\phi}^{-1}(0), K) > 0$$

$\tilde{\phi}$ es impar $\therefore$ $\tilde{\phi}(\bar{0}) = 0$ luego $\bar{0} \in \tilde{\phi}^{-1}(0)$.

$$\therefore \quad d(\tilde{\phi}^{-1}(0), K) \leq d(\bar{0}, K)$$

si $\delta \in \mathbb{R}$ es tal que: $0 < \delta < d(\tilde{\phi}^{-1}(0), K)$:

$N_\delta(K) \in E$, y $\forall x \in N_\delta(K)$: $d(x, K) \leq \delta < d(\tilde{\phi}^{-1}(0), K)$

y $x \notin \tilde{\phi}^{-1}(0)$ i.e. $\forall x \in N_\delta(K)$: $\tilde{\phi}(x) \neq 0$

luego: $\tilde{\phi}/_{N_\delta(K)} : N_\delta(K) \to \mathbb{R}^j - \{0\}$ es continua e impar

$\therefore$ $\gamma(N_\delta(K)) \leq j$

y por (2) $K \subset N_\delta(K) \Rightarrow j = \gamma(K) \leq \gamma(N_\delta(K))$

$$\therefore \quad \gamma(N_\delta(k)) = j = \gamma(k)$$

$\diamond$

5) Sea $A \in E$, si: $\phi \in C(A, \mathbb{R}^m)$-impar, $\phi(A) \cong A$ y $\phi(A) \in E$, entonces $\gamma(\phi(A)) = \gamma(A)$

DEMOSTRACION:

Sea $B := \phi(A)$, entonces $\phi \in C(A, B)$-impar.

y por (2): $\gamma(A) \leq \gamma(B) = \gamma(\phi(A))$.

Por otro lado, si $\phi(A) \cong A$, existe $\psi \in C(\phi(A), A)$ con $\psi \circ \phi(a) = a \ \forall a \in A$, luego, si $b \in B = \phi(A)$, existe $a \in A$ + $b = \phi(a)$ y $\psi(b) = \psi \circ \phi(a) = a = -(-a) = -\psi\phi(-a) = -\psi(-b)$ i.e: ψ-impar y por (2) nuevamente:

$$\gamma(\phi(A)) \leq \gamma(A)$$

$\diamond$

6). $A, B \in E, \Rightarrow \gamma(\overline{A-B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$

DEMOSTRACION:

$\bar{0} \notin A$ - cerrado $\Rightarrow \overline{A-B} \subset A \therefore \bar{0} \notin \overline{A-B}$

$y \in A-B \Rightarrow y \in A, y \notin B \Rightarrow -y \in A, -y \notin B \Rightarrow -y \in A-B$

re $A-B$ - simetrico con respecto a $\bar{0}$ $\therefore \overline{A-B}$ tambien.

Ahora: $A \subset \overline{A-B} \cup B \quad \therefore \quad \gamma(A) \leq \gamma(\overline{A-B}) + \gamma(B)$

$\Rightarrow \gamma(\overline{A-B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$

7) $\forall A \in E: \quad \# A < \infty \Rightarrow \gamma(A) \leq 1$

DEMOSTRACION:

Si $A = \emptyset, \quad \gamma(A) = 0$

Si A consta de k parejas $A_i := \{x_i, -x_i\}$

entonces $f: A \to \mathbb{R} - \{0\} \ni f(x_i) = 1, f(-x_i) = -1$.

es continua e impar $\therefore \gamma(A) = 1$ ∎

COROLARIO:

Si $\gamma(A) \geq 2$ entonces $\# A = \infty$

∎

Calculemos el genero de algunos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$:

3.3.- TEOREMA:

Sea Ω - vecindad simetrica y acotada de $\bar{0}$ en $\mathbb{R}^n$, $A \in E$ homeomorfo a $\partial\Omega$: $h: A \xrightarrow{\cong} \Omega$

h - impar, entonces $\gamma(A) = n$

DEMOSTRACION:

Como el homeomorfismo h nos da una funcion impar en $C(A, \mathbb{R}^n - \{0\})$, entonces $\gamma(A) \leq n$

Si $\gamma(A) = j < n$, existiria $\phi \in C(A, \mathbb{R}^j - \{0\})$ impar y $\phi \circ h^{-1} \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^j - \{0\})$ impar

$$\therefore \quad \phi \circ h^{-1} : \partial\Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^j - \{0\} \qquad j < n$$

y $\phi \circ h^{-1}$ no se anula nunca, contradiciendo al teorema de Borsuk-Ulam

En particular, si $\Omega = B^n = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| < 1\}$ entonces $\partial B^n = S^{n-1}$ y $\gamma(S^{n-1}) = n$

Para las aplicaciones, necesitamos la siguiente version simetrica del teorema de deformacion:

3.4- TEOREMA.

Con las mismas hipotesis del teorema 1.1. y F par, existen δ y η que satisfacen las propiedades 1-5 del mismo teorema y $\forall t$: η_t es impar

<u>Dem</u>: Es la misma que en 1.1. solo cambiando el campo V como sigue:

Como F es par, los conjuntos K_c, U_ε y $F^{r}(V r e \mathbb{R})$ son simetricos.

Sean φ_1, φ_2 como en el teorema 1.1

Sean $\tilde{\varphi}_i(x) := \dfrac{\varphi_i(x) + \varphi_i(-x)}{2}$ $\quad i = 1, 2$

entonces $\tilde{\varphi}_i$ es par y como F es par, ∇F es impar $\therefore$ V de 1.1 es impar, y $\forall t$: η_t también, en efecto, si definimos:

$\omega(t, x) := -\eta(t, x)$ entonces:

$$\frac{d\omega}{ds}(t,x) = -\frac{d\eta}{ds}(t,x) = -V(\eta(t,x)) = V(-\eta(t,x))$$

$$= V(\omega(t,x)) \quad y \quad \omega(0) = -x$$

Entonces, por el teorema de unicidad del flujo: $\eta(t, -x) = \omega(t,x) = -\eta(t,x)$

i.e: $\forall t$: $\eta_t(-x) = -\eta_t(x)$ y η_t - impar

∎

Tenemos ahora:

3.5.- DEFINICION:

Sea $F \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ propia y par

$\forall k \in \mathbb{N}$: $\quad \Gamma_k := \{A \in E \,/\, \gamma(A) \geq k\}$

$$c_k := \inf_{A \in \Gamma_k} \max_{x \in A} F(x)$$

Observemos que si $i < j$, $\Gamma_j \subset \Gamma_i$ y $c_i \leq c_j$. Ahora, si $K_c = \{x \in K \,/\, \nabla F(x) = 0,\ F(x) = c\}$ tenemos:

3.6.- TEOREMA: Sean F, Γ_k y c_k como en 3.5. Si para $k, m \in \mathbb{N}^+$, $\Gamma_{k+m-1} \neq \emptyset$ y $-\infty < c := c_k = c_{k+1} = c_{k+m-1} < F(0)$ entonces $\gamma(K_c) \geq m$ (en particular $K_c \neq \emptyset$ y c es valor crítico)

Dem:

Supongamos que $\gamma(K_c) \leq m-1$, sea $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma(N_\varepsilon(K_c)) = \gamma(K_c)$ y $\bar{\delta} > 0$, $c + \bar{\delta} < F(\bar{0})$ y $\delta \in (0, \bar{\delta})$, $\eta_1(F^{c+\delta} - N_\varepsilon(K_c)) \subset F^{c-\delta}$ (3.4)

Por la definicion de $c_{k+m-1} =: c$, existe $A \in E$, $\gamma(A) \geq k+m-1$ y $\max_{x \in A} F(x) \leq c + \delta$ i.e. $A \subset F^{c+\delta}$

Sea $B := \eta_1(\overline{A - N_\varepsilon(K_c)})$, como $F(\bar{0}) \notin [c-\bar{\delta}, c+\bar{\delta}]$

$\eta_1(\bar{0}) = 0$ (1.1 (2))

$B \subset \eta_1(A) \subset F^{c-\delta}$ $c - \delta < F(\bar{0})$ $\therefore$ $\forall b \in B: F(b) < F(\bar{0})$ y $\bar{0} \notin B$ ademas B es cerrado y simetrico $\therefore$ $B \in E$ y:

$$\gamma(B) = \gamma(\overline{A - N_\varepsilon(K_c)}) \geq \gamma(A) - \gamma(N_\varepsilon(K_c)) \geq k+m-1-(m-1) = k$$

η_1- hom. impar (3.2 (5))   (3.2(6))

i.e. $\gamma(B) \geq k$ pero $B \subset F^{c-\delta}$ $\therefore$ $c_k \leq c - \delta < c = c_k$ ↯

entonces $\gamma(K_c) \geq m$

■

Observemos que por cada $c_k \in (-\infty, F(0))$ obtenemos al menos dos puntos criticos de F y si coinciden dos ó mas c_k's, por el teorema anterior $\gamma(K_c) \geq 2$ y por 3.2(7) tendriamos un conjunto infinito de puntos criticos correspondientes a c.

En [11], [24] y [25], por ejemplo, se puede encontrar una versión del teorema de deformación para funciones definidas en variedades, por ejemplo, si $F \in C^2(S^n, \mathbb{R})$, es par, el teorema 3.4 es válido sustituyendo $\mathbb{R}^n$ por S^n

De la misma manera, pueden demostrarse los teoremas de esta seccion, definiendo γ en $\hat{E} := \{K \subset S^n \mid K\text{-cerrado y simetrico}\}$, y como no es necesario pedir que $\bar{0} \notin K \in E$, el teorema 3.6 es cierto para C_k's finitos (pedíamos que fueran menores que $F(0)$ para que $\bar{0} \notin B$ y B fuera elemento de E)

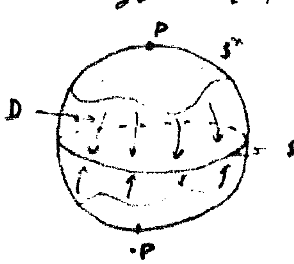
En ese caso, $\{\{x,-x\} \mid x \in S^n\} \subset \Gamma_1$
si F alcanza su mínimo en $x_0 \in S^n$, por ser F-par, también en $-x_0$ alcanza el mínimo, sea

$$B := \{x_0, -x_0\} \in \Gamma_1$$

entonces $\max\limits_{x \in B} F(x) = \min\limits_{x \in S^n} F(x)$

$$\therefore \quad C_1 = \min_{A \in \Gamma_1} \max_{x \in A} F(x) = \max_{x \in B} F(x) = \min_{x \in S^1} F(x)$$

Por otro lado, $\gamma(S^n) = n+1$ (3.3) y si $D \subsetneq S^n$ y $D \in E$ existe un par de puntos antipodas en S^n no contenidos en D digamos $\{P, -P\}$, podemos encontrar entonces



un mapeo impar $\phi : D \to S^{n-1}$

y por 3.2 (2): $\gamma(D) \leq \gamma(S^{n-1}) = n$

$\therefore \quad \Gamma_{n+1} = \{S^1\}$ y:

$$C_{n+1} = \min_{A \in \Gamma_{n+1}} \max_{x \in A} F(x) = \max_{x \in S^1} F(x)$$

Tendremos entonces una sucesion de numeros:

$$\min F(S^n) = c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_{n+1} = \max F(S^n)$$

y con la observacion al teorema 3.6, F tendria al menos $2(n+1)$ puntos criticos.

Para las aplicaciones que tenemos en mente, será suficiente tener el teorema 1.1 y sus variantes sustituyendo $\mathbb{R}^n$ por un espacio de Hilbert cualquiera, eso es lo que haremos en las secciones siguientes.

4.- TEOREMA DE DEFORMACION (En espacios de Hilbert)

Demostraremos una version mas general del teorema de deformacion válida en espacios de Hilbert y bajo condiciones más débiles para la funcion F, sin embargo, las ideas básicas son las mismas que en el caso $\mathbb{R}^n$, solo indicaremos las modificaciones necesarias sin repetir todos los detalles

La diferencia mas importante esta en que solo pediremos que $F \in C^1(H, \mathbb{R})$, así, aunque ∇F es continua, no necesariamente será localmente Lipschitz y no podremos asegurar la existencia o la unicidad de flujos locales para ∇F.

Sin embargo, usaremos el gradiente para construir un campo vectorial localmente Lipschitz que sirva igualmente a nuestros propositos.

La construccion siguiente fue tomada de [25]:

4.1. DEFINICION: Sea $a > 1$ fijo, $x \in H$ H- espacio de Hilbert, $F \in C^1(H, \mathbb{R})$:

$V_x \in H$ es un VECTOR PSEUDOGRADIENTE para F en x si: $\langle V_x, V_x \rangle \leq a(\langle \nabla F(x), \nabla F(x) \rangle) \leq a^2(\langle V_x, \nabla F(x) \rangle)$

Un campo vectorial V es llamado PSEUDO-GRADIENTE para F si $\forall x$: $V(x)$ es pseudogradiente para F en x (con la misma a para todo x)

4.2. OBSERVACION:

Si $P_x := \{v \in H \mid v$ - pseudogradiente para F en $x\}$ entonces $\forall x \in H$: P_x es convexo.

Dem

$$\langle v, v\rangle \le a(\langle \nabla F(x), \nabla F(x)\rangle) \iff \|v\| \le b\|\nabla F(x)\|$$

con $b = a^{1/2}$, entonces: $\forall v \in P_x$: $\|v\| \le b\|\nabla F(x)\|$

$\therefore$ si $t \in [0,1]$ y $v, w \in P_x$:

$$\|tv+(1-t)w\| \le t\|v\|+(1-t)\|w\| \le tb\|\nabla F(x)\|+(1-t)b\|\nabla F(x)\| = b\|\nabla F(x)\|$$

i.e: $\forall t \in [0,1]$: $\langle tv+(1-t)w, tv+(1-t)w\rangle \le a\langle \nabla F(x), \nabla F(x)\rangle \cdots (i)$

Por otro lado, si $v, w \in P_x$: $\langle \nabla F(x), \nabla F(x)\rangle \le \begin{cases} a\langle v, \nabla F(x)\rangle \\ a\langle w, \nabla F(x)\rangle \end{cases}$

$\therefore \forall t \in [0,1]$: $a\langle tv+(1-t)w, \nabla F(x)\rangle = ta\langle v, \nabla F(x)\rangle + (1-t)a\langle w, \nabla F(x)\rangle \ge$

$\ge t\langle \nabla F(x), \nabla F(x)\rangle + (1-t)\langle \nabla F(x), \nabla F(x)\rangle = \langle \nabla F(x), \nabla F(x)\rangle \cdots (ii)$

de (i) e (ii) $v, w \in P_x \Rightarrow \forall t \in [0,1]$: $\mu_t := tv+(1-t)w$ satisface: $\langle \mu_t, \mu_t\rangle \le a\langle \nabla F(x), \nabla F(x)\rangle \le a^2\langle \mu_t, \nabla F(x)\rangle$

i.e: $\mu_t \in P_x$ y P_x es convexo ∎

4.3. OBSERVACION:

Si tuvieramos un campo pseudogradiente V localmente Lipschitz, entonces por las desigualdades

$$\langle V(x), V(x)\rangle \le a\langle \nabla F(x), \nabla F(x)\rangle$$
$$\langle \nabla F(x), \nabla F(x)\rangle \le a\langle V(x), \nabla F(x)\rangle$$

es claro que $\nabla F(x) = 0 \iff V(x) = 0$ i.e. V tendria los mismos puntos criticos de ∇F y por ser loc. Lips. (Ver A.1.6) para cada p, existirian $J \subset \mathbb{R}$ $g_p : J \to H$ $\ni \forall t \in J$: $g_p'(t) = Dg_p(t)(1) = V(g_p(t))$

$g_p(0) = p$

y $\forall t \in J$: $(F\circ g_p)'(t) = D(F\circ g_p)(t)(1) =$
$DF(g_p(t))(Dg_p(t)(1)) = DF(g_p(t))(V(g_p(t))) =$
$= \langle \nabla F(g_p(t)), V(g_p(t))\rangle \geq \frac{1}{a} \langle \nabla F(g_p(t)), \nabla F(g_p(t))\rangle \geq 0$

i.e. F sería no decreciente a lo largo de las curvas integrales de V.

La observación anterior clarifica un poco la definición de pseudogradientes y su utilidad.

Demostraremos entonces la existencia de un campo pseudogradiente localmente Lipschitz en un subconjunto de H que definiremos a continuación:

Sea $H^* := H - \{x \in H / \nabla F(x) = 0\}$, entonces:

4.4. TEOREMA: (Palais)

Para cada $p \in H^*$, existe una vecindad abierta de p. $U_p \subset H^*$ y un campo pseudogradiente C^∞ (y en particular Loc. Lips)
$V_p : U_p \to H$

Dem: Sea $a > 1$:

$p \in \{q \in H^* / \langle \nabla F(p), \nabla F(p)\rangle < a(\langle \nabla F(q), \nabla F(q)\rangle)\} =: U_1$ - ab. en H^*

$p \in \{q \in H^* / \langle \nabla F(q), \nabla F(q)\rangle < a(\langle \nabla F(q), \nabla F(p)\rangle)\} =: U_2$ - ab en H^*

$\therefore p \in U_1 \cap U_2 = \{q \in H^* / \langle \nabla F(p), \nabla F(p)\rangle < a(\langle \nabla F(q), \nabla F(q)\rangle) < a^2(\langle \nabla F(p), \nabla F(q)\rangle)\}$

si definimos: $U_p := U_1 \cap U_2$ y $V_p : U_p \to H$, $q \mapsto \nabla F(p)$

entonces $\forall q \in U_p$: $\langle V_p(q), V_p(q)\rangle < a(\langle \nabla F(q), \nabla F(q)\rangle) < a^2(\langle \nabla F(q), V_p(q)\rangle)$

y V_p es campo pseudogradiente en U_p
es constante $\therefore C^\infty$ ∎

H^* es un espacio metrico y $\{U_p\}_{p\in H^*}$ es una cubierta abierta de H^*

Entonces existe una subcubierta de $\{U_p\}$ localmente finita, digamos $\{U_{p_\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}$
(Ver por ejemplo "General Topology" de Willard sec. 20)

Sea $\{\varphi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una partición C^∞ de la unidad subordinada a $\{U_{p_\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}$, entonces podemos unir los campos locales del teorema anterior para obtener:

4.5.- TEOREMA: (Palais)

Sea H- espacio de Hilbert, $F\in C'(H,\mathbb{R})$ H^* como en 4.4, entonces existe un campo vectorial C^∞ pseudogradiente para F:

$$V^*: H^* \longrightarrow H$$

<u>Dem:</u>

Definamos:
$$V^*: H^* \longrightarrow H$$
$$q \longmapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi_\gamma(q) V_{p_\gamma}(q)$$

donde V_{p_γ} es el campo de 4.4 correspondiente a U_{p_γ}

Dado $q\in H^*$, existe una vecindad W_q que intersecta sólo un nº finito de U_p's, digamos $\{U_{p_1}, \dots U_{p_n}\}$ así, $\forall x\in W_q$: $V^*(x)=\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) V_{p_i}(x) \dots (*)$

y $\forall i$: $V_{p_i}(x)\in P_x$ (4.2) . $0\le \varphi_i \le 1$ y $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)=1$

$\therefore$ $V^*(x)$ esta en la envoltura convexa de $\{V_{p_i}(x)\}_{i=1}^{n}$ y por 4.2, $V^*(x)$ es pseudogradiente y como los V_{p_i} son C^∞, V^* es C^∞ en W_q $\therefore$ V^* es pseudogradiente C^∞ ∎

4.6.- OBSERVACION: [24]. El teorema de deformacion en $\mathbb{R}^n$ lo demostramos para funciones $F \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ PROPIAS, pero si el espacio de Hilbert H es de dimension infinita, no existen funciones continuas $F: H \to \mathbb{R}$ propias.

En efecto, si existiera F así, entonces dado $P \in H$, $\varepsilon > 0$, sea $U := [F(P)-\varepsilon, F(P)+\varepsilon]$, U es vecindad compacta de $F(P)$ y $F^{-1}(U)$ sería vecindad compacta de P y H sería localmente compacto $\not\downarrow$

Afortunadamente, el teorema sigue siendo cierto bajo una condicion más débil para F, una condicion de compacidad descrita a continuacion:

4.7 DEFINICION: (Palais-Smale)

Sea $F \in C^1(H, \mathbb{R})$, diremos que F satisface la CONDICION (C) si $\forall$ sucesion $\{x_n\} \subset H$ + $\{F(x_n)\}$- acotada y $\nabla F(x_n) \to 0$, $\exists \{x_{n_i}\}$ subsucesion convergente

EJEMPLO: Si $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es propia, entonces f satisface la condicion (C).

<u>Dem</u> Si $\{f(x_n)\}$ - acotado, $\exists M > 0$ + $\{f(x_n)\} \subset [-M, M]$ - compacto $\therefore \{x_n\} \subset f^{-1}[-M, M]$ compacto y existe una subsucesion convergente

■

4.8. TEOREMA: (Ver por ejemplo [25])

Si $F \in C^1(H,\mathbb{R})$ satisface la condicion (C) y $K := \{x \in H / \nabla F = 0\}$ entonces:

i) $F|_K$ es propio y en particular, $\forall c \in \mathbb{R}$: $K_c = K \cap F^{-1}(c)$ es compacto

ii) $F(K)$ es cerrado en $\mathbb{R}$

Dem: i) $\forall K_1 \subset \mathbb{R}$ compacto, $\exists [a,b] \ni K_1 \subset [a,b]$ asi, $(F|_K)^{-1}(K_1) \subset K \cap F^{-1}[a,b]$ y $\forall \{X_n\}$ suc. en $(F|_K)^{-1}(K_1)$ $\{F(X_n)\} \subset [a,b]$ - acotado y $\forall n$: $X_n \in K$ $\therefore$ $\nabla F(X_n) = 0$

Por la condicion (C), entonces, toda sucesion $\{X_n\}$ en $(F|_K)^{-1}(K_1)$ tiene subsucesion convergente $\therefore$ $\forall K_1 \subset \mathbb{R}$ compacto, $(F|_K)^{-1}(K_1)$ es compacto.

En particular $K_c = (F|_K)^{-1}(\{c\})$ es compacto

ii) Si $c \in \overline{F(K)}$, existe $\{c_n\}_1^\infty \subset F(K) \ni c_n \to c$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in K \ni F(X_n) = c_n$, como $\{F(X_n)\}$ converge, es acotado y como $X_n \in K$, $\nabla F(X_n) = 0$ $\therefore$ por condicion (C), existe $\{X_{n_i}\}$ convergente, digamos a x $\therefore$ $F(X_n) = c_n \to F(x)$ y $c = F(x)$ y como $\nabla F(X_n) \to 0$, $\nabla F(x) = 0$ $\therefore$ $x \in K$ y $c \in F(K)$ ■

4.9. OBSERVACION: Sea $V^*: H^* \to H$ de 4.5, como $\nabla F(X_n) \to 0 \Leftrightarrow V^*(X_n) \to 0$, podemos extender de manera continua V^* a todo H como $v: H \to H$,

$$v(x) = \begin{cases} V^*(x) & \text{si } x \in H^* = H - K \\ 0 & \text{si } x \in K \end{cases}$$

(V no sera loc lips en K pero es C^∞ en H^*)

Podemos poner entonces a V en lugar de ∇F en 4.7 y 4.8.

4.10.- TEOREMA DE DEFORMACION [5]:

Sea $F \in C^1(H,\mathbb{R})$ que satisface la condicion (c) y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\forall\, \bar{\delta} > 0$, $\forall\, U \subset H$ y $K_c \subset U$- abierto, existen $\delta \in (0, \bar{\delta})$ y $\eta \in C(I \times H, H)$ tales que:

1) $\forall x \in H$: $\eta(0,x) = x$

2) $F(x) \notin [c-\bar{\delta}, c+\bar{\delta}] \Rightarrow \forall t \in I$: $\eta(t,x) = x$

3) $x \in F^{c+\delta} - U \Rightarrow \eta(1,x) \in F^{c-\delta}$

4) $K_c = \emptyset \Rightarrow \forall x \in F^{c+\delta}$: $\eta(1,x) \in F^{c-\delta}$

5) $\forall t$: $\eta_t := \eta(t, -)$ es difeomorfismo C^∞.

DEMOSTRACION:

La demostracion es identica a la de 1.1, usando el campo vectorial v de 4.9 en lugar de ∇F, $v|_{H^*} = V^*$- pseudo gradiente, y $a > 1$ fijo es tal que $\forall x \in H^*$: $\langle V(x), V(x)\rangle \leq a(\langle \nabla F(x), \nabla F(x)\rangle) \leq a^2(\langle V(x), \nabla F(x)\rangle)$.

d_1 se definirá como $d_1 \leq \min\left(d_2, \frac{b\varepsilon}{6a^2}, \frac{b^2}{2a^2}, \bar{\delta}\right)$

por la construccion de φ: $V: H \to H$

$x \mapsto -\varphi(x)\,\alpha(\|V(x)\|)\,v(x)$

se anula en una vecindad de K_c, así, V es C^∞ en $H^* \cup K_c = H$

entonces $\forall t$: η_t es C^∞- difeomorfismo

■

5.- EL PASO DE LA MONTAÑA EN ESPACIOS DE HILBERT (Ver [26])

Con 4.10, podemos demostrar el teorema 2.1 con un espacio de Hilbert cualquiera, lo enunciaremos en esa forma y la demostración es la misma que antes:

5.1.- TEOREMA: Sea H un espacio de Hilbert, $F \in C^1(H,\mathbb{R})$ que satisface la condicion (c) $\Omega := \{x \in H / \|x\| < \rho\}$ $\rho > 0$. y sea $x_0 \notin \bar{\Omega}$ y $\max(F(0), F(x_0)) < c_0 \leq \inf_{x \in \partial\Omega} F(x)$

Entonces F tiene un valor critico $c \geq c_0$ caracterizado como sigue:

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in I} F(g(t))$$

donde $\Gamma := \{g \in C(I, H) / g(0) = 0, g(1) = x_0\}$

■

Tambien existen generalizaciones del teorema 2.2, de ellas hablaremos en la seccion 7. La definicion y propiedades del género de la seccion 3 se aplican igualmente bien en espacios de Hilbert

5.2.- TEOREMA: Con las hipotesis de 1.1 F-par que satisface la condicion (c), existen δ y η del mismo teorema y $\forall t$: η_t - impar

– misma demostracion que 3.4 usando 4.10 –

Demostraremos una generalización de 5.1 en espacios de dimensión infinita:

5.3.- TEOREMA: ([26] teorema 1.9)

Sea H - espacio de Hilbert $\dim H = \infty$, $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ con condición (c) tal que:

i) I - par

ii) $I(0) = 0$ y existen constantes $\rho, \alpha > 0$ / $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$ $\quad (B_r := \{x \in H / \|x\| \leq r\})$

iii) $\forall$ subespacio $\tilde{H} \subset H$ / $\dim \tilde{H} < \infty$, existe $R(\tilde{H}) \in \mathbb{R}^+$ / $\forall u \in \tilde{H} - B_{R(\tilde{H})}$: $I(u) \leq 0$

Entonces I tiene una sucesión no acotada de valores críticos.

Para la demostración necesitamos algunos lemas:

5.4.- LEMA: Sea $E = \{A \subset H - \{0\} / A$ simétrico y cerrado$\}$ si A es compacto, $\gamma(A) < \infty$

__Dem:__ $\forall p \in A$, $\exists U_p$ abto. $(U_p \cap (-U_p) = \emptyset)$ y $W_p := U_p \cup (-U_p)$ es tal que (por 3.2(4))

$$\gamma(W_p) = \gamma(\{p, -p\}) = 1$$

por la compacidad de A, podemos cubrirlo con un nº finito de abiertos del género 1 $\Rightarrow$ por 3.2(3) $\gamma(A)$ es finito. $\blacksquare$

5.5.- DEFINICION y LEMA:

Sea $\{e_m\} \subset H$ sucesion de vectores unitarios + e_{m+1} no sea elemento del espacio generado por $\{e_1, \dots e_m\}$ al que llamaremos H_m, sea $R_m := R(H_m)$ (de 5.3 (iii))

$D_m := B_{R_m} \cap H_m$

$$G_m := \{h \in C(D_m, H) \mid h \text{ impar, } h/_{\partial B_{R_m} \cap H_m} = Id\}$$

$(Id \in G_m \neq \emptyset)$

$$\Gamma_j := \{h(\overline{D_m - Y}) \mid m \geq j,\ h \in G_m,\ Y \in E,\ \gamma(Y) \leq m-j\}$$

$(h(\overline{D_m - Y}) = \overline{h(D_m - Y)}$ es compacto y $\forall m \geq j$:

$D_m \in \Gamma_j \neq \emptyset$), Sean Y y h + $h(\overline{D_m - Y}) \in \Gamma_j$.

Si $i < j$, $m \geq j > i$, $-j < -i$ y

$$\gamma(Y) \leq m - j < m - i$$

$\therefore$ $h(\overline{D_m - Y}) \in \Gamma_i$ i.e. $\Gamma_j \subset \Gamma_i$ .... (a)

Si $A \in E$ + $\gamma(A) \leq s < j$ entonces

$\overline{h(\overline{D_m - Y}) - A} = \overline{h(D_m - (Y \cup h^{-1}(A)))}$ $\quad m \geq j > j-s$

y $\gamma(Y \cup h^{-1}(A)) \leq \gamma(Y) + \gamma(h^{-1}(A)) \leq \gamma(Y) + \gamma(A)$

$\leq m - (j-s)$ $\therefore$ $\forall B \in \Gamma_j$: $\overline{B - A} \in \Gamma_{j-s}$ ...(b)

Por ultimo, si $\phi \in C(H,H)$ impar y $\forall m$: $\phi/_{\partial B_{R_m} \cap H_m} = Id$ entonces $\phi \circ h \in G_m$ y $\forall B \in \Gamma_j$:

$$\phi(B) \in \Gamma_j \quad \cdots (c)$$

∎

5.6.- DEFINICION y LEMA:

Con la notacion de 5.3 y 5.5, sea:

$$c_j := \inf_{B\in\Gamma_j} \max_{x\in B} I(x)$$

como $i<j \Rightarrow \Gamma_j \subset \Gamma_i$ entonces $c_i \le c_j$

como $\forall j$: y $\forall B\in\Gamma_j$ - B compacto, entonces $\max_{x\in B} F(x) < \infty$ y $c_j < \infty$

Afirmamos que $c_1 \geq \alpha > 0$ (α de 5.3 ii)

En efecto;

Sea $B\in\Gamma_1$, i.e. $B = h(\overline{D_m - Y})$ $Y\in E$, $\gamma(Y)\le m-1$

como $I \geq \alpha$ en ∂B_ρ y en $H_m - D_m$ $I(u)\le 0$ para $R_m > \rho$.

Definamos $\hat{\Omega} := \{x\in D_m \mid h(x)\in B_\rho\}$ y sea Ω la componente de $\hat{\Omega}$ $\ni$ $0\in\Omega$, como h- impar y $h|_{\partial B_{R_m}\cap H_m} = Id$, Ω es vecindad simetrica acotada de 0 en $Hm \cong \mathbb{R}^m$ $\therefore$ $\gamma(\partial\Omega) = m$ (3.3)

Si $x\in\partial\Omega$, $h(x)\in\partial B_\rho$ $\therefore$ si $W := \{x\in D_m \mid h(x)\in\partial B_\rho\}$ $\gamma(W)\geq\gamma(\partial\Omega) = m$ y $\gamma(\overline{W-Y}) \geq m-(m-1) = 1$ (3.2(6))

$\therefore$ $\overline{W-Y}\neq\emptyset$ y $\exists\ \xi\in W$, $h(\xi)\in B\cap\partial B_\rho$

$\therefore$ $\max_{x\in B} I(x) \geq I(h(\xi)) \geq \inf_{x\in\partial B} I(x) \geq \alpha$ $\quad\forall B\in\Gamma_1$

$\therefore$ $c_1 = \inf_{B\in\Gamma_1} \max_{x\in B} I(x) \geq \alpha$

∎

DEMOSTRACION DE 5.3:

Por 5.6, $\forall j$: $0 < \alpha \le c_1 \le c_2 \le \cdots \le c_j < \infty$

Entonces, de manera analoga a 3.6:

$\forall j \in \mathbb{N}$: c_j es valor critico

Si $c := c_j = \cdots = c_{j+k-1}$ entonces $\gamma(K_c) \geq k$.

Dem. $c \geq \alpha > 0$, $I(0) = 0 \Rightarrow 0 \notin K_c$

$\therefore K_c \in E$ y por 4.8 (i) K_c - compacto

$\therefore \gamma(K_c) < \infty$ (Lema 5.4)

Si $\gamma(K_c) < k$, $\exists \varepsilon > 0 \ni \gamma(N_\varepsilon(K_c)) < k$

sea $\bar{\delta} = \frac{\alpha}{2}$, $\ni \delta \in (0, \delta)$ $\eta \in C(I \times H, H) \ni$

$$\eta_1(I^{c+\delta} - N_\varepsilon(K_c)) \subset I^{c-\delta}$$

Sea $B \in \Gamma_{j+k-1} \ni \max\limits_{x \in B} I(x) \le c + \delta$

$\therefore$ (*) $\cdots \max\limits_{x \in \eta_1(\overline{B - N_\varepsilon(K_c)})} I(x) \le c - \delta$ pero $\overline{B - N_\varepsilon(K_c)} \in \Gamma_j$ (5.5.b)

y $\eta_1 \in G_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $\therefore$ $\eta_1(\overline{B - N_\varepsilon(K_c)}) \in \Gamma_j$ (5.5.c)

(η_1 solo mueve conjuntos en $I^{-1}(\mathbb{R}^+)$ y por 5.3 (iii), $\eta_1 |_{\partial B_{R_m}} = Id$)

entonces $\max\limits_{x \in \eta_1(\overline{B - N_\varepsilon(K_c)})} I(x) \geq c_j = c$. $\not\downarrow$ (contradice (*))

$\therefore \gamma(K_c) \geq k$

Para demostrar que $c_j \to \infty$ si $j \to \infty$, supongamos que existe $\bar{c}$ ∋ $c_j \to \bar{c}$

si $\bar{c} = c_n$, entonces $\bar{c} = c_{n+i}$ $\forall i \in \mathbb{N}$

y por la demostración anterior: $\gamma(K_c) = \infty$

pero K_c - compacto.

Entonces $\forall j$: $c_j < \bar{c}$.

Sea $\mathcal{L} := \{u \in H \mid I(u) \in [c_1, \bar{c}]\ \nabla I(u) = 0\}$

por 4.8 (α') $\mathcal{L}$ es compacto

Como $c_1 \geq \alpha > 0 = I(0)$, $0 \notin \mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ - simétrico por ser I par $\therefore$ $\mathcal{L} \in E$ y existe $\varepsilon > 0$ ∋

$$\gamma(N_\varepsilon(\mathcal{L})) = \gamma(\mathcal{L}) = n < \infty$$

Sea $\bar{\delta} := \bar{c} - c_1$, $c := \bar{c}$, $U := N_\varepsilon(\mathcal{L})$, $\delta \in (0, \bar{\delta})$

∃ $\eta \in C(I \times H, H)$ ∋ η_1 - impar y

$(*) \ldots \quad \eta_1(\overline{I^{c+\delta} - U}) \subset I^{c-\delta}$

sea $m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid c_n > \bar{c} - \delta\}$

como $\bar{c} - \delta > \bar{c} - (\bar{c} - c_1) = c_1$, $m > 1$ } sea $B \in \Gamma_{n+m}$

∋ $(**) \ldots \quad \max\limits_{x \in B} I(B) \leq \bar{c} + \delta$

nuevamente, $\forall k \in \mathbb{N}$: $\eta_1 \big|_{\partial B_{R_k} \cap H_k} = Id$

$\therefore$ $\overline{B - U}$ y $\eta_1(\overline{B - U}) \in \Gamma_m$ (5.5 b y c)

pero por $(*)$ y $(**)$:

$$c_m \leq \max_{x \in \eta_1(\overline{B - U})} I(u) \leq \bar{c} - \delta < c_m \quad \lightning$$

$\therefore \quad c_j \to \infty$ ∎

6.- ALGUNAS APLICACIONES:

De aqui en adelante, Ω sera un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ acotado y con frontera Lipschitz (Ver A.5.1)

6.1: Consideremos la ecuacion:

(1) .... $\quad -\Delta u(x) = p(x, u(x)) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad u/_{\partial\Omega} = 0$

donde: $\quad n > 2$

(P_1) p es localmente Lipschitz en $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$

(P_2) $\exists\, a_1, a_2 \geq 0$ y $1 < s < \frac{n+2}{n-2}$ y $\forall (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$:

$$|p(x,\xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s$$

(P_3) $p(x,\xi) = o(|\xi|)$ en $\xi = 0$

(P_4) $\exists\, \alpha > 2$, $\bar{r} > 0$ y si $|\xi| \geq \bar{r}$:

$$0 < \alpha \int_0^\xi p(x,t)\,dt \leq \xi\, p(x,\xi)$$

si definimos $T(x,\xi) := \int_0^\xi p(x,t)\,dt$

la ultima desigualdad se lee:

$$|\xi| \geq \bar{r} \Rightarrow 0 < \alpha\, T(x,\xi) \leq \xi\, p(x,\xi)$$

Usaremos el teorema 5.1 para demostrar la existencia de soluciones de (1).

Sea $H := W_0^{1,2}(\Omega)$ (A.5.10), si $u \in H$:

$$\|u\|_H^2 = \int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2 \geq \int_\Omega |\nabla u|^2$$

y por la desigualdad de Poincaré (A.5.9) existe $k > 0$ constante ∋

$$\|u\|_H^2 \leq k\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \left(\int_{\partial\Omega} u\right)^2\right]$$

pero $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \Rightarrow \int_{\partial\Omega} u = 0$

$\therefore \|u\|^2 := \int_\Omega |\nabla u|^2$ define en H una norma equivalente a $\| \ \|_H$.

Si $\forall \phi \in H$: $\int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla\phi(x)\rangle dx = \int_\Omega p(x,u(x))\cdot\phi(x)\, dx$

se dice que u es solucion debil de (1)

(Ver [27] cap 32 por ejemplo)

Las hipotesis P_1, P_2, implican que las soluciones debiles de (1) son soluciones clasicas (Ver por ejemplo. [3] prop 1.5.7)

Si definimos para $u \in H$:

$$I(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega T(x,u(x))\,dx$$

entonces $\forall \phi \in H$:

$$I'(u)(\phi) = \int_\Omega [\langle \nabla u(x), \nabla\phi(x)\rangle - p(x,u)\cdot\phi(x)]\,dx$$

y los puntos criticos de I en H son soluciones debiles (y en este caso, clasicos) de (1)

Para los calculos siguientes ver [1] lema 3.3

Por (P_3) : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \ni |\xi| < \delta \Rightarrow \dfrac{|p(x,\xi)|}{|\xi|} < \varepsilon$

$\Rightarrow \left| \int_0^\xi p(x,t)\,dt \right| \le \int_0^{|\xi|} |p(x,t)|\,dt < \varepsilon \int_0^{|\xi|} t\,dt = \dfrac{\varepsilon |\xi|^2}{2}$ si $|\xi| < \delta$

y si $|\xi| \geq \delta$ $\quad \dfrac{|\xi|}{\delta} \geq 1$ y $\left|\dfrac{\xi}{\delta}\right|^{s+1} \geq \left|\dfrac{\xi}{\delta}\right|$

$\therefore \left| \int_0^\xi p(x,t)\,dt \right| \le \int_0^{|\xi|} |p(x,t)|\,dt \le \int_0^{|\xi|} (a_1 + a_2 |t|^s)\,dt =$

$= \delta\, a_1 \dfrac{|\xi|}{\delta} + \dfrac{a_2}{s+1} |\xi|^{s+1} \le \delta\, a_1 \left|\dfrac{\xi}{\delta}\right|^{s+1} + \dfrac{a_2}{s+1} |\xi|^{s+1} \le a_3 |\xi|^{s+1}$

para algun $a_3 > 0$

$\therefore \left| \int_\Omega T(x,u(x))\,dx \right| \le \int_\Omega |T(x,u(x))|\,dx <$

$< \int_\Omega \left(\dfrac{\varepsilon}{2} |u|^2 + a_3 |u|^{s+1} \right) = \dfrac{\varepsilon}{2} \|u\|_2^2 + a_3 \|u\|_{s+1}^{s+1}$ ---- (*)

donde $\|u\|_p$ - norma en L_p (A.5.3)

como $\quad 2 < s+1 < \dfrac{2n}{n-2} \qquad \dfrac{1}{s+1} > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}$

$\therefore \quad W^{1,2}(\Omega) \subset L_{s+1}(\Omega)$ (A.5.7 (ii)) $(n > 2)$

Analogamente $W^{1,2}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$

$\therefore\ \exists\, a_4 > 0 \ni$

$$\left| \int_\Omega T(x,u(x))\,dx \right| < a_4 (\varepsilon \|u\|^2 + \|u\|^{s+1})$$

$$\therefore \quad \int_\Omega T(x,u(x))\,dx = o(\|u\|^2)$$

Luego, por la definicion de I: $I(0)=0$

y Dado ε / $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, sea $\rho>0$ / $\|u\|\leq\rho \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{|\int_0^\rho T(x,u(x))\,dx|}{\|u\|^2}<\varepsilon \quad \therefore -\int_0^\rho T(x,u(x))\,dx > -\varepsilon\|u\|^2$

$\therefore$ si $\|u\|=\rho$:

$$I(u)\geq\left(\tfrac{1}{2}-\varepsilon\right)\|u\|^2=\left(\tfrac{1}{2}-\varepsilon\right)\rho>0$$

Por otro lado:

si $|t|\geq\bar{r}$: por (P_4):

$$\frac{\alpha}{t}\leq\frac{P(x,t)}{T(x,t)} \quad \text{integrando:}$$

$$\alpha\int_{\bar{r}}^{\xi}\frac{1}{t}\,dt\leq\int_{\bar{r}}^{\xi}\frac{P}{T}(x,t)\,dt \;\therefore\; \alpha\ln\frac{|\xi|}{\bar{r}}\leq\ln\frac{T(x,\xi)}{T(x,\bar{r})}$$

$\therefore \dfrac{|\xi|^\alpha}{\bar{r}^\alpha}\leq\dfrac{|T(x,\xi)|}{|T(x,\bar{r})|}$ como $T(x,\bar{r})$ alcanza su minimo en Ω: existe $M>0$ / $\dfrac{M}{r^\alpha}|\xi|^\alpha\leq T(x,\xi)$ si $|\xi|\geq\bar{r}$

y $\dfrac{M}{r^\alpha}|\xi|^\alpha-T(x,\xi)$ alcanza su maximo en $\Omega\times\{|\xi|<\bar{r}\}$

$\therefore \exists\, a_5, a_6>0$ / $\forall(x,\xi)$: $T(x,\xi)\geq a_5|\xi|^\alpha-a_6$

recordemos que $\alpha>2$ $\therefore$

$I(u)\leq\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_\Omega(a_5|u|^\alpha-a_6)$ y $\forall\beta>0$:

$I(\beta u)\leq\frac{\beta^2}{2}\|u\|^2-\beta^\alpha a_5\int_\Omega|u|^\alpha+\int_\Omega a_6$

$\therefore \beta\to\infty\Rightarrow I(\beta u)\to-\infty$ y existe $x_0\in H-B_\rho$

tal que $I(x_0) \leq 0$

NOTA:
De la misma manera, $\forall \tilde{H} \subset H$ de dim. finita, $I(u) \to -\infty$ si $u \to \infty$
$\therefore \forall \tilde{H} \subset H$ $\dim \tilde{H} < \infty$, $\exists R(\tilde{H}) > 0 \ni \forall u \in \tilde{H} - B_{R(\tilde{H})}$:

$$I(u) \leq 0$$

Para poder aplicar 5.1, solo falta verificar que I satizface la condicion (C).

Definamos en H el operador A como:

$$\forall u, \phi \in H: \quad \langle A(u), \phi \rangle_H := \int_\Omega p(x, u(x)) \cdot \phi(x)\, dx$$

Bajo la identificacion canonica de $H \ni H^*$ (Ver por ejemplo [14]) u corresponde al mapeo $\phi \mapsto \langle u, \phi \rangle_H = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle$ y tenemos:

$$I'(u) = u - A(u)$$

Demostraremos que A es un operador compacto, si u_n converge debilmente a u en H, $A(u_n)$ converge fuertemente a $A(u)$.

Sea $u_n \longrightarrow u \in W_0^{1,2}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$

por A. 5.8(i): $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_s$ con $s < \frac{2n}{n-2}$

$\therefore$ $u_n \longrightarrow u \in L_s$

$\therefore$ $p(x, u_n) \longrightarrow p(x, u) \in L_1$

(Esto ultimo, utilizando [3] prop 7.7.1

que dice: si $|p(x,y)| \leq \alpha + \beta |y|^{p_1/p_2}$ $\alpha,\beta \geq 0$

entonces $p(x,-) : L_{p_1} \to L_{p_2}$ es continuo)

Ahora:

$$\|A(u_n) - A(u)\|_H = \sup_{\|\phi\|_H = 1} \int_\Omega (p(x,u_n) - p(x,u)) \cdot \phi$$

$$= \sup_{\|\phi\|_H = 1} \|(p(x,u_n) - p(x,u)) \cdot \phi\|_1 \leq \sup_{\|\phi\|_H = 1} \|p(x,u_n) - p(x,u)\|_1 \|\phi\|_1$$

pero por A.5.7 (i) existe $k > 0$ ∍

$$\|\phi\|_1 \leq k \|\phi\|_H = k$$

$$\therefore \|A(u_n) - A(u)\|_H \leq \|p(x,u_n) - p(x,u)\|_1$$

Esto ultimo tiende a cero

$\therefore$ $A(u_n) \to A(u)$ en H ∍ A- compacto.

Sea entonces $\{u_n\}$ ∍ $|I(u_n)| \leq M$ - fijo

∍ $I'(u_n) \to 0$

$\therefore$ para n suficientemente grande:

$$|I'(u_n)(\phi)| \leq \|\phi\| \quad \forall \phi \in E$$

en particular: $|I'(u_n)(u_n)| \leq \|u_n\|$ ∍:

$$M + \alpha^{-1}\|u_n\| \geq |I(u_n)| + \alpha^{-1}|I'(u_n)(u_n)| \geq$$

$$\geq |I(u_n) - \alpha^{-1} I'(u_n)(u_n)| = \left|\tfrac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega T(x,u_n) - \alpha^{-1} I'(u_n)(u_n)\right|$$

$$= \left|\tfrac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega T(x,u_n) - \alpha^{-1}\|u_n\|^2 + \alpha^{-1}\int_\Omega p(x,u_n)u_n\right| =$$

$$= \left|(2^{-1} - \alpha^{-1})\|u_n\|^2 + \int_\Omega [\alpha^{-1} p(x,u_n) u_n - T(x,u_n)]\right|$$

por P_4, $\xi p(x,\xi) - \alpha T(x,\xi)$ alcanza su minimo en $\Omega \times \mathbb{R}$ $\therefore$ $\exists$ $a_7 > 0$ $\ni$

$$M + \alpha^{-1}\|u_m\| \geq (2^{-1} - \alpha^{-1})\|u_m\|^2 - a_7$$

y tenemos: $0 \geq b_2\|u_m\|^2 + b_1\|u_m\| + b_0$

con $b_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} > 0$

$\therefore$ $\{u_m\}$ está acotado y por ser A compacto, $\{A(u_m)\}$ tiene subsucesión convergente y como $u = I'(u) + A(u)$ y $I'(u_m) \to 0$, $\{u_m\}$ tiene subsucesión convergente $\therefore$ I satisface la condición (c), podemos aplicarle el teorema 5.1 y (1) tiene al menos una solución ■

6.2.- Acabamos de demostrar la existencia de una solución de (1), algo sorprendente es el hecho de que si $p(x,\xi)$ es impar en ξ, bajo las condiciones anteriores (1) tiene un conjunto NO ACOTADO de soluciones.

En efecto, si p es impar en ξ:

$$T(x,-\xi) = \int_0^{-\xi} p(x,t)\,dt = \int_0^{\xi} -p(x,-t)\,dt = \int_0^{\xi} p(x,t)\,dt = $$
$$= T(x,\xi) \quad \text{y } T \text{ es par.}$$

$\therefore$ I es par y como vimos en 6.1, satisface las condiciones para aplicarle el teorema

5.3, e I tiene una sucesion no acotada de valores criticos y como:

$$|I(u)| \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \left|\int_\Omega T(x,u)\right| \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + a_4(\varepsilon\|u\|^2 + \|u\|^{s+1})$$

I es acotado en conjuntos acotados y los puntos correspondientes a los valores criticos son no acotados.

■

En la siguiente sección, demostraremos un análogo de 2.2 en espacios de Hilbert y una aplicacion a ecuaciones diferenciales.

7.- PRINCIPIOS MINIMAX Y ENLACES EN ESPACIOS DE HILBERT. (Some minimax principles and their applications in nonlinear elliptic equations" por Wei-Ming Ni' Journal D'Analyse Mathématique Vol 37 (1980) pp 248-275)

Describiremos un resultado análogo a 7.2 usando una noción de enlace entre dos esferas en un espacio de Hilbert, de dimensiones complementarias (Una de ellas, finita), noción que describiremos a continuación:

7.1 - DEFINICIONES:

Sea H un espacio de Hilbert real.

$H = H_k \oplus \hat{H}$ donde $0 \leq \dim H_k =: k < \infty$

$\hat{S} := \{x \in \hat{H} \mid |x| = 1\}$ $\quad S^k := \{x \in \mathbb{R}^{k+1} \mid |x| = 1\}$

$\varphi : S^k \longrightarrow H$ continua y $\varphi(S^k) \cap \hat{S} = \emptyset$

Por ser $\varphi(S^k)$ compacto, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que:

$$d(\varphi(S^k), \hat{S}) \geq \varepsilon_0$$

Por la misma compacidad:

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \ \varphi_\varepsilon : S^k \to H$ y $\sup_{x \in S^k} \|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\| < \varepsilon$

y $\varphi_\varepsilon(S^k) \subset V_\varepsilon$ - subespacio de dimensión finita.

(Ver por ejemplo [4] Lema 3.4)

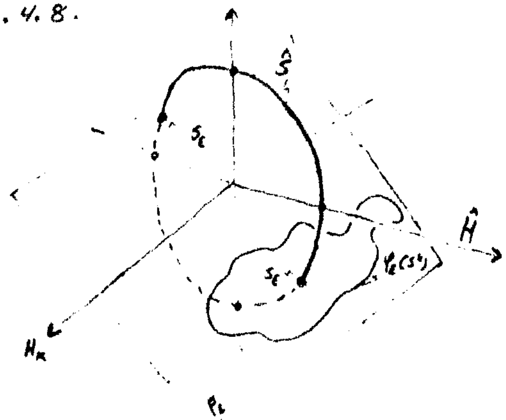
Sean $F_\varepsilon := H_k + V_\varepsilon$ - dimensión finita -

$S_\varepsilon := \hat{S} \cap F_\varepsilon$

Definimos el numero de enredamiento de $\hat{S}$ y $\varphi(S^k)$:

$$\hat{S} \,\&\, \varphi(S^k) := S_\varepsilon \,\&\, \varphi_\varepsilon(S^k) \quad \text{para } \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{3}$$

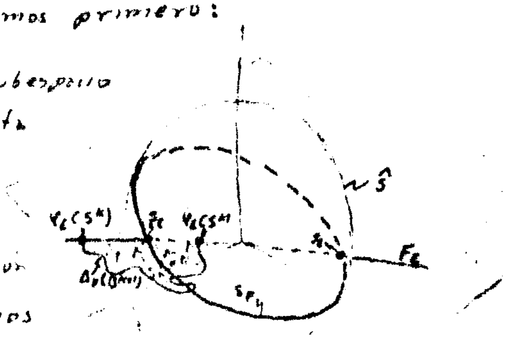
Donde $S_\varepsilon \,\&\, \varphi_\varepsilon(S^k)$ es el numero de enredamiento en dimension finita (S_ε y $\varphi_\varepsilon(S^k)$ estan en F_ε), definido en A.4.8.



Por supuesto, debemos comprobar que $\hat{S} \,\&\, S^k$ no depende de ε, Tenemos primero:

7.2.- LEMA: Sea F subespacio de H y $F_\varepsilon \subset F$ - dimension finita $S_F := \hat{S} \cap F$, entonces:

$$S_F \,\&\, \varphi_\varepsilon(S^k) = S_\varepsilon \,\&\, \varphi_\varepsilon(S^k).$$



Dem: De cualquier extension $\Delta_F : B^{k+1} \to F$, de φ_ε podemos obtener una extension $\Delta_\varepsilon : B^{k+1} \to F_\varepsilon$ mediante la proyeccion ortogonal.

Como ambos son homotopicos y la homotopia deja fija la frontera, el numero de interseccion de $\Delta_F(B^{k+1})$ y S_F es el mismo que el de $\Delta_\varepsilon(B^{k+1})$ y S_F, como $\Delta_\varepsilon(B^{k+1}) \subset F_\varepsilon$, este ultimo es el numero de interseccion de $\Delta_\varepsilon(B^{k+1})$ y $S_F \cap F_\varepsilon$ i.e. el de $\Delta_\varepsilon(B^{k+1})$ y S_ε #

7.3.- LEMA:

Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_0}{3}$, F - subespacio de dimension finita de H tal que: $F_{\varepsilon_1} \cup F_{\varepsilon_2} \subset F$, $S_F := \hat{S} \cap F$ entonces: $S_F \,\&\, \varphi_{\varepsilon_1}(S^k) = S_F \,\&\, \varphi_{\varepsilon_2}(S^k)$.

Demostracion:

Recordemos que $d(\varphi(S^k), \hat{S}) \geq \varepsilon_0$

como $\forall x$: $\| \varphi_{\varepsilon_1}(x) - \varphi(x) \| < \frac{\varepsilon_0}{3}$ & $\| \varphi_{\varepsilon_2}(x) - \varphi(x) \| < \frac{\varepsilon_0}{3}$

entonces: $\forall t \in I$, $x \in H$:

$$\| t\, \varphi_{\varepsilon_1}(x) + (1-t)\, \varphi_{\varepsilon_2}(x) - \varphi(x) \| < \frac{\varepsilon_0}{3}$$

$\therefore$ $\forall t$: si $\varphi_t := t\,\varphi_{\varepsilon_1} + (1-t)\,\varphi_{\varepsilon_2}$:

$$d(\varphi_t(S^k), \hat{S}) \geq \varepsilon_0 > 0$$

y $\varphi_t(S^k) \cap S_F = \emptyset$

las $\{\varphi_t\}_{t \in I}$ nos dan una homotopia de φ_{ε_2} a φ_{ε_1} que no intersecta a S_F, luego, por la invarianza homotopica del grado: $S_F \,\&\, \varphi_{\varepsilon_1}(S^k) = S_F \,\&\, \varphi_{\varepsilon_2}(S^k)$

$\not\Delta$

7.4.- TEOREMA:

Si $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_0}{3}$, $S_{\varepsilon_1} \,\&\, \varphi_{\varepsilon_1}(S^k) = S_{\varepsilon_2} \,\&\, \varphi_{\varepsilon_2}(S^k)$

Demostracion: Sea $F_{\varepsilon_1} \cup F_{\varepsilon_2} \subset F$ - dimension finita.

$$S_{\varepsilon_1} \,\&\, \varphi_{\varepsilon_1}(S^k) \underset{7.2}{=} S_F \,\&\, \varphi_{\varepsilon_1}(S^k) \underset{7.3}{=} S_F \,\&\, \varphi_{\varepsilon_2}(S^k) \underset{7.2}{=} S_{\varepsilon_2} \,\&\, \varphi_{\varepsilon_2}(S^k)$$

$\not\Delta$

Tenemos entonces el siguiente teorema:

7.5: TEOREMA:
Sean $H = H_k \oplus \hat{H}$ como antes, $J \in C^1(H,\mathbb{R})$ que satisface la condicion (C) y:

a) $J \geq c_1 > c_0$ en $\hat{S}_\rho$ para algun $\rho > 0$
   $(\hat{S}_\rho := \hat{H} \cap \{u \in H \,/\, \|u\| = \rho\}$

b) $J/_\phi(S^k) \leq c_0$

c) $\hat{S}_\rho$ & $\phi(S^k) \neq 0$

Entonces si $\Gamma := \{h \in C(B^{k+1}, H) \,/\, h/_{\partial B^{k+1}} = \phi\}$

$$c := \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in B^{k+1}} J(h(u)) \geq c_1 \quad \text{es}$$

valor critico.

La demostracion es identica a la de 2.2. ∎

7.6.- UNA APLICACION:

Indicaremos una aplicacion del teorema 7.5 a las ecuaciones diferenciales, los detalles son semejantes a los de 6.1 y no los demostraremos todos:

$$\text{Sea: } \quad L(u) := -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{x_j} + c(x)u, \quad c \geq 0$$

y $\exists\, \rho > 0$: $\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \alpha_i\, \alpha_j\right| \geq \rho \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \quad \forall (\alpha_1, \ldots \alpha_n) \in \Omega$

(ie. L es uniformemente eliptico en Ω, ver [27] capitulo 22)

Consideremos la ecuacion:

$$(2) \cdots \quad L(u) = a(x)u + p(x,u) \qquad x \in \Omega$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

con $a(x) > 0$ y p satisface las mismas condiciones que en 6.1.

Sea $H := W_0^{1,2}(\Omega)$

Si el problema de valores propios

$$L(v) = \lambda a v \qquad x \in \Omega$$
$$v\big|_{\partial\Omega} = 0$$

tiene una sucesion no acotada de valores propios $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq 1 < \lambda_{k+1} \leq \cdots$, ϕ_m es la funcion propia correspondiente a λ_m, cada λ tiene multiplicidad finita y λ_1 es simple:

Sea H_m - espacio generado por $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m\}$ y $\hat{H} := H_k^{\perp}$

$$\|u\| := \left[\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u^2 \right) dx \right]^{1/2}$$

define una norma equivalente a $\| \, \|_H$ (Ver [27] cap 22)

Los puntos criticos de:

$$J(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega a u^2 dx - \int_\Omega T(x, u(x))\, dx$$

Son soluciones debiles de (2) y como antes, P_1, P_2 implican que estas son soluciones clasicas (Ver [3] prop 1.5.7)

Como en 6.1, podemos demostrar que $\forall m: \exists R_m \in \mathbb{R} \ni \forall r \geq R_m$:

$$J|_{S_r \cap H_m} < 0 \qquad \text{.....} \quad (a)$$

$$(S_r := \{u \in H \mid \|u\| = r\})$$

Para demostrar que J satisface la condicion (C), se demuesta que el operador A definido por:

$$\langle Au, \phi \rangle_H := \int_\Omega a(x)u\phi + p(x,u)\phi$$

es compacto y como:

$$J'(u_m)\phi = \langle u_m, \phi \rangle_H - \int_\Omega a(x)u_m\phi - \int_\Omega p(x,u_m)\phi$$

Se procede como en 6.1

Entonces:

7.7.- TEOREMA: Sea $b := \inf_{h \in \Gamma} \sup_{x \in B_R \cap H_k} J(h(x))$

con $B_R = \{u \in H \mid \|u\| \leq R\}$ $R := R_k + R_{k+1}$ y:

$$\Gamma := \{h \in C(B_R \cap H_k, H) \mid h|_{J \leq 0} = Id, \quad h(B_R \cap H_k) \cap \hat{H} = \{\bar{0}\}\}$$

si $b \leq 0$, J tiene un valor critico positivo

<u>Dem</u>: Recordando la definicion de $\hat{H}$, λ_k y $\|u\|$ tenemos $\forall u \in \hat{H}$: $\|u\|^2 \geq \lambda_{k+1} \int_\Omega a u^2$

$$\therefore \; J(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|^2 - \int_\Omega T(x,u)$$

como $1-\frac{1}{\lambda_{k+1}} > 0$, $\exists\ \rho > 0$, $c_1 > 0$ $\ni$

$J|_{S_\rho \cap \hat{H}} \geq c_1$ (Recordemos, por

6.1, que $\int_\Omega T(x,u) = o(\|u\|^2)$)

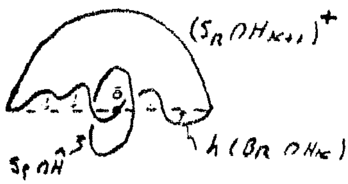
Ahora, por hipotesis, $b \leq 0 \therefore \exists\ h \in \Gamma$

$\ni \max\limits_{B_R \cap H_k} J(h(x)) \leq \frac{c_1}{2} =: c_0$ ------ (b)

Definamos $\phi : S^k \longrightarrow H$ $\ni$

$$Im\ \phi = h(B_R \cap H_k) \cup (S_R \cap H_{k+1})^+$$

Donde $(S_R \cap H_{k+1})^+$ es el hemisferio de radio R en H_{k+1} con proyeccion positiva en ϕ_{k+1}



Recordemos que $h(B_r \cap H_k) \cap \hat{H} = \{o\}$ y que $H_k \perp \hat{H}$, entonces podemos proyectar $h(B_r \cap H_k)$ sobre H_k sin que se alteren su frontera, $\bar{o}$, ni el nº de interseccion de $\phi(S^k)$ y $S_\rho \cap \hat{H}$ que será entonces igual a 1.

Entonces como $J|_{S_r \cap H_{k+1}} < 0$ (por (a))

y $J|_{h(B_r \cap H_k)} \leq c_0$ (por (b)) $\therefore$

$$J|_{\phi(S^k)} \leq c_0 < c_1 \leq J|_{S_\rho \cap \hat{H}}$$

y por 7.5. J tiene un valor critico

∎

8.- UN INDICE PARA S^1 (Ver A.3 y [1])

Definiremos un indice analogo al genero, adecuado a las acciones del grupo S^1 de rotaciones en un espacio de Hilbert H.

8.1.- DEFINICION:

Sea H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, separable, $S^1 := \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$, $T : S^1 \longrightarrow Iso(H)$ una representacion unitaria de S^1 en H

$R : S^1 \longrightarrow Iso(\mathbb{C}^k)$ representacion de S^1 en $\mathbb{C}^k$

R se llama REGULAR si

$(\forall \theta \in S^1 : R_\theta u = u) \Longrightarrow u = 0$

si $\alpha := (\alpha_1, \ldots \alpha_k) \in \mathbb{Z}^k$, $\xi := (\xi_1, \ldots \xi_k) \in \mathbb{C}^k$,

por A.3.5 R debe ser de la forma:

$$R_\theta(\xi) = (e^{i\alpha_1\theta}\xi_1, \ldots, e^{i\alpha_k\theta}\xi_k)$$

para algun $\alpha \in \mathbb{Z}^k$ y R regular $\Leftrightarrow \alpha = 0$

8.2.- DEFINICION:

$A \subset H$ es T- INVARIANTE si $\forall \theta \in S^1 : T_\theta(A) = A$

$F : H \longrightarrow \mathbb{R}$ es T-INVARIANTE si $\forall \theta \in S^1, u \in H : F(T_\theta(u)) = F(u)$

$G : H \rightarrow H$ T- EQUIVARIANTE si $\forall \theta, u : G(T_\theta(u)) = T_\theta(G(u))$

$\phi : H \rightarrow \mathbb{C}^k$ (T,R)-EQUIVARIANTE si $\forall \theta : \phi \circ T_\theta = R_\theta \circ \phi$

$H^0 := \{u \in H / \forall \theta : T_\theta u = u\}$ (supondremos $\dim H^0 < \infty$)

Si $R: S' \to Iso(\mathbb{C}^k)$ es regular:

$\vec{R}: S' \to Iso(H^0 \times \mathbb{C}^k)$ + $\vec{R}_\theta(x_0, \xi) := (x_0, R_\theta \xi)$

si $A \subset H$: $M_k(A,R) := \{ \phi \in C(A, \mathbb{C}^k - \{0\}) \mid \phi - (T,R) \text{ equiv} \}$

$M_k^0(A,R) := \{ h \in C(A, (H^0 \times \mathbb{C}^k - \{0,0\})) \mid h - (T,\vec{R}) \text{eq. y } h|_{A\cap H^0}(u) = (u,0) \}$

$\xi := \{ A \subset H - \{0\} \mid A \text{ - cerrado } T\text{- invariante} \}$

El indice más natural en este caso es el siguiente:

8.3.- DEFINICION:

Sea $A \in \xi$,

$$\gamma(A) := \begin{cases} \inf\{k \in \mathbb{N} \mid \exists R\text{-regular} + M_k(A,R) \neq \emptyset\} \\ \infty \text{ si } A \neq \emptyset \text{ y no existe tal } k. \\ 0 \text{ si } A = \emptyset \end{cases}$$

Si $A \cap H^0 \neq \emptyset$, sea $\{0\} \neq x_0 \in A \cap H^0$, si $M_k(A,R) \neq \emptyset$, $\exists$ $h: A \to \mathbb{C}^k - \{0\}$ (T,R) equivalente y $\forall \theta$: $h \circ T_\theta = R_\theta \circ h$ pero $x_0 \in H^0 \therefore T_\theta x_0 = x_0$ y $\forall \theta$: $h(x_0) = R_\theta(h(x_0))$ i.e. $h(x_0)$ es punto fijo de R- regular $\lightning$

Así, $A \cap H^0 \neq \emptyset$, $\gamma(A) = \infty$

Entonces γ no distingue entre los conjuntos de ξ que intersectan a H^0

Para obtener un indice mas fino usaremos los conjuntos $M_k^0(A,R)$

8.4.- DEFINICION: Si $A \in \xi$:

$$\gamma_0(A) := \begin{cases} \inf\{k \in \mathbb{N} \mid \exists R\text{-regular} \ni M_k^0(A,R) \neq \emptyset\} \\ \infty \text{ si } A \neq \emptyset \text{ y no existe tal } k \\ 0 \text{ si } A = \emptyset \end{cases}$$

$\gamma_0(A) \leq \gamma(A)$ ya que si $\gamma(A) = k < \infty$, entonces $A \cap H^0 = \emptyset$ y $\exists\ \varphi: A \to \mathbb{C}^k - \{0\}$ equiv. y $h: A \to H^0 \times \mathbb{C}^k - \{0,0\}$ es $(T, \tilde{R})$ equivariante.
$u \mapsto (0, \varphi(u))$

EJEMPLO: Sea $H := \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $T_\theta(z_1, z_2) = (z_1, e^{i\theta} z_2)$
$A := \{(z_1, z_2) \in H \mid |z_1| + |z_2| = 1\}$ entonces $A \in \xi$
$H^0 = \mathbb{C} \times \{0\}$ $\quad A \cap H^0 \neq \emptyset \quad \therefore\ \gamma(A) = \infty$

Pero $i: A \hookrightarrow H \cong H^0 \times \mathbb{C}^1$ (inclusion) es T equivariante y $(z_1, z_2) \in A \cap H^0 \Rightarrow i(z_1, z_2) = (z_1, 0)$
$\therefore\ \gamma_0(A) \leq 1$ y usando el teorema de Borsuk (A.5) : $\gamma_0(A) = 1$ ∎

Veamos algunas propiedades de γ_0 y γ.

8.5.- TEOREMA: (Monotonicidad)
Sean $A, B \in \xi$, $g \in C(A,B)$ T-equivariante $\phi: H^0 \to H^0 \ni u \neq 0 \Rightarrow \phi \neq 0$ y $u \in H^0 \cap A \Rightarrow \phi \circ g(u) = u$ entonces $\gamma_0(A) \leq \gamma_0(B)$ (en particular, si $\phi = Id$ a $g = i: A \hookrightarrow B$ inclusion)

<u>Dem</u>: Podemos suponer $\gamma_0(B)=k<\infty$

$\therefore \exists f\in M_k^0(B,R)$ para algun R, sea:

$$\tilde{\phi}: H^0\times \mathbb{C}^k \longrightarrow H^0\times\mathbb{C}^k$$
$$(x_0,\xi)\longmapsto(\phi(x_0),\xi)$$
$$h:=\tilde{\phi}\circ f\circ g: A\longrightarrow H^0\times\mathbb{C}^k$$

$\forall u\in A$: $f\circ g(u)\in H^0\times\mathbb{C}^k-\{0,0\}$

$\therefore$ $f\circ g(u)=(x_0(u),\xi(u))$

$\xi(u)=0 \Rightarrow x_0(u)\neq 0$ $\therefore$ $x_0(u)\in H^0-\{0\}$

$\ni \phi(x_0(u))\neq 0$ --- (def de ϕ)

$\therefore$ $h(u)\neq(0,0)$ $\ni h\in C(A,H^0\times\mathbb{C}^k-\{0,0\})$

Observemos que, $\forall(x_0,\xi)\in H^0\times\mathbb{C}^k$: $\theta\in S'$:

$$\tilde{\phi}\circ\hat{R}_\theta(x_0,\xi)=\tilde{\phi}(x_0,R_\theta\xi)=(\phi(x_0),R_\theta(\xi))=\hat{R}_\theta(\phi(x_0),\xi)$$
$$=\hat{R}_\theta\circ\tilde{\phi}(x_0,\xi)$$

i.e: $\tilde{\phi}$ - $\hat{R}$ equivariante $\therefore$ $\forall\theta\in S'$

$$h\circ T_\theta \underset{\text{def de } h}{=} \tilde{\phi}\circ f\circ g\circ T_\theta \underset{g\text{-}T\text{ equiv.}}{=} \tilde{\phi}\circ f\circ T_\theta\circ g \underset{f\text{-}(T\hat{R})\text{ eq.}}{=} \tilde{\phi}\circ\hat{R}_\theta\circ f\circ g =$$

$$\underset{\tilde{\phi}\text{-}\hat{R}\text{ eq}}{=} \hat{R}_\theta\circ\tilde{\phi}\circ f\circ g \underset{\text{def de } h}{=} \hat{R}_\theta\circ h \quad \therefore\ h\text{-}(T,\hat{R})\text{ eq.}$$

Por ultimo, $u\in A\cap H^0\subset H^0$, g-T eq $\Rightarrow$

$\forall\theta$: $T_\theta\circ g(u)=g\circ T_\theta(u)=g(u)$ i.e: $g(u)\in H^0$

$\ni$ $f\circ g(u)=(g(u),0)$ $(f\in M_k^0(B,R))$

$$\therefore h(u)=\tilde{\phi}\circ f\circ g(u)=\tilde{\phi}(g(u),0)=(\phi\circ g(u),0)\underset{\text{def de } \phi}{=}(u,0)$$

Por todo lo anterior: $h \in M_k^0(A,R)$

$\therefore M_k^0(A,R) \neq \emptyset \;\; y \;\; \gamma_0(A) \leq k := \gamma_0(B)$ ∎

8.6.- TEOREMA (subaditividad)

$A, B \in \mathcal{E}$, $B \cap H^0 = \emptyset \Rightarrow \gamma_0(A \cup B) \leq \gamma_0(A) + \gamma(B)$

Dem: podemos suponer $\gamma_0(A), \gamma_0(B) < \infty$

$\therefore \exists \; f \in M_k^0(A,R), \quad g \in M_m(B,S)$

ie $\quad f : A \to H^0 \times \mathbb{C}^k - \{0,0\}$

$\quad g : B \to \mathbb{C}^m - \{0\}$

Sea $g' : B \cup H^0 \to \mathbb{C}^m$ + $g'(u) = \begin{cases} g(u) & u \in B \\ 0 & u \in H^0 \end{cases}$

$(B \cap H^0 = \emptyset)$

Por Tietze podemos extender f y g' a todo H: $\quad \bar{f} : H \to H^0 \times \mathbb{C}^k$

$\bar{g} : H \to \mathbb{C}^m$

sean: $\tilde{f}(u) := \int_{S^1} \hat{R}_{-\theta} \bar{f}(T_\theta(u))\, d\theta$

$\tilde{g}(u) := \int_{S^1} S_{-\theta} \bar{g}(T_\theta(u))\, d\theta$

$\therefore \forall \varphi \in S^1.\; \tilde{f}(T_\varphi(u)) = \int_{S^1} \hat{R}_\varphi \hat{R}_{-\varphi-\theta} \bar{f}(T_{\theta+\varphi}(u))\, d\theta = \hat{R}_\varphi \tilde{f}(u)$

$\tilde{g}(T_\varphi(u)) = \int_{S^1} S_\varphi \circ S_{-\varphi-\theta} \bar{g}(T_{\theta+\varphi}(u))\, d\theta = S_\varphi \tilde{g}(u)$

(ver A.3.5)

$\therefore$ $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ son extensiones de f y g $(T,\tilde{R})$ y (T,S) equivariantes.

y como $\tilde{g}$ extiende g': $u \in H^0 \Rightarrow \tilde{g}(u) = 0$

Sea: $h: A \cup B \longrightarrow H^0 \times \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^m \cong H^0 \times \mathbb{C}^{k+m}$

$$u \longmapsto (\tilde{f}(u), \tilde{g}(u))$$

$U: S^1 \longrightarrow Iso(\mathbb{C}^{k+m})$, $\forall \theta \in S^1, (x_1,x_2) \in \mathbb{C}^{k+m}$:

$$U_\theta(x_1,x_2) := (R_\theta x_1, S_\theta x_2)$$

$u \in A \cup B \Rightarrow \tilde{f}(u) \neq 0 \quad \text{ó} \quad \tilde{g}(u) \neq 0$

$\therefore \quad Im(h) \subset H^0 \times \mathbb{C}^{k+m} - \{0,0\}$

$\forall \theta \in S^1$: $h(T_\theta(u)) = (\tilde{f}(T_\theta(u)), \tilde{g}(T_\theta(u))) =$

$= (\hat{R}_\theta \circ \tilde{f}(u), S_\theta \circ \tilde{g}(u)) = U_\theta \circ h(u) \quad \therefore \ h - (T,U)$ eq.

$u \in (A \cup B) \cap H^0$, $B \cap H^0 = \emptyset \Rightarrow u \in A \cap H^0$

$\tilde{f}(u) = f(u) = (u,0)$ y $h(u) = (\tilde{f}(u), \tilde{g}(u)) = (u,0)$

$$\therefore \quad h \in M^0_{k+m}(A \cup B, U)$$

$$\therefore \quad \gamma_0(A \cup B) \le k+m = \gamma_0(A) + \gamma(B)$$

■

8.7.- COROLARIO:

$A, B \in \mathcal{E}$, $B \cap H^0 = \emptyset$, $\gamma(B) < \infty \Rightarrow$

$$\gamma_0(\overline{A-B}) \geq \gamma_0(A) - \gamma(B)$$

<u>Dem</u>: $A \subset \overline{A-B} \cup B$

$$\therefore \gamma_0(A) \le \gamma_0(\overline{A-B} \cup B) \le \gamma_0(\overline{A-B}) + \gamma(B)$$

■

8.8.- TEOREMA:

$K \in \xi$ compacto $\Rightarrow \exists\ \delta > 0 \ni \gamma(K) = \gamma(N_\delta(K))$

Dem: Como $K \subset H - \{0\}$ $\exists\ \delta > 0 \ni N_\delta(K) \subset H-\{0\}$

como T_θ preserva distancias, $\forall\ \theta$: $N_\delta(K)$- T inv.

$\therefore\ N_\delta(K) \in \xi$

Como $K \subset N_\delta(K)$, $\gamma(K) \leq \gamma(N_\delta(K))$

Como en 5.4: $k := \gamma(K) < \infty$

$\therefore\ \exists\ g : K \to \mathbb{C}^k - \{0\}$ (T-S) eq.

sea $\tilde{g} : H \to \mathbb{C}^k$ como en 5.6

$0 \notin g(K) = \tilde{g}(K)$ $\therefore$ $K \cap \tilde{g}^{-1}(0) = \emptyset$

y existe $\delta > 0 \ni N_\delta(K) \cap \tilde{g}^{-1}(0) = \emptyset$

(K- compacto, $\tilde{g}^{-1}(0)$ - cerrado)

$\therefore$ $0 \notin \tilde{g}(N_\delta(K))$ y $M_k(N_\delta(K), S) \neq \emptyset$

$\therefore$ $\gamma(N_\delta(K)) \leq k = \gamma(K)$

∎

8.9.- TEOREMA:

$A \in \xi$, $(H^0)^\perp = F_1 \oplus F_2$, F_i - T- invariante

$A \cap F_2 = \emptyset \Rightarrow \gamma_0(A) \leq \dim_{\mathbb{C}} F_1$

Dem: Podemos suponer $\dim_{\mathbb{C}} F_1 =: k < \infty$

$\therefore$ $F_1 \cong \mathbb{C}^k$, sean $P_0 : H \to H^0$, $P_1 : H \to F_1$ proyecciones ortogonales $h : A \to H^0 \times F_1 \cong H^0 \times \mathbb{C}^k$

$u \mapsto (P_0(u), P_1(u))$

como $H = H^0 \oplus F_1 \oplus F_2$, sea $u \in A$. $\therefore$ $u \notin F_2$

y $P_0(u) \neq 0$ ó $P_1(u) \neq 0$ $(0 \notin A)$

$\therefore \ Im(h) \subset H^0 \times \mathbb{C}^k - \{0,0\}$

$u \in A \cap H^0 \Rightarrow P_0(u) = u, \ P_1(u) = 0 \ y \ h(u) = (u, 0)$

La accion $R := T/_{F_1}$ es regular porque $F_1 \cap H^0 = \{0\}$

y $\forall \theta \in S^1$; $u = (u_0, u_1, u_2) \in H$, $u_0 \in H^0$, $u_i \in F_i$.

$h(T_\theta(u)) = h(u_0, T_\theta u_1, T_\theta u_2) = (u_0, T_\theta u_1) =$

$= (u_0, R u_1) = \hat{R}(u_0, u_1) = \hat{R} \circ h(u)$

$\therefore \ h \in M_k^0(A, R) \ y \ \gamma_0(A) \leq k = \dim_{\mathbb{C}} F_1$ ∎

8.10.- COROLARIO:

$A \in \mathcal{S}$, $\gamma_0(A) \geq k$, $H = H^0 \oplus F_1 \oplus F_2$

$\dim_{\mathbb{C}} F_1 < k \Rightarrow A \cap F_2 \neq \emptyset$

<u>Dem</u> Si $A \cap F_2 = \emptyset$, por 8.9: $\gamma_0(A) \leq \dim_{\mathbb{C}} F_1 < k$ ↯ ∎

8.11. TEOREMA:

Sea $G \subset H$ T-invariante, $G \perp H^0$, $\rho > 0$

$S := \{x \in H^0 \oplus G \mid \|x\| = \rho\} \Rightarrow \gamma_0(S) = \dim_{\mathbb{C}} G$

<u>Dem</u>: $H = H^0 \oplus G \oplus G'$, G, G'- T invariantes (T- unitaria) y $S \cap G' = \emptyset \therefore \gamma_0(S) \leq \dim_{\mathbb{C}} G$ (8.9)

Por otro lado, si $j := \gamma_0(S) < \dim_{\mathbb{C}} G =: k < \infty$ y $l := \dim_{\mathbb{C}} H^0 < \infty$

Sea $\Omega := \{x \in H^0 \oplus G \cong \mathbb{C}^{l+k} \mid \|x\| \leq \rho\}$

entonces $\partial\Omega \cong S$ y existe

$$h: S \to N^0 \times \mathbb{C}^j - \{0,0\} \cong \mathbb{C}^{l+j} - \{0\} \quad (T,R) \text{ eq.}$$

pero por (A.4.10) $h^{-1}(0) \neq \emptyset$ ↯

$\therefore \ \gamma_0(S) = \dim_{\mathbb{C}} G \quad$ si $\dim_{\mathbb{C}} G < \infty$

Si $\dim_{\mathbb{C}} G = \infty$, sea $G = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} G_i$ su descomposicion en subespacios T-irreducibles (Ver A.3.7)
sea $G^n := \bigoplus_{i=1}^{n} G_i$, $\quad S^n := S \cap G^n$

$\therefore \ \forall n: \ \dim_{\mathbb{C}} G^n = n < \infty$, S^n, G^n T-invariantes

$\Rightarrow \quad \gamma_0(S^n) = n \leq \gamma_0(S) \quad \therefore \ \gamma_0(S) = \infty$

∎

Ahora, usaremos γ_0 para demostrar la existencia de puntos críticos de funcionales $F: H \to \mathbb{R}$ T- invariantes.

8.12.- LEMA (Teorema de deformación) (equivariante)

Sea $F \in C^1(H, \mathbb{R})$ T- invariante $F(0)=0$ que satisface la condición (C).

$c \in (-\infty, 0) \subset \mathbb{R} \Rightarrow \forall \bar{\delta} > 0, \forall U \subset H$ + $K_c \subset U$- abierto, $\exists \delta \in (0, \bar{\delta})$ y $\bar{\eta} \in C(I \times H, H)$ $\ni$.

1) $\bar{\eta}_0 = Id$

2) $F(x) \notin [c-\bar{\delta}, c+\bar{\delta}] \Rightarrow \forall t \in I: \bar{\eta}_t(x) = x$

3) $x \in F^{c+\delta} - U \Rightarrow \bar{\eta}_1(x) \in F^{c-\delta}$

4) $K_c = \emptyset \Rightarrow \forall x \in F^{c+\delta}: \bar{\eta}_1(x) \in F^{c-\delta}$

5) $\forall t: \bar{\eta}_t$ es T equivariante

Dem: La demostración es la misma que en 4.10, alterando el campo V como sigue: (Ver [9] lema 8.21 o [8] lema 3)

F- T invariante $\Rightarrow K_c, U_\varepsilon, F^r$ ($\forall r \in \mathbb{R}$) son T- invariantes, sean φ_1, φ_2, v- pseudogradiente de 4.10, definamos:

$$\bar{\varphi}_i(x) := \int_{S_1} \varphi_i(T_\theta(x))\, d\theta \qquad i = 1, 2$$

$$\bar{v}(x) := \int_{S_1} T_{-\theta}\, v(T_\theta(x))\, d\theta$$

Entonces $\tilde{\varphi}_i$ es C^∞ T-invariante y toma los valores 0 y 1 por lo menos en los mismos lugares que φ_1 y $\tilde{v}$ es T-equivariante

Demostremos que $\tilde{v}$ es un campo pseudo gradiente:

$$\forall \theta: \nabla F(T_\theta(x)) = T_\theta \nabla F(x) \qquad (F\text{- T-invariante})$$

$$T\text{- unitario} \Rightarrow \|\nabla F(T_\theta(x))\| = \|\nabla F(x)\|$$

$$\therefore\ a \langle \nabla F(x), \tilde{v}(x) \rangle = a \int_{S^1} \langle \nabla F(x), T_{-\theta} v(T_\theta(x)) \rangle d\theta =$$

$$= a \int_{S^1} \langle T_\theta \nabla F(T_\theta(x)), T_{-\theta} v(T_\theta(x)) \rangle d\theta =$$

$$= \int_{S^1} a \langle \nabla F(T_\theta(x)), v(T_\theta(x)) \rangle d\theta \geq \int_{S^1} \| T_\theta \nabla F(x) \|^2 d\theta =$$

$$= \int_{S^1} \|\nabla F(x)\|^2 d\theta = \|\nabla F(x)\|^2 = \langle \nabla F(x), \nabla F(x) \rangle$$

i.e. $\langle \nabla F(x), \nabla F(x) \rangle \leq a \langle \tilde{v}(x), \nabla F(x) \rangle \quad \cdots (i)$

por otro lado:

$$\|\tilde{v}(x)\| \leq \int_{S^1} \| T_{-\theta} v(T_\theta(x))\| d\theta = \int_{S^1} \| v(T_\theta(x))\| d\theta \leq$$

$$\leq a^{1/2} \int_{S^1} \|\nabla F(T_\theta(x))\| d\theta = a^{1/2} \|\nabla F(x)\|$$

i.e. $\langle \tilde{v}(x), \tilde{v}(x) \rangle \leq a \langle \nabla F(x), \nabla F(x) \rangle \cdots (ii)$

de (i) e (ii) $\tilde{v}$ es pseudo gradiente

Por todo lo anterior:

$\nabla : H \to H$

$x \mapsto \varphi(x)\, \alpha(\|\tilde{v}(x)\|)\, \tilde{v}(x)$ es C^∞

T- equivariante y acotado, luego existe $\bar{\eta}$:

$$\frac{d\,\bar{\eta}(t,x)}{dt} = V(\bar{\eta}(t,x)) \qquad \bar{\eta}(0,x) = x$$

$\bar{\eta}$- es T- equivariante en x porque:

sea $w(t,x) := T_\theta\, \bar{\eta}(t,x)$ entonces:

$$\frac{d\, w(t,x)}{ds} = T_\theta \frac{d\,\bar{\eta}(t,x)}{dt} = T_\theta V(\bar{\eta}(t,x)) = V(T_\theta\, \bar{\eta}(t,x))$$

$$= V(w(t,x)) \qquad y \quad w(0) = T_\theta(x)$$

y por la unicidad del flujo:

$$\bar{\eta}(t, T_\theta(x)) = w(t,x) = T_\theta\, \bar{\eta}(t,x)$$

y $\bar{\eta}$ satisface las condiciones (1) - (5) del teorema ■

De aqui en adelante, sea F como en 8.12.

8.13.- DEFINICION: $\forall\, k \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_k := \{A \in \Sigma \mid \gamma_0(A) \geq k\}$$

$$c_k := \inf_{A \in \Gamma_k} \max_{x \in A} F(x)$$

8.14.- TEOREMA: $k, m \in \mathbb{N}^+$, $\Gamma_{k+m-1} \neq \emptyset$

$-\infty < c = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+m-1} < 0$ con $K_c \cap H^0 = \emptyset$

$\Rightarrow \gamma(K_c) \geq m$

(en particular $K_c \neq \emptyset$ y c es valor crítico)

Dem: K_c compacto $\Rightarrow \gamma(K_c) < \infty$

Sea $\varepsilon > 0$ + $\gamma(N_\varepsilon(K_c)) = \gamma(K_c)$

$\gamma(K_c) \leq m-1 \Rightarrow N_\varepsilon(K_c) \cap H^0 \neq \emptyset$ y sean $\delta, \bar{\delta}$ del teorema 8.12 + $\bar{\eta}_1(F^{c+\delta} - N_\varepsilon(K_c)) \subset F^{c-\delta}$ ... (*)

y $c + \bar{\delta} < 0$

Por definición de $c_{k+m-1} = c$, $\exists A \in \Gamma_{k+m-1}$ + $\max_{x \in A} F(x) \leq c + \delta$ i.e. $A \subset F^{c+\delta}$

Sea $B := \bar{\eta}_1(\overline{A - N_\varepsilon(K_c)})$, como

$0 = F(\bar{0}) \notin [c-\bar{\delta}, c+\bar{\delta}]$ $\quad \bar{\eta}_1(0) = 0$ (5.12.2)

$\overline{A - N_\varepsilon(K_c)} \subset A \therefore B := \bar{\eta}_1(\overline{A - N_\varepsilon(K_c)}) \subset \bar{\eta}_1(A) \subset F^{c+\delta}$

$c + \delta < 0 \therefore \forall b \in B: F(b) \neq 0 \therefore 0 \notin B$

además B es T invariante y cerrado

$\therefore B \in \xi$ y por ser $\bar{\eta}_1$ - homeomorfismo equiv.

por 8.7: $\gamma_0(B) = \gamma_0(\overline{A - N_\delta(K_c)}) \geq \gamma_0(A) - \gamma(N_\delta(K_c))$

$\gamma(N_\delta(K_c)) = \gamma(K_c) \leq m-1 \qquad A \in \Gamma_{k+m-1}$

$\therefore \gamma_0(B) \geq k+m-1-(m-1) = k$

pero por (*) : $B \subset F^{c-\delta}$

$\therefore \quad c_k \leq c - \delta < c = c_k \quad \lightning$

Entonces $\gamma(K_c) \geq m$ ∎

Como siempre: $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \cdots$

Por la invariancia de F, a cada valor crítico le corresponde toda una T-órbita de puntos críticos.

Si $\theta(x) := \{T_\theta(x) \mid \theta \in S^1\}$ es una T-órbita $(x \notin H^0)$ $\quad h: \theta \to \mathbb{C} - \{0\} \in M_K(\theta, \mathbb{R})$ con
$T_\theta(x) \mapsto e^{i\theta} \qquad R_\varphi(z) := e^{i\varphi} z$

así $\gamma(\theta) = 1$

Si K_c consta de $l < \infty$ órbitas, $K_c = \bigcup_{i=1}^{l} \theta_i$ las órbitas son ajenas y podemos construir

$$H: K_c \to \mathbb{C} - \{0\}$$

que se comporte como h en cada órbita.

$\therefore \quad \gamma(K_c) = 1$

i.e. $\gamma(K_c) > 1 \Rightarrow K_c$ - es un conjunto INFINITO de órbitas

Por supuesto, es necesario garantizar que existen c_k finitas, las siguientes proposiciones ofrecen condiciones suficientes para esto:

8.15.- TEOREMA:

F como en 8.12, $H = H^0 \oplus F_1 \oplus F_2$ F_i-T-inv.
F acotado inferiormente en F_2 y
$\dim_{\mathbb{C}} F_1 = p < \infty \Rightarrow \forall k > p: \; c_k > -\infty$

Dem: $\forall A \in \Gamma_k: \; \gamma_0(A) \geq k > p = \dim_{\mathbb{C}} F_1$

por 8.10: $A \cap F_2 \neq \emptyset \;\therefore\; c_k \geq \inf_{x \in F_2} F(x) > -\infty$ ■

8.16.- TEOREMA: $H = H^0 \oplus G \oplus G'$, $\dim_{\mathbb{C}} G = m$
$S = \{x \in H^0 \oplus G \mid \|x\| = \rho > 0\}$, $F/_S$ - estrictamente negativo $\Rightarrow \forall k \leq m: \; c_k < 0$

Dem:
8.11 $\Rightarrow \gamma_0(S) = m \;\therefore\; S \in \Gamma_k \; \forall k \leq m$
$\therefore \forall k \leq m \quad c_k \leq \max_{x \in S} F(x) < 0$ ■

8.17.- TEOREMA:
$H = H^0 \oplus V \oplus V'$, $H^0 \subset W$ V, V', W- T-invariantes
F acotado inferiormente en V, $m := \dim_{\mathbb{C}} W < \infty$
$p := \operatorname{codim} V < \infty$ $m \geq p$, $\exists \rho > 0$, $u \in W$, $\|u\| = \rho$
$\Rightarrow F(u) < 0$ y $\forall c < 0: \; H^0 \cap K_c = \emptyset$
entonces F tiene al menos $m - p$ orbitas criticas

Dem: 8.15, con $F_2 := V$, $F_1 := V'$, $\dim_{\mathbb{C}} F_1 \leq \operatorname{cod} V = p$
$\Rightarrow \forall k > p: \; c_k > -\infty$

8.16 con $H^0 \oplus G =: W$, $\dim_{\mathbb{C}} G \leq m$

$S := \{ u \in W / \|u\| = \rho \} \Rightarrow \forall\, k \leq m: \; c_k < 0$

$\therefore \forall\, k \ni p+1 \leq k \leq m: \; -\infty < c_k < 0$ y
c_k - valor critico (8.14)

Si $c_{p+1} < c_{p+2} < \cdots < c_m$, por cada c_k tenemos una orbita critica y el teorema está demostrado

Si algunas c_k's coinciden, por 8.14 tenemos un conjunto infinito de orbitas criticas

∎

9.- MAS APLICACIONES: ([29] § 4)

Sea $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
buscaremos soluciones periodicas del sistema de ecuaciones:

$$(3) \cdots \quad \ddot{x}(t) + \nabla V(x(t)) = 0$$

Mediante el cambio de variable $t \to \omega' t$, las soluciones $2\pi\omega$ periodicas de (3), corresponden a las 2π-periodicas de:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 \nabla V(x(t)) = 0$$

Supondremos que:

V_1) $V \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

V_2) $V(0) = 0 \qquad \nabla V(0) = 0$

V_3) ∇V es acotado

V_4) el operador $x \mapsto \nabla V(x)$ es compacto

Sea A el Hessiano de V en 0, i.e.:
A es la matriz: $\left(\frac{\partial V}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)_{ij}$

Definamos el operador:

$$Lx := -\ddot{x} - \omega^2 A x$$

Si $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es 2π-periodica,
$t \mapsto (u_1(t), \dots u_n(t))$
podemos construir la serie de Fourier

para cada u_i:

$$u_i(t) = \frac{a_0^i}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^i \cos kt + b_k^i \operatorname{sen} kt)$$

Definimos: $|u_i| := \left[\frac{a_0^{i\,2}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{i\,2} + b_k^{i\,2})\right]^{1/2}$

entonces: $|\dot{u}_i| = \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^{i\,2} + b_k^{i\,2})\right]^{1/2}$

Sea: $|u| := \left[\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2\right]^{1/2}$

y $|\dot{u}| := \left[\sum_{i=1}^{n} |\dot{u}_i|^2\right]^{1/2}$

$$\|u\|_H := \left[|u|^2 + |\dot{u}|^2\right]^{1/2}$$

$$\langle u, v\rangle_H := \sum_{i=1}^{n} \left[\langle u_i, v_i\rangle_{L_2(0,2\pi)} + \langle \dot{u}_i, \dot{v}_i\rangle_{L_2(0,2\pi)}\right]$$

Si $H := \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \mid u$ - 2π-periodica y $\|u\|_H < \infty\}$
H es un espacio de Hilbert y $\forall m \in \mathbb{N}$:

$H_m := \{u \in H \mid u$ - $2\pi/m$ - periodica, con $a_0^i = 0\ \forall i\}$
es un subespacio de H

Si $u \in H_m$, $\forall i$: u_i tiene en su desarrollo de Fourier solo coeficientes en los que $m \mid k$. y $k \neq 0$

Sean $H^- := \{$subespacio de H generado por las funciones propias correspondientes a los valores propios negativos de $L\}$

$$H_m^- := H^- \cap H_m$$

$$p_m := \dim H_m^-$$

Los puntos criticos de

$x \in H \qquad F(x) := \int_0^{2\pi} \{ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 - \omega^2 V(x(t)) \} \, dt$

son soluciones debiles de la ecuacion, y es facil demostrar que estas son soluciones clasicas (Ver [10] teorema 17.5). F es invariante bajo la S^1 accion: $T_\theta(x(t)) = x(t+\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$

Por V_1 y V_2: desarrollando V en serie de Taylor alrededor de $(\bar{0})$:

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(0)\, x_i x_j + o(|x|^2) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle_{\mathbb{R}} + o(|x|^2)$$

$$\therefore\ F(x) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \langle x, Ax \rangle_{\mathbb{R}} + o(|x|^2) \right] dt$$

$$\leq \frac{1}{2} \langle Lx, x \rangle_{L_2} + o(\|x\|^2)$$

(como x es 2π-periodica:

$$\int_0^{2\pi} |\dot{x}|^2 = \cancel{\langle x, \dot{x} \rangle_{\mathbb{R}} \Big|_0^{2\pi}}^{\,0} - \int_0^{2\pi} \langle \ddot{x}, x \rangle_{\mathbb{R}} \quad)$$

Como $\langle Lx, x \rangle_{L_2}$ es negativa definida en H^- (def de H^-) existen $\beta < 0$, $\rho > 0$ ⟂

$$\forall x \in H^- \cap S_\rho : \ F(x) \leq \beta$$

Por otro lado, por V_3: $\exists M > 0$ ⟂ $\forall n$:

$$V(x) \leq M + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\omega} \right)^2 |x|^2$$

Es facil demostrar que $\forall x \in H_n$:

$$\int_0^{2\pi} |\dot{x}(t)|^2 dt \geq n^2 \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt$$

Entonces $\forall n,\ x \in H_n$:

$$F(x) \geq \frac{1}{2} n^2 \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt - \omega^2 \int_0^{2\pi} V(x)\, dt$$

$$\geq \frac{1}{2} n^2 \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt - \omega^2 \int_0^{2\pi} \left[M + \frac{n^2}{2\omega^2} |x|^2 \right] dt$$

$$\geq -2\pi\omega^2 M \qquad \text{i.e. } F/_{H_n} \geq -2\pi \omega^2 M.$$

Veremos ahora que $F/_{H_n^-}$ satisface la condicion (C).

Sea $\{x_k\}$ suc en H_n^- $\ni$

$$|F(x_k)| \leq a_0$$
$$\| \nabla F(x_k) \| \to 0$$

entonces para k suficientemente grande:

$$\langle \nabla F(x_k), x_k \rangle_{L_2} \leq \| x_k \|$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} |\dot{x}|^2 dt \leq \| x_k \| + \omega^2 \int_0^{2\pi} \langle \nabla V(x_k), x_k \rangle_{\mathbb{R}^n} dt$$

$$\leq \| x_k \| + a_1 \int_0^{2\pi} |x_k|\, dt \leq a_2 \| x_k \|$$

Se puede verificar que existe $a_3 > 0$ $\ni$

$$\int_0^{2\pi} |\dot{x}_k| dt \geq a_3 \| x_k \|^2$$

por todo lo anterior, existe $a_4 > 0$ $\ni$

$$\| x_k \| \leq a_4$$

i.e. $\{x_k\}$ es acotado, por la compacidad de ∇V y la forma de ∇F, como en 6.1, demostramos que $\{x_k\}$ tiene una subsucesion convergente

Podemos aplicarle a $F|_{H_n^-}$ los resultados de la seccion 8

En particular, como F está acotado inferiormente, $\forall k: -\infty < c_k$, y por 8.16 con $S := S_\varrho \cap H_n^-$, $\forall k \leq \rho_n$ (recordar que $\rho_n := \dim H_n^-$) : $c_k < 0$

Entonces F tiene al menos ρ_n puntos criticos en H_n^- lo que significa que (3) tiene al menos ρ_n soluciones $\frac{2\pi\omega}{n}$ periodicas no triviales

∎

10.- ALGUNOS COMENTARIOS

Este trabajo es una recopilación, algo desordenada, de una serie de teoremas que utilizan algún principio minimax para demostrar la existencia de puntos críticos

Jugaron un papel importante los índices γ, el primer índice de este tipo aparecido históricamente es la categoría de Lusternik-Schnirelman definida como:

cat (A):= {mínimo k y A puede cubrirse con k cerrados contraíbles en A}

(como se les ocurrió eso, es un misterio)

Pueden encontrarse más datos sobre cat en [3], [4], [5], [28], [24], [25] y [11] por ejemplo.

El género de Krasnoselski es el descendiente inmediato de cat, y puede encontrarse algo de su historia en [13] VI §4.

Más recientemente, se construyeron nuevos índices utilizando topología algebraica, por ejemplo en [9]; En este contexto, la teoría es mucho más general y de hecho, los índices para acciones de S^1 son intentos de construir una versión más geométrica y por lo tanto más manejable de un indice algebraico aparecido en: Fadell, Hussein, Rabinowitz "Borsuk-Ulam theorems for arbitrary S^1 actions and applications" Trans. A.M.S. V. 274 #1 Nov 1982 pp. 345-360.

Si en un problema pueden aplicarse varios de los teoremas mostrados, es muy natural preguntarse que relacion tienen entre si los puntos criticos construidos por diferentes metodos, pero desconozco la respuesta (que, posiblemente, sea muy sencilla)

Otra cuestion que no tratamos aqui, fue la naturaleza de los puntos criticos encontrados. por ejemplo, en [22], Teorema 4.3, se demuestra que en nuestro teorema de K_c tiene al menos un punto silla o un punto degenerado.

Es posible pensar en los indices, solo como invariantes topologicos, investigar sus propiedades y usarlos para otros fines que el nuestro.

Existen pues varios problemas interesantes relacionados con el tema.

A.- APENDICE.

A.1. CALCULO:

A.1.1.- NOTACION y DEFINICIONES: (Ver por ejemplo [15] y [19])

Sea $F \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, definimos el campo vectorial gradiente como:

$$\nabla F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{tal que, si } \bar{x} := (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n:$$

$$\nabla F(\bar{x}) := \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial x_2}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{x}) \right)$$

Si $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, denotamos el producto escalar como: $< \bar{x}, \bar{y} > \in \mathbb{R}$

La diferencial de F, es una función:

$$DF : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

tal que, si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$; $DF(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - es lineal y tenemos:

$$\forall \bar{y} \in \mathbb{R}^n: \quad DF(\bar{y}) := \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{x}) \right) \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}) = < \bar{y}, \nabla F(\bar{x}) > .$$

Por otro lado:

Si $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $\forall t \in \mathbb{R}: \sigma(t) := (\sigma_1(t), \dots, \sigma_n(t))$ es de clase C^1, entonces:

Si $t \in \mathbb{R}$: $D\sigma(t): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ - es lineal y:

$$\forall s \in \mathbb{R}: \quad D\sigma(t)(s) := s\begin{pmatrix} \sigma_1'(t) \\ \vdots \\ \sigma_n'(t) \end{pmatrix} = s\,\sigma'(t)$$

donde σ' es la derivada de σ.

Así: $\sigma'(t) = D\sigma(t)(1) \in \mathbb{R}^n$

Analogamente, si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es C^1, entonces:

$$\frac{df}{dt}(t_0) = f'(t_0) = Df(t_0)(1),$$

■

A.1.2.- DEFINICIONES: ([15], [19])

Sean E, F, espacios de Hilbert, $x_0 \in E$ y $f: E \to F$:

Se dice que f es DIFERENCIABLE en x_0, si existe $u: E \to F$, funcion lineal continua tal que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - u(x - x_0) \|}{\| x - x_0 \|} = 0$$

y escribiremos: $Df(x_0) := u$.

Si para todo $x_0 \in E$, $Df(x_0)$ existe, decimos que f es DIFERENCIABLE y tenemos entonces una función

$$Df: E \longrightarrow L(E, F)$$

Donde $L(E,F)$ es el conjunto de funciones lineales continuas de E en F.

Definimos:

$C^1(E,F) := \{f: E \to F \mid f$ es diferenciable y Df-continua$\}$

Si H es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, y $\sigma \in C^1(\mathbb{R}, H)$, entonces $\forall t \in \mathbb{R}$: $D\sigma(t) \in L(\mathbb{R}, H)$ y denotamos $\sigma'(t) := D\sigma(t)(1) \in H$. ∎

A.1.3.- DEFINICION:

Sea $F \in C^1(H, \mathbb{R})$, entonces, para todo $x \in H$, $DF(x)$ es una funcional lineal continua, y por el teorema de representación de Riesz, existe un único elemento $v(x) \in H$ tal que, para todo $y \in H$:

$$DF(x)(y) = \langle y, v(x) \rangle \quad \text{y} \quad \|DF(x)\| = \|v(x)\|$$

Definimos entonces, el GRADIENTE de F como la función

$$\nabla F : H \to H$$
$$x \mapsto v(x).$$

∇F es entonces un campo vectorial en H tal que:

$$\nabla F(x) = 0 \iff DF(x) = 0$$

∎

A.1.4:- DEFINICIONES:

Sea H - espacio de Hilbert, $F \in C^1(H, \mathbb{R})$

$x \in H$ es un PUNTO CRITICO DE F si $\nabla F(x) = 0$

$K := \{x \in H \mid \nabla F(x) = 0\}$ - conjunto de ptos críticos de F

Dado $c \in \mathbb{R}$: $K_c := \{x \in K \mid F(x) = c\}$

c es VALOR CRITICO si $K_c \neq \emptyset$

c es VALOR REGULAR si $K_c = \emptyset$

$H^* := H - K$

∎

A.1.5.- DEFINICION:

Sea U - subconjunto abierto de H.

Una funcion $V: U \to H$ es LOCALMENTE LIPSCHITZ si $\forall x \in U$, $\exists U_x$ - vecindad de x y $\exists K_x \in \mathbb{R}^+$ $\ni$ $\forall y, z \in U_x$:

$$\| V(y) - V(z) \| \leq K_x \| y - z \|$$

$\blacksquare$

A.1.6.- TEOREMA:

Sea $U \subset H$ abierto, $V: U \to H$ - localmente Lipschitz entonces:

i) $\forall p \in U$: $\exists U_p$ - vecindad abierta de p, $\varepsilon > 0$ y $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_p \longrightarrow U$, tales que, si para $x \in U_p$ definimos $\sigma_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$, $t \longmapsto \sigma(t, x)$

entonces, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$:

$$\sigma_x'(t) = V(\sigma_x(t)) \qquad \sigma_x(0) = x$$

(A σ_x se le llama CURVA INTEGRAL de V^* con condicion inicial $\sigma_x(0) = x$)

ii) Si $\sigma_1 : J_1 \to U$, $\sigma_2 : J_2 \to U$, $J_i \subset \mathbb{R}$ son curvas integrales de V con la misma condicion inicial, entonces $\sigma_1 |_{J_1 \cap J_2} = \sigma_2 |_{J_1 \cap J_2}$

iii) $\forall\, p \in U$: $\exists !\, g_p : (t^-(p), t^+(p)) \longrightarrow U$

$t^+(p) \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ $t^-(p) \in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}$, curva integral

con condicion inicial $g_p(0) = p$, tal que cualquier otra curva integral con la misma condicion inicial, es restricción de g_p. (A g_p se le llama CURVA INTEGRAL MAXIMAL con cond. inicial $g_p(0) = p$)

— La demostración de este teorema puede encontrarse por ejemplo en [16] capitulo 6 seccion 1 y en [15] capitulo VI seccion 3 —

■

A.1.7.- DEFINICIONES:

Sea $V : U \longrightarrow H$ como en A.1.6

$\mathcal{D}(V) := \{ (t, x) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in (t^-(x), t^+(x)) \}$.

A la funcion:

$$\eta : \mathcal{D}(V) \longrightarrow U$$
$$(t, x) \longmapsto g_x(t)$$

se le llama el FLUJO determinado por V

$$\eta_t := \eta(t, \_) : U \longrightarrow U$$

■

A.1.8.- TEOREMA:

i) Si η es el flujo de V. V- clase C^{∞} η- C^{∞}

ii) Sea $p \in U$, $t_0 \in (t^-(p), t^+(p))$, $x_0 := g_p(t_0)$

entonces $t^-(x_0) = t^-(p) - t_0$, $t^+(x_0) = t^+(p) - t_0$

y $\forall\, t \in (t^-(x_0), t^+(x_0))$, : $g_{x_0}(t) = g_p(t + t_0)$

i.e: $\eta(t, \eta(t_0, p)) = \eta(t + t_0, p)$ ó : $\eta_{t+t_0}(p) = \eta_t(\eta_{t_0}(p))$

— La demostracion se encuentra en [15] cap. VI sec 5 —

A. 1. 9. DEFINICION:

Sea $U \subset H$ abierto, $V: U \to H$ t.q. $\forall p \in U$: $t^-(p) = -\infty$, $t^+(p) = +\infty$, entonces $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\eta_t : \begin{array}{l} U \to U \\ x \mapsto \eta(t,x) \end{array}$$ está definido, con las propiedades:

i): $\eta_0 = Id_U$

ii) $\eta_{t_1+t_0} = \eta_{t_1} \circ \eta_{t_0}$ ... (A.1.8)

$\therefore \{\eta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo y si η es C^∞.

$\forall t$: $\eta_t^{-1} = \eta_{-t}$ es C^∞ $\therefore$ η_t es difeomorfismo.

En este caso, a $\{\eta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ se le llama:

GRUPO MONOPARAMETRICO DE DIFEOMORFISMOS en U.

■

Los siguientes teoremas se pueden encontrar en [24]:

A.1.10. TEOREMA:

Sea $U \subset H$ abierto, $V: U \to H$ campo vectorial $g_p : (t^-(p), t^+(p)) \to U$ - curva maximal para $p \in U$, entonces:

$$t^+(p) < \infty \Rightarrow \lim_{t \to t^+(p)} g_p(t) \text{ no existe en } U$$

$$t^-(p) > -\infty \Rightarrow \lim_{t \to t^-(p)} g_p(t) \text{ no existe en } U$$

Demostración:

Supongamos que existe $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $t^-(p) < t_n < t^+(p)$, $t_n \to t^+(p)$ y $g_p(t_n) \to P_0 \in U$.

Sean $\varepsilon > 0$, U_p - vecindad de P_0 como en A.1.6(ii) entonces existe $N_1 \ni n \geq N_1 \Rightarrow g_p(t_n) \in U_p$, y como $t_n \to t^+(p)$, existe $N_2 \ni n \geq N_2 \Rightarrow t^+(p) - t_n < \varepsilon$

sea $N := \max(N_1, N_2)$, entonces:

$$t^+(p) - t_N < \varepsilon$$

$$y: \quad q := g_p(t_N) \in U_p$$

Esto último implica, por A.1.6(i), que existe $\sigma_q : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ $\therefore$ $t^+(q) \geq \varepsilon$, pero por A.1.8(iii) con $x_0 = q$, $t_0 = t_N$: $t^+(q) = t^+(p) - t_N < \varepsilon$ $\lightning$

luego no existe $P_0 \in U$. (Se procede de la misma manera con $t^-(p)$)

■

A.1.10.- TEOREMA:

Sea $V: H \to H$ campo vectorial localmente Lipschitz tal que $\forall p \in H$: $\|V(p)\| \leq M$, $M \in \mathbb{R}$ fijo, entonces:

$\forall p \in H$: $t^-(p) = -\infty$, $t^+(p) = +\infty$ y η de A.1.9 existe

Demostración:

Supongamos que $t^+(p) < +\infty$, entonces:

$$\int_0^{t^+(p)} \|V(g_p(t))\| dt < t^+(p) M < \infty$$

pero $V(g_p(t)) = g_p'(t)$ $\therefore \int_0^{t^+(p)} \| g_p'(t) \| \, dt < \infty$

entonces, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un conjunto $\{a_i\}_{i=0}^n$ tales que: $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = t^+(p)$ y:

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \| g'(t) \| \, dt < \varepsilon$$

es decir, la longitud de la curva g_p desde $g_p(a_i)$ a $g_p(a_{i+1})$ es menor que ε.

Luego: $\forall t \in [0, t^+(p))$, $\exists i \ni \| g_p(t) - g_p(a_i) \| < \varepsilon$

e $Im(g_p)$ es precompacto en H - completo

$\therefore \overline{Im(g_p)}^H$ es compacto[1] y $\lim_{t \to t^+(p)} g_p(t)$ existe en H, lo que contradice el teorema A.1.10, pues supusimos $t^+(p) < +\infty$ (con $U = H$) luego: $t^+(p) = \infty$

(Analogamente con $t^-(p)$)

(1) NOTA: Sea X- espacio metrico, $Y \subset X$ es PRECOMPACTO si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F \subset Y$. F finito tal que $\forall y \in Y$, $\exists f_i \in F \ni d(y, f_i) < \varepsilon$

Y es RELATIVAMENTE COMPACTO si $\overline{Y}^X$ es COMPACTO.

Tenemos entonces:

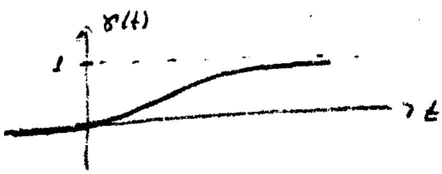
X- completo, Y- precompacto $\Rightarrow$ Y- relativamente compacto.

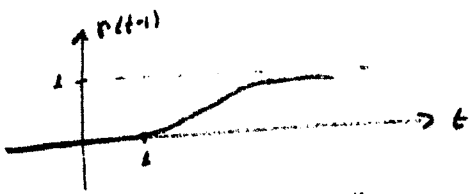
La demostracion de ésta afirmacion se encuentra en [6], teorema 3.17.5.

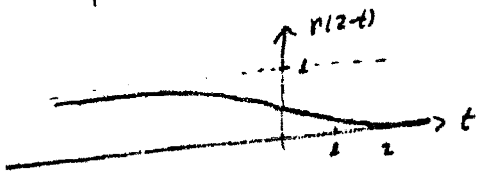
A.- APENDICE

A.2. CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCION AUXILIAR α:

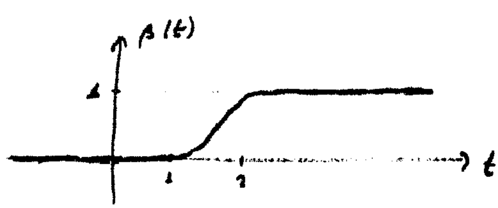
sea $\gamma(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$







$$\beta(t) := \frac{\gamma(t-1)}{\gamma(t-1) + \gamma(2-t)}$$



Tenemos: β es no decreciente $(\forall t: \beta'(t) \geq 0)$

Dem: Si $t \leq 1$, $\gamma(t-1) = 0 \therefore \beta(t) = 0$ y $\beta'(t) = 0$

Si $2 \leq t$, $\gamma(2-t) = 0 \therefore \beta(t) = 1$ y $\beta'(t) = 0$

Si $1 < t < 2$:

$$\beta'(t) = \frac{[\gamma(t-1)+\gamma(2-t)]\gamma'(t-1) - \gamma(t-1)[\gamma'(t-1) - \gamma'(2-t)]}{[\gamma(t-1)+\gamma(2-t)]^2} =$$

$$= \frac{\gamma(2-t)\gamma'(t-1) + \gamma(t-1)\gamma'(2-t)}{[\gamma(t-1)+\gamma(2-t)]^2}$$

Ahora: $\gamma(x) = e^{-x^{-2}}$ si $x > 0 \therefore \gamma'(x) = 2x^{-3}\gamma(x)$

luego: $1 < t < 2 \Rightarrow t-1 > 0$, $2-t > 0$ y:

$$\gamma'(t-1) = \frac{2\gamma(t-1)}{(t-1)^3} \qquad \gamma'(2-t) = \frac{2\gamma(2-t)}{(2-t)^3} \quad \therefore$$

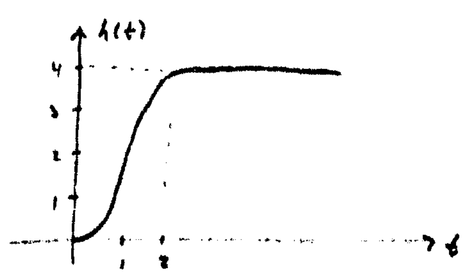
$$\beta'(t) = \frac{\dfrac{2\gamma(t-1)\gamma(2-t)}{(t-1)^3} + \dfrac{2\gamma(2-t)\gamma(t-1)}{(2-t)^3}}{[\gamma(t-1)+\gamma(2-t)]^2} =$$

$$= \frac{2\gamma(t-1)\gamma(2-t)}{[\gamma(t-1)+\gamma(2-t)]^2}\left[\frac{1}{(t-1)^3} + \frac{1}{(2-t)^3}\right]$$

Como $\forall x: \gamma(x) \geq 0$, $t-1 > 0$ y $2-t > 0$, entonces:

$$\beta'(t) \geq 0 \text{ en } 1 < t < 2$$

Sea entonces:
para $t \geq 0$:
$h(t) := t^2(1-\beta(t)) + 4\beta(t)$



si $0 \leq t \leq 1$, $h(t) = t^2$ y $h'(t) = 2t \geq 0$

si $2 \leq t$ $h(t) = 4$ y $h'(t) = 0$

en $1 < t < 2$: $t > 0$, $1-\beta(t) > 0$, $4-t^2 > 0$ y $\beta'(t) > 0$

$\therefore$ $h'(t) = 2t(1-\beta(t)) - t^2\beta'(t) + 4\beta'(t) =$

$= 2t(1-\beta(t)) + (4-t^2)\beta'(t) > 0$

i.e.: $\forall t \geq 0$: $h'(t) \geq 0$

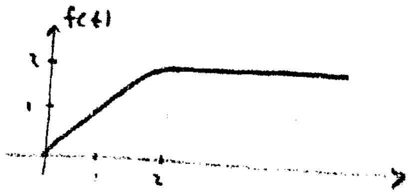
Por otro lado, sea:

$f(t) := t(1-\beta(t)) + 2\beta(t)$ $\quad t \geq 0$

si $0 \leq t \leq 1$, $f(t) = t$ y $f'(t) = 1 > 0$

si $2 \leq t$. $f(t) = 2$ y $f'(t) = 0$

si $1 < t < 2$, entonces $2 - t > 0$ y



$f'(t) = (1-\beta(t)) - t\beta'(t) + 2\beta'(t) = (1-\beta(t)) + (2-t)\beta'(t) > 0$

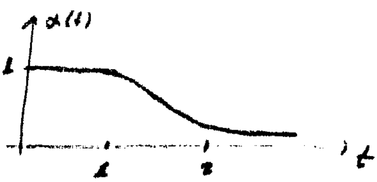
i.e.: $\forall t \geq 0$: $f'(t) \geq 0$

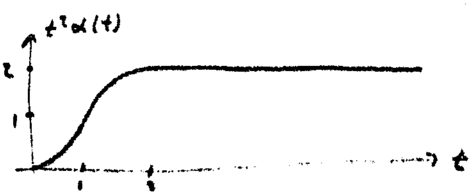
definimos entonces: $\alpha(t) := \begin{cases} \dfrac{(f \circ h)(t)}{t^2} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$

si $0 < t \leq 1$. $h(t) = t^2$, $f \circ h(t) = t^2$ y $\alpha(t) = 1$, luego: $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

si $2 \leq t$, $h(t) = 4$, $f \circ h(t) = 2$ $\therefore$ $\alpha(t) = \dfrac{2}{t^2}$

y $[t^2\alpha(t)]' = (f \circ h)'(t) = f'(h(t))\, h'(t) \geq 0$ ($t^2\alpha(t)$ - no decreciente)





Por ultimo:

$$t\,\alpha(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ \frac{2}{t} & 2 \le t \end{cases}$$

y es acotada en $1 \le t \le 2$.

$\therefore$ $t\,\alpha(t)$ es acotada en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$\blacksquare$

A.3.- REPRESENTACIONES DE S^1

(Ver, por ejemplo: [20] cap III sec. 3, [18] cap 4)

A.3.1.- DEFINICIONES:

Sea G un grupo topologico, $X \neq \{0\}$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, $Iso(X)$ - grupo de transformaciones lineales de X en si mismo, invertibles.

Una REPRESENTACION de G en X es un homeomorfismo de grupos continuo:

$$T : G \to Iso(X)$$

(en particular $T(e) = Id_X$, $T(g_1 g_2) = T(g_1) \circ T(g_2)$)

T es UNITARIA si, $\forall g \in G$: $T(g)$ preserva productos escalares en X. (En adelante, T será una representacion unitaria).

$M \subset X$ es T-INVARIANTE si $\forall g \in G$, $x \in M$: $T(g)(x) \in M$

Si M es un subespacio T-invariante, $M^\perp$ tambien lo será (T es unitario) y podemos definir.

$T/_M : G \to Iso(M)$ $\qquad$ $T/_{M^\perp} : G \to Iso(M^\perp)$

$\forall x \in X$: $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$ $\therefore$ $\forall g \in G$:

$T(g)(x) = T(g)(x_1) + T(g)(x_2) = T/_M(g)(x_1) + T/_{M^\perp}(g)(x_2)$

y escribimos $T = T/_M \oplus T/_{M^\perp}$

Si $M = \{0\}$ o X, esta descomposicion es trivial.

T es IRREDUCIBLE si los unicos subespacios de X, T-invariantes son $\{0\}$ y X.

$\dim_{\mathbb{C}} X$ es la DIMENSION de T

■

Estamos interesados en las representaciones de dimension finita del grupo aditivo $S^1 := \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$

Los siguientes lemas nos serviran para encontrar todas las representaciones que buscamos:

A.3.2: LEMA.

Sea T una representacion finita irreducible de G en X, entonces si $B \in Iso(X)$ es tal que para todo $g \in G$: $B \circ T(g) = T(g) \circ B$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $B = \lambda \cdot Id_X$.

DEMOSTRACION:

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de B

Definamos $L := \{x \in X \mid Bx = \lambda x\}$ - espacio propio de B correspondiente a λ - por definicion de λ:

$$L \neq \{0\}$$

Si $x \in L$: $B(T(g)(x)) = T(g)(B(x)) = T(g)(\lambda x) = \lambda T(g)(x)$

ie: $\forall x \in L, \forall g \in G$: $T(g)(x) \in L$

y L es invariante bajo T que es irreducible. Como $L \neq \{0\}$ entonces $L = X$ y por definicion de L: $\forall x \in X$. $Bx = \lambda x$ ie: $B = \lambda Id_X$

■

A.3.3.. COROLARIO:

Si T es una representacion finita, irreducible de un grupo conmutativo G, entonces:

$$\dim T = 1$$

DEMOSTRACION:

$\forall\, g, g_0 \in G: \; T(g_0)T(g) = T(g_0 g) = T(g g_0) = T(g)T(g_0)$

Así: $T(g_0)$ conmuta con todos los operadores $T(g)$

por lema A.3.2: existe $\lambda(g_0) \in \mathbb{C}$ + $T(g_0) = \lambda(g_0) Id_X$

Si $M \subset X$ es un subespacio con $\dim M = 1$, entonces M es invariante bajo $T(g_0) = \lambda(g_0)\, Id_X$ para todo $g_0 \in G$, i.e. M es invariante bajo T.

Si $\dim X > 1$, esto contradice la irreducibilidad de T

□

Observemos que las representaciones de dimension 1 son de la forma:

$$T: G \longrightarrow Iso(\mathbb{C})$$
$$g \longmapsto \lambda(g)\, Id_{\mathbb{C}}$$

entonces pueden determinarse mediante funciones $\lambda: G \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que:

$$\lambda(e) = 1 \quad , \quad \lambda(g_1 g_2) = \lambda(g_1)\lambda(g_2)$$

A.3.4.- TEOREMA:

Todas las representaciones de dimension 1 de S^1 se determinan mediante funciones:

$$\lambda_m : S^1 \longrightarrow \mathbb{C} \qquad m \in \mathbb{Z}$$
$$\theta \longmapsto e^{im\theta}$$

DEMOSTRACION:

Una funcion $\lambda: S^1 \to \mathbb{C}$ puede definirse mediante una funcion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que satisface:

$$f(0) = 1$$

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}: \quad f(\gamma_1 + 2\pi) = f(\gamma_1)$$

$$f(\gamma_1 + \gamma_2) = f(\gamma_1) \cdot f(\gamma_2)$$

Entonces $\forall \gamma \in \mathbb{R}: \ f(\gamma) \cdot f(-\gamma) = f(\gamma - \gamma) = f(0) = 1$

$\therefore \ f(\gamma) \neq 0$

Sea $\omega \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ una funcion con soporte en una vecindad de $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ y tal que:

$$c := \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma)\, \omega(\gamma)\, d\gamma \neq 0$$

Entonces: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma_1 + \gamma_2)\, \omega(\gamma_2)\, d\gamma_2 = f(\gamma_1) \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma_2)\, \omega(\gamma_2)\, d\gamma_2$

$$\therefore \ f(\gamma_1) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma_1 + \gamma_2)\, \omega(\gamma_2)\, d\gamma_2}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma_2)\, \omega(\gamma_2)\, d\gamma_2} = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma_1 + \gamma_2)\, \omega(\gamma_2)\, d\gamma_2 =$$

$$= \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma)\, \omega(\gamma - \gamma_1)\, d\gamma \ \overset{\omega \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})}{\checkmark} \ \therefore \ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

Como $f(\gamma_1 + \gamma_2) = f(\gamma_1) f(\gamma_2)$, derivando con respecto a γ_1:

$f'(\gamma_1 + \gamma_2) = f'(\gamma_1) f(\gamma_2)$ y con $\gamma_1 = 0 \quad \gamma_2 = \gamma$:

$f'(\gamma) = f'(0) f(\gamma)$ i.e.: $f'(\gamma) = k\, f(\gamma) \quad k = f'(0)$,

y $f(0) = 1 \quad \therefore \quad f(\gamma) = e^{k\gamma} \quad k \in \mathbb{C}$.

pero $f(\gamma + 2\pi) = f(\gamma)$ i.e.: $e^{k(\gamma + 2\pi)} = e^{k\gamma}$

$\therefore \ e^{2\pi k} = 1 \quad \therefore \quad k = i m \quad m \in \mathbb{Z}$

asi: $\quad f(\gamma) = e^{i m \gamma}$

$$\therefore \ \lambda(\theta) = e^{i m \theta}$$

A.3.5.- COROLARIO:

Si T es una representacion finita de S^1 (i.e. $k := \dim T < \infty$), entonces existen $m_1, m_2, \dots m_k \in \mathbb{Z}$ tales que para todo $\theta \in S^1$, T_θ puede representarse por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} e^{im_1\theta} & & 0 \\ & e^{im_2\theta} & \\ 0 & & \ddots \; e^{im_k\theta} \end{pmatrix}$$

Demostracion:

Podemos descomponer a T en la forma:

$$T = \bigoplus_{j=1}^{n} T_j$$

Con T_j - irreducible y $\dim T = \sum_{j=1}^{n} \dim T_j$.
$T_j : X_j \to X_j$, X_j - subespacio T-invariante y $X = \bigoplus X_j$
pero por A.3.3, $\forall j$: $\dim T_j = 1$ $\therefore \dim X_j = 1$
y por A.3.4, $\forall j$, $\exists m_j \in \mathbb{Z}$ + $\forall \theta \in S^1$:

$$T_j(\theta) = e^{im_j\theta} Id_{X_j}.$$

Así, $n = k$ y T_θ actúa en cada uno de los k-subespacios ortogonales X_j, multiplicando por $e^{im_j\theta}$, tomando un elemento $0 \neq e_j \in X_j$ $\{e_j\}_{j=1}^{k}$ es base de X, y en ésta la matriz correspondiente a T_θ es A

$\square$

A.3.6.- NOTACION: (Ver [18])

S^1 es un grupo topologico separable y compacto, entonces, existe una medida $\mu \neq 0$ tal que para todo $A \subset S^1$, $\theta \in S^1$: $\mu(A\cdot\theta) = \mu(A)$, i.e, μ es invariante bajo traslaciones (izquierdas ó derechas porque S^1 es conmutativo), esta medida es unica excepto por una constante, es decir, si μ_1 y μ_2 son invariantes, existe $\lambda \geq 0$ + $\forall A$: $\mu_1(A) = \lambda \mu_2(A)$.

Ademas, cualquier medida invariante es finita, i.e. $\mu(S^1) < \infty$, así, podemos construir, de manera única una medida invariante tal que $\mu(S^1) = 1$.

En adelante, si f es una funcion en S^1, denotaremos como: $\int_{S^1} f(\theta)\, d\theta$. la integracion con respecto a esa medida.

y tenemos: $\int_{S^1} d\theta = \mu(S^1) = 1$

y dado $\varphi \in S^1$ fijo: $\int_{S^1} f(\varphi+\theta)\, d\theta = \int_{S^1} f(\theta)\, d\theta$

A.3.7. OBSERVACION:

Existe un resultado análogo a A.3.5 en el caso en que $\dim_{\mathbb{C}} X = \infty$ y X es separable, y asegura la descomposicion de X en subespacios ortogonales T- invariantes de dimension 1.

Ver, por ejemplo, [17] y [18].

A. 4.- TOPOLOGIA

A. 4. 1.- GRADO DE BROWER: (Ver [7] y [28])

Hablaremos de una importante herramienta de la topologia diferencial, un número asociado a cada funcion $f: \bar{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (con D - abierto $\bar{D}$ - compacto, f - continua) y a cada $p \in \mathbb{R}^n - f(\partial D)$, éste numero tiene que ver con el nº de elementos en $f^{-1}(p)$ y lo denotaremos como:

grado (f, p, D).

Para definirlo usaremos algunos resultados preliminares que enunciaremos sin demostracion.

A. 4.2.. TEOREMA DE SARD:

Si $f \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$ entonces el conjunto de valores criticos tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.
(como corolario, el conjunto de valores regulares es denso en $\mathbb{R}^n$)

Usando particiones de la unidad, es posible demostrar que para toda $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ existe $g: \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ tal que $g|_{\partial D} = f|_{\partial D}$ y $g|_D \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$
(Incluso g puede ser una aproximacion tan cercana como se quiera, de f)

Es facil demostrar que, si $g|_D \in C^\infty(D,\mathbb{R}^n)$ y $p \in \mathbb{R}^n$ es valor regular, entonces $g^{-1}(p)$ es un conjunto finito (usando el teorema de la funcion inversa y el hecho de que $\bar{D}$ es compacto)

A.4.3.— DEFINICION:

De la definicion, si $g(x)=p$ - valor regular, entonces $\det(Dg(x)) \neq 0$, se define entonces:

$$grado(g,p,D) := \sum_{x \in g^{-1}(p)} \frac{\det Dg(x)}{|\det Dg(x)|}$$

si $g^{-1}(p)=\emptyset$, $grado(g,p,D) := 0$

Si $p_0 \in \mathbb{R}^n - g(\partial D)$, sea $\{p_n\}^\infty$ sucesion de valores regulares de g tales que $p_n \to p_0$ y definimos.

$$grado(g,p_0,D) := \lim_{p_n \to p_0} grado(g,p_n,D)$$

(éste limite existe y es independiente de la sucesion escogida, ver A.4.6 (3))

Tenemos el siguiente teorema:

A.4.4.- Si g_0 y g_1 son continuas en $\bar{D}$ y C^∞ en D, y $g_0|_{\partial D} = g_1|_{\partial D}$, entonces $\forall p \in \mathbb{R}^n - g_0(\partial D)$:

$$grado(g_0,p,D) = grado(g_1,p,D)$$

A.4.5.- DEFINICION: sea $f \in C(\bar{D},\mathbb{R}^n)$, $p \in \mathbb{R}^n - f(\partial D)$

$grado(f,p,D) := grado(g,p,D)$ donde g es continua en $\bar{D}$, C^∞ en D y $f|_{\partial D} = g|_{\partial D}$

A.4.6.- TEOREMA:

El grado tiene las siguientes propiedades:

1) si $H: \bar{D}\times[0,1]\to \mathbb{R}^n$ es continua y $\forall t\in[0,1]$ $p\notin H_t(\partial D)$ entonces:

$$grado(H_0,p,D)=grado(H_1,p,D)$$

(invariante bajo homotopias)

2) $f_1|_{\partial D}=f_2|_{\partial D} \Rightarrow grado(f_0,p,D)=grado(f_1,p,D)$

(determinacion por la orilla)

3) $\forall p\in\mathbb{R}^n-f(\partial D)$, $\exists V_p\subset\mathbb{R}^n-f(\partial D)$ vecindad de p tal que $\forall y\in V_p$:

$$grado(f,p,D)=grado(f,y,D)$$

(localmente constante)

$\therefore$ Si p y q están en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^n-f(\partial D)$, entonces:

$$grado(f,p,D)=grado(f,q,D)$$

4) $W\subset\mathbb{R}^n$ abierto acotado, $p\in\mathbb{R}^n-f(\partial W)$ y $f^{-1}(p)\subset W\subset D \Rightarrow grado(f,p,D)=grado(f|_{\bar{W}},p,W)$

(invariancia bajo escisión ó determinacion local)

5) W como en (4) y $W=W_1\cup W_2$ - abiertos con $f^{-1}(p)\cap\bar{W}_1\cap\bar{W}_2=\emptyset$ entonces:

$$grado(f,p,W)=grado(f|_{\bar{W}_1},p,W_1)+grado(f|_{\bar{W}_2},p,W_2)$$

(aditividad)

6) $W_1 \subset \mathbb{R}^m$, $W_2 \subset \mathbb{R}^n$ abiertos acotados
$f_1 \in C(\overline{W_1}, \mathbb{R}^m)$ $\quad f_2 \in C(\overline{W_2}, \mathbb{R}^n)$
$y_1 \in \mathbb{R}^m - f_1(\partial W_1)$ $\quad y_2 \in \mathbb{R}^n - f_2(\partial W_2)$
entonces:

$$\text{grado}(f_1 \times f_2, (y_1, y_2), W_1 \times W_2) = \text{grado}(f_1, y_1, W_1) \cdot \text{grado}(f_2, y_2, W_2)$$
(multiplicatividad)

7) TEOREMA DE BORSUK:
Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, simetrico ($x \in D \Rightarrow -x \in D$) y $\bar{0} \in D$, $f: \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ continuo e impar ($f(x) = -f(-x)$) y $\bar{0} \notin f(\partial D)$, entonces grado$(f, \bar{0}, D)$ es un numero impar (en particular, diferente de cero)

A.4.7.- TEOREMA: (BORSUK-ULAM)
Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, simetrico, $\bar{0} \in D$, $\psi: \partial D \to \mathbb{R}^j$ $\underline{j < n}$ continuo e impar, entonces:
$$\psi^{-1}(0) \neq \emptyset$$

<u>Demostracion:</u>

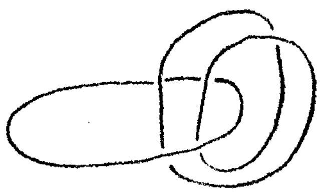
Supongamos que $\psi^{-1}(0) = \emptyset$ (i.e.: $0 \notin \psi(\partial D)$), con el teorema de extension de Tietze, construyamos $\phi: \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ continua e impar tal que $\phi|_{\partial D} = \psi$ y $\phi(\bar{D}) \subset \mathbb{R}^j \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\bar{0} \notin \phi(\partial D)$ y grad$(\phi, \bar{0}, D) \neq 0$ (A.4.6 (7))

Sea entonces Δ la componente conexa de $\mathbb{R}^n - \phi(\partial D)$ que contiene a $\bar{0}$, entonces Δ es abierto no vacio y $\forall p \in \Delta$: grad$(\phi, p, D) \neq 0$ (A.4.6 (3))
$\therefore \Delta \subset \phi(D) \subset \mathbb{R}^j \subset \mathbb{R}^n$ i.e. $\emptyset \neq \Delta \subset \mathbb{R}^j \subset \mathbb{R}^n$ $j < n$
Δ abierto en $\mathbb{R}^n$ $\not\!\!\!\downarrow$ $\therefore \psi^{-1}(0) \neq \emptyset$

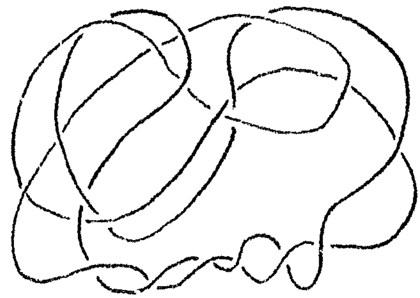
A.4.8 - DEFINICION:

Una aplicacion interesante del grado es la siguiente:

Pensemos en dos curvas cerradas simples en $\mathbb{R}^3$:



ó



En el primer ejemplo es fácil ver cuantas veces se enreda una curva en otra (2)

En el segundo no es tan sencillo, pero si tuvieramos las funciones $\gamma: S^1 \to \mathbb{R}^3$, $\delta: S^1 \to \mathbb{R}^3$ cuyas imagenes fueran precisamente las curvas que nos interesan, entonces, con ayuda del grado, podriamos calcular lo que llamaremos el numero de enredamiento de γ y δ ($\gamma \& \delta$).

Consideremos entonces: $\gamma: S^1 \to \mathbb{R}^n$, $\delta: S^{n-2} \to \mathbb{R}^n$ continuas y $\gamma(S^1) \cap \delta(S^{n-2}) = \emptyset$.

Sea $\Delta: B^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ una extension continua de δ definamos: $\gamma * \Delta: S^1 \times B^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ $\quad$ ($\gamma * \Delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow$
$(x,y) \mapsto \gamma(x) - \Delta(y)$ $\quad$ $\gamma(x) = \Delta(y)$)

$S^1 \times B^{n-1} \subset \mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{n-1}$ pero $S^1 \times B^{n-1}$ es homeomorfo a un toro solido n-dimensional con frontera, que podemos pensar como un subconjunto $T^n \subset \mathbb{R}^n$

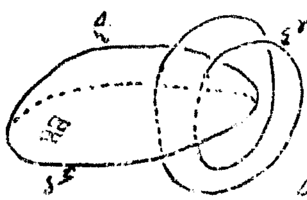
Sea $h: T^n \to S^1 \times B^{n-1}$ un homeomorfismo

La eleccion de h sólo alterará por un signo, al numero grado $((\gamma * \Delta)\circ h, \sigma, f^n)$ y debido a la determinacion por la orilla, este grado es el mismo para cualquier extension Δ de δ.

Definamos entonces el numero de enredamiento de γ y δ:

$$\gamma \ell \delta := |\,\text{grado}\,((\gamma * \Delta)\circ h, \sigma, f^n)\,|$$

Intuitivamente, lo que hacemos es colocar una superficie Δ ("pompa de jabon") con la orilla en una de las curvas (δ) y "contar" cuantas veces intersecta a la otra curva (γ)



Si $\gamma \ell \delta \neq 0$, entonces cualquier extension Δ de δ intersecta a la imagen de γ. Diremos entonces que γ y δ se enlazan de manera no trivial.

(La definicion usual de $\gamma \ell \delta$ le asocia a la nuestra, un signo ($\pm$) que tiene que ver con la orientacion de las S^1 consideradas)

A.4.9.- TRANSVERSALIDAD: (Ver [12] cap 1. §5, 2. §3)

A.4.9.1.- DEFINICIONS. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$

Sean: $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $V \subset \mathbb{R}^n$ subespacio lineal

Decimos que f es TRANSVERSAL a V, si para todo $x \in f^{-1}(V)$: $Im(Df(x)) + V = \mathbb{R}^n$

es decir, para todo $y \in \mathbb{R}^n$, existen $x_1 \in \Omega$ y $y_1 \in V$ + $y = Df(x)(x_1) + y_1$

En el caso $V = \{\bar{0}\}$ esto significa que para todo $x \in f^{-1}(\bar{0})$, $Df(x)$ es sobreyectiva, ó, lo que es lo mismo, $\bar{0}$ es valor regular de f.

A.4.9.2.- TEOREMA:

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^l$ $F: \Omega \times U \to \mathbb{R}^n$ - C^∞

V subespacio de $\mathbb{R}^n$ y para cada $z \in U$, definimos:

$$F_z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto F(x, z)$$

entonces, si F es transversal a V, el conjunto $A := \{z \in U \mid F_z \text{- transversal a } V\}$ es denso en U.

- La demostracion se encuentra en [12] 2. §3 -

A.4.10. UNA GENERALIZACION DEL TEOREMA DE BORSUK - ULAM ([23])

En esta seccion demostraremos una version del teorema de Borsuk-Ulam para acciones de S^1 con puntos fijos, que usaremos solamente en la sec. 7

Consideremos el espacio: $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^a \times \mathbb{C}^b$ con $n = a+2b$, denotemos a los elementos de $\mathbb{R}^n$: $x := (r, z)$ $r := (r_1, \ldots, r_a)$ $z := (z_{a+1}, \ldots z_{a+b})$

$r \in \mathbb{R}^a \quad z \in \mathbb{C}^b$

A.4.10.1. DEFINICION:

Definamos las siguientes acciones de S^1 en $\mathbb{R}^n$:

$T : S^1 \longrightarrow \mathrm{Iso}\,\mathbb{R}^n$, $\forall \theta \in S^1$:

$$T_\theta(x) := (r_1, \ldots, r_a, e^{im_1\theta} z_{a+1}, \ldots, e^{im_b\theta} z_{a+b}).$$

y $R : S^1 \longrightarrow \mathrm{Iso}\,\mathbb{R}^n$, $\forall \theta \in S^1$:

$$R_\theta(x) := (r_1, \ldots, r_a, e^{ik_1\theta} z_{a+1}, \ldots, e^{ik_b\theta} z_{a+b})$$

donde para $1 \leq i \leq b$: $m_i, k_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$

A.4.10.2. TEOREMA:

Sea Ω - vecindad abierta acotada de $0 \in \mathbb{R}^n$ T-invariante $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ - (T, R) equivariante tal que, para todo elemento de la forma: $x = (r, 0)$: $f(x) = (r, 0)$

entonces, $\text{grado}(f, 0, \Omega) = \prod_{i=1}^{b} \frac{k_i}{m_i}$

DEMOSTRACION:

CASO II

Supongamos que $\forall j$: $m_j = 1$, $k_j = k > 0$, f clase C^∞ y existe $\varepsilon > 0$ t.q. $|x| \le \varepsilon \Rightarrow f(x) = (r_1, \dots r_a, z_{a+1}^k, \dots, z_{a+b}^k)$.

En este caso, si $|x| \le \varepsilon$ y $f(x) = 0$ entonces $x = 0$

definimos:
$$h : \mathbb{C}^b \longrightarrow \mathbb{C}^b$$
$$(z_1, \dots z_b) \longmapsto (z_1^k, \dots, z_b^k)$$

$$g : \mathbb{C}^b \longrightarrow \mathbb{R}^b$$
$$(z_1, \dots z_b) \longmapsto (|z_1|^2, \dots, |z_b|^2)$$

Sean: $\mathcal{B} := \{B$ - matriz $b \times b$ con entradas complejas$\}$
$\mathcal{A} := \{A$ - matriz $a \times b$ con entradas reales.$\}$

Si $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ tienen entradas suficientemente pequeñas, entonces la funcion

$$f_{A,B} : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^a \times \mathbb{C}^b$$
$$x \longmapsto f(x) + (A \circ g(z), B \circ h(z))$$

tambien satisface $|x| \le \varepsilon$, $f_{AB}(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
(Por ejemplo, haciendo que $\|(A \circ g(z), B \circ h(z))\| \le \frac{1}{2} \|f(x)\|$)

definimos: $\mathcal{C} := \{(A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \;/\; |x| \le \varepsilon, f_{AB}(x) = 0 \Rightarrow x = 0\}$

$$\mathcal{D} := (\bar{\Omega} - \{|x| < \varepsilon\}) \times \mathcal{C}$$

$$F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x, A, B) \longmapsto f_{AB}(x)$$

Si podemos demostrar que F es transversal a $\{0\}$, entonces, por el teorema A.4.1.2, el conjunto $\{(A,B) \in \mathcal{C} \;/\; f_{A,B}$ - transversal a $\{0\}\}$ seria denso en $\mathcal{C}$ y podriamos encontrar en $\mathcal{C}$, matrices

A y B tan pequeños que: f_{AB} esté muy cerca de f; grado $(f, 0, \Omega) =$ grado $(f_{AB}, 0, \Omega)$
grado $(f, 0, \{|x|<\varepsilon\}) =$ grado $(f_{AB}, 0, \{|x|<\varepsilon\})$

y f_{AB} transversal a $\{\bar{0}\}$ i.e. $\bar{0}$ sea valor regular de $f_{AB} : (\Omega - \{|x|<\varepsilon\}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$

y por lo tanto $f_{AB}^{-1}\{(\bar{0})\}$ consta de puntos aislados, ----- (a)

Observemos que $\forall \theta \in S^1$: $T_\theta(x) = T_\theta(r, z) = (r, e^{i\theta} z)$

$f_{AB}(T_\theta(x)) = f(T_\theta(x)) + (A \circ g(e^{i\theta} z), B \circ h(e^{i\theta} z))$

$= R_\theta f(x) + (A \circ g(z), B(e^{ik\theta} h(z)))$

$= R_\theta f(x) + (A \circ g(z), e^{ik\theta} B \circ h(z))$

$= R_\theta f_{AB}(x)$ i.e: f_{AB} es (T, R)-equivariante.

Así, si $x \in f_{AB}^{-1}\{\bar{0}\}$, entonces $\forall \theta$: $T_\theta(x) \in f_{AB}^{-1}\{\bar{0}\}$

luego, por (a), la órbita de x constaría de un solo punto y $x = (r, 0)$

pero $0 = f_{AB}(x) = f(x) + (A \circ g(0), B \circ h(0)) = f(x) \overset{\text{hipótesis}}{=} \kappa$

entonces $f_{AB}^{-1}\{\bar{0}\} = \{\bar{0}\}$ y:

grado $(f, \bar{0}, \Omega) =$ grado $(f_{AB}, \bar{0}, \Omega) =$ grado $(f_{AB}, \bar{0}, \{|x|<\varepsilon\}) =$
$=$ grado $(f, \bar{0}, \{|x|<\varepsilon\}) = k^b$ $(f(x) = (r, \ldots r_a, z_{a+1}^k, \ldots z_{a+b}^k)$ en $\{|x|<\varepsilon\})$

y el teorema estaría demostrado en este caso

Para ver que F es transversal a $\{\bar{0}\}$, vamos a demostrar que para todo $(x, A, B) \in F^{-1}(\bar{0})$, la matriz de $DF(x,A,B)$, tiene rango máximo.

Identificando: $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1b} \\ A_{a1} & \cdots & A_{ab} \end{pmatrix} \leftrightarrow (A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{ab}) \in \mathbb{R}^{ab}$

$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1b} \\ \vdots & & \\ B_{b1} & \cdots & B_{bb} \end{pmatrix} \leftrightarrow (B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{bb}) \in \mathbb{C}^{b^2}$

con $f(r_1, \ldots r_a, z_{a+1}, \ldots z_{a+b}) := (f_1(x), \ldots f_{a+b}(x)) \in \mathbb{R}^n$; tenemos:

$$F(r_1, \ldots r_a, z_{a+1}, \ldots z_{a+b}, A_{11}, \ldots A_{ab}, B_{11}, \ldots B_{bb}) =$$

$$= \left(f_1(x) + \sum_{i=1}^{b} A_{1i} |z_{a+i}|^2, \ldots, f_a(x) + \sum_{i=1}^{b} A_{ai} |z_{a+i}|^2, f_{a+1}(x) + \sum_{i=1}^{b} B_{1i} z_{a+i}^k, \ldots f_{a+b}(x) + \sum_{i=1}^{b} B_{bi} z_{a+i}^k \right)$$

y la matriz de $DF(x,A,B)$ expresada en bloques es:

$$\begin{array}{l} a\{ \\ b\{ \end{array}\left(\begin{array}{cccc} Df(x) & & & \\ \underbrace{}_{a} & \underbrace{}_{b} & \underbrace{}_{ab} & \underbrace{}_{b^2} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccc} 0 & A \circ DA(x) & M & \\ 0 & B \circ DA(x) & & \\ \underbrace{}_{a} & \underbrace{}_{b} & \underbrace{}_{ab} & \underbrace{}_{b^2} \end{array} \right) \begin{array}{l} \}a \\ \}b \end{array}$$

Donde:

$$M = \left(\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} |z_{a+1}|^2 \, |z_{a+2}|^2 \cdots |z_{a+b}|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |z_{a+1}|^2 \, |z_{a+2}|^2 \cdots |z_{a+b}|^2 \end{array} & 0 \\ 0 & \begin{array}{ccc} z_{a+1}^k \cdots z_{a+b}^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_{a+1}^k \cdots z_{a+b}^k \end{array} \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{ab} & \underbrace{\qquad\qquad}_{b^2} \end{array} \right) \begin{array}{l} \}a \\ \\ \}b \end{array}$$

Observemos que, si $z=0$, $x=(r,0)$ y $(x,A,B)\in F^{-1}(\bar{0}) \Rightarrow f_{AB}(x)=0 \Rightarrow x=0$ pero $x\in(\Omega-\{|x|<\varepsilon\})$ $\lightning$ $\therefore$ $z\neq 0$ y existe j tal que la coordenada $z_{a+j}\neq 0$, entonces la matriz M tiene rango maximo y por lo tanto $DF(x,A,B)$ tambien.

Así, $\bar{0}$ es valor regular de F.

$\not\!\!\!\! \varphi$

CASO 2.- $\forall i$: $m_i=1$, $k_i=K>0$, f sólo continua:

Aproximemos a f mediante una funcion C^∞ (T,R)-equivariante, esto podemos hacerlo porque $C^\infty(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n-\{0\})$ es denso en $C(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n-\{0\})$ (Hirsch, "dif. Top" teorema 2.4) sea g esa aproximacion, definamos:

$$\tilde{g}(x):=\int_{S^1} R_{-\theta}(g(T_\theta(x))\,d\theta$$

tenemos:

$$|\tilde{g}(x)-f(x)|=\left|\int_{S^1} R_{-\theta}(g-f)(T_\theta(x))\,d\theta\right|\leq\int_{S^1}|(g-f)(T_\theta(x))|\,d\theta$$

y $\tilde{g}$ es una aproximacion (T,R) equivariante.

Ahora, si $B_\delta(0)\subset\Omega$, sea $\eta\in C^\infty(\mathbb{R}^+,I)$ t/q:

$$\eta(t)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\leq t\leq \frac{\delta}{3}=:\varepsilon\\ 0 & \text{si } t\geq\frac{2\delta}{3}\end{cases}$$

entonces: $\tilde{f}(x):=\eta(|x|)(r_1,\dots r_a, z_{a+1}^k,\dots z_{a+b}^k)+(1-\eta(|x|))\,\tilde{g}(x)$

satisface las condiciones del caso 1, es cercana a f en $\partial\Omega$ y:

$$\text{grado}(f,0,\Omega)=\text{grado}(\tilde{f},\bar{0},\Omega)\overset{\text{caso 1}}{=}K^b$$

$\not\!\!\!\! \varphi$

CASO 3: $\forall i$: $m_i = 1$, los $k_i > 0$ pueden ser diferentes.

Definamos: $k := \prod_{i=1}^{b} k_i$

$$g : \mathbb{R}^a \times \mathbb{C}^b \longrightarrow \mathbb{R}^a \times \mathbb{C}^b$$
$$x \longmapsto (r_1, \dots r_a, z_{a+1}^{k/k_1}, \dots z_{a+b}^{k/k_b})$$

$\forall$ U- vecindad de $\bar{0}$:

$$\text{grado}(g, \bar{0}, U) = \frac{k^b}{\prod_{i=1}^{b} k_i} = k^{b-1}$$

Sea $\tilde{f} := g \circ f$.

entonces:

$$\tilde{f}(T_\theta(x)) = g \circ f(r_1, \dots r_a, e^{i\theta} z_{a+1}, \dots, e^{i\theta} z_{a+b})$$
$$= g(f_1(x), \dots, f_a(x), e^{ik_1\theta} f_{a+1}(x), \dots, e^{ik_b\theta} f_{a+b}(x))$$
$$= (f_1(x), \dots f_a(x), (e^{ik_1\theta})^{k/k_1} f_{a+1}^{k/k_1}(x), \dots, (e^{ik_b\theta})^{k/k_b} f_{a+b}^{k/k_b}(x))$$
$$= (f_1(x), \dots f_a(x), e^{ik\theta} f_{a+1}^{k/k_1}(x), \dots e^{ik\theta} f_{a+b}^{k/k_b}(x)) =$$
$$= R_\theta (f_1(x), \dots f_a(x), f_{a+1}^{k/k_1}(x), \dots f_{a+b}^{k/k_b}(x)) = R_\theta\, g \circ f(x) =$$
$$= R_\theta \tilde{f}(x) \quad \text{i.e.: } \tilde{f} \text{ es } (T, R)\text{- equivariante.}$$

y $\tilde{f}(r, 0) = g \circ f(r, 0) = g(r, 0) = (r, 0)$.

$\therefore$ $\tilde{f}$ satisface las condiciones del caso 2 a:

$$k^b = \text{grado}(\tilde{f}, 0, \Omega) = \text{grado}(g, 0, \Omega) \cdot \text{grado}(f, 0, \Omega)$$
$$= k^{b-1}\, \text{grado}(f, 0, \Omega)$$

$$\therefore \ \text{grado}(f, 0, \Omega) = \frac{k^b}{k^{b-1}} = k = \prod_{i=1}^{b} k_i$$

$\blacklozenge$

CASO 4: El caso general.

Si algun m_i ó k_i es < 0, podemos componer la funcion por la conjugacion en la i-esima coordenada para cambiar el signo de: grado$(f,0,\Omega)$.

Definamos:

$$\tilde{\Omega} := \{x \mid (r_1, \dots r_a, z_{a+1}^{m_1}, \dots z_{a+b}^{m_b}) \in \Omega\}$$

$$\tilde{T}_\theta(x) := (r_1, \dots r_a, e^{i\theta} z_{a+1}, \dots, e^{i\theta} z_{a+b})$$

$$g(x) := (r_1, \dots r_a, z_{a+1}^{m_1}, \dots z_{a+b}^{m_b})$$

Entonces, $x \in \tilde{\Omega} \Leftrightarrow g(x) \in \Omega$

si $x \in \tilde{\Omega}$; $g(\tilde{T}_\theta(x)) = g(r_1 \dots r_a, e^{i\theta} z_{a+1}, \dots, e^{i\theta} z_{a+b})$

$= (r_1, \dots r_a, e^{im_1\theta} z_{a+1}^{m_1}, \dots, e^{im_b} z_{a+b}^{m_b}) = T_\theta\, g(x)$

Ω es T_θ invariante, asi:

$x \in \tilde{\Omega} \Rightarrow g(x) \in \Omega \Rightarrow T_\theta\, g(x) \in \Omega \Rightarrow g(\tilde{T}_\theta(x)) \in \Omega \Rightarrow$
$\Rightarrow \tilde{T}_\theta(x) \in \tilde{\Omega}$ i.e: $\tilde{\Omega}$ es $\tilde{T}_\theta$-invariante.

definamos $\tilde{f} := f \circ g$ entonces, $\forall \theta \in S^1$:

$\tilde{f}(\tilde{T}_\theta(x)) = f \circ g(\tilde{T}_\theta(x)) = f(T_\theta g(x)) = R_\theta\, f \circ g(x) =$
$= R_\theta \tilde{f}(x)$ i.e: $\tilde{f}$ es $(\tilde{T}, R)$ equivariante

$\tilde{f}$ satisface las condiciones del caso 3 y:

$\prod_{i=1}^{b} k_i = \text{grado}(\tilde{f}, 0, \tilde{\Omega}) = \text{grado}(f, 0, \Omega) \cdot \text{grado}(g, 0, \tilde{\Omega}) =$
$= \text{grado}(f, 0, \Omega) \prod_{i=1}^{b} m_i$

$\therefore\ \text{grado}(f, 0, \Omega) = \prod_{i=1}^{b} \dfrac{k_i}{m_i}$

$\#$

A.4.10.3.- TEOREMA: Con la notacion anterior:

Sea $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = \rho > 0\}$

$h : S \to \mathbb{R}^j$ con $j < n$ (T,R) equivariante

+ $h(\gamma, 0) = (\gamma, 0)$ entonces h debe anularse en algun punto

DEMOSTRACION:

Supongamos que $Im(h) \subset \mathbb{R}^j - \{0\}$.

con el teorema de extension de Tietze construyamos

$\tilde{h} \in C(B, \mathbb{R}^n)$ (T,R) equivariante

tal que $\tilde{h}(\gamma, 0) = (\gamma, 0)$ $(B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \rho\})$

y: $\tilde{h}|_{\partial B} = h$, $Im\, \tilde{h} \subset \mathbb{R}^j \subset \mathbb{R}^n$ $j < n$.

entonces, por A.4.10.2:

$$grado(\tilde{h}, 0, \Omega) = \prod_{i=1}^{b} \frac{k_i}{m_i} \neq 0$$

y procediendo como en A.4.7, llegamos a una contradiccion

$\natural$

A.5.- ESPACIOS DE SOBOLEV

A.5.1.- DEFINICION:

Trabajaremos con funciones definidas en subconjuntos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a los que exigiremos ciertas condiciones de suavidad en la frontera:

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, se dice que Ω tiene FRONTERA LIPSCHITZ si, localmente, $\partial\Omega$ es la gráfica de una funcion $a: U \to \mathbb{R}$ $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ que satisface la condicion Lipschitz y existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\Omega \supset \{(y_1, \ldots y_{n-1}, y_n) \mid (y_1, \ldots y_{n-1}) \in U,\ a(y_1, \ldots y_{n-1}) - \varepsilon < y_n < a(y_1, \ldots y_{n-1})\}$$

$$\mathbb{R}^n - \bar{\Omega} \supset \{(y_1, \ldots y_{n-1}, y_n) \mid (y_1, \ldots y_{n-1}) \in U,\ a(y_1, \ldots y_{n-1}) < y_n < a(y_1, \ldots y_{n-1}) + \varepsilon\}$$

Si Ω tiene frontera Lipschitz, entonces es posible definir el vector normal a $\partial\Omega$: $\nu(x) \in \mathbb{R}^n$ para casi todo $x \in \partial\Omega$, y si $u: \partial\Omega \to \mathbb{R}$, podemos definir:

$$\int_{\partial\Omega} u(x)\, ds$$

(Ver [10] seccion 9.2 y [27] cap. 28)

En este caso, es válida la formula de Green: $\forall\, v, w \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot v\right)(x)\, dx = -\int_\Omega \left(w \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} (w \cdot v)(x)\, \nu_i(x)\, ds$$

ν_i - i-esima componente del vector normal a $\partial\Omega$. ([27] Teo. 8.7)

A.5.2.- DEFINICION:

Sea $p \geq 1$

$$L_p(\Omega) := \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \}$$

identificando u y v si $\int_\Omega |(u-v)(x)|^p \, dx = 0$

A.5.3.- TEOREMA:

con la norma: $\|u\|_p := \left[\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right]^{1/p}$, C^∞ denso en L_p,

L_p es un espacio de Banach, separable,

si $p > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega) \Rightarrow uv \in L_1(\Omega)$ y:

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \, \|v\|_q$$

(Desigualdad de Hölder)

(Ver [10], 12.7)

A.5.4.- NOTACION y TEOREMA:

Si X y Y son espacios normados: $X \hookrightarrow Y$ significa: $X \subset Y$ y existe $c > 0$ a

$$\forall u \in X: \|u\|_Y \leq c \|u\|_X$$

Entonces, si $1 < r < s < \infty$:

$$L_s(\Omega) \hookrightarrow L_r(\Omega) \hookrightarrow L_1(\Omega)$$

(Ver [10] 12.8)

A.5.5.- DEFINICION: (Espacios de Sobolev)

si $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $\quad \alpha_i \in \mathbb{N}$

$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ $\quad h \in C^{|\alpha|}(\Omega, \mathbb{R})$

$$D^\alpha h := \frac{\partial^{|\alpha|} h}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

Definamos: $\|u\|_{k,p} := \sum_{|\beta| \le k} \|D^\beta u\|_{L_p(\Omega)}$

esta es una norma en $C^k(\bar{\Omega})$ no necesariamente completa, sea $W^{k,p}(\Omega)$ la completacion de $C^k(\Omega)$ con la norma $\|u\|_{k,p}$.

Para $u \in W^{k,p}(\Omega)$, definimos la derivada generalizada $D^\beta u$, como la funcion $u^{(\beta)}$ que satisface:

$$\int_\Omega u^{(\beta)}(x)\, v(x)\, dx = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega u(x)\, D^\beta v(x)\, dx$$

$$\forall\, v \in C_0^k(\Omega) := \{ v \in C^k(\Omega) \mid v/_{\partial\Omega} \equiv 0 \}$$

(Ver [27] cap. 29)

A.5.6- TEOREMA: (Ver [21] pag 15)

$\exists!\ T: W^{1,2}(\Omega) \to L_2(\partial\Omega) := \{ u : \partial\Omega \to \mathbb{R} \mid \int_{\partial\Omega} u^2\, ds < \infty \}$

$\ni \forall\, u \in C^\infty(\Omega) : \ T(u) = u/_{\partial\Omega}$

- Esto nos indica lo que significa tomar el valor en la frontera de $u \in W^{1,2}(\Omega)$-

A.5.7.- TEOREMA: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$

i) $kp < n \Rightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$

$$\forall q \;/\; 1 \leq q \leq \frac{np}{n-kp}$$

ii) $kp = n \Rightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega) \quad \forall r \in [1, \infty)$

iii) $kp > n \Rightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$

(Ver [10] 16.6) (Notación en A.5.4)

A.5.8.- NOTACION y TEOREMA:

X, Y, espacios de Banach, si $X \subset Y$ y $i: X \hookrightarrow Y$ (inclusion) es compacta, escribimos:

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$$

y tenemos, para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ $p \geq 1$

i) $n \geq 1$, $kp < n$, $\frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{k}{n} \Rightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_r(\Omega)$

ii) $n \geq 1$, $kp = 1$, $r \in [1, \infty) \Rightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_r(\Omega)$

iii) $n \geq 1$ $kp > n \Rightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^0(\Omega)$

iv) $k \geq 2 \Rightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega)$

(Ver [10] 26.24)

(Observemos que $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y \Rightarrow X \hookrightarrow Y$ y A.5.7 es un caso particular de A.5.8)

A.5.9. TEOREMA:
(Ver [27] cap. 30 y [21] pág 18-21)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto con frontera Lipschitz existen constantes k_1 y $k_2 > 0$ dependiendo solo de Ω, tales que:

$$\forall u \in W^{1,2}(\Omega) : \|u\|_{1,2}^2 \leq k_1 \left[\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx + \int_{\partial\Omega} u^2(s)\, ds \right]$$

(desigualdad de Friedrichs)

$$\forall u \in W^{k,2}(\Omega) : \|u\|_{k,2}^2 \leq k_2 \left[\sum_{|i|=k} \int_\Omega (D^i u)^2 dx + \sum_{|i|<k} \left(\int_\Omega D^i u\, dx \right)^2 \right]$$

(desigualdad de Poincaré)

■

A.5.10.- DEFINICION:

En vista de A.5.8 (iv), el operador T de A.5.6 está definido para todo $W^{k,2}(\Omega)$, y definimos:

$$W_0^{k,2}(\Omega) := \{ u \in W^{k,2}(\Omega) \mid T(u) \equiv 0 \}$$

■

BIBLIOGRAFIA

[1]. A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz "Dual variational methods in critical point theory and applications". Journal of functional anagisis Vol 14 (1973) pp. 349-381

[2] H. Berestycki, J. M. Lasry, G. Mancini, B. Ruf. "Existence of multiple periodic orbits on star shaped Hamiltonian surfaces" (1983) preedicion

[3] M. Berger "Nonlinearity and functional analysis" Academic Press 1977

[4] Berger- Berger "Perspectives in nonlinearity" W. A. Benjamin Inc. 1968

[5] D. C. Clark " A variant of the Lusternik - Schnirelman theory" Indiana Univ. Journal Vol. 22 pag 67 (1972)

[6] J. Dieudonne" Foundations of modern analysis" Academic Press

[7] A. Dold, Carlos Prieto
Notas del curso de Topologia diferencial I
Instituto de matematicas UNAM

[8] Ekeland-Lasry "On the number of periodic trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surface" Ann. Math. Vol. 112 (1980) pp. 283-319

[9] E. R. Fadell, P. H. Rabinowitz "Generalized cohomological index theories for Lie group actions with an application to bifurcation questions for Hamiltonian Systems" Inv. Math. Vol. 45 (1978) pp. 139-174

[10] S. Fučik, A. Kufner "Nonlinear differential equations" Elsevier Amsterdam 1980

[11] J. A. Gomez Ortega "Teoria de puntos criticos de Lusternik - Schnirelman" Tesis UNAM. Abril 1978.

[12] V. Guillemin, A. Pollack "Differential topology" Prentice Hall 1974

[13] M. A. Krasnoselski "Topological methods in the theory of nonlinear integral equations" Macmillan Co. 1964

[14] E. Kreyszig "Introductory functional analysis with applications" Wiley 1978

[15] S. Lang "Analysis II" Addison Wesley

[16] Loomis-Sternberg "Advanced calculus" Addison Wesley

[17] G. W. Mackey "Infinite dimensional group representations" Bull. A.M.S. Vol. 69 pag 628

[18] G. W. Mackey "Unitary group representations in physics, probability and number theory" Benjamin Cummings 1978

[19] J. Marsden, A. Tromba "Vector calculus" Freeman and Co. 1976

[20] M. A. Naimark, A. I. Štern "Theory of group representations" Springer Verlag 1982

[21] J. Nečas "Les méthodes directes en theorie des équations elliptiques" Prague Academia 1967

[22] W. M. Ni "Some minimax principles and their applications in nonlinear elliptic equations" Journal d'Analyse Math. V. 37 (1980) pp. 248-275

[23] L. Nirenberg "Comments on non linear problems (1983) pre edicion

[24] R. Palais "Lectures on the differential topology of infinite dimensional manifolds" Mathematics 322 Brandeis Univ. 1964-1965

[25] R. Palais "Critical point theory and the minimax principle" Proc. of Symp. on pure math. Vol XV. A.M.S. 1970 secc. 3 pag 205

[26] P.H. Rabinowitz "The mountain pass theorem, theme and variations" Lecture notes in math. Vol 957 Springer Verlag p.p. 237-271

[27] K. Rektorys "Variational methods in mathematics, science and engineering" D. Reidel Publishing Co. 1980.

[28] J.T. Schwartz "Nonlinear functional analysis" Lecture notes Courant Inst. of Math. Sc. N.Y. Univ. 1965.

[29] V. Benci "A geometrical index for the group S^1 and some applications to the study of periodic solutions of ordinary differential equations" Comm. on Pure an App Math. Vol XXXIV pp. 393-432 (1981)