U. N. A. M.

FACULTAD DE CIENCIAS

" FOLIACIONES CON HOJAS MINIMAS "

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

JESUS RUPERTO MUCIÑO RAYMUNDO

MEXICO, D. F. 1984

I N D I C E

Pág.

INSTRODUCCION 1

NOTACION 4

CAPITULO I

SUBVARIEDADES MINIMAS

1.- El campo de vectores de curvatura media. 5

2.- La fórmula de la primera variación. 6

3.- Ejemplos. 11

CAPITULO II

FOLIACIONES CON HOJAS MINIMAS

1.- Foliaciones. 14

2.- El criterio de Rummler - Sullivan. 18

CAPITULO III

CRITERIOS QUE DEPENDEN DE LA ESTRUCTURA TRANSVERSAL DE LA FOLIACION

1.- El seudogrupo de holonomia. 21

2.- Integración sobre las hojas. 26

3.- Los teoremas de Haefliger. 30

4.- Ejemplos de foliaciones que no son de hojas mínimas. 33

CAPITULO IV

FOLIACIONES HOLOMORFAS EN VARIEDADES DE KÄHLER

1.- Propiedades elementales de las variedades de Kähler 34

2.- Aplicación a foliaciones con hojas mínimas. 39

REFERENCIAS 41

I N T R O D U C C I O N

En años recientes el estudio de las foliaciones ha sido uno de los campos más activos de investigación en Matemáticas, el tema de este trabajo es estudiar un problema de foliaciones en geometría diferencial.

Para describir el problema recordemos que : una foliación de una variedad es esencialmente una descomposición de esta en subvariedades de la misma dimensión y disjuntas entre si llamadas las hojas de la foliación, por ejemplo $\mathbb{R}^n$ puede descomponerse en hiperplanos paralelos entre sí, por otra parte una subvariedad L de una variedad riemanniana es mínima si dado un dominio U de L suficientemente pequeño y con frontera entonces el volumen de U es menor o igual que el volumen de cualquier otra subvariedad que tenga la misma frontera es decir L minimiza localmente el volumen, por ejemplo las geodésicas de una variedad riemanniana son subvariedades mínimas.

El problema central del trabajo es el siguiente : ¿ Dada una foliación de una variedad M existe una métrica riemanniana para M tal que todas las hojas de la foliación sean subvariedades mínimas ? si tal métrica existe diremos que la foliación es de hojas mínimas.

El principal objetivo de este trabajo es exponer los resultados de H. Rummler, D. Sullivan y A. Haefliger sobre el problema.

En el primer capítulo se desarrolla el tema de subvariedades mínimas para ello en la sección uno se da una caracterización técnica de subvariedades mínimas en términos del vector de curvatura media y en la sección dos se muestra la equivalencia de esta con la caracterización de las subvariedades mínimas como aquellas que minimizan el volumen localmente, termina el capítulo con ejemplos de subvariedades mínimas en la sección tres.

El segundo capítulo empieza con la definición de foliación desarrollando luego ejemplos de foliaciones, en la sección dos se demuestra el teorema de Rummler-Sullivan que afirma que una métrica sobre las hojas de la foliación puede extenderse a una métrica en la variedad que hace que las hojas de la foliación sean subvariedades mínimas si y solo si la forma de volumen sobre las hojas es tal que su derivada se anula al valuarla sobre cualesquiera n vectores tangentes a las hojas de la foliación, donde n es la dimensión de las hojas, las referencias para este teorema son Rummler (1) y Sullivan (1).

En el tercer capítulo se exponen los resultados de Haefliger (1) para variedades foliadas compactas, para ello en la sección uno se desarrollan las ideas de el seudogrupo de holonomia que es una de las estructuras de mayor utilidad en el estudio de las foliaciones, la idea fundamental del capítulo se presenta en la sección dos y es la construcción de una función que nos relaciona las formas sobre la variedad con las formas en variedades transversales a las hojas que son invariantes bajo holonomia es decir bajo translaciones a lo largo de las hojas, utilizando esta función se caracterizan en la sección tres aquellas formas sobre la variedad que pueden ser formas de volumen para métricas que hagan que las hojas de la foliación sean mínimas y con esto es posible demostrar que la existencia de tales métricas depende solamente de la holonomia de la foliación. Finalmente en la sección cuatro como una aplicación de estos resultados se construyen ejemplos explícitos de foliaciones para las cuales no existen métricas de Riemann que hagan las hojas mínimas, la foliación de Reeb es un ejemplo explícito de ello.

El cuarto capítulo esta dedicado a demostrar que en el caso de foliaciones holomorfas en variedades de Kähler las hojas siempre son subvariedades mínimas, para esto en la sección uno se contruyen las variedades de Kähler como variedades riemannianas reales con ciertas propiedades respecto a la conexión, en la sección dos se prueba el siguiente resultado clásico de geometría diferencial; toda subvarie dad compleja de una variedad Kähler es subvariedad mínima ,de aquí se sigue inmediatamente la aplicación al problema.

Finalmente quisiera agradecer a Xavier Gómez-Mont Avalos por la ayuda y orientación que me brindo a lo largo de la realización de este trabajo.

Jesús Muciño .

N O T A C I O N

Sea M^n una variedad, real, diferenciable (para nosotros esto significara de clase C^∞), riemanniana, donde el índice superior n indica la dimensión de M. Denotamos por :

TM	el haz tangente a M.
T_pM	el plano tangente a M en el punto p.
$X(M)$	los campos vectoriales en M de clase C^∞ .
X_p	el valor del campo $X \in X(M)$ en el punto p.
$A^r(M)$	las r-formas diferenciales en M de clase C^∞.
$A^o(M)$	las funciones real valuadas en M de clase C^∞ .
$A^r_c(M)$	las r-formas diferenciales en M con soporte compacto y de clase C^∞ .
Xf	la derivada de Lie de la función $f \in A^o(M)$ con respecto al campo $X \in X(M)$.
$[\ ,\ ]$	el parentésis de Lie.
$\langle\ ,\ \rangle$	la métrica de Riemann para M .
∇	la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica .

C A P I T U L O I

SUBVARIEDADES MINIMAS

1.- El campo de vectores de curvatura media.

En esta sección caracterizaremos las subvariedades mínimas como aquellas cuyo campo de vectores de curvatura media es nulo.

Sea M^m una variedad diferenciable, riemanniana, ∇ su conexión. Sea L^n una subvariedad diferenciable de M. Utilizando la métrica riemanniana de M tenemos que $T_pM = T_pL \oplus (T_pL)^{\perp}$ para $p \in L$ y donde $(T_pL)^{\perp}$ es el subespacio normal a L. Sea B la función

$$B : TL \times TL \longrightarrow (TL)$$
$$B(X,Y) = (\nabla_X Y)^{\perp} \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(L)$$

donde $(\quad)^{\perp} : TL \oplus (TL)^{\perp} \longrightarrow (TL)^{\perp}$ es la proyección sobre el haz normal a L.

<u>I.1 Lema.</u> B es simétrica y bilineal.

Demostración. Utilizando que ∇ es simétrica tenemos que;

$$B(X,Y) = (\nabla_X Y)^{\perp} = (\nabla_Y X + [X,Y])^{\perp} = (\nabla_Y X)^{\perp} = B(Y,X)$$

de donde B es simétrica. Utilizando que ∇ es lineal tenemos que;

$$B(fX+gY,Z) = (\nabla_{fX+gY} Z)^{\perp} = (f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z)^{\perp}$$
$$= fB(X,Z) + gB(Y,Z) \qquad f, g \in A^0(L)$$

de donde B es lineal en la primera variable. Análogamente se puede mostrar que B es aditiva en la segunda variable. Para mostrar que es homogénea en la segunda variable calculamos;

$$B(X,fY) = (\nabla_X fY)^{\perp} = (f\nabla_X Y + (Xf)Y)^{\perp} = f(\nabla_X Y)^{\perp} = fB(X,Y) \ . \qquad \text{Q. E. D.}$$

Observemos que $B(X,Y)_p$ depende solamente de X_p y Y_p , esto sigue del hecho que B es simétrica y de las propiedades de la conexión.

I.2 Definición. Sean $E_1,\ldots,E_n \in X(L)$ campos locales que forman una base ortonormal para T_pL. Definimos el vector de curvatura media de L como

$$K_p = \sum B(E_i, E_i) \qquad i=1,\ldots,n$$

y por K el campo de vectores de curvatura media de L.

Para mostrar que K_p no depende de la elección de los campos E_i se utiliza que B es simétrica, bilineal y se calcula en T_pL, de hecho K es una sección diferenciable de $(TL)^{\perp}$.

I.3 Definición. L subvariedad de M se dice que es mínima si K=0 .

Justificaremos la razón de este nombre en la siguiente sección.

2.- La fórmula de la primera variación.

Vamos a dar una interpretación del campo de vectores de curvatura media de la subvariedad L en terminos del comportamiento del volumen de L bajo deformaciones de L.

Sea M^m una variedad diferenciable, riemanniana, L^n una subvariedad de M determinada por la inmersión $h : L \longrightarrow M$, L compacta, orientada y con frontera que denotamos por Fr(L).

I.4 Definición. Una variación de L en M es una función $f : I \times L \longrightarrow M$ con $I=(-1,1)$,tal que es diferenciable y satisface:

a) Cada función $f_t=f(t,p): L \longrightarrow M$ con t fijo, es una inmersión.

b) $f_0=h$.

c) $f(t,p)=h(p)$ si $p \in Fr(L)$.

Sea $\partial/\partial t$ el campo vectorial tangente a $I \times L$ en la dirección del factor I. Sea $E = f_*(\partial/\partial t)\big|_{t=0}$, E puede interpretarse como una sección de $TL \oplus (TL)^{\perp}$.

Sea $V : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ la función que a cada $t \in I$ le asocia el volumen de L determinado por la inmersión f_t esto es ;

$$V(t) = \text{volumen } f_t(L) = \int_L dV_t$$

donde dV_t es la forma de volumen para la métrica inducida.

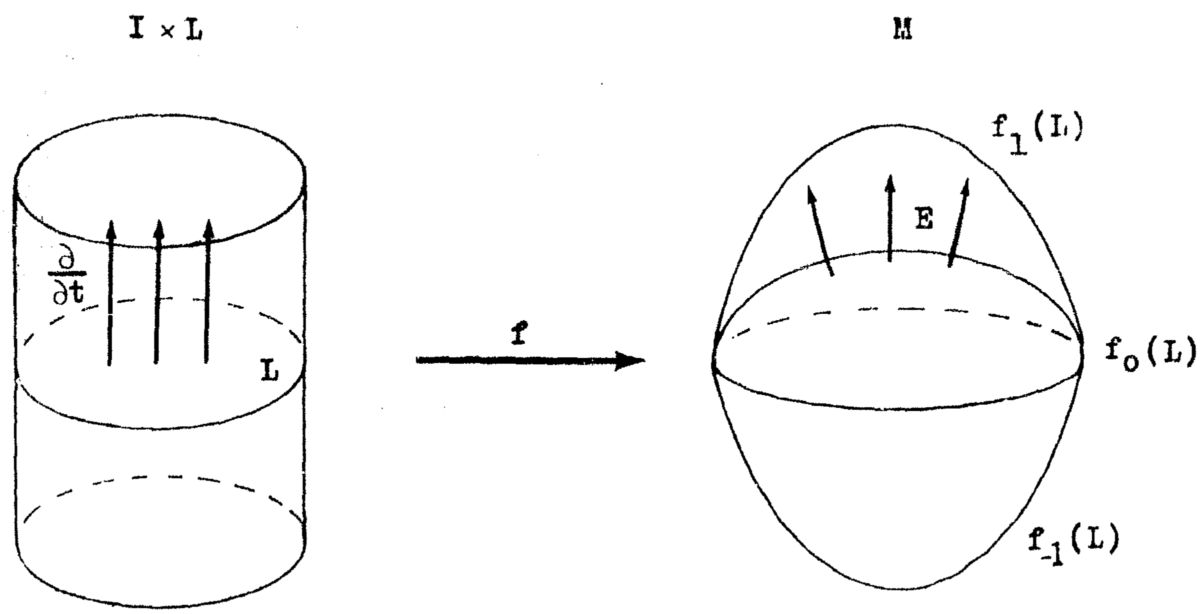

Fig. 1 Una variación de L en M.

<u>I.5 Teorema.</u> Sea K el campo de vectores de curvatura media de L inducido por la inmersión f_0 entonces;

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=0} = -\int_L \langle K, E\rangle \, dV_0$$

este resultado es conocido como la fórmula de la primera variación.

Demostración. Observemos que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\int_L dV_t = \int_L \frac{d}{dt}\, dV_t$$

de acuerdo con esto vamos a calcular que

$$(1) \qquad \left.\frac{d}{dt}\, dV_t\right|_{t=0} = -\langle K, E\rangle \, dV_0 + dw$$

donde $w \in A^{n-1}(L)$ tal que $w/Fr(L) = 0$ .Para construir la forma w consideremos $v \in A^1(L)$ definida como $v(X) = \langle E, X\rangle$ para $X \in \mathfrak{X}(L)$,entonces $w = *v$ donde $* : A^r(L) \longrightarrow A^{n-r}(L)$ es el operador estrella de dualidad observemos que como $E/Fr(L)=0$ entonces $w/Fr(L)=0$.

Vamos a probar (1) para esto sean $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(L)$ campos que localmente satisfacen que:

i) Son ortonormales con la métrica inducida en L por f_0 .

ii) $(\bar{\nabla}_{E_i} E_j)_p \cong (\nabla_{f_{0*}E_i} f_{0*} E_j)^T_{f(p)} = 0$ para todo $p \in L$ y $i, j = 1, \ldots, n$

donde $(\ )^T : TL \oplus (TL)^{\perp} \longrightarrow TL$ es la proyección sobre el haz tangente a L, ∇ es la conexión de M y $\bar{\nabla}$ es la conexión inducida en L.

La condición ii) puede obtenerse mediante el transporte paralelo de una base ortonormal para T_pL a lo largo de las geodésicas de L que pasan por p.

Sean $w_1,\ldots,w_n \in A^1(L)$ formas que son base dual de los campos E_i, entonces la métrica inducida en L por f_t puede ser escrita como;

$$ds_t^2 = \sum g_{ij}(t)\; w_i \otimes w_j \qquad\qquad i,j=1,\ldots,n$$

donde $\quad g_{ij}(t) = \langle f_{t*}E_i, f_{t*}E_j \rangle$

y el elemento de volumen correspondiente es,

$$dV_t = \sqrt{g(t)}\;\; w_1 \wedge \ldots \wedge w_n \;=\; \sqrt{g(t)}\;\; dV_o$$

donde $\quad g(t) = \text{determinante } (g_{ij}(t))$

ahora derivando y utilizando la condición i) obtenemos

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\, dV_t \,\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\sqrt{g(t)}\,\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\frac{dg}{dt}(0)\; dV_0 \qquad .$$

Necesitamos ahora el siguiente lema.

<u>I.6 Lema.</u> Sea $A(t)=(a_{ij}(t))$ con $t \in (-1,1)$, una familia de matrices reales que dependen de t en forma diferenciable, con $i,j=1,\ldots,n$ y tal que $A(0)=Id.$ entonces ;

$$\frac{d}{dt}\det(A(t))\Big|_{t=0} = \text{traza}\left(\frac{dA}{dt}(0)\right) \qquad .$$

Demostración. Cada A(t) puede interpretarse como una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ con respecto a la base canonica $e_1,\ldots,e_n$ .Sea W una n-forma alternante en $\mathbb{R}^n$ tal que $W(e_1,\ldots,e_n)=1$ entonces ;

$$\det(A(t)) = W(A(t)e_1,\ldots,A(t)e_n)$$

ahora derivando y evaluando en t=0 ,con $r=1,\ldots,n$ obtenemos

$$\frac{d}{dt}\det(A(t))\Big|_{t=0} = \sum_r W(A(t)e_1,\ldots,\frac{dA}{dt}(t)e_r,\ldots,A(t)e_n)\Big|_{t=0}$$

$$= \sum_r W(e_1,\dots,\frac{dA}{dt}(0)e_r,\dots,e_n)$$

$$= \sum_r \frac{da_{rr}}{dt}(0) = \text{traza}\left(\frac{dA}{dt}(0)\right) \qquad \textbf{Q. E. D.}$$

Aplicando este lema a la ecuación (2) obtenemos que

(3) $$\frac{d}{dt}\, dV\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\sum_r \frac{dg_{rr}}{dt}(0)\, dV_0 \qquad r=1,\dots,n\ .$$

Extendamos ahora $E_1,\dots,E_n$ sobre $I\times L$ de la manera natural transladando a lo largo del factor I entonces;

iii) $\left[\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ E_r\right]=0$ para $r=1,\dots,n$.

Sean $\overline{E}_r = f_* E_r$ y $\overline{E} = f_*(\partial/\partial t)$,podemos ahora escribir

$$g_{rr}(t) = \langle \overline{E}_r, \overline{E}_r\rangle \qquad ,$$

derivando y utilizando iii)

$$\frac{dg_{rr}}{dt}(t) = \overline{E}\langle\overline{E}_r,\overline{E}_r\rangle = 2\langle \nabla_{\overline{E}}\overline{E}_r,\overline{E}_r\rangle$$

$$= 2\langle \nabla_{\overline{E}_r}\overline{E},\overline{E}_r\rangle$$

$$= 2(\ \overline{E}_r\langle\overline{E},\overline{E}_r\rangle - \langle\overline{E},\nabla_{\overline{E}_r}\overline{E}_r\rangle\ ) \qquad ,$$

sumando sobre r, aplicando ii) y valuando en t=0 obtenemos

(4) $$\sum_r \frac{1}{2}\ \frac{dg_{rr}}{dt}(0) = -\langle K,E\rangle + \sum_r E_r\langle E,E_r\rangle \qquad .$$

Mostramos ahora que

(5) $$dw(E_1,\dots,E_n) = d(*v)(E_1,\dots,E_n) = \sum_r E_r\langle E,E_r\rangle \qquad .$$

Por definición $v = \sum_r \langle E,E_r\rangle w_r$,ahora aplicando el operador $*$

$$*v = \sum_r (-1)^{r+1}\langle E,E_r\rangle w_1\wedge\dots\wedge\widehat{w}_r\wedge\dots\wedge w_n$$

donde $\widehat{w}_r$ significa que ese termino se omite.Además tenemos que

$$[E_i,E_j] = \overline{\nabla}_{E_i}E_j - \overline{\nabla}_{E_j}E_i = 0 \qquad \text{por ii)}$$

que al substituirlo junto con $*v$ en

$$dw(E_1,\ldots,E_n) = \sum_r (-1)^{r+1} E_r w(E_1,\ldots,\hat{E}_r,\ldots,E_n) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} w([E_i,E_j],E_1,\ldots,\hat{E}_i,\ldots,\hat{E}_j,\ldots,E_n)$$

completa el calculo de (5).

Substituyendo (5) en (4) y (4) en (3) obtenemos (1). Podemos ahora integrar (1) y utilizar el teorema de Stokes para obtener;

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=0} = \int_L (-\langle K,E\rangle dV_0 + dw) = \int_L -\langle K,E\rangle dV_0 + \int_L dw = -\int_L \langle K,E\rangle dV_0 \qquad ,$$

que es lo que se queria mostrar. **Q. E. D.**

Si nos restringimos a variaciones normales,esto es funciones de la forma $f : I \times L \longrightarrow M$ tal que $E = f_*(\partial/\partial t)\big|_{t=0}$ es un campo de vectores normales a L sucede que $w=0$ y el teorema I.5 sigue siendo válido sin la condición en la frontera de L ,inciso c) de la definición I.4 .

I.7 Teorema. Una subvariedad L^n de M^m (L no necesariamente compacta con frontera), es mínima si y solo si L es un punto crítico de la función volumen V(t) para toda variación normal de L con soporte compacto.

Demostración. Sea U un subconjunto de L compacto orientable y con frontera,de hecho U es una variedad de dimensión n. Sea $f: I \times U \longrightarrow M$ una variación normal de U con V(t) su función de volumen asociada.

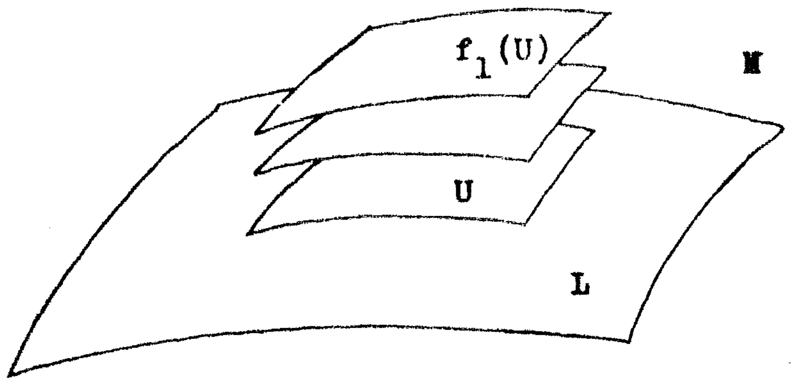

Fig. 2 Una variación normal con soporte compacto.

Supongamos primeramente que L es mínima, por la observación anterior podemos aplicar la fórmula de la primera variación obteniendo (1)

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=0} = -\int_U \langle K,E\rangle \, dV_0 = 0$$

ya que K=0 por ser L mínima, de donde L es localmente un punto crítico de la función volumen.

Para demostrar el inverso procedemos por contradicción. Supongamos que (1) se cumple y sin embargo K es distinto de cero, eligiendo la variación normal f de tal forma que $E_p = K_p$ para todo $p \in U$ tenemos que;

$$\frac{dV}{dt}\quad t=0 = -\int_U \langle K,K\rangle \quad dV_0 < 0$$

que es una contradicción con (1), de donde L es mínima. Q. E. D.

Para una mayor información sobre subvariedades mínimas puede consultarse Lawson (1), (2) ó Spivak (1) Vol. IV.

3.- Ejemplos.

Vamos ahora a construir un tipo importante de subvariedades mínimas y dar algunos ejemplos que utilizaremos posteriormente.

<u>I.8 Definición.</u> L es subvariedad de M una variedad riemanniana se dice que es totalmente geodésica si B es idén ticamente cero.

Claramente toda subvariedad totalmente geodésica es subvariedad mínima, sin embargo el inverso es solo cierto en el caso de que la dimensión de L sea uno, ya que las subvariedades mínimas de M con dimensión uno son precisamente las geodésicas de M, ver más adelante ejemplo I.12 . El siguiente lema nos da otra caracterización de subvariedades totalmente geodésicas.

<u>I.9 Lema.</u> L es subvariedad totalmente geodésica de M si y solo si toda geodésica de L lo es también de M.

Demostración. Sea $\gamma:(-1,1) \longrightarrow L$ geodésica de L, $X \in X(M)$ un campo que extiende localmente al campo de vectores tangentes a la geodésica, observemos que

$$B(X,X)=(\nabla_X X)^{\perp} = \nabla_X X-\overline{\nabla}_X X$$

donde ∇ es la conexión de M y $\overline{\nabla}$ la conexión inducida en L. Utilizando esta expresión de B tenemos que si L es subvariedad totalmente geodésica entonces $\nabla_X X=\overline{\nabla}_X X$ de donde si γ es geodésica de L también lo es de M. Inversamente si toda geodésica de L lo es de M tenemos que $\nabla_X X=0$ y $\overline{\nabla}_X X=0$ de donde $B=0$ y L es totalmente geodésica.

<u>I.10 Ejemplo.</u> En $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual las subvariedades totalmente geodésicas son los k-planos.

<u>I.11 Ejemplo.</u> El catenoide que se obtiene como superficie de revolución de la gráfica $y=\cosh z$ es superficie mínima con la métrica que le induce $\mathbb{R}^3$ sin embargo no es totalmente geodésica pues sus geodésicas no son rectas, esto es no geodésicas de $\mathbb{R}^3$.

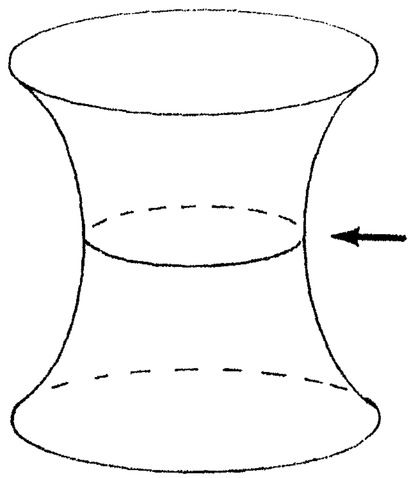

Fig. 3 Una geodésica en el catenoide.

<u>I.12 Ejemplo.</u> El disco de Poncairé. Sea $D^n=\{p\in\mathbb{R}^n / \|p\|<1\}$ con la estructura diferenciable que hereda de $\mathbb{R}^n$ y provisto con la métrica hiperbólica usual

$$ds^2 = \sum_r \frac{4}{(1+\|p\|^2)^2} \quad dx^r \otimes dx^r$$

con $r=1,\ldots,n$. D^n con esta métrica se conoce como el disco de Poncairé. Las subvariedades totalmente geodésicas de D^n son los k-planos por el origen y las k-esferas que son ortogonales a S^{n-1}, en ge neral nos referiremos a estas subvariedades como los k-planos hiperbólicos de D^n ya que el disco de Poncairé es un modelo de geometria hiperbólica, para mas información puede consultarse Verjovsky (1).

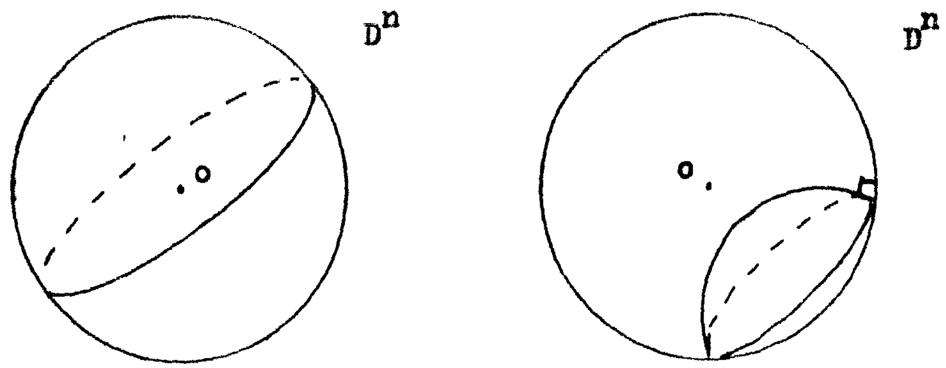

Fig. 4 Subvariedades totalmente geodésicas en D^n.

C A P I T U L O   I I

FOLIACIONES CON HOJAS MINIMAS

1.- Foliaciones.

Empezaremos esta sección definiendo el concepto de foliación y dando ejemplos, después estudiaremos algunos conceptos que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Para una exposición más completa de foliaciones puede consultarse Camacho (1) ó Lawson (3).

<u>II.1 Definición.</u> Sea M^m una variedad diferenciable. Una foliación F de M, es una descomposición de M en subvariedades L_p $p \in M$, conexas, llamadas hojas de la foliación, tal que existe un atlas

$$(U_i, f_i) \text{ con } f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$$

y tal que cada componente $L_p \cap U_i$ es la imagen inversa bajo f_i de conjuntos de la forma $V_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \ / \ y \text{ es fijo}\}$, n y r son respectivamente la dimensión y la codimensión de F.

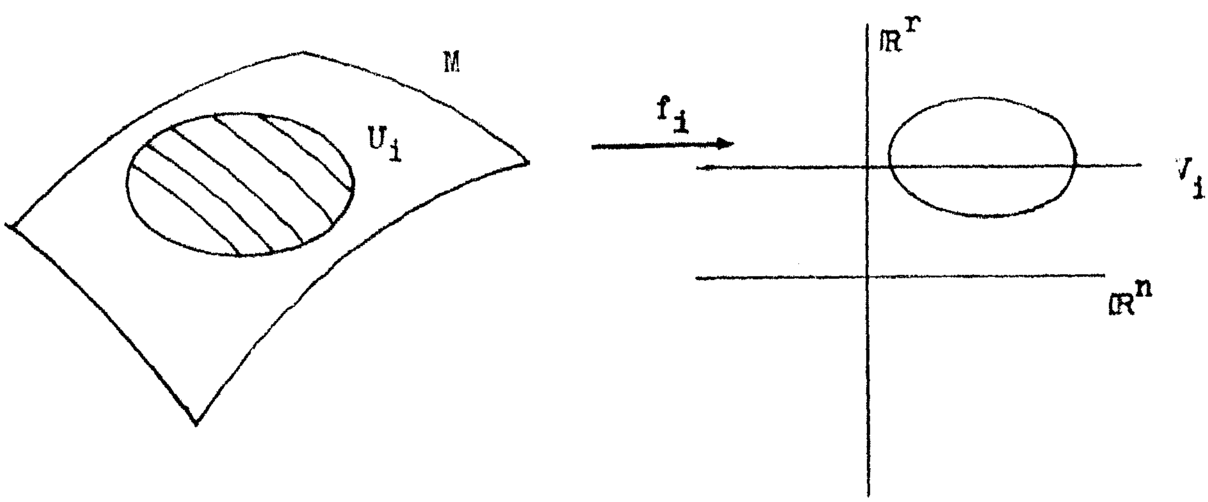

Fig. 5 Foliación.

II.2 Ejemplo. Sea F la foliación de $\mathbb{R}^m$ donde cada hoja es un n-plano y todos ellos son paralelos entre sí.

II.3 Ejemplo. Sea D^m el disco de Poncairé ,consideremos Q un r-plano por el origen ,utilizando la métrica hiperbólica podemos considerar los n-planos hiperbólicos que son ortogonales a Q ,estos determinan las hojas de una foliación para D^m.

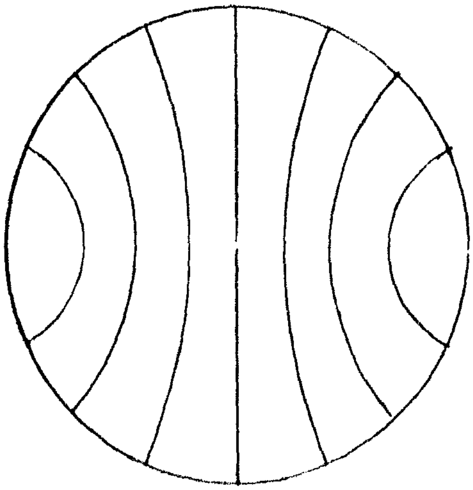

Fig. 6 Foliación para D^m .

II.4 Ejemplo. Sea D^2 el disco de Poncairé de dimensión dos ,consideremos el conciente D^2/Γ ,donde Γ es un subgrupo discreto de las isométrias de D^2 ,entonces D^2/Γ es una superficie compacta, orientable de género mayor o igual a dos y una foliación como en el ejemplo anterior da origen a una foliación para D^2/Γ ,estas son las foliaciones de Anosov.

II.5 Ejemplo. Foliaciones definidas por formas diferenciales. Sea M^m una variedad diferenciable, $A^*(M)$ las formas diferenciales en M de clase C^∞ con la estructura de anillo dada por la suma y el producto exterior $\wedge$. Sea Δ una n-distribución en M ,esto es en cada T_pM se elige un subespacio vectorial de dimensión n tal que la colección de subespacios esta generada localmente por campos $X_1,\ldots,X_n \in X(M)$ .Definimos $I(\Delta)$ como el conjunto de todas las formas $w \in A^s(M)$ con la propiedad de que

$$w(X_1,\ldots,X_s) = 0 \quad \text{si} \quad X_1,\ldots,X_s \in \Delta$$

se muestra facilmente que $I(\Delta)$ es un ideal de $A^*(M)$.

II.6 Teorema. Frobenius . Sea Δ una n-distribución en M .Existe una foliación de M con hojas de dimensión n tal que los planos tangentes a las hojas de la foliación coinciden con Δ si y solo si

$$d\,(I(\Delta)) \subset I(\Delta) \qquad ,$$

donde d es la derivada exterior para formas. Q. E. D.

No daremos aqui la demostración del teorema para esto puede consultarse Spivak (1) Vol. I ó Camacho (I) .Utilizaremos este teorema para construir algunos ejemplos clásicos.

II.7 Ejemplo. Sea $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ el toro ,consideremos el ideal generado por la forma

$$w = a\, dx^1 + b\, dx^2$$

como $dw = 0$ entonces w da origen a una foliación para el toro donde las hojas estan determinadas por las rectas de pendiente a/b en $\mathbb{R}^2$, observemos que si a/b es racional las hojas son cerradas en T y si es irracional las hojas son densas en T.

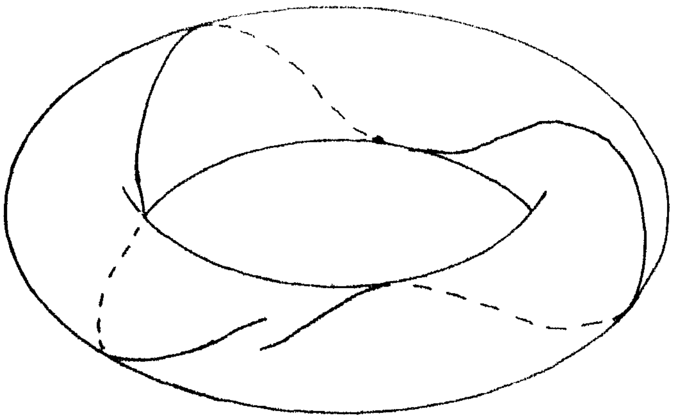

Fig. 7 Una hoja densa en T.

II.8 Ejemplo. Sea el toro solido $M = B^2 \times S^1$,donde $B^2 = \{\, p \in \mathbb{R}^2 / \|p\| \leq 1 \}$ M con coordenadas cilindricas (t,θ,z) y sea $g:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $0 < g(t) < 1$ para $t \in (0,1)$ y que se extiende de manera diferenciable a $h(t)=0$ para t menor o igual a cero y como $h(t)=1$ para t mayor o igual a uno, entonces la forma

$$w = g(t)\, dt + (1-g(t))\, dz$$

satisface que $d(I(w)) \subset I(w)$ ya que $dw = u \wedge w$ para cierta forma u y de acuerdo al teorema de Frobenius w da origen a una foliación para el toro sólido llamada la foliación de Reeb .

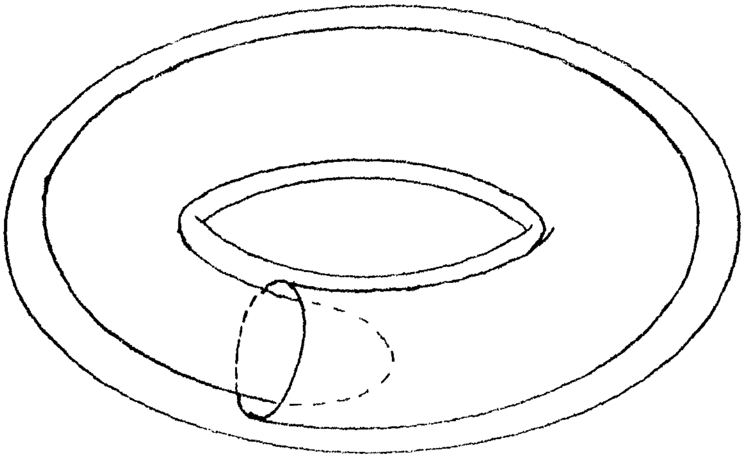

Fig. 8 La foliación de Reeb.

Observemos que en la foliación de Reeb la única hoja compacta es la frontera del toro sólido. Además considerando dos copias del toro sólido e identificando sus fronteras se obtiene una esfera S^3, de donde la foliación de Reeb da origen a una foliación para S^3. En general se dice que una foliación contiene una componente de Reeb si posee un toro sólido con ese tipo de foliación.

Finalizamos la sección con una definición que nos sera muy util para el estudio de nuestro problema.

<u>II.9 Definición.</u> Sea F una foliación de M^m con dimensión n y codimensión r .Decimos que $w \in A^{n+s}(M)$, $1 \leq s \leq r$,es F-trivial si

$$w(X_1, \ldots, X_{n+s}) = 0$$

cada vez que los primeros n campos X_i sean tangentes a las hojas de la foliación. Decimos que w es F-cerrada si dw es F-trivial.

2.- El criterio de Rummler - Sullivan .

Empezaremos por enunciar el problema central de este trabajo.

III.10 Definición. Una foliación F de M se dice con hojas mínimas si existe una métrica riemanniana para M tal que todas las hojas de F sean subvariedades mínimas.

El problema del que nos ocuparemos sera determinar cuando una foliación tiene hojas mínimas.

Los siguientes son ejemplos de foliaciones con hojas mínimas: naturalmente la foliación de R^m por planos paralelos ,la foliación de D^m por planos hiperbólicos,análogamente las foliaciones del toro y de Anosov pueden ser vistas como foliaciones por geodésicas. Ejemplos de foliaciones que no son de hojas mínimas no son tal faciles de justificar en particular mas adelante en el capitulo III mostraremos que la foliación de Reeb es de este tipo.

Observemos que si F foliación de M es tal que con una sola carta puede cubrirse a M ,esto es

$$f : M \longrightarrow R^n \times R^r$$

determina la foliación, entonces asignando a M la métrica plana

$$\langle\ ,\ \rangle = \sum dx^i \otimes dx^i \qquad\qquad i=1,\ldots,n+r$$

tenemos que las hojas son subvariedades mínimas de donde el problema siempre tiene solución localmente.

Enunciamos ahora un primer criterio para determinar si una foliación es de hojas mínimas ,la demostración se halla en Rummler (1) y Sullivan (1), Este teorema es una generalización de un resultado de Wadsley (1) para el caso en que la dimensión de las hojas es 1.

III.11 Teorema. Rummler - Sullivan. Sea F una foliación de M con dimensión n y codimensión r ,sea ds_0^2 una métrica riemanniana a lo largo de las hojas de F , w_0 su forma de volumen asociada determinada por una orientación fija. Existe una métrica riemanniana ds^2 para M que extiende a ds_0^2 haciendo que las hojas de F sean subvariedades mínimas si y solo si w_0 es la restricción sobre las hojas de una forma $w \in A^n(M)$ que es F-cerrada.

Demostración. Supongamos que ds^2 extiende a ds_0^2 y hace que las hojas de F sean subvariedades mínimas. Vamos a construir la forma w ,sean $E_1,\dots,E_n \in X(M)$ campos locales que forman una base ortonormal, positivamente orientada para T_pF ,donde F es como variedad la unión disjunta de las hojas, definimos

$$w(X_1,\dots,X_n)_p = \text{determinante}(\langle E_i,X_j\rangle)_p$$

para $i,j=1,\dots,n$, $\langle\ ,\ \rangle = ds^2$,podemos observar que w restringida a F es la forma de volumen de ds_0^2 ,Mostramos ahora que w es F-cerrada, sea L_0 un dominio ,compacto con frontera de alguna hoja de F , consideremos una variación normal $f : I\times L_0 \longrightarrow M$ para L_0 tal que preserva las hojas de F ,esto es

$$L_t = f_t(L_0) \quad , \text{ donde } \quad f_t : t\times L_0 \longrightarrow M \quad (\ t \text{ fijo }) ,$$

esta contenida en alguna hoja de F .Calculemos ahora la variación del volumen de L_0

$$\frac{d}{dt}\,(\text{Volumen de } L_t) = \frac{d}{dt}\int_{L_t} w = \frac{d}{dt}\int_{L_0} f_t^*(w)$$

evaluando en t=0

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\,(\text{Volumen de } L_t)\Big|_{t=0} = \int_{L_0} Ew = \int_{L_0} (\ d(i_E w) + i_E(dw))$$

donde; $E = f_*(\partial/\partial t)\big|_{t=0}$ con $\partial/\partial t$ el campo de vectores tangentes a $I\times L_0$ en la dirección del factor I , Ew la derivada de Lie de la forma w en la dirección del campo E , $i_E w$ la forma definida como

$$i_E w(X_1,\dots,X_{n-1}) = w(X_1,\dots,X_{n-1},E) \ .$$

Ahora aplicando que L_0 es subvariedad mínima por el teorema I.7 tenemos que

$$\int_{L_0} (\ d(i_E w) + i_E(dw)) = 0$$

y como $i_E w = 0$ por ser E ortogonal a las hojas entonces concluimos que $i_E(dw) = 0$ esto es dw es F-cerrada.

Inversamente supongamos que existe $w \in A^n(M)$ tal que es F-cerrada y extiende a w_o. Consideremos el conjunto de vectores $Y \in T_pM$ tal que

$$i_Y w = 0 \quad ,$$

de la linealidad de w puede mostrarse que estos vectores forman un subespacio vectorial W_p ,además como w restringida a T_pF coincide con w_o la forma de volumen de las hojas entonces si $Y \in W_p$ no puede tener componente en T_pF ,utilizando esto podemos escribir

$$T_pM = T_pF \oplus W_p$$

de donde considerando la unión de los W_p obtenemos un subhaz W de TM .Extendamos la métrica ds_o^2 de tal manera que W sea el haz normal a las hojas de la foliación ,utilizando (1) tenemos que

$$\frac{d}{dt} \left(\text{Volumen de } L_t\right)\Big|_{t=0} = \int_{L_o} \left(d(i_E w) + i_E(dw)\right)$$

donde E es ortogonal a las hojas de acuerdo a la métrica que construimos, esto es E es una sección de W, de donde $i_E w=0$, además por hipótesis $i_E(dw)=0$ por esto la formula de arriba se anula y por el teorema I.7 L_o es mínima. Q. E. D.

C A P I T U L O   I I I

CRITERIOS QUE DEPENDEN DE LA ESTRUCTURA TRANSVERSAL DE LA FOLIACION

1.- El seudogrupo de holonomia.

Empezaremos esta sección con algunos hechos sobre seudogrupos de difeomorfismos, para luego aplicarlos al seudogrupo de holonomia de una foliación.

<u>III.1 Definición.</u> Un seudogrupo de difeomorfismos de una variedad diferenciable M es una colección de difeomorfismos entre vecindades abiertas de M tal que contiene a la identidad, es cerrada bajo composiciones (cuando estas estan bien definidas), inversos, restricción a conjuntos abiertos y uniones.

<u>III.2 Definición.</u> Sean H y H seudogrupos de difeomorfismos de M y M' respectivamente. Un morfismo $\Phi: H \longrightarrow H'$ es una colección de difeomorfismos de vecindades abiertas de M en vecindades abiertas de M' tal que:

a) Los dominios de $g \in \Phi$ forman una cubierta de M.

b) Si $h \in H$ y $g, g_, \in \Phi$ entonces $ghg_,^{-1} \in H'$.

c) Si $h \in H$, $h_, \in H'$, $g \in \Phi$, entonces $h_, gh \in \Phi$.

d) Φ es cerrada bajo uniones.

Observemos que si $\Phi: H \longrightarrow H'$ y $\Phi': H' \longrightarrow H''$ son morfismos, entonces la colección con elementos de la forma $g_, g$ donde $g \in \Phi$, $g_, \in \Phi'$ forma un morfismo entre H y H''. Bajo esta composición los morfismos tienen estructura de categoría.

Denotamos por M/H el espacio de H-órbitas en M, es decir el espacio conciente $M/\sim$ donde p,q M estan relacionados $p\sim p$, si y solo si existe $h\in H$ tal que $h(p)=q$. En general M/H puede no ser una variedad diferenciable.

Vamos ahora a discutir la relación entre H un seudogrupo de difeomorfismos de M y $A_c^n(M)$. Sea

$$A_c^n(M/H) = \frac{A_c^n(M)}{\mathcal{E}^n(M)}$$

donde $\mathcal{E}^n(M)$ es el subespacio vectorial de $A_c^n(M)$ generado por elementos de la forma $w-h^*(w)$ con $h\in H$ y w una n-forma en M con soporte compacto contenido en la imagen de h. Podemos ahora considerar la topología C^∞ en $A_c^n(M)$ para obtener la topología conciente en -- $A_c^n(M/H)$. Además la derivada exterior $d : A_c^n(M) \longrightarrow A_c^{n+1}(M)$ induce una derivada continua en $A_c^n(M/H)$ que denotamos de la misma manera

$$d : A_c^n(M/H) \longrightarrow A_c^{n+1}(M/H)$$

con esto $A_c^*(M/H)$ es un espacio vectorial topológico graduado. Denotamos por $D^n(M)$ las corrientes en M, esto es las funcionales - lineales continuas de $A_c^n(M)$ en $\mathbb{R}$, ver de Rham (1) ó Griffiths (1).

<u>III.3 Definición.</u> Una corriente $c\in D^n(M)$ es invariante bajo H si para todo $h\in H$ y toda $w\in A_c^n(M)$ con soporte en el rango de h entonces $c(w)=c(h^*(w))$, denotamos a las corrientes invariantes bajo H como $D^n(M/H)$.

Tenemos en efecto que $D^n(M/H)$ es el espacio dual de $A_c^n(M/H)$, para mostrar esto observemos que si $c\in D^n(M/H)$ y $w-h^*w\in\mathcal{E}^n(M)$ entonces $c(w-h^*w)=0$, esto es el núcleo de c es $\mathcal{E}^n(M)$.

<u>III.4 Lema.</u> Un morfismo $\Phi: H\longrightarrow H'$ induce funtorialmente un morfismo continuo entre espacios vectoriales topológicos graduados.

$$\Phi^*: A_c^*(M/H) \longrightarrow A_c^*(M'/H')$$

Demostración. Empezamos por definir el morfismo. Dada $w\in A_c^n(M)$ expresemosla como una suma finita de $w_g\in A_c^n(M)$ de tal forma que cada w_g tiene soporte en U_g domino de $g\in\Phi$, con esto definimos Φ^* como;

$$\Phi^*: w = \sum w_g \longrightarrow \sum (g^{-1})^* w_g \quad .$$

Mostramos ahora que la definición es independiente de la descomposición de w y de la elección de w en su clase.

Para la primera afirmación sea $\sum w_q$ otra descomposición de w, sea $\{f_q\}$ la partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{U_q\}$ de los dominios de $q \in \Phi$ tenemos entonces que

$$\sum w_g = \sum f_q w_g = \sum w_q$$

ahora aplicando Φ^* a los terminos de la izquierda

$$\sum (g^{-1})^* w_g = \sum (g^{-1})^* f_q w_g$$

que es equivalente a la imagen del termino de la derecha

$$\sum (gq^{-1})^* (g^{-1})^* f_q w_g = \sum (q^{-1})^* f_q w_g = \sum (q^{-1})^* f_q w$$

ya que $gq^{-1} \in H$, es decir su diferencia es de la forma $v-h^* v \in \mathcal{E}^n(M)$.

Para la segunda afirmacíon vamos a mostrar que la imagen de $\mathcal{E}^n(M)$ bajo el morfismo es $\mathcal{E}^n(M')$ .Sea $w-h^* w \in \mathcal{E}^n(M)$ podemos expresarla como $w_g - h^* w_g$ para $h \in H$, $g \in \Phi$ y el soporte de $h^* w_g$ en el dominio de alguna $q \in \Phi$,entonces su imagen bajo el morfismo es

$$\begin{aligned}\sum (g^{-1})^* w_g - \sum (q^{-1})^* h^* w_g &= \sum (g^{-1})^* w_g - \sum (q^{-1})^* h^* (g^{-1} g)^* w_g \\ &= \sum (g^{-1})^* w_g - \sum (ghq^{-1})^* (g^{-1})^* w_g\end{aligned}$$

que esta en $\mathcal{E}^n(M')$ ya que $ghq^{-1} \in H'$.

Además del hecho de que g^* conmuta con d y es continua se sigue que Φ^* es continua y respeta la estructura de espacio vectorial topológico graduado. Q. E. D.

<u>III.5 Corolario.</u> Un isomorfismo de H en H$'$ induce un isomorfismo topológico de $A_c^*(M/H)$ en $A_c^*(M'/H')$. Q. E. D.

Vamos ahora a construir el seudogrupo de holonomia asociado a una foliación. Sea F una foliación de M^m con dimensión n y codimensión r.

<u>III.6 Definición.</u> Una subvariedad Q^r de M^m se dice transversal a F si es transversal a las hojas de la foliación y se dice que Q es

completa si intersecta a todas las hojas de la foliación.

<u>III.7 Definición.</u> Sean P y Q dos subvariedades de M transversales a F ,entonces F determina una colección de difeomorfismos de subconjuntos abiertos de P en subconjuntos abiertos de Q que son restricciones de aquellos difeomorfismos de M que dejan invariantes las hojas de F.La colección de todos los posibles difeomorfismos determinados de esta manera entre todas las posibles parejas de subvariedades transversales a F generan un seudogrupo de difeomorfismos de la variedad formada por la unión disjunta de las posibles subvariedades transversales , este es el seudogrupo de holonomia de la foliación F.

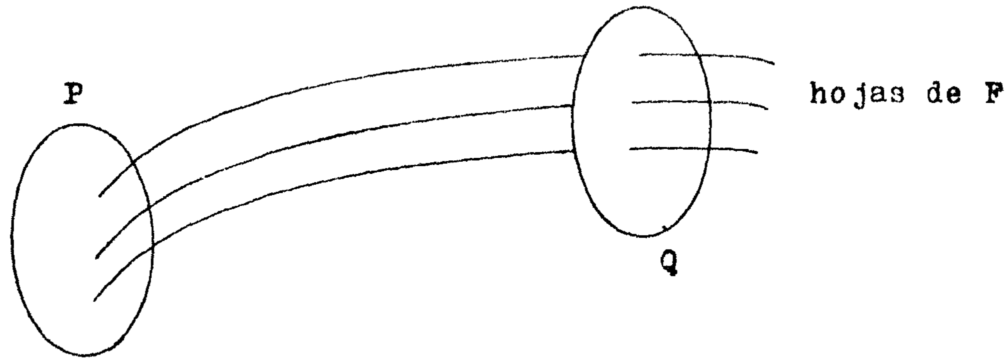

Fig. 9 El seudogrupo de holonomia de F.

<u>III.8 Definición.</u> Sea Q una subvariedad transversal a F y que es completa. Los difeomorfismos del seudogrupo de holonomia de F que actuan entre subconjuntos abiertos de Q forman un seudogrupo de difeomorfismos que llamamos el seudogrupo de holonomia inducido por F en Q.

Observemos que este seudogrupo no es necesariamente trivial como por ejemplo si las hojas de F son de dimensión mayor que uno o si son como en la siguiente figura.

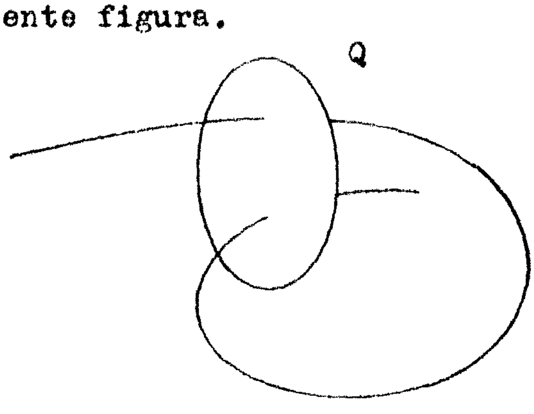

Fig. 10 El seudogrupo de holonomia inducido por F en Q.

Dadas Q y Q' dos subvariedades transversales a F y tales que son completas el seudogrupo de holonomia H inducido por F en Q y el seudogrupo de holonomia H' inducido por F en Q' son canonicamente isomorfos. Esto sigue del hecho que la colección Φ de elementos del seudogrupo de holonomia de F que actuan de subconjuntos abiertos de Q en subconjuntos abiertos de Q' forman un isomorfismo $\Phi: H \longrightarrow H'$. En consecuencia cada foliación F tiene asociada una clase bien definida de equivalencia entre seudogrupos de difeomorfismos y que esta determinada por el seudogrupo de holonomia inducido por F en una transversal completa. En todo lo que sigue nos referiremos a esta clase de equivalencia simplemente por H.

III.9 Definición. Sea Q una transversal completa a F . Definimos ;

$$A_c^r(\mathrm{Tr}\ F) = A_c^r(Q/H)$$

las r-formas invariantes bajo la holonomia de F ,

$$D^r(\mathrm{Tr}\ F) = A_c^r(Q/H)$$

las r-corrientes invarientes bajo la holonomia de F.

En otras palabras un elemento de $D^r(\mathrm{Tr}\ F)$ es una r-corriente definida en cada subvariedad transversal a F y que es invariante bajo elementos del seudogrupo de holonomia de F.

Por las observaciones anteriores a la definición y el corolario III.5 podemos concluir que estas definiciones son independientes de la elección de la transversal que se elíga para determinar H.

III.10 Ejemplo. Los grupos de Lie nos proporcionan ejemplos sencillos de estos hechos. Sea Γ un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G compacto , las Γ-órbitas de G determinan las hojas de una foliación para G ver Camacho (1) . El espacio de hojas $G/\Gamma = \{ p\Gamma \ / \ p \in G \}$ es un espacio homogéneo de dimensión n , las r-corrientes invariantes bajo holonomia estan determinadas por las $(n-r)$-formas G-invariantes en G/Γ de tal forma que cada w , una $(n-r)$-forma G-invariante, define una r-corriente c como $c(v) = \int w \wedge v$, para v una r-forma con soporte compacto en G/Γ .

Estas ideas son una generalización de las presentadas en Plante (1) sobre las relaciones entre el seudogrupo de holonomia de una foliación y medidas invariantes.

III.11 Definición. Una cubierta regular para F, foliación de M con codimensión r, es una cubierta abierta $\{U_i\}$ de M tal que:

a) El espacio de hojas de la foliación F_i, la foliación inducida por F en U_i, es una variedad diferenciable Q_i de dimensión r, la proyección natural $f_i : U_i \longrightarrow Q_i$ es una submersión y sus imagenes inversas $f_i^{-1}(y)$ para y Q_i, son las hojas de U_i.

b) Cada hoja $f_i^{-1}(y_i)$ en U_i intersecta a lo mas una hoja $f_j^{-1}(y_j)$.

III.12 Definición. Definimos el seudogrupo de holonomia asociado a la cubierta regular $\{U_i\}$ como la colección formada por difeomorfismos h_{ij} de un abierto de Q_i en un abierto de Q_j tal que $h_{ij}(y_i)=y_j$ y satisfacen la condición siguiente; para toda pareja i,j existe un difeomorfismos

$$h_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow f_i(U_i \cap U_j)$$

tal que $\qquad f_i = h_{ij} f_j$.

Es facil ver que este seudogrupo es isomorfo al seudogrupo de holonomia de la foliación, para más detalles ver Haefliger (2).

2.- Integración sobre las hojas.

Vamos ahora a construir una función que nos relaciona las formas sobre una variedad foliada con las formas invariantes bajo holonomia.

III.13 Teorema. Sea F una foliación de M^n con dimensión n y codimensión r, supongamos que el haz tangente a F es orientado. Entonces existe una función continua suprayectiva

$$\int_F : A_c^{n+s}(M) \longrightarrow A_c^s(\mathrm{Tr}\,F)$$

y que conmuta con d.

Demostración. La construcción de esta función esta inspirada en las ideas de Ruelle (1) sobre la construcción de una corriente a partir de una medida invariante.

Primero vamos a definir $\int_F$ localmente ,sea $f : M^{n+r} \longrightarrow Q^r$ una submersión tal que las fibras $f^{-1}(y)$ orientadas cohoerentemente ,vamos a definir :

$$\int_f \; : \; A_c^{n+s}(M) \longrightarrow A_c^{s}(M) \; .$$

Sea $w \in A_c^{n+s}(M)$ y supongamos que su soporte esta contenido en una vecindad coordenada tal que f esta expresada como ;

$$f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_r) = (y_1,\ldots,y_r)$$

entonces podemos escribir

$$w = \sum_I a_I(x,y)\, dy^I \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$
$$+ \text{ terminos de grado} < n \text{ en } x^i$$

donde I es in multiindice $I = i_1,\ldots,i_s$, tenemos ahora que

$$\int_f w = \sum_I \left(\int a_I(x,y)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \right) dy^I \qquad .$$

Vamos ahora a extender esta función. Sea $\{U_i\}$ una cubierta regular para la foliación, con proyecciones $f_i : U_i \longrightarrow Q_i$,sea H el seudogrupo de holonomia asociado a la cubierta que actua en Q la unión dijunta de las Q_i .Dada $w \in A_c^{n+s}(M)$ expresemosla como una suma finita de $w_i \in A_c^{n+s}(M)$ tal que el soporte de cada w_i esta contenido en alguna U_i definimos

$$\int_F \; : w = \sum w_i \longrightarrow \sum \int_{f_i} w_i \qquad .$$

Vamos ahora a mostrar que esta definición es independiante de la descomposición de w . Sea $\{g_i\}$ partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{U_i\}$ entonces

$$\sum_i \int_{f_i} w_i = \sum_{i,j} \int_{f_i} g_j w_i$$

que es equivalente a

$$\sum_{i,j} \int_{f_j} g_j w_i = \sum_j \int_{f_j} g_j \; w$$

ya que si el soporte de w esta en $U_i \cap U_j$ entonces

$$\int_{f_i} w = h_{ij}^* \int_{f_j} w$$

para h_{ij} en H, ya que h_{ij} preserva las hojas de la foliación.

Puede mostrarse directamente de la definición de $\int_F$ que es continua y conmuta con d, para mostrar que es independiente de la elec ción de la cubierta regular basta considerar un refinamiento comun con otra cubierta y calacular. Q. E. D.

La siguiente propiedad de nuestra función de integración sobre las hojas es la que utilizaremos directamente para caracterizar las foliaciónes con hojas mínimas.

<u>III.14 Teorema.</u> El nucleo de $\int_F$ es el subespacio vectorial generado por formas F-triviales y derivadas de formas F-triviales.

Demostración. Primero se demostrara el caso en el que la foliación esta determinada por la submersión

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r$$

dada por

$$f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r) = (y_1,\dots,y_r) \quad .$$

Sea $w \in A_c^{n+s}(\mathbb{R}^m)$,donde m=n+r ,entonces podemos escribir w=v+u donde u es F-trivial y v es de la forma

$$v = \sum_I a_I(x,y)\, dy^I \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

para

$$dy^I = dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_s} \wedge \quad , \quad 1 \le i_1 < \dots < i_s < r \quad ,$$

Por hipótesis para cada I tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} a_I(x,y)\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = 0$$

de donde existen formas $\beta_I \in A_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ dependiendo diferenciablemente de y, tales que

$$d\,\beta_I = a_I(x,y)\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

ver De Rham (2), consideremos ahora

$$\beta = (-1)^s \sum dy^I \wedge \beta_I$$

entonces tenemos que $d\beta = v + u'$ donde u' es F-trivial ,podemos expresar ahora $w = d\beta - u' + u$ donde β, u, u' son F-triviales.

Damos ahora la demostración del caso general. Como en el teorema anterior se construye $\int_F$ mediante una cubierta regular y suponemos ahora que las proyecciones correspondientes $f_i : U_i \longrightarrow Q_i$ son difeomorfas a la submersión de el caso anterior. Supongamos que

$$\int_F w = 0 \qquad ,$$

entonces existen u_{ij} s-formas con soporte compacto en Q_i tales que

$$\sum_i \int_{f_i} w_i = \sum_{i,j} h_{ij}^*(u_{ji}) - u_{ji}$$

de donde localmente tenemos que

$$\int_{f_i} w_i = \sum_j h_{ji}^*(u_{ij}) - u_{ji} \qquad .$$

Sea v_{ji} (n+s)-forma con soporte compacto en $U_i \cap U_j$ tal que

$$\int_{f_i} v_{ji} = u_{ji}$$

de donde tambien se satisface que

$$\int_{f_i} v_{ji} = h_{ij}^*(u_{ji})$$

consideremos ahora

$$\int_{f_i} \bar{w}_i = \int_{f_i}\Big(w_i - \sum_j (v_{ij} - v_{ji})\Big) = 0$$

de esto tenemos que cada $\bar{w}_i$ es suma de formas F-triviales y derivadas de formas F-triviales de donde esto tambien es válido para w ya que $w = \sum \bar{w}_i$. Q. E. D.

3.- Los teoremas de Haefliger.

Vamos ahora a dar una interpretación de todos los resultados anteriores para aplicarlos a foliaciones. A lo largo de esta sección F sera una foliación orientada de M una variedad compacta.

Sean $A_c^s(F)$ las s-formas con soporte compacto en la variedad M_F formada por la unión disjunta de las hojas de la foliación, sea d_o la derivada exterior correspondiente. La función identidad

$$j : M_F \longrightarrow M$$

es una inmersión y de hecho

$$j^*(A_c^s(M)) = A_c^s(F) \qquad ,$$

una forma de construir $A_c^n(F)$ es considerarlo como el conciente de $A_c^n(M)$ entre las formas F-triviales, donde n es la dimensión de F.

<u>III.15 Teorema.</u> Sea $w_o \in A_c^n(F)$ tal que ;

$$d(\int_F w_o) = 0 \in A_c^1(Tr\ F) \quad ,$$

entonces existe $w \in A_c^n(M)$ tal que $j^*w = w_o$ y es F-cerrada.

Demostración. Sea $\bar{w} \in A_c^n(M)$ tal que $j^*(\bar{w}) = w_o$,como

$$\int_F w_o = \int_F \bar{w} \qquad y \quad d\int_F \bar{w} = \int_F d\bar{w} = 0$$

podemos aplicar III.14 para obtener $v \in A_c^n(M)$ que es F-trivial, esto es $j^*(v) = 0$,tal que $d\bar{w} - dv$ es F-trivial . Ahora proponiendo $w = \bar{w} - v$ que satiface que $j^*(w) = w_o$ y es F-cerrada. Q. E. D.

Podemos ahora enunciar el resultado principal de este capitulo.

<u>III.16 Teorema.</u> Haefliger. Sea F una foliación de M ,sea ds_o^2 una métrica riemanniana a lo largo de las hojas y sea w_o su forma le volumen asociada. Existe una métrica riemanniana ds^2 en M tal que extiende a ds_o^2 y hace que las hojas de F sean subvariedades mínimas si y solo si $d(\int_F w_o) = 0$.

Demostración. sigue del teorema anterior y del teorema de Rummler-Sullivan. Q. E. D.

El siguiente corolario nos da una respuesta parcial al siguiente problema : ¿ dada una foliación con hojas compactas de una variedad riemanniana compacta es el volumen de las hojas necesariamente acotado ?

III.17 Corolario. Rummler. Supongamos que la foliación es un haz generalizado de Seifert, entonces la métrica ds_0^2 sobre las hojas se extiende a una métrica ds^2 sobre la variedad si y solo si el volumen de cada hoja genérica es constante.

Demostración. Sigue del teorema III.16 y de la construcción de la función de integración sobre las hojas, teorema III.13 . Q. E. D.

En general existen ejemplos complicados en el que el volumen de las hojas no es acotado, para mas relaciones de este problema con el de foliaciones con hojas mínimas ver Rummler (1) .

III.18 Corolario. Supongamos que $D^0(\mathrm{Tr}\ F) = 0$, entonces toda métrica ds_0^2 en las hojas es cercana en la topología C^∞ a una métrica que es la restricción de una métrica en la variedad que hace que las hojas sean subvariedades mínimas.

Demostración. Sea $w_0 \in A^n(F)$ la forma de volumen asociada a la métrica sobre las hojas, entonces en cualquier vecindad de w_0 existe una forma $\bar{w}_0$ tal que $\int_F \bar{w}_0 = 0$ ya que por hipótesis el cero es denso en $A_c^0(\mathrm{Tr}\ F)$ y la función $\int_F$ es abierta. Con esto tenemos que $\bar{w}_0$ es la forma de volumen una métrica riemanniana sobre las hojas que es cercana a ds_0^2 y aplicando el teorema III.16 el resultado sigue.

Q. E. D.

III.19 Teorema. Haefliger. En una variedad foliada M existe una métrica tal que las hojas de F la foliación son mínimas si y solo si para un representante H de la clase de seudogrupos de holonomia de F actuando en una variedad Q de dimensión r igual a la codimensión de F, existe una función diferenciable f positiva y con soporte compacto que es estrictamente positiva en un conjunto que intersecta cada órbita y satisface que $df = 0 \in A_c^1(\mathrm{Tr}\ F)$.

Demostración. Primero observemos que la existencia de tal f es independiente del representante H elegido. En efecto sea H' otro representante actuando en Q' ,sabemos que existe un isomorfismo

$\Phi : H' \longrightarrow H$,sea K' un conjunto compacto que intersecta cada orbita de H' entonces existe una función diferenciable f' con soporte compacto ,equivalente a f y estrictamente positiva en K' para construir tal f' elegimos $g_i \in \Phi$ con $i=1,\ldots,k$ cuyos dominios U_i forman una cubierta de K' y tal que f es estrictamente positiva en $g_i(U_i)$ para toda i ,por otra parte no es difícil ver que se puede hallar una cubierta $\{V_i\}$ de Q tal que la partición de la unidad asociada $\{\lambda_i\}$ sea estrictamente positiva en $g_i(U_i)$,podemos entonces definir

$$f' = \sum g_i^*(\lambda_i f) \qquad ,$$

que es la función que buscabamos.

Sea ahora $\{U_i\}$ una cubierta regular para F foliación de M con dimensión n y codimensión r y proyecciones $f_i : U_i \longrightarrow Q_i$,sin perdida de generalidad podemos suponer que f_i es la proyección natural

$$\Pi_i : U_i = Q_i \times R^n \longrightarrow Q_i \qquad .$$

Sea $\{V_i\}$ una cubierta de M por conjuntos compactos V_i contenidos en U_i .En cada U_i es posible construir una n-forma u_i cuya restricción a cada hoja L de U_i tiene soporte compacto, es estrictamente positiva en $L \cap V_i$ y $\int_L u_i = 1$.

Sea H es seudogrupo de holonomia inducido en Q la unión de Q_i , por la hipótesis y la construcción anterior existe una función diferenciable f positiva,con soporte compacto en Q y que es estrictamente positiva en cada $f_i(V_i)$ satisfaciendo que $df = 0$ en $A^1(\mathrm{Tr}\ F)$, sea g_i la restricción de f a Q_i entonces

$$w = \sum f_i(g_i)u_i$$

es una n-forma en M que es positiva en las hojas y tal que

$$\int_F w = f \in A^0(\mathrm{Tr}\ F)$$

aplicando ahora el teorema III.16 el resultado sigue. Q. E. D.

<u>III.20 Corolario.</u> La existencia de una métrica que hace que las hojas de la foliación sean subvariedades mínimas depende solo del seudogrupo de holonomia de la foliación. Q. E. D.

III.21 Corolario. Si esxiste un reperesentante del seudogrupo de holonomia actuando en una variedad compacta Q entonces existe una métrica para la cual las hojas de la foliación son mínimas.

Demostración. Puede elegirse f=1 . Q. E. D.

4.- Ejemplos de foliaciones que no son de hojas mínimas.

Para construir un ejemplo primeramente recordemos que las corrientes admiten una derivada ∂ que las convierte en espacio vectorial graduado, definida como el dual de d la derivada exterior para formas ,en particular tenemos que

$$\partial : D^1(\mathrm{Tr}\ F) \longrightarrow D^0(\mathrm{Tr}\ F)$$

$$\partial c(w) = c(d\,w) \qquad .$$

Sea ahora F foliación tal que tiene una 0-corriente positiva e invariante bajo holonomia que es la frontera de una 1-corriente invariante bajo holonomia ,en este caso para toda n-forma w ,donde n es la dimensión de la foliación, tal que es positiva en las hojas sucede que ;

$$c\left(d\int_F w \right) = \partial c\left(\int_F w \right) > 0$$

y por el teorema III.16 no existe una métrica que haga que las hojas de F sean subvariedades mínimas.

III.22 Ejemplo. Una foliación que contiene una componente de Reeb, que denotamos por R,satisface las condiciones descritas anteriormente,para mostrar esto observemos que una curva transversal a las hojas que entra en R no vuelve a cruzar la frontera nuevamente tenemos entoces una 1-corriente invariante bajo holonomia que es la integración sobre la transversal y su frontera es la medida de Dirac asociada a la fontera de R .

C A P I T U L O I V

FOLIACIONES HOLOMORFAS EN VARIEDADES DE KÄHLER

1.- Propiedades elementales de las variedades de Kähler.

Empezaremos por presentar algunos hechos de algebra lineal que nos seran de utilidad para construir el haz tangente a una variedad compleja.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión $2n$ tal que posee un isomorfismo $J : V \longrightarrow V$ con la propiedad de que $J^2 = -Id.$,utilizando esta J podemos dar a V una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión compleja n ,definiendo la multiplicación por un escalar complejo como

$$(x + iy)v = xv + yJ(v) \qquad x,y \in \mathbb{R},\ v \in V,\ i=\sqrt{-1}\ .$$

En particular identificamos $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ mediante

$$(z_1,\ldots,z_n) \simeq (x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n) \qquad \text{para} \quad x_r + iy_r = z_r \in \mathbb{C}$$

y donde $J : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ esta dado por

$$J(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n) = (y_1,-x_1,\ldots,y_n,-x_n) \qquad .$$

Mediante esta identificación tenemos que una función $f: \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ $\mathbb{R}$-lineal es $\mathbb{C}$-lineal si y solo si $Jf = fJ$.

IV.1 Definición. Una función $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^m$,con U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$ y f de clase C^1 como función real ,se dice holomorfa si para todo $p \in U$ la diferencial de f es una función $\mathbb{C}$-lineal .

IV.2 Definición. Una variedad compleja M es una variedad topológica provista de un atlas (U_r,f_r) , donde cada f_r: $U_r \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es un homeomorfismo sobre algún subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$,tal que siempre que $f_s f_r^{-1}$ este definida es holomorfa, n es la dimensión compleja de M.

Podemos observar que toda variedad compleja M de dimensión compleja n tiene asocia una estructura que la convierte en variedad real diferenciable de dimensión 2n .

IV.3 Ejemplos. Naturalmente $\mathbb{C}^n$ es variedad compleja .El toro complejo $\mathbb{C}^n/\Gamma$ donde Γ es un subgrupo discreto de translaciones en $\mathbb{C}^n$ es una variedad compleja de dimensión n con la estructura holomorfa que hereda de $\mathbb{C}^n$.$\mathbb{C}P^n$ el espacio proyectivo complejo de dimensión n es variedad compleja, como variedad topológica $\mathbb{C}P^n$ es el espacio conciente ($\mathbb{C}^{n+1}-\{0\})/\sim$ donde z y z' estan relacionados si y solo si existe un $a\in\mathbb{C}$ tal que $az=z'$.

Vamos ahora a discutir la estructura del haz tangente a una variedad compleja. Sea M una variedad compleja de dimensión real 2n ,sea TM su haz tangente real. Podemos contruir en todo p M una función J_p tal que

$$J_p : T_pM \longrightarrow T_pM \quad \text{y} \quad J_p^2 = -Id.$$

definida en coordenadas locales $(z_1,\ldots,z_n) = (x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)$

como $$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x}r\right) = \frac{\partial}{\partial y}r \quad , \quad J_p\left(\frac{\partial}{\partial y}r\right) = -\frac{\partial}{\partial x}r \qquad r=1,\ldots,n$$

donde $\partial/\partial x^r$, $\partial/\partial y^r$ son los vectores tangentes reales,utilizando J_p podemos dar a T_pM que es un espacio vectorial real, una estructura de espacio vectorial complejo. Mediante la correspondencia $p\longrightarrow J_p$ obtenemos una sección $J\in$ Homeomorfismos(TM ,TM) que actua sobre los campos $X\in X(M)$ como $(JX)_p=J_pX_p$ para todo $p\in M$,de la expresión de J en coordenadas locales podemos concluir que J es de hecho una sección diferenciable y por esto $JX\in X(M)$,llamaremos a J la estructura casi-compleja de M.

Otra propiedad importante de las variedades complejas es que tienen determinada una orientación canonica de la siguiente manera;sean $E_1,\ldots,E_n\in X(M)$ campos locales que determinan una base ordenada para T_pM como espacio vectorial complejo, entonces los campos locales

$E_1, JE_1, \ldots, E_n, JE_n$ forman una base para T_pM como espacio vectorial real y cualquiera dos bases de esta forma difieren por una transformación con determinante positivo lo que determina la orientación para M, en todo lo que sigue consideraremos variedades complejas orientadas de esta manera.

Asociemos a J su tensor de integrabilidad T definido como

$$T(X,Y)=[JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y]$$

para todo $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, calculando en coordenadas locales y utilizando que las componentes de J son constantes se puede mostrar que $T(X,Y)$ es siempre cero, de hecho la importancia de T sigue del teorema de Newlander-Nirenberg ; si una variedad real M admite un homeomorfismo C^∞ de TM, J tal que $J^2=-Id.$ y su correspondiente tensor de integrabilidad es cero entonces M admite un atlas holomorfo que la convierte en una variedad compleja con estructura casi-compleja J, ver Kobayashi (1) vol. II.

Discutimos ahora la relación entre métricas riemannianas y métricas $\mathbb{C}$-valuadas en M.

__IV.4 Definición.__ Una métrica riemanniana $\langle \, , \rangle$ en una variedad compleja M se dice hermitiana si $\langle JX,JY \rangle = \langle X,Y \rangle$ para $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$,esto es J es una isométria.

La razón de este nombre esta justificada por el siguiente hecho. Dada una métrica riemanniana hermitiana puede obtenerse una métrica $\mathbb{C}$-valuada h de la siguiente manera sea ;

$$w(X,Y) = \langle X, JY \rangle$$

observemos que w es una 2-forma ya que

$$w(X,Y)=\langle X,JY\rangle=\langle JY,X\rangle=\langle JJY,JX\rangle=\langle -Y,JX\rangle=-w(Y,X) \quad ,$$

llamaremos a w la forma asociada a la métrica, podemos ahora definir h como

$$h(X,Y)=\langle X,Y\rangle + iw(X,Y)$$

del hecho que $\langle \, , \rangle$ es definida positiva se sigue que cada h_p es un producto hermitiano en T_pM. Inversamente dada una métrica $\mathbb{C}$-valuada en M pueden obtenerse separando en parte real y parte imaginaria una métrica riemanniana hermitiana y una 2-forma respectivamente.

IV.5 Definición. Una métrica hermitiana en una variedad compleja M se dice de Kähler si ;

$$[\nabla_X, J]Y = \nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y) = 0 \qquad X,Y \in \mathfrak{X}(M) ,$$

si este es el caso diremos que M es Kähler.

IV.6 Lema. Sea M una variedad compleja. $\langle\ ,\ \rangle$ una métrica hermitiana en M es Kähler si y solo si su forma asociada w es cerrada.

Demostración. Supongamos que la métrica es Kähler ,elegimos vectores $X_1, X_2, X_3 \in T_pM$,$p \in M$,extendemos estos vectores a $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3 \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$(\nabla_{\overline{X}_r} \overline{X}_s)_p = 0 \qquad r,s=1,2,3$$

de donde $\left[\overline{X}_r, \overline{X}_s\right]_p = 0$ y al calcular dw obtenemos

$$dw_p(X_1,X_2,X_3) = X_1 w(\overline{X}_2,\overline{X}_3) - X_2 w(\overline{X}_1,\overline{X}_3) + X_3 w(\overline{X}_1,\overline{X}_2)$$

substituyendo $w(X,Y) = \langle X, JY\rangle$

$$(1) \qquad dw_p(X_1,X_2,X_3) = \langle X_2, \left[\nabla_{X_1}, J\right] X_3\rangle - \langle X_1, \left[\nabla_{X_2}, J\right] X_3\rangle$$
$$\langle X_1, \left[\nabla_{X_3}, J\right] X_2\rangle$$

que es igual a cero ya que ∇ y J conmutan por ser la métrica Kähler.

Inversamente ,usando que $J^2=-Id.$ se muestra mediante un calculo que

$$\left[\nabla_X, J\right] J = -J \left[\nabla_X, J\right]$$

de esto y la ecuación (1) podemos mostrar que ;

$$\langle X_2, \left[\nabla_{X_1}, J\right] X_3\rangle = dw(X_1,X_2,X_3) - dw(X_1,JX_2,JX_3)$$
$$- \langle X_1, JT(X_2,X_3)\rangle$$

y como $T(X_2,X_3)=0$ por ser el tensor de integrabilidad de J, $dw=0$ por hipótesis ,entonces la parte derecha de la igualdad se anula de donde necesariamente ∇ y J conmutan. Q. E. D.

IV.7 Ejemplos. Los siguientes son algunos ejemplos de variedades de Kähler. Toda variedad compleja de dimensión uno es Kähler ya que dw es una 3-forma .$\mathbb{C}^n$ con la métrica usual que hereda de $\mathbb{R}^{2n}$ es Kähler y análogamente el toro complejo con la métrica que hereda de $\mathbb{C}^n$ es Kähler. $\mathbb{C}P^n$ también admite una métrica Kähler, la métrica de Fubini Study sin embargo su construcción requiere de mas conocimientos sobre la estructura del haz tangente que los expuestos aquí. Por otra parte no toda variedad compleja admite una métrica Kähler por ejemplo $S^{2r+1} \times S^{2k+1}$, esto sigue del hecho de que ser variedad Kähler tiene fuertes consecuencias topológicas por ejemplo si M es Kähler sucede que $H^{2k}(M, \mathbb{R}) = 0$. Ver Kobayashi (1) vol. II ó Griffits (1).

<u>IV.8 Definición.</u> Sea M una variedad compleja, una subvariedad compleja de M es una variedad compleja L provista de una inmersión $f : L \longrightarrow M$ que satisface las siguientes condiciones :

a) f es una función holomorfa.

b) $\bar{J}df = dfJ$, donde J es la estructura casi-compleja de M y $\bar{J}$ es la estructura casi-compleja de L.

De la definición podemos observar que $T_pL \subset T_pM$ es $\bar{J}_p$-invariante para todo $p \in L$.

<u>IV.9 Lema.</u> Toda subvariedad compleja L de una variedad de Kähler M es variedad de Kähler con la métrica inducida.

Demostración. Utilizando que T_pL es $\bar{J}_p$-invariante para todo $p \in M$ tenemos que

$$\bar{\nabla}_X(\bar{J}Y) = (\nabla_X \bar{J}Y)^T = (\bar{J}\nabla_X Y)^T = \bar{J}(\nabla_X Y)^T = \bar{J}\bar{\nabla}_X Y \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(L)$$

donde ∇ es la conexión en M, $\bar{\nabla}$ es la conexión inducida en L y $(\ )^T : TL \oplus (TL)^{\perp} \longrightarrow TL$ es la proyección sobre TL. Por la igualdad anterior tenemos que $\bar{\nabla}$ y $\bar{J}$ conmutan de donde L es Kähler con la métrica inducida. Q. E. D.

Utilizando nuestros ejemplos anteriores y este lema podemos obtenes mas ejemplos de variedades de Kähler.

2.- Aplicación a foliaciones con hojas mínimas.

Iniciamos esta sección probando una propiedad mínimal de las variedades de Kähler.

<u>IV.10 Teorema.</u> Toda subvariedad compleja L de una variedad de Kähler M es una subvariedad mínima.

Demostración. Vamos a mostrar que el vector de curvatura media de L es siempre cero. Empezamos haciendo notar que la función B definida en el Cap. I Secc. 1 es J-lineal es to es

$$B(X,JY) = JB(X,Y) = B(JX,Y) \qquad X,Y \in \mathfrak{X}(L) ,$$

para esto utilizamos que $(T_pL)^{\perp}$ es J_p-invariante para toda $p \in L$ y calculamos

$$B(X,JY)=(\nabla_X JY)^{\perp}=(J\nabla_X Y)^{\perp}=J(\nabla_X Y)^{\perp}=JB(X,Y)$$

donde ∇ es la conexión de M ,utilizando ahora la simértia de B se sige que $B(JX,Y) = JB(X,Y)$ .Observemos que dado $X \in \mathfrak{X}(L)$ de norma igual a uno entonces JX es ortonormal a él esto sigue de que J es una isométria y que $\langle X,JX \rangle = w(X,X)$,donde w es la forma asociada a la métrica.

Elejimos ahora $E_1,\ldots,E_n \in \mathfrak{X}(L)$,donde n es la dimensión compleja de L, campos locales que forman una base para T_pL (como espacio vectorial complejo) y que son ortonormales entre sí, entonces tenemos que $E_1,JE_1,\ldots,E_n,JE_n$ forman una base para T_pL como espacio vectorial real y son ortonormales entre sí ,calculamos ahora K_p el vector de curvatura media de L en p

$$K_p = \sum_r (B(E_r,E_r) + B(JE_r,JE_r))_p$$

$$= \sum_r (B(E_r,E_r) + J^2B(E_r,E_r))_p = 0$$

con r=1,...,n , de donde L es subavariedad mínima. Q. E. D.

Enunciamos ahora la definición de foliación holomorfa y aplicamos el resultado anterior.

<u>IV.11 Definición.</u> Una foliación $\mathcal{F}$ de una variedad real M^{2m} con hojas

de dimensión 2n se dice holomorfa si el atlas (U_j, f_j) que define a la foliación es tal que ;

$$f_j : U_j \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2r} \simeq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r$$

determina un atlas para M como variedad compleja.

<u>IV.12 Teorema.</u> Toda foliación holomorfa de una variedad Kähler M tiene hojas mínimas.

Demostración. Basta observar que las hojas de la foliación son subvariedades complejas de M y aplicar el teorema IV.10. Q. E. D.

R E F E R E N C I A S

Camacho C. - Lins Neto A.

(1) Teoria geométrica das folheacoes.
IMPA Rio de Janeiro 1979.

De Rham G.

(1) Variétés différentiables.
Hermann Paris 1955.

(2) La théorie des formes différentielles extérieures et l'homologie des variétés différientiables.
Rend. Mat. 20 (1961) 105-146.

Griffits P. - Harris J.

(1) Principles of algebraic geometry.
John Wiley & Sons New York 1978.

Haefliger A.

(1) Some remarks on foliations with minimal leaves.
Journal of differential geometry 15 (1980) 269-284.

(2) Groupoides d'holonomie et classifiants.
Preprint.

Kobayashi S. - Nomizu K.

(1) Fundations of differential geometry Vols. I y II.
John Wiley & Sons New York 1969.

Lawson H. B. Jr.

(1) Minimal submanifolds Vol. I.
IMPA Rio de Janeiro 1970.

(2) Minimal varieties in real and complex geometry.
Les presses de l'université de Montréal 1974.

(3) The quantitative theory of foliations.
Regional conference series in mathematics no. 27.
AMS 1977.

Plante J. F.

(1) Foliations with measure preserving holonomy.
Annals of mathematics 102 (1975) 327-361.

Ruelle D. - Sullivan D.

(1) Currents flows and diffeomorphisms.
Topology 14 (1975) 319- 327.

Rummler H.

(1) Quelques notions simples en géométrie riemannienne el leurs applications aux feuilletages compacts.
Comment. Math. Helvetici 54 (1979) 224-239.

Sullivan D.

(1) A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces.
Comment. Math. Helvetici 54 (1979) 218-223.

Spivak M.

(1) A comprehensive introduction to differential geometry Vols. I-V.
Publish or perish Inc. Berkeley 1979.

Verjovsky A.

(1) Introducción a la geometría y variedades hiperbólicas.
Sexta escuela latinoamericana de matemáticas
IPN México 1982.

Wadsley A. W.

(1) Geodesic foliations by circles.
Journal of differential geometry 10 (1975) 541-549.