U.N.A.M.

FACULTAD DE CIENCIAS

"GRUPOS TOPOLOGICOS"

TESIS

Que para obtener el título de

MATEMATICO

presenta

SALVADOR GARCIA FERREIRA

México, D.F. 1984

INTRODUCCION

En este trabajo, se tratan algumos temas que perteneces tanto a la teoría de topología de conjuntos como a la teoría de grupos topologicos.

En el primer capítulo se da la definición de grupo topológico y se prueba el Teorema (1.5) que describe la topología de um grupo topológico mediante una base local en el elemento neutro del grupo. Además se prueban algunas propiedades que se utilizarán en los capítulos restantes.

En el capítulo-II se estudian las propiedades de Metrización en um grupo topológico. Se prueba que um grupo topológico (T_0) es métrizable si y solo si es primero numerable. En esté capítulo también se estudian las métricas que son invariantes bajo traslaciones izuierdas o derechas.

En el capitulo III se estudian los números cardinales $W(G)$, $d(G)$ $\chi(G)$ y $k(G)$, donde G es um grupo topológico. Se prueban propiedades de tamaño y propiedades relacionadas con la cardinalidad del grupo topológico G. Finalmente se dan algumas condiciones para que om grupo topológico contenga subgrupos densos propios.

En el capítulo IV se estudian los espacios topológicos resolubles. Se prueba que los espacios métricos sin puntos aislados y los espacios topológicos Hausdorff localmente compactos sin puntos aislados son resolubles.

En el capitulo V se dá um ejemplo de um grupo topológico Abeliano, no discreto, divisible y localmente compacto que no contiene subgrupos densos propios. Este ejemplo, débido a Rajagopalan y Subrahmanian, responde negativamente a la pregunta de Dietrich (¿ Todo grupo topológico no discreto localmente compacto contiene un subgrupo denso propio?).

No quisiera dar fin a esta pequeña introducción sin antes agradecer al Dr. Adalberto García Máynez por sus valiosas enseñansas, por su estímulo y por la gran paciencia que tuvo para asesorarme en este trabajo.

S. G. F.

I-GRUPOS TOPOLOGICOS.

(Definición y algunas propiedades)

1.1. DEFINICION. Sea G un espacio topológico con una estructura de grupo. Supongamos que se cumplen las siguientes propiedades:

(i) la función $(x,y) \longmapsto x\cdot y$ es una función continua del producto cartesiano $G \times G$ sobre G;

(ii) la función $x \longmapsto x^{-1}$ es una función continua de G en G.

Entonces G es llamado un grupo topológico.

1.2. TEOREMA. Sea G un grupo topológico. Para $a \in G$, las traslaciones izquierdas y derechas por a son homeomorfismos de G. La función $x \longmapsto x^{-1}$ es también un homeomorfismo de G.

Prueba. Son consecuencia inmediata de la definicion (1.1) $\square$

1.3. TEOREMA. Sea G un grupo topológico y $\mathcal{U}$ una base local abierta en el elemento neutro e de G. Entonces las familias

$$\{xU : x \in G,\ U \in \mathcal{U}\} \quad y \quad \{Ux : x \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$$

son bases de G.

Prueba. El Teorema solo lo probaremos para la familia $\{xU : x \in G, U \in \mathcal{U}\}$, ya que es análogo para la otra familia. Sea W un abierto de G y $x \in W$. Entonces $x^{-1}W$ es una vecindad abierta de e, ya que las traslaciones son homeomorfismos de G. Como $\mathcal{U}$ es base local en e existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $e \in U \subset x^{-1}W$, lo cual implica que $xU \subset W$. Por el Teorema (1.2) todos los elementos de la familia $\{xU : x \in G, U \in \mathcal{U}\}$ son abiertos de G. Por lo tanto la familia $\{xU : x \in G, U \in \mathcal{U}\}$ es base de G. $\square$

1.4. TEOREMA. Sea G un grupo topológico y A, B subconjuntos de G. Si A es abierto y B arbitrario, entonces AB y BA son abiertos. Si A y B son compactos, entonces $A\cdot B$ es compacto. Si A es cerrado y B compacto, entonces AB y BA son cerrados. Si A y B son cerrados no necesariamente $A\cdot B$ es cerrado.

Prueba. La primera afirmación se sigue del hecho de que Ab y bA son abiertos para toda $b\in B$ y $A\cdot B = \bigcup\{Ab : b\in B\}$, $B\cdot A = \{b\cdot A : b\in B\}$.

Supongamos ahora que A, B son compactos. Tenemos que $A\times B$ es un subconjunto compacto de $G\times G$ y como $A\cdot B$ es la imagen continua de $A\times B$ bajo la funcion $(x,y)\longmapsto x\cdot y$ se tiene que $A\cdot B$ es compacto.

Supongamos que A es cerrado y B compacto. Para ver que $A\cdot B$ es cerrado basta probar que si η es una dirección en $A\cdot B$ con $\eta\rightarrow x_0$, entonces $x_0\in A\cdot B$. Sea $\eta = \{V_\alpha : \alpha\in I\}$ una dirección en $A\cdot B$ tal que $\eta\rightarrow x_0$. Para cada $\alpha\in I$ defino $B_\alpha = \{b\in B : a\cdot b\in V_\alpha$ para algún $a\in A\}$. Sea $\gamma = \{B_\alpha : \alpha\in I\}$. Como $V_\alpha\neq\emptyset$ para toda $\alpha\in I$, se sigue que $B_\alpha\neq\emptyset$ para toda $\alpha\in I$. Sean B_α y B_β dos elementos de γ. Por ser η una dirección existe V_δ, $\delta\in I$, tal que $V_\delta\subset V_\alpha\cap V_\beta$. Claramente $B_\delta\subset B_\alpha\cap B_\beta$. Esto prueba que γ es una dirección en B, pero como B es compacto, γ tiene un punto de acercamiento b_0 en B. Ahora para cada $\alpha\in I$ definamos

$$S_\alpha = \{(x,b)\in G\times G : x = ab\in V_\alpha \text{ para algún } a\in A\}.$$

Sea $\mathcal{D} = \{S_\alpha : \alpha\in I\}$. Claramente $\mathcal{D}$ es una dirección en $G\times G$. Sea $R\times T$ una vecindad arbitraria de (x_0, b_0). Entonces existen $\beta, \delta\in I$ tal que $V_\delta\subset V_\alpha\cap V_\beta\subset V_\beta\subset R$. Tomamos $b'\in B_\delta\cap T$, entonces existe $a\in A$ tal que $x' = ab'\in V_\delta$, lo cual implica que $(x', b')\in S_\alpha\cap(R\times T)$. Por lo tanto (x_0, b_0) es un punto de acercamiento de $\mathcal{D}$. Sea $\mathcal{D}'$ la imagen de $\mathcal{D}$ bajo la función continua $(x,y) \longmapsto xy^{-1}$, entonces $x_0 b_0^{-1}$ es un punto de acercamiento de $\mathcal{D}'$ y $\mathcal{D}'$ es una dirección en A. Por ser A cerrado se tiene que $x_0 b_0^{-1} = a_0 \in A$, i.e. $x_0 \in A \cdot B$.

Para probar la última afirmación tomamos $G = (\mathbb{R}, +)$, $A = \mathbb{Z}$ y $B = \alpha\mathbb{Z}$, donde α es un irracional. Entonces $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} = A + B$ no es cerrado en G, ya que es denso. $\square$

1.5. TEOREMA. Sea G un grupo topológico y $\mathcal{U}$ una base local en e. Entonces:

(i) para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subset U$;

(ii) para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subset U$;

(iii) para cada $U \in \mathcal{U}$ y $x \in U$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \cdot V \subset U$;

(iv) para cada $U \in \mathcal{U}$ y $x \in G$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $xVx^{-1} \subset U$.

Recíprocamente, sea G un grupo y sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de G con la propiedad de intersección finita para la cual (i), (ii), (iii) y (iv) se cumplen. Entonces la familia de conjuntos $\{x \cdot U \mid x \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$ es una subbase abierta para una topología en G. Con esta topología, G es un grupo topológico. (La familia $\{Ux \mid x \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$ es una subbase para la misma topología
Si la familia $\mathcal{U}$ también satisface

(v) para $U, V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset U \cap V$,

entonces $\{xU\}$ y $\{Ux\}$ son bases abiertas para la topología de G.

Prueba. Las propiedades (i) y (ii) se siguen de la continuidad de las funciones $(x,y) \longmapsto x \cdot y$ y $x \longmapsto x^{-1}$ respectivamente. Propiedad (iii), el conjunto $x^{-1}U$ es una vecindad abierta de e, por lo cual existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset x^{-1}U$, i.e. $xV \subset U$. Propiedad (iv), como las traslaciones de G son homeomorfismos el conjunto $x^{-1}Ux$ es un abierto que contiene a e, por lo cual existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset x^{-1}Ux$, i.e. $xVx^{-1} \subset U$.

Para probar el inverso, sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de G que tenga la propiedad de intersección finita y satisfaga las propiedades (i), (ii) (iii) y (iv). Para cada $U \in \mathcal{U}$, existen $V, W \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subset U$ y $W^{-1} \subset V$. Sea $x \in V \cap W$, entonces $e = x \cdot x^{-1} \in VW^{-1} \subset V^2 \subset U$. Esto prueba que todos los elementos de $\mathcal{U}$ contienen a e. Sea $\tilde{\mathcal{U}} = \{ \bigcap_{i=1}^{k} U_k \mid U_k \in \mathcal{U},\ i = 1,..,k,\ k \in \mathbb{N} \}$. Probaremos que la familia $\tilde{\mathcal{U}}$ también satisface las propiedades (i), (ii), (iii) y (iv). Para $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$, existen $V_1, \dots, V_k \in \mathcal{U}$ tal que $V_i^2 \subset U_i$ $(i=1,..,k)$. Entonces tenemos que

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k} V_i \right)^2 \subset \bigcap_{i=1}^{k} V_i^2 \subset \bigcap_{i=1}^{k} U_i .$$

Así probamos que la propiedad (i) se cumple para $\tilde{\mathcal{U}}$. Puesto que la aplicación $x \longmapsto x^{-1}$ es un homeomorfismo, tenemos que $\left(\bigcap_{i=1}^{k} V_i \right)^{-1} = \bigcap_{i=1}^{k} V_i^{-1}$. De aquí se sigue la propiedad (ii) para $\tilde{\mathcal{U}}$. Dado que las traslaciones en G son homeomorfismos tenemos que

$$x \left(\bigcap_{i=1}^{k} V_i \right) = \bigcap_{i=1}^{k} xV_i \quad \text{y} \quad x \left(\bigcap_{i=1}^{k} V_i \right) x^{-1} = \bigcap_{i=1}^{k} xV_i x^{-1}.$$

De aquí se obtienen las propiedades (iii) y (iv) para $\tilde{\mathcal{U}}$. Tenemos que la familia

$$\mathcal{B} = \{ \bigcap_{i=1}^{k} x_i U_i \mid x_i \in G,\ \bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \tilde{\mathcal{U}} \}$$

forma una base de una topología de G. Sea $y \in \bigcap_{i=1}^{k} x_k U_k$ y sea $V_i \in \mathcal{U}$ con la propiedad de que $x_i y V_i \subset U_i$ $(i=1,..,k)$. Entonces

$$y \left(\bigcap_{i=1}^{k} V_i \right) = \bigcap_{i=1}^{k} yV_i \subset \bigcap_{i=1}^{k} x_i U_i .$$

Esto prueba que la familia $\{ y\tilde{U} \mid \tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}} \}$ forma una base local en y, para cada $y \in G$.

Probaremos que G es un grupo topológico, sean $a, b \in G$ fijos pero arbitrarios

y sea $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}$. Por (i) y (iv) existen conjuntos $\tilde{V}, \tilde{W} \in \tilde{\mathcal{U}}$ tal que $(b^{-1}\tilde{W}b)\tilde{V} \subset \tilde{U}$.
Así $(a\tilde{W})(b\tilde{V}) \subset ab\tilde{U}$. Esto prueba la continuidad de la función $(x,y) \longmapsto x\cdot y$.
De las propiedades (ii) y (iv) podemos encontrar $\tilde{V}, \tilde{W} \in \tilde{\mathcal{U}}$ tal que

$$b\tilde{V}^{-1}b^{-1} \subset b\tilde{W}b^{-1} \subset \tilde{U}.$$

Así $(b\tilde{V})^{-1} \subset b^{-1}\tilde{U}$. Esto prueba la continuidad de la función $x \longmapsto x^{-1}$.

Para probar que las topologías generadas por $\{xU\}$ y $\{Ux\}$ coinciden utilizaremos (iv). Sea $y \in G$ y $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}$. Por (iv) existe $\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{U}}$ tal que

$$y^{-1}\tilde{V}y \subset \tilde{U},$$

lo cual implica que $\tilde{V}y \subset y\tilde{U}$. De aquí se sigue que todo abierto de la topología generada por $\{xU\}$ es um abierto de la topología generada por $\{Ux\}$. La otra parte es análoga. Por último supongamos que (v) se cumple. Dado un elemento $y \in G$ y $\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \tilde{\mathcal{U}}$ podemos encontrar $W \in \mathcal{U}$ tal que

$$yW \subset \bigcap_{k=1}^{n} yU_k .$$

De aquí se sigue que $\{xU\}$ es una base abierta para la topología de G. $\square$

1.6. TEOREMA. Cada grupo topológico G tiene una base local abierta en e que consiste de vecindades abiertas U tal que $U = U^{-1}$ (los conjuntos que tienen esta propiedad se llaman simetricos)

Prueba. Sea V una vecindad de e arbitraria. Ponemos $U = V \cap V^{-1}$. Dado que la función $x \to x^{-1}$ es un homeomorfismo se tiene que

$$U^{-1} = (V \cap V^{-1})^{-1} = V^{-1} \cap V = U$$

y $U \subset V$. $\square$

1.7. TEOREMA. Sea G um grupo topológico. Para cada vecindad U de e, existe una vecindad V de e tal que $V^{-} \subset U$.

Prueba. En virtud de los Teoremas (1.5,(i)) y (0.6) existe una vecindad simetrica $V = V^{-1}$ de e tal que $V^2 \subset U$. Entonces si $x \in V^-$, tenemos que

$$(xV) \cap V \neq \emptyset$$

Sea $v_1 \in V$ tal que $xv_1 = v_2 \in V$, entonces $x = v_2 v_1^{-1} \in VV^{-1} = V^2 \subset U$. □

Por lo tanto $V^- \subset U$.

Del Teorema (1.7) concluimos que todo grupo topológico es regular.

<u>1.8 TEOREMA</u>. Todo grupo topológico T_0 es T_2.

Prueba. Sea G un grupo topológico T_0 y x, y dos puntos distintos de G. Sin perdida de generalidad supongamos que V es una vecindad de x que no contiene a y. Por la regularidad de G existe una vecindad U de x tal que $\bar{U} \subset V$. Asi, U y $X - \bar{U}$ son dos abiertos ajenos que contienen a x, y respectivamente. □

<u>1.9. ADVERTENCIA</u>. En todo lo que sigue un grupo topológico será un grupo topológico T_0 equivalente a que sea T_2.

<u>1.10. TEOREMA</u>. Sea G un grupo topológico, U una vecindad arbitraria de e y $F \subset G$ cualquier compacto. Entonces existe una vecindad V de e tal que $xVx^{-1} \subset U$ para toda $x \in F$.

Prueba. Sea W una vecindad simetrica de e tal que $W^3 \subset U$. Puesto que $F \subset \bigcup_{x \in F} Wx$ y F es compacto, entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in F$ tal que $F \subset \bigcup_{j=1}^{n} Wx_j$. Escribamos $V = \bigcap_{j=1}^{n} x_j^{-1} W x_j$. Claramente V es vecindad de e y $x_j V x_j^{-1} \subset W$ $(j = 1, \ldots, n)$. Si $x \in F$, entonces $x = y x_k$ para alguna $1 \leq k \leq n$ y algún $y \in W$. De aqui se obtiene que

$$xVx^{-1} = y x_k V x_k^{-1} y^{-1} \subset yWy^{-1} \subset W^3 \subset U. \quad \square$$

1.11 TEOREMA. Sean A y B subconjuntos de un grupo topológico G. Entonces tenemos:

(i) $(A^-)(B^-) \subset (AB)^-$;

(ii) $(A^-)^{-1} = (A^{-1})^-$;

(iii) $xA^-y = (xAy)^-$ para todo $x, y \in G$;

(iv) si $ab = ba$ para todo $a \in A$ y $b \in B$, entonces $ab = ba$ para todo $a \in A^-$ y $b \in B^-$.

Prueba. (i) Sean $x \in A^-$, $y \in B^-$ y U cualquier vecindad de e. Por la continuidad de la operación de G podemos encontrar una vecindad V de e tal que $(xV)(yV) \subset xyU$. Sean $a \in A \cap (xV)$ y $b \in B \cap (yV)$. Entonces tenemos que $ab \in A \cdot B \cap (xyU)$. Por lo tanto $xy \in (AB)^-$.

(ii) se sigue del hecho de que la función $x \longmapsto x^{-1}$ es un homeomorfismo de G sobre G.

(iii) se sigue del hecho de que la función $z \longmapsto xzy$ es un homeomorfismo de G sobre G para todo $x, y \in G$.

(iv) Tenemos que la función $f: G \times G \to G$ dada por

$$f(a,b) = aba^{-1}b$$

es continua. Puesto que $\{e\}$ es cerrado el conjunto

$$H = \{(a,b) \in G \times G \mid f(a,b) = aba^{-1}b^{-1} = e\}$$

resulta ser también cerrado. Como $A \times B \subset H$, entonces $(A \times B)^- = A^- \times B^- \subset H$. Es decir, $ab = ba$ para todo $a \in \bar{A}$ y $b \in B^-$. $\square$

1.12 COROLARIO. Si H es un subgrupo (o subgrupo normal) de un grupo topológico G, entonces H^- es también un subgrupo (subgrupo normal). Si G es un grupo topológico T_0 y H un subgrupo abeliano de G, entonces H^- es tambien un subgrupo abeliano de G.

Prueba. Sea H un subgrupo de G. Por el Teorema (1.11,(i)) tenemos que

$$(H^{-})(H^{-}) \subset (H \cdot H)^{-} \subset H^{-}$$

Por lo tanto H^{-} es un subgrupo de G. Sea H un subgrupo normal de G y $x \in G$. Por (1.11,(ii)) tenemos

$$x H^{-} x^{-1} = (x H x^{-1})^{-} = H^{-}.$$

Por lo tanto H^{-} es también un subgrupo normal. La última afirmación es consecuencia inmediata de (1.11(iv)). $\square$

<u>1.13 TEOREMA.</u> Sea G un grupo topológico. El conjunto $\{e\}^{-}$ es un subgrupo normal de G y es el mas pequeño subgrupo cerrado de G. La cerradura de un punto $a \in G$ es el conjunto $a \cdot \{e\}^{-} = \{e\}^{-} \cdot a$.

Prueba. Por el Teorema (1.12) el conjunto $\{e\}^{-}$ es un subgrupo normal cerrado de G. Es claro que es el mas pequeño subgrupo cerrado de G. Sea $a \in G$. Por el Teorema (1.11, (iii)) tenemos que $a\{e\}^{-}e = (a \cdot \{e\} \cdot e)^{-} = \{a\}^{-} = a\{e\}^{-} = \{e\}^{-} \cdot a$, ya que $\{e\}^{-}$ es normal. $\square$

<u>1.14. TEOREMA.</u> Un subgrupo H de un grupo topológico G es abierto si y solo si su interior es no vacío. Cada subgrupo abierto H de G es cerrado.

Prueba. Si H es un subgrupo abierto de G es claro que $H^{o} \neq \emptyset$. Inversamente, sea $x \in H^{o}$. Entonces existe U vecindad de e tal que $xU \subset H$. Para cada $y \in H$ tenemos que

$$y \in yU = yx^{-1}xU \subset yx^{-1}H = H.$$

Por lo tanto H es abierto.

Si H es un subgrupo abierto de G, entonces el conjunto $H^{c} = G - H = \bigcup\{xH : x \notin H\}$ es abierto, ya que xH es abierto para toda $x \notin H$. Por lo tanto H es cerrado. $\square$

1.15. TEOREMA. Sea $\mathcal{A}$ una familia de vecindades de e en un grupo topológico G tal que:

(i) para cada $U \in \mathcal{A}$, existe $V \in \mathcal{A}$ tal que $V^2 \subset U$;

(ii) para cada $U \in \mathcal{A}$, existe $V \in \mathcal{A}$ tal que $V^{-1} \subset U$;

(iii) para cada $U, V \in \mathcal{A}$, existe $W \in \mathcal{A}$ tal que $W \subset U \cap V$.

Sea $H = \cap\{U : U \in \mathcal{A}\}$. Entonces H es un subgrupo cerrado de G. Si además,

(iv) para cada $U \in \mathcal{A}$ y $x \in G$, existe $V \in \mathcal{A}$ tal que $xVx^{-1} \subset U$,

entonces H es un subgrupo normal de G.

Prueba. Primero probaremos que H es un subgrupo de G. Supongamos que $x, y \in H$ y $U \in \mathcal{A}$. Sea $V \in \mathcal{A}$ tal que $V^2 \subset U$. Entonces tenemos que $x \cdot y \subset V^2 \subset U$, ya que $x, y \in V$. Analogamente se prueba que $x^{-1} \in H$ para cada $x \in H$. Esto prueba que H es un subgrupo de G. Sea $x \in G - H$, entonces $x \notin U$ para alguna $U \in \mathcal{A}$. Sean V_1, V_2 y V elementos de $\mathcal{A}$ tal que $V_1^2 \subset U$, $V_2^{-1} \subset V_1$ y $V \subset V_1 \cap V_2$. Entonces $VV^{-1} \subset V_1 V_2^{-1} \subset V_1 V_1 \subset U$. Si $(xV) \cap V \neq \emptyset$, entonces $x \in VV^{-1} \subset U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $(xV) \cap V = \emptyset$. Esto implica que $x \in xV \subset G - V \subset G - H$. Así queda probado que H es un subgrupo cerrado.

Supongamos que (iv) se cumple y sean $h \in H$ y $x \in G$. Para cada $U \in \mathcal{A}$, sea $V \in \mathcal{A}$ tal que $xVx^{-1} \subset U$. Entonces $xhx^{-1} \in xVx^{-1} \subset U$. Como U se tomo arbitrariamente, se tiene que $xhx^{-1} \in H$. Por lo tanto H es un subgrupo normal de G. $\square$

1.16. TEOREMA. Sea U cualquier vecindad simetrica de e en un grupo topológico G. Entonces el conjunto $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ es un subgrupo abierto y cerrado de G.

Prueba. Es claro que L es el subgrupo generado por U. De (1.14) se obtiene que es abierto y cerrado. $\square$

1.17 TEOREMA. Sea G un grupo topológico con elemento neutro e, $F \subset G$ compacto y U un subconjunto abierto de G tal que $F \subset U$. Entonces existe una vecindad V de e tal que $(FV) \cup (VF) \subset U$. Si G es localmente compacto, entonces V puede elegirse de tal modo que $((FV) \cup (VF))^-$ sea compacto.

Prueba. Para cada $x \in F$ existe una vecindad W_x de e tal que $xW_x \subset U$ y una vecindad V_x de e tal que $V_x^2 \subset W_x$. Puesto que $F \subset \bigcup_{x \in F} xV_x$, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$ tal que $F \subset \bigcup_{i=1}^n x_i V_{x_i}$. Escribamos $V_1 = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Entonces

$$FV_1 \subset \bigcup_{i=1}^n x_i V_{x_i} V_1 \subset \bigcup_{i=1}^n x_i V_{x_i}^2 \subset \bigcup_{i=1}^n x_i W_{x_i} \subset U.$$

De manera análoga podemos encontrar una vecindad V_2 de e tal que $V_2 F \subset U$. Escribamos $V = V_1 \cap V_2$. Tenemos que

$$(FV) \cup (VF) \subset FV_1 \cup V_2 F \subset U.$$

Supongamos que G es localmente compacto, entonces podemos tomar a V con $\bar{V}$ compacto. Por (1.4) se tiene que $F(V^-)$ es cerrado y compacto. Como $FV \subset F(V^-)$ y $F(V^-)$ es cerrado, entonces $(FV)^- \subset F(V^-)$, lo cual implica que $(FV)^-$ es compacto. Analogamente probamos que $(VF)^-$ es compacto. Por lo tanto

$$(FV)^- \cup (VF)^- = ((FV) \cup (VF))^-$$

es compacto. $\square$

1.18 DEFINICION. Un grupo topológico G se dice que es compactamente generado si contiene un subconjunto compacto F tal que el grupo generado por F es G,

$$\text{i.e.} \qquad G = \{e\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cup F^{-1})^n.$$

<u>1.19. TEOREMA.</u> Sea G un grupo topológico localmente compacto. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) G es compactamente generado;

(ii) existe un abierto U de G tal que $\bar{U}$ es compacto y U genera G;

(iii) existe una vecindad U de e tal que $\bar{U}$ es compacto y U genera G.

Prueba. Obviamente (iii) $\Rightarrow$ (ii) y (ii) $\Rightarrow$ (i). Solo hay que probar (i) $\Rightarrow$ (iii). Supongamos que G es compactamente generado. Sea $F \subset G$ un compacto que genere G. El conjunto $F \cup \{e\}$ es compacto. Por (1.17) existe V vecindad de e tal que

$$e \in H = F \cup \{e\} \subset (HV) \cup (VH) \subset G$$

y $((HV) \cup (VH))^-$ es compacto. Definamos $U = (HV) \cup (VH)$. Claramente U satisface (iii). $\square$

<u>1.20. TEOREMA.</u> Sea G un grupo topológico localmente compacto con elemento neutro e y sea F un subconjunto compacto arbitrario de G. Entonces existe un subgrupo abierto y cerrado compactamente generado de G que contiene a F.

Prueba. Tenemos que $F \cup \{e\}$ es compacto. Por el Teorema (1.17) existe un abierto U que contiene a $F \cup \{e\}$ tal que $\bar{U}$ sea compacto. El abierto $U \cup U^{-1}$ es obviamente una vecindad simetrica de e. Aplicando el Teorema (1.16) tenemos que el conjunto $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U \cup U^{-1})^n$ es un subgrupo abierto y cerrado de G. Como $U \cup U^{-1} \subset L$, entonces $\bar{U} \cup \bar{U}^{-1} \subset L$, lo cual implica que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\bar{U} \cup \bar{U}^{-1})^n \subset L.$$

Por lo tanto se obtiene la igualdad $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bar{U} \cup \bar{U}^{-1})$. Por la compacidad de $\bar{U} \cup \bar{U}^{-1}$ se sigue que L es compactamente generado $\square$

II-METRIZACION.

2.1. TEOREMA. Sea $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de vecindades simétricas de e en un grupo topológico G tal que $U_{k+1}^2 \subset U_k$ para $k=1,2,\dots$. Sea $H=\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$. Entonces existe una seudométrica invariante por la izquierda ∇ en G tal que:

(i) $\nabla(x,y)=0 \Leftrightarrow y^{-1}x \in H$;

(ii) $\nabla(x,y) \leq 2^{-k+2}$ si $y^{-1}x \in U_k$;

(iii) $2^{-k} \leq \nabla(x,y)$ si $y^{-1}x \notin U_k$.

Si además, $xU_kx^{-1}=U_k$ para todo $x\in G$ y $k=1,2,\dots$, entonces ∇ es también invariante por la derecha y

(iv) $\nabla(x^{-1},y^{-1})=\nabla(x,y)$ para todo $x,y\in G$.

Prueba. Para cada entero positivo k escribamos

$$V_{2^{-k}}=U_k.$$

Sabemos que todo número racional diádico r, con $0<r<1$, lo podemos escribir de la forma

$$r=2^{-l_1}+2^{-l_2}+\dots+2^{-l_n}, \text{ donde } 0<l_1<l_2<\dots<l_n. \qquad (1)$$

Sea r un número racional diádico, si $0<r<1$, escribamos a r como en (1) y definamos

$$V_r=V_{2^{-l_1}}\cdot V_{2^{-l_2}}\cdots V_{2^{-l_n}}. \qquad (2)$$

Si $r\geq 1$, definamos $V_r=G$. Primero probaremos que

$$r<s \Rightarrow V_r\subset V_s \qquad (3)$$

Podemos suponer que $s<1$, ya que la inclusión es obvia para $s\geq 1$. Escribamos

$$s = 2^{-m_1} + 2^{-m_2} + \cdots + 2^{-m_p} \quad \text{con } 0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_p$$

y a r como en (1). Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} s = 2^{-m_1} + 2^{-m_2} + \cdots + 2^{-m_p} &= 2^{-m_1} + \cdots + 2^{-m_{p-1}}(1 + 2^{m_{p-1}-m_p}) \\ &< 2^{-m_1} + \cdots + 2^{-m_{p-1}+1} \\ &< 2^{-m_1} + \cdots + 2^{-m_{p-2}} + 2^{-m_{p-2}} \\ &= 2^{-m_1} + \cdots + 2^{-m_{p-2}+1} \end{aligned}$$

Aplicando inducción tenemos que $s < 2^{-m_1+1}$. Así, $2^{-l_1} \le r < s < 2^{-m_1+1}$, lo cual implica que $m_1 - 1 < l_1$, i.e. $m_1 \le l_1$. Como $r < s$ existe un entero k tal que $m_k < l_k$. Tomemos k como el menor entero con esta propiedad, entonces

$$l_j = m_j \text{ para todo } j < k \quad \text{y} \quad m_k < l_k,$$

ya que $m_1 \le l_1$. Escribamos $W = V_{2^{-l_1}} \cdot V_{2^{-l_2}} \cdots V_{2^{-l_{k-1}}}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} V_r &= W\, V_{2^{-l_k}} \cdot V_{2^{-l_{k+1}}} \cdots V_{2^{-l_n}} \\ &\subset W\, V_{2^{-l_k}} \cdot V_{2^{-l_{k+1}}} \cdots V_{2^{-l_{n-1}}} \cdot V_{2^{-l_n}} \cdot V_{2^{-l_n}} \\ &\subset W\, V_{2^{-l_k}}\, V_{2^{-l_{k+1}}} \cdots V_{2^{-l_{n-1}}} \cdot V_{2^{-l_n+1}} \\ &\subset W\, V_{2^{-l_k}} \cdot V_{2^{-l_{k+1}}} \cdots V_{2^{-l_{n-1}}} \cdot V_{2^{-l_{n-1}}} \\ &\subset W\, V_{2^{-l_k}} \cdot V_{2^{-l_{k+1}}} \cdots V_{2^{-l_{n-1}+1}} \\ &\;\;\vdots \\ &\subset W\, V_{2^{-l_k}} \cdot V_{2^{-l_k}} \\ &\subset W\, V_{2^{-l_k+1}} \\ &\subset W\, V_{2^{-m_k}} \\ &= V_{2^{-m_1}} \cdot V_{2^{-m_2}} \cdots V_{2^{-m_{k-1}}} \cdot V_{2^{-m_k}} \\ &\subset V_{2^{-m_1}} \cdot V_{2^{-m_2}} \cdots V_{2^{-m_{k-1}}} \cdot V_{2^{-m_k}}\, V_{2^{-m_{k+1}}} \cdots V_{2^{-m_p}} \\ &= V_s. \end{aligned}$$

Ahora probaremos que para cada diádico r de la forma (1) y para cada entero positivo l se tiene que

$$V_r V_{2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+2}}. \tag{4}$$

Puesto que (4) es obvio si $r+2^{-l+2} \geq 1$, supondremos $r+2^{-l+2} < 1$. Si $l > l_n$, entonces

$$V_r V_{2^{-l}} = V_{r+2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+2}}. \tag{5}$$

Si $l \leq l_n$, sea k el entero positivo tal que $l_{k-1} < l \leq l_k$ (definimos $l_0 = 0$). Sea $r_1 = 2^{-l+1} - 2^{-l_{k+1}} - \dots - 2^{-l_n}$ y $r_2 = r + r_1$. Entonces es claro que

$$r < r_2 < r + 2^{-l+1}.$$

Aplicando (5) y (3) a r_2 se obtiene

$$V_r V_{2^{-l}} \subset V_{r_2} \cdot V_{2^{-l}} = V_{r_2+2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+1}+2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+2}}.$$

Esto prueba (4).

Para cada $x \in G$, definamos $f(x) = \inf\{r : x \in V_r\}$. Es claro que

$$f(x) = 0 \iff x \in H.$$

Finalmente, definamos $\nabla : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}^+$ como:

$$\nabla(x,y) = \sup\{|f(ax) - f(ay)| : a \in G\}.$$

Obviamente $\nabla(x,y) = \nabla(y,x)$ y $\nabla(x,x) = 0$ para todo $x, y \in G$. Sean $x, y, z \in G$, entonces

$$\begin{aligned}\nabla(x,y) &= \sup\{|f(ax)-f(ay)| : a \in G\} \\ &\leq \sup\{|f(ax)-f(az)| + |f(az)-f(ay)| : a \in G\} \\ &\leq \sup\{|f(ax)-f(az)| : a \in G\} + \sup\{|f(az)-f(ay)| : a \in G\} \\ &= \nabla(x,z) + \nabla(z,y).\end{aligned}$$

Si $b, x, y \in G$, tenemos que

$$\begin{aligned}\nabla(bx,by) &= \sup\{|f(abx)-f(aby)| : a \in G\} \\ &= \sup\{|f(cx)-f(cy)| : c \in G\} \\ &= \nabla(x,y).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bar{\nu}$ es una seudométrica invariante por la izquierda de G.

Probaremos (ii), supongamos que l es un entero positivo, $b \in V_{2^{-l}}$ y que $z \in G$. Si $z \in V_r$, entonces por (4) se tiene que $zb \in V_{r+2^{-l+2}}$. Esto implica que $f(zb) \leq f(z) + 2^{-l+2}$. Análogamente, si $zb \in V_r$, entonces tenemos que $z \in V_r V_{2^{-l}}^{-1} \subset V_{r+2^{-l+2}}$ y de aquí $f(z) \leq f(zb) + 2^{-l+2}$. Así probamos la desigualdad $|f(z) - f(zb)| \leq 2^{-l+2}$ para todo $b \in V_{2^{-l}}$ y $z \in G$. Por lo tanto $\bar{\nu}(b, e) \leq 2^{-l+2}$ para todo $b \in V_{2^{-l}}$. Si $y^{-1}x \in U_k = V_{2^{-k}}$, entonces

$$\bar{\nu}(x, y) = \bar{\nu}(y^{-1}x, e) \leq 2^{-k+2},$$

ya que $\bar{\nu}$ es invariante por la izquierda. Esto prueba (ii).

Ahora probaremos (iii). Si $y^{-1}x \notin U_k = V_{2^{-k}}$, entonces $f(y^{-1}x) \geq 2^{-k}$, lo cual implica que $\bar{\nu}(x, y) = \bar{\nu}(y^{-1}x, e) \geq |f(ey^{-1}x) - f(e \cdot e)| = f(y^{-1}x) \geq 2^{-k}$.

En base a (ii) y (iii) probaremos (i). Por (ii) tenemos que si $y^{-1}x \in H$, entonces $\bar{\nu}(x, y) \leq 2^{-k+2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $\bar{\nu}(x, y) = 0$. Por (iii) tenemos que si $y^{-1}x \notin U_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $2^{-k} \leq \bar{\nu}(x, y)$, i.e. $\bar{\nu}(x, y) \neq 0$. Así queda probado (i).

Finalmente, supongamos que $x U_k x^{-1} = U_k$ para todo $x \in G$ y $k = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces $x V_r x^{-1} = V_r$ para todo número racional diádico $r > 0$, lo cual implica que $f(xyx^{-1}) = f(y)$ para todo $x, y \in G$. Si $a, x, y \in G$ tenemos por lo anterior que

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}(xa, ya) &= \sup\{|f(zxa) - f(zya)| : z \in G\} \\
&= \sup\{|f(a^{-1}azxa) - f(a^{-1}azya)| : z \in G\} \\
&= \sup\{|f(azx) - f(azy)| : z \in G\} \\
&= \sup\{|f(zx) - f(zy)| : z \in G\} \\
&= \bar{\nu}(x, y)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bar{\nu}$ es invariante por la derecha. Además para $x, y \in G$ arbitrarios tenemos las siguientes identidades

$$\Gamma(x^{-1}, y^{-1}) = \Gamma(e, y^{-1}x) = \Gamma(y, x) = \Gamma(x, y)$$ □.

2.2. TEOREMA. Sea G un grupo topológico (G es un espacio T_0). Entonces G es métrizable si y solo si es primero numerable. En este caso la mètrica puede tomarse invariante bajo traslaciones izquierdas.

Prueba. Es claro que si G es métrizable, entonces G es primero numerable. Inversamente, supongamos que $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base local en e. Sea $U_1 = V_1 \cap V_1^{-1}$. Si $U_1, \ldots, U_{n-1}$ han sido definidas, sea U_n una vecindad simétrica de e tal que $U_n \subset U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1} \cap V_n$ y $U_n^2 \subset U_{n-1}$. Claramente la familia $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ satisface las hipótesis del Teorema (2.1). Sea Γ una seudométrica invariante por la izquierda dada por la familia $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$. Como G es Hausdorff y $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base local en e se tiene que $H = \{e\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$. Por lo tanto Γ es una métrica en G. De las partes (ii) y (iii) del Teorema (2.1) tenemos las contensiones

$$\{x \in G : \Gamma(x, e) < 2^{-k}\} \subset U_k \subset \{x \in G : \Gamma(x, e) \leq 2^{-k+2}\}$$

para cada $k = 1, 2, \ldots$. Esto implica que la topología definida por Γ coincide con la topología de G, ya que $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base local en e. □.

2.3. TEOREMA. Sea G un grupo topológico con una métrica ρ invariante por la izquierda y derecha. Entonces para dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ en G se tiene que $a_n b_n \to e$ si y solo si $b_n a_n \to e$.

Prueba. La prueba se obtiene mediante las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \rho(a_n b_n, e) &= \rho(b_n a_n b_n, b_n) \\ &= \rho(b_n a_n b_n b_n^{-1}, b_n b_n^{-1}) \\ &= \rho(b_n a_n, e), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$ □

En base al Teorema (2.3) veremos que no todo grupo topológico métrizable admite una métrica compatible invariante por la izquierda y derecha. Por ejemplo, sea $G = SL(2,\mathbb{R})$ el grupo de las mátrices invertibles con determinante 1, para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$A(n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B(n) = \begin{pmatrix} n & \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Entonces $A(n)B(n) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{n^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e$

y $\qquad B(n)A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \not\longrightarrow e.$

__2.4. TEOREMA.__ Sea G un grupo topológico compacto tal que $\{e\}$ es un G_δ. Entonces G admite una métrica compatible invariante por la izquierda y derecha.

Prueba. Supongamos que $\{e\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, donde U_n es un abierto de G. Sea $V_1 = U_1$. Por inducción encontramos una sucesion $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vecindades de e tal que $V_n^- \subset V_{n-1} \cap U_n$ para cada $n = 1, 2, \ldots$. Probaremos que la familia $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base local en e. Sea una vecindad abierta de e. Si $V_n \not\subset W$ para toda $n = 1, 2, \ldots$, entonces la sucesión $\{\bar{V}_n \cap (G-W)\}_{n=1}^{\infty}$ de compactos no vacios tiene la propiedad de intersección finita. Esto implica que $\bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n^- \cap (G-W))$ es distinto del vacio, lo cual es una contradicción, ya que

$$\bigcap_{n=2}^{\infty} (V_n^- \cap (G-W)) = \left(\bigcap_{n=2}^{\infty} V_n^- \right) \cap (G-W) = \{e\} \cap (G-W) = \emptyset.$$

Por lo tanto $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base local numerable en e. De aqui se sigue que G es primero numerable. Por el Teorema (2.2) G admite una métrica compatible invariante por la izquierda $\bar{V} : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Para cada $x, y \in G$ definamos

$$\rho(x,y)=\sup\{\nabla(xz,yz): z\in G\}$$

Puesto que G es compacto la función ρ resulta estar bién definida. Claramente ρ es una métrica en G. Si $a, x, y \in G$ tenemosque

$$\begin{aligned}\rho(xa,ya)&=\sup\{\nabla(xaz,yaz): z\in G\}\\ &=\sup\{\nabla(xw,yw): w\in G\}\\ &=\rho(x,y)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\rho(ax,ay)&=\sup\{\nabla(axz,ayz): z\in G\}\\ &=\sup\{\nabla(xz,yz): z\in G\}\\ &=\rho(x,y).\end{aligned}$$

Esto prueba que ρ es una métrica invariante por la izquierda y derecha.

Sea $\varepsilon>0$ un real positivo arbitrario. En virtud del Teorema (1.10) existe $\delta>0$ tal que

$$z^{-1}\{x\in G: \nabla(x,e)<\delta\}\cdot z \subset \{x\in G: \nabla(x,e)<\varepsilon\} \tag{1}$$

para todo $z\in G$. Si $x\in G$ y $\nabla(x,e)<\delta$, entonces por (1) se tiene que

$$\nabla(z^{-1}xz,e)=\nabla(xz,ez)<\varepsilon$$

para todo $z\in G$. De aqui se sigue que $\rho(x,e)\le\varepsilon$. Estoprueba la contención

$$\{x\in G: \nabla(x,e)<\delta\}\subset\{x\in G: \rho(x,e)\le\varepsilon\}.$$

Inversamente, si $\rho(x,e)<\varepsilon$, entonces

$$\nabla(x\cdot e,e\cdot e)=\nabla(x,e)\le\rho(x,e)<\varepsilon.$$

Esto prueba que

$$\{x\in G: \rho(x,e)<\varepsilon\}\subset\{x\in G: \nabla(x,e)<\varepsilon\}.$$

Por lo tanto las topológias inducidas por ∇ y ρ coinciden. $\square$

<u>2.5 COROLARIO.</u> *Todo grupo topológico compacto métrizable admite una métrica invariante por la izquierda y derecha.*

2.6. TEOREMA (Kakutani y Kodaira). Sea G un grupo topológico σ-compacto y localmente compacto con elemento neutro e. Entonces para cada familia numerable $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vecindades de e, existe un subgrupo normal compacto N de G tal que $N \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ y G/N es métrizable y segundo numerable.

Prueba. Escribamos $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, donde F_n es compacto y $F_n \subset F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea V_0 una vecindad de e con $\overline{V_0}$ compacto. Usando los Teoremas (1.5), (1.6) y (1.10) podemos construir una sucesión $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vecindades simétricas de e tal que $V_n^2 \subset V_{n-1} \cap U_n$ y $x V_n x^{-1} \subset V_{n-1}$ para toda $x \in F_n$, $n \in \mathbb{N}$. Como en la prueba del Teorema (1.7) se tiene que $\overline{V_n} \subset V_{n-1}$ $(n=1,2,\ldots)$. Sea $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. Claramente $N \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Consideremos la familia $\mathcal{A} = \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como $\mathcal{A}$ cumple las hipótesis (i), (ii), (iii) y (iv) del Teorema (1.15) se tiene que N es un subgrupo normal cerrado de G. Dado que $N \subset \overline{V_0}$, entonces N es también compacto.

Sea $p : G \longrightarrow G/N$ la proyección canónica. Escribamos $e_0 = N$. Probaremos que la familia $\{p(V_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base local de e_0 en G/N. Como la proyección canónica es abierta los conjuntos $p(V_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ son abiertos en G/N que contienen a e_0. Sea $H = \{xN : x \in W\}$ $(W \subset G)$ una vecindad de e_0 en G/N. Si no existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V_{n_0} \subset WN$, entonces la familia $\{\overline{V_n} \cap (G - WN)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene la propiedad de intersección finita y como son compactos la intersección

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{V_n} \cap (G - WN)) \neq \emptyset,$$

lo cual es una contradicción, ya que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{V_n} \cap (G - WN)) = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}\Big) \cap (G - WN) = N \cap (G - WN) = \emptyset,$$

es vacía porque $e \in W$ implica que $N \subset WN$. Por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$V_{n_0} \subset WN$. Aplicando p tenemos que $p(V_{n_0}) \subset H = p(WN)$. Esto prueba que $\{p(V_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base local mumerable de e_0 en G/N. Como G/N es primero numerable se sigue, por el Teorema (2.2), que G/N es métrizable. Tenemos que el grupo topológico G/N es σ-compacto, ya que $G/N = \bigcup_{n=1}^{\infty} p(F_n)$ donde $p(F_n)$ es compacto para toda $n \in \mathbb{N}$. De aqui se tiene que G/N es un grupo topológico métrizable y de Lindelöf. Como en un espacio métrico la propiedad de ser Lindelöf es equivalente a la de ser segundo numerable (ver el libro de Topology by J. Dugundji. Teorema 5.6. Capitulo IX pagina 187), entonces G/N es métrizable y segundo numerable. $\square$

III-LOS CARDINALES $W(G)$, $d(G)$ $\chi(G)$ y $k(G)$ (Propiedades de $W(G)$, $d(G)$, $\chi(G)$ y $k(G)$).

3.1. LEMA. Sea G un grupo topológico, D un subconjunto denso de G y $U \in \eta(e)$ ($\eta(e)$ denota el sistema de vecindades de e). Entonces $G = DU$.

Prueba. Dado $p \in G$ existe $x \in D \cap pU^{-1}$. Sea $y \in U$ tal que $x = py^{-1}$, entonces

$$p = xy \in xU \subset DU$$

Por lo tanto, $G = DU$. $\square$

3.2 LEMA. Si G es un grupo topológico localmente compacto, entonces

$$k(G) \leq d(G),$$

donde $k(G)$ es el menor cardinal de una familia de subconjuntos compactos de G cuya unión es G y $d(G)$ es el carácter de densidad de G.

Prueba. Sea U una vecindad del neutro e de G con $\overline{U}$ compacto y sea D un subconjunto denso de G con $|D| = d(G)$. Por el Lema (3.1) tenemos que

$$G = DU = D\overline{U} = \bigcup_{x \in D} x \cdot \overline{U},$$

donde $x \cdot \overline{U}$ es compacto para toda $x \in D$. De aquí obtenemos que

$$k(G) \leq d(G).$$ $\square$

3.3 LEMA. Sea G un grupo topológico y η una base local en e. Si para cada $V \in \eta$ existe $D_V \subset G$ tal que $G = D_V \cdot V$, entonces la familia

$$\{xV : x \in D_V, V \in \eta\}$$

es una base de G.

Prueba. Basta probar que si $p \in G$ y $U \in \eta$ existen $V \in \eta$ y $x \in D_V$ tal que $p \in xV \subset pU$. Sea $V \in \eta$ con la propiedad $V^{-1}V \subset U$ y $x \in D_V$ tal que $p \in xV$, entonces $p \in xV \subset pV^{-1}V \subset pU$. $\square$.

3.4. OBSERVACION. En un grupo topológico G se cumple la igualdad

$$\chi(G) = \chi(g, G) = \chi(e, G)$$

para todo $g \in G$, i.e. el carácter de G es igual al carácter de G en cada punto.

3.5. TEOREMA. Sea G un grupo topológico. Entonces

$$W(G) = d(G) \cdot \chi(G)$$

Prueba. Consideremos las desigualdades obvias $W(G) \geq d(G)$ y $W(G) \geq \chi(G)$. Si $W(G) < \omega$, entonces $\chi(G) = 1$ y

$$W(G) \geq d(G) = d(G) \cdot \chi(G).$$

En caso contrario, si $W(G) \geq \omega$ se tiene que

$$W(G) = W(G) \cdot W(G) \geq d(G) \cdot \chi(G).$$

Así obtenemos que $W(G) \geq d(G) \cdot \chi(G)$. Para la desigualdad $\leq$, sea D un subconjunto denso de G de cardinalidad $d(G)$ y η una base local en e de cardinalidad $\chi(G)$. De los Lemas (3.1) y (3.3) la familia

$$\{xV : x \in D \text{ y } V \in \eta\}$$

es una base de G. Por lo tanto,

$$W(G) \leq d(G) \cdot \chi(G).$$ $\square$

3.6. TEOREMA. Sea G un grupo topológico no discreto. Entonces

(i) $W(G) \leq k(G) \cdot \chi(G)$; y

(ii) si G es localmente compacto, entonces $W(G) = k(G) \cdot \chi(G)$.

Prueba. (i) Sea $\{K_\alpha : \alpha \in J\}$ una cubierta de compactos de G cuya cardinalidad sea $k(G)$ y η una base local en e de cardinalidad $\chi(G)$. Para cada compacto K_α, $\alpha \in J$, y cada $V \in \eta$ existe $D_\alpha \subset K_\alpha$ finito tal que $K_\alpha \subset D_\alpha V$. Defínase $D_V = \bigcup_{\alpha \in J} D_\alpha$. Claramente $G = D_V \cdot V$ y $|D_V| \leq \omega \cdot k(G)$ Por los Lemas (3.1) y (3.3) la familia

$$\{xV : x \in D_V,\ V \in \eta\}$$

es una base de G. De aquí se sigue la desigualdad

$$W(G) \leq \omega \cdot k(G) \cdot \chi(G) = k(G)\,\chi(G),$$

(como G no es discreto se tiene $\chi(G) \geq \omega$).

(ii) se sigue de (i), del Teorema (3.5) y del Lema (3.2). □

3.7. TEOREMA (Šapirovskiĭ). *Para cada grupo topológico compacto G con $W(G) = \alpha \geq \omega$ existe una función continua y sobre de G en $[0,1]^\alpha$.*

Para una prueba de este Teorema ver, Cardinal Functions in Topology (Ten years Later) by I. Juhász (1980). Mathematical Centre Tracts 123. Amsterdan. □

3.8. TEOREMA (Kuz'minov). *Para cada grupo topológico compacto G con $W(G) = \alpha \geq \omega$ existe una función continua y sobre de $\{0,1\}^\alpha$ en G.*

Para una prueba de este Teorema ver, On a Hypothesis of P. S. Alexandroff in The Theory of Topological Groups, by Kuz'minov (1959) Doklady Akad. Nauk SSSR. N. S. 125, 727-729. □

3.9. OBSERVACION. *Si α es un número cardinal mayor que ω, entonces*

$$|[0,1]^\alpha| = 2^\alpha.$$

Prueba. Sabemos que $|[0,1]| = 2^\omega$. De aquí se sigue que

$$|[0,1]^\alpha| = |[0,1]|^\alpha = (2^\omega)^\alpha = 2^{\alpha\omega} = 2^\alpha.$$ □

<u>3.10. LEMA.</u> Sea α un cardinal infinito e I un conjunto cuya cardinalidad es menor o igual a 2^{α}. Entonces existe una topología τ de I tal que (I,τ) es T_2 y τ tiene una base de cardinalidad menor o igual a α.

Prueba. Sea J un conjunto con $|J|=\alpha$. Para cada $j\in J$ escojemos un espacio topológico X_j que sea T_2 y tenga solamente dos puntos (por ejemplo $\{0,1\}$). Consideremos el producto $X=\prod_{j\in J} X_j$, X es un espacio topológico T_2 y tiene cardinalidad 2^{α}. Además, como α es un cardinal infinito, se tiene que el conjunto de partes finitas de J tiene cardinalidad α, lo cual implica que X tiene una base $\mathcal{B}$ de cardinalidad $\leq\alpha$. Como $|I|\leq 2^{\alpha}=|X|$, entonces existe una función inyectiva $\varphi: I\longrightarrow X$. Si T_φ es la topología débil en I dada por la funcion φ, entonces T_φ claramente cumple las condiciones del Lema. $\square$

<u>3.11. TEOREMA (Hewitt - Marczewski - Pondiczery).</u> Sea $\alpha\geq\omega$ y $\{X_i : i\in I\}$ una familia de espacios topológicos con $|I|\leq 2^{\alpha}$ y con $d(X_i)\leq\alpha$ para toda $i\in I$. Entonces

$$d\Big(\prod_{i\in I} X_i\Big)\leq\alpha.$$

Prueba. Por el Lema anterior existe una topología τ de I tal que el espacio (I,τ) es T_2 y tiene una base $\mathcal{B}$ de cardinalidad menor o igual a α.

Sea M un conjunto de cardinalidad α. Para cada $i\in I$, sea D_i un subconjunto denso de X_i de cardinalidad $d(X_i)$, $f_i : D_i\to M$ una función inyectiva y $x_i^0\in D_i$. Para cada subfamilia finita $\{B_1,\dots,B_k\}$ de $\mathcal{B}$ ajenos dos a dos y cada elemento $(m_1,\dots,m_k)\in M^k$, definimos el elemento $x^{B_1,\dots,B_k}_{m_1,\dots,m_k}\in\prod_{i\in I} X_i$ por

$$\pi_i\left(x^{B_1,\dots,B_k}_{m_1,\dots,m_k}\right)=\begin{cases} f_i^{-1}(m_j) & \text{si } i\in B_j \text{ y } m_j\in \operatorname{Im} f_i\\ x_i^0 & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

Tenemos que

$$D=\{ \chi^{B_1,\dots,B_k}_{m_1,\dots,m_k} \mid B_1,\dots,B_k \text{ son elementos de } \mathcal{B} \text{ ajenos dos a dos },$$
$$(m_1,\dots,m_k)\in M^k \text{ y } k\in\mathbb{N}\}.$$

es un subconjunto de $\prod_{i\in I} X_i$ con $|D|\leq\alpha$, ya que $|\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M^k|=\alpha$ y el conjunto de partes finitas de $\mathcal{B}$ tiene cardinalidad menor o igual que α. Probaremos que D es denso en $\prod_{i\in I} X_i$. Sea $\bigcap_{j=1}^{n} p_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$ con U_{i_j} abierto en X_{i_j} $(j=1,\dots,n)$ un abierto basico de $\prod_{i\in I} X_i$. Para cada $j\in\{1,\dots,n\}$, sea $x_{i_j}\in D_{i_j}\cap U_{i_j}$ y $m_j=\varphi_{i_j}(x_{i_j})$. Como (I,τ) es T_2 existen elementos $B_1,\dots,B_n$ de $\mathcal{B}$ ajenos dos a dos tales que $i_j\in B_j$ $(j=1,\dots,n)$. Claramente se tiene que

$$\chi^{B_1,\dots,B_n}_{m_1,\dots,m_n}\in D\cap\left(\bigcap_{j=1}^{n} p_{i_j}^{-1}(U_{i_j})\right).$$

Por lo tanto, D es denso en $\prod_{i\in I} X_i$ y

$$d\left(\prod_{i\in I} X_i\right)\leq |D|\leq\alpha. \qquad \square$$

<u>3.12. TEOREMA.</u> Sea α un número ordinal y sea $\{X_i : i\in I\}$ una familia de espacios topológicos con $d(\prod_{i\in I} X_i)\leq\alpha$. Si para cada $i\in I$ existen abiertos ajenos no vacios U_i, V_i de X_i, entonces

$$|I|\leq 2^{\alpha}.$$

Prueba. Sea D un subconjunto denso de $\prod_{i\in I} X_i$ cuya cardinalidad sea $d(\prod_{i\in I} X_i)$. Definimos $f: I\longrightarrow \mathcal{P}(D)$ como

$$f(i)=\{x\in D : p_i(x)\in U_i\}.$$

Veamos que f es inyectiva. Sean $i,j\in I$ distintos. Como $U_j\neq\emptyset\neq V_i$ por el axioma de elección $p_j^{-1}(U_j)\cap p_i^{-1}(V_i)\neq\emptyset$. Tomemos un punto

$$x_0\in D\cap\left(p_j^{-1}(U_j)\cap p_i^{-1}(V_i)\right),$$

entonces tenemos que $x_0\in f(j)-f(i)$, ya que $V_i\cap U_i=\emptyset$. Esto prueba que f es inyectiva. Por lo tanto, $|I|\leq 2^{\alpha}$. $\square$

3.13 COROLARIO. Sea $\alpha \geq \omega$ y $\gamma = \log(\alpha)$. Si $\{X_i : i \in I\}$ es una familia de espacios topológicos Hausdorff con mas de un punto (i.e. $|X_i| > 1$ para toda $i \in I$) con $|I| = \alpha$ y $d(X_i) \leq \gamma$ para toda $i \in I$, entonces

$$d(\prod_{i \in I} X_i) = \log(\alpha).$$

Prueba. En virtud del Teorema (3.11) tenemos la desigualdad

$$d(\prod_{i \in I} X_i) \leq \gamma = \log(\alpha),$$

ya que $|I| = \alpha \leq 2^{\gamma}$. Escribamos $\beta = d(\prod_{i \in I} X_i)$. Por el Teorema (3.12) tenemos la desigualdad $|I| = \alpha \leq 2^{\beta}$, y como $\log(\alpha) = \min\{\delta : \alpha \leq 2^{\delta}\}$, entonces se tiene que

$$\log(\alpha) \leq d(\prod_{i \in I} X_i).$$

Por lo tanto, $d(\prod_{i \in I} X_i) = \log(\alpha)$. $\square$

3.14. TEOREMA. Cada grupo topológico compacto G con $W(G) = \alpha \geq \omega$ satisface:

(i) $|G| = 2^{\alpha}$;

(ii) $d(G) = \log(\alpha)$.

Prueba. (i) Por los Teoremas (3.7) y (3.8) existen dos funciones continuas y suprayectivas

$$f : G \longrightarrow [0,1]^{\alpha} \quad \text{y} \quad \psi : \{0,1\}^{\alpha} \longrightarrow G.$$

Por ser f y ψ suprayectivas se tiene que $|[0,1]^{\alpha}| \leq |G| \leq |\{0,1\}^{\alpha}| = 2^{\alpha}$. De la observación (3.9) se obtiene la igualdad

$$|[0,1]^{\alpha}| = |G| = |\{0,1\}^{\alpha}| = 2^{\alpha}.$$

(ii) Por la continuidad y suprayectividad de f y ψ se obtienen las desigualdades

$$d([0,1]^{\alpha}) \leq d(G) \leq d(\{0,1\}^{\alpha}).$$

En virtud del Corolario (3.13) se obtienen las identidades

$$d([0,1]^{\alpha}) = d(G) = d(\{0,1\}^{\alpha}) = \log(\alpha).$$ $\square$

3.15 TEOREMA. Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Si H y G/H contienen subconjuntos densos de cardinalidad α y β respectivamente, entonces G contiene un subconjunto denso de cardinalidad menor o igual que $\alpha\cdot\beta$. En particular, $d(G) \leq d(H)\cdot d(G/H)$.

Prueba. Sean D y $\{bH : b\in B\}$ subconjuntos densos de H, G/H de cardinalidades α, β respectivamente. Probaremos que BD es un subconjunto denso de G. Sea U un subconjunto abierto de G. Como la proyección canónica de G sobre G/H es abierta, existe $b\in B$ tal que $b\cdot H\in \{uH : u\in U\}$. De aquí obtenemos que $(bH)\cap U \neq \emptyset$ y $H\cap(b^{-1}U)\neq\emptyset$. Como $H\cap(b^{-1}U)$ es un abierto no vacío de H y D es denso en H, la intersección $D\cap H\cap(b^{-1}U) = D\cap(b^{-1}U)\neq\emptyset$. Así obtenemos que $BD\cap U\neq\emptyset$. Por lo tanto, BD es un subconjunto denso de G y $|BD|\leq\alpha\cdot\beta$. □

3.16 TEOREMA. Si X es un espacio regular, entonces

$$W(X) \leq 2^{d(X)}.$$

Prueba. Sea D un subconjunto denso de X de cardinalidad $d(X)$ y sea τ_D la topología relativa de D. Para cada $U\in\tau_D$, definimos $\tilde{U} = \operatorname{Int}\bar{U}$. Sea

$$\mathcal{B} = \{\tilde{U} : U\in\tau_D\}$$

Probaremos que $\mathcal{B}$ es base de X. En efecto, sea V un abierto de X y $x\in V$. Por la regularidad de X existe W vecindad abierta de x tal que $x\in W\subset\bar{W}\subset V$. Claramente tenemos las contenciones

$$x\in W\subset \widetilde{W\cap D}\subset\bar{W}\subset V,$$

en donde $\widetilde{W\cap D}\in\mathcal{B}$. Esto prueba que $\mathcal{B}$ es una base de X. Por lo tanto,

$$W(X) \leq |\mathcal{B}| \leq |\tau_D| \leq 2^{|D|} = 2^{d(X)}.$$ □

<u>3.17. TEOREMA.</u> Si X es un espacio topológico T_0, entonces
$$|X| \leq 2^{w(X)}.$$

Prueba. Sea $\mathcal{B}$ una base de X de cardinalidad $w(X)$. Para cada $x \in X$, sea $\gamma_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$. Entonces si $x \neq y$ implica que $\gamma_x \neq \gamma_y$, ya que X es T_0. De aquí se tiene que la función
$$x \longmapsto \gamma_x \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$$
es inyectiva. Por lo tanto $|X| \leq 2^{w(X)}$. $\square$

<u>3.18. TEOREMA.</u> Sea G un grupo topológico no discreto, localmente compacto y σ-compacto. Entonces

(i) $w(G) = \chi(G)$ y

(ii) $d(G) = \log(\chi(G))$.

Prueba. (i) Como G es σ-compacto y no discreto, $k(G) \leq \omega$ y $\chi(G) \geq \omega$. En virtud del Teorema (3.6, (ii)) tenemos que
$$w(G) = k(G)\,\chi(G) = \chi(G).$$

(ii) Sea N un subgrupo normal compacto de G tal que G/N es métrizable y segundo numerable (ver Teorema (2.6)). Primero probaremos la desigualdad $d(N) \leq \log(\chi(G))$. Si $|N| < \omega$ es clara, ya que $\chi(G) \geq \omega$. Por otra parte, si $|N| \geq \omega$, entonces, por (3.17), se cumple la desigualdad $w(N) \geq \omega$ (como G es T_2 implica que N es T_2). En base al Teorema (3.14, (ii)) y la parte (i) de este Teorema
$$d(N) = \log(w(N)) = \log(\chi(N)) \leq \log(\chi(G)). \qquad (a)$$

Por ser G/N espacio segundo numerable, tenemos que G/N es separable. Aplicando el Teorema (3.15) y la desigualdad (a) se tiene que
$$d(G) \leq d(N) \cdot d(G/N) \leq \log(\chi(G)) \cdot \omega = \log(\chi(G)).$$

Como G es regular (ver Teorema (1.7)), podemos aplicar el Teorema (3.16) a G y obtener que

$$\log(w(G)) = \log(\chi(G)) \leq d(G).$$

Por lo tanto, $d(G) = \log(w(G))$. $\square$

3.19. DEFINICION. Sea ν un número ordinal y X un conjunto. Una X-sucesión de tipo ν es una función

$$j : W(\nu) \longrightarrow X,$$

donde $W(\nu)$ es el intervalo inicial determinado por ν.

3.20. TEOREMA. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico localmente compacto y T_2. Si $\chi(p, X) \geq \alpha$ para toda $p \in X$, entonces

$$|X| \geq 2^{\alpha}.$$

Prueba. Sea μ el número ordinal inicial cuyo número cardinal sea α. Para cada ordinal $\nu < \mu$, sea J_ν el conjunto de todas las $\{0,1\}$-sucesiones de tipo ν. Por inducción transfinita definiremos una función $V : \bigcup_{\nu<\mu} J_\nu \longrightarrow \mathcal{T}$ como sigue:

Si ν_0 es el primer ordinal con $\nu_0 < \mu$, entonces $J_{\nu_0} = \emptyset$ y definimos $V(\emptyset) = X$. Sea $\nu_1 = \nu_0 + 1$ con $\nu_1 < \mu$, Tomemos dos puntos distintos p_0, p_1 de X y vecindades ajenas V_0, V_1 de p_0, p_1 con $\overline{V_0}, \overline{V_1}$ compactos respectivamente. Si $J_{\nu_1} = \{j_0, j_1\}$, entonces definimos $V(j_0) = V_0$ y $V(j_1) = V_1$. Supongamos que $\nu < \mu$ y que para todo $\xi < \nu$, $j \in J_\xi$ el conjunto $V(j) \in \mathcal{T}$ ha sido definido de tal modo que se cumplan las siguientes propiedades:

(i) $\overline{V(j)}$ es compacto no vacío;

(ii) La familia $\{\overline{V(j|_\eta)} : \eta < \xi\}$ tiene la propiedad de intersección finita ($j|_\eta$ denota $j|_{W(\eta)}$):

(iii) si ξ es de la forma $\eta+1$, $i\in J_\eta$ y $j=[i,\varepsilon]$ $(\varepsilon\in\{0,1\})$, entonces $\overline{V(j)}\subset V(i)$.

Sea $j\in J_\nu$. Si ν es límite definimos $V(j)=X$. Si $\nu=\xi+1$, tenemos que $j=[i,\varepsilon]$ $(\varepsilon\in\{0,1\})$ para algún $i\in J_\xi$. Probaremos la igualdad

$$H^{(j)}=\cap\{V(j|_\eta):\eta\le\xi\}=\cap\{\overline{V(j|_\eta)}:\eta\le\xi\}.$$

Sea $x\in\cap\{\overline{V(j|_\eta)}:\eta<\xi\}$ y $\eta_0<\xi$. Por (iii) tenemos que $x\in\overline{V(j|_{\eta_0+1})}\subset V(j|_{\eta_0})$. Por lo cual $x\in\cap\{V(j|_\eta):\eta\le\xi\}$. Esto prueba la contención

$$\cap\{V(j|_\eta):\eta\le\xi\}\supset\cap\{\overline{V(j|_\eta)}:\eta<\xi\}\supset\cap\{\overline{V(j|_\eta)}:\eta\le\xi\}.$$

La otra contención es obvia. Así obtenemos la igualdad. De (ii) se sigue que $H^{(j)}\neq\emptyset$. Si $H^{(j)}=\{p\}$, entonces de la familia de intersecciones finitas de la familia $\{V(j|_\eta):\eta<\xi\}$ podemos tomar una base local en p de cardinalidad menor o igual que el número cardinal de ξ que es menor que α (ver Teorema 2.27 página 36 del libro, Introducción a la Topología de Conjuntos por Adalberto G. Máynez). Esto es una contradicción ya que $\chi(p,X)\geq\alpha$. Así podemos elegir dos puntos distintos p_ε $(\varepsilon\in\{0,1\})$ tal que $p_\varepsilon\in H^{(j)}$ y dos vecindades V_ε de p_ε tales que $\overline{V_\varepsilon}$ es compacto, $\overline{V_\varepsilon}\subset V(i)=V(j|_\xi)$ y $\overline{V_0}\cap\overline{V_1}=\emptyset$. Entonces definimos

$$V(j)=V([i,\varepsilon])=V_\varepsilon\quad(\varepsilon=0,1).$$

Por inducción transfinita $V(j)$ está definido para cada $j\in\bigcup_{\nu<\mu}J_\nu$. Es claro que para cada $j\in J_\mu$ la familia $\{\overline{V(j|_\eta)}:\eta<\mu\}$ tiene la propiedad de intersección finita. Por lo cual

$$\cap\{V(j|_\eta):\eta<\mu\}=\cap\{\overline{V(j|_\eta)}:\eta<\mu\}\neq\emptyset.$$

Ahora probaremos que si $j,j'\in J_\mu$ y $j\neq j'$, entonces

$$(\cap\{V(j|_\eta):\eta<\mu\})\cap(\cap\{V(j'|_\eta):\eta<\mu\})=\emptyset:$$

La demostracion la dividiremos en dos casos:

(a) Si μ es un ordinal infinito, entonces μ es un número ordinal límite, ya que μ es un ordinal inicial. Sea $\nu<\mu$ el menor ordinal tal que $j(\nu)\neq j'(\nu)$. Sin perdida de generalidad supongamos que $j(\nu)=0$ y $j'(\nu)=1$. Tenemos que $\nu+1<\mu$. Entonces

$$j|_{\nu+1}=[j|_\nu,0] \text{ y } j'|_{\nu+1}=[j|_\nu,1],$$

ya que $j|_\nu=j'|_\nu$. Por la construcción de la función V se tiene que $V(j|_{\nu+1})\cap V(j'|_{\nu+1})=\emptyset$. Por lo tanto

$$(\cap\{V(j|_\eta):\eta<\mu\})\cap(\cap\{V(j'|_\eta):\eta<\mu\})=\emptyset.$$

(b) Si μ es finito, sea $\xi<\mu$ el menor cardinal tal que $j'(\xi)\neq j(\xi)$. Si $\xi+1<\mu$ es análogo al caso (i). Supongamos pués que $\xi+1=\mu$. El resultado se obtiene al observar que en el caso finito la construcción se puede seguir hasta el caso $\nu=\mu$.

Para cada $j\in J_\mu$, elegimos $p_j\in\cap\{V(j|_\eta):\eta<\mu\}$. Del parrafo anterior se obtiene que la función $j\longmapsto p_j$ con dominio J_μ y codominio X es inyectiva. Por lo tanto,

$$|X|\geq|J_\mu|=2^\alpha.$$

$\square$

<u>3.21.TEOREMA.</u> Sea G un grupo topológico no discreto, localmente compacto y σ-compacto. Entonces

$$|G|=2^{w(G)}.$$

Prueba. En un grupo topológico tenemos que $\chi(G)=\chi(g,G)$ para todo $g\in G$. Por el Teorema (3.18) tenemos que $w(G)=\chi(G)=\chi(g,G)$ para todo $g\in G$. Aplicando (3.20) se obtiene la desigualdad

$$2^{w(G)}=2^{\chi(G)}\leq|G|.$$

Sea $\mathcal{B}$ una base de G de cardinalidad $W(G)$. Por ser G un espacio T_1 se tiene que para cada $g \in G$ existe $\gamma_g \subset \mathcal{B}$ tal que $G-\{g\} = \cup \gamma_g$. Así la función $g \longmapsto \gamma_g$ con dominio G y codominio $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ es inyectiva, lo cual implica que

$$|G| \leq 2^{W(G)} = 2^{\chi(G)}.$$

Por lo tanto,

$$|G| = 2^{W(G)}.$$

□

3.22. LEMA. Sea G un grupo topológico localmente compacto y H un subgrupo abierto σ-compacto de G. Entonces

$$\omega \cdot k(G) = \omega \cdot |G/H|.$$

Prueba. Es claro que $k(G) \leq k(H)\cdot|G/H| \leq \omega\cdot|G/H|$. Si $|G/H| \leq \omega$, entonces G es σ-compacto y de aquí $\omega\cdot k(G) = \omega = \omega\cdot|G/H|$. Supongamos que $|G/H| > \omega$. Como cada subconjunto compacto de G intersecta a una cantidad finita de clases laterales de H, se tiene que

$$|G/H| \leq \omega \cdot k(G).$$

Por lo tanto,

$$\omega\cdot k(G) = \omega\cdot|G/H| = \omega\cdot k(G).$$

□

3.23 TEOREMA. Sea G un grupo topológico no discreto localmente compacto. Entonces

(i) $d(G) = k(G)\cdot \log(\chi(G))$ y

(ii) $|G| = k(G)\cdot 2^{\chi(G)}$.

Prueba. Sea F un subconjunto compacto no vacio de G (por ejemplo un conjunto finito de puntos). En virtud del Teorema (1.20) existe un subgrupo abierto H compactamente generado de G. Entonces H es no discreto (ya que $\emptyset \neq F \subset H$) y es un subgrupo localmente compacto y σ-compacto de G.

(i) Claramente $d(G) \leq |G/H| \cdot d(H)$, ya que H es abierto. Sea A un subconjunto denso de H de cardinalidad $d(H)$ y escribamos $G/H = \{g_\alpha H : \alpha \in I\}$. Como cada clase es homeomorfa a H (como espacio topológico), tenemos que $d(g_\alpha H) = d(H) \leq d(G)$, para toda $\alpha \in I$. Sea $D \subset G$ denso con cardinalidad $d(G)$. Para cada $\alpha \in I$, existe una función inyectiva

$$f_\alpha : A \longrightarrow D \cap g_\alpha H,$$

ya que $d(g_\alpha H) = |A| \leq |D \cap g_\alpha H|$, para todo $\alpha \in I$. Entonces la función

$$(g_\alpha H, a) \longrightarrow f_\alpha(a)$$

es inyectiva, lo cual implica que $|G/H| \cdot d(H) \leq d(G)$. Por lo tanto,

$$d(G) = |G/H| \cdot d(H).$$

Por ser G no discreto, tenemos que $d(G) \geq \omega$. Por el Teorema (3.18, (ii)), el Lema (3.22) y la identidad $\chi(G) = \chi(H)$ aplicados a H, tenemos que

$$\begin{aligned} d(G) = |G/H|\, d(H) &= \omega\, |G/H| \cdot d(H) \\ &= \omega \cdot k(G) \cdot d(H) \\ &= k(G) \log(\chi(H)) \\ &= k(G) \log(\chi(G)). \end{aligned}$$

(ii) Por los Teoremas (3.21), (3.18, (i)) aplicados a H y el Lema (3.22) obtenemos:

$$\begin{aligned} |G| = |G/H| \cdot |H| &= \omega \cdot |G/H| \cdot |H| \\ &= \omega \cdot k(G) \cdot |H| \\ &= k(G) \cdot 2^{\chi(H)} \\ &= k(G) \cdot 2^{\chi(G)}. \end{aligned}$$

$\square$

3.24 OBSERVACION. Un subconjunto infinito A de um grupo topológico G genera um subgrupo H tal que $|H|=|A|$.

3.25 TEOREMA. Todo grupo topológico no discreto localmente compacto y separable contiene um subgrupo denso propio numerable.

Prueba. Sea G um grupo topológico que satisfaga las hipótesis del Teorema. Del Teorema (3.20) tenemos que

$$|G| \geq 2^{\omega},$$

lo cual implica que
$$d(G) < |G|.$$

Sea D um subconjunto denso de cardinalidad $d(G)$. Entonces D genera um subgrupo H de G con $|H|=|D|= d(G) \leq \omega < |G|$. □

3.26 TEOREMA. Sea G um grupo topológico localmente compacto tal que $k(G)<|G|$. Entonces G contiene un subgrupo denso propio.

Prueba. Por el Teorema (3.23) tenemos que

$$\begin{aligned} d(G) &= k(G) \log(\chi(G)) \\ &< |G| \cdot 2^{\chi(G)} \\ &= |G| \cdot k(G) \cdot 2^{\chi(G)} \\ &= |G| \cdot |G| \\ &= |G|. \end{aligned}$$

De manera análoga que en (3.25), se deduce que G contiene un subgrupo denso propio. □

IV-ESPACIOS RESOLUBLES.

4.1. DEFINICION. Un espacio topológico X que contenga un subconjunto denso A cuyo complemento $X-A$ sea también denso se dice que es resoluble. Un subconjunto denso de X cuyo complemento es también denso se dice que es un DC-conjunto en X.

4.2 TEOREMA. Las siguientes condiciones en un espacio topológico X son equivalentes:

(a) X es resoluble;

(b) X contiene dos subconjuntos densos ajenos;

(c) X contiene un subconjunto denso con interior vacío;

(d) X contiene un subconjunto A tal que $A^{\circ} = (X-A)^{\circ} = \emptyset$.

La prueba de este Teorema es fácil.

4.3. TEOREMA. Un espacio topológico X es resoluble si y solo si cada subconjunto abierto no vacío de X contiene un subespacio no vacío resoluble.

Prueba. Supongamos que X es resoluble. Es claro que cada subconjunto abierto de X es resoluble con la topología relativa.

Inversamente, supongamos que cada subconjunto abierto no vacío de X contiene un subespacio no vacio resoluble. Sea G_0 un abierto no vacío de X y sea A_0 un subespacio no vació resoluble de G_0, con D_0 y E_0 subconjuntos densos ajenos de A_0. Si $X = \overline{A}_0$, entonces D_0 y E_0 son densos en X y por el Teorema (4.2) X es resoluble. Si no, entonces $G_1 = X - \overline{A}_0$ es un abierto no vacío de X

y contiene un subespacio no vacío A_1, el cual contiene dos subconjuntos densos ajenos D_1 y E_1. Supongamos que se han seleccionado subespacios no vacíos A_ν y dos subconjuntos densos ajenos D_ν, E_ν de A_ν para cada número ordinal ν, con $\nu<\mu$, μ también un número ordinal. Si $X=(\bigcup_{\nu<\mu} A_\nu)^-$, entonces los conjuntos $\bigcup_{\nu<\mu} D_\nu$ y $\bigcup_{\nu<\mu} E_\nu$ son ajenos y densos en X y por el Teorema (4.2) X es resoluble. Supongamos que no existe un número ordinal μ tal que $X=(\bigcup_{\nu<\mu} A_\nu)^-$. Sea α el número cardinal de la familia de subconjuntos abiertos no vacíos de X y sea η el número ordinal inicial con número cardinal $\bar{\eta}=\alpha$. Sea θ un número ordinal tal que su número cardinal $\bar{\theta}>\bar{\eta}$, $\eta<\theta$. Por inducción transfinita construimos la familia

$$\{G_\nu = X-(\bigcup_{\xi<\nu} A_\xi)^- : \nu<\theta\}$$

de abiertos no vacíos distintos de X cuya cardinalidad sea $\bar{\theta}$. Pero esto es una contradicción, ya que a lo más tenemos $\bar{\eta}$ abiertos no vacíos distintos de X. Por lo tanto existe un número ordinal μ tal que $X=(\bigcup_{\nu<\mu} A_\nu)^-$. Es claro que los conjuntos $D=\bigcup_{\nu<\mu} D_\nu$ y $E=\bigcup_{\nu<\mu} D_\nu$ son densos y ajenos en X. Por el Teorema (4.2) se sigue que X es resoluble. $\square$

4.4. DEFINICION. Al menor número cardinal de un subconjunto abierto no vacío de un espacio topológico X se le llama el *carácter de dispersión* de X y lo denotamos por el símbolo $\Delta(X)$.

4.5. TEOREMA. Si X es un espacio topológico infinito T_1 con la propiedad de que $W(X)\leq\Delta(X)$, entonces X es resoluble.

Prueba. Claramente X no tiene puntos aislados. Sea $\mathcal{B}=\{U_\alpha:\alpha\in J\}$ una base abierta de X de cardinalidad $W(X)=|J|=\alpha$. Para probar que X es resoluble basta probar que X contiene dos subconjuntos ajenos que tengan, puntos en cada elemento de $\mathcal{B}$. Para esto bien ordenamos el conjunto J, entonces $J = W(\mu)$ para algún ordinal μ ($W(\mu)$ denota el intervalo inicial dado por μ). Sea α_0 el primer elemento de J. Escojemos dos puntos distintos p_{α_0} y q_{α_0} en el conjunto abierto U_{α_0}. Supongamos que han sido seleccionados los puntos distintos p_ν y q_ν en el abierto U_ν para cada ordinal $\nu < \theta$ con θ un ordinal menor que μ. Definimos $A_\theta = \{ p_\nu \mid \nu < \theta \}$ y $B_\theta = \{ q_\nu : \nu < \theta \}$. Entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
|A_\theta| + |B_\theta| &= \bar{\theta} + \bar{\theta} && (\bar{\theta} \text{ denota el cardinal de } \theta) \\
&< \bar{\mu} + \bar{\mu} && (\text{ya que } \bar{\mu} = W(X) \text{ y } \mu \text{ es un ordinal inicial}) \\
&= W(X) + W(X) \\
&\leq \Delta(X) + \Delta(X) \\
&= \Delta(X) && (\text{ya que } \Delta(X) \geq \omega) \\
&\leq |U_\theta|.
\end{aligned}
$$

Si $|U_\theta - (A_\theta \cup B_\theta)| = n < \omega$, entonces

$$
\begin{aligned}
\omega \leq |U_\theta| &= n + |(U_\theta \cap A_\theta) \cup (U_\theta \cap B_\theta)| \\
&\leq n + |A_\theta| + |B_\theta| \\
&\leq |A_\theta| + |B_\theta|,
\end{aligned}
$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\omega \leq |U_\theta - (A_\theta \cup B_\theta)|$. Así que podemos tomar dos puntos distintos p_θ, q_θ en $U_\theta - (A_\theta \cup B_\theta)$. Está selección inductiva puede llevarse a cabo para todo ordinal $\theta < \mu$. Definimos los conjuntos $A = \{ p_\nu : \nu < \mu \}$ y $B = \{ q_\nu : \nu < \mu \}$. Claramente A y B satisfacen lo deseado. $\square$

4.6. TEOREMA. Sea X un espacio topológico T_1 sin puntos aislados y con la propiedad de que cada subconjunto abierto no vacío de X contiene un subconjunto abierto H no vació tal que cada punto $p \in H$ cumple con la propiedad

$$\chi(p, X) \leq |H|.$$

Entonces X es resoluble.

Prueba. Sea U un subconjunto abierto no vació de X y sea U_0 un subconjunto abierto no vació de U cuya cardinalidad sea $\Delta(U)$. Por hipótesis U_0 contiene un subconjunto abierto no vacío H_0 con la propiedad de que si $p \in H_0$, entonces

$$\chi(p, X) \leq |H_0|.$$

Claramente tenemos que $|H_0| = |U_0|$. Como X es un espacio topológico T_1 sin puntos aislados el cardinal $|H_0|$ es infinito. Además tenemos las desigualdades

$$\begin{aligned} W(H_0) &\leq |H_0| \cdot \chi(H_0) \\ &\leq |H_0| \cdot \sum_{p \in H_0} \chi(p, X) \qquad (\text{ya que } \chi(p, H_0) = \chi(p, X) \text{ por ser } H_0 \text{ abierto}). \\ &\leq |H_0| \sum_{p \in H_0} |H_0|_p \\ &\leq |H_0| \cdot |H_0| \cdot |H_0| \\ &= |H_0|. \end{aligned}$$

Si V es un subconjunto abierto no vació de H_0, entonces $|V| = |H_0| = |U_0|$, lo cual implica que $\Delta(H_0) = |H_0|$ y que $W(H_0) \leq \Delta(H_0)$. En virtud del Teorema (4.5) se tiene que H_0 es resoluble con la topología relativa, y como H_0 es un subconjunto del abierto U tomado arbitrariamente, entonces por el Teorema (4.3) se tiene que X es resoluble. $\square$

4.7. LEMA. Todo espacio topológico compacto Hausdorff X tiene una base de cardinalidad $\leq |X|$.

Prueba. Si $|X| < \omega$ el resultado es obvio. Supongamos pués que el cardinal $|X|$ es infinito. Consideremos el producto $X \times X$ y la diagonal $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$. Para cada $(x,y) \in X \times X - \Delta$ escojemos vecindades abiertas ajenas $U_{(x,y)}$, $V_{(x,y)}$ de x, y respectivamente. Probaremos que la familia de intersecciones finitas de la familia

$$\mathcal{V} = \{ U_{(x,y)} : (x,y) \in X \times X - \Delta \}$$

es una base de X. En efecto, sea U un abierto de X y $x_0 \in U$. Para cada $y \in X - U$ tenemos que $y \in V_{(x_0,y)}$, lo cual implica que

$$X - U \subset \bigcup_{y \in X-U} V_{(x_0,y)}.$$

Dado que $X-U$ es compacto (ya que es un cerrado en un compacto) existen $y_1, \ldots, y_n \in X - U$ tal que

$$X - U \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{(x_0,y_i)}.$$

De aqui obtenemos la contención

$$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{(x_0,y_i)} \subset X - \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{(x_0,y_i)}\right) \subset U.$$

Esto prueba que es base. Claramente esta base tiene cardinalidad menor o igual a $|X \times X - \Delta| \leq |X \times X| = |X|$. $\square$

4.8. LEMA. Sea X un espacio localmente compacto y T_2. Si $p \in X$ y V es una vecindad (abierta) de p, entonces

$$\chi(p, X) \leq |V|.$$

Prueba. Sea U una vecindad abierta de p tal que $\overline{U}$ es compacto y $p \in U \subset \overline{U} \subset V$. Tenemos que $\overline{U}$ es un espacio T_2 y compacto con la topología relativa de X. Por el Lema (4.7), $\overline{U}$ tiene una base de cardinalidad menor o igual a $|\bar{U}|$. Sea $\gamma_p = \{\bar{U} \cap V_\alpha \mid \alpha I\}$ una base local de p en $\bar{U}$ tal que $|\gamma_p| \leq |\bar{U}|$. Claramente la familia $\eta_p = \{U \cap V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ es una base local de p en X con $|\eta_p| \leq |\gamma_p| \leq |\bar{U}| \leq |V|$. Por lo tanto

$$\chi(p, X) \leq |V|.$$

□

<u>4.9. TEOREMA.</u> Todo espacio topológico Hausdorff localmente compacto sin puntos aislados es resoluble.

Prueba. Sea X un espacio topológico con las hipótesis del Teorema y sea U un abierto no vacío arbitrario de X. En virtud del Lema (4.8) se tiene que para cada $p \in U$ se cumple la desigualdad $\chi(p, X) \leq |U|$. Por el Teorema (4.6) se tiene que X es resoluble.

□

A pesar de que el siguiente Teorema es una consecuencia inmediata del Teorema (4.6) daremos una prueba usando inducción transfinita.

<u>4.10. TEOREMA.</u> Todo espacio métrico sin puntos aislados es resoluble.

Prueba. Sea M un espacio métrico sin puntos aislados. Bien ordenemos a M como conjunto y escribamos

$$M = \{p_\nu \mid \nu < \mu\},$$

para algún número ordinal μ. Definiremos dos subconjuntos complementarios A, B (i.e. $B = X - A$) de M por medio de inducción transfinita. Sean p_{ν_1} y p_{ν_2} los dos primeros elementos de M. El punto $p_{\nu_1} \in A$ y $p_{\nu_2} \in B$. Supongamos que todos los puntos p_ν, para $\nu < \eta$ con η un número ordinal menor que μ, han sido asignados a A o a B. Denotemos por

$$A_\eta = \{p_\nu \in A \mid \nu < \eta\} \quad \text{y} \quad B_\eta = \{p_\nu \in B \mid \nu < \eta\}.$$

Si $d(p_\eta, A_\eta) < d(p_\eta, B_\eta)$, entonces p_η es asignado a B. En caso contrario, i.e. si $d(p_\eta, A_\eta) \geq d(p_\eta, B_\eta)$, el punto p_η es asignado a A. Procediendo por inducción transfinita, obtenemos la expresión de M como dos subconjuntos complementarios A y B. Por último probaremos que los conjuntos A y B son densos en M. Sea $p_{\nu_0} \in M$ y $B_\varepsilon(p_{\nu_0})$ una bola con centro p_{ν_0} y radio $\varepsilon > 0$.

(i) Supongamos que $p_{\nu_0} \in A$. Dado que M no tiene puntos aislados podemos tomar un punto $p_\theta \in B_{\varepsilon/2}(p_{\nu_0}) - \{p_{\nu_0}\}$. Si $p_\theta \in B$ no hay nada que probar. Supongamos pués que $p_\theta \in A$. Si $\nu_0 < \theta$, entonces

$$d(p_\theta, B_\theta) \leq d(p_\theta, A_\theta) \leq d(p_\theta, p_{\nu_0}) < \varepsilon/2,$$

lo cual implica que existe $p_\xi \in B_\theta \subset B$ tal que $d(p_\theta, p_\xi) < \varepsilon/2$, i.e. $p_\xi \in B_\varepsilon(p_{\nu_0}) \cap B$. El caso $\theta < \nu_0$ es análogo.

(ii) La prueba para el caso $p_{\nu_0} \in B$ es completamente análoga a (i). Asi nuestra afirmación queda probada por (i) y (ii). □

El siguiente Teorema prueba la existencia de espacios topológicos T_1 conexos que no son resolubles.

4.11. TEOREMA. Para cada número cardinal infinito α existe un espacio topológico T_1 conexo de cardinalidad α cuyos subconjuntos densos son abiertos.

Prueba. Sea X un conjunto de cardinalidad α y sea τ_c la topología cofinita de X. Entonces (X, τ_c) es un espacio topológico T_1 conexo cuyo carácter de dispersión es mayor o igual a α. Sea

$$\mathcal{A} = \{\tau \subset 2^X \mid \tau \text{ es una topología de } X,\ \tau_c \subset \tau,\ \Delta((X,\tau)) \geq \omega$$
$$\text{y } \tau \text{ tiene la propiedad de intersección finita}\}$$

La familia $\mathfrak{F}$ es no vacía, ya que $\tau_c \in \mathfrak{F}$. Tenemos que $\mathfrak{F}$ es un conjunto preordenado con la inclusión con la propiedad de que cada cadena de elementos de $\mathfrak{F}$ tiene una cota (no es difícil probarlo). Por el Lema de Zorn existe un elemento máximal $\tau_M \in \mathfrak{F}$. Consideremos el espacio topológico (X,τ_M). Como $\tau_c \subset \tau_M$ y τ_M tiene la propiedad de intersección finita, entonces (X,τ_M) es un espacio T_1 conexo. Sea D un subconjunto denso de (X,τ_M). Entonces la familia

$$\tau_0 = \tau_M \cup \{D \cap U / U \in \tau_M\}$$

es una topología de X tal que $\tau_c \subset \tau_M$, $\Delta(X,\tau_0) \geq \omega$ y τ_0 tiene la propiedad de intersección finita, i.e. $\tau_0 \in \mathfrak{F}$. Pero como τ_M es un elemento máximal y $\tau_M \subset \tau_0$, entonces $\tau_M = \tau_0$. Por lo tanto $D \in \tau_0 = \tau_M$. Así el espacio topológico (X,τ_M) cumple con lo deseado. $\square$

V- UNA CONJETURA DE DIETRICH.

En el capítulo IV se probó que cada espacio T_2 localmente compacto sin puntos aislados se puede escribir como la unión de dos subconjuntos densos ajenos propios. Esto hizo pensar, como lo hizo Dietrich (1972), "si cada grupo topológico no discreto localmente compacto tiene un subgrupo denso propio."

El siguiente ejemplo, débido a Rajagopalan y Subrahmanian, muesta que la respuesta a la pregunta de Dietrich es no.. Para ver el ejemplo primero probaremos el Teorema siguiente.

5.1. TEOREMA. Sea G un grupo topológico Abeliano divisible. Si G contiene un subgrupo abierto H de orden finito, entonces G no contiene subgrupos densos propios.

Prueba. Se K un subgrupo denso de G y $g \in G$. Probaremos que $g \in K$. por ser gH abierto existe $h \in H$ tal que $gh \in K$, y como G es divisible existe $y \in G$ tal que $h = y^n$ (donde $n = O(H)$). Por ser yH abierto existe $h_0 \in H$ tal que $yh_0 \in K$, y como el orden de H es n, entonces

$$h = y^n = y^n e = y^n h_0^n = (y h_0)^n \in K^n \subset K.$$

De aquí, obtenemos que $g \in K h^{-1} \subset K K^{-1} \subset K$. $\square$

Sea $K = \{-1, 1\}^{\omega}$ y $G = R^{\omega}$, donde

$$R = \{ \exp(2\pi i p/q) \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0 \} \subset S^1$$

Tenemos que G es un grupo divisible. En efecto sea $x = \left(\exp\left(\frac{2\pi i \cdot p_k}{q_k}\right)\right)_{k=1}^{\infty}$

un elemento de G y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el elemento $y = \left(\exp\left(\frac{2\pi i p_k}{n q_k}\right)\right)_{k=1}^{\infty}$ entonces

$$y^n = \left[\left(\exp\left(\frac{2\pi i p_k}{n p_k}\right)\right)_{k=1}^{\infty}\right]^n$$

$$= \left(\exp\left(\frac{2\pi i p_k}{n q_k}\right)^n\right)_{k=1}^{\infty}$$

$$= \left(\exp\left(\frac{2\pi i p_k n}{n q_k}\right)\right)_{k=1}^{\infty}$$

$$= \left(\exp\left(\frac{2\pi i p_k}{q_k}\right)\right)_{k=1}^{\infty}$$

$$= x.$$

Esto prueba que G es divisible. Por otra parte tenemos K es un subgrupo de G que es también un grupo topológico compacto. Tenemos que cada clase de equivalencia xK, $x \in G$, es homeomorfa (como espacio topológico) a K. Ahora le damos a G la siguiente topología

$$\mathcal{T} = \{ U \subset G \mid U \cap xK \text{ es abierto en } xK \text{ para toda } x \in G \}.$$

Veamos que la familia $\mathcal{U} = \{ V \subset K \mid V \text{ es una vecindad abierta en } K \text{ de } e \}$ es una base local en el neutro e. En efecto, sea U una vecindad abierta en G de e. Escribimos $V = U \cap K$ y obtenemos lo deseado, ya que $U \in \mathcal{T}$. No es difícil checar que la familia $\mathcal{U}$ satisface las hipótesis del Teorema (1.5). Así, la familia

$$\{ xU \mid x \in G \text{ y } U \in \mathcal{U} \}$$

forma una subbase de una topología de G, que lo hace un grupo topológico. Probaremos que dicha topología y $\mathcal{T}$ coinciden. Sea $U \in \mathcal{U}$ y $x \in G$, tenemos que U es un abierto de K, lo cual implica que xU es un abierto de xK. Como dos clases o son la misma o son ajenas se tiene que $xU \in \mathcal{T}$. Así, $\mathcal{T}$ es más fina que la topología cuya subbase es $\{ xU : x \in G, U \in \mathcal{U} \}$. Sea $V \in \mathcal{T}$ y $x \in V$, tenemos que $V \cap xK$ es un abierto en xK, lo cual implica que $x^{-1}(V \cap xK) = x^{-1}V \cap K$ es un abierto de K que contiene a e. De aquí $xU \subset V$ con $U = x^{-1}V \cap K \in \mathcal{U}$. Esto prueba la igualdad de las dos topologías. Por lo tanto $(G, \mathcal{T})$ es un grupo topológico. Como cada clase de equivalencia es un subconjunto de G abierto y compacto, se tiene que G es localmente compacto. En conclución tenemos que G es un grupo topológico Abeliano divisible que tiene a K como subgrupo abierto de orden 2. Por el Teorema (5.1) G es un grupo topológico no discreto Abeliano localmente compacto divisible que no contiene subgrupos densos propios.

$\square$

BIBLIOGRAFIA.

LIBROS

1.- E. Hewitt y K. A. Ross. Abstract Harmonic Analysis - I. 2ª Edicion., Springer - Verlag (1979).

2.- W. W. Comfort y S. Negrepontis. Chain Conditions in Topology. Cambridge University Pres.

4.- L. S. Pontriaguin. Grupos Continuos. Mir, Mosco.

5.- Willard. General Topology. Addison Wesley.

6.- P. J. Higgins. An Introduction to Topological Groups. Cambridge University Press.

7.- A. García Máynez. Introducción a la Topología de Conjuntos. Trillas.

8.- I. Juhász. Cardinal Functions in Topology.

9.- J. L. Kelley. General Topology. Springer - Verlag.

10.- K. Kuratowski. Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Topología. Vicens Vives.

11.- J. Dugundji. Topology. Allan and Bacon.

12.- W. W. Comfort. Topological Groups. Notas.

ARTICULOS.

1.- E. Hewitt. (1943) A problem of set-theoretic topology. Duke Math. J. 10, 309-333.

2.- E. Hewitt (1963) A remark on characters of locally compact Abelian groups. Fundamenta Math. 53, 55-64

3.- V. Kuz'minov.(1959). On a hypothesis P. S. Alexandroff in the theory of topological groups. Doklady Akad. Nauk SSSR N.S. 125, 727-729

4.- M. Rajagopalan y H. Subrahmanian.(1976). Dense subgroups of locally compact groups. Colloq. Math. 35, 289-292.