J. G.
8

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GEOMETRIA

RIEMANNIANA

TESIS PROFESIONAL

Que Para Obtener el Título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a :

JAVIER ELIZONDO

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

EL OBJETIVO DE ESTA TESIS ES PRESENTAR ALGUNOS DE LOS CONCEPTOS MÁS IMPORTANTES EN LA GEOMETRÍA RIEMANNIANA DE UNA MANERA NO USUAL. PARA ESTO NOS BASAMOS EN ALGUNOS CAPÍTULOS Y SUGERENCIAS HECHAS POR V. I. ARNOLD EN SU LIBRO MATHEMATICAL METHODS OF CLASSICAL MECHANICS.

EN EL PRIMER CAPÍTULO SE EXPONEN FORMAS DIFERENCIALES HASTA EL TEOREMA DE STOKES, SE INCLUYEN DOS APARTADOS SOBRE CICLOS CERRADOS Y FORMAS CERRADAS Y COHOMOLOGÍA Y HOMOLOGÍA. POSTERIORMENTE SE DESARROLLA EL CONCEPTO DE GEODÉSICA COMO LAS CURVAS QUE MINIMIZAN LA LONGITUD EN UNA VECINDAD SUFICIENTEMENTE PEQUEÑA. POR ÚLTIMO SE DESARROLLA, NUEVAMENTE DE UNA MANERA INUSUAL, EL CONCEPTO DE TRANSPORTE PARALELO Y DE DERIVADA COVARIANTE.

CAPÍTULO I: FORMAS DIFERENCIALES

I.- FORMAS EXTERIORES

EN ESTA SECCIÓN ESTUDIAREMOS FORMAS ALGEBRAICAS EXTERIORES

A.- 1-FORMAS

CONSIDEREMOS EL ESPACIO VECTORIAL REAL $\mathbb{R}^n$ n-DIMENSIONAL. Y DENOTEMOS SUS VECTORES POR $\xi, \eta, \ldots$

DEFINICIÓN

UNA FORMA DE GRADO UNO Ó UNA 1-FORMA ES UNA FUNCIÓN LINEAL $\omega: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ES DECIR

$$\omega(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) = \lambda_1 \omega(\xi_1) + \lambda_2 \omega(\xi_2) \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ Y } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n.$$

RECORDEMOS LAS PROPIEDADES BÁSICAS SOBRE 1-FORMAS DEL ÁLGEBRA LINEAL. EL CONJUNTO DE TODAS LAS 1-FORMAS ES UN ESPACIO VECTORIAL CON LA SUMA, DE DOS 1-FORMAS, DEFINIDA COMO

$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi) = \omega_1(\xi) + \omega_2(\xi),$$

Y LA MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR POR

$$(\lambda\omega)(\xi) = \lambda\omega(\xi).$$

EL ESPACIO DE 1-FORMAS SOBRE $\mathbb{R}^n$, COMO NOSOTROS SABEMOS, ES DE DIMENSIÓN n Y SE LLAMA EL ESPACIO DUAL $(\mathbb{R}^n)^*$.

SUPONGAMOS QUE HEMOS ESCOGIDO UN SISTEMA DE COORDENADAS $x_1, \ldots, x_n$ SOBRE $\mathbb{R}^n$. CADA COORDENADA ES EN SÍ MISMA UNA 1-FORMA. ESTAS n 1-FORMAS SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES. POR LO TANTO, CUALQUIER 1-FORMA ω TIENE LA FORMA

$$\omega = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

EL VALOR DE ω SOBRE UN VECTOR ξ ES IGUAL A

$$\omega(\xi) = a_1 x_1(\xi) + \cdots + a_n x_n(\xi)$$

DONDE $x_1(\xi), \ldots, x_n(\xi)$ SON LAS COMPONENTES DE ξ EN EL SISTEMA DE COORDENADAS ELEGIDO.

B.- 2-FORMAS

DEFINICIÓN

UNA FORMA EXTERIOR DE GRADO (O UNA 2-FORMA) ES UNA FUNCIÓN $\omega^2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ BILINEAL Y ANTISIMÉTRICA:

$$\omega^2(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2, \xi_3) = \lambda_1 \omega^2(\xi_1, \xi_3) + \lambda_2 \omega^2(\xi_2, \xi_3).$$

$$\omega^2(\xi_1, \xi_2) = -\omega^2(\xi_2, \xi_1), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}^n.$$

EJEMPLO 1

SEA $S(\xi_1, \xi_2)$ EL ÁREA ORIENTADA DE EL PARALELOGRAMO CONSTRUIDO CON LOS VECTORES ξ_1 Y ξ_2 DEL PLANO EUCLIDEANO ORIENTADO $\mathbb{R}^2$, ES DECIR

$$S(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{DONDE } \xi_1 = \xi_{11} e_1 + \xi_{12} e_2 \,;\, \xi_2 = \xi_{21} e_1 + \xi_{22} e_2,$$

DONDE e_1, e_2 ES UNA BASE DADA LA ORIENTACIÓN EN $\mathbb{R}^2$.

POR LAS PROPIEDADES DE DETERMINANTE $S(\xi_1, \xi_2)$ ES UNA 2-FORMA.

EJEMPLO 2:

SEA V UN CAMPO DE VECTORES, UNIFORME, VELOCIDAD PARA UN FLUIDO EN UN ESPACIO EUCLIDEANO TRES DIMENSIONAL ORIENTADO. ENTONCES EL FLUJO DEL FLUIDO SOBRE EL ÁREA DEL PARALELOGRAMO ξ_1, ξ_2 ES UNA 2-FORMA DEFINIDO POR EL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

$$\omega^2(\xi_1, \xi_2) = (V, \xi_1, \xi_2).$$

UNA CONSECUENCIA DE LA DEFINICIÓN MUY SENCILLA, PERO DE CIERTO INTERÉS ES QUE $\omega^2(\xi, \xi) = 0$ YA QUE $\omega^2(\xi, \xi) = -\omega^2(\xi, \xi)$. $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

AL IGUAL QUE CON 1-FORMAS, EL CONJUNTO DE LAS 2-FORMAS ES UN ESPACIO VECTORIAL, CON LA SUMA Y PRODUCTO POR UN ESCALAR, DEFINIDOS DE MANERA ANÁLOGA.

C.- K-FORMAS

DEFINICIÓN

UNA FORMA EXTERIOR DE GRADO k, O UNA k-FORMA, ES UNA FUNCIÓN DE k VECTORES LA CUAL ES k-LINEAL Y ANTISIMÉTRICA:

$$\omega(\lambda_1 \xi_1' + \lambda_2 \xi_1'', \xi_2, \dots, \xi_k) = \lambda_1 \omega(\xi_1', \dots, \xi_k) + \lambda_2 \omega(\xi_1'', \dots, \xi_k).$$

$$\omega(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) = (-1)^{\nu} \omega(\xi_1, \dots, \xi_k). \quad \text{DONDE}$$

$$\nu = \begin{cases} 0 & \text{SI } i_1, \dots, i_k \text{ ES PAR (COMO PERMUTACIÓN)} \\ 1 & \text{SI } i_1, \dots, i_k \text{ ES IMPAR (COMO PERMUTACIÓN)} \end{cases}$$

EJEMPLO 1

POR LAS PROPIEDADES DEL DETERMINANTE, TENEMOS QUE EL VOLUMEN ORIENTADO DEL PARALELEPÍPEDO CON ARISTAS $\xi_1, \dots, \xi_n$ EN EL ESPACIO EUCLIDEANO ORIENTADO $\mathbb{R}^n$ ES UNA n-FORMA

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{DONDE}$$

$\xi_i = \xi_{i1} e_1 + \cdots + \xi_{in} e_n$ Y $e_1, \dots, e_n$ SON UNA BASE PARA $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 2

SEA $\mathbb{R}^k$ UN k-PLANO ORIENTADO EN UN ESPACIO EUCLIDEANO n-DIMENSIONAL $\mathbb{R}^n$. ENTONCES EL VOLUMEN ORIENTADO k-DIMENSIONAL DE LA PROYECCIÓN DEL PARALELEPÍPEDO CON ARISTAS $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ SOBRE $\mathbb{R}^k$ ES UNA k-FORMA.

AL IGUAL QUE ANTES, EL CONJUNTO DE LAS k-FORMAS EN $\mathbb{R}^n$ FORMAN UN ESPACIO VECTORIAL CON LA SUMA Y EL PRODUCTO CON ESCALARES DEFINIDAS EN LA FORMA USUAL.

SEAN ω_0 Y ω_1 DOS k-FORMAS EN $\mathbb{R}^k$ Y SEA $\lambda \in \mathbb{R}$ TAL QUE $\lambda\omega_0(e_1, \dots, e_k) = \omega_1(e_1, \dots, e_k)$ ENTONCES TENEMOS QUE $\lambda\omega_0(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \omega_1(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ PARA TODA PERMUTACIÓN Y DE AQUÍ OBTENEMOS QUE PARA CUALESQUIERA VECTORES $\xi_1, \dots, \xi_k$ CON $\xi_i = a_{i1} e_1 + \cdots + a_{ik} e_k$

$$\omega_1(\xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{k} a_{i_1} \cdots a_{i_k}\, \omega_1(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{k} a_{i_1} \cdots a_{i_k}\, \lambda\omega_0(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) =$$

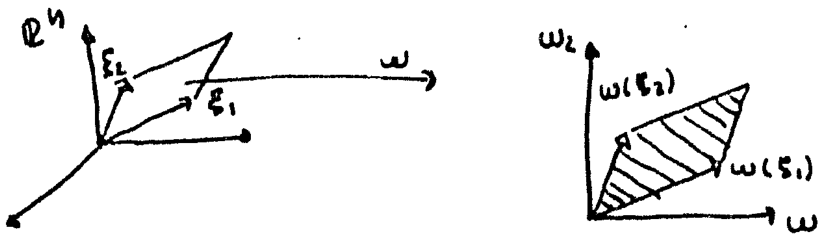
$$\lambda \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{k} a_{i_1} \cdots a_{i_k}\, \omega_0(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \lambda\, \omega_0(\xi_1, \dots, \xi_k).$$

ES DECIR EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS k-FORMAS EN $\mathbb{R}^k$ ES DE DIMENSIÓN 1. AHORA BIEN, CONSIDEREMOS UNA k-FORMA EN $\mathbb{R}^n$, ENTONCES SI $e_1, \dots, e_n$ ES UNA BASE PARA $\mathbb{R}^n$ Y $\omega_{i_1 \cdots i_k}$ ES UNA BASE PARA LAS k-FORMAS EN EL ESPACIO GENERADO POR $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ (ES DECIR $\omega_{i_1 \cdots i_k}$ ES UN k-FORMA), AL IGUAL QUE ANTES LA MULTILINEALIDAD DE CUALQUIER k-FORMA ω EN $\mathbb{R}^n$ NOS PERMITE CONCLUIR QUE $\omega = \sum \lambda_{i_1 \cdots i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k}$ DONDE LA SUMA ES SOBRE TODOS LOS POSIBLES SUBCONJUNTOS DE $\{1, \dots, n\}$. DE AQUÍ QUE LA DIMENSIÓN DEL ESPACIO DE LAS k-FORMAS EN $\mathbb{R}^n$ SEA IGUAL A C_n^k.

D.- EL PRODUCTO EXTERIOR DE DOS 1-FORMAS

AQUÍ INTRODUCIMOS UNA OPERACIÓN MÁS: LA MULTIPLICACIÓN EXTERIOR DE FORMAS. SI ω^k ES UNA k-FORMA Y ω^l ES UNA l-FORMA SOBRE $\mathbb{R}^n$, ENTONCES SU PRODUCTO EXTERIOR $\omega^k \wedge \omega^l$ SERÁ UNA $k+l$-FORMA DE $\mathbb{R}^n$. PRIMERO DEFINIMOS EL PRODUCTO EXTERIOR DE 1-FORMAS, QUE ASOCIA A CUALQUIER PAR DE 1-FORMAS ω_1, ω_2 SOBRE $\mathbb{R}^n$ UNA 2-FORMA $\omega_1 \wedge \omega_2$ SOBRE $\mathbb{R}^n$.

SEA ξ UN VECTOR EN $\mathbb{R}^n$. DADAS DOS 1-FORMAS ω_1 Y ω_2, PODEMOS DEFINIR UN MAPEO DE $\mathbb{R}^n$ AL PLANO $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ POR ASOCIAR A $\xi \in \mathbb{R}^n$ EL VECTOR $\omega(\xi)$ CON COMPONENTES $\omega_1(\xi)$ Y $\omega_2(\xi)$ EN EL PLANO CON COORDENADAS ω_1, ω_2



DEFINICIÓN

EL VALOR DEL PRODUCTO EXTERIOR $\omega_1 \wedge \omega_2$ SOBRE EL PAR DE VECTORES $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ ES EL ÁREA ORIENTADA DE LA IMÁGEN DEL PARALELOGRAMO CON LADOS $\omega(\xi_1)$ Y $\omega(\xi_2)$ SOBRE EL PLANO ω_1, ω_2:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi) = \begin{vmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_2(\xi_1) \\ \omega_1(\xi_2) & \omega_2(\xi_2) \end{vmatrix} \qquad \text{DONDE } \xi = (\xi_1, \xi_2) \text{ CON } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n.$$

COMO EL DETERMINANTE ES BILINEAL Y ANTISIMÉTRICO CON RESPECTO A COLUMNAS Y RENGLONES TENEMOS QUE

1) $\omega_1 \wedge \omega_2$ ES UNA DOS-FORMA
2) EL MAPEO $(\omega_1, \omega_2) \to \omega_1 \wedge \omega_2$ ES BILINEAL Y ANTISIMÉTRICO.

AHORA SUPONGAMOS QUE HEMOS ESCOGIDO UN SISTEMA DE COORDENADAS LINEAL SOBRE $\mathbb{R}^n$, ES DECIR, HEMOS ESCOGIDO n 1-FORMAS LINEALMENTE INDEPENDIENTES $x_1, \dots, x_n$. LAS LLAMAMOS FORMAS BÁSICAS.

EL PRODUCTO EXTERIOR DE LAS FORMAS BÁSICAS SON LAS 2-FORMAS $x_i \wedge x_j$. POR ANTISIMETRÍA, $x_i \wedge x_i = 0$ Y $x_i \wedge x_j = -x_j \wedge x_i$. EL SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LA FORMA $x_i \wedge x_j$ ES MUY SIMPLE: SU VALOR SOBRE EL PAR DE VECTORES ξ_1, ξ_2 ES IGUAL AL ÁREA ORIENTADA DE LA IMÁGEN DEL PARALELOGRAMO ξ_1, ξ_2 SOBRE EL PLANO COORDENADO x_i, x_j BAJO LA PROYECCIÓN PARALELA A LAS DIRECCIONES COORDENADAS RESTANTES.

E.- MONOMIOS EXTERIORES

SUPONGAMOS QUE TENEMOS K 1-FORMAS $\omega_1, \ldots, \omega_k$. DEFINIMOS SU PRODUCTO EXTERIOR $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$.

DEFINICIÓN

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(\xi_1) & \cdots & \omega_k(\xi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_k(\xi_k) & \cdots & \omega_k(\xi_k) \end{vmatrix}$$

EN OTRAS PALABRAS, EL VALOR DE UN PRODUCTO DE 1-FORMAS SOBRE EL PARALELEPÍPEDO $\xi_1, \ldots, \xi_k$ ES IGUAL AL VOLUMEN ORIENTADO DE LA IMÁGEN DE EL PARALELEPÍPEDO EN EL ESPACIO EUCLIDEANO ORIENTADO $\mathbb{R}^k$ BAJO EL MAPEO $\xi \to (\omega_1(\xi), \ldots, \omega_k(\xi))$.

AL IGUAL QUE ANTES, POR LAS PROPIEDADES DE DETERMINANTE TENEMOS QUE $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$ ES UNA K-FORMA Y ADEMÁS LA OPERACIÓN DE PRODUCTO EXTERIOR DE 1-FORMAS ES UN MAPEO MULTILINEAL Y ANTISIMÉTRICO, ES DECIR,

$$(\lambda' \omega_1' + \lambda'' \omega_1'') \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k = \lambda' \omega_1' \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k + \lambda'' \omega_1'' \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k \quad \text{Y}$$

$$\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k} = (-1)^{\nu} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \quad \text{DONDE}$$

$$\nu = \begin{cases} 0 & \text{SI LA PERMUTACIÓN } i_1, \ldots, i_k \text{ ES PAR} \\ 1 & \text{SI LA PERMUTACIÓN } i_1, \ldots, i_k \text{ ES IMPAR} \end{cases}$$

AHORA CONSIDEREMOS UN SISTEMA DE COORDENADAS SOBRE $\mathbb{R}^n$ DADAS POR LAS FORMAS BÁSICAS $x_1, \ldots, x_n$. EL PRODUCTO EXTERIOR DE LAS K FORMAS BÁSICAS

$$x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k} \qquad 1 \leq i_m \leq n$$

ES EL VOLUMEN ORIENTADO DE LA IMÁGEN DE UN K-PARALELEPÍPEDO SOBRE EL K-PLANO $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ BAJO LA PROYECCIÓN PARALELA A LAS DIRECCIONES DE LAS COORDENADAS RESTANTES.

UN PRIMER HECHO ES QUE SI DOS DE LOS ÍNDICES $i_1, \ldots, i_k$ SON IGUALES ENTONCES $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}$ ES CERO POR LA ANTISIMETRÍA DE LA OPERACIÓN.

AHORA VAMOS A DEMOSTRAR QUE LAS C_n^k K-FORMAS $x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_k}$ DONDE $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$ FORMAN UNA BASE PARA EL ESPACIO DE LAS K-FORMAS EN $\mathbb{R}^n$.

CONSIDEREMOS DOS K-FORMAS $x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_k}$ Y $x_{j_1}\wedge\cdots\wedge x_{j_k}$ DIFERENTES ES DECIR EXISTE x_{i_l} EN LA PRIMERA K-FORMA TAL QUE $x_{i_l}\neq x_{j_{l'}}$ PARA TODA $l'=1,\dots,k$ Y $x_{j_{l'}}$ ES 1-FORMA DE $x_{j_1}\wedge\cdots\wedge x_{j_k}$.

NOS FIJAMOS EN LOS VECTORES $e_{i_1},\dots,e_{i_k}$ ENTONCES $(x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_k})(e_{i_1},\dots,e_{i_k})=1$ Y $(x_{j_1}\wedge\cdots\wedge x_{j_k})(e_{i_1},\dots,e_{i_k})=0$. SEA $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ TAL QUE $\lambda_1\,\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k}+\lambda_2\,\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_k}=0$ ENTONCES

$\lambda_1(\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k})+\lambda_2(\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_k})\,(e_{i_1},\dots,e_{i_k})=\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot 0=\lambda_1=0.$

ANÁLOGAMENTE $\lambda_2=0$. POR LO TANTO $x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_k}$ Y $x_{j_1}\wedge\cdots\wedge x_{j_k}$ SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES. NOS FALTA DEMOSTRAR QUE GENERAN, SEA ω^k UNA K-FORMA Y CONSIDEREMOS LA FORMA $\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\omega^k(e_{i_1},\dots,e_{i_k})\,x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_k}$.

AHORA BIEN, DOS K-FORMAS SON IGUALES SI SUS VALORES COINCIDEN EN LOS ELEMENTOS DE LA BASE. YA QUE LAS K-FORMAS SON MULTILINEALES PERO $\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\omega^k(e_{i_1},\dots,e_{i_k})\,x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_k}(e_{j_1},\dots,e_{j_k})=\omega^k(e_{j_1},\dots,e_{j_k})$.

POR LO TANTO

$$\omega^k=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\omega^k(e_{i_1},\dots,e_{i_k})\,x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_k}.$$

SEA $\omega^k=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k$ UNA K-FORMA CON ω_i UNA 1-FORMA $i=1,\dots,k$. Y SEA $\omega^l=\omega_{l+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{l+k}$ UNA l-FORMA CON ω_{l+i} UNA 1-FORMA $i=1,\dots,l$.

DEFINIMOS EL PRODUCTO $\omega^l\wedge\omega^k$ A SER EL MONOMIO $(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k)\wedge(\omega_{k+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{k+l})=$
$=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k\wedge\omega_{k+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{k+l}$. UN PRIMER HECHO ES QUE EL PRODUCTO DE MONOMIOS ES ASOCIATIVO, ES DECIR:

$$(\omega^k\wedge\omega^l)\wedge\omega^m=\omega^k\wedge(\omega^l\wedge\omega^m)\quad \text{Y}$$

$$\omega^k\wedge\omega^l=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k\wedge\omega_{k+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{k+l}=(-1)^k\,\omega_{k+1}\wedge\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k\wedge\omega_{k+2}\wedge\cdots\wedge\omega_{k+l}=$$

$$=(-1)^{kl}\,\omega_{k+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{k+l}\wedge\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k=(-1)^{kl}\,\omega^l\wedge\omega^k$$ ES DECIR

$\omega^k\wedge\omega^l=(-1)^{kl}\,\omega^l\wedge\omega^k$ EL PRODUCTO DE MONOMIOS ES ANTICONMUTATIVO.

II.- MULTIPLICACIÓN EXTERIOR

A.- DEFINICIÓN DE MULTIPLICACIÓN EXTERIOR

DEFINICIÓN

EL PRODUCTO EXTERIOR $\omega^k \wedge \omega^l$ DE UNA K-FORMA ω^k EN $\mathbb{R}^n$ CON UNA l-FORMA ω^l EN $\mathbb{R}^n$ ES LA $k+l$-FORMA SOBRE $\mathbb{R}^n$ CUYOS VALORES EN LOS $k+l$ VECTORES $\xi_1, \dots, \xi_{k+l}$ EN $\mathbb{R}^n$ ES IGUAL A

$$(1)\ (\omega^k \wedge \omega^l)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \sum (-1)^{\nu} \omega^k(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \omega^l(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_l})$$

DONDE $i_1 < \dots < i_k$ Y $j_1 < \dots < j_l$ CON $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ ES UNA PERMUTACIÓN DE LOS NÚMEROS $(1, 2, \dots, k+l)$ Y

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{SI LA PERMUTACIÓN ES IMPAR} \\ 0 & \text{SI LA PERMUTACIÓN ES PAR.} \end{cases}$$

TEOREMA

LA MULTIPLICACIÓN EXTERIOR DE FORMAS DEFINIDAS COMO ANTES ES ANTICONMUTATIVA, DISTRIBUTIVA Y ASOCIATIVA. PARA MONOMIOS COINCIDE CON LA DEFINICIÓN HECHA EN I.

DEM.

OBSERVEMOS QUE LA PERMUTACIÓN $(1, \dots, k+l) \to (j_1, \dots, j_l, i_1, \dots, i_k)$ LA PUEDO EXPRESAR COMO EL PRODUCTO DE DOS PERMUTACIONES:

$(1, \dots, k+l) \longrightarrow (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l) \xrightarrow{kl} (j_1, \dots, j_l, i_1, \dots, i_k)$ DONDE LA SEGUNDA PERMUTACIÓN TIENE kl INVERSIONES. ENTONCES

$$(\omega^k \wedge \omega^l)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \sum (-1)^{\nu} \omega^k(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \omega^l(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_l}) =$$

$$= (-1)^{kl} \sum (-1)^{\nu + kl} \omega^k(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \omega^l(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_l}) =$$

$$= (-1)^{kl} \sum (-1)^{\bar{\nu}} \omega^k(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \omega^l(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_l}) = (-1)^{kl} (\omega^l \wedge \omega^k)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}).$$

ES DECIR $(\omega^k \wedge \omega^l) = (-1)^{kl} (\omega^l \wedge \omega^k)$.

SEAN ω_1^k, ω_2^k K-FORMAS EN $\mathbb{R}^n$ Y ω^ℓ UNA ℓ-FORMA EN $\mathbb{R}^n$ SI $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ENTONCES $[(\lambda_1\omega_1^k + \lambda_2\omega_2^k)\wedge\omega^\ell](\xi_1,\dots,\xi_{k+\ell}) =$

$$= \sum (-1)^\nu (\lambda_1\omega_1^k + \lambda_2\omega_2^k)(\xi_{i_1},\dots,\xi_{i_k})\omega^\ell(\xi_{j_1},\dots,\xi_{j_\ell}) =$$

$$= \lambda_1\sum(-1)^\nu \omega_1^k(\xi_{i_1},\dots,\xi_{i_k})\omega^\ell(\xi_{j_1},\dots,\xi_{j_\ell}) + \lambda_2\sum(-1)^\nu\omega_2^k(\xi_{i_1},\dots,\xi_{i_k})\omega^\ell(\xi_{j_1},\dots,\xi_{j_\ell}). =$$

$$= \lambda_1(\omega_1^k\wedge\omega^\ell)(\xi_1,\dots,\xi_{k+\ell}) + \lambda_2(\omega_2^k\wedge\omega^\ell)(\xi_1,\dots,\xi_{k+\ell}) =$$

$$= [\lambda_1(\omega_1^k\wedge\omega^\ell) + \lambda_2(\omega_2^k\wedge\omega^\ell)].(\xi_1,\dots,\xi_{k+\ell}).$$

$$\therefore (\lambda_1\omega_1^k + \lambda_2\omega_2^k)\wedge\omega^\ell = \lambda_1(\omega_1^k\wedge\omega^\ell) + \lambda_2(\omega_2^k\wedge\omega^\ell).$$

DENOTEMOS POR $\bar\wedge$ EL PRODUCTO DE MONOMIOS Y POR $\wedge$ EL PRODUCTO EXTERIOR DE LA ÚLTIMA DEFINICIÓN, ENTONCES

$$(\omega_1\bar\wedge\cdots\bar\wedge\omega_k)\wedge(\omega_{k+1}\bar\wedge\cdots\bar\wedge\omega_{k+\ell})(\xi_1,\dots,\xi_{k+\ell}) = \sum \pm \det_{1\le i\le k}|\omega_i(\xi_{i_m})| \det_{k\le i\le k+\ell}|\omega_i(\xi_{j_m})|$$

PERO ESTO ÚLTIMO, POR EL TEOREMA DE LAPLACE SOBRE DETERMINANTES, ES IGUAL A $\det|\omega_i(\xi_j)| = (\omega_1\bar\wedge\cdots\bar\wedge\omega_k\bar\wedge\omega_{k+1}\bar\wedge\cdots\bar\wedge\omega_{k+\ell})(\xi_1,\dots,\xi_{k+\ell})$. ESTO DEMUESTRA QUE PARA MONOMIOS $\wedge$ COINCIDE CON $\bar\wedge$. EN CONSECUENCIA $\wedge$ ES ASOCIATIVO PARA MONOMIOS Y COMO VIMOS ANTES, TODA FORMA EN $\mathbb{R}^n$ ES UNA SUMA DE MONOMIOS, ENTONCES $\wedge$ ES ASOCIATIVA PARA FORMAS. ∎

UNA CONSECUENCIA INMEDIATA DEL TEOREMA ES QUE SI k ES IMPAR ENTONCES $\omega^k\wedge\omega^k = 0$ PARA CUALQUIER K-FORMA ω^k.

EJEMPLO 1

CONSIDEREMOS EL ESPACIO EUCLIDEANO ORIENTADO $\mathbb{R}^3$. CUALQUIER VECTOR $A\in\mathbb{R}^3$ DETERMINA 1-FORMA ω_A^1 DADO POR $\omega_A^1(\xi) = (A,\xi)$ DONDE $(\ ,\ )$ ES PRODUCTO ESCALAR Y UNA DOS FORMA DADO POR $\omega_A^2(\xi_1,\xi_2) = (A,\xi_1,\xi_2)$ (TRIPLE PRODUCTO ESCALAR).

EJEMPLO 2

LOS MAPEOS $A\to\omega_A^1$ Y $A\to\omega_A^2$ SON ISOMORFISMOS DEL ESPACIO LINEAL $\mathbb{R}^3$ DE VECTORES A CON LOS ESPACIOS LINEALES DE 1-FORMAS SOBRE $\mathbb{R}^3$ Y 2-FORMAS SOBRE $\mathbb{R}^3$. SI ESCOGEMOS UN SISTEMA DE COORDENADAS ORIENTADO ORTOGONAL (x_1,x_2,x_3) SOBRE $\mathbb{R}^3$, ENTONCES

$$\omega_A^1 = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 \quad \text{Y} \quad \omega_A^2 = A_1\, x_2\wedge x_3 + A_2\, x_3\wedge x_1 + A_3\, x_1\wedge x_2$$

SON EVIDENTEMENTE ISOMORFISMOS.

EN REALIDAD LOS ISOMORFISMOS NO DEPENDEN DEL SISTEMA DE COORDENADAS, PERO SÍ DEPENDEN SOBRE LA ELECCIÓN DE LA ESTRUCTURA EUCLIDEANA EN $\mathbb{R}^3$, Y EL ISOMORFISMO $A\to\omega_A^2$ TAMBIÉN DEPENDE SOBRE LA ORIENTACIÓN, OBTENIDA IMPLÍCITAMENTE DE LA DEFINICIÓN DE TRIPLE PRODUCTO ESCALAR.

B.- COMPORTAMIENTO DE FORMAS BAJO MAPEOS

SEA $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ UN MAPEO LINEAL, Y ω^k UNA K-FORMA EXTERIOR SOBRE $\mathbb{R}^n$. ENTONCES HAY UNA K-FORMA $f^*\omega^k$ SOBRE $\mathbb{R}^m$:

$$(f^*\omega^k)(\xi_1,\dots,\xi_k) = \omega^k(f\xi_1,\dots,f\xi_k). \quad \text{CON} \quad \xi_i \in \mathbb{R}^m \; i=1,\dots,k$$

LO PRIMERO QUE HAY QUE HACER ES MOSTRAR QUE EFECTIVAMENTE $f^*\omega^k$ ES UNA K-FORMA. SEA $\xi_1,\dots,\xi_k, \xi_j' \in \mathbb{R}^m$ Y $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$(f^*\omega^k)(\xi_1,\dots,\lambda_1\xi_j+\lambda_2\xi_j',\dots,\xi_k) = \omega^k(f\xi_1,\dots,f(\lambda_1\xi_j+\lambda_2\xi_j'),\dots,\xi_k) =$$

$$= \omega^k(f\xi_1,\dots,\lambda_1 f\xi_j+\lambda_2 f\xi_j',\dots,\xi_k) = \lambda_1\omega^k(f\xi_1,\dots,f\xi_j,\dots,f\xi_k)+\lambda_2\omega^k(f\xi_1,\dots,f\xi_j',\dots,f\xi_k) =$$

$$= \lambda_1(f^*\omega^k)(\xi_1,\dots,\xi_j,\dots,\xi_k)+\lambda_2(f^*\omega^k)(\xi_1,\dots,\xi_j',\dots,\xi_k).$$

$\therefore$ $f^*\omega^k$ ES K-LINEAL.

DE MANERA ANÁLOGA SE DEMUESTRA LA ANTICONMUTATIVIDAD.

ALGUNAS DE LAS PROPIEDADES QUE SE DEDUCEN DIRECTAMENTE DE LAS DEFINICIONES SON:

1) f^* ES UN OPERADOR LINEAL DEL ESPACIO DE K-FORMAS SOBRE $\mathbb{R}^n$ A EL ESPACIO DE K-FORMAS SOBRE $\mathbb{R}^m$.

2) SI $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ Y $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ENTONCES $(g\circ f)^* = f^*\circ g^*$

3) $f^*(\omega^k \wedge \omega^l) = (f^*\omega^k)\wedge(f^*\omega^l)$.

III.- FORMAS DIFERENCIABLES

A.- 1-FORMAS DIFERENCIABLES

EL EJEMPLO MÁS SIMPLE DE UNA FORMA DIFERENCIAL ES LA DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN. SEA $f: M \to \mathbb{R}$ UNA FUNCIÓN DIFERENCIABLE SOBRE LA VARIEDAD M LA DIFERENCIAL DE f EN UN PUNTO $x \in M$ $df_x : TM_x \to \mathbb{R}$ ES UNA 1-FORMA df_x SOBRE EL ESPACIO TANGENTE TM_x.

LA DIFERENCIAL df DE f SOBRE LA VARIEDAD M ES UN MAPEO SUAVE DEL ESPACIO TANGENTE TM A LA LÍNEA $df: TM \to \mathbb{R}$, ESTE MAPEO ES DIFERENCIABLE Y ES LINEAL SOBRE CADA ESPACIO TANGENTE $TM_x \subset TM$.

DEFINICIÓN

UNA FORMA DIFERENCIAL DE GRADO 1 (O UNA 1-FORMA) SOBRE UNA VARIEDAD M ES UN MAPEO SUAVE $\omega : TM \to \mathbb{R}$ DEL ESPACIO TANGENTE DE M A LA LÍNEA, LINEAL SOBRE CADA ESPACIO TANGENTE TM_x.

PODRÍAMOS DECIR QUE UNA 1-FORMA DIFERENCIABLE SOBRE M ES UNA 1-FORMA ALGEBRAICA EN TM_x LA CUAL ES "DIFERENCIABLE CON RESPECTO A x".

B.- LA FORMA GENERAL DE UNA 1-FORMA DIFERENCIAL EN $\mathbb{R}^n$

TOMAMOS A NUESTRA VARIEDAD M COMO UN ESPACIO VECTORIAL CON COORDENADAS $x_1, \dots, x_n$. OBSERVEMOS QUE LAS COMPONENTES $\xi_1, \dots, \xi_n$ DE UN VECTOR TANGENTE $\xi \in T\mathbb{R}^n_x$ SON LOS VALORES DE LAS DIFERENCIALES $dx_1, \dots, dx_n$ EN EL VECTOR ξ, CUALQUIER 1-FORMA SOBRE $T\mathbb{R}^n_x$ PUEDE SER EXPRESADA EN FORMA ÚNICA COMO $a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$, DONDE LAS a_i SON COEFICIENTES REALES. CONSIDEREMOS ω UNA 1-FORMA DIFERENCIABLE ENTONCES EN CUALQUIER PUNTO $x \in \mathbb{R}^n$ ω PUEDE SER EXPRESADA EN FORMA ÚNICA EN LA BASE $dx_1, \dots, dx_n$, ES DECIR:

TEOREMA

CUALQUIER 1-FORMA DIFERENCIABLE EN $\mathbb{R}^n$, CON UN SISTEMA DE COORDENADAS DADO $x_1, \dots, x_n$, PUEDE SER ESCRITA EN FORMA ÚNICA COMO

$$\omega = a_1(x) dx_1 + \cdots + a_n(x) dx_n ,$$

DONDE LOS COEFICIENTES $a_i(x)$ SON FUNCIONES SUAVES.

C.- K-FORMAS DIFERENCIALES

PROCEDAMOS IGUAL QUE ANTES

SEA TM^k EL CONJUNTO CUYOS ELEMENTOS SON K VECTORES TANGENTES A M EN UN PUNTO X, ES DECIR $TM^k = \bigcup_x (TM_x \times TM_x \times \cdots \times TM_x)$.

SEA $x_1, \ldots, x_n$ UN SISTEMA DE COORDENADAS LOCALES EN M Y SEA $(\xi_1^1, \ldots, \xi_n^1), \ldots, (\xi_1^k, \ldots, \xi_n^k)$ LOS VECTORES EN ESTE SISTEMA DE COORDENADAS ENTONCES, AL IGUAL QUE CON TM, LOS $(k+1)n$ NÚMEROS $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1^1, \ldots, \xi_n^1, \ldots, \xi_1^k, \ldots, \xi_n^k)$ SON UN SISTEMA LOCAL DE COORDENADAS EN TM^k, CON LO CUAL TM^k ES UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE DE DIMENSIÓN $n(k+1)$.

DEFINICIÓN

UNA K-FORMA DIFERENCIABLE EN UNA VARIEDAD M ES UN MAPEO SUAVE DE TM^k A LOS REALES. SI FIJAMOS X ENTONCES ES UNA K-FORMA ALGEBRAICA EN TM_x.

$$\omega^k : TM^k \to \mathbb{R}.$$

POR ÚLTIMO, VOLVIENDO A HACER LA DISCUSIÓN DADA EN B, OBTENEMOS EL SIGUIENTE TEOREMA:

CUALQUIER K-FORMA DIFERENCIABLE EN $\mathbb{R}^n$, CON UN SISTEMA DE COORDENADAS $x_1, \ldots, x_n$, PUEDE SER ESCRITO EN FORMA ÚNICA COMO

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1, \ldots, i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \quad \text{DONDE}$$

$a_{i_1, \ldots, i_k}(x)$ SON FUNCIONES SUAVES EN $\mathbb{R}^n$.

SUPONGAMOS QUE TENEMOS DOS SISTEMAS DE COORDENADAS EN $\mathbb{R}^3$: x_1, x_2, x_3 Y y_1, y_2, y_3. SEA ω UNA 2-FORMA EN $\mathbb{R}^3$. EN EL SISTEMA x_1, x_2, x_3 $\omega = X_1\, dx_2 \wedge dx_3 + X_2\, dx_3 \wedge dx_1 + X_3\, dx_1 \wedge dx_2$. DONDE X_1, X_2 Y X_3 SON FUNCIONES DE x_1, x_2, x_3 Y EN EL SISTEMA DE LAS Y-COORDENADAS $\omega = Y_1\, dy_2 \wedge dy_3 + Y_2\, dy_3 \wedge dy_1 + Y_3\, dy_1 \wedge dy_2$. CON Y_1, Y_2, Y_3 FUNCIONES DE y_1, y_2, y_3. NUESTRO PROBLEMA AHORA ES, DADA LA FORMA EN EL SISTEMA DE LAS X-COORDENADAS, ENCONTRAR SU EXPRESIÓN EN LAS Y-COORDENADAS.

C.- K-FORMAS DIFERENCIALES

PROCEDAMOS IGUAL QUE ANTES

SEA TM^k EL CONJUNTO CUYOS ELEMENTOS SON K VECTORES TANGENTES A M EN UN PUNTO X, ES DECIR $TM^k = \bigcup_x (TM_x \times TM_x \times \cdots \times TM_x)$.

SEA $x_1, \ldots, x_n$ UN SISTEMA DE COORDENADAS LOCALES EN M Y SEA $(\xi_1^1, \ldots, \xi_n^1), \ldots, (\xi_1^k, \ldots, \xi_n^k)$ LOS VECTORES EN ESTE SISTEMA DE COORDENADAS ENTONCES, AL IGUAL QUE CON TM, LOS $(k+1)n$ NÚMEROS $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1^1, \ldots, \xi_n^1, \ldots, \xi_1^k, \ldots, \xi_n^k)$ SON UN SISTEMA LOCAL DE COORDENADAS EN TM^k, CON LO CUAL TM^k ES UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE DE DIMENSIÓN $n(k+1)$.

DEFINICIÓN

UNA K-FORMA DIFERENCIABLE EN UNA VARIEDAD M ES UN MAPEO SUAVE DE TM^k A LOS REALES. SI FIJAMOS X ENTONCES ES UNA K-FORMA ALGEBRAICA EN TM_x.

$$\omega^k : TM^k \to \mathbb{R}.$$

POR ÚLTIMO, VOLVIENDO A HACER LA DISCUSIÓN DADA EN B, OBTENEMOS EL SIGUIENTE TEOREMA:

CUALQUIER K-FORMA DIFERENCIABLE EN $\mathbb{R}^n$, CON UN SISTEMA DE COORDENADAS $x_1, \ldots, x_n$, PUEDE SER ESCRITO EN FORMA ÚNICA COMO

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1, \ldots, i_k}(x) \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \quad \text{DONDE}$$

$a_{i_1, \ldots, i_k}(x)$ SON FUNCIONES SUAVES EN $\mathbb{R}^n$.

SUPONGAMOS QUE TENEMOS DOS SISTEMAS DE COORDENADAS EN $\mathbb{R}^3$: x_1, x_2, x_3 Y y_1, y_2, y_3. SEA ω UNA 2-FORMA EN $\mathbb{R}^3$. EN EL SISTEMA x_1, x_2, x_3 $\omega = X_1 \, dx_2 \wedge dx_3 + X_2 \, dx_3 \wedge dx_1 + X_3 \, dx_1 \wedge dx_2$. DONDE X_1, X_2 Y X_3 SON FUNCIONES DE x_1, x_2, x_3 Y EN EL SISTEMA DE LAS Y-COORDENADAS $\omega = Y_1 \, dy_2 \wedge dy_3 + Y_2 \, dy_3 \wedge dy_1 + Y_3 \, dy_1 \wedge dy_2$. CON Y_1, Y_2, Y_3 FUNCIONES DE y_1, y_2, y_3. NUESTRO PROBLEMA AHORA ES, DADA LA FORMA EN EL SISTEMA DE LAS X-COORDENADAS, ENCONTRAR SU EXPRESIÓN EN LAS Y-COORDENADAS.

SEA $x = x(y)$ EL CAMBIO DE VARIABLE, ENTONCES TENEMOS QUE

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_i}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial x_i}{\partial y_3} dy_3 .$$ POR LO TANTO

$$dx_2 \wedge dx_3 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial x_2}{\partial y_3} dy_3 \right) \wedge \left(\frac{\partial x_3}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_3}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial x_3}{\partial y_3} dy_3 \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \frac{\partial x_3}{\partial y_2} - \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \right) dy_1 \wedge dy_2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \frac{\partial x_3}{\partial y_3} - \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \right) dy_1 \wedge dy_3 +$$

$$+ \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2} \frac{\partial x_3}{\partial y_3} - \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \right) dy_2 \wedge dy_3 =$$

$$= \frac{D(x_2, x_3)}{D(y_1, y_2)} dy_1 \wedge dy_2 + \frac{D(x_2, x_3)}{D(y_1, y_3)} dy_1 \wedge dy_3 + \frac{D(x_2\, x_3)}{D(y_2\, y_3)} dy_2 \wedge dy_3 .$$

ANÁLOGAMENTE $dx_3 \wedge dx_1 = \frac{D(x_3, x_1)}{D(y_1, y_2)} dy_1 \wedge dy_2 + \frac{D(x_3, x_1)}{D(y_1, y_3)} dy_1 \wedge dy_3 + \frac{D(x_3, x_1)}{D(y_2\, y_3)} dy_2 \wedge dy_3 .$

Y $dx_1 \wedge dx_2 = \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)} dy_1 \wedge dy_2 + \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_3)} dy_1 \wedge dy_3 + \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_2\, y_3)} dy_2 \wedge dy_3 .$

AL SUBSTITUIR ESTOS VALORES EN $\omega = X_1\, dx_2 \wedge dx_3 + X_2\, dx_3 \wedge dx_1 + X_3\, dx_1 \wedge dx_2$ Y AGRUPANDO EN $dy_2 \wedge dy_3$, $dy_3 \wedge dy_1$ Y $dy_1 \wedge dy_2$ OBTENEMOS QUE

$$Y_1 = X_1 \frac{D(x_2, x_3)}{D(y_2, y_3)} + X_2 \frac{d(x_3, x_1)}{D(y_2, y_3)} + X_3 \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_2, y_3)}$$

$$Y_2 = X_1 \frac{D(x_2, x_3)}{D(y_1, y_3)} + X_2 \frac{D(x_3, x_1)}{D(y_1, y_3)} + X_3 \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_3)}$$

$$Y_3 = X_1 \frac{D(x_2, x_3)}{D(y_1, y_2)} + X_2 \frac{D(x_3, x_1)}{D(y_1, y_2)} + X_3 \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)}$$

IV.- INTEGRACIÓN DE FORMAS DIFERENCIALES

A.- LA INTEGRAL DE UNA 1-FORMA A LO LARGO DE UNA TRAYECTORIA

CONSIDEREMOS UNA 1-FORMA ω^1 EN UNA VARIEDAD M Y SEA $\gamma: [0,1] \to M$ UNA CURVA SUAVE. SEA $P = \{0 = t_0, \dots, 1 = t_n\}$ UNA PARTICIÓN DEL INTERVALO $[0,1]$. SEA Δ_i EL VECTOR QUE VA DE t_i A t_{i+1}, Δ_i SE PUEDE CONSIDERAR COMO UN VECTOR TANGENTE A LA RECTA t EN EL PUNTO t_i. SU IMAGEN EN $T_{\gamma(t_i)}M$ ES $\xi_i = d\gamma|_{t_i}(\Delta_i)$. Y SEA $\sum_{i=0}^{n-1} \omega^1(\xi_i)$ UNA SUMA DE RIEMANN PARA LA INTEGRAL, ENTONCES DEFINIMOS LA INTEGRAL COMO $\int_\gamma \omega^1 = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega^1(\xi_i)$. DONDE Δ ES LA NORMA DE LA PARTICIÓN P.

LA DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE UN K-FORMA A LO LARGO DE UNA SUPERFICIE K-DIMENSIONAL SE HARÁ DE MANERA SIMILAR. LA SUPERFICIE DE INTEGRACIÓN ES DIVIDIDA EN PEQUEÑOS PARALELEPÍPEDOS K-DIMENSIONALES CURVILÍNEOS, ÉSTOS SON LLEVADOS A PARALELEPÍPEDOS EN EL ESPACIO TANGENTE, EL LÍMITE, DE LA SUMA DE LA FORMA EN LOS PARALELEPÍPEDOS, CUANDO LOS PARALELEPÍPEDOS TIENDEN A UN PUNTO BAJO REFINAMIENTOS ES LA INTEGRAL BUSCADA. PRIMERO CONSIDERAREMOS UN CASO PARTICULAR QUE NOS SERÁ DE UTILIDAD EN NUESTRA GENERALIZACIÓN

B.- LA INTEGRAL DE UNA K-FORMA EN UN ESPACIO EUCLIDEANO ORIENTADO $\mathbb{R}^k$

SEA $x_1, \dots, x_k$ UN SISTEMA DE COORDENADAS EN $\mathbb{R}^k$. ENTONCES CUALQUIER K-FORMA ES IGUAL A $\omega^k = \varphi(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$, DONDE φ ES UNA FUNCIÓN SUAVE.

SEA D UN POLIEDRO CONVEXO ACOTADO EN $\mathbb{R}^k$. DEFINIMOS LA INTEGRAL DE LA FORMA ω^k SOBRE D COMO LA INTEGRAL DE LA FUNCIÓN φ, ES DECIR

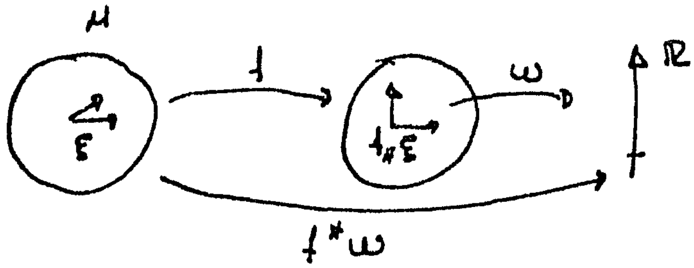
$$\int_D \omega^k = \int_D \varphi(x)\, dx_1 \cdots dx_k .$$

ESTA DEFINICIÓN ESTÁ BASADA EN LA MISMA IDEA QUE EN A, SÓLO QUE AQUÍ IDENTIFICAMOS EL ESPACIO TANGENTE A LA VARIEDAD CON LA PROPIA VARIEDAD.

C.- COMPORTAMIENTO DE FORMAS BAJO MAPEOS

SEA $f: M \to N$ UN MAPEO DIFERENCIABLE DE UNA VARIEDAD M A UNA VARIEDAD N Y SEA ω UNA K-FORMA DIFERENCIAL EN N. ENTONCES DEFINIMOS LA K-FORMA $f^*\omega$ EN M COMO

$$(f^*\omega)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \omega(f_*\xi_1, \ldots, f_*\xi_k). \text{ CON } \xi_i \in TM_x \quad i = 1, \ldots, k.$$



PARA VER QUE $f^*\omega$ REALMENTE ES UNA K-FORMA CONSIDEREMOS $\xi_1, \ldots, \xi_j, \xi_j', \ldots, \xi_k$ VECTORES EN TM_x Y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. ENTONCES

$$(f^*\omega)(\xi_1, \ldots, \lambda_1\xi_j + \lambda_2\xi_j', \ldots, \xi_k) = \omega(f_*\xi_1, \ldots, f_*(\lambda_1\xi_j + \lambda_2\xi_j'), \ldots, f_*\xi_k) =$$

$$= \omega(f_*\xi_1, \ldots, \lambda_1 f_*\xi_j + \lambda_2 f_*\xi_j', \ldots, f_*\xi_k) = \lambda_1 f^*\omega(\xi_1, \ldots, \xi_k) + \lambda_2 f^*\omega(\xi_1, \ldots, \xi_j', \ldots, \xi_k).$$

DE FORMA ANÁLOGA SE DEMUESTRA LA CONMUTATIVIDAD.

ALGUNAS DE LAS PROPIEDADES MÁS IMPORTANTES DE f^* SON:

1) $f^*(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 f^*\omega_1 + \lambda_2 f^*\omega_2$
2) $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (f^*\omega_1) \wedge (f^*\omega_2)$.
3) SEA $g: L \to M$ UN MAPEO DIFERENCIABLE ENTONCES $(fg)^* = g^* f^*$

LA DEMOSTRACIÓN DE ESTOS PUNTOS SE DESPRENDEN DIRECTAMENTE DE LA DEFINICIÓN

UN HECHO IMPORTANTE ES EL CAMBIO DE VARIABLE EN LA INTEGRAL, Y QUE NOS PERMITE RELACIONAR LA INTEGRAL DE $f^*\omega$ Y DE ω

TEOREMA

SEA D_1 Y D_2 DOS POLIEDROS CONVEXOS Y COMPACTOS EN $\mathbb{R}^k$ Y $f: D_1 \to D_2$ UN MAPEO DIFERENCIABLE EL CUAL ES UN DIFEOMORFISMO QUE PRESERVA ORIENTACIÓN DEL INTERIOR DE D_1 SOBRE EL INTERIOR DE D_2. ENTONCES, PARA CUALQUIER K-FORMA ω^k EN D_2, TENEMOS QUE

$$\int_{D_1} f^*\omega^k = \int_{D_2} \omega^k.$$

DEM

ESCRIBIREMOS $y=f(x)$ DONDE $y=(y_1,\dots,y_k)$ Y $f=(f_1,\dots,f_k)$.

$$(f^*\omega^k)(\xi_1,\dots,\xi_k)=\omega^k(f_*\xi_1,\dots,f_*\xi_k)=\varphi(f(x))\,(dy_1\wedge\cdots\wedge dy_k)(f_*\xi_1,\dots,f_*\xi_k)=$$

$$=\varphi(f(x))\begin{vmatrix} dy_1(f_*\xi_1) & \cdots & dy_k(f_*\xi_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ dy_1(f_*\xi_k) & \cdots & dy_k(f_*\xi_k)\end{vmatrix}=$$

$$=\varphi(f(x))\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1(\xi_1)+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_k}dx_k(\xi_1) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_1}dx_1(\xi_1)+\cdots+\frac{\partial f_k}{\partial x_k}dx_k(\xi_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1(\xi_k)+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_k}dx_k(\xi_k) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_1}dx_1(\xi_k)+\cdots+\frac{\partial f_k}{\partial x_k}dx_k(\xi_k)\end{vmatrix}=$$

$$=\varphi(f(x))\begin{vmatrix} dx_1(\xi_1) & \cdots & dx_k(\xi_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ dx_1(\xi_k) & \cdots & dx_k(\xi_k)\end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k}\end{vmatrix}=$$

$$=\left[\varphi(f(x))\,(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k)(\xi_1,\dots,\xi_k)\right]\left[\frac{\partial(f_1,\dots,f_k)}{\partial(x_1,\dots,x_k)}\right]=$$

$$=\left[\frac{\partial(f_1,\dots,d_k)}{\partial(x_1,\dots,x_k)}\,\varphi(f(x))\right]\left[(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k)\right](\xi_1,\dots,\xi_k).$$

ES DECIR SI $\omega^k=\varphi(y)\,dy_1\wedge\cdots\wedge dy_k$ ENTONCES

$f^*\omega^k=\left[\frac{\partial(y_1,\dots,y_k)}{\partial(x_1,\dots,x_k)}(\varphi\circ f)\right]dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k$ POR EL TEOREMA DE CAMBIO DE VARIABLE PARA INTEGRALES EN $\mathbb{R}^k$, OBTENEMOS

$$\int_{D_1} f^*\omega^k=\int_{D_1}\frac{\partial(y_1,\dots,y_k)}{\partial(x_1,\dots,x_k)}\varphi(y(x))\,dx_1\cdots dx_k=\int_{D_2}\varphi(y)\,dy_1\cdots dy_k=\int_{D_2}\omega^k$$

$$\therefore \int_{D_1} f^*\omega^k=\int_{D_2}\omega^k.$$

D.- INTEGRACIÓN DE UNA K-FORMA DIFERENCIABLE EN UNA VARIEDAD DE DIMENSIÓN N

SEA ω UNA K-FORMA EN LA VARIEDAD M. SE D UN POLIEDRO CONVEXO Y ACOTADO DE DIMENSIÓN K EN $\mathbb{R}^k$. UNA CELDA DE DIMENSIÓN K EN M ES UNA TERNA $\sigma = (D, f, or)$ QUE CONSISTE DE UN POLIEDRO CONVEXO $D \subset \mathbb{R}^k$, UN MAPEO DIFERENCIABLE $f: D \to M$ Y UNA ORIENTACIÓN EN $\mathbb{R}^k$ DENOTADA POR Or.

DEFINICIÓN

LA INTEGRAL DE LA K-FORMA ω SOBRE LA CELDA σ ES LA INTEGRAL DE LA FORMA $f^*\omega$ SOBRE EL POLIEDRO $\displaystyle\int_\sigma \omega = \int_D f^*\omega$

LA CELDA K-DIMENSIONAL QUE DIFIERE DE σ SÓLO POR LA ELECCIÓN DE LA ORIENTACIÓN SE LLAMA LA NEGATIVA DE σ Y SE DENOTA POR $-\sigma$.

DEL TEOREMA DE CAMBIO DE VARIABLE OBTENEMOS QUE $\displaystyle\int_{-\sigma} \omega = -\int_\sigma \omega$.

E.- CADENAS

DEFINICIÓN

UNA CADENA DE DIMENSIÓN n EN UNA VARIEDAD M ES UN CONJUNTO FINITO DE CELDAS ORIENTADAS DE DIMENSIÓN n EN M Y ENTEROS $m_1, \dots, m_r$ LLAMADOS MULTIPLICIDAD. UNA CADENA ES DENOTADA POR $c_k = m_1\sigma_1 + \dots + m_r\sigma_r$.

INTRODUCIMOS LAS IDENTIFICACIONES NATURALES

$$m_1\sigma + m_2\sigma = (m_1 + m_2)\sigma$$

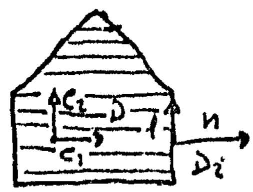
$$m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 = m_2\sigma_2 + m_1\sigma_1$$

$$0\sigma = 0 \qquad c_k + 0 = c_k.$$

UN EJEMPLO MUY IMPORTANTE ES LA FRONTERA DE UN POLIEDRO:

SEA D UN POLIEDRO DE DIMENSIÓN K ORIENTADO Y CONVEXO EN $\mathbb{R}^k$. LA FRONTERA DE D ES LA (K-1) CADENA ∂D EN $\mathbb{R}^k$ DEFINIDA DE LA SIGUIENTE FORMA. LAS CELDAS σ_i DE LA CADENA ∂D SON LAS CARAS DE DIMENSIÓN K-1 DEL POLIEDRO D, JUNTO CON MAPEOS $f_i: D_i \to \mathbb{R}^k$ QUE ENCAJAN LAS CARAS. TODAS LAS CELDAS σ_i SON DE MULTIPLICIDAD 1 ES DECIR $\partial D = \sum \sigma_i$ DONDE $\sigma_i = (D_i, f_i, or_i)$. LA ORIENTACIÓN SE HACE DE LA SIGUIENTE MANERA

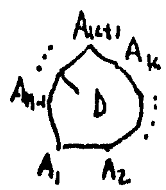
SEA $e_1, \dots, e_k$ UNA BASE ORIENTADA EN $\mathbb{R}^k$. Y SEA D_i UNA DE LAS CARAS DE D. TOMEMOS UN PUNTO INTERIOR DE D_i Y CONSTRUYAMOS UN VECTOR n normal a D y apuntando al exterior del poliedro. Un marco orientado para D_i es una base $f_1,\dots,f_{k-1}$ tal que $(n, f_1,\dots,f_{k-1})$ tiene la misma orientación que $(e_1,\dots,e_k)$.



La frontera de una cadena se hace de manera análoga. Sea $\sigma=(D,f,or)$ una celda de dimensión k en M. Su frontera $\partial\sigma$ es la (k-1) cadena $\partial\sigma=\sum\sigma_i$ donde $\sigma_i=(D_i,f_i,or_i)$ donde D_i son las (k-1) caras de D, or_i son orientaciones como antes y f_i son las restricciones de $f: D\to M$ a la cara D_i.
La frontera ∂c_k de la cadena k-dimensional c_k en M es

$$\partial c_k=\partial(m_1\sigma_1+\cdots+m_r\sigma_r)=m_1\partial\sigma_1+\cdots+m_r\partial\sigma_r.$$

Como un ejemplo de esto, demostraremos que la frontera de la frontera de cualquier cadena es cero. Por la linealidad y por la definición es suficiente demostrar que $\partial\partial D=0$ donde D es un poliedro convexo D. Y para simplificar lo haremos para el caso $k=2$.



La frontera de D son los segmentos de rectas $A_1A_2, A_2A_3,\dots,A_{n-1}A_1$. Y la frontera de está cadena cuyas celdas son poliedros de dimensión uno es

$$A_1-A_2+A_2-A_3+\cdots+A_{n-1}-A_1=0. \quad \therefore\ \partial\partial D=0.$$

La idea es mostrar que las caras de dimensión k-2 aparecen en $\partial\partial D$ dos veces con signo opuesto.

F.- La integral de una forma sobre una cadena

Sea ω^k una k-forma y $c_k=\sum m_i\sigma_i$ una k-cadena. La integral de la forma ω^k sobre la cadena c_k es igual a

$$\int_{c_k}\omega^k=\sum m_i\int_{\sigma_i}\omega^k.$$

EJEMPLO

SEA $M = \mathbb{R}^3$ CON UNA ORIENTACIÓN. ENTONCES CUALQUIER 1-FORMA SOBRE M CORRESPONDE A ALGÚN CAMPO VECTORIAL A $(\omega^1 = \omega^1_A)$, DONDE

$$\omega^1_A(\xi) = (A, \xi).$$

LA INTEGRAL DE ω^1_A SOBRE UNA CADENA c_1 EL CUAL REPRESENTA UNA CURVA l SE LLAMA LA CIRCULACIÓN DEL CAMPO A SOBRE LA CURVA l:

$$\int_{c_1} \omega^1_A = \int_{l} (A, dl).$$

DE IGUAL FORMA, CUALQUIER 2-FORMA EN M TAMBIÉN CORRESPONDE A ALGÚN CAMPO A ($\omega^2 = \omega^2_A$, DONDE $\omega^2_A(\xi, \eta) = (A, \xi, \eta)$). LA INTEGRAL DE LA FORMA ω^2_A SOBRE LA CADENA c_2 LA CUAL REPRESENTA UNA SUPERFICIE ORIENTADA S SE LLAMA EL FLUJO DEL CAMPO A A TRAVÉS DE LA SUPERFICIE S:

$$\int_{c_2} \omega^2_A = \int_{S} (A, dn).$$

V.- DIFERENCIACIÓN EXTERIOR

EMPEZAREMOS CON UN EJEMPLO

A.- LA DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

LA DERIVADA EXTERIOR DE UNA K-FORMA ω EN UNA VARIEDAD M ES UNA (K+1)-FORMA $d\omega$ EN LA MISMA VARIEDAD. IR DE UNA FORMA A SU DERIVADA ES LO ANÁLOGO A IR DE UNA FUNCIÓN A SU DIFERENCIAL O DE IR DE UN CAMPO VECTORIAL A SU DIVERGENCIA, AQUÍ RECORDAREMOS LA DEFINICIÓN DE DIVERGENCIA.

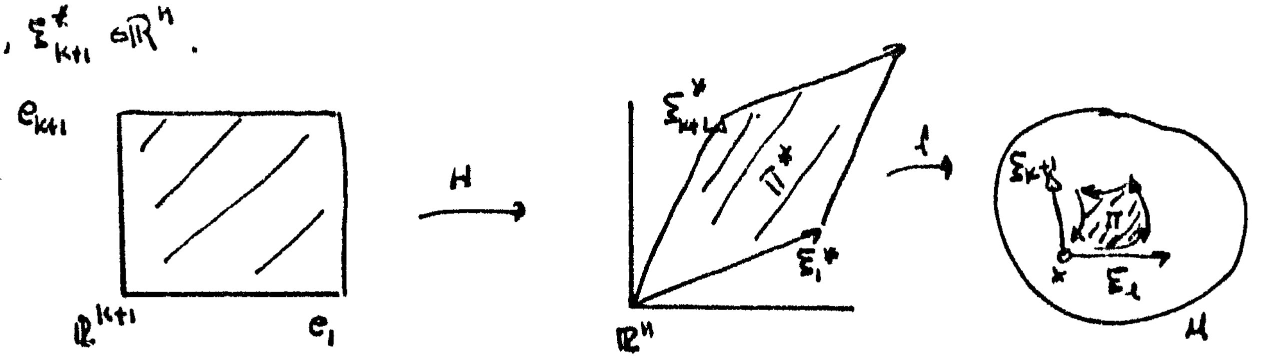
SEA A UN CAMPO VECTORIAL EN $\mathbb{R}^3$. Y SEA S LA FRONTERA DE UN PARALELEPÍPEDO Π CON ARISTAS ξ_1, ξ_2 Y ξ_3 EN EL VÉRTICE x. SI EL PARALELEPÍPEDO Π ES MUY PEQUEÑO, EL FLUJO F ES, APROXIMADAMENTE, PROPORCIONAL AL PRODUCTO DEL VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO, $V=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ Y LA FUENTE DE DENSIDAD EN x. EL LÍMITE $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{F(\varepsilon\Pi)}{\varepsilon^3 V}$ DONDE $\varepsilon\Pi$ ES EL PARALELEPÍPEDO $\varepsilon\xi_1, \varepsilon\xi_2, \varepsilon\xi_3$, SE LLAMA LA DIVERGENCIA DEL CAMPO A EN x, LO DENOTAMOS POR $\operatorname{div} A$.

PARA IR A CASOS DE DIMENSIÓN MÁS ALTA, OBSERVEMOS QUE EL FLUJO DE A A TRAVÉS DE UN ELEMENTO DE SUPERFICIE ES, PRECISAMENTE, LA DOS FORMA ω_A^2. ENTONCES LA DIVERGENCIA ES LA DENSIDAD EN

$\omega^3 = \operatorname{div} A \; dx\wedge dy \wedge dz$ CON $\omega^3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \operatorname{div} A \cdot V(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

B.- DEFINICIÓN DE DERIVADA EXTERIOR

DEFINIMOS EL VALOR DE LA FORMA $d\omega$ EN $\xi_1, \dots, \xi_{k+1} \in TM_x$ DE LA SIGUIENTE MANERA. ESCOGEMOS UN SISTEMA DE COORDENADAS EN UNA VECINDAD DE x EN M EN OTRAS PALABRAS ESCOGEMOS UN MAPEO DIFERENCIABLE f DE UNA VECINDAD DEL PUNTO 0 EN $\mathbb{R}^n$ EN UNA VECINDAD DE x EN M. LAS PREIMÁGENES DE LOS VECTORES $\xi_1, \dots, \xi_{k+1} \in TM_x$ BAJO LA DIFERENCIAL DE f ESTÁ EN EL ESPACIO TANGENTE A $\mathbb{R}^n$ EN CERO. SI HACEMOS LA IDENTIFICACIÓN DE $T\mathbb{R}^n_0$ CON $\mathbb{R}^n$ PODEMOS CONSIDERAR A LAS PREIMÁGENES COMO VECTORES $\xi_1^*, \dots, \xi_{k+1}^* \in \mathbb{R}^n$.



SEA $H: \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^n$ EL MAPEO LINEAL QUE MANDA EL CUBO ORIENTADO GENERADO POR $e_1, \dots, e_{k+1}$ SOBRE EL PARALELEPÍPEDO Π^* GENERADO POR $\xi_1^*, \dots, \xi_{k+1}^*$ TOMANDO CADA VECTOR e_i EN ξ_i^* PARA TODA $i = 1, \dots, k+1$. ENTONCES EL MAPEO f TOMA EL PARALELEPÍPEDO Π^* EN LA CELDA $k+1$ DIMENSIONAL Π EN M, Y DE AQUÍ QUE $f \circ H$ HACE LO MISMO CON EL CUBO ORIENTADO GENERADO POR $e_1, \dots, e_{k+1}$. LA FRONTERA DE LA CELDA Π ES UNA K-CADENA, $\partial\Pi$. CONSIDEREMOS LA INTEGRAL DE LA FORMA ω^k SOBRE LA FRONTERA $\partial\Pi$ DE Π:

$$F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \int_{\partial\Pi} \omega^k.$$

DEMOSTRAREMOS QUE LA PARTE PRINCIPAL $(k+1)$ LINEAL DEL INCREMENTO $F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1})$ ES UNA FORMA EXTERIOR DE GRADO $k+1$ EN EL ESPACIO TANGENTE A M EN x, Y QUE ESTA FORMA NO DEPENDE DEL SISTEMA DE COORDENADAS QUE FUE USADO PARA DEFINIR EL PARALELEPÍPEDO CURVILÍNEO Π. A ESTA FORMA LA LLAMAMOS LA DERIVADA EXTERIOR, O DIFERENCIAL, DE LA FORMA ω^k (EN EL PUNTO x) Y ES DENOTADA POR $d\omega^k$.

C.- UN TEOREMA SOBRE DERIVADA EXTERIOR

TEOREMA:

HAY UNA $(k+1)$-FORMA Ω EN TM_x LA CUAL ES LA PARTE PRINCIPAL $(k+1)$-LINEAL EN 0 DE LA INTEGRAL SOBRE LA FRONTERA DE UN PARALELEPÍPEDO CURVILÍNEO, $F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1})$; ES DECIR

(1). $$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{k+1})}{\varepsilon^{k+1}} = \Omega(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}).$$

LA FORMA Ω NO DEPENDE SOBRE LA ELECCIÓN DE COORDENADAS INVOLUCRADA EN LA DEFINICIÓN DE F. SI EN EL SISTEMA DE COORDENADAS $x_1, \dots, x_n$ EN M, LA FORMA ω^k ES ESCRITA COMO

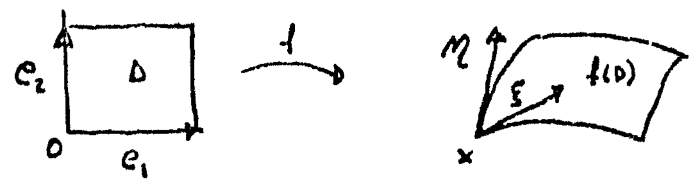
$$\omega^k = \sum a_{i_1, \dots, i_k} \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

ENTONCES Ω ES ESCRITA COMO

(2) $$\Omega = d\omega^k = \sum da_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

DEMOSTRACIÓN:

PARA SIMPLIFICAR LOS CÁLCULOS HAREMOS LA DEMOSTRACIÓN PARA 1-FORMA ARBITRARIA EN EL PLANO x, y.



$\Pi = (D, f, or)$.

SEAN $\xi = df_0(e_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$ Y $\eta = df_0(e_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(0)$.

D_ε ES EL RECTÁNGULO GENERADO POR LOS VECTORES εe_1 Y εe_2. ENTONCES $\partial D_\varepsilon = (te_1) + (\varepsilon e_1 + te_2) - (te_2) - (\varepsilon e_2 + te_1)$ $\quad t \in [0, \varepsilon]$. AHORA SI $\omega^1 = A\,du + B\,dv$ Y $f^*\omega^1 = a\,dx + b\,dy$ TENEMOS QUE

$$\int_{\partial \Pi_\varepsilon} \omega^1 = \int_{\partial D_\varepsilon} f^*\omega^1 = \int_0^\varepsilon [a(te_1) - a(te_1 + \varepsilon e_2)]\,dt - \int_0^\varepsilon [b(te_2) - b(te_2 + \varepsilon e_1)]\,dt =$$

$$= \varepsilon F_1(\theta_1, \varepsilon) - \varepsilon F_2(\varepsilon, \theta_2).$$

ESTA ÚLTIMA IGUALDAD SE DEDUCE DE LO SIGUIENTE:

SEA $F_1(s,t) = a(s,0) - a(s,t)$ ENTONCES POR EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES OBTENEMOS QUE

$$\int_0^\varepsilon F_1(s, \varepsilon)\,ds = \varepsilon F_1(\theta_1, \varepsilon)$$

DONDE $0 \le \theta_1 \le \varepsilon$. ANÁLOGAMENTE CON $F_2(s,t) = b(0,t) - b(s,t)$.

AHORA BIEN, COMO $F_1(s,0) = 0$ TENEMOS QUE

$$\varepsilon F_1(\theta_1, \varepsilon) = \varepsilon[F_1(\theta_1, \varepsilon) - F_1(\theta_1, 0)] = \varepsilon\left[\varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial t}(\theta_1, \varphi_1)\right] = \varepsilon^2 \frac{\partial F_1}{\partial t}(\theta_1, \varphi_1) \text{ CON } 0 \le \varphi_1 \le \varepsilon.$$

AL HACER LO MISMO CON F_2 OBTENEMOS

$$\varepsilon F_1(\theta_1, \varepsilon) - \varepsilon F_2(\varepsilon, \theta_2) = \varepsilon^2 \left[\frac{\partial F_1}{\partial t}(\theta_1, \varphi_1) - \frac{\partial F_2}{\partial s}(\theta_2, \varphi_2)\right] =$$

$$= \varepsilon^2 \left[\frac{\partial b}{\partial x}(\theta_2, \varphi_2) - \frac{\partial a}{\partial y}(\theta_1, \varphi_1)\right]$$

$$\therefore \int_{\partial \Pi_\varepsilon} \omega^1 = \varepsilon^2 \left[\frac{\partial b}{\partial x}(\theta_2, \varphi_2) - \frac{\partial a}{\partial y}(\theta_1, \varphi_1)\right].$$

DE AQUÍ QUE

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial \Pi_\varepsilon} = \frac{\partial b}{\partial x}(0,0) - \frac{\partial a}{\partial y}(0,0).$$

DE LA DEFINICIÓN DE $f^*\omega'$ OBTENEMOS

$$a(x,y)=(f^*\omega')(e_1)=\omega'(df_{(x,y)}(e_1))=\omega'\left(\frac{\partial f_1}{\partial x},\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)=A(f_1(x,y),f_2(x,y))\frac{\partial f_1}{\partial x}+B(f_1(x,y),f_2(x,y))\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

ANÁLOGAMENTE

$b(x,y) = A\dfrac{\partial f_1}{\partial y}+B\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$. POR LO TANTO

$$\frac{\partial a}{\partial y}=\left(\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\frac{\partial f_1}{\partial x}+\left(\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x}+A\frac{\partial^2 f_1}{\partial y\partial x}+B\frac{\partial^2 f_2}{\partial y\partial x}.$$

$$\frac{\partial b}{\partial x}=\left(\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\frac{\partial f_1}{\partial y}+\left(\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\frac{\partial f_2}{\partial y}+A\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}+B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$$

DE AQUÍ

$$\frac{\partial b}{\partial x}(0)-\frac{\partial a}{\partial y}(0)=\left[\frac{\partial A}{\partial u}\xi_1+\frac{\partial A}{\partial v}\xi_2\right]\eta_1+\left[\frac{\partial B}{\partial u}\xi_1+\frac{\partial B}{\partial v}\xi_2\right]\eta_2-$$

$$-\left[\frac{\partial A}{\partial u}\eta_1+\frac{\partial A}{\partial v}\eta_2\right]\xi_1-\left[\frac{\partial B}{\partial u}\eta_1+\frac{\partial B}{\partial v}\eta_2\right]\xi_2 =$$

$$=\frac{\partial A}{\partial v}(\xi_2\eta_1-\eta_2\xi_1)+\frac{\partial B}{\partial u}(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1).$$

RESUMIENDO, NOSOTROS OBTUVIMOS QUE

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(\varepsilon\xi,\varepsilon\eta)}{\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial\Pi_\varepsilon}\omega'=\frac{\partial A}{\partial v}(\xi_2\eta_1-\eta_2\xi_1)+\frac{\partial B}{\partial u}(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)=$$

$$=\frac{\partial A}{\partial v}(dv\wedge du)(\xi,\eta)+\frac{\partial B}{\partial u}(du\wedge dv)(\xi,\eta). = \Omega(\xi,\eta)$$

$$\therefore\ \Omega=\frac{\partial A}{\partial v}dv\wedge du+\frac{\partial B}{\partial u}du\wedge dv.$$

PERO $dA\wedge du+dB\wedge dv=\dfrac{\partial A}{\partial u}du\wedge du+\dfrac{\partial A}{\partial v}dv\wedge du+\dfrac{\partial B}{\partial u}du\wedge dv+\dfrac{\partial B}{\partial v}dv\wedge dv=$

$$=\frac{\partial A}{\partial v}dv\wedge du+\frac{\partial B}{\partial u}du\wedge dv=\Omega.$$

$$\therefore\ d\omega'=dA\wedge du+dB\wedge dv.$$

VEAMOS ALGUNAS DE LAS PROPIEDADES DE LA DERIVADA.

UN PRIMER HECHO QUE ES INMEDIATO VERIFICAR ES EL SIGUIENTE. SI ω_1 Y ω_2 SON K-FORMAS EN $\mathbb{R}^n$ ENTONCES $d(\omega_1+\omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

SEAN ω^k, ω^l UNA K-FORMA Y UNA l-FORMA EN $\mathbb{R}^n$ RESPECTIVAMENTE ENTONCES SI $\omega^k = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$ Y $\omega^l = \sum_{j_1<\cdots<j_l} b_{j_1\cdots j_l}\, dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}$

TENEMOS QUE $d(\omega^k\wedge\omega^l) = d\left[\sum_{i,j} a_{i_1\cdots i_k} b_{j_1\cdots j_l}(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})\wedge(dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l})\right] =$

$$= \sum_{ij} b_{j_1\cdots j_l}(da_{i_1\cdots i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})\wedge(dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}) + \sum_{ij} a_{i_1\cdots i_k}\, db_{j_1\cdots j_l}\wedge(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})\wedge$$

$$\wedge(dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}) = \left(\sum_i da_{i_1}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right)\wedge\left(\sum_j b_{j_1\cdots j_l}\, dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}\right) +$$

$$+ \sum_{ij} (-1)^k a_{i_1\cdots i_k}(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})\wedge(db_{j_1\cdots j_l}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}) =$$

$$= d\omega^k\wedge\omega^l + (-1)^k\omega^k\wedge d\omega^l.$$

$$\therefore\ d(\omega^k\wedge\omega^l) = d\omega^k\wedge\omega^l + (-1)^k\omega^k\wedge d\omega^l.$$

AHORA BIEN COMO LA DIFERENCIAL DE LA FUNCIÓN CONSTANTE ES CERO TENEMOS QUE $dd=0$.

SEA $f: M\to N$ UN MAPEO SUAVE Y ω UNA K-FORMA EN N ENTONCES $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$. PRIMERO LO HAREMOS CUANDO $k=0$. RECORDEMOS QUE EN ESTE CASO $f^*\omega = \omega\circ f$. DE AQUÍ QUE

$$f^*(d\omega) = d\omega(f_*) = d\omega\circ f_* = d(\omega\circ f) = d(f^*\omega).$$

SI ω ES UNA K-FORMA CON K ARBITRARIA TENEMOS QUE

$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$ Y POR LO TANTO

$$f^*(d\omega) = f^*\left(\sum_{i_1<\cdots<i_k} da_{i_1\cdots i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right) = \sum_i f^*(da_{i_1\cdots i_k})\wedge f^*(dx_{i_1})\wedge\cdots\wedge f^*(dx_{i_k}) =$$

$$= \sum_i d(f^*a_{i_1\cdots i_k})\wedge d(f^*x_{i_1})\wedge\cdots\wedge d f^*(x_{i_k}) = d(f^*\omega).$$

$$\therefore\ f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$

D.- FÓRMULA DE STOKES

SEA c UNA $(k+1)$-CADENA Y ω UNA k-FORMA EN M ENTONCES $\int_{\partial c}\omega = \int_c d\omega.$

DEM

ES SUFICIENTE SI CONSIDERAMOS QUE LA CADENA ES UNA CELDA.

SUPONGAMOS PRIMERO QUE LA CELDA σ ESTÁ DADA POR UN PARALELEPÍPEDO ORIENTADO $\Pi \subset \mathbb{R}^{k+1}$. CONSIDEREMOS UNA PARTICIÓN DE Π EN N^{k+1} PARALELEPÍPEDOS IGUALES Π_i. ENTONCES

$$\int_{\partial\Pi}\omega = \sum_{i=1}^{N^{k+1}} F_i \quad \text{DONDE } F_i = \int_{\partial\Pi_i}\omega.$$

NOSOTROS SABEMOS QUE

$$F_i = d\omega(\xi_1^i,\dots,\xi_{k+1}^i) + N^{-(k+1)}\varphi_i(N) \quad \text{DONDE } \varphi_i(N)\to 0 \text{ SI } N\to\infty$$

DE AQUÍ QUE

$$\sum_{i=1}^{N^{k+1}} F_i = \sum_{i=1}^{N^{k+1}} d\omega(\xi_1^i,\dots,\xi_{k+1}^i) + \sum_{i=1}^{N^{k+1}} N^{-(k+1)}\varphi_i(N)$$

PERO COMO

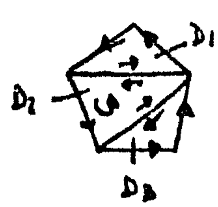
$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N^{k+1}} N^{-(k+1)}\varphi_i(N) \leq \lim_{N\to\infty} N^{-(k+1)}\sum_{i=1}^{N^{k+1}}\max_i \varphi_i(N) = \lim_{N\to\infty}\max_i\varphi_i(N) = 0$$

TENEMOS

$$\int_{\partial\Pi}\omega = \sum_{i=1}^{N^{k+1}} F_i = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N^{k+1}} F_i = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N^{k+1}} d\omega(\xi_1^i,\dots,\xi_{k+1}^i) = \int_\Pi d\omega$$

LA ÚLTIMA IGUALDAD SE DEBE A QUE $\sum_{i=1}^{N^{k+1}} d\omega(\xi_1^i,\dots,\xi_{k+1}^i)$ ES UNA SUMA DE RIEMANN PARA $\int_\Pi d\omega$.

PARA PROBAR EL TEOREMA PARA UN POLIEDRO CONVEXO D, ES SUFICIENTE DEMOSTRARLO PARA UN SIMPLEJO, DEBIDO A QUE D PUEDE SER DIVIDIDO EN SIMPLEJOS.



$$D = \sum D_i \quad , \quad \partial D = \sum \partial D_i.$$

PRIMERO OBSERVEMOS QUE UN CUBO ORIENTADO K-DIMENSIONAL LO PODEMOS MAPEAR SOBRE UN SIMPLEJO K-DIMENSIONAL TAL QUE:

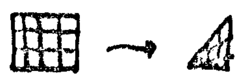
1) EL INTERIOR DEL CUBO ES DIFEOMORFO, CON SU ORIENTACIÓN PRESERVADA, AL INTERIOR DEL SIMPLEJO.

2) LOS INTERIORES DE ALGUNAS DE LAS CARAS (K-1)-DIMENSIONALES DEL CUBO VAN DIFEOMORFICAMENTE, CON SU ORIENTACIÓN PRESERVADA, SOBRE LOS INTERIORES DE LAS CARAS DEL SIMPLEJO. LAS IMÁGENES DE LAS RESTANTES CARAS (K-1)-DIMENSIONALES DEL CUBO ESTÁN EN LAS CARAS (K-2)-DIMENSIONALES DEL SIMPLEJO.

EN EL CASO IGUAL A DOS TENEMOS:

EL CUBO $0 \le x_1, x_2 \le 1$ SOBRE EL TRIÁNGULO ESTÁ DADO POR

$y_1 = x_1$ Y $y_2 = x_1 x_2$



NO ES DIFÍCIL DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN QUE EN $\mathbb{R}^k$ TENEMOS

$y_1 = x_1,\ y_2 = x_1 x_2,\ \dots,\ y_k = x_1 x_2 \cdots x_k.$

SEA $f: \Pi \to S$ EL MAPEO DESCRITO DEL CUBO Π AL SIMPLEJO S. LA $(k-1)$-CADENA $\partial\Pi$ ES LA SUMA DE LAS DOS $(k-1)$-CADENAS $\partial\Pi_1$ y $\partial\Pi_2$ DONDE $\partial\Pi_1$ ES LA CADENA QUE CONSISTE DE LAS CARAS $(k-1)$-DIMENSIONALES QUE BAJO f SON DIFEOMORFAS A LAS CARAS DE DIMENSIÓN $k-1$ DE S, Y $\partial\Pi_2$ AQUÉLLAS QUE BAJO f VAN A LAS CARAS DE DIMENSIÓN $k-2$ DE S.

SEA ω UNA 1-FORMA SOBRE S ENTONCES

$$\int_{\partial\Pi} f^*\omega = \int_{\partial\Pi_1} f^*\omega + \int_{\partial\Pi_2} f^*\omega = \int_{\partial\Pi_1} f^*\omega = \int_{\partial S} \omega .$$

DONDE LA PENÚLTIMA IGUALDAD SE DEBE A QUE $f^*\omega$ EN $\partial\Pi_2$ ES CERO Y LA ÚLTIMA IGUALDAD SE DEDUCE DEL TEOREMA DE CAMBIO DE VARIABLE. AHORA BIEN DE ESTE TEOREMA Y UTILIZANDO EL TEOREMA DE STOKES TENEMOS

$$\int_{\partial S} d\omega = \int_{\Pi} f^* d\omega = \int_{\Pi} d f^*\omega = \int_{\partial\Pi} f^*\omega = \int_{\partial S} \omega .$$

COMO UN COROLARIO IMPORTANTE TENEMOS LOS TEOREMAS USUALES DE CÁLCULO:

EN UNA VARIEDAD RIEMANNIANA, TRES DIMENSIONAL, ORIENTADA, CUALQUIER CAMPO VECTORIAL A CORRESPONDE A 1-FORMA ω^1_A Y UNA 2-FORMA ω^2_A. DE AQUÍ QUE DIFERENCIACIÓN PUEDE SER CONSIDERADA COMO UNA OPERACIÓN SOBRE VECTORES.

DIFERENCIACIÓN EXTERIOR DE 0-FORMAS, 1-FORMAS Y 2-FORMAS CORRESPONDEN A LAS OPERACIONES DE GRADIENTE, ROTACIONAL Y DIVERGENCIA DEFINIDAS POR LAS RELACIONES

$$df = \omega^1_{\text{GRAD} f} \qquad d\omega^1_A = \omega^2_{\text{ROT} A} \qquad d\omega^2_A = (\text{DIV } A)\, \omega^3.$$

DONDE ω^3 ES EL ELEMENTO DE VOLUMEN EN M. DE ESTA MANERA APLICANDO EL TEOREMA DE STOKES TENEMOS

$$f(Y) - f(X) = \int_l \omega^1_{\text{GRAD} f} = \int_l \text{GRAD } f \, dl \qquad \partial l = Y - X.$$

$$\int_l A \, dl = \iint_S \text{ROT } A \, dn \qquad \partial S = l.$$

$$\iint_S A \, dn = \iiint_D (\text{DIV } A)\, \omega^3 \qquad \partial D = S.$$

E.- FORMAS CERRADAS Y CICLOS

DEFINICIÓN

UNA FORMA DIFERENCIAL ω EN UNA VARIEDAD M ES CERRADA SI SU DERIVADA EXTERIOR ES CERO: $d\omega = 0$.

UN CAMPO VECTORIAL A SE DICE QUE NO TIENE FUENTES SI DIV $A = 0$. EN PARTICULAR, LA 2-FORMA ω^2_A QUE CORRESPONDE A UN CAMPO A SIN FUENTES ES CERRADA.

TEOREMA

LA INTEGRAL DE UNA FORMA CERRADA ω^k SOBRE LA FRONTERA DE CUALQUIER CADENA $(k+1)$-DIMENSIONAL c_{k+1} ES IGUAL A CERO

$$\int_{\partial c_{k+1}} \omega^k = 0 \quad \text{si } d\omega^k = 0.$$

UNA K-FORMA ω ES EXACTA SI EXISTE UNA (K-1)-FORMA $\tilde{\omega}$ TAL QUE $\omega = d\tilde{\omega}$.

VAMOS A DAR UN EJEMPLO DE UNA FORMA CERRADA QUE NO ES EXACTA:

TOMEMOS EL ESPACIO EUCLIDEANO DE DIMENSIÓN 3 $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ SIN EL ORIGEN; CONSIDEREMOS LA 2-FORMA ω_A^2 DONDE $A = \left(\frac{1}{R^2}\right) e_R$.

AHORA BIEN LA EXPRESIÓN DEL DIV A EN COORDENADAS ESFÉRICAS EN $\mathbb{R}^3$ ES

$$\operatorname{DIV} A = \frac{1}{R^2 \cos\theta}\left(\frac{\partial R^2 \cos\theta A_R}{\partial R} + \frac{\partial R A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial R \cos\theta A_\theta}{\partial \theta}\right).$$

EN NUESTRO CASO PARTICULAR TENEMOS QUE $\operatorname{DIV} A = 0$. DE AQUÍ QUE ω_A^2 ES CERRADA. PERO EL FLUJO SOBRE CUALQUIER ESFERA CON CENTRO EN EL ORIGEN ES IGUAL A 4π. SIN EMBARGO DEMOSTRAREMOS QUE LA INTEGRAL DE CUALQUIER FORMA EXACTA DEBE SER CERO, SOBRE LA ESFERA.

DEFINICIÓN

UN CICLO EN UNA VARIEDAD M ES UNA CADENA CUYA FRONTERA ES IGUAL A CERO.

LA SUPERFICIE ORIENTADA DE NUESTRA ESFERA LA PODEMOS CONSIDERAR COMO UN CICLO. AHORA BIEN, POR EL TEOREMA DE STOKES TENEMOS

TEOREMA

LA INTEGRAL DE UNA FORMA EXACTA SOBRE CUALQUIER CICLO ES IGUAL A CERO:

$$\int_{C_{k+1}} d\omega^k = 0 \quad \text{si} \quad \partial C_{k+1} = 0.$$

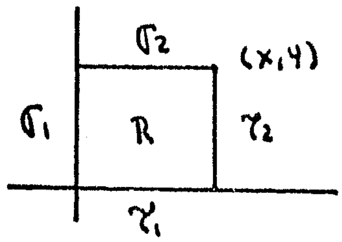
DE ESTO SE DEDUCE QUE NUESTRA DOS FORMA ω_A^2 NO ES EXACTA.

LA EXISTENCIA DE FORMAS CERRADAS SOBRE M QUE NO SON EXACTAS ESTÁ RELACIONADO CON LAS PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DE M. SE PUEDE DEMOSTRAR QUE CUALQUIER K-FORMA CERRADA EN UN ESPACIO VECTORIAL ES LA DIFERENCIAL DE ALGUNA (K-1)-FORMA, A ESTO SE LE LLAMA EL LEMA DE POINCARÉ.

VAMOS A DEMOSTRAR EL LEMA DE POINCARÉ PARA 1-FORMAS EN $\mathbb{R}^2$.

SEA $\omega^1 = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ UNA 1-FORMA EN $\mathbb{R}^2$.

SEA $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ Y $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ LAS TRAYECTORIAS QUE VAN DEL ORIGEN A UN PUNTO (x,y) COMO EN EL DIBUJO



DEFINAMOS $\varphi(x,y) = \int_{\sigma_1+\sigma_2} \omega^1$ AHORA TENEMOS QUE DEMOSTRAR QUE

$$\int_{\sigma_1+\sigma_2} \omega^1 = \int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega^1 \quad \text{PERO} \quad \int_{(\sigma_1+\sigma_2)-(\gamma_1+\gamma_2)} \omega^1 = \int_R d\omega^1 = 0 \quad \text{YA QUE } d\omega^1 = 0$$

POR SER EXACTA. ES DECIR $\varphi(x,y) = \int_{\sigma_1+\sigma_2} \omega^1 = \int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega^1$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y)\right]. \quad \text{PERO } \varphi(x+h,y) = \int_{\sigma+\gamma} \omega^1$$

DONDE $\gamma(t) = ((1-t)x + t(x+h), y)$, Y $\gamma'(t) = (h,0)$. DE AQUÍ QUE

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{\sigma+\gamma} \omega^1 - \int_{\sigma} \omega^1\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{\gamma} \omega^1 =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 a(t(x+h) + (1-t)x, y)\, h\, dt = \lim_{h\to 0} \int_0^1 a((1-t)x + t(x+h), y)\, dt =$$

$$= \lim_{h\to 0} a((1-\xi)x + \xi(x+h), y) = a(x,y).$$

DONDE $\xi \in [0,1]$ Y $\xi \to 0$ CUANDO $h \to 0$.

$\therefore \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = a(x,y)$ ANÁLOGAMENTE $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = b(x,y)$.

$\therefore \quad d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = a\,dx + b\,dy = \omega^1$.

$\therefore$ ω^1 ES EXACTA.

F.- COHOMOLOGÍA Y HOMOLOGÍA

COMO HEMOS VISTO, EL CONJUNTO DE LAS K-FORMAS EN M ES UN ESPACIO VECTORIAL, LAS K-FORMAS CERRADAS UN SUBESPACIO Y LAS EXACTAS UN SUBESPACIO DEL SUBESPACIO DE LAS K-FORMAS CERRADAS. EL ESPACIO COCIENTE

$$\frac{\text{FORMAS CERRADAS}}{\text{FORMAS EXACTAS}} = H^k(M, \mathbb{R}).$$

SE LLAMA EL K-ÉSIMO GRUPO DE COHOMOLOGÍA DE LA VARIEDAD M. UN ELEMENTO DE ESTE GRUPO ES UNA CLASE DE FORMAS CERRADAS QUE DIFIEREN UNA DE LA OTRA SOLO POR UNA FORMA EXACTA.

LA DIMENSIÓN DEL ESPACIO $H^k(M, \mathbb{R})$ SE LLAMA EL K-ÉSIMO NÚMERO DE BETTI DE M.

COMO UN EJEMPLO CALCULEMOS EL PRIMER GRUPO DE COHOMOLOGÍA DE S^1.

SEA π EL RECUBRIMIENTO UNIVERSAL DE S^1. ENTONCES CUALQUIER 0-FORMA O 1-FORMA EN S^1 PUEDE SER LEVANTADA A $\mathbb{R}$ POR π^*.
DE ESTA MANERA SI ω^1 ES UNA FORMA EN S^1 Y $\pi^*\omega^1 = a(\theta)d\theta$ ES LA 1-FORMA CORRESPONDIENTE EN $\mathbb{R}$, $a(\theta)$ ES UNA FUNCIÓN PERIÓDICA DE PERÍODO 2π. ANÁLOGAMENTE CON LAS 0-FORMAS. (EL PERÍODO PUEDE SER DE π).
SEA ω^1 UNA FORMA EXACTA EN S^1, ENTONCES $\pi^*\omega^1$ ES UNA 1-FORMA EXACTA EN $\mathbb{R}$, DE TAL MANERA QUE EXISTE $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ FUNCIÓN PERIÓDICA TAL QUE $\tilde{f}'(\theta)\,d\theta = d\tilde{f} = \pi^*\omega^1$. (AQUÍ $\tilde{f} = \pi^* f$, DONDE $df = \omega^1$.)

SEA $\pi^*\omega_1^1$ Y $\pi^*\omega_2^1$ DOS 1-FORMAS TALES QUE $\pi^*\omega_1^1 - \pi^*\omega_2^1 = d\tilde{f}$ ENTONCES $\int_0^{2\pi} \pi^*\omega_1^1 - \int_0^{2\pi} \pi^*\omega_2^1 = \int_0^{2\pi} d\tilde{f} = f(2\pi) - f(0) = 0 \quad \therefore \int_0^{2\pi} \pi^*\omega_1^1 = \int_0^{2\pi} \pi^*\omega_2^1 = \alpha.$

DE AQUÍ QUE A CADA ELEMENTO DE $H^1(S^1, \mathbb{R})$ LE ASOCIAMOS UN NÚMERO REAL. AHORA SEA α UN NÚMERO REAL Y CONSIDEREMOS LA 1-FORMA $\pi^*\omega^1 = \frac{\alpha}{\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$. ENTONCES $\int_0^{2\pi} \pi^*\omega^1 = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{2\pi} w^* \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \alpha$.

$\therefore$ A CADA CLASE DE EQUIVALENCIA DE $H^1(S^1, \mathbb{R})$ LE CORRESPONDE UN NÚMERO REAL Y VICEVERSA. DE AQUÍ OBTENEMOS

$$H^1(S^1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

LA DIMENSIÓN DEL ESPACIO $H^k(M,\mathbb{R})$ SE LLAMA EL K-ÉSIMO NÚMERO DE BETTI DE M.

CUANDO INTEGRAMOS UNA FORMA CERRADA SOBRE UN CICLO K-DIMENSIONAL PODEMOS REEMPLAZAR ESTE CICLO POR OTRO SI PROBAMOS QUE SU DIFERENCIA ES LA FRONTERA DE UNA (K+1)-CADENA:

$$\int_a \omega^k = \int_b \omega^k \quad \text{si } a-b = \partial c_{k+1} \text{ y } d\omega^k = 0.$$

POINCARÉ LLAMÓ A ESTOS CICLOS HOMÓLOGOS.

CON UNA DEFINICIÓN ADECUADA DEL GRUPO DE CADENAS SOBRE UNA VARIEDAD M Y SUS SUBGRUPOS DE CICLOS Y FRONTERAS, ES DECIR CICLOS HOMÓLOGOS A CERO, EL GRUPO COCIENTE

$$\frac{\text{CICLOS}}{\text{FRONTERAS}} = H_k(M)$$

SE LLAMA EL K-ÉSIMO GRUPO DE HOMOLOGÍA DE M.

UN ELEMENTO DE ESTE GRUPO ES UNA CLASE DE CICLOS HOMÓLOGOS UNO AL OTRO. EL RANGO DE ESTE GRUPO TAMBIÉN ES IGUAL AL K-ÉSIMO NÚMERO DE BETTI DE M. ESTO ÚLTIMO ES EL TEOREMA DE RR.

CAPÍTULO II.

GEODÉSICAS Y MAPEO EXPONENCIAL

LAS GEODÉSICAS VAN A SER LAS CURVAS QUE MINIMIZAN LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS, ESTO EVIDENTEMENTE NO SIEMPRE ES POSIBLE, ES DECIR, NO SIEMPRE EXISTE UNA CURVA UNIENDO DOS PUNTOS QUE TENGA LONGITUD MÍNIMA. UN EJEMPLO DE ESTO ES CONSIDERAR $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ Y LOS PUNTOS P Y $-P$ CON LA MÉTRICA USUAL.

PARA ENCONTRAR LAS CONDICIONES DE EXISTENCIA Y LAS EXPRESIONES QUE DETERMINAN A LAS GEODÉSICAS NOS AYUDAREMOS DEL CÁLCULO DE VARIACIONES Y PRIMERO VAMOS A ENCONTRAR LOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE

$$J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))\, dt$$

DONDE $F: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ES UNA FUNCIÓN C^∞ Y $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ DIFERENCIABLE, VAMOS A CONSIDERAR CURVAS EN EL CONJUNTO DE TODAS LAS FUNCIONES $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. ESTO LO PODEMOS HACER CONSIDERANDO UNA "VARIACIÓN" DE f:

$$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{TAL QUE} \quad \alpha(0,t) = f(t).$$

DENOTEMOS POR $\bar{\alpha}(u)$ A LA FUNCIÓN $t \longmapsto \alpha(u,t)$ Y DE ESTA FORMA $\bar{\alpha}$ ES UNA FUNCIÓN DE $(-\varepsilon,\varepsilon)$ AL CONJUNTO DE FUNCIONES $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. SI ADEMÁS $\alpha(u,a) = a'$ y $\alpha(u,b) = b'$ PARA TODA u EN $(-\varepsilon,\varepsilon)$ ENTONCES DECIMOS QUE α ES UNA VARIACIÓN DE f DEJANDO PUNTOS FINALES FIJOS.

PARA UNA VARIACIÓN α TENEMOS QUE:

$$\left.\frac{dJ(\bar{\alpha}(u))}{du}\right|_{u=0} = \left.\frac{d}{du}\right|_{u=0} \int_a^b F\left(t, \alpha(u,t), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(u,t)\right) dt =$$

$$= \int_a^b \left[\left.\frac{d}{du}\right|_{u=0} F\left(t, \alpha(u,t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u,t)\right)\right] dt =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial\alpha}{\partial u}(0,t)\, \frac{\partial F}{\partial x}(t, f(t), f'(t)) + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u\, \partial t}(0,t)\, \frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t), f'(t))\right] dt.$$

COMO $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial t} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial u}$ APLICAMOS INTEGRACIÓN POR PARTES AL SEGUNDO TÉRMINO DE LA INTEGRAL Y OBTENEMOS

$$\text{(I)} \ldots \quad \left.\frac{d\,J(\bar{\alpha}(u))}{du}\right|_{u=0} = \int_a^b \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0,t)\left[\frac{\partial F}{\partial x}(t,f(t),f'(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t))\right)\right]dt$$

$$+ \left.\frac{\partial \alpha}{\partial u}(0,t)\,\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t))\right|_a^b$$

SI α DEJA PUNTOS FINALES FIJOS ENTONCES EL SEGUNDO TÉRMINO ES CERO Y OBTENEMOS QUE

$$\text{(II)} \ldots \quad \left.\frac{d\,J(\bar{\alpha}(u))}{du}\right|_{u=0} = \int_a^b \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0,t)\left[\frac{\partial F}{\partial x}(t,f(t),f'(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t))\right)\right]dt.$$

EN EL TRATAMIENTO CLÁSICO DEL CÁLCULO DE VARIACIONES, LAS VARIACIONES α ERAN DE LA FORMA

$\alpha(u,t) = f(t) + u\,\eta(t)$, PARA ALGUNA $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}$ CON $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Y NUESTRA FÓRMULA TOMA LA FORMA

$$\left.\frac{dJ}{du}(\bar{\alpha}(u))\right|_{u=0} = \int_a^b \eta(t)\left[\frac{\partial F}{\partial x}(t,f(t),f'(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t))\right)\right]dt$$

LA DERIVADA $dJ(\bar{\alpha}(u))/du\,(0)$ SE LLAMA LA PRIMERA VARIACIÓN DE J Y SE DENOTA CLASICAMENTE POR

$$\delta J = \int_a^b \eta\left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}\right]dt.$$

LLAMAMOS A f UN PUNTO CRÍTICO DE J SI $\delta\bar{J}(\alpha)=0$ PARA TODA VARIACIÓN α DE ∂f DEJANDO PUNTOS FINALES FIJOS. LA FORMA PARTICULAR δJ EN LA QUE HEMOS PUESTO A (II) NOS PERMITE DEDUCIR UNA CONDICIÓN MUY IMPORTANTE.

TEOREMA (ECUACIÓN DE EULER)

LA FUNCIÓN f ($f \in C^2$) ES UN PUNTO CRÍTICO DE J SI Y SÓLO SI f SATISFACE

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, f(t), f'(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t), f'(t))\right) = 0.$$

DEM

PRIMERO DEMOSTRAREMOS UN LEMA.

LEMA 1: SI UNA FUNCIÓN CONTINUA $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ SATISFACE $\int_a^b \eta(t) g(t)\,dt = 0$ PARA CUALQUIER FUNCIÓN η EN $[a,b]$ CON $\eta(a) = \eta(b) = 0$, ENTONCES $g = 0$.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA: ESCOGEMOS $\eta = \phi g$ DONDE ϕ ES POSITIVA EN (a,b) Y $\phi(a) = \phi(b) = 0$. ENTONCES $\int_a^b \eta g\,dt = \int_a^b \phi g^2\,dt = 0 \Leftrightarrow g = 0$.

COMO II SE ANULA EN f PARA CUALQUIER FUNCIÓN $\eta(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}(0,t)$ EL TEOREMA SE SIGUE DEL LEMA.

ES FÁCIL GENERALIZAR LO ANTERIOR AL CASO DONDE $f:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ Y

$$J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))\,dt \quad \text{PARA} \quad F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

EN ESTE CASO CONSIDERAMOS $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ CON $\bar{\alpha}(0) = f$, Y UN CÁLCULO NOS DA

$$\text{III} \ldots \quad \left.\frac{dJ(\bar{\alpha}(\mu))}{d\mu}\right|_{\mu=0} = \int_a^b \sum_{l=1}^n \frac{\partial \alpha^l}{\partial \mu}(0,t)\left[\frac{\partial F}{\partial x^l}(t, f(t), f'(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y^l}(t, f(t), f'(t))\right)\right] dt$$
$$+ \sum_{l=1}^n \frac{\partial \alpha^l}{\partial \mu}(0,t)\,\frac{\partial F}{\partial y^l}(t, f(t), f'(t))\Big|_a^b$$

DE ESTA MANERA, CUALQUIER PUNTO CRÍTICO f DE J DEBE SATISFACER LAS n ECUACIONES

$$\frac{\partial F}{\partial x^l}(t, f(t), f'(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y^l}(t, f(t), f'(t))\right) = 0.$$

APLICAMOS ESTOS RESULTADOS A EL PROBLEMA DE ENCONTRAR A LAS GEODÉSICAS.

SI M ES UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE Y $\gamma:[a,b]\to M$ ES UNA CURVA SUAVE POR TROZOS, CON $\gamma(a)=p$ y $\gamma(b)=q$, DEFINIMOS UNA VARIACIÓN DE γ A SER UNA FUNCIÓN $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ PARA ALGUNA $\varepsilon>0$, TAL QUE

1) $\alpha(0,t)=\gamma(t)$

2) HAY UNA PARTICIÓN $a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b$ DE $[a,b]$ TAL QUE α ES C^∞ EN CADA BANDA $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_{i-1},t_i]$

DECIMOS QUE α ES UNA VARIACIÓN DEJANDO PUNTOS FINALES FIJOS SI

3) $\alpha(u,a)=p$ y $\alpha(u,b)=q$ PARA TODA $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.

Y $\bar{\alpha}(u)$ ES LA TRAYECTORIA $t\mapsto\alpha(u,t)$. NOS GUSTARÍA ENCONTRAR TRAYECTORIAS γ QUE SATISFAGAN

$$\frac{dL(\bar{\alpha}(u))}{du}\bigg|_{u=0}=0 \quad \text{PARA TODAS LAS VARIACIONES } \alpha$$

DEJANDO PUNTOS FINALES FIJOS, AQUÍ $L=\int_a^b \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| dt$.

PARA LOGRAR ESTO NECESITAMOS PRIMERO ENCONTRAR LOS PUNTOS CRÍTICOS DE LA ENERGÍA

$$E(\gamma)=\frac{1}{2}\int_a^b \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2 dt = \frac{1}{2}\int_a^b \left\langle \frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{dt}\right\rangle dt.$$

EL CUAL TIENE UN INTEGRANDO MÁS CÓMODO.

PODEMOS SUPONER QUE CADA $\gamma|[t_{i-1},t_i]$ ESTÁ EN ALGÚN SISTEMA DE COORDENADAS (x,U). SI (u,t) ES EL SISTEMA DE COORDENADAS ESTANDAR EN $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]$ ESCRIBIMOS

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}(u,t)=\alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{(u,t)}\right), \quad \text{Y}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}(u,t)=\alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(u,t)}\right).$$

ENTONCES $\frac{\partial \alpha}{\partial t}(u,t)$ ES EL VECTOR TANGENTE EN EL TIEMPO t A LA CURVA $\bar{\alpha}(u)$.

SI ADOPTAMOS LAS ABREVIACIONES $\alpha^i(u,t) = x^i(\alpha(u,t))$ Y

$\gamma^i(t) = x^i(\gamma(t)) = \alpha^i(0,t)$ ENTONCES

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(u,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha^i}{\partial t}(u,t) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\alpha(u,t)} \quad \text{Y} \quad \frac{d\gamma}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\gamma^i}{dt} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)}.$$

ASÍ $$E(\gamma|[t_{i-1},t_i]) = \frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle dt = \frac{1}{2}\int_a^b \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\,dt.$$

USEMOS X PARA IDENTIFICAR U CON $\mathbb{R}^n$, Y CONSIDEREMOS LAS g_{ij} COMO FUNCIONES DE $\mathbb{R}^n$, ENTONCES ESTAMOS CONSIDERANDO

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\gamma(t),\gamma'(t))\,dt \quad \text{DONDE}$$

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, y^i y^j. \quad \text{ENTONCES}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^\ell}\left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} \quad \text{Y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y^\ell}\left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}\right) = \sum_{r=1}^{n} g_{\ell r}(\gamma(t)) \frac{d\gamma^r}{dt}, \quad \text{DE ESTA MANERA}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y^\ell}\left(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}\right)\right) = \sum_{r=1}^{n} g_{\ell r}(\gamma(t))\frac{d^2\gamma^r}{dt^2} + \sum_{r,j=1}^{n} \frac{\partial g_{\ell r}}{\partial x^j}(\gamma(t))\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^r}{dt}.$$

Y JUGANDO CON LOS ÍNDICES OBTENEMOS

$$\sum_{r,j=1}^{n} \frac{\partial g_{\ell r}}{\partial x^j}\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^r}{dt} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} \quad \text{DE AQUÍ}$$

$$\sum_{r,j=1}^{n} \frac{\partial g_{\ell r}}{\partial x^j}\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^r}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}$$

Y DE III (PÁG 56) OBTENEMOS $\left.\dfrac{dE(\bar{\alpha}(u)|[t_{i-1},t_i])}{du}\right|_{u=0} =$

$$= -\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \alpha^l}{\partial u}(0,t) \left[\sum_{r=1}^{n} g_{lr}(r(t)) \frac{d^2 r^r}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}(r(t)) + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}(r(t)) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}(r(t)) \right\} \frac{dr^i}{dt}\frac{dr^j}{dt} \right] dt$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \alpha^l}{\partial u}(0,t) \sum_{r=1}^{n} g_{lr}(r(t)) \frac{dr^r}{dt} \Big|_{t_{i-1}}^{t_i}$$

SEA $\dfrac{d\gamma}{dt}(t_i+) =$ EL VECTOR TANGENTE POR LA DERECHA DE γ EN t_i Y

$\dfrac{d\gamma}{dt}(t_i-) =$ EL VECTOR TANGENTE POR LA IZQUIERDA DE γ EN t_i.

ENTONCES EL ÚLTIMO SUMANDO ES IGUAL A

$$\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0,t_i), \frac{d\gamma}{dt}(t_i-) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0,t_{i-1}), \frac{d\gamma}{dt}(t_{i-1}+) \right\rangle$$

PARA ABREVIAR LA INTEGRAL UN POCO INTRODUCIMOS LOS SÍMBOLOS

$[ij,l] = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \dfrac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right]$ ESTO DEPENDE DEL SISTEMA DE COORDENADAS

ELEGIDO PERO LA INTEGRAL

$$-\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \alpha^l}{\partial u}(0,t) \left[\sum_{r=1}^{n} g_{lr}(r(t)) \frac{d^2 \gamma^r}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} [ij,l](r(t)) \frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} \right] dt.$$

QUE APARECE EN NUESTRO RESULTADO NO, YA QUE ES LA DERIVADA DE LA ENERGÍA QUE NO DEPENDE DEL SISTEMA. CONSECUENTEMENTE, NOSOTROS USAREMOS EXACTAMENTE LA MISMA EXPRESIÓN PARA CADA $[t_{i-1},t_i]$. PONGAMOS

$\Delta_{t_i}\dfrac{d\gamma}{dt} = \dfrac{d\gamma}{dt}(t_i+) - \dfrac{d\gamma}{dt}(t_i-)$ $\quad i = 1,\dots,N-1.$ $\quad \Delta_{t_0}\dfrac{d\gamma}{dt} = \dfrac{d\gamma}{dt}(t_0+)$; $\Delta_{t_N}\dfrac{d\gamma}{dt} = -\dfrac{d\gamma}{dt}(t_N-)$.

ENTONCES OBTENEMOS LA SIGUIENTE FÓRMULA

TEOREMA (PRIMERA FÓRMULA DE VARIACIÓN)

$$\frac{dE(\bar{\alpha}(u))}{du}\Big|_{u=0} = -\int_a^b \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \alpha^\ell}{\partial u}(0,t)\left[\sum_{r=1}^n g_{\ell r}(r(t))\frac{d^2 r^r}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n [ij,\ell](r(t))\frac{dr^i}{dt}\frac{dr^j}{dt}\right]dt$$

$$-\sum_{i=0}^n \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0,t_i), \Delta_{t_i}\frac{dr}{dt}\right\rangle.$$

COROLARIO

SI $\gamma:[a,b]\to M$ ES UNA TRAYECTORIA C^∞, ENTONCES γ ES UN PUNTO CRÍTICO DE E_a^b SI Y SÓLO SI PARA CUALQUIER SISTEMA COORDENADO (x,U) TENEMOS

$$\sum_{r=1}^n g_{\ell r}(r(t))\frac{d^2 r^r}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n [ij,\ell](r(t))\frac{dr^i}{dt}\frac{dr^j}{dt} = 0 \quad \text{PARA } r(t)\in U.$$

DEM

SUPONGAMOS QUE γ ES UN PUNTO CRÍTICO. DADA t CON $\gamma(t)\in U$, ESCOGEMOS UNA PARTICIÓN DE $[a,b]$ CON $t\in(t_{i-1},t_i)$ PARA ALGUNA i Y TAL QUE $r|[t_{i-1},t_i]$ ESTÁ EN U. SI α ES UNA VARIACIÓN DE γ DEJANDO PUNTOS FINALES FIJOS, ENTONCES EN LA PRIMERA FÓRMULA DE VARIACIÓN PODEMOS SUPONER QUE LA PARTE DE LA INTEGRAL DE t_{i-1} A t_i ESTÁ ESCRITA EN TÉRMINOS DE (x,U). EL TÉRMINO FINAL EN LA FÓRMULA SE ANULA YA QUE γ ES C^∞, AHORA APLICAMOS EL MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN HECHA EN LEMA 1 (PÁG 56), ESCOGAMOS TODAS LAS $\partial\alpha^\ell/\partial u\,(0,t)$ A SER 0, EXCEPTO UNA, LA CUAL ES 0 FUERA DE (t_{i-1},t_i), PERO ES UNA FUNCIÓN POSITIVA MULTIPLICADA POR LO QUE ESTÁ EN EL PARÉNTESIS EN (t_{i-1},t_i).

EL REGRESO ES OBVIO.

PONGAMOS $$\Gamma_{ij}^k = \sum_{\ell=1}^n g^{k\ell}[ij,\ell] = \sum_{\ell=1}^n g^{k\ell}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}\right]$$

ENTONCES NUESTRAS ECUACIONES PUEDEN SER ESCRITAS COMO

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}=0.$$

Y SABEMOS QUE PARA CADA $P\in M$ Y CADA $v\in T_PM$, HAY UNA ÚNICA $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$, PARA ALGUNA $\varepsilon>0$, TAL QUE γ SATISFACE

$\gamma(0)=P$. $\frac{d\gamma}{dt}(0)=v$, $\frac{d^2\gamma^k}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}=0$ CON $\gamma\in C^\infty$.

Y DE ESTO OBTENEMOS

COROLARIO

UNA TRAYECTORIA C^∞, $\gamma:[a,b]\to M$ ES UN PUNTO CRÍTICO DE E_a^b SI Y SÓLO SI γ ES REALMENTE C^∞ EN $[a,b]$ Y PARA CUALQUIER SISTEMA DE COORDENADAS (x,U) SATISFACE

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}=0 \quad \text{PARA } \gamma(t)\in U.$$

DEM

SEA γ UN PUNTO CRÍTICO. SEAN α^1 COMO ANTES, ENTONCES $\gamma|[t_{i-1},t_i]$ SATISFACE LA ECUACIÓN YA QUE EL TÉRMINO FINAL EN LA PRIMERA FÓRMULA DE VARIACIÓN DEBE ANULARSE. AHORA ESCOGEMOS α TAL QUE

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}(0,t_i)=\Delta_{t_i}\frac{d\gamma}{dt} \qquad i=1,\dots,N-1.$$

YA SABEMOS QUE EN LA PRIMERA FÓRMULA DE VARIACIÓN SE ANULA LA INTEGRAL. Y ASÍ OBTENEMOS QUE

$$0=-\sum_{i=1}^{N-1}\left\langle \Delta_{t_i}\frac{d\gamma}{dt},\Delta_{t_i}\frac{d\gamma}{dt}\right\rangle$$

LO QUE IMPLICA QUE TODAS LAS $\Delta_{t_i}\frac{d\gamma}{dt}$ SON 0. Y DE AQUÍ QUE γ ES C^∞ EN $[a,b]$.

TEOREMA

Si $\gamma:[a,b]\to M$ es un punto crítico para E, entonces γ está parametrizada proporcionalmente a la longitud de arco.

DEM

De las definiciones tenemos que

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = [lj,i] + [il,j] .$$

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2 = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\right) =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}(\gamma(t))\frac{d\gamma^l}{dt}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} + \sum_{r,j=1}^{n} g_{rj}(\gamma(t))\frac{d^2\gamma^r}{dt^2}\frac{d\gamma^j}{dt} + \sum_{i,r=1}^{n} g_{ir}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d^2\gamma^r}{dt^2} .$$

Substituyendo $\partial g_{ij}/\partial x^l$ llegamos a

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{d\gamma^j}{dt}\left(\sum_{r=1}^{n} g_{rj}(\gamma(t))\frac{d^2\gamma^r}{dt^2} + \sum_{i,l=1}^{n}[il,j](\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^l}{dt}\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{d\gamma^i}{dt}\left(\sum_{r=1}^{n} g_{ir}(\gamma(t))\frac{d^2\gamma^r}{dt^2} + \sum_{j,l=1}^{n}[jl,i](\gamma(t))\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^l}{dt}\right) .$$

Como γ es un punto crítico para E, ambos términos en el paréntesis se anulan. De aquí que $\|d\gamma/dt\|$ es constante.

Podemos encontrar las ecuaciones para los puntos críticos de la función longitud L exactamente en el mismo camino que fue tratada la energía. Por el momento sólo consideraremos trayectorias $\gamma:[a,b]\to M$ con $d\gamma/dt\neq 0$ en cualquier punto. Para $\gamma|[t_{i-1},t_i]$ de γ contenida en un sistema de coordenadas (x,U), tenemos

$$L(\gamma|[t_{i-1},t_i]) = \int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}}\,dt$$

CONSIDERANDO NUESTRO SISTEMA DE COORDENADAS EN $\mathbb{R}^n$, ESTAMOS EN EL CASO $F(x,y)=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, y^i y^j}$.

INTRODUCIMOS LA FUNCIÓN LONGITUD DE ARCO

$$S(t)=L_a^t(\gamma)$$

ENTONCES

$$\frac{dS}{dt}=\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|=F\left(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}\right).$$

DE ESTA MANERA

$$\frac{\partial F}{\partial x^l}\left(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}(\gamma(t))\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}{\frac{dS}{dt}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y^l}\left(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}\right)=\frac{\sum_{r=1}^{n} g_{lr}(\gamma(t))\frac{d\gamma^r}{dt}}{\frac{dS}{dt}}$$

DESPUÉS, AL IGUAL QUE ANTES, DE ALGUNOS CÁLCULOS FINALMENTE OBTENEMOS LAS ECUACIONES PARA UN PUNTO CRÍTICO DE L:

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}-\frac{d\gamma^k}{dt}\,\frac{\frac{d^2S}{dt^2}}{\frac{dS}{dt}}=0$$

COMO LOS PUNTOS CRÍTICOS DE E CUMPLEN CON QUE $\frac{d^2S}{dt^2}=0$ TENEMOS QUE TODO PUNTO CRÍTICO DE E ES PUNTO CRÍTICO DE L.

INVERSAMENTE, SI γ ES UN PUNTO CRÍTICO DE L Y ESTÁ PARAMETRIZADA CON LA LONGITUD DE ARCO ES UN PUNTO CRÍTICO DE E.

LLAMAMOS A UN PUNTO CRÍTICO DE E, GEODÉSICA.

HASTA EL MOMENTO SABEMOS QUE LAS GEODÉSICAS SON PUNTOS CRÍTICOS DE LA LONGITUD, NOS FALTA VER QUE SON "MÍNIMOS". PARA ESTO TENDREMOS QUE VER A LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y ALGUNAS DE SUS PROPIEDADES.

ANTES DE PASAR A VER LA EXPONENCIAL VEREMOS UN TEOREMA.

TEOREMA

SEA $P \in M$. ENTONCES HAY UNA VECINDAD EN U DE P Y UN NÚMERO $\varepsilon > 0$ TAL QUE PARA CUALQUIER $q \in U$ Y CUALQUIER VECTOR TANGENTE $V \in T_q M$ CON $\|V\| < \varepsilon$ HAY UNA ÚNICA GEODÉSICA

$$\gamma_V : (-2,2) \to M$$

SATISFACIENDO

$$\gamma_V(0) = q, \quad \frac{d\gamma_V}{dt}(0) = V.$$

DEM

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE EXISTENCIA Y UNICIDAD NOS DICE QUE HAY UNA VECINDAD U DE P Y $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ TAL QUE PARA $q \in U$ Y $V \in T_q M$ CON $\|V\| < \varepsilon_1$ HAY UNA ÚNICA GEODÉSICA

$$\gamma_V : (-2\varepsilon_2, 2\varepsilon_2) \to M$$

CUMPLIENDO CON LAS CONDICIONES INICIALES DADAS.

SEA $\varepsilon < \varepsilon_1 \varepsilon_2$, ENTONCES SI $|V| < \varepsilon$ Y $|t| < 2$ TENEMOS $\|V/\varepsilon_2\| < \varepsilon_1$ Y $|\varepsilon_2 t| < 2\varepsilon_2$. DE ESTA MANERA DEFINIMOS $\gamma_V(t)$ A SER $\gamma_{V/\varepsilon_2}(\varepsilon_2 t)$. ∎

SI $V \in T_q M$ ES UN VECTOR PARA EL CUAL HAY UNA GEODÉSICA $\gamma : [0,1] \to M$ SATISFACIENDO $\gamma(0) = q$, $\frac{d\gamma}{dt}(0) = V$. ENTONCES DEFINIMOS LA EXPONENCIAL DE V A SER

$$\exp(V) = \exp_q(V) = \gamma(1).$$

DE ESTA MANERA LA GEODÉSICA PUEDE SER DESCRITA COMO

$$\gamma(t) = \exp_q(tV).$$

SI $\Theta \subset T_qM$ ES EL CONJUNTO DE TODOS LOS VECTORES $V \in T_qM$ PARA LOS CUALES $\exp_q(V)$ ESTÁ DEFINIDO, ENTONCES EL MAPEO $\exp_q : \Theta \to M$ ES C^∞, YA QUE LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARA GEODÉSICAS TIENE UN FLUJO C^∞. IDENTIFICAMOS EL ESPACIO TANGENTE $T_V(T_qM)$ EN $V \in T_qM$ CON T_qM, ENTONCES TENEMOS UN MAPEO INDUCIDO $d_V(\exp_q) : T_qM \to T_{\exp_q(V)}M$.

EN PARTICULAR, VEREMOS QUE $d_0(\exp_q) : T_qM \to T_qM$ ES LA IDENTIDAD CONSIDEREMOS LA CURVA $c(t) = tV$ CON $V \in T_qM$. ENTONCES

$$d_0(\exp_q)(V) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_q(c(t)) = V.$$

AHORA PODEMOS PROBAR EL SIGUIENTE

TEOREMA

PARA CUALQUIER $P \in M$ HAY UNA VECINDAD W Y UN NÚMERO $\varepsilon > 0$ TAL QUE

1) CUALESQUIERA DOS PUNTOS DE W ESTÁN UNIDOS POR UNA ÚNICA GEODÉSICA EN M DE LONGITUD MENOR QUE ε.

2) DENOTEMOS POR $V(q,q')$ EL ÚNICO VECTOR $V \in T_qM$ DE LONGITUD MENOR QUE ε TAL QUE $\exp_q(V) = q'$. ENTONCES $(q,q') \longmapsto V(q,q')$ ES UNA FUNCIÓN C^∞ DE $W \times W \to TM$

3) PARA CADA $q \in W$, EL MAPEO $\exp_q$ MAPEA LA BOLA ABIERTA DE RADIO ε EN T_qM DIFEOMORFICAMENTE SOBRE UN CONJUNTO ABIERTO $U_q \supset W$

DEM

EL ÚLTIMO TEOREMA NOS DICE QUE EL VECTOR $0 \in T_PM$ TIENE UNA VECINDAD V EN TM TAL QUE $\exp$ ESTÁ DEFINIDA AHÍ. DEFINIMOS LA FUNCIÓN C^∞, $F : V \to M \times M$ POR

$$F(V) = (\pi(V), \exp(V))$$

SEA $(\mathfrak{X}, U)$ UN SISTEMA DE COORDENADAS ALREDEDOR DE P. Y USAREMOS EL SISTEMA DE COORDENADAS $(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$. PARA $\pi^{-1}(U)$.

SI $\pi_i^q : M \times M \to M$ ES LA PROYECCIÓN EN EL i-ÉSIMO FACTOR, ENTONCES

$(x^1 \circ \pi_1, \dots, x^n \circ \pi_1, x^1 \circ \pi_2, \dots, x^n \circ \pi_2) = (x_1^1, \dots, x_1^n, x_2^1, \dots, x_2^n)$ ES UN SISTEMA DE COORDENADAS EN $U \times U$. COMO $d_0(\exp_p)$ ES LA IDENTIDAD TENEMOS QUE

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_0\right) = \frac{\partial}{\partial x_1^i}\Big|_{(p,p)} + \frac{\partial}{\partial x_2^i}\Big|_{(p,p)}$$

$$\overline{F}_*\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\Big|_0\right) = \frac{\partial}{\partial x_2^i}\Big|_{(p,p)}.$$

DE AQUÍ QUE F_* ES UNO A UNO EN $0 \in T_pM$. ASÍ F MAPEA UNA VECINDAD V' DE 0 DIFEOMORFICAMENTE SOBRE UNA VECINDAD DE $(p,p) \in M \times M$. PODEMOS SUPONER QUE V' CONSISTE DE TODOS LOS VECTORES $V \in T_qM$ CON q EN ALGUNA VECINDAD U' DE P Y $\|V\| < \varepsilon$. SEA W LA VECINDAD MÁS PEQUEÑA DE P TAL QUE $F(V') \supset W \times W$.

<u>LEMA (GAUSS)</u>

EN U_q, LAS GEODÉSICAS QUE PASAN POR q SON PERPENDICULARES A LAS HIPERSUPERFICIES $\{\exp_q(v) \mid \|v\| = \text{CONSTANTE} < \varepsilon\}$.

<u>DEM</u>

SEA $V: \mathbb{R} \to T_qM$ UNA CURVA SUAVE CON $\|V(t)\| = k < \varepsilon$ $k = \text{CTE}$. $\forall t$, DEFINIMOS $\beta(u,t) = \exp_q(t \cdot V(u))$. ENTONCES β ES UNA VARIACIÓN DE LA GEODÉSICA $\gamma(t) = \exp_q(t \cdot V(0))$, DEFINIMOS EN $[0,1]$.

POR LA PRIMERA FÓRMULA DE VARIACIÓN, TENEMOS

$$\frac{dE(\bar{\beta}(u))}{du}\Big|_{u=0} = -\left\langle \frac{\partial\beta}{\partial u}(0,1), \frac{d\gamma}{dt}(1)\right\rangle - \left\langle \frac{\partial\beta}{\partial u}(0,0), \frac{d\gamma}{dt}(0)\right\rangle =$$

$$= -\left\langle \frac{\partial\beta}{\partial u}(0,1), \frac{d\gamma}{dt}(1)\right\rangle.$$

LA INTEGRAL SE ANULA CUANDO γ ES GEODÉSICA. PERO CADA CURVA

$\bar{\beta}(u)$ TIENE ENERGÍA

$$E(\bar{\beta}(u)) = \int_0^1 \left\| \frac{d\bar{\beta}(u)t}{dt} \right\|^2 dt = \int_0^1 k^2 dt = k^2, \quad \text{ASÍ}$$

$$0 = \frac{dE(\bar{\beta}(u))}{du}\Big|_{u=0} = -\left\langle \frac{\partial \beta}{\partial u}(0,1), \frac{d\gamma}{dt}(1) \right\rangle .$$

COROLARIO

SEA $c:[a,b] \to U_q - \{q\}$ UNA CURVA SUAVE POR TROZOS,

$c(t) = \exp_q(u(t)\cdot v(t))$ PARA $0 < u(t) < \varepsilon$ Y $\|v(t)\| = 1$. ENTONCES

$L_a^b c \geq |u(b) - u(a)|$ Y LA IGUALDAD SE CUMPLE SI Y SÓLO SI u ES MONÓTONA Y v CONSTANTE, TAL QUE c ES UNA GEODÉSICA RADIAL UNIENDO DOS CÍRCULOS CONCÉNTRICOS SOBRE q.

DEM

SI $\alpha(u,t) = \exp_q(u\cdot v(t))$, ENTONCES $c(t) = \alpha(u(t), t)$ Y

$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial \alpha}{\partial t}$. COMO $\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle = 0$ Y $\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right\| = 1$

TENEMOS $\left\| \frac{dc}{dt} \right\|^2 = |u'(t)|^2 + \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\|^2 \geq |u'(t)|^2$ DONDE LA IGUALDAD SE CUMPLE SI Y SÓLO SI $\partial\alpha / \partial t = 0$, Y POR LO TANTO $v'(t) = 0$.

ASÍ

$\int_0^b \left\| \frac{dc}{dt} \right\| \geq \int_0^b |u'(t)| dt \geq |u(b) - u(a)|$, CON LA IGUALDAD SI Y SÓLO SI u ES MONÓTONA Y v ES CONSTANTE.

PARA TERMINAR DEMOSTRAREMOS LAS PROPIEDADES MINIMIZANTES DE LAS GEODÉSICAS.

COROLARIO

SEA W Y ε COMO EN EL ÚLTIMO TEOREMA (PÁG 61). SEA $\gamma: [0,1] \to M$ LAS GEODÉSICAS DE LONGITUD MENOR QUE ε QUE UNE q Y q' EN W, SEA $c: [0,1] \to M$ CUALQUIER CURVA C^∞ POR TROZOS UNIENDO q CON q'. ENTONCES

$$L(c) \geq L(\gamma)$$

CON LA IGUALDAD SI Y SÓLO SI c ES UNA REPARAMETRIZACIÓN DE γ.

DEM

PODEMOS SUPONER QUE $q' = \exp_q(rv) \in U_q - \{q\}$. PARA $\delta > 0$, LA TRAYECTORIA c DEBE CONTENER UN SEGMENTO QUE UNA EL CÍRCULO DE RADIO δ CON EL CÍRCULO DE RADIO r, Y ÉSTE ESTÁ CONTENIDO ENTRE LOS DOS CÍRCULOS. POR EL ÚLTIMO COROLARIO, LA LONGITUD DE ESTE SEGMENTO ES MAYOR O IGUAL A $r-\delta$. DE ESTA MANERA LA LONGITUD DE c ES MAYOR O IGUAL A r, Y CLARAMENTE SI LA IGUALDAD SE DA c DEBE SER UNA REPARAMETRIZACIÓN DE γ.

CAPÍTULO III

TRANSPORTE PARALELO Y DERIVADA COVARIANTE

A: TRANSPORTE PARALELO EN UNA SUPERFICIE.

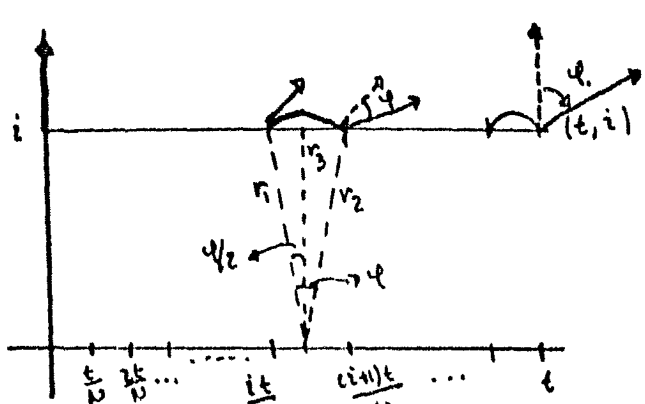
EL TRANSPORTE PARALELO DE UN VECTOR TANGENTE A LA SUPERFICIE A LO LARGO DE UNA GEODÉSICA EN ESTA SUPERFICIE, SE DEFINE DE LA SIGUIENTE MANERA:
EL PUNTO DE ORIGEN DEL VECTOR SE MUEVE A LO LARGO DE LA GEODÉSICA Y EL VECTOR SE MUEVE CON ÉSTE EN FORMA CONTINUA DE TAL FORMA QUE SU ÁNGULO CON LA GEODÉSICA Y SU LONGITUD PERMANESCAN CONSTANTES. TRASLADANDO AL PUNTO FINAL DE LA GEODÉSICA TODOS LOS VECTORES TANGENTES A LA SUPERFICIE EN EL PUNTO INICIAL, OBTENEMOS UN MAPEO DEL PLANO TANGENTE EN EL PUNTO INICIAL A EL PLANO TANGENTE EN EL PUNTO FINAL. ESTE MAPEO ES LINEAL E ISOMÉTRICO.

AHORA DEFINIMOS TRASLACIÓN PARALELA DE UN VECTOR EN UNA SUPERFICIE A LO LARGO DE UNA LÍNEA QUEBRADA QUE CONSISTE DE ARCOS DE GEODÉSICAS. PARA TRASLADAR UN VECTOR A LO LARGO DE UNA LÍNEA QUEBRADA, TRASLADAMOS ÉSTE DEL PRIMER VÉRTICE A EL SEGUNDO A LO LARGO DEL PRIMER ARCO DE GEODÉSICA, ENTONCES TRASLADAMOS ESTE VECTOR A LO LARGO DEL SEGUNDO ARCO Y ASÍ SUCESIVAMENTE.

FINALMENTE, TRASLACIÓN PARALELA DE UN VECTOR A LO LARGO DE CUALQUIER CURVA SUAVE EN UNA SUPERFICIE ESTÁ DEFINIDA POR UN PROCESO AL LÍMITE, EN EL CUAL LA CURVA ES APROXIMADA POR LÍNEAS QUEBRADAS CONSISTENTES DE ARCOS DE GEODÉSICAS.

EJEMPLO

CONSIDEREMOS EL PLANO HIPERBÓLICO, QUEREMOS TRASLADAR UN VECTOR QUE ESTÁ BASADO EN $z=i$, Y CONTENIDO EN EL EJE IMAGINARIO, AL PUNTO $z=t+i$ A LO LARGO DE LA LÍNEA HORIZONTAL ($dy=0$)



CONSIDEREMOS LA PARTICIÓN P DEL SEGMENTO $[0,t]$ EN EL EJE X.

$P = \{P_0 = 0,\ P_1 = \frac{t}{N},\ P_2 = \frac{2t}{N}, \dots, P_i = \frac{it}{N}, \dots, P_{N-1} = \frac{(N-1)t}{N},\ P_N = t\}$ $\quad N \in \mathbb{N}$.

LAS CIRCUNFERENCIAS DE RADIO 1 CON CENTRO EN LOS PUNTOS MEDIOS DE $\frac{it}{N}$ Y DE $\frac{(i+1)t}{N}$ PASA POR $(\frac{it}{N}, i)$ Y $(\frac{(i+1)t}{N}, i)$. SEA r_1, r_2 LOS RADIOS QUE PASAN POR EL PRIMER Y SEGUNDO PUNTO RESPECTIVAMENTE. POR ÚLTIMO SEA r_3 EL RADIO QUE PASA POR EL PUNTO MEDIO DE LA CUERDA DETERMINADA POR LOS PUNTOS $(\frac{it}{N}, i)$; $(\frac{(i+1)t}{N}, i)$. SEA $\varphi/2$ EL ÁNGULO DETERMINADO POR r_1 Y r_3.

RECORDEMOS, ANTES DE CONTINUAR, QUE SI UN VECTOR, BASADO EN $(\frac{it}{N}, i)$, ES TRASLADADO PARALELAMENTE A $(\frac{(i+1)t}{N}, i)$ ENTONCES ÉSTE SUFRE UNA ROTACIÓN, HACIA EL EJE X, DE UN ÁNGULO φ.

TENEMOS QUE $\operatorname{sen}(\varphi/2) = \frac{1}{2}\frac{t}{N}$. $\Rightarrow$ $\varphi = 2 \operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{2}\frac{t}{N})$ DE AQUÍ QUE EL ÁNGULO TOTAL DE ROTACIÓN DE NUESTRO VECTOR ORIGINAL A TRAVÉS DE NUESTRAS GEODÉSICAS (ARCOS DE CÍRCULOS) SERÁ $N\varphi$; AL PASAR AL LÍMITE OBTENEMOS:

$$\lim_{N\to\infty} N\varphi = \lim_{N\to\infty} 2N \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\frac{t}{N}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{t}{z} \operatorname{arc\,sen} z =$$

$$t \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} \operatorname{arc\,sen} z = t \left.\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right|_{z=0} = t.$$

B- TRANSPORTE PARALELO EN UNA VARIEDAD DE DIMENSIÓN n.

LA CONSTRUCCIÓN DE LA TRASLACIÓN PARALELA, DE UN VECTOR, EN UNA VARIEDAD RIEMANNIANA DE DIMENSIÓN MAYOR QUE 2 ES UN POCO MÁS COMPLICADO QUE NEN A. LA RAZÓN, EN EL CASO $n>2$, ES QUE EL VECTOR A SER TRASLADADO NO QUEDA DETERMINADO POR LA CONDICIÓN DE QUE EL ÁNGULO CON LA GEODÉSICA SEA INVARIANTE. DE HECHO, EL VECTOR PUEDE GIRAR SOBRE LA DIRECCIÓN DE LA GEODÉSICA PRESERVANDO SU ÁNGULO CON ÉSTA

EL REFINAMIENTO QUE DEBEMOS INTRODUCIR EN LA CONSTRUCCIÓN DE TRASLACIÓN PARALELA A LO LARGO DE UNA GEODÉSICA ES LA ELECCIÓN DE UN PLANO QUE SEA TANGENTE A LA GEODÉSICA Y DEBE CONTENER AL VECTOR QUE SERÁ TRASLADADO. ESTA ELECCIÓN ES HECHA EN EL SIGUIENTE (DESAFORTUNADAMENTE COMPLICADO) CAMINO.

EN EL PUNTO INICIAL DE LA GEODÉSICA EL PLANO QUE NECESITAMOS ES EL PLANO GENERADO POR EL VECTOR A SER TRASLADADO Y EL VECTOR DIRECTOR DE LA GEODÉSICA (SU VECTOR TANGENTE). AHORA NOS FIJAMOS EN LA SUPERFICIE SUAVE QUE ES LA IMAGEN DEL MAPEO EXPONENCIAL, BASADO EN EL PUNTO, RESTRINGIDO AL PLANO. ESTA SUPERFICIE CONSISTE DE TODAS LAS GEODÉSICAS QUE PASAN POR EL PUNTO Y SON TANGENTES AL PLANO EN CONSECUENCIA LA GEODÉSICA POR LA CUAL TRATAMOS DE TRASLADAR ESTÁ CONTENIDA EN LA SUPERFICIE.

CONSIDEREMOS UN NUEVO PUNTO EN LA GEODÉSICA A UNA PEQUEÑA DISTANCIA Δ DEL PUNTO INICIAL. EL PLANO TANGENTE, EN EL NUEVO PUNTO, A LA SUPERFICIE DESCRITA ANTES CONTIENE AL VECTOR TANGENTE DE LA GEODÉSICA EN ESTE PUNTO. TOMAMOS ESTE NUEVO COMO EL PUNTO INICIAL Y VOLVEMOS A HACER LO MISMO.

DESPUÉS DE UN NÚMERO FINITO DE PASOS PODEMOS ALCANZAR CUALQUIER PUNTO DE LA GEODÉSICA ORIGINAL. COMO RESULTADO DE NUESTRO TRABAJO TENEMOS, EN CUALQUIER PUNTO DE LA GEODÉSICA, UN PLANO TANGENTE QUE CONTIENE AL VECTOR VELOCIDAD DE LA GEODÉSICA. ESTE PLANO DEPENDE SOBRE LA LONGITUD Δ EN NUESTRA CONSTRUCCIÓN. CUANDO Δ TIENDE A CERO LA FAMILIA DE PLANOS TANGENTES CONSTRUIDOS CONVERGE (NOSOTROS SUPONDREMOS CIERTO ESTO).

COMO RESULTADO TENEMOS UN CAMPO DE PLANOS TANGENTES A LO LARGO DE NUESTRA GEODÉSICA QUE CONTIENE AL VECTOR TANGENTE DE ÉSTA Y ESTÁN DETERMINADOS DE UNA MANERA INTRÍNSECA POR LA MÉTRICA. AHORA, LA TRASLACIÓN PARALELA SE HACE COMO EN EL CASO DOS DIMENSIONAL.

CALCULEMOS EL TRANSPORTE PARALELO EN UN SISTEMA DE COORDENADAS (ξ, v).

SEA $\gamma = (r_1, \dots, r_n)$ LA GEODÉSICA POR LA CUAL QUEREMOS HACER LA TRASLACIÓN. SEA $v = (v_1, \dots, v_n) \in T_{\gamma(0)} M$ EL VECTOR QUE QUEREMOS TRASLADAR AL PUNTO $\gamma(s)$. PODEMOS SUPONER QUE γ ESTÁ PARAMETRIZADA CON LA LONGITUD DE ARCO. CONSIDEREMOS LA PARTICIÓN $P = \{0, h, \dots, (n-1)h, s_0\}$ DE $[0, s_0]$ DONDE $h = \frac{s_0}{n}$ (AQUÍ $h = \Delta$) EN CADA PUNTO $\gamma(ih)$ $i = 0, \dots, n$ TENEMOS UN PLANO TANGENTE Y ENTRE DOS PLANOS HAY UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL DE UNO AL OTRO DADA POR $d(\exp_{\gamma(ih)})_{h\gamma'(ih)} : T_{\gamma(ih)} M \to T_{\gamma^*(ih)} M$ RESTRINGIDA A LOS PLANOS CONSTRUIDOS COMO ANTES, A ESTA TRANSFORMACIÓN LINEAL LA DENOTAREMOS POR $A(ih, h)$. SUPONDREMOS QUE

$\lim_{h \to 0} A((n-1)h, h) \circ \dots \circ A(h, h) \circ A(0, h) = B(0, s_0)$ EXISTE, DE HECHO ES SUPONER QUE TENEMOS LA FAMILIA DE PLANOS EN CADA PUNTO DE γ. COMO ESTO ES CIERTO PARA TODA s_0 Y TODO PUNTO INICIAL SUPONDREMOS QUE $B(t, s)$ ES UNA FUNCIÓN DE LAS VARIABLES t Y s, IGUALMENTE CON $A(t, s)$.

QUISIERAMOS DEMOSTRAR QUE EL DESPLAZAMIENTO PARALELO DE v A LO LARGO DE γ CUMPLE CON $\frac{dv^k}{ds^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma_i}{ds} v_j = 0$. PONGAMOS A $B = (b_i^j)$ Y SABEMOS QUE $B(t, 0) = id$. SI LAS COLUMNAS DE B $\begin{matrix} b_1^\ell \\ \vdots \\ b_M^\ell \end{matrix}$ CUMPLE CON

$$\frac{d b_k^\ell}{ds^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma_i}{ds} b_j^\ell = 0 \text{ .... (1)}$$

YA ACABAMOS. PONGAMOS

$$\sum_i \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma_i}{ds} = c_j^k \qquad c = (c_j^k)$$

LA ECUACIÓN (1) SE CONVIERTE EN

$$(1) \dots \quad \frac{d b_k^\ell}{ds^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma_i}{ds} b_j^\ell = \boxed{\frac{d b_k^\ell}{ds^2} + \sum_j c_j^k b_j^\ell = 0}$$

QUE PODEMOS ESCRIBIR COMO $\boxed{\frac{\partial B}{\partial s} + c^T B = 0}$

PERO $\frac{\partial B}{\partial s}(t,s) = \lim_{h\to 0} \frac{B(t,s+h)-B(t,s)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{A(t+s,h)-I}{h}\right] A(t+(n-1)h,h)\circ\cdots\circ A(t,h) =$

$= \frac{\partial A}{\partial s}(t+s,0)\, B(t,s)$. POR LO TANTO BASTA DEMOSTRAR $\frac{\partial A}{\partial s}(t+s,0) = -C^T$.

SEA $\varphi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, LA EXPRESIÓN EN EL SISTEMA DE COORDENADAS DE EXP: $TM\to M$ ENTONCES $A(t,s) = d\varphi_{\bar{x}}(s\bar{b})$, $\gamma(t)=\bar{x}$, $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$.

$\gamma(s) = \varphi_{\bar{x}}(s\bar{b})$ ES GEODÉSICA CON $s\bar{b}$ EN LA FIBRA DE $\bar{x}$.

$\gamma'(s) = d\varphi_{\bar{b}s}(\bar{b}) = \left(\sum_j \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_j} b_j, \dots, \sum_j \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_j} b_j\right)$ COMO γ ES GEODÉSICA TENEMOS

QUE $\frac{d^2\gamma_\ell}{ds^2} + \sum_{mM}\Gamma^\ell_{mM}(\gamma(s))\,\gamma'_m\,\gamma'_M = 0 \Rightarrow \sum_{kjmM}\Gamma^\ell_{mM}\frac{\partial\varphi_m}{\partial y_j}b_j\frac{\partial\varphi_M}{\partial y_k}b_k + \sum_{kj}\frac{\partial^2\varphi_\ell}{\partial y_k\partial y_j}b_kb_j =$

$= \sum_{kj}\left[\frac{\partial^2\varphi_\ell}{\partial y_k\partial y_j} + \sum_{mM}\Gamma^\ell_{mM}\frac{\partial\varphi_m}{\partial y_j}\frac{\partial\varphi_M}{\partial y_k}\right]b_jb_k = 0$. COMO ES PARA TODO VECTOR $\bar{b}$ TENEMOS QUE $\frac{\partial^2\varphi_\ell}{\partial y_k\partial y_j} + \sum_{mM}\Gamma^\ell_{mM}\frac{\partial\varphi_m}{\partial y_j}\frac{\partial\varphi_M}{\partial y_k} = 0$. PERO TENEMOS QUE

$A(t,s) = \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\right)_{s\bar{b}}$ ENTONCES $\frac{\partial A}{\partial s}(t,s) = \left(\sum_m \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y_m\partial y_j} b_m\right)$ DE AQUÍ

$$\frac{\partial A}{\partial s}(t,s) = -\sum_{kmM}\Gamma^\ell_{mM}\frac{\partial\varphi_m}{\partial y_j}\frac{\partial\varphi_M}{\partial y_k}b_k = -\sum_{mM}\Gamma^\ell_{mM}\frac{\partial\varphi_m}{\partial y_j}\gamma'_M$$

PERO CUANDO $s=0$ TENEMOS QUE $\frac{\partial\varphi_m}{\partial y_j} = \delta_{mj}$

$$\therefore\ \frac{\partial A}{\partial s}(t+s,0) = -\sum_M \Gamma^\ell_{jM}\gamma'_M = -c^\ell_j = -C^T.$$

D.- DERIVADA COVARIANTE

JUNTO CON TRASLACIÓN PARALELA A LO LARGO DE CURVAS EN UNA VARIEDAD RIEMANNIANA ESTÁ UN CÁLCULO DIFERENCIAL PARTICULAR LLAMADO DERIVADA COVARIANTE, O CONEXIÓN RIEMANNIANA. DEFINIMOS ESTÁ DIFERENCIACIÓN EN EL SIGUIENTE CAMINO.

SEA ξ UN VECTOR TANGENTE A LA VARIEDAD RIEMANNIANA M EN EL PUNTO x, Y v UN CAMPO VECTORIAL EN UNA VECINDAD DE x. LA DERIVADA COVARIANTE DEL CAMPO v EN LA DIRECCIÓN ξ ESTÁ DEFINIDA USANDO CUALQUIER CURVA INTEGRAL DE ξ NOS MOVEMOS SOBRE ESTÁ, UN TIEMPO t, PARA LLEGAR A UN PUNTO $x(t)$. TRASLADAMOS PARALELAMENTE ESTE VECTOR AL PUNTO ORIGINAL x. DE ESTA MANERA OBTENEMOS UN VECTOR DEPENDIENDO DE t EN T_xM. PARA $t=0$ ESTE VECTOR ES $v(x)$, Y PARA OTRA t ÉSTE CAMBIA DEPENDIENDO DEL NO PARALELISMO DEL CAMPO VECTORIAL v A LO LARGO DE LA CURVA CONSIDERADA. CONSIDERAMOS LA DERIVADA DEL VECTOR RESULTANTE CON RESPECTO A t, EVALUAMOS EN $t=0$. ESTA DERIVADA ES UN VECTOR TANGENTE EN T_xM. SE LLAMA LA DERIVADA COVARIANTE DEL CAMPO v A LO LARGO DE ξ Y SE DENOTA POR $\nabla_\xi v$.

VAMOS A DEMOSTRAR QUE LA DERIVADA DEL CAMPO VECTORIAL EN T_xM SIEMPRE EXISTE.

SEA $(\mathcal{E},U)$ UNA CARTA EN UNA VECINDAD DE x, SUPONGAMOS QUE $\bar{E}_1(x),\dots,\bar{E}_n(x)$ ES UNA BASE ORTONORMAL DE T_xM ASOCIADA A $\mathcal{E}$. CONSIDEREMOS EL TRANSPORTE PARALELO DE ESTOS VECTORES A LO LARGO DE $x(t)$, ESTOS FORMAN UNA BASE PARA $T_{x(t)}M$. ENTONCES SI P^{-1} ES LA INVERSA DEL TRANSPORTE PARALELO TENEMOS QUE NUESTRA DERIVADA ES

$$\lim_{t\to 0} \frac{P^{-1}\left(\sum v_i(t)\bar{E}_i(t)\right) - \sum v_i E_i}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sum_i v_i(t)\, P^{-1}(E_i(t)) - \sum v_i \bar{E}_i}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \sum_i \frac{v_i(t)-v_i}{t} E_i = \sum_i \frac{dv_i}{dt} E_i \Big|_{t=0}.$$

BIBLIOGRAFÍA

I.- MATHEMATICAL METHODS OF CLASSICAL MECHANICS
VLADIMIR IGOREVICH ARNOL
SPRINGER - VERLAG

II.- GEOMETRÍA RIEMANNIANA
MANFREDO P. DO CARMO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA.

III.- AN INTRODUCTION TO DIFFERENTIABLE MANIFOLDS AND RIEMANNIAN GEOMETRY.
WILLIAM M. BOOTHBY
ACADEMIC PRESS

IV.- A COMPREHENSIVE INTRODUCTION TO DIFFERENTIAL GEOMETRY
MICHAEL SPIVAK
PUBLISH OR PERISH.