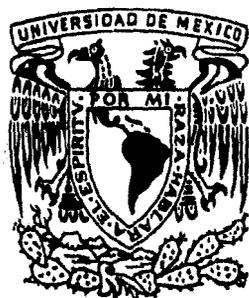


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

24
28



LA FISICA DEL LASER COMO EJEMPLO DE PROBLEMA INTERDISCIPLINARIO

T E S I S P R O F E S I O N A L
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A
GASTON EDUARDO MARTINEZ SAN ROMAN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E.

PROLOGO.....	1
INTRODUCCION.....	3
CAPITULO I.- HISTORIA DEL LASER	6
CAPITULO II.- FISICA ATOMICA DEL LASER.....	10
II.1.- NIVELES DE ENERGIA.....	10
II.2.- ATOMOS, NIVELES DE ENERGIA Y POBLACIONES.....	13
II.3.- EMISION ESPONTANEA Y ESTIMULADA.....	17
II.4.- COEFICIENTES DE EINSTEIN Y AMPLIFICACION DE LA LUZ.....	18
II.5.- MECANISMOS DE ENSANCHAMIENTO DE LINEA.....	24
II.6.- EL LASER DE TRES NIVELES.....	28
II.7.- EL SISTEMA DE CUATRO NIVELES.....	33
CAPITULO III.- FISICA OPTICA DEL LASER.....	39
III.1.- MODOS EN UNA CAVIDAD RECTANGULAR.....	39
III.2.- EL FACTOR DE CALIDAD Q.....	45
III.3.- SELECCION DE MODOS TRANSVERSALES Y LONGITUDINALES.....	48
III.4.- OPTICA DEL LASER.....	49
III.4.1.- RESONADORES OPTICOS.....	50
III.4.2.- HACES DE LUZ GAUSSIANOS.....	52
III.4.3.- RESONADORES SIMETRICOS.....	63

CAPITULO IV.- TIPOS DE LASER.....	67
IV.1.- PROPIEDADES DE LA LUZ LASER.....	67
IV.2.- EL LASER DE RUBI.....	69
IV.3.- EL LASER DE HELIO-NEON.....	72
IV.4.- OTROS TIPOS DE LASER.....	76
IV.5.- APLICACIONES.....	76
CAPITULO V.- EL LASER COMO SISTEMA DINAMICO FUERA DEL EQUI_	
LIBRIO TERMODINAMICO.....	77
V.1.- SISTEMAS DINAMICOS.....	77
V.2.- ECUACIONES DEL LASER.....	79
V.3.- ECUACIONES DEL LASER Y SISTEMAS DINAMICOS.....	83
CONCLUSIONES.....	94
BIBLIOGRAFIA.....	96

PROLOGO

El propósito del presente trabajo es el de exponer de una manera elemental las bases de la teoría del láser y su relación con los sistemas dinámicos fuera del equilibrio termodinámico. Asimismo consideró necesario elaborar una obra que sirviera como base a los interesados en la física y en particular en este tema, ya que en español existen pocas publicaciones sobre el mismo y para algunas personas que no dominan otras lenguas es difícil el acceso a éste.

Por otra parte, el tema en sí tiene gran importancia dentro de la ciencia y la tecnología actual y es necesario que los alumnos de la carrera de física se familiaricen con él, debido a que en la actualidad estos temas están siendo el preámbulo para la solución de muchos problemas que están sin resolver.

En la primera parte del trabajo se da un breve resumen histórico del láser, en el cual nos damos cuenta que las bases de éste se conocían desde 1917 pero su realización no se obtuvo hasta el final de la década de los cincuenta.

La segunda parte trata de la teoría atómica del láser, En ella se analizan los coeficientes de Einstein, la emisión espontánea, la emisión estimulada, el concepto de inversión de población, a partir de estos conceptos se estudia el ensanchamiento de banda en los láseres y se dan las ecuaciones para los sistemas de tres y cuatro niveles.

En el capítulo tercero se revisan las cavidades resonantes, los modos dentro de una cavidad y el factor de calidad Q y los resonadores ópticos más comunes.

El capítulo cuarto trata sobre las propiedades de la luz láser, además de esto se dan dos ejemplos de láseres (el de rubí y el de Helio-Neón). Para finalizar este capítulo se da una breve lista de los tipos de láseres existentes y se citan algunas de sus aplicaciones.

En el capítulo quinto y último de este trabajo, se exponen los conceptos básicos de los sistemas dinámicos, orden y caos y su implicación dentro de la física actual. En esta parte se analiza fundamentalmente el ejemplo del láser y la turbulencia en los fluidos como caso típico de los sistemas lejos del equilibrio termodinámico. Es importante señalar que éste análisis va más allá de este ejemplo, ya que las ecuaciones en ambos casos aparecen en mas sistemas físicos (ej. termomagnetismo) y no físicos, lo cual hace de éste uno de los campos de trabajo más grandes de la física actual.

Para finalizar se dan las conclusiones pertinentes al trabajo realizado, con un enfoque a los sistemas fuera del equilibrio y su importancia dentro de la física actual.

Es importante recalcar la naturaleza interdisciplinaria del láser ya que varias ramas de la física se unen para dar lugar al mismo: La física atómica, la mecánica cuántica y la óptica macroscópica.

I N T R O D U C C I O N

INTRODUCCION

Un sistema atómico se caracteriza por estados de energía discretos y usualmente éstos existen en el estado de más baja energía, conocido como el estado base. Un átomo en dicho estado puede ser excitado a uno de mayor energía a través de varios procesos. Uno de los más importantes procesos de excitación se lleva a cabo a través de colisiones con otras partículas. Otro, es realizado por medio de la absorción de radiación electromagnética; éste último método es conocido como absorción estimulada. Por otro lado cuando el átomo está en el estado excitado, puede haber una transición a uno de menor energía con la consecuente emisión de radiación electromagnética; sin embargo, a diferencia del proceso de absorción, éste puede ocurrir de dos maneras;

La primera se conoce como emisión espontánea, en la que un átomo en el estado excitado emite radiación aún en la ausencia de un campo externo. Es por ello que este proceso no es estimulado por una señal de entrada, sino que sucede espontáneamente. Mas aún la razón de emisiones espontáneas es proporcional al número de átomos en el estado excitado.

La segunda, es llamada emisión estimulada, en la que una señal incidente de frecuencia apropiada hace que un átomo en un estado excitado emita radiación. La razón de radiación estimulada depende de la intensidad del campo externo y del número de átomos en el estado excitado. La emisión estimulada neta depende de la diferencia en el número de átomos en ambos estados, en contraste con la emisión espontánea que sólo depende de la población del estado excitado.

El hecho de que existan dos tipos de emisión (espontánea y estimulada) fue deducido por Einstein en 1917. La consideración que llevó a esta predicción fue la descripción del equilibrio termodinámico en un campo de radiación.

Townes en 1954, por vez primera utilizó el fenómeno de emisión estimulada en la construcción de un aparato amplificador de microondas llamado MASER (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation). Por la misma época un aparato similar fue propuesto por Basov y Prokhorov. El principio maser fue extendido a las frecuencias ópticas por Schawlow y Townes en 1958, lo que llevó a la construcción de lo que hoy conocemos como el LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation).

Las tres componentes principales de cualquier laser son un medio activo, una fuente de bombeo y un resonador óptico. El medio activo consiste en una colección de átomos, moléculas o iones que actúan como amplificador para las ondas de luz. Para que exista amplificación, el medio tiene que ser mantenido en un estado de inversión de población, es decir, un estado en el cual el número de átomos en el nivel superior de energía sea más grande que el del nivel inferior. El mecanismo de bombeo provee la energía para obtener dicha inversión de población. Cuando el medio es colocado dentro de un resonador óptico, el sistema actúa como oscilador.

Bajo circunstancias normales, siempre existe un mayor número de átomos en el estado de menor energía comparado con los estados excitados. Si una onda electromagnética pasa a través de dicho medio, ésta será atenuada en vez de ser amplificada. Por lo tanto, para tener amplificación, se debe tener inversión de población.

Un medio con inversión de población, es capaz de amplificar, pero si el mismo actúa como oscilador, una parte de la energía de

de salida debe ser retroalimentada dentro del sistema. Tal fenómeno se logra al colocar el medio activo entre dos espejos que se encuentran en extremos opuestos. A este sistema se le conoce como resonador óptico. En dichos resonadores, existen muchos modos en los cuales pueden oscilar.

Debido a la naturaleza de los mismos, muchos de los modos se pierden debido a la difracción en los espejos. En adición a esta pérdida básica existen otros factores de pérdida como la dispersión en el medio láser, la absorción de los espejos, etc. En un láser práctico, los modos que mantienen la oscilación son aquellos en los cuales la ganancia compensa las pérdidas. Cuando éste oscila en estado estacionario, las pérdidas compensan exactamente a la ganancia. Como ésta, provista por el medio láser depende de la cantidad de inversión de población, existe un valor crítico más allá del cual el modo particular oscila. Si la inversión de población es menor que este valor crítico, el modo no podrá oscilar. Dicho valor es conocido como inversión de población umbral.

La luz emitida por las fuentes ordinarias de luz, es dispersada en todas direcciones y es de muchas frecuencias. En contraste, la luz emitida por un láser puede ser muy monocromática y muy direccional. A causa de la presencia de la cavidad óptica, sólo ciertas frecuencias discretas pueden oscilar. Debido a esto, la aplicación de los láseres en la ciencia y la tecnología ha venido creciendo cada día más.

C A P I T U L O I

CAPITULO I.HISTORIA DEL LASER.

Las contribuciones básicas de: Planck, Einstein, Rutherford y otros, que establecieron los principios de la teoría cuántica y de la estructura atómica son muy conocidas. En 1917, Einstein introdujo los conceptos de la emisión estimulada de radiación en base a consideraciones termodinámicas. En 1945, Bloch propuso los principios de inversión de poblaciones y sus efectos sobre la radiación. Más tarde, en 1950, la expresión "absorción negativa" con inversión de población, fue empleada en un trabajo de Lamb y Rutherford. Poco tiempo después Purcell y Pound hicieron un trabajo acerca de la inversión de población y la emisión estimulada.

En esta época empezó a producirse una actividad significativa la cual presagiaba el advenimiento del máser. En 1951, Townes discutió la posibilidad de generar radiaciones electromagnéticas por medio de osciladores moleculares coherentes. En 1953, Weber publicó un trabajo con consideraciones sobre la inversión de población en un sólido y en un gas. En 1954, Townes por su parte al igual que Basov y Prokhorov, presentaron teorías sobre un sistema amplificador molecular coherente de gas, en el cual las moléculas del gas en el estado fundamental eran eliminadas selectivamente del sistema, aumentando así la inversión de población. Este sistema empleaba retroalimentación positiva de energía para compensar las pérdidas existentes en el mismo.

En 1954, Gordon, Zeiger y Townes anunciaron el funcionamiento del primer artefacto de radiación molecular que utilizaba emisión estimulada de radiación. Este fue el máser de amoníaco.

El uso de los máseres como amplificadores prácticos fue considerado por Combrisson, Honig y Townes en 1956. En esa oportunidad, indicaron que ciertos sólidos con impurezas paramagnéticas, podían ser utilizados para conseguir condiciones de umbral máser.

El máser de amoniaco de Gordon, Zeiger y Townes, implica un sistema de dos niveles de energía en los estados de transición de las moléculas excitadas. En 1955, Basov y Prokhorov propusieron un sistema de tres niveles. En este sistema, la energía de bombeo lleva al átomo a un nivel de energía máximo. Allí, por emisión estimulada sufre una transición a un nivel intermedio y a continuación decae al estado base.

En 1957, Scovill y otros desarrollaron el primer máser paramagnético, usando iones de tierras raras en un cristal soluble en agua. En 1958, Makhov y otros obtuvieron acción máser en el rubí. En el mismo año, R.H.Dicke obtuvo una patente por la aplicación del interferómetro de Fabry-Perot como una estructura de cavidad sin pérdidas. Esto representó un importante avance en el diseño de cavidades.

En 1958, Schawlow y Townes propusieron medios para desarrollar el máser en las regiones del infrarojo, óptica, y ultravioleta, utilizando resonadores tipo Fabry-Perot.

En 1960, Schawlow propuso el uso del rubí como material para el láser. En ese mismo año, Maiman anunciaría el logro del primer láser. El material usado fue el rubí como red cristalina huésped, con cromo en una concentración de 1:2000 como material activo. Estructuralmente el aparato era una barra de rubí con una superficie totalmente reflectora en un extremo y parcialmente reflectora en el otro; la barra estaba insertada a lo largo del eje de un tubo de lámpara de destello.

En 1961, Javan, Bennett y Herriott consiguieron poner en funcionamiento un láser continuo de gas, basándose en ideas previamente presentadas por el primero. El sistema usaba átomos de neón excitados por colisión con el helio, el cual había sido llevado a un estado metaestable.

En 1962, Keyes y Quist descubrieron diodos luminiscentes altamente eficientes de arseniuro de galio. Posteriormente desarrollaron el láser semiconductor.

En 1963, Lempicki y Samelson informaron haber obtenido acción láser en soluciones orgánicas.

En 1964, Bell obtuvo acción láser en un medio gaseoso ionizado, usando pulsos de alta corriente. Al poco tiempo, Bridges y Bennett publicaron datos sobre varias líneas espectrales del argón en la región visible y obtuvieron acción láser continua con una potencia de salida de 1 Watt. Patel y otros informaron sobre el funcionamiento de un láser de alta potencia el cual utilizaba mercurio.

En 1965, cuando el número de líneas láser en los gases alcanzó mil, era difícil creer que tres años antes esta lista se reducía solo a cinco líneas.

Las aplicaciones del láser se han incrementado en variedad. Claramente la mayoría de los experimentos ópticos pueden llevarse a cabo tan bien o mucho mejor que con las fuentes convencionales de luz. Los experimentos que requieren altas intensidades en regiones estrechas del espectro, sólo pueden ser realizados con el uso de los láseres. Fuera del campo científico, muchas aplicaciones han sido encontradas en medicina, comunicaciones, geofísica, exploración espacial, tecnología de metales y obviamente dentro del ámbito militar.

No debemos olvidar que **aunado al nivel competitivo entre los grupos de científicos**, se encuentran los gobiernos de los **países desarrollados**, en los cuales generalmente se marca la pauta tanto en ciencia como en tecnología. Es obvio que dichos gobiernos se interesan primordialmente en las aplicaciones militares de los nuevos inventos y, por lo tanto, se invierte un gran presupuesto en la investigación. Debido a esto, las condiciones de trabajo y la tecnología necesaria están disponibles para los investigadores, con lo cual, es más factible obtener nuevos resultados casi simultáneamente en distintos grupos de trabajo.

Cabe señalar que de alguna manera, lo queramos o no, los científicos están atados a las aplicaciones e implicaciones de los nuevos inventos y descubrimientos, ya que aunque éstos tengan aplicaciones dentro del ámbito pacífico, lo primero que se buscará será su uso militar. Lamentablemente esta situación se ha dado siempre y ahora más que nunca.

C A P I T U L O I I

CAPITULO IIFISICA ATOMICA DEL LASER.

I-1. NIVELES DE ENERGIA.

Cada elemento químico está asociado con un espectro único, ésto es uno de los aspectos sorprendentes de la naturaleza. Esta particularidad es bastante general: no sólo los átomos tienen espectros característicos sino también las moléculas y los núcleos. Dichos entes, emiten y absorben radiación electromagnética en ciertas frecuencias definidas, que van desde la región de radiofrecuencias hasta las regiones de rayos gamma y X.

En física, el espectro es interpretado en términos de niveles de energía de los átomos, moléculas y núcleos. A través del estudio de dichos espectros, nos damos cuenta de un hecho fundamental: cada sistema está asociado a un conjunto de niveles de energía, llamados estados estacionarios característicos del mismo.

Cuando una onda electromagnética interacciona con un sistema compuesto de átomos, moléculas o núcleos, los campos eléctrico y magnético de ésta perturban el movimiento de dichos elementos.

En el lenguaje de la física clásica decimos que la onda imprime una oscilación forzada sobre el movimiento natural de los átomos. El resultado de la mencionada interacción es la absorción de energía por el sistema. Un oscilador clásico responde mas fácilmente cuando la frecuencia de las oscilaciones forzadas es la misma que su frecuencia natural, situación que se conoce como resonancia. Cuando ésta se da, la **variación**

a la cual el oscilador absorbe energía es máxima.

Se ha encontrado experimentalmente que los átomos, moléculas y núcleos, en general, tienen una serie de frecuencias resonantes $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_n$ a las cuales la absorción de radiación electromagnética es apreciable. Las frecuencias resonantes $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_n$ constituyen el espectro de absorción de la sustancia. Asumamos que el sistema tiene un estado estable de energía mínima, llamado el estado base o nivel base. Entonces, cuando absorbe radiación electromagnética, éste pasa a otro estado de mayor energía, llamado estado excitado. Obviamente, un sistema en un estado excitado puede desprenderse del exceso de energía en forma de radiación electromagnética. Las frecuencias observadas en la radiación emitida constituyen el espectro de emisión del sistema.

La existencia de un espectro, compuesto de frecuencias bien definidas, fue un problema que sorprendió a los físicos a finales del siglo pasado. Para resolverlo, Niels Bohr en 1913 propuso una idea revolucionaria. Supongamos que un átomo en el estado de energía E absorbe radiación de frecuencia ν y pasa a otro estado de energía E' . El cambio en energía del átomo es $E' - E$, y la energía absorbida por el átomo es $h\nu$, donde h es la constante de Planck. La conservación de la energía requiere que ambas cantidades sean iguales, es decir, $E' - E = h\nu$. Similarmente, si el átomo pasa del estado de energía E' a otro de menor energía E , la frecuencia de la radiación emitida está dada por la misma ecuación.

El hecho de que solo ciertas frecuencias $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_n$ son observadas en la emisión y absorción de radiación, se debe al hecho de que el átomo sólo puede tener ciertos valores de energía discretos $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$. Cada valor de energía permitido, es llamado nivel de energía E_n ; de aquí que las frecuencias permitidas que resulten en la emisión o absorción de radiación, son aquellas que corresponden a la transición entre dos niveles de energía permitidos, es decir, $\nu = (E_i - E_j)/h$.

II-2. ATOMOS, NIVELES DE ENERGIA Y POBLACIONES.

Consideremos un átomo. En el lenguaje de la teoría cuántica, el estado cuántico de este átomo en cualquier instante de tiempo está hecho de la suma de todos los estados energéticos característicos del mismo. Por ello, la función de onda $\Psi(t)$ será en general una mezcla de las funciones de onda Ψ_n que representan a los estados permitidos de energía E_n del átomo. Cada una de las funciones de onda, tiene un coeficiente de amplitud de tal manera que en general:

$$\Psi(t) = \sum_n a_n(t) \Psi_n \quad (2-2-1)$$

Los coeficientes a_n son números complejos y en general son funciones del tiempo. Las funciones Ψ_n no dependen del tiempo.

De acuerdo a la teoría cuántica, si hacemos un intento de medir en qué nivel específico de energía se encuentra el átomo en un instante de tiempo, el resultado no será el mismo cada vez que hagamos la **medida**. Esto sucede aún cuando hagamos que el estado del átomo sea el mismo antes de cada medida. Lo que en realidad hacemos es medir la probabilidad de encontrar al átomo en alguno de sus niveles de energía E_n . Esta probabilidad está dada por:

$$P_n \equiv \text{Prob}(E_n) = |a_n|^2 \quad (2-2-2)$$

En discusiones cuánticas, no se puede hablar con certeza de que un átomo se encuentre en el nivel E_n . Lo único que se dice, es que existe cierta probabilidad P_n de que al hacer una medida en un instante de tiempo, el átomo se encontrará en el nivel E_n . Como existe un cien por ciento de probabilidad de que el átomo esté en algún nivel de energía se sigue que:

$$\sum_n P_n = \sum_n |a_n|^2 = 1 \quad (2-2-3)$$

Por supuesto en varios casos, alguno de los posibles a_n puede ser cero y por lo tanto, los valores de probabilidad $P_n=0$ y no hay oportunidad de que el aparato de medida registre al átomo en alguno de esos niveles. Por ejemplo, en equilibrio térmico y $T=0$, todo átomo está en el estado de menor energía permitido ($N=1$) y por lo tanto $P_1=1$ y $P_n=0$ ($N>1$).

Consideremos ahora una colección de átomos similares N . Cada uno de ellos está en uno de los estados cuánticos permitidos y en principio, podemos considerar todas las probabilidades de encontrarlos en cada uno de sus niveles de energía E_n . En experimentos prácticos, no se mide a cada átomo individualmente, sino al conjunto como un todo y se observa la respuesta total.

Existen algunos experimentos en los que se hace pasar un átomo a través de un aparato con una puerta de entrada y varias de salida. El átomo emerge por alguna de las puertas de acuerdo al estado cuántico E_n en que se encuentre.

Supongamos que se hace pasar un gran número de átomos idénticos a través de dicho aparato, uno por uno y contando sólo cuantos de éstos emergen por cada una de las puertas. El número de átomos que emerge por la puerta E_n lo llamaremos N_n ; es decir, el número de átomos que se encuentran en el nivel de energía E_n .

Cada átomo en la muestra estaba inicialmente en su propio estado cuántico mezclado con probabilidad P_n de que emergiera por la puerta E_n . Obviamente el número total de átomos que emerge de la puerta E_n es un buen indicador del valor promedio P_n sobre todos los átomos de la colección.

Si este conjunto de medidas se repitiera bajo las mismas condiciones iniciales, sería muy factible que cada átomo saliera por otra puerta. Sin embargo, si el número de átomos es grande el promedio de los que salen por la puerta E_n será esencialmente el mismo que en los experimentos anterior y subsecuentes bajo las mismas condiciones iniciales. De aquí podemos decir que en promedio N_n es el número de átomos en el nivel E_n .

Obviamente tenemos que
$$\sum_n N_n = N \quad (2-2-4)$$

Al número de átomos en la colección que se encuentran en el estado E_n , digamos (N_n) lo llamaremos la población del nivel E_n .

Si los átomos están normalmente en estados de energía mezclados en lugar de individuales, la idea de que éstos saltan discretamente entre los niveles no es del todo correcta, aunque es útil en valores promedio. La teoría cuántica establece que cuando una señal es aplicada al átomo, el estado cuántico del mismo o la función de onda cambia suave y continuamente de acuerdo a la ecuación de Schrödinger. Si la frecuencia de la señal aplicada está cerca de una de las frecuencias de transición ν_{mn} entre los niveles E_m y E_n entonces los coeficientes de expansión $a_n(t)$ y $a_m(t)$ cambiarán más rápido, mientras que los otros permanecerán constantes. De aquí que las probabilidades P_n y P_m cambian para este átomo como resultado de la señal aplicada y, por lo tanto, las poblaciones N_m y N_n también cambiarán. El resultado neto es como si algunos átomos hubiesen saltado de un nivel a otro.

En la teoría cuántica, la variación y dirección en que los estados cuánticos individuales se desarrollan o evolucionan (de $n \rightarrow m$ o de $m \rightarrow n$) depende directamente de la diferencia $|a_n|^2 - |a_m|^2 = P_n - P_m$. Si hacemos un promedio sobre todos los átomos de una colección, la respuesta promedio o la razón de transición promedio es pro-

proporcional a la diferencia de población $N_n - N_m$. Este es uno de los principios básicos en los cuales se basa el láser.

II-3. EMISION ESPONTANEA Y ESTIMULADA.

La emisión espontánea en los átomos ocurre sin la presencia de una señal aplicada. El cambio al que la emisión espontánea se presenta desde un nivel superior de energía a uno inferior $E_m \rightarrow E_n$ depende solo del número de átomos N_m del nivel superior E_m .

La emisión estimulada, se debe a la presencia de una señal externa y el cambio al cual la emisión ocurre, depende de la diferencia de población $N_m - N_n$.

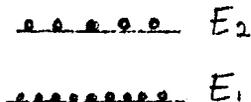
En cualquier colección de átomos y específicamente en materiales láser, los procesos de emisión espontánea y estimulada ocurren simultáneamente pero son independientes. La absorción (o emisión) estimulada da un mecanismo de amplificación lineal y coherente **en fase para la señal amplificada.**

En contraste, la emisión espontánea, ocurre a un cambio que depende sólo de la población del nivel superior y en el decaimiento característico de la transición sin importar si existen señales aplicadas. Si existen dichas señales, la emisión espontánea contribuye a una emisión azarosa que esencialmente añade ruido a la señal aplicada.

Cabe mencionarse que después de que las demás fuentes de ruido han sido eliminadas, el ruido creado por la emisión espontánea es la fuente limitante en la amplificación láser.

II.4. COEFICIENTES DE EINSTEIN Y AMPLIFICACION DE LA LUZ:

Sean N_1 y N_2 el número de átomos por unidad de volumen en los niveles 1 y 2 respectivamente; los niveles corresponden a las energías E_1 y E_2



Un átomo en el estado de menor energía puede absorber radiación y ser excitado al nivel E_2 . Este proceso de excitación puede ocurrir solo en la presencia de radiación. Tal proceso es llamado absorción. La razón de absorción depende de la densidad de radiación a la frecuencia que separa los dos niveles.

$$\text{Si } \omega = \frac{E_2 - E_1}{h} \quad (2-4-1)$$

Entonces, el proceso de absorción depende de la densidad de energía de la radiación a la frecuencia ω ; esta densidad de energía es denotada por $\mu(\omega)$ y es definida de tal manera que $\mu(\omega)d(\omega)$ representa la energía radiada por unidad de volumen dentro del intervalo de frecuencias ω y $\omega+d\omega$.

La razón de absorción debe ser proporcional a N_1 y también a $\mu(\omega)$. De aquí que el número de absorciones por unidad de tiempo y de volumen puede ser escrito como:

$$N_1 B_{12} \mu(\omega) \quad (2-4-2)$$

donde B_{12} es el coeficiente de proporcionalidad y es característico de los niveles de energía.

Consideremos ahora el proceso inverso, es decir, la emisión de radiación a la frecuencia ω cuando el átomo se excita del nivel 2 al 1. Einstein postuló que un átomo en un estado excitado puede hacer una transición radiativa a un nivel más bajo de energía ya sea por emisión espontánea o estimulada.

En la emisión espontánea, la probabilidad por unidad de tiempo de que el átomo haga una transición a un nivel de energía más bajo, es independiente de la densidad de energía del campo de radiación y depende sólo de los niveles relacionados en la transición. Si representamos el coeficiente de proporcionalidad A_{21} tenemos :

$$N_2 A_{21} \quad (2-4-3)$$

representa la razón de emisión espontánea al nivel de menor energía.

En el caso de emisión estimulada, la razón de transición al estado de menor energía es directamente proporcional a la densidad de energía de la radiación a la frecuencia ω .

Por lo tanto la razón de emisiones estimuladas está dada por:

$$N_2 B_{21} u(\omega) \quad (2-4-4)$$

Las cantidades A_{21} , B_{12} y B_{21} son conocidas como los coeficientes de Einstein y son determinadas por el sistema atómico.

En equilibrio térmico, el número de transiciones hacia el estado de mayor energía debe ser igual al número de transiciones hacia el estado de menor energía.

Por lo tanto (en equilibrio térmico):

$$N_1 B_{12} u(\omega) = N_2 A_{21} + N_2 B_{21} u(\omega)$$

$$0 \quad u(\omega) = \frac{A_{21}}{(N_1/N_2)B_{12} - B_{21}} \quad (2-4-5)$$

De la ley de Boltzmann, tenemos las siguientes expresiones para el ratio de las poblaciones de los dos niveles a la temperatura

$$T: \quad \frac{N_1}{N_2} = \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) = \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \quad (2-4-6)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann.

De aquí que:

$$\mu(\omega) = \frac{A_{21}}{B_{12} \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - B_{21}} \quad (2-4-7)$$

De acuerdo a la ley de Planck, la densidad de energía de radiación está dada por:

$$\mu(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (2-4-8)$$

Comparando las ecuaciones (7) y (8) obtenemos:

$$B_{21} = B_{12} = B \quad (2-4-9)$$

$$y \quad \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \quad (2-4-10)$$

De aquí que en equilibrio térmico, las probabilidades de emisión estimulada y absorción estimulada son las mismas.

En equilibrio térmico, el ratio del número de emisiones espontáneas y emisiones estimuladas es: (de (8) y (10))

$$\frac{A}{B\mu(\omega)} = e^{\hbar\omega/k_B T} - 1 \quad (2-4-11)$$

De aquí, en equilibrio térmico (a la temperatura T), para $\omega \ll k_B T/\hbar$ el número de emisiones estimuladas excede por mucho al número de emisiones espontáneas, mientras que para $\omega \gg k_B T/\hbar$ el número de emisiones espontáneas excede por mucho al de estimuladas.

Por fuentes ópticas normales: $T \sim 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$ y

$$\frac{k_B T}{\hbar} = \frac{1.38 \times 10^{-23} (5/10\text{K}) \times 10^3 (10\text{K})}{1.054 \times 10^{-34} (5.8\text{eV})} \approx 1.3 \times 10^{14} \text{ seg}^{-1}$$

ya que en la región óptica $\omega \sim 4 \times 10^{15} \text{ seg}^{-1}$ encontramos que a las frecuencias ópticas la emisión es principalmente - debida a transiciones espontáneas y de aquí que la emisión de fuentes usuales de luz sea incoherente.

En el análisis que se ha hecho se ha asumido que el átomo es capaz de interactuar con la radiación de frecuencia particular ω ; sin embargo, en general el átomo puede interactuar con la radiación sobre un intervalo de frecuencias y la fuerza de la interacción es una función de la frecuencia. Esta función se conoce como función de la forma de línea. Sea $g(\omega)$ la función de forma de línea normalizada ($\int g(\omega) d\omega = 1$) correspondiente a la transición entre los niveles 1 y 2; entonces

$N_{1\omega} d\omega = N_1 g(\omega) d\omega$ y $N_{2\omega} = N_2 g(\omega) d\omega$ representan el número de átomos por unidad de volumen en los niveles 1 y 2 respectivamente, los cuales son capaces de interactuar con radiación de frecuencia en el intervalo $\omega, \omega + d\omega$

Ahora,

$$B_{21} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar \omega^3} A_{21} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar \omega^3 t_{sp}} \quad (2-4-12)$$

donde $t_{sp} \equiv 1/A_{21}$ representa el tiempo de vida espontáneo del nivel superior.

Por lo tanto, si tomamos en cuenta la función de forma de línea, el número total de emisiones estimuladas por unidad de tiempo y unidad de volumen es

$$\begin{aligned} W_{21} &= N_2 \int B_{21} u(\omega) g(\omega) d\omega \quad (2-4-13) \\ &= \frac{N_2 \pi^2 c^3}{\hbar t_{sp}} \int \frac{u(\omega)}{\omega^3} g(\omega) d\omega \end{aligned}$$

Si $\mu(\omega)/\omega^3$ se le asume constante sobre la región en la cual $g(\omega)$ es apreciable, se obtiene:

$$W_{21} \approx N_2 B_{21} \mu(\omega) = \frac{N_2 \pi^2 c^3}{\hbar \omega^3 \tau_{sp}} \mu(\omega) \quad (2-4-14)$$

que es consistente con (4)

Sin embargo, para un campo de radiación cercanamente monocromático a la frecuencia ω' tenemos que:

$$\mu(\omega) = \mu_{\omega} \delta(\omega - \omega') \quad (2-4-15)$$

donde μ_{ω} representa la densidad de energía asociada con el campo monocromático. En dicho caso tenemos:

$$W_{21} = \frac{N_2 \pi^2 c^3}{\hbar \tau_{sp}} \frac{\mu_{\omega}}{\omega'^3} g(\omega') \quad (2-4-16)$$

donde $g(\omega')$ representa el valor de la función de la forma de línea evaluada de frecuencia ω . Similarmente, el número de absorción estimulada por unidad de tiempo y de volumen es:

$$W_{12} = \frac{N_1 \pi^2 c^3}{\hbar \tau_{sp}} \frac{\mu_{\omega}}{\omega'^3} g(\omega') \quad (2-4-17)$$

Uno de los resultados que se obtienen al analizar la intensidad del haz a lo largo de la dirección de propagación es:

$$I_{\omega}(z) = I_{\omega}(0) \exp(-\alpha_{\omega} z) \quad (2-4-18)$$

donde $\alpha_{\omega} = \frac{\pi^2 c^2 M_0}{\omega^2 \tau_{sp}} (N_1 - N_2) g(\omega)$ $M_0 =$ índice de refracción del medio.

De aquí que si $\alpha_{\omega} > 0 \Rightarrow N_1 > N_2$ y la intensidad del haz decrece exponencialmente. Por lo tanto, en equilibrio térmico la energía del haz decrece exponencialmente cuando se propaga por

el medio.

En la otra situación, si existen más átomos en el nivel excitado de energía, (es decir, existe inversión de población) entonces $\alpha \omega < 0$ y habrá un crecimiento exponencial de la intensidad del haz. Este es conocido como amplificación de luz.

En los sistemas laser reales, el medio activo (el cual es capaz de amplificar) es colocado entre un par de espejos, formando lo que se conoce como un resonador. Para que las oscilaciones puedan ser mantenidas en la cavidad, es esencial que las pérdidas sufridas por el haz sean compensadas por la ganancia del medio. Al valor umbral y bajo estado estacionario los dos se compensan exactamente.

II-5. MECANISMOS DE ENSANCHAMIENTO DE LÍNEA.

Un estudio del mecanismo de ensanchamiento de línea es de gran importancia ya que determina las características de operación del Láser.

Consideremos la función de la forma de línea que corresponde a las colisiones que ocurren en una colección de átomos. En una colección de átomos en estado gaseoso, ocurren colisiones al azar y, por lo tanto, un átomo que interactúa con un campo electromagnético ve un campo que cambia su fase en cada colisión. Si el tiempo promedio entre dos colisiones es τ , el átomo no ve una onda monocromática sino una onda que cambia su fase en cada colisión. De aquí, que la función de la forma de la línea esté dada por el espectro de potencia del campo.

Se puede mostrar que si $g(\omega)$ representa la distribución de frecuencias de la radiación que causa la transición entonces:

$$g(\omega) = \frac{\tau_0}{\pi} \frac{1}{1 + (\omega_0 - \omega)^2 \tau_0^2} \quad (2-5-1)$$

Esta distribución es conocida como Lorentziana. El máximo de

$$g(\omega) \text{ es cuando } \omega = \omega_0 \quad \text{y} \quad g(\omega_0) = \tau_0 / \pi$$

El ancho total a la mitad del máximo está dado por:

$$\Delta\omega = 2 / \tau_0 \quad (2-5-2)$$

En una manera similar, se puede calcular el efecto del movimiento térmico de los átomos gaseosos. En un gas, los átomos sufren movimientos al azar. Si dichos átomos interactúan con la radiación, la frecuencia aparente de la onda incidente difiere de la frecuencia vista por un átomo estacionario; este efecto

es conocido como el efecto Doppler. Otra manera de ver esto, es decir que la frecuencia de resonancia del átomo es corrida debido al movimiento.

Si ω representa la frecuencia de la onda incidente y ω_{21} representa la frecuencia de transición, tenemos que:

$$(2-5-3) \quad g(\omega) d\omega = \frac{c}{\omega_{21}} \left(\frac{M}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{-M c^2}{2 k_B T} \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{\omega_{21}^2} \right] d\omega$$

donde se utilizó el hecho de que la probabilidad de un átomo con componente \vec{z} de la velocidad, caiga entre V_z y $V_z + dV_z$ está dada por la distribución de Maxwell:

$$(2-5-4) \quad P(V_z) dz = \left(\frac{M}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{-M v_z^2}{2 k_B T} \right] dz$$

M = masa del átomo y T = temperatura del gas.

La distribución $g(\omega)d\omega$ es una distribución gaussiana. El máximo se obtiene en: $\omega = \omega_{21}$ y $g(\omega_{21}) = (2/\pi)^{1/2} [(\ln 2)^{1/2} / \Delta\omega]$

$$\text{donde } \Delta\omega = 2 \omega_{21} \left(\frac{2 k_B T}{M c^2} \ln 2 \right)^{1/2} \quad (2-5-5)$$

Aún en la ausencia de colisiones y movimientos térmicos, se tiene el ancho de banda inherente debido al tiempo finito del estado excitado, ocasionado por la emisión espontánea.

La función de la forma de línea para este caso está dada por:

$$(2-5-7) \quad g(\omega) = \frac{2 t_{sp}}{\pi} \frac{1}{1 + 4(\omega_0 - \omega)^2 t_{sp}^2} = \frac{2}{\pi \Delta\omega_0} \frac{1}{1 + [(\omega_0 - \omega) / \frac{\Delta\omega_0}{2}]^2}$$

donde t_{sp} = tiempo de vida de la emisión espontánea y $\Delta\omega_0 = 1/t_{sp}$

Esta distribución espectral es nuevamente Lorentziana y a este tipo de ensanchamiento se le conoce como ensanchamiento natural.

En las consideraciones anteriores se ha tomado cada tipo de ensanchamiento por separado. En general, todos los mecanismos pueden ocurrir simultáneamente. Si cualquiera de los mecanismos de ensanchamiento domina sobre los otros, entonces la función de la forma de la línea corresponde a la del mecanismo dominante.

Los mecanismos de ensanchamiento de línea pueden ser clasificados en dos: homogéneos e inhomogéneos. Los primeros tienen una forma de línea Lorentziana y los segundos son azarosos de origen y tienen una forma de línea gaussiana.

COMPORTAMIENTO DE SATURACION DE LOS TIPOS DE ENSANCHAMIENTO:

Consideremos un medio de ensanchamiento homogéneo, colocado dentro del resonador y asumamos que existe un modo del resonador el cual coincide exactamente con el centro de la línea. Al principio, cuando la razón de bombeo está por debajo del umbral, la ganancia en el resonador es menor que las pérdidas y, por lo tanto, el láser no oscila.

De manera en que se va incrementando la razón de bombeo, el modo que alcanza primero el valor umbral es el que coincide con la línea central, ya que ésta tiene el mínimo valor umbral. Cuando el láser oscila en estado estacionario, las ganancias son exactamente iguales a las pérdidas en la frecuencia de oscilación. De aquí que, en estado estacionario, aún si la razón de bombeo es incrementada más allá del valor umbral, la ganancia de la frecuencia oscilante no pasa del valor umbral. Esto se debe a que las pérdidas permanecen constantes. De hecho, al incrementar la potencia de bombeo, se incrementa la potencia del modo, que

es acompañada por una saturación más fuerte de la transición y, por lo tanto, reduciendo de nuevo la ganancia al valor umbral.

Ahora, en una transición homogénea, todos los átomos tienen la misma forma de línea con un máximo en la misma frecuencia. Por ello, todos los átomos actúan en el mismo modo oscilante.

En contraste con el caso homogéneo, si el modo láser está ensanchado inhomogeneamente, entonces un modo dado a cierta frecuencia puede interactuar con un solo grupo de átomos, cuya curva de respuesta contenga la frecuencia del modo. Entonces, si el bombeo es incrementado más allá del umbral, la ganancia a la frecuencia del modo oscilante permanece fija, pero la ganancia a otras frecuencias se puede incrementar. De aquí que, en una línea ensanchada inhomogeneamente se puede tener oscilación multimodal.

II-6.

EL LASER DE TRES NIVELES:

Consideremos un sistema láser de tres niveles. Fig (1)

El bombeo es aplicado del nivel 1 al 3 ($1 \rightarrow 3$) y la emisión láser es del nivel 2 al 1 ($2 \rightarrow 1$). En este sistema el bombeo eleva a los átomos en el nivel 1 al 3, en el que éstos decaen rápidamente al nivel 2 por medio de algún proceso no radiativo. Más aún se requiere que el nivel 2 sea metaestable, es decir, que tenga un tiempo de vida grande comparado con el del nivel 3.

Si la relajación del nivel 3 al 2 es muy rápida, entonces la mayoría de los átomos en el nivel 3 caerán al nivel 2 en lugar del 1. Como el nivel 3 no es laser, éste puede ser un nivel o grupo de niveles anchos, tal que una luz de onda ancha puede ser usada como fuente de bombeo. Además, como el nivel inferior láser es el estado base, más del 50% de los átomos del nivel tienen que ser bombeados para lograr la inversión de población.

El Sistema de Tres Niveles.

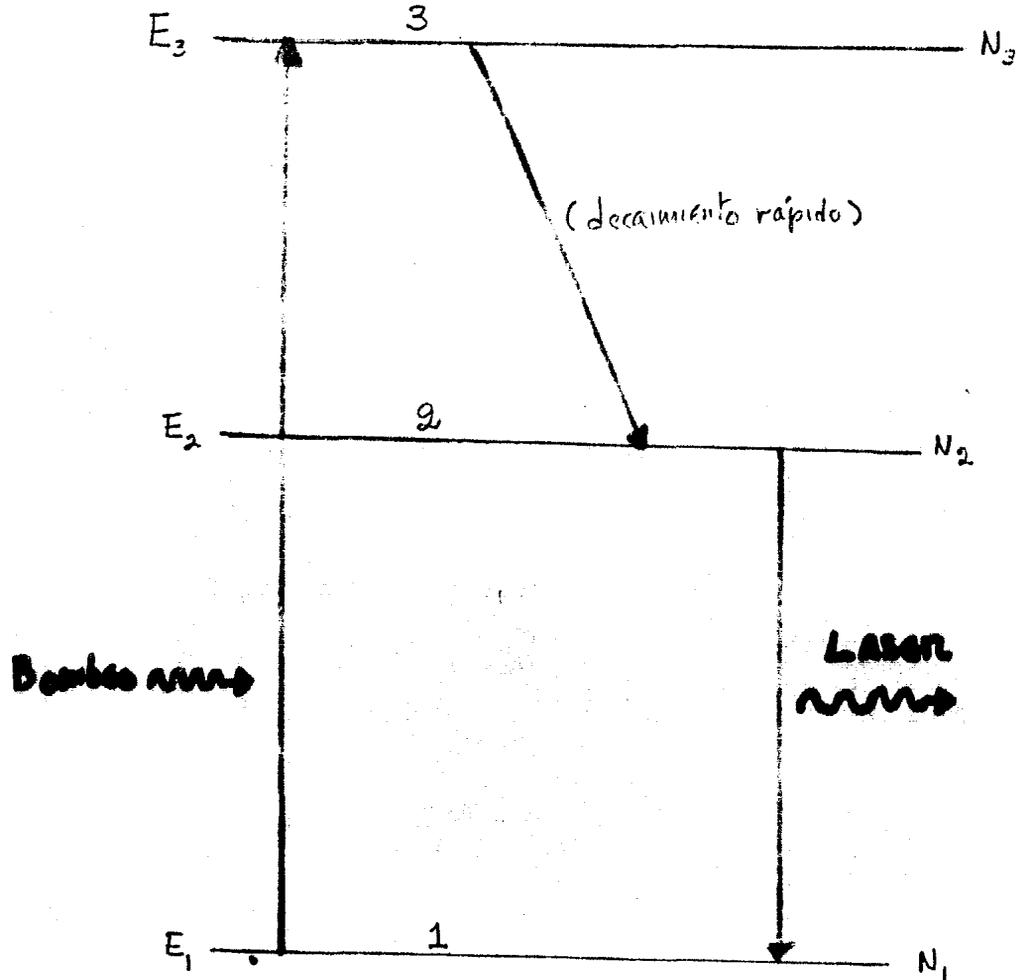
Sean N_1 , N_2 y N_3 el número de átomos por unidad de volumen en los niveles 1, 2 y 3 respectivamente.

Supongamos que solo existen estos niveles $\Rightarrow N = N_1 + N_2 + N_3$ (2-6-1)

$$\frac{dN_3}{dt} = W_p(N_1 - N_3) - N_3 T_{32} \quad (2-6-2)$$

donde $W_p N_1$ representa el número de absorciones inducidas por unidad de tiempo y de volumen, que resulta en la transición $1 \rightarrow 3$. Similarmente, $W_p N_3$ representa el número de emisiones estimuladas en la transición $3 \rightarrow 1$. El último término representa la transición $3 \rightarrow 2$ causada principalmente por procesos no radiativos muy rápidos.

Más aún, $T_{32} = A_{32} + S_{32}$ (2-6-3)



Niveles de energía en un sistema láser de tres niveles. El nivel 1 es el estado base y los demás son excitados. El bombeo eleva a los átomos del nivel 1 al 3, desde el cual decaen rápidamente al nivel 2. La inversión de población es obtenida entre los niveles 2 y 1 y el láser oscila en una frecuencia correspondiente a dicha transición.

Fig. 1

donde A_{32} representa el coeficiente A de Einstein, relacionando a los niveles 3 y 2; S_{32} representa la transición no radiativa de 3 a 2.

Para el nivel dos tenemos que:

$$\frac{dN_2}{dt} = W_\ell (N_1 - N_2) + N_3 T_{32} - N_2 T_{21} \quad (2-6-4)$$

(W_p es proporcional al coeficiente de Einstein B_{13} y a la densidad de energía del bombeo).

El primer término representa la transición estimulada entre los niveles 1 y 2. El segundo, la transición espontánea de $3 \rightarrow 2$ y el tercero la espontánea de $2 \rightarrow 1$. La cantidad W_ℓ es proporcional al coeficiente de Einstein B_{21} , y T_{21} representa la razón de relajación espontánea de $2 \rightarrow 1$.

Ahora,
$$\frac{dN_1}{dt} = W_p (N_3 - N_1) + W_\ell (N_2 - N_1) + N_2 T_{21} \quad (2-6-5)$$

$$\Rightarrow \frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} + \frac{dN_3}{dt} = 0 \quad (2-6-6)$$

En el estado estacionario tenemos que: $\frac{d}{dt} = 0 \Rightarrow$

$$(2-6-7) \quad N_3 = \frac{W_p}{W_p + T_{32}} N_1, \quad N_2 = \left(W_\ell + \frac{T_{32} W_p}{W_p + T_{32}} \right) \frac{N_1}{W_\ell + T_{21}} \quad (2-6-8)$$

$$\circ \circ \quad \frac{N_2 - N_1}{N} = \frac{W_p (T_{32} - T_{21}) - T_{32} T_{21}}{3W_p W_\ell + 2N_p T_{21} + 2T_{32} W_\ell + T_{32} W_p + T_{32} T_{21}} \quad (2-6-9)$$

Para obtener inversión de población se necesita que:

$$T_{32} > T_{21} \quad (2-6-10)$$

Para obtener inversión de población una mínima potencia de bombeo es requerida

$$W_{pt} = \frac{T_{32} T_{21}}{T_{32} - T_{21}} \quad (2-6-11)$$

Para obtener esta inversión se requiere que $W_p > W_{pt}$

Para bajas potencias láser, ($W_l \ll T_{21}$) podemos despreciar W_l en la ecuación (A) y asumiendo que $T_{32} \gg T_{21}$ obtenemos que:

$$\frac{N_2 - N_1}{N} = \frac{W_p - T_{21}}{W_p + T_{21}} \quad (B)$$

bajo esta aproximación para la inversión, debemos tener $W_p > T_{21}$ y la inversión de población es independiente de la energía correspondiente a la transición láser.

Si por el otro lado la potencia de la frecuencia de transición láser es muy alta, podemos escribir (A) como:

$$\frac{N_2 - N_1}{N} \approx \frac{W_p T_{32} - T_{32} T_{21}}{W_l (3W_p + 2T_{32})}$$

bajo esta aproximación, la inversión de población es inversamente proporcional a W_l y de aquí la intensidad del haz.

Ecuación (B) puede ser reescrita como:

$$\frac{N - \Delta N}{2} W_p = \frac{N + \Delta N}{2} T_{21} \quad (C)$$

donde $\Delta N = N_2 - N_1$

Para un láser de 3 niveles tenemos:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 \approx N_1 + N_2$$

donde hemos asumido que los átomos del nivel 3 caen al 2 rápidamente, tal que esencialmente el nivel 3 no esté poblado.

$$\frac{N - \Delta N}{2} \approx N_1 \quad \text{y} \quad \frac{N + \Delta N}{2} \approx N_2$$

(2-6-12)

Consecuentemente, en la ecuación (C), el lado izquierdo representa el número de átomos por unidad de volumen (del nivel 1) elevados al nivel 2 por unidad de tiempo, y el lado derecho representa el número de átomos por unidad de volumen (del nivel 2) que decaen espontáneamente al nivel 1.

2-7. EL SISTEMA DE CUATRO NIVELES.

En el sistema de cuatro niveles, (fig 2), el nivel 1 es el estado base y los demás son estados excitados. Los átomos del nivel 1 son excitados al nivel 4 desde el cual éstos decaen rápidamente al nivel 3. Este nivel, es un nivel metaestable, con un tiempo de vida muy grande. ($\sim 10^{-3} \text{ seg}$). Dicho nivel forma el nivel láser superior mientras que el nivel 2 forma el inferior. El nivel láser inferior debe tener un tiempo de vida muy corto, de manera que los átomos que decaen del nivel 3 se relajen inmediatamente del nivel 2 al 1 y estar listos para ser bombeados al nivel 4 nuevamente.

Si la razón de relajación de los átomos en el nivel 2 al nivel 1 es mas rápida que la razón de átomos que llegan al nivel 2, se puede obtener inversión de población entre los niveles 2 y 3 aún para potencias de bombeo bajas. La cantidad de inversión de población depende de la razón de bombeo.

El análisis para obtener las ecuaciones del sistema de cuatro-niveles es similar al de tres.

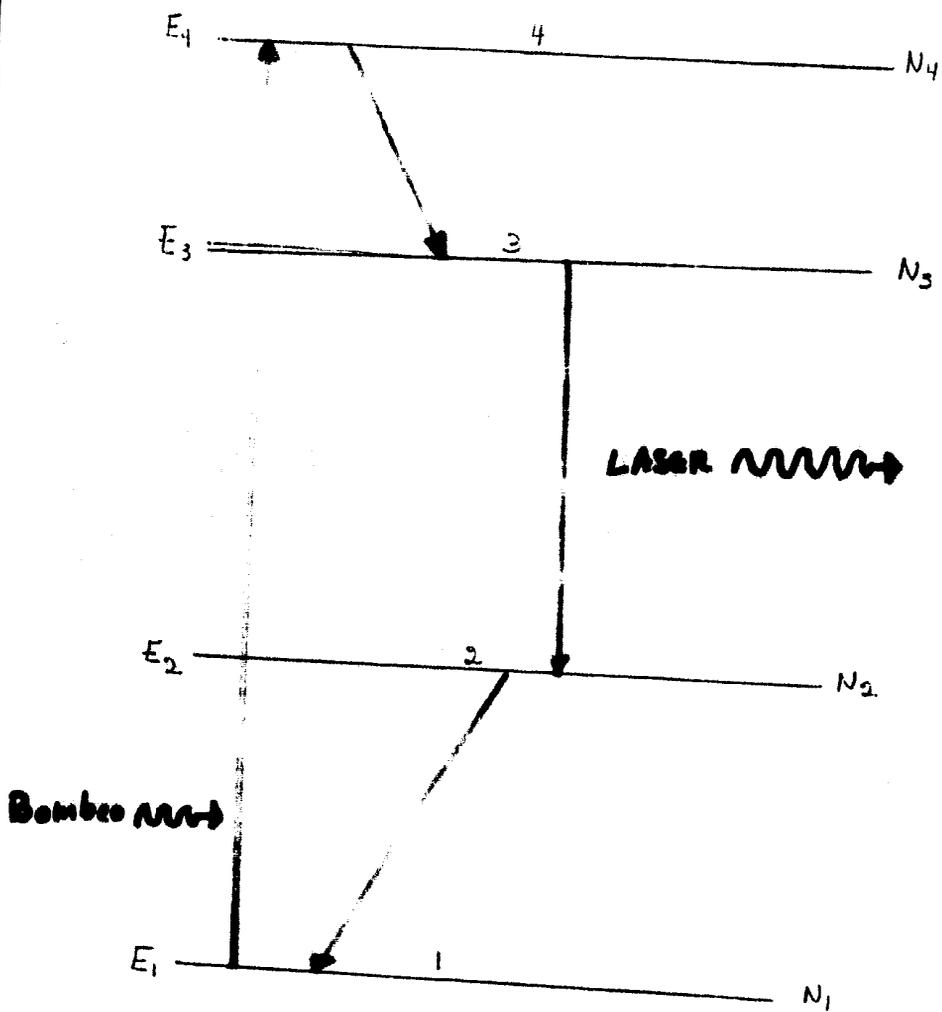
Sean N_1 , N_2 , N_3 y N_4 las poblaciones por unidad de volumen de los niveles 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

El cambio en población del nivel 4 es:

$$\frac{dN_4}{dt} = W_p(N_1 - N_4) - T_4 N_4 \quad (2-7-1)$$

donde $W_p(N_1 - N_4)$ representa la razón neta de transiciones estimuladas entre los niveles 1 y 4 causadas por el bombeo; T_4 es la relajación neta del nivel 4 a los niveles 3, 2 y 1, es decir,

$$T_4 = T_{43} + T_{42} + T_{41} \quad (2-7-2)$$



Niveles de energía en un sistema láser de 4 niveles. El nivel 1 es el estado base y los demás son estados excitados. El bombeo eleva a los átomos del nivel 1 al 4, desde el cual éstos decaen rápidamente al nivel 3, el cual tiene una razón de relajación lenta. La acción láser es obtenida entre los niveles 3 y 2 cuando N_3 se hace más grande que N_2 . Los átomos que decaen al nivel 2 hacen una transición no radiativa rápida al nivel base 1.

Fig. 2

donde las tres representan razones de relajación total (radiativas y no radiativas). También, T_{43} es usualmente mucho mayor que T_{42} y T_{41} de tal manera que la mayoría de los átomos bombeados al nivel 4 decaen al nivel 3.

Similarmente para N_3 , tenemos que:

$$\frac{dN_3}{dt} = T_{43} N_4 + W_2 (N_2 - N_3) - T_3 N_3 \quad (2-7-3)$$

donde

$$T_3 = T_{32} + T_{31}$$

El primer término representa la razón a la cual los átomos decaen del nivel 4 al 3, el segundo representa la razón de transiciones estimuladas desde el nivel 2 al 3 debida a la presencia de radiación láser y el tercero representa la razón de decaimiento de los átomos del nivel 3 al 2 y 1 debido a emisiones espontáneas.

Similarmente para N_2 y N_1 tenemos que:

$$\frac{dN_2}{dt} = T_{42} N_4 + W_2 (N_3 - N_2) - T_2 N_2 + T_{32} N_3 \quad (2-7-4)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = W_p (N_4 - N_1) + T_{41} N_4 + T_{31} N_3 + T_{21} N_2 \quad (2-7-5)$$

De estas ecuaciones podemos ver que:

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} + \frac{dN_3}{dt} + \frac{dN_4}{dt} = 0 \quad (2-7-6)$$

lo cual es consistente con el hecho de que debe ser constante.

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \quad (2-7-7)$$

En el estado estacionario se cumple que:

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} = \frac{dN_4}{dt} = 0 \quad (2-7-8)$$

$$N_4 = \frac{W_P}{2W_P + T_4} (N - N_2 - N_3) \quad (2-7-9)$$

Usando las ecuaciones (7), (9), (3) y (4) con la (8) obtenemos:

$$N_3 \left[(W_2 + T_3) \left(\frac{2W_P + T_4}{W_P} \right) + T_{43} \right] + N_2 \left[T_{43} - \frac{W_2(2W_P + T_4)}{W_P} \right] = T_{43} \quad (2-7-10)$$

$$N_3 \left[T_{42} - (T_{32} + W_2) \left(\frac{2W_P + T_4}{W_P} \right) \right] + N_2 \left[T_{43} - \frac{W_2(2W_P + T_4)}{W_P} + T_{42} \right] = N T_{42} \quad (2-7-11)$$

y de aquí se sigue que:

$$\frac{N_3 - N_2}{N} = (T_{21} T_{43} - T_3 T_{42} - T_{32} T_{43}) \left[T_{43} (T_{21} + T_{32}) + T_3 T_{42} + \frac{(2W_P + T_4) T_3 T_{21} + W_2 (2(T_{42} + T_{43}) + \frac{(2W_P + T_4)}{W_P} (T_{31} + T_{21}))}{W_P} \right] \quad (2-7-12)$$

La ecuación (12) nos dá la diferencia de población en estado estacionario como función de la potencia de bombeo, la potencia láser y los tiempos de vida de los estados del sistema.

En la mayoría de los láseres de 4 niveles, los átomos del nivel 4 se relajan primeramente al nivel 3 y de aquí,

$$T_{42}, T_{41} \ll T_{43}$$

También los átomos del nivel 3 se relajan principalmente al 2, es decir, $T_3 \ll T_{32}$. Bajo estas aproximaciones vemos que para obtener una inversión de población se debe tener

$$T_{21} > T_{32} \quad (2-7-13)$$

Bajo tal condición, la creación de inversión de población entre los niveles 3 y 2 es independiente de la potencia de bombeo pero la magnitud de la inversión de población depende de W_p .

Abajo y en el valor umbral $W_p \ll 0$ y la ecuación (12) se puede aproximar a :

$$\frac{N_3 - N_2}{N} = \frac{(1 - \beta) W_p T_{43} / T_4 T_3}{1 + [(1 + \beta) + 2 T_3 / T_{42}] W_p T_{43} / T_4 T_3} \quad (2-7-14)$$

donde

$$\beta = \frac{T_{32}}{T_{21}} + \frac{T_3 T_{42}}{T_{21} T_{43}} \quad (2-7-15)$$

Para una buena acción láser debemos tener $T_3 \ll T_{43}$ y $T_{21} \gg T_{32}$

tal que $\beta \rightarrow 0$. También

Bajo estas aproximaciones

$$\frac{N_3 - N_2}{N} \sim \frac{W_p / T_3}{1 + W_p / T_3} \quad (2-7-16)$$

Comparando estos resultados con los del láser de tres niveles se ve que es más fácil obtener inversión de población en el láser de cuatro niveles.

C A P I T U L O I I I

CAPITULO III

FISICA OPTICA DEL LASER.

III-1. MODOS EN UNA CAVIDAD RECTANGULAR.

Consideremos una cavidad rectangular (fig. 1) de dimensiones $2a, 2b$ y d . Comenzando con las ecuaciones de Maxwell se puede mostrar que los campos eléctrico y magnético satisfacen una ecuación de onda de la siguiente forma:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3-1-1)$$

donde c representa a la velocidad de la luz en el medio que llena la cavidad.

Consideremos una componente cartesiana (digamos X) del vector eléctrico. Esta componente también satisface la ecuación de onda, la cual podemos escribir como:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (3-1-2)$$

Asumiremos que las paredes de la cavidad son perfectamente conductoras y por lo tanto, la componente tangencial del vector eléctrico desaparecerá en ellas. Entonces, si \hat{n} representa al vector unitario a lo largo de la normal a la pared tenemos que:

$$\vec{E} \times \hat{n} = 0 \quad (3-1-3)$$

sobre las paredes de la cavidad.

La ecuación 3-1-2 se resuelve por el método de separación de variables:

$$\text{Sea } E_x = X(x) Y(y) Z(z) T(t) \quad (3-1-4)$$

substituyendo esto en la ec. (3-1-2) y dividiendo por E_x obtenemos:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (3-1-5)$$

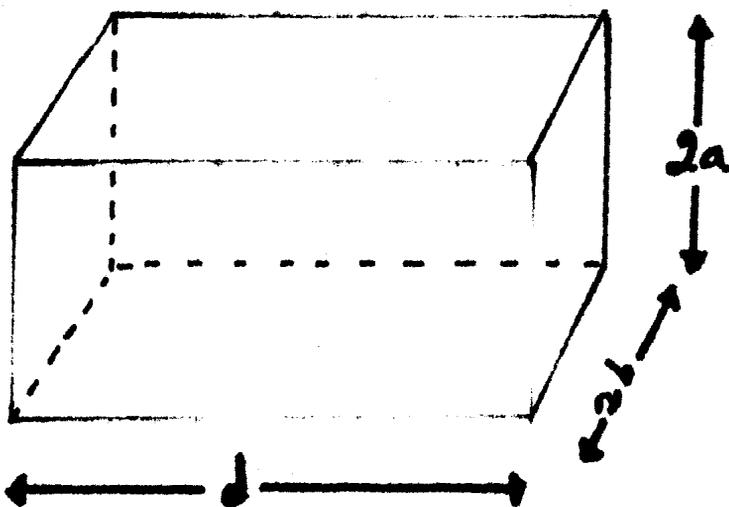


Figura 3-1.

Cavidad rectangular de dimensiones $2a \times 2b \times d$.

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \quad (3-1-6)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 \quad (3-1-7)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 \quad (3-1-8)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2 \quad (3-1-9)$$

donde $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (3-1-10)$

La ecuación (3-1-9) tiene una dependencia en el tiempo de la forma $T(t) = A e^{-i\omega t}$ donde $\omega = ck$ representa la frecuencia angular de la onda y A es una constante.

Como E_x es una componente tangencial sobre los planos $y=0$, $y=2b$, $z=0$ y $z=d$, tiene que desaparecer sobre dichos planos y las soluciones de las ec. (3-1-7) y (3-1-8) serán $\sin k_y y$ y $\sin k_z z$ con:

$$(3-1-12) \quad k_y = \frac{n\pi}{2b}, \quad k_z = \frac{q\pi}{d} \quad \text{y } n, q = 0, 1, 2, 3, \dots$$

De manera similar, las dependencias de E_y en x y z serán:

$$\sin k_x x \quad \text{y} \quad \sin k_z z \quad \text{con} \quad k_x = \frac{m\pi}{2a}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$(3-1-13)$$

Ahora, debido a la dependencia en x de E_y y E_x , entonces $\frac{\partial E_y}{\partial y}$, $\frac{\partial E_x}{\partial x}$ desaparecerán en las superficies $x=0$ y $x=2a$. De aquí se sigue que sobre los planos $x=0$ y $x=2a$ la ecuación $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ lleva a $\frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$. Por lo tanto, la dependencia en x de E_x será de la forma $\cos k_x x$.

De una manera similar, se obtienen las soluciones de la solución completa (aparte de la solución temporal) está dada por:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ E_y &= E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ E_z &= E_{0z} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \end{aligned} \quad (3-1-14)$$

donde E_{0x} , E_{0y} y E_{0z} son constantes. El uso de la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ nos conduce a:

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0 \quad (3-1-15)$$

donde

$$\vec{k} = \hat{x} k_x + \hat{y} k_y + \hat{z} k_z.$$

Usando las ecuaciones (3-1-12), (3-1-13) y (3-1-15) se obtiene que:

$$\omega^2 = c^2 k^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = c^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{4a^2} + \frac{n^2}{4b^2} + \frac{q^2}{d^2} \right)$$

$$\omega = c \pi \left(\frac{m^2}{4a^2} + \frac{n^2}{4b^2} + \frac{q^2}{d^2} \right)^{1/2} \quad (3-1-16)$$

lo cual nos da las frecuencias permitidas de oscilación del campo en la cavidad. Las configuraciones del campo dadas por la ecuación (3-1-14) representan patrones de ondas estacionarias y son llamados modos de oscilación de la cavidad.

Por otro lado, se sabe que el número de modos por unidad de volumen en un intervalo de frecuencia ν y $\nu+d\nu$ es:

$$P(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (3-1-17)$$

por lo tanto, el número de modos por unidad de volumen (en una cavidad cerrada) que caen dentro del ancho de banda del sistema atómico con $\Delta\nu \approx 3 \times 10^9 \text{ Hz}$ y $\nu = 3 \times 10^{14} \text{ Hz}$ es $2 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ (3-1-18)

Este resultado nos muestra que para cavidades de dimensiones prácticas, el número total de modos que caen dentro del ancho de banda atómico es muy grande. Ahora, una cavidad que tenga todos esos modos de oscilación, extraerá energía de los átomos y la emisión resultante estará muy lejos de ser monocromática. Para lograr que existan solo pocos modos resonantes, se tiene que tener cavidades del tamaño de la longitud de onda de la radiación, lo cual es impráctico en las regiones óptica e infraroja del espectro.

Afortunadamente, el problema es resuelto con el uso de resonadores abiertos, los cuales, en el caso mas simple, consisten de un par de espejos planos colocados en extremos opuestos y los lados de la cavidad están abiertos.

Aquellos modos que estén formados por la superposición de ondas las cuales viajan a ángulos rectos de los espejos, se mantendrán oscilando entre éstos con poca pérdida por tránsito, mientras que las ondas que viajan oblicuas a los espejos se perderán después de pocas reflexiones. Debe mencionarse que en un resonador práctico, las ondas que viajan a ángulos rectos de los espejos tienen una amplitud que decrece a lo largo del eje y por lo tanto, las pérdidas (debido al tamaño finito de los espejos) serán más pequeñas que cuando tienen una distribución uniforme de amplitud.

Para obtener una expresión aproximada de las frecuencias de oscilación de los modos de un sistema resonante abierto, observamos que los modos de una cavidad abierta son aproximadamente los de una cavidad cerrada para los cuales $m, n \ll q$, es decir, consisten de aquellas ondas que viajan a ángulos muy pequeños del eje z .

Si usamos la aproximación $m, n \ll q$, podemos hacer una expansión binomial de la ec. (3-1-16) y obtenemos:

$$\omega_{m,n,q} \approx c\pi \left[\frac{q}{d} + \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \frac{d}{8q} \right] \quad (3-1-19)$$

Para un par de espejos cuadrados, $a=b$ y entonces:

$$(3-1-20) \quad \nu_{m,n,q} = \frac{\omega_{m,n,q}}{2\pi} \approx \frac{c}{2} \left[\frac{q}{d} + \frac{(m^2+n^2)}{q} \frac{d}{8a^2} \right]$$

La diferencia en la frecuencia de oscilación entre dos modos que tienen los mismos valores de m y n pero que difieren en q por una unidad es:

$$\Delta \nu_q \approx \frac{c}{2d} \quad (3-1-21)$$

Como q especifica la distribución del campo a lo largo del eje z , los modos que difieren en el valor de q son conocidos como modos longitudinales.

Los modos que difieren en las m y n tienen diferentes distribuciones del campo en la dirección transversal y son conocidos como modos transversales del resonador.

III-2. EL FACTOR DE CALIDAD Q.

Ya que los espejos de un sistema láser forman una cavidad resonante abierta, siempre existen pérdidas asociadas con cualquier modo. Los principales tipos de pérdida son: la reflectividad finita de los espejos, la dispersión y absorción en el medio que ocupa la cavidad y la difracción debido al tamaño finito de los espejos.

La disipación de energía está descrita en términos del factor de calidad Q del modo en particular. Este factor está definido de la siguiente manera:

$$Q = \frac{\omega_0 \times \text{energía almacenada en el modo}}{\text{energía disipada / seg en ese modo}} \quad (3-2-1)$$

donde $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ corresponde a la frecuencia de oscilación del modo.

Si $W(t)$ representa la energía almacenada en el modo al tiempo t , entonces:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q} W \quad (3-2-2)$$

donde el signo negativo es introducido por el hecho de que usualmente existe pérdida de energía.

Integrando tenemos que:

$$W(t) = W(t=0) e^{-\omega_0 t / Q} \quad (3-2-3)$$

Esto corresponde a un decaimiento exponencial de energía con el tiempo.

De la ecuación anterior se sigue que la energía decae a $1/e$ de su valor inicial en un tiempo:

$$t_c = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{Q}{2\pi\nu_0} \quad (3-2-4)$$

el cual es llamado tiempo de vida pasivo de la cavidad.

Si para un modo dado, asociamos un campo determinado por:

$$E(t) = E_0 e^{-\omega_0 t/2Q} e^{2\pi i \nu_0 t} \quad (3-2-5)$$

entonces el espectro de frecuencias asociado con este tren de ondas es obtenido al calcular la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \int_0^{\infty} E(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \\ &= \frac{E_0}{2\pi [i(\nu - \nu_0) + \nu_0/2Q]} \quad (3-2-6) \end{aligned}$$

y de aquí,

$$\begin{aligned} I(\nu) &= |\tilde{E}(\nu)|^2 \\ &= \frac{E_0^2}{4\pi^2 [(\nu - \nu_0)^2 + \nu_0^2/4Q^2]} \quad (3-2-7) \end{aligned}$$

La distribución de frecuencias anterior, tiene su máximo en $\nu = \nu_0$ y corresponde a una distribución Lorentziana. De dicha ecuación, se puede ver que la intensidad decrece a la mitad de su valor máximo en $\nu = \nu_0 + \nu_0/2Q$ y $\nu = \nu_0 - \nu_0/2Q$ por lo tanto,

$$\Delta\nu = \nu_0/Q \quad (3-2-8)$$

Del último resultado, es claro que el ancho del espectro de salida es inversamente proporcional al factor de calidad asociado con ese modo y entre menor sean las pérdidas en el modo más grande es el valor de Q .

Para calcular la Q de un resonador pasivo primero se encuentra la energía restante en la cavidad después de un ciclo de oscilación completo y entonces usando la expresión para $W(t)$ se encuentra el valor de Q . Sea W_0 la energía total contenida dentro de la cavidad al tiempo $t=0$. Un ciclo completo de oscilación corresponde a un par de reflexiones en los espejos M_1 y M_2 (con coeficientes de reflexión R_1 y R_2) y a dos viajes dentro del medio láser, el cual tiene un coeficiente α_c de absorción por unidad de longitud. Por lo tanto, la energía que permanece dentro de la cavidad después de un ciclo completo es:

$$W_0 R_1 R_2 e^{-2\alpha_c d} \quad (3-2-9)$$

donde d es la longitud de la cavidad.

También, tenemos que en un ciclo completo:

$$t = \frac{2n_0 d}{c} \quad (3-2-10)$$

donde n_0 es el índice de refracción del medio.

De la ec.(3-3) obtenemos la expresión para la energía dentro del resonador:

$$W_0 \exp\left(-\frac{2\pi\nu_0}{\omega} \frac{2n_0 d}{c}\right) \quad (3-2-11)$$

comparando las ec. (3-2-9) y (3-2-11) se obtiene que:

$$2\alpha_c d - \ln R_1 R_2 = \frac{4\pi\nu_0 n_0 d}{\omega c}$$

$$\therefore Q = \frac{4\pi\nu_0 n_0 d}{c} \frac{1}{2\alpha_c d - \ln R_1 R_2} \quad (3-2-12)$$

II-3. SELECCION DE MODOS TRANSVERSALES Y LONGITUDINALES.

III-3-1. Selección de modos transversales.

Uno de los resultados del análisis de las cavidades resonantes es que el modo de mas bajo orden tiene una distribución de amplitud transversal gaussiana a través de un plano transversal. Este modo es usualmente el más usado ya que no tiene cambios de fase abruptos y además la amplitud decae monótonamente lejos del eje. Esto nos lleva al hecho de que este modo puede ser enfocado en regiones del orden de la longitud de onda de la luz, produciendo intensidades altas. El modo gaussiano tiene la distribución transversal más angosta, por lo tanto, si una apertura es introducida en la cavidad de manera que incremente las pérdidas, del modo inmediato superior, a un valor en el cual las pérdidas sean mayores que la ganancia, el láser oscilará sólo en el modo más bajo.

III-3-2. Selección de modos longitudinales.

Aún cuando un láser oscile en un solo modo transversal, éste puede oscilar en diferentes modos longitudinales separados por un espaciamiento igual a $c/2d$. Un posible método para obtener oscilación en un solo modo, es el de disminuir la longitud de la cavidad d a un valor en el cual solo exista un modo longitudinal el cual tenga una ganancia mayor que las pérdidas. Tal método es usado con los láseres de gas los cuales tienen anchos de banda relativamente pequeños. Es de notarse que si la longitud de la cavidad es disminuida, el volumen del material activo también disminuye y por lo tanto, la potencia de salida del láser.

III-4) OPTICA DEL LASER:

Los láseres usados en los laboratorios como fuentes de luz además de amplificadores son osciladores. En electrónica se sabe que un amplificador con demasiada retroalimentación se convierte en un oscilador. Similarmente, un amplificador láser con suficiente ganancia se convierte en un oscilador.

El diseño más usado para este propósito es una cavidad. La razón por la cual se le necesita es que se requiere que la luz tenga una trayectoria óptica larga para producir suficiente amplificación, mediante la emisión estimulada. Dicha trayectoria óptica es lograda al colocar dos espejos en los extremos de la cavidad mencionada, con lo cual se tiene una reflexión múltiple del haz.

Para tener una visión más clara del problema se deben analizar los llamados resonadores ópticos.

III-4-1.1. RESONADORES OPTICOS:

La figura 1 nos muestra un resonador óptico típico, formado por dos espejos con radios de curvatura R_1 y R_2 separados una distancia L .

Por la óptica geométrica se sabe que existe una equivalencia entre espejos y lentes. El comportamiento de un rayo de luz sufriendo reflexiones múltiples entre los dos espejos, es equivalente al comportamiento del rayo pasando a través de una secuencia de lentes espaciados a intervalos L y con distancias focales que se alternan

$$f_1 = R_1/2 \quad \text{y} \quad f_2 = R_2/2 \quad (3-4-1)$$

Existe una manera de describir las curvaturas de los espejos y la separación entre ellos. Esta descripción es en términos de sus parámetros g definidos como sigue:

$$g_1 \equiv 1 - L/R_1 \quad (3-4-2)$$

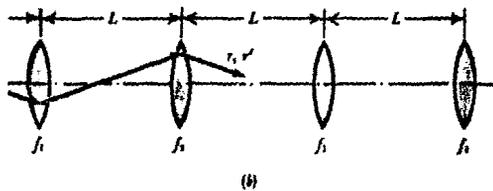
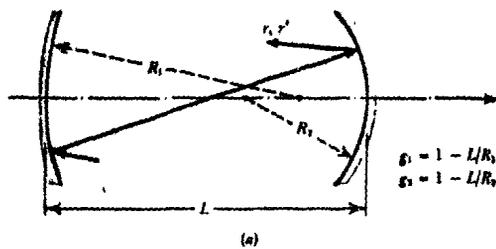
$$g_2 \equiv 1 - L/R_2$$

Se estudiará ahora el comportamiento de un rayo de luz que sufre reflexión múltiple en los espejos del resonador. En particular se quiere saber si el sistema formado es estable o inestable, es decir, si después de muchas reflexiones, el rayo estará cerca del eje del sistema o si habrá divergido hacia afuera del eje una gran distancia.

De las ecuaciones de la óptica geométrica para el resonador óptico se encuentra que para que exista estabilidad se necesita que:

$$(3-4-3) \quad 0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (\text{resonadores estables})$$

$$g_1 g_2 < 0 \quad \text{o} \quad g_1 g_2 > 1 \quad (\text{resonadores inestables})$$



$$f_1 = R_1/2 = (L/2)(1 - g_1)^{-1}$$

$$f_2 = R_2/2 = (L/2)(1 - g_2)^{-1}$$

Figura 1.

- a) Un resonador óptico típico.
- b) Equivalente de un resonador con lentes periódicos.

III-4-2. HACES DE LUZ GAUSSIANOS:

Imaginemos una distribución del campo eléctrico enfrente de uno de los espejos y que por un proceso de cálculo se obtiene un campo en el otro espejo. Este método puede ser repetido hasta que un patrón definido del campo surga y se reproduzca a sí mismo en un espejo dado. Tal patrón es llamado un modo. Si podemos excitar al campo en tal modo, éste persistirá en la región entre los espejos por un tiempo grande, oscilando a su frecuencia característica.

Para obtener una descripción detallada de los modos ópticos en el resonador, se usa un análisis riguroso, basado en la teoría de la difracción.

En este capítulo se darán los resultados más importantes sobre los resonadores ópticos y algunos ejemplos concretos.

La idea del comportamiento de los resonadores ópticos es obtenida al considerar la propagación de un haz luminoso de sección transversal gaussiana en el espacio. (ver fig. 2).

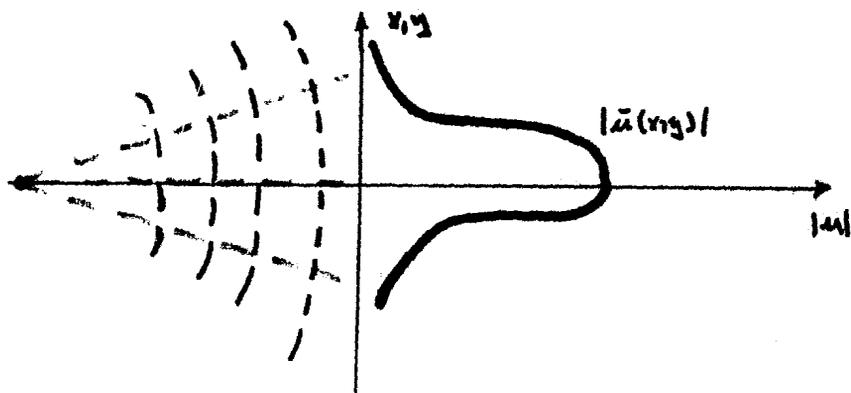


Figura 2.

Onda esférica con variación de la amplitud transversal gaussiana, a través del frente de onda.

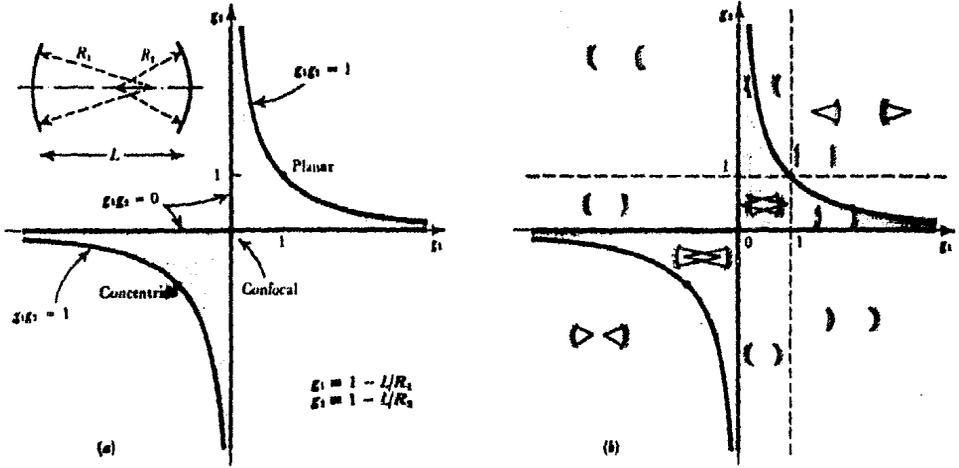


Diagrama de estabilidad "g" para los resonadores ópticos.

Todos los sistemas que caen dentro de la región sombreada son estables.

a) Características generales del diagrama "g".

b) Ejemplos de configuraciones de espejos correspondientes a diferentes valores de g_1 y g_2 en el plano "g".

1) Paralelo Plano.

$$R_1 = R_2 = \infty$$

$$g_1 = g_2 = 1$$

$$\cos \theta = 1, \theta = 0.$$

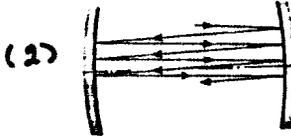


2) Algo Cóncavo.

$$R_1 = R_2 = \text{grande}$$

$$g_1 = g_2 \leq 1$$

$$\cos \theta = 1 - g^2, \theta = \sqrt{2g^2}$$



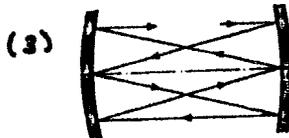
3) Resonador Focal.

$$R_1 = R_2 = 2L$$

$$g_1 = g_2 = 1/2$$

$$\cos \theta = -1/2$$

$$\theta = 3\pi/4.$$

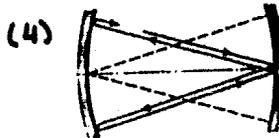


4) Resonador Confocal.

$$R_1 = R_2 = L$$

$$g_1 = g_2 = 0$$

$$\cos \theta = -1, \theta = \pi.$$



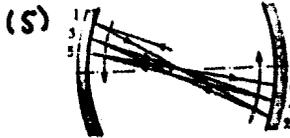
5) Caso Cóncavo.

$$L/2 < (R_1, R_2) < L$$

$$g_1 = g_2 < -1$$

$$\cos \theta = -1 + g^2$$

$$\theta = \pi + \sqrt{2g^2}$$



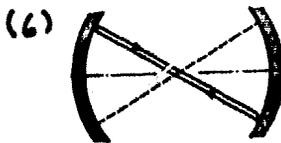
6) Cóncavo.

$$R_1 = R_2 = L/2$$

$$g_1 = g_2 = -1$$

$$\cos \theta = 1$$

$$\theta = 2\pi$$



Configuraciones típicas de resonadores.

El plano de entrada donde el frente de onda es plano y donde el tamaño del spot o radio del haz es w_0 se llama la cintura.

Un haz que comienza como una onda plana gaussiana en la cintura, permanecerá como una onda gaussiana esférica en subsecuentes planos Z . El radio de curvatura de la onda, como función de la distancia a la cintura, está dado por:

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad (3-4-4)$$

$$R(z) \approx z \quad \text{para } z \gg \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (3-4-5)$$

De aquí que a distancias suficientemente grandes de la cintura, la onda tiene un frente de onda esférico, con centro de curvatura localizado esencialmente en la cintura.

Ahora, el tamaño del spot del haz como función de la distancia a la cintura es:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2} \quad (3-4-6)$$

ésto implica que:

$$w(z) \approx \frac{\lambda z}{\pi w_0} \quad \text{para } z \gg \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (3-4-7)$$

de aquí que a distancias suficientemente grandes de la cintura el haz diverge linealmente a un ángulo constante θ , (ver fig.3) Este ángulo depende del tamaño del spot en la cintura w_0 .

En la manera que un haz gaussiano se propaga fuera de la cintura, su diámetro o tamaño del spot permanece constante, hasta un momento en el cual empieza a diverger linealmente con la distancia. En los láseres prácticos se busca un haz delgado que permanezca colimado a un diámetro tan pequeño como sea posible para distancias grandes. Desafortunadamente existe una relación inversa entre el tamaño de la cintura al cual el haz es colimado y la distancia sobre la cual el haz permanece colimado a éste diámetro. (ver fig. 3)

Un haz láser colimado es simplemente un haz que mantiene el tamaño de la cintura Z_0 durante una gran distancia. Se define la región de colimación como aquella región que se extiende entre los puntos donde el tamaño del spot $w(z)$ se ha incrementado en $\sqrt{2}$ del valor w_0 en la cintura. Mas allá de estos límites el haz se esparce fuera del eje.

La distancia Z_R de la cintura del haz hasta $\sqrt{2} w_0$ está dada por la siguiente ecuación:

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right]^{1/2} = \sqrt{2} w_0$$

$$o' \quad z = z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

(3-4-8)

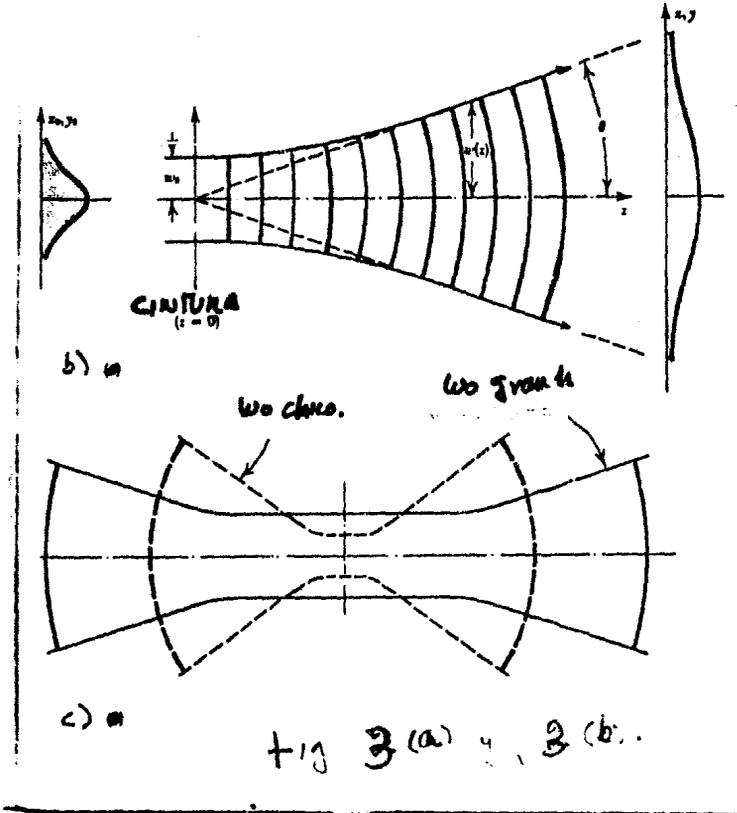


Figura 3.

- a) Propagación de un haz gaussiano desde la cintura localizada en $z=0$.
- b) El ángulo al cual el haz gaussiano converge o diverge es inversamente proporcional al tamaño del spot en la cintura w_0 .

La cantidad $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$ es llamada la distancia de Rayleigh.

La manera de obtener el haz colimado más largo, es comenzando con un diámetro de apertura $d = 3\sqrt{2} w_0$ localizado en un punto correspondiente a $z = -z_R$ (ver fig, 4).

La fig. 5 nos muestra el intervalo en el cual el haz permanece colimado contra el diámetro de la apertura. Un haz viniendo de un diámetro de apertura $d = 10\text{cm}$ permanecerá colimado en ese diámetro aproximadamente 6 km.

Cuando dos espejos ópticos de radio de curvatura apropiado son colocados de tal manera que estén uno frente al otro, el más bajo de los modos de la cavidad del resonador óptico es un haz gaussiano de curvatura apropiada, cuyo tamaño de spot está entre los dos espejos.

Consideremos un haz de luz gaussiano con tamaño del spot en la cintura w_0 (en $z=0$) y con tamaños w_1 y w_2 y radios de curvatura r_1 y r_2 e en dos planos arbitrarios $z=z_1$ y $z=z_2$. (ver fig. 6)

Si colocamos en estos dos planos dos espejos curvados, cuyos radios de curvatura R_1 y R_2 se ajustan exactamente a los del frente de onda del haz y cuyos diámetros son considerablemente más grandes que el tamaño de los spots, estos espejos reflejarán el haz gaussiano en sí mismo. Como consecuencia, el haz gaussiano será reflejado hacia atrás y adelante en uno y otro espejo, formando una onda estacionaria en donde el tamaño de los spots y curvaturas no cambian con el tiempo. En otras palabras, este haz

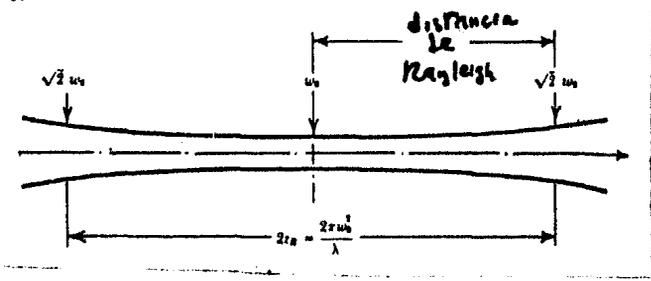


Figura 4.

Un haz gaussiano colimado es un haz cuyo largo de cintura es $2z_R$. La distancia de Rayleigh es definida como la distancia desde la cintura hasta un punto donde el área del haz se duplica.

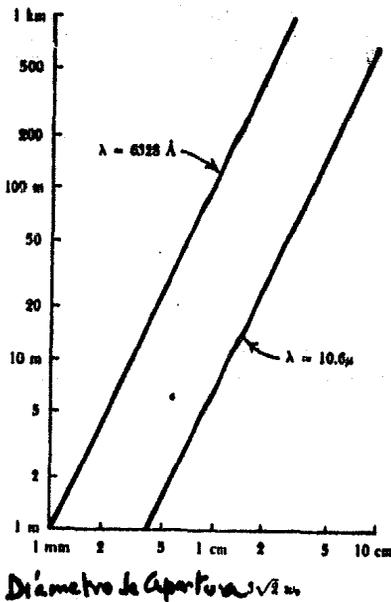
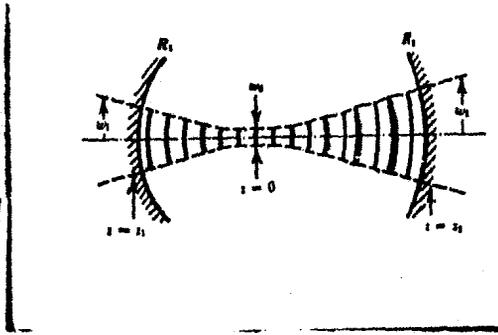


Fig 5

Figura 5.

Largo total de la región del haz colimado para dos longitudes de onda de láseres comunes.



Un resonador óptico estable se obtiene al colocar espejos de curvaturas apropiadas R_1 y R_2 en los planos apropiados z_1 y z_2 a lo largo de un haz gaussiano.

Figura 6.

formará un modo resonante de onda estacionaria en la cavidad óptica formada por los dos espejos. Se puede ver que la forma del modo resonante, esto es, la variación del tamaño del spot y la curvatura del frente de onda a lo largo del eje del resonador, no dependerán de los diámetros de los espejos

$2a_1$ y $2a_2$ (si $a_1 \gg w_1$ y $a_2 \gg w_2$) sino sólo de los radios R_1 y R_2 y su espaciamento $L = z_2 - z_1$; Mas aún para $a_1 \gg w_1$ y $a_2 \gg w_2$ la cantidad de energía perdida por el escape de ésta más allá de los espejos en cada viraje, será muy pequeña y por lo tanto, las pérdidas en el resonador, debido al escape o difracción, serán pequeñas sin importar el hecho de que la cavidad esté abierta.

Hasta ahora hemos atacado los problemas de los modos de un resonador comenzando con un haz gaussiano dado y entonces encontramos los espejos apropiados para el mismo. Sin embargo, el problema real del resonador aparece en la forma opuesta: dados dos espejos determinados de curvatura R_1 y R_2 y espaciados a una distancia L , encontrar el haz gaussiano apropiado (y único) que se ajustará entre estos dos espejos (ver fig. 6). Esto incluye el encontrar los tamaños del spot w_1 y w_2 , el tamaño de la cintura w_0 etc. El problema puede ser resuelto

al aplicar la fórmula general del haz gaussiano $R(z) = z + z_R^2/z$, para encontrar la curvatura del frente de onda a lo largo del haz con el requisito de que esta curvatura sea iguala la de los espejos en dichos puntos, esto es:

$$z_1 + z_R^2/z_1 = -R_1 \quad , \quad z_2 + z_R^2/z_2 = R_2 \quad (3-4-7)$$

$$\text{y } z_2 - z_1 = L$$

La curvatura del espejo izquierdo R_1 es tomada con un signo menos ya que la convención de signos del resonador es al revés de la de los haces gaussianos.

Estas ecuaciones pueden ser resueltas para encontrar los parámetros z_1 , z_2 y z_R en términos de los parámetros del resonador R_1 , R_2 y L . Con los parámetros g_1 y g_2 del resonador se obtiene que:

$$z_1 = \frac{-g_2(1-g_1)L}{g_1+g_2-2g_1g_2} \quad (3-4-10)$$

$$z_2 = \frac{g_1(1-g_2)L}{g_1+g_2-2g_1g_2} = z_1 + L \quad (3-4-11)$$

$$z_R^2 = \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)^2 = L^2 \frac{g_1g_2(1-g_1g_2)}{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2} \quad (3-4-12)$$

$$(3-4-13) \quad \omega_1^2 = \omega^2(z_1) = \omega_0^2 \left[1 + \left(\frac{z_1}{z_R}\right)^2\right] = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_2}{g_1(1-g_1g_2)}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_1}{g_2(1-g_1g_2)}} \quad (3-4-14)$$

De aquí podemos ver que si $g_1g_2 \rightarrow 0$ o $g_1g_2 \rightarrow 1$ el tamaño del spot se va a infinito y la teoría gaussiana ya no es aplicable.

La ecuación 3-4-13 tiene una solución en la forma de un haz gaussiano finito sólo si el resonador óptico satisface la siguiente condición de estabilidad:

$$0 \leq g_1g_2 \equiv \left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 - \frac{L}{R_2}\right) \leq 1 \quad (3-4-15)$$

III-4-3. RESONADORES SIMÉTRICOS:

Consideremos un resonador simétrico con radios de curvatura iguales $R_1=R_2=R$ tal que g_1 es igual a $g_2=g=1-L/R$.

La cintura del modo gaussiano resonante está entonces en el centro del resonador con los siguientes valores:

$$\omega_0 = \left(\frac{L\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{1+g}{1-g}\right)^{1/4} \quad \text{y} \quad \omega_1 = \omega_2 = \left(\frac{L\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{1-g^2}\right)^{1/4} \quad (3-4-16)$$

Todos los resonadores simétricos caen en la línea con pendiente de 45° que pasa por el origen en el plano de estabilidad g , con casos límite de $g=1$ (espejos planos), $g=0$ (caso concéntrico), $g=-1$ (caso esférico). (ver fig. 7).

Los tamaños del spot en los resonadores estables, son generalmente del orden de $\left(\frac{L\lambda}{\pi}\right)^{1/2}$ multiplicado por una función $f(g_1, g_2)$ que no se desvía mucho de la unidad de los casos prácticos.

III-1-3-1. RESONADOR CONFOCAL:

El resonador confocal es un caso interesante ya que está localizado en un punto singular (el origen) del plano de estabilidad g . Para el resonador simétrico confocal, los tamaños de los spots en los espejos no solo son finitos sino que tienen el valor más pequeño de cualquier sistema estable simétrico:

$$\omega_1 = \omega_2 = \left(L\lambda/\pi\right)^{1/2} = \sqrt{2} \omega_0 \quad (3-4-17)$$

Un resonador confocal no simétrico está formado por cualesquiera dos espejos cuyos puntos focales coinciden. Ya que el punto focal de un espejo puro está localizado a la mitad del camino entre el centro de curvatura del espejo y el espejo en sí, la condición confocal no simétrica es:

$$R_1 + R_2 = 2L \quad \text{ó} \quad \frac{1}{1-g_1} + \frac{1}{1-g_2} = 2$$

Los valores de g que satisfacen esta relación caen en la porción inestable del plano g excepto para el caso especial -

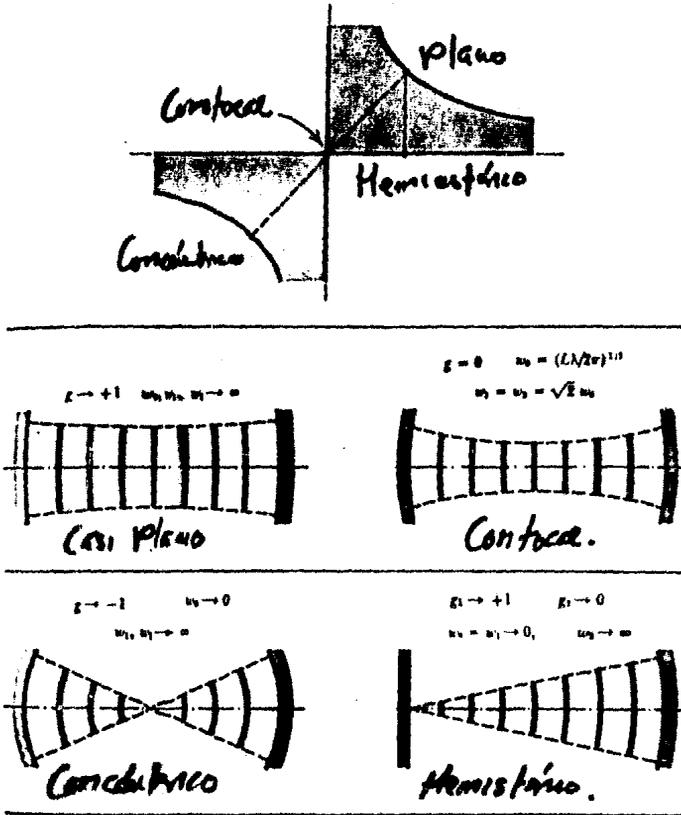


Figura 7.

Resonadores ópticos estables.

$g_1 = g_2$.

En otras palabras todos los resonadores confocales no simétricos son inestables. Sólo el caso simétrico es estable.

III-1-3--2. RESONADOR CON UN ESPEJO PLANO:

Otro sistema elemental es el semi-simétrico, en el cual un espejo es plano y el otro curvo, de tal manera que $g_1 = 1$ y $g_2 = g$. La cintura en este caso está en el espejo del lado izquierdo y los tamaños de los spots son los siguientes:

$$(3-4.10) \quad \omega_0 = \omega_1 = \left(\frac{L\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{g}{1-g}\right)^{1/4} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \left(\frac{L\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{g(1-g)}\right)^{1/4}$$

III-1-3-3. RESONADORES SEMI-ESFÉRICOS:

El resonador semi-esférico o semi-concéntrico se ilustra en la figura 7. Este resonador es ampliamente usado en los láseres. A la medida que el espaciamento entre los espejos se aproxima a la curvatura del espejo ($L \rightarrow R$) el tamaño del spot en uno de los extremos diverge ($\omega_2 \rightarrow \infty$), mientras que en el otro extremo se vuelve muy pequeño ($\omega_1 \rightarrow 0$). Los láseres de uso práctico son construidos con una L un poco menor a R .

Cualquier resonador con espejos curvos de tamaño razonable cuyos parámetros g_1 y g_2 caen dentro de la región estable dentro del diagrama g , tendrá un patrón gaussiano del mas bajo orden.

En la manera en que los parámetros g_1 y g_2 se aproximan a la frontera de la región estable, el tamaño del spot en la cintura $\omega_0 \rightarrow 0$ (Excepto en $g_1 = g_2 = 0$ ó 1) y los tamaños ω_1 ó $\omega_2 \rightarrow \infty$. Tan pronto como los parámetros de de los espejos se acercan a la región estable-inestable el tamaño del spot en cualquiera de éstos se aproxima al tamaño del espejo ω_1 ó $\omega_2 \approx a$ y entonces podemos decir que el tratamiento gaussiano emple

za a fallar, ya que hay grandes pérdidas. Por ello, la imagen del modo gaussiano es válida dentro de la región estable predicha por la teoría de rayos, excepto en una región estrecha donde el tamaño del modo predicho por el análisis gaussiano, excede al tamaño de los espejos.

El análisis que se ha hecho de los resonadores ópticos es muy importante, debido a que son la base de muchos láseres prácticos y esto nos da una idea de cómo las características atómicas y ópticas se unen para dar lugar a la amplificación por la emisión estimulada de radiación conjuntamente con las características de resonancia de las cavidades ópticas.

C A P I T U L O I V

IV-1. PROPIEDADES DE LA LUZ LASER.

La luz de un láser difiere bastante de la luz emitida por una fuente convencional. Existen muchas características que distinguen a estas dos pero hay tres que son de gran importancia. Estas tres son: coherencia, direccionalidad y monocromaticidad.

Coherencia. La coherencia implica una diferencia constante de fase entre dos puntos en una serie de frentes de onda de igual amplitud y una relación en el tiempo, entre los mismos puntos en diferentes frentes de onda. Para un láser de gas de alta calidad, se han hecho estimaciones de que existe coherencia en una distancia de 10,000 millas. En los láseres de rubí y de inyección la coherencia no es tan buena como en el de gas, pero es muy superior a la de las fuentes de luz normal.

Direccionalidad. Una fuente ordinaria de luz radía en todas las direcciones posibles. En cambio, la salida de un láser es casi una onda plana uniforme cuya divergencia es debida principalmente a los efectos de la difracción. En un láser bien construido, que oscila en el modo transversal mas bajo, la salida será tal que tendrá una distribución de fase constante y uniforme a través de la apertura de salida.

Monocromaticidad. La salida de un láser es casi monocromática, es decir, emite solo en una frecuencia. El decir casi monocromática es que el ancho de banda de los láseres no es cero si no que tiene un cierto valor positivo. Esto implica que en la realidad el láser emita en un rango de frecuencias muy pequeño, por lo cual se le considera mono-

cromático comparado con las fuentes convencionales de luz. Cabe mencionar que el límite del ancho de banda está dado por las emisiones espontáneas en la cavidad láser.

17-2-1. EL LASER DE RUBÍ

El primer láser que se operó con éxito fue el de rubí que Saimón fabricó en 1960. Este láser consiste de un cristal de rubí cuyos extremos son planos y además uno de ellos está cubierto con una capa de plata, mientras que el otro es semireflector. Los dos extremos forman una cavidad resonante.

El rubí consiste de óxido de aluminio con algunos átomos de Cromo. Para tener una buena acción láser, se necesita tener aproximadamente un 0.05% de átomos de Cromo; sin embargo, concentraciones más altas han sido usadas. Los niveles de energía del ión de cromo se muestran en la fig(4--1). Los niveles de energía de este ión (E_1 y E_2) tienen un tiempo de vida muy pequeño ($\sim 10^{-9}$ seg) mientras que el estado metaestable (M) tiene un tiempo de vida mucho mayor (\sim milisegundos).

El cristal de rubí es colocado dentro de una lámpara de destellos de Xenón como se muestra en la fig(4-2). La lámpara se conecta a un compuetador, el cual descarga miles de Joules de energía en pocos milisegundos. Esto hace que la lámpara tenga una potencia de salida de unos pocos megawatts, y parte de esta energía es absorbida por los iones de cromo en el estado base, excitándolos a un nivel de energía dentro de las bandas E_1 y E_2 . Las transiciones a dichas bandas son logradas mediante radiación con una longitud de onda igual a 6600 \AA y 4000 \AA respectivamente. Después de la excitación, los iones de cromo realizan una rápida transición no radiativa al estado metaestable y como este estado tiene un tiempo de vida grande, el número de átomos en dicho nivel se incrementa; eventualmente, esto lleva a una inversión de población entre los estados M y G. Una vez que la inversión de población ha sido alcanzada, la acción láser empieza debido a la energía espontánea de los fotones.

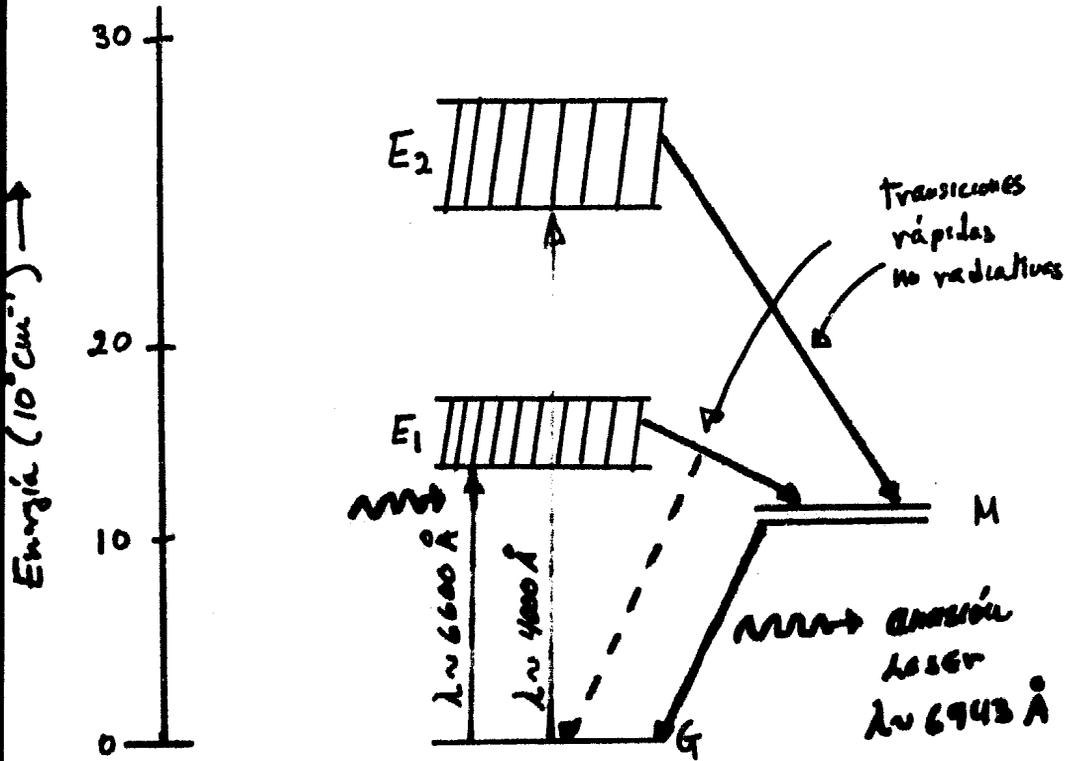


Figura 4-1.

Niveles de energía de los iones de cromo en cristal de Rubí.

Los iones de cromo absorben la radiación emitida por el destello de la lámpara y se excitan a las bandas E_1 y E_2 desde las cuales sufren una transición no-radiativa muy rápida al estado metaestable M. La inversión de población entre M y G resulta en la acción láser a 6943 Å.

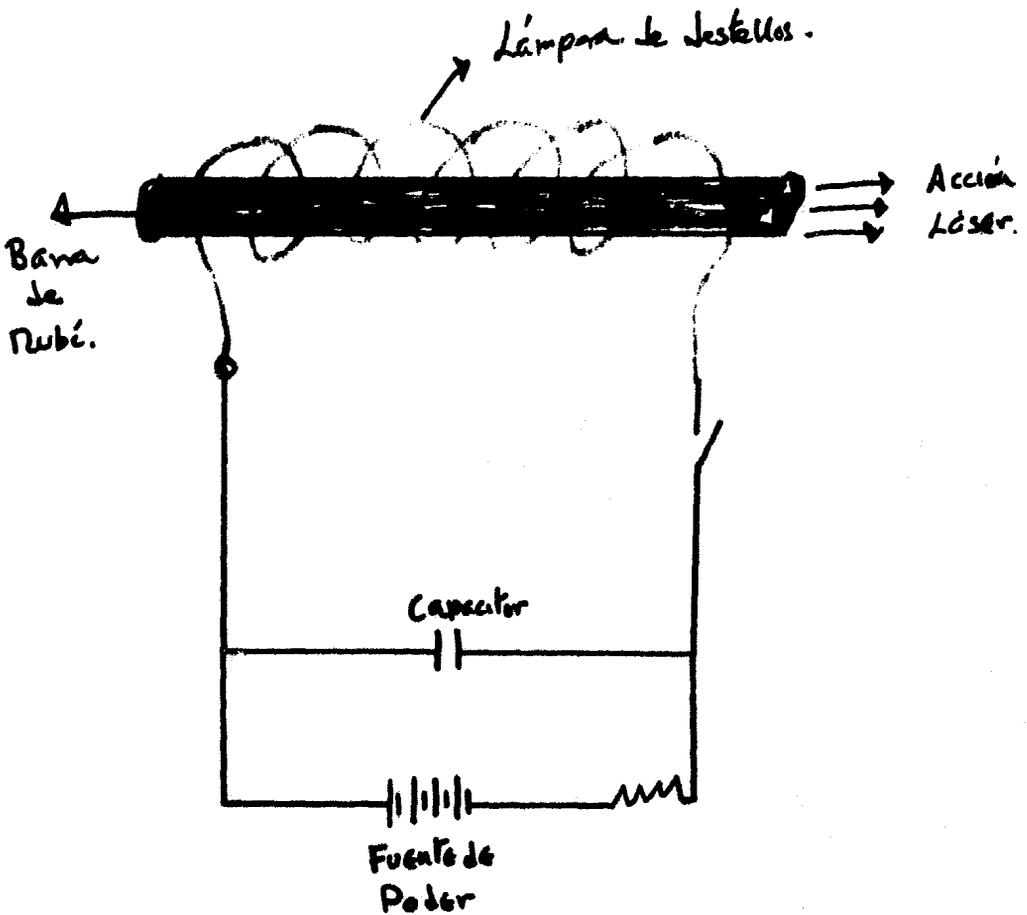


Figura 4-2.

Esquema de un láser de rubí. La lámpara de destellos es conectada a un capacitor el cual descarga miles de Joules en pocos milisegundos. Parte de la energía resultante es absorbida por los iones de cromo en el rubí, produciendo así una inversión de población.

Los destellos de la lámpara hacen que la salida del láser sea pulsada. En el momento que el destello es detenido, la población en el nivel superior decae muy rápido y la acción laser se detiene hasta que el siguiente destello sea ejecutado.

IV-2--2 EL LASER DE HELIO-NEÓN:

El láser de Helio-Neón fue el primero de gas que se operó con éxito. Fue constituido por Ali Javan y colaboradores en la Bell Telephone Labs en 1961.

El mecanismo de bombeo usado es una descarga eléctrica como medio para crear la inversión de población.

Este láser consiste de un tubo de descarga lleno con Helio a una presión de 1 Torr y neón a una presión de 0.1 Torr . La mezcla de gases forma el medio láser, y ésta es encerrada entre dos espejos que forman la cavidad resonante. (Uno de ellos parcialmente reflector).

Cuando una descarga es pasada a través de la mezcla, los electrones son alterados a lo largo del tubo. Estos chocan con los átomos de helio y los excitan a niveles de energía superiores. La fig (4-3) nos muestra los niveles de energía del helio y el neón. Los átomos de helio son excitados a los niveles F_2 y F_3 . Estos niveles son metaestables, y por lo tanto, los átomos excitados a esos niveles tienen un tiempo de relajación grande. Como se puede ver en la figura, algunos de los estados excitados del neón corresponden aproximadamente a la misma energía que la de los niveles F_2 y F_3 del helio. De aquí que cuando los átomos de helio en los niveles F_2 y F_3 chocan con los de neón en el estado base E_1 , un intercambio de energía es realizado.

Esto tiene como resultado que los átomos de neón sean exci-

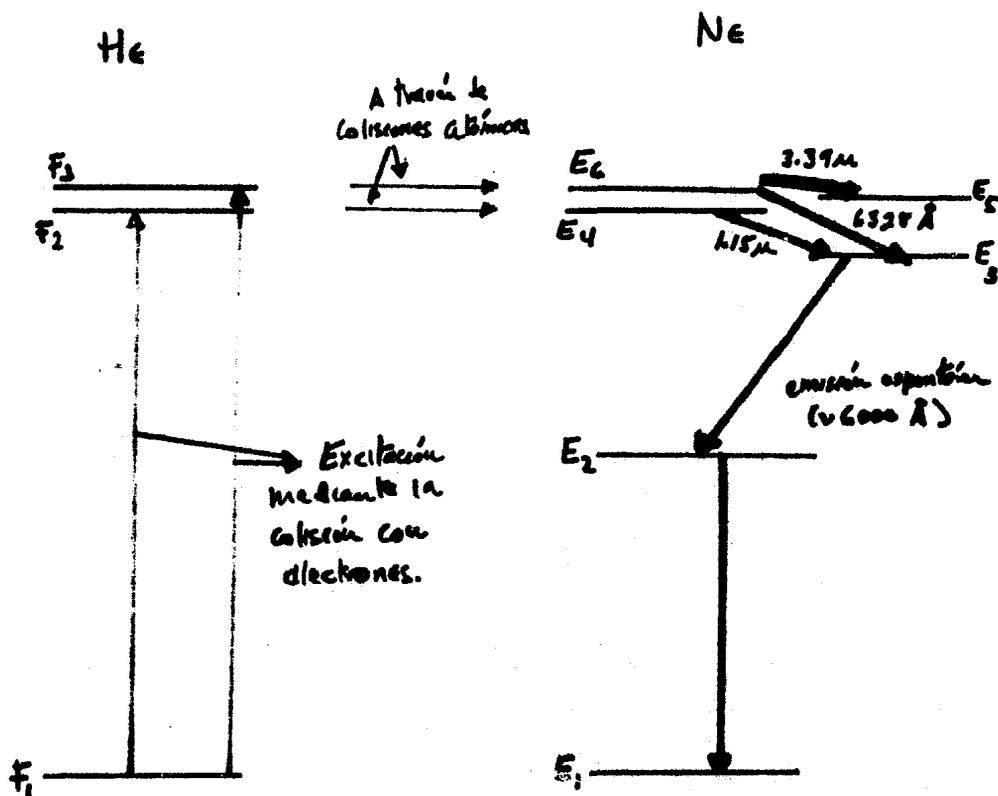


Figura 4-3.

Diagrama de los niveles de energía del helio y el Neón.

Los átomos excitados de Helio transfieren su energía a los átomos de Neón a través de colisiones, creando un estado de inversión de población entre los niveles E_4 (E_6) y E_5 y E_3 .

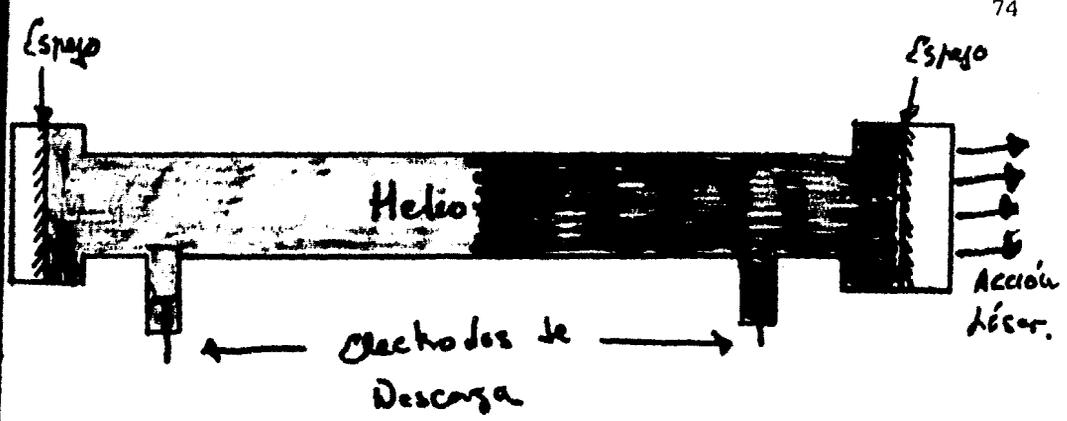


Figura 4-4.

ESQUEMA DEL LASER DE HELIO-NEON.

tados a los niveles E_4 y E_6 y los átomos del helio regresan al estado base. Debido a los tiempos de vida grande de los niveles E_2 y E_3 del helio, este proceso de transferencia de energía tiene una probabilidad muy alta. La descarga a través de la mezcla continuamente ~~pobla~~ **pobla** los niveles de energía E_4 y E_6 del neón. Esto ayuda a crear un estado de inversión de población entre los niveles E_4 (o E_6) y los niveles E_5 y E_3 .

Las distintas transiciones tienen emisiones de $3.39 \mu m$, $1.15 \mu m$ y 6328 \AA ; los primeros dos corresponden a la región infraroja, mientras que la última corresponde a luz roja.

Los átomos excitados del neón caen del nivel E_3 al E_2 emitiendo un fotón de $\lambda = 6000 \text{ \AA}$. Las presiones de los dos gases en la mezcla son escogidas de tal manera que exista una transferencia de energía de los átomos de helio a los de neón. Como el nivel E_2 es metaestable, existe una probabilidad finita de la excitación de los átomos de neón desde E_2 a E_3 .

Cuando un tubo delgado es usado, los átomos de neón en el nivel E_2 chocan con las paredes del tubo y son excitados al nivel E_1 .

Las potencias típicas de salida de los láseres de Helio-Neón están entre 1 mW y 50 mW para entradas de $5-10 \text{ watts}$.

IV-2-3. OTROS TIPOS DE LASERES:

Aparte de los láseres de rubí y de Helio-Neón hay otros tipos de láseres. Enumeraremos brevemente algunos de los más importantes hasta el momento.

El Láser: de dióxido de carbono, de colorante, de diodo semiconductor, de cristal, de gas, el químico, el líquido, el de electrón libre y el de rayos X. Este último todavía está en proceso de experimentación, sin resultados comprobables.

IV-4. APLICACIONES DE LOS LASERES:

Desde la construcción del primer láser hasta nuestros días una gran variedad de aplicaciones ha sido encontrada para estos aparatos. Entre las más importantes podemos mencionar: la cirugía de oídos, ojos, garganta, piel, tumores cerebrales, úlceras, comunicaciones para transmisiones de larga distancia, red eficiente de comunicación, fibras ópticas, manufactura, perforaciones, cortes, balanceo, fusión, soldadura, instrumento de medida para la construcción, movimientos terrestres, - giroscopios, espectroscopía, computación, aparatos musicales, para leer manuscritos, para la holografía, en el arte, la milicia, como armas estratégicas y otras.

C A P I T U L O V

V-1. SISTEMAS DINAMICOS.

Frecuentemente, las propiedades de un sistema son analizadas al descomponerlo en subsistemas. En muchos casos, se descubre que estas propiedades no pueden ser explicadas como superposiciones azarosas de los efectos de los subsistemas. Por el contrario, los subsistemas parecen cooperar de una manera ordenada o regular.

Has aún, el comportamiento total del sistema puede mostrar cambios característicos, los cuales pueden ser descritos como una transición de desorden a orden, o como una transición de un estado de orden a otro.

En Física, existen muchos ejemplos de tal comportamiento; por ejemplo, el ferromagneto donde el alineamiento paralelo de los spines causa una magnetización macroscópica, o en el superconductor el cual se comporta como un sistema cuántico con una función de onda macroscópica. Mientras que estos sistemas tienden a un estado ordenado cuando la temperatura es bajada, fenómenos de cooperación muy pronunciados pueden ocurrir en sistemas físicos lejos del equilibrio térmico y aún en sistemas no físicos.

En los sistemas físicos lejos del equilibrio térmico, los estados ordenados son creados y mantenidos por un flujo de energía que pasa a través del sistema. No es sorprendente que dichos sistemas abarquen a los láseres, diodos de tunel, y muchos más.

Para muchos físicos fué una sorpresa el que existan analogías profundas entre el comportamiento de los sistemas convencionales en equilibrio térmico y los sistemas que acabamos de mencionar. Estas analogías incluyen fenómenos característicos de las transiciones de fase.

El encontrar el comportamiento detallado de un subsistema es, en general, casi imposible. Afortunadamente, uno se interesa en las características a nivel macroscópico. Por lo tanto, la tarea es escoger los parámetros relevantes del sistema y desechar la información innecesaria. Para lograr este propósito, se usa el concepto de parámetro de orden, que es muy conocido en la teoría de las transiciones de fase.

* La turbulencia en los fluidos nos provee con un ejemplo clásico, en donde a medida que el parámetro de orden (el número de Reynolds) se acopla con ecuaciones deterministas (ecuación de Navier-Stokes), el movimiento del fluido puede sufrir una transición abrupta de una configuración estable (ej. flujo laminar) a un régimen aparentemente caótico.

El propósito de este capítulo es el de mostrar de una manera muy somera, la analogía que existe entre las ecuaciones del láser y las de la turbulencia en los fluidos.

* (Es importante mencionar que el presente capítulo sigue muy de cerca el tratamiento hecho por Haken en su libro "Synergetica")

V.2 ECUACIONES DEL LASER

Hoy en día, el láser forma parte de los problemas de muchos cuerpos. Es un sistema lejos del equilibrio térmico y permite el estudio de efectos cooperativos en gran detalle. La característica esencial que debe ser entendida acerca del láser es la siguiente: Si los átomos del medio láser son bombeados débilmente, éste actúa como una lámpara de luz ordinaria. Los átomos emiten ondas con fases al azar una independiente de las otras. Si éstos son considerados como dipolos oscilantes, vibrarán completamente al azar. Si el bombeo es incrementado, dentro de una región de transición muy fina, el ancho de banda de la luz láser tiende a ser del orden de un ciclo por segundo. Por lo tanto, la fase del campo permanece sin variar en la escala de un segundo a nivel macroscópico. Los dipolos atómicos empiezan a oscilar en fase aunque sean excitados por el bombeo completamente al azar. La extraordinaria coherencia de la luz láser es obtenida debido a la cooperación de los dipolos atómicos.

Consideremos el láser en mayor detalle. Tomaremos como ejemplo un láser de estado sólido, el cual consiste de un conjunto de átomos activos enclavados en una matriz de estado sólido. Suponemos también que los extremos del láser actúan como espejos, los cuales tienen dos propósitos: Uno de ellos es el de seleccionar modos en la dirección axial y el otro es tener frecuencias discretas en la cavidad. Además de esto, supondremos un sistema de dos niveles. En equilibrio térmico, los átomos ocupan los dos niveles de acuerdo a la ley de Boltzmann. Al existir suficiente bombeo, los átomos en el estado excitado forman una inversión de población lo cual puede ser descrito mediante el concepto de temperatura negativa. En esta situación, los átomos empiezan a emitir luz, la cual es eventualmente absorbida por los alrededores, cuya temperatura es mucho menor que $\hbar\omega/k_B$, por lo cual

podemos poner dicha temperatura a un valor $T \gg 0$. Desde el punto de vista termodinámico, el láser (compuesto de los átomos y el campo), es un sistema el cual está acoplado a depósitos a diferentes temperaturas. De aquí que, el láser es un sistema que está lejos del equilibrio térmico.

Consideremos un láser con muchos modos. Analizaremos a la intensidad del campo eléctrico directamente, es decir, sin descomponerla en modos. Para lograr una descripción macroscópica del material láser, introduciremos la polarización macroscópica $\mathcal{P}(x,t)$ y la densidad de inversión $D(x,t)$, como:

$$\mathcal{P}(x,t) = \sum_{\mu} \rho(x-x_{\mu}) (\theta_{21} \alpha_{\mu} + \theta_{12} \alpha_{\mu}^*) \quad (5-2-1)$$

(θ_{21} es el elemento de la matriz dipolar atómica) y,

$$D(x,t) = \sum_{\mu} \rho(x-x_{\mu}) \Gamma_{\mu} \quad (5-2-2)$$

De lo anterior, podemos escribir las ecuaciones del láser como:

$$-\Delta \mathcal{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} + \frac{2\kappa}{c^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \mathcal{P} \quad (5-2-3)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \omega_0^2 \mathcal{P} = -\frac{2}{3} \omega_0 (|\theta_{21}|^2 / \hbar) \mathcal{E} D \quad (5-2-4)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \gamma_{11} (D_0 - D) + (2/\hbar \omega_0) \mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \quad (5-2-5)$$

La ec. (5-2-3) se sigue directamente de las ecuaciones de Maxwell, mientras que las ec. (5-2-4) y (5-2-5) son ecuaciones para la materia descritas en la teoría del láser con el uso de la mecánica cuántica.

De dichas ecuaciones tenemos que κ es la pérdida de la cavidad, γ es el ancho de banda atómico, $\gamma_{11}^{-1} = T_1$ es el tiempo de relajación de la inversión atómica, ω_0 es la frecuencia de transición atómica y \hbar es la constante de Planck. D_0 es la inversión insaturada debida al bombeo y a los procesos de relajación.

Como se supone que el campo oscila esencialmente a la frecuencia resonante, podemos escribir:

$$\mathcal{E} = e^{i\omega_0 t - ikx} \hat{E}^{(-)}(x,t) + \dots \quad (5-2-6)$$

donde $\omega_0 = ck_0$, $\hat{E}^{(-)} = \hat{E}^{(-)*}$. Si consideramos que $\hat{E}^{(-)}(x,t)$, $\hat{P}^{(-)}(x,t)$ son funciones de x y de t que varían lentamente, podemos despreciar $\hat{E}^{(-)}$ comparado con $\omega_0 \hat{E}^{(-)}$. De este análisis se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \hat{E}^{(-)}}{\partial t} + c \frac{\partial \hat{E}^{(-)}}{\partial x} + k E^{(-)} = -2\pi i \omega_0 \hat{P}^{(-)} \quad (5-2-7)$$

$$\frac{\partial \hat{P}^{(-)}}{\partial t} + \gamma \hat{P}^{(-)} = \frac{i}{2} (10_{11}^2 / \hbar) \hat{E}^{(-)} \hat{D} \quad (5-2-8)$$

$$\frac{\partial \hat{D}}{\partial t} = \gamma_{11} (D_0 - \hat{D}) + (2i/\hbar) (\hat{E}^{(+)} \hat{P}^{(-)} - \hat{E}^{(-)} \hat{P}^{(+)}) \quad (5-2-9)$$

Ahora, se empieza con una pequeña inversión D_0 , y se investiga que le sucede a \hat{E} , \hat{P} y \hat{D} cuando D_0 es incrementado.

1) D_0 es pequeño, es decir, $D_0 < k\gamma/\gamma^2$

de aquí se obtiene que:

$$\hat{E} = \hat{P} = 0, \quad \hat{D} = D_0$$

es decir, no hay acción láser. Para checar la estabilidad de la solución, se realiza un análisis de estabilidad lineal haciendo

$$\hat{E} = a e^{\lambda t - ikx} \quad (5-2-10)$$

$$\hat{P} = b e^{\lambda t - ikx} \quad (5-2-11)$$

$$\hat{D} - D_0 = c e^{\lambda t - ikx} \quad (5-2-12)$$

lo cual lleva a los siguientes valores característicos:

$$\lambda^{(1)} = -\gamma_{11} \quad (5-2-13)$$

$$\lambda^{(2,3)} = (1/2) \{-\gamma, -k + \alpha ck \pm \sqrt{\dots}\}, \quad (5-2-14)$$

donde
$$\sqrt{\gamma} = [(\gamma + \kappa + \alpha\kappa)^2 + 4g^2(D_0 - \hat{D}_{thr}) + 4\alpha\gamma\kappa]^{1/2} \quad (5-2-15)$$

y
$$D_{thr} = \kappa\gamma/g^2, \quad g^2 = 2\pi\omega_0 |\theta_{12}|^2 / 3\hbar \quad (5-2-16)$$

Un análisis más detallado revela que $\lambda^{(2)} \geq 0$ para $D_0 \geq D_{thr}$ y una inestabilidad ocurre, a primera vista en $\kappa=0$.

2) $D_{thr,1} \leq D_0 \leq D_{thr,2}$

En este caso tenemos que: $\hat{E}(x,t) = \hat{E}_{cw}$, $\hat{P}(x,t) = \hat{P}_{cw}$ y $\hat{D}(x,t) = \hat{D}_{cw}$ es ahora la solución estable. Si normalizamos \hat{E} , \hat{P} y \hat{D} con respecto al resultado anterior, tenemos que:

$$E = \frac{\hat{E}}{\hat{E}_{cw}}, \quad P = \frac{\hat{P}}{\hat{P}_{cw}}, \quad D = \frac{\hat{D}}{\hat{D}_{thr}} \quad (5-2-17)$$

Una investigación minuciosa nos revela que E, P, D pueden ser tomados como cantidades reales y entonces las ecuaciones adquieren la forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\right) P = \gamma E D \quad (5-2-18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_H\right) D = \gamma_{11}(A+1) - \gamma_{11} A E P \quad (5-2-19)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \kappa + c \frac{\partial}{\partial x}\right) E = \kappa P \quad (5-2-20)$$

donde $A = \frac{(D_0 - D_{thr})}{D_{thr}}$ es un parámetro de bombeo efectivo.

Estas ecuaciones son similares a aquellas encontradas en el análisis de la turbulencia en los fluidos.

7.3 ECUACIONES DEL LASER Y SISTEMAS DINAMICOS.

Uno de los problemas que aún permanecen sin resolverse y que ha sido tratado desde hace mucho tiempo es la explicación de la turbulencia en los fluidos. El propósito original de las ecuaciones de Lorenz es el de proveer un modelo para la turbulencia.

De los análisis de la inestabilidad de Benard, la descomposición del campo de velocidades en series de Fourier y utilizando la ecuación de Navier-Stokes se obtienen las ecuaciones de Lorenz:

$$\dot{X} = \sigma Y - \sigma X \quad (1)$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y \quad (2)$$

$$\dot{Z} = X \cdot Y - bZ \quad (3)$$

$\sigma = \nu/k'$ es el número de Prandtl (donde ν es la viscosidad cinemática, k' es la conductividad termométrica), $r = R/R_c$ (donde R es el número de Rayleigh y R_c el número crítico de Rayleigh) y $b = 4\pi^2(N^2 + k_0)^2$

cuando colocamos:

$$X = \xi, \quad Y = \eta, \quad Z = \nu - \zeta$$

las ecuaciones (1), (2), y (3) toman la forma de:

$$\dot{\xi} = \sigma \eta - \sigma \xi, \quad \dot{\eta} = \xi \zeta - \eta, \quad \dot{\zeta} = b(\nu - \zeta) - \xi \eta$$

sorprendentemente, en la física de los láseres se encuentra un conjunto de ecuaciones equivalente a las ecuaciones (1)-(2)-(3).

Aquí comenzaremos con las ecuaciones del láser:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\right) P = \gamma E D \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_{||}\right) D = \gamma_{||}(A+1) - \gamma_{||} A E P \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + k + c \frac{\partial}{\partial x}\right) E = k P \quad (7)$$

para la fuerza del campo E, la polarización P y la inversión D .
(en unidades propiamente escogidas).

Asumiremos que la operación se realiza en un solo modo, es decir, $\frac{\partial E}{\partial x} = 0$. En lo siguiente asumiremos que E y P son cantidades reales, es decir, sus fases pueden mantenerse constantes.

Las ecuaciones resultantes son:

$$\dot{E} = \alpha P - \gamma E \quad (8)$$

$$\dot{P} = \gamma E D - \gamma P \quad (9)$$

$$\dot{D} = \gamma_{||}(A+1) - \gamma_{||} D - \gamma_{||} A E P \quad (10)$$

Estas ecuaciones, son idénticas con el modelo de Lorenz en la forma (4) mediante las siguientes identificaciones:

$$t \rightarrow t' \sqrt{\gamma} / \alpha \quad E \rightarrow \alpha \zeta \quad \text{donde } \alpha = \{b(r-1)\}^{-1/2}, \quad r > 1$$

$$P \rightarrow \alpha k, \quad D \rightarrow \zeta, \quad \gamma_{||} = \alpha b / \sqrt{\gamma}, \quad \gamma = \alpha / \sqrt{\gamma}, \quad A = r - 1$$

En particular, las siguientes correspondencias se realizan:

FLUIDOS	LASER
γ : número de Prandtl	$\gamma = \alpha / \sqrt{\gamma}$
$\nu = \eta / \eta_c$	$\nu = A + 1$
$b = \frac{4\pi^2}{\pi^2 + k_c^2}, \quad k_c^2 = k_c^2 = \frac{\pi^2}{2}$	$b = \gamma_{ } / \gamma$

Las ecuaciones (4) describen al menos dos inestabilidades las cuales han sido encontradas independientemente en la dinámica de fluidos y en los láseres. Para $A < 0$ ($r < 1$) no hay acción láser (el fluido está en reposo). Para $A > 0$ ($r > 1$) acción láser con soluciones f, h, T estables e independientes del tiempo ocurren. (en fluidos el movimiento convectivo empieza).

Como veremos mas adelante, al lado de esta inestabilidad existe otra nueva bajo las siguientes condiciones:

$$\text{LASER: } \alpha > \beta + \gamma_{11} \quad \text{Prandtl } \nu > b + 1 \quad (10)$$

$$\text{y } \alpha > (\beta + \gamma_{11} + \kappa)(\nu + \kappa) / \nu(\kappa - \beta - \gamma_{11}), \quad \nu > \nu(\nu + b + 3) / (\nu - 1 - b) \quad (11)$$

Esta inestabilidad conduce a un movimiento irregular. Cuando los valores numéricos son usados en las condiciones (10) y (11) se ve que el número de Prandtl debe ser muy alto, valor que no puede ser cumplido por los fluidos reales. En el caso de los láseres y másers es probable que las condiciones (10) y (11) puedan ser cumplidas. Mas aún, es bien conocido que los átomos de dos niveles usados en láseres son matemáticamente equivalentes a spins. Por lo tanto, tal fenómeno puede ser obtenible en sistemas de spins acoplado a un campo electromagnético.

CAOS:

Como podemos escalar las variables de diferentes maneras, las ecuaciones de Lorenz ocurren en diferentes formas. Aquí adoptaremos la siguiente:

$$\dot{q}_1 = -\alpha q_1 + q_2 \quad (12)$$

$$\dot{q}_2 = -\beta q_2 + q_1 q_3 \quad (13)$$

$$\dot{q}_3 = d - q_3 - q_1 q_2 \quad (14)$$

Estas ecuaciones resultan de (1)-(2)-(3) mediante el siguiente escalamiento:

$$x = b \dot{q}_1, \quad y = \frac{b^2}{v} \dot{q}_2, \quad z = v - \frac{b^2}{v} \dot{q}_3, \quad t = \frac{t'}{b}$$

$$\alpha = \frac{v}{b}, \quad d'_0 = v \frac{v}{b^2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{b} \quad (15)$$

El estado estacionario de (12)-(13)-(14) con $\dot{q}'_1, \dot{q}'_2, \dot{q}'_3 = 0$ está dado por:

$$q'_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha} (d'_0 - \alpha \beta)}$$

$$q'_2 = \pm \sqrt{\alpha (d'_0 - \alpha \beta)} \quad (16)$$

$$q'_3 = \alpha \beta$$

Un análisis de estabilidad lineal revela que la solución estacionaria se vuelve inestable para:

$$d'_0 = \alpha^2 \beta \frac{(\alpha + 3)(\beta + 1)}{\alpha - \beta - 1} \quad (17)$$

La fig(1) nos muestra las proyecciones de las trayectorias sobre dos planos. Aparentemente el punto representativo (x, y, z) ó (q_1, q_2, q_3) circula primero en una parte del espacio y de repente salta a otra parte donde empieza un movimiento circular nuevamente.

El origen de ese tipo de comportamiento, el cual es responsable en gran parte del movimiento irregular, puede ser visualizado como sigue:

De la física de láseres sabemos que los términos en el lado derecho de (12) a (14) tienen un origen diferente. Los últimos términos $q_2, q_1 - q_3, y - q_1, q_2$ surgen de la interacción coherente entre los átomos y el campo. Como se sabe, la interacción coherente permite la conservación de dos leyes:

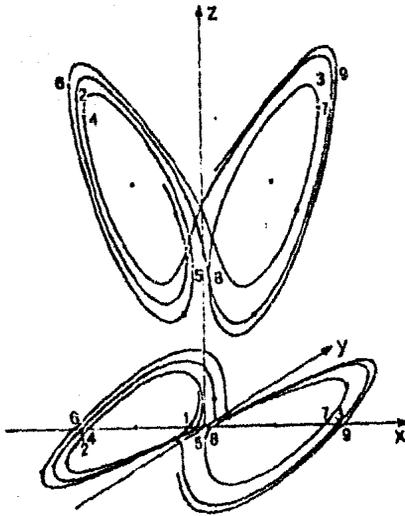


Figura 5-3-1

Mitad superior: Trayectorias proyectadas sobre el plano X-Z.

Mitad inferior: Trayectorias proyectadas sobre el plano X-Y.

Los puntos representan la solución estacionaria.

La conservación de la energía y la conservación del largo total del llamado pseudospin. Lo que es de importancia o relevancia, es lo siguiente: Las leyes de conservación son equivalentes a dos constantes de movimiento:

$$R^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (18)$$

$$P^2 = q_2^2 + (q_3 - 1)^2 \quad (19)$$

donde

$$q_3' + 1 = q_3 \quad \text{y} \quad d_0' + 1 = d_0 \quad (20)$$

En el otro caso, los primeros términos en (12)-(13)-(14) $-\alpha q_1, -\beta q_3, d_0 - q_3$ surgen del acoplamiento del sistema láser con el recipiente y describen términos de amortiguamiento y bombeo, es decir, interacciones no conservativas.

Cuando ignoramos estos términos en (12)-(13)-(14), el punto (q_1, q_2, q_3) debe moverse de tal manera que las leyes de conservación (18) y (19) sean obedecidas. Ya que (18) describe una esfera y (19) un cilindro, el punto representativo debe moverse en la sección transversal de la esfera y el cilindro. Existen dos posibilidades dependiendo del tamaño relativo de los diámetros de la esfera y el cilindro. En la fig(2) tenemos dos trayectorias bien separadas, mientras que en la fig(3) el punto representativo puede moverse de una región del espacio a la otra continuamente. Cuando se incluyen los términos de bombeo y amortiguamiento, las leyes de conservación (18) y (19) ya no son válidas. Los radios de la esfera y del cilindro comienzan a "respirar" movimiento. Cuando este movimiento toma lugar, las situaciones de la fig(2) y (3) aparentemente son accesibles.

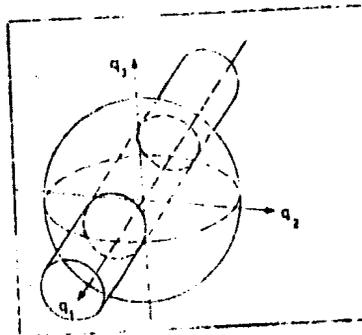


Figura 5-3-2.

La sección transversal de la esfera y el cilindro es graficada para $R > 1 + \epsilon$. Se obtienen dos trayectorias separadas.

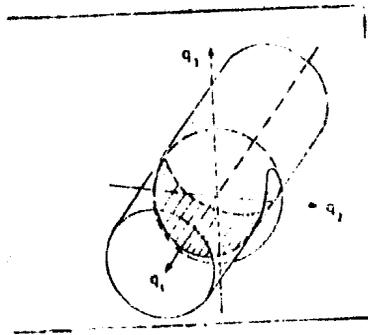


Figura 5-3-3.

Una sola trayectoria cerrada se obtiene cuando $R < 1 + \epsilon$.

En la situación de la fig(2) el punto representativo circula en una región del espacio, mientras que en la fig(3) este puede saltar a otra región cuando las condiciones necesarias se cumplen. El salto del punto representativo depende muy especialmente del lugar en que este se encuentre cuando la condición de salto es cumplida. Esto explica al menos intuitivamente el origen de los saltos azarosos y por lo tanto el movimiento al azar. Como se verá mas adelante, los radios de la esfera y del cilindro no pueden crecer indefinidamente sino que están acotados. Esto implica que las trayectorias deben caer en una zona finita del espacio. La forma de dicha zona ha sido determinada por medio de computadoras y se muestra en la fig(4).

Cuando el punto representativo empieza el movimiento con un valor inicial que cae fuera de esta región, se observa que despues de un cierto tiempo entra en la región y nunca la vuelve a dejar. En otras palabras, el punto representativo es atraído a esta región. Por lo tanto, la región en si misma es conocida como atractor.

El atractor de Lorenz tiene una propiedad muy extraña. Cuando escogemos una trayectoria y seguimos al punto representativo en su camino, parece como si claváramos una aguja en una bola de hilo. Este encuentra su trayectoria sin golpearla. Debido a esta propiedad el atractor de Lorenz es llamado un atractor extraño.

Las consideraciones anteriores (usando las leyes de conservación) sugieren la introducción de las nuevas variables

$R, S, y \theta$. Las ecuaciones originales (12)-(13)-(14) se transforman

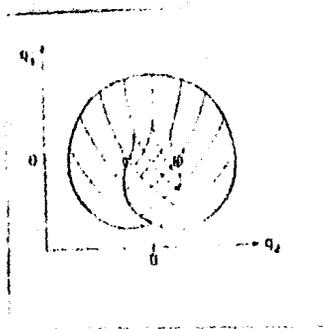


Figura 5-3-4.

Proyección de la superficie de Lorenz sobre el plano

q_2, q_3 .

ent:

$$\frac{1}{2}(R^2) = -\alpha + \beta - \alpha R^2 + (\alpha - \beta)S^2 + [2(\alpha - \beta) + d_0]q_3 - (1 - \beta)q_3^2 \quad (21)$$

$$\frac{1}{2}(S^2) = -d_0 + \beta - \beta S^2 + (d_0 + 1 - 2\beta)q_3 - (1 - \beta)q_3^2 \quad (22)$$

$$\dot{q}_3 = d_0 - q_3 - (\pm)(R^2 - S^2 + 1 - 2q_3)^{1/2} [(1 + \beta - q_3)(q_3 - 1 + \beta)]^{1/2} \quad (23)$$

La ecuación para q_3 fija las regiones permitidas debido a que las expresiones bajo los radicales deben ser positivas. Esto nos lleva a:

$$1 - \beta < q_3 < 1 + \beta; \quad R > 1 + \beta \quad (24) \quad (\text{dos trayectorias separadas})$$

↓

$$(25) \quad 1 - \beta < q_3 < 1/2(R^2 - S^2 + 1); \quad R < 1 + \beta \quad (\text{trayectoria cerrada})$$

Mejores estimaciones para R y β pueden encontrarse como sigue:

resolvemos (22) formalmente:

$$(26) \quad S^2(t) = S^2(0)e^{-2\beta t} - 2 \frac{d_0 - \beta}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t}) + 2 \int_0^t e^{-2\beta(t-\tau)} \mathcal{J}(q_3(\tau)) d\tau$$

$$\text{con } \mathcal{J}(q_3(\tau)) = Aq_3 - Bq_3^2 \quad A = d_0 + 1 - 2\beta, \quad B = 1 - \beta \quad (27)$$

encontramos una cota superior para el lado derecho de (26) al

reemplazar \mathcal{J} por su valor máximo:

$$\mathcal{J}_{\max}(q_3) = \frac{A^2}{4B} \quad (28)$$

$$\Rightarrow S^2(t) \leq S_M^2(t) = S^2(0)e^{-2\beta t} + \frac{(d_0 - 1)^2}{4\beta(1 - \beta)} (1 - e^{-2\beta t}) \quad (29)$$

para $t \rightarrow \infty$ (29) se reduce a:

$$S_M^2(\infty) = \frac{(d_0 - 1)}{4\beta(1-\beta)} \quad (30)$$

En una manera análoga podemos tratar a la ecuación (21), la cual después de algo de álgebra nos da:

$$R_M^2(\infty) = \frac{1}{4\alpha\beta(1-\beta)} \left[\alpha d_0^2 + (\alpha - \beta) [2(2\beta - 1)d_0 + 1 - 4\beta(\alpha - 1)] \right] \quad (31)$$

Estas estimaciones son extremadamente buenas ya que podemos sustituirlas por valores numéricos. Por ejemplo, se ha encontrado (usando los papeles originales de Lorenz) que:

A) Estimaciones:

$$P_M(\infty) = 41.03$$

$$R_M(\infty) = 41.89$$

B) Integración directa de las ecuaciones de Lorenz en algún intervalo de tiempo:

$$S = 32.84$$

$$R = 33.63$$

C) Estimación usando la superficie de Lorenz. (ver fig 6):

$$S_L = 39.73$$

$$R_L = 40.73$$

CONCLUSIONS.

C O N C L U S I O N E S .

Los sistemas dinámicos fuera del equilibrio térmico están tomando una gran importancia dentro de las distintas ramas de la ciencia como la Física, Biología, Química, Bioenergética, etc. Esto es debido a las relaciones encontradas en fenómenos que parecían tener nada en común. De aquí que, en el momento actual, estos temas sean de primordial interés ya que al irse encontrando relaciones muy similares en campos aparentemente tan alejados, nos indica que en la naturaleza puede existir un comportamiento mas general el cual abarque un número grande de fenómenos.

El caso que aquí se ha presentado (el láser) es uno de los muchos fenómenos que actualmente están bajo un estudio intenso. Cabe mencionar que este tipo de fenómenos aparecen en diferentes ramas de la física como son la turbulencia en los fluidos, superconductores, estabilidad de los plasmas y varios mas. Aparte de éstos, encontramos que fuera del campo de la física también se han encontrado comportamientos similares como en la química, la morfogénesis, la bioenergética, el crecimiento de poblaciones, etc.

Haciendo una visión retrospectiva, en mi opinión, diría que la situación actual es comparable a la existente a finales del siglo pasado, donde muchos fenómenos aparentemente sin relación, se unieron para dar lugar a uno de los grandes pasos que ha dado la ciencia. Es por esto, que podemos estar en un momento clave en el cual se puede dar otro paso gigante en la comprensión de la naturaleza.

Para finalizar el presente trabajo, me gustaría mencionar que en la carrera de Física y en general en todas las carreras científicas no existen cursos en los cuales se refuerze la importancia del aspecto interdisciplinario como son los sistemas dinámicos. Por lo tanto, es imperante que se analice y reestructuren los objetivos y planes de estudio que dichas carreras pretenden. Con esto los alumnos y profesionales de estos campos tendrán una visión mas clara y realista de los fines que la ciencia pretende y de los problemas que actualmente investiga.

BIBLIOGRAFIA.

BIBLIOGRAFIA CONSULFADA:

- Asimov, Isaac, Understanding Physics vol. III: The Electron, Proton & Neutron. Chicago, ed. New American Library, 1969.
- Hallmark L. Clayton, -LASERS, The Light Fantastic. USA, ed. TAB Books 1979.
- Hecht & Teresi, LASER SUPERPOOL OF THE 1980s. New York, ed. Ticknor & Fields, 1982.
- Klein V. Miles, OPTICS. USA, ed. Wiley & Sons, 1970.
- Kestin/Dorfman, A Course in Statical Thermodynamics. New York, ed. Academic Press, 1971.
- Liboff L. Richard, Introductory Quantum Mechanics. San Francisco, ed. Holden Day Inc. 1980.
- Marshall I. Samuel, LASER: tecnología y Aplicaciones. Barcelona, ed. Reverté, S:A., 1972.
- Sargent/Scully/Lamb Jr., Laser Physics. USA, ed. Addison- Wesley 1974.
- Siegman A. E., An Introduction to Lasers and Masers. USA, ed. McGraw-Hill Book Co, 1971.
- Smith y Sorokin, EL LASER. Madrid, ed. Paraninfo, 1970.
- Sproull/Phillips, Modern Physics. The Quantum Physics of atoms, solids and Nuclei. USA, ed. Wiley & Sons, 1980.
- Thyagarajan/Dhatak, LASERS, Theory and Applications. New York, ed. Plenum Press, 1981.

Wichmann H. Eyvind, Quantum Physics (Berkeley Physics Course vol. IV)
USA, ed. McGraw-Hill, 1967.

Yariv, Annon, Introduction to Optical Electronics. USA, ed, Holt, Rinehart & Winston, 1971.

ARTICULOS CONSULTADOS:

- H. Lyons, "Atomic Clocks". Scientific American. (February 1957) p. 51.
- J.P.Gordon, "The Maser" . Scientific American. (December 1958) p. 42
- A.L.Bloom , "Optical Pumping". Scientific American.(October 1960)p. 72
- A.L.Schawlow, "Optical Masers". Scientific American,(June 1961) p. 52
- Idem. "Advances in Optical Masers". Scientific American.(July 1963) p.34
- Gerald Feinberg, "Light". Scientific American. (September 1968) p. 50
- Willis E. Lamb Jr, "Theory of an Optical Maser".Physical Review Letters, vol. 134,# 6A.(June 1964). p.A1429.
- H. Haken, "Cooperative Phenomena in Systems far from Thermal Equilibrium and in Nonphysical Systems". Review of Modern Physics. vol.47,#1.(January 1975) P. 67.
- Robert M. May, "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics". Nature. vol. 261 (June 1976) p. 459
- _____ "Period Doubling Route to Chaos Shows Universality". Physics Today (March 1981) p. 17
- J.P.Eckmann, "Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems" Review of Modern Physics. vol 53, # 4, Part I (October 1981) p. 643
- H. Haken, Synergetics an Introduction. Ed. Springer-Verlag, New York 1978.