Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION DE BALANCE

T E S I S

Que para obtener el título de:

F I S I C O

P r e s e n t a :

Luis Díaz Hernández

México, D. F. 1984

CONTENIDO

1. INTRODUCCION.

El propósito de este trabajo consiste en resolver una ecuación del tipo Monge-Ampère para el caso elíptico, como un problema de valores a la frontera.

Esta ecuación es conocida en meteorología como ecuación de balance, y es deducida de la ecuación de la divergencia al omitir el cambio local de la divergencia con respecto al tiempo en dicha ecuación

La ecuación de balance se ha utilizado para inicializar modelos de ecuaciones primitivas, La inicialización consiste en poner en balance el campo de masa (geopotencial), con el campo de movimiento, ya que dado el campo de masa a través de la ecuación de balance, se puede encontrar la función corriente.

Por lo general, en las condiciones iniciales existen imbalances entre el campo de masa y el de viento, debido a errores tanto en las observaciones como en el análisis.

Esto repercute en un modelo de ecuaciones primitivas en una redistribución del campo de masa y de viento a través de la dispersión y disipación de ondas de gravedad-inerciales, generadas por dichos imbalances.

La solución conserva la parte rotacional del viento, la cual es de un orden de magnitud mayor que la parte divergente.

2. LA ECUACION DE BALANCE.

La ecuación de la divergencia es una forma diferenciada - de la ecuación de momento horizontal (ver G. J. Haltiner,1980) y se representa de la siguiente manera

$$\frac{\partial D}{\partial t}+\mathbb{V}\cdot\nabla D+\frac{1}{2}D-2\,\mathbb{J}(u,v)-\frac{\partial}{\partial x}(fv)+\frac{\partial}{\partial y}(fu)=-\nabla^2\Phi \tag{2.1}$$

donde: $D=\nabla\cdot\mathbb{V}$ es la divergencia horizontal, $\mathbb{J}(u,v)$ el Jacobiano, f el parámetro de Coriolis, u y v las velocidades zonal y meridional respectivamente, Φ el geopotencial; x , y las - variables independientes, la primera en la dirección zonal y - la segunda en la dirección meridional. Si en la ecuación (2.1) se omiten los términos que contengan a la divergencia, se ob-- tiene la ecuación de balance. Esto, físicamente significa que- son eliminadas las ondas rápidas o de gravedad, pues el cambio en el tiempo de la divergencia es esencial para la propagación de estas ondas. La atmósfera se aproxima a este comportamiento en un nivel de 500mb., para latitudes medias y para latitudes- bajas en un nivel de 700mb. La ecuación así considerada fué -- propuesta por Charney (1955) y Bolin (1955), tiene la forma

$$2\,\mathbb{J}(u,v)+\frac{\partial}{\partial x}(fv)-\frac{\partial}{\partial y}(fu)=\nabla^2\Phi \tag{2.2}$$

donde

$$\mathbb{J}(u,v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Por lo tanto, se cuenta con un campo de velocidades en -- dos dimensiones y no-divergente, el cuál puede ser expresado - en términos de una función corriente Ψ , definida por

$$\mathbb{V} = \hat{k} \times \nabla \Psi \tag{2.3}$$

siendo k un vector unitario en la dirección perpendicular al - plano x , y. Tambien se puede expresar en componentes cartesia nas como

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad ; \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{2.4}$$

siendo facilmente verificable que $\nabla \cdot \mathbb{V} = 0$

Sustituyendo (2.4) en (2.2), se obtiene la ecuación de ba lance siguiente

$$2\left(\Psi_{xx}\Psi_{yy} - \Psi_{xy}^{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(f\Psi_{x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f\Psi_{y}\right) = \nabla^{2}\Phi \tag{2.5}$$

La ecuación (2.5), es una ecuación diferencial parcial no lineal del tipo Monge-Ampère, que representa una relación de - diagnóstico entre el geopotencial y el campo de vientos balanceado definido por la función corriente Ψ.

Si no son impuestas restricciones sobre el campo de geopo tencial (Φ), la ecuación (2.5) puede ser elíptica, parabólica o hiperbólica (ver por ejemplo, Arnason,1957).

Para los casos parabólico e hiperbólico la ecuación (2.5) no es analizada aquí, sino unicamente para el caso elíptico. - La razón resulta del hecho de que generalmente la región de estudio es elíptica; esto es, como se vera mas adelante, la ecuación mencionada en su forma de diferencias finitas sobre una - región discretizada, cumple en casi todos los puntos con la -- condición de elipticidad, excepto en pequeñas regiones de hiperbolicidad como pueden ser el frente de un huracán, las fronteras del Jet-Stream u otros fenómenos que provocan esta situación, por lo cual es necesario hacer una modificación al patrón de geopotencial, cuestión que sera tratada en la solución practica del problema (ver sección 5).

La ecuación (2.5) puede ser escrita en una forma general como

$$A\Psi_{xx} + 2B\Psi_{xy} + C\Psi_{yy} + \Psi_{xx}\Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2 = E \qquad (2.6)$$

donde

$$\left.\begin{aligned} A = C = f/2 \; , \quad B = 0 \\ E = (\nabla^2\Phi + 2\nabla f \cdot \nabla\Psi)/2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

Así, se esta en condiciones de plantear la solución de la ecuación-problema (2.6), para ello, se recurre al teorema de - Rellich sobre la ecuación diferencial de Monge-Ampere (ver Courant and Hilbert, 1962). Allí existen al menos dos soluciones- de (2.6) como un problema de valores a la frontera, si A, B, C y E son funciones continuas de x , y en un dominio cerrado y -

se satisface la desigualdad

$$AC - B + E > 0 \qquad (2.8)$$

Si se elimina E de (2.8) usando (2.6), se obtiene

$$(\psi_{xx} + C)(\psi_{yy} + A) - (\psi_{xy} - B)^2 > 0 \qquad (2.9)$$

y en términos de las definiciones (2.7), queda en la forma

$$(f/2 + \psi_{xx})(f/2 + \psi_{yy}) - \psi_{xy}^2 > 0 \qquad (2.10)$$

Esto implica que $f/2 + \psi_{xx}$ y $f/2 + \psi_{yy}$ son siempre ambos mayores o menores que cero en el dominio de interes. Esto nos dice que hay dos tipos de solución de (2.2), una cuando la vorticidad absoluta es negativa en todas partes ($f+\nabla^2\psi<0$) y la otra cuando la vorticidad absoluta es positiva en todas partes ($f +\nabla^2\psi>0$) en el dominio. Para movimientos a escala sinóptica - es apropiado tener en el Hemisferio Norte la condición

$$f + 2\psi_{xx} > 0 \quad \text{y} \quad f + 2\psi_{yy} > 0 \qquad (2.11)$$

y en el Hemisferio Sur

$$f + 2\psi_{xx} < 0 \quad \text{y} \quad f + 2\psi_{yy} < 0 \qquad (2.12)$$

Si sabemos que f=0 en el ecuador, se debe esperar que ψ_{xx} y ψ_{yy} se anulen también.

Se va ahora a expresar la desigualdad (2.10) de tal forma que aparezca explícitamente el geopotencial (Φ), pues és a -- través de él que se analiza el criterio de elipticidad. Sumando (2.5) a (2.10), ésta queda expresada como

$$\nabla^2\Phi + 1/2 f^2 - 2\nabla f \cdot \nabla\Psi > 0 \tag{2.13}$$

Considerando que $2\nabla f \cdot \nabla\Psi$ es una cantidad pequeña comparada con el valor de $\nabla^2\Phi$, por análisis de escala, la desigualdad (2.13) puede ser simplificada sin afectar su función de -- condición matemática que debe ser cumplida en la solución de - (2.6) y es por ello que puede ser reducida a

$$\nabla^2\Phi + 1/2 f^2 > 0 \tag{2.14}$$

que es como se conoce la condición de elipticidad.

Siguiendose el análisis es practico reescribir la ecua--- ción (2.5) en la forma dada por Petterssen (1953).

$$(\nabla^2\Psi + f)^2 = 2\nabla^2\Phi + f^2 + M^2 + N^2 - f_x\Psi_x - f_y\Psi_y \tag{2.15}$$

donde

$$M = -2\Psi_{xy}$$

$$N = \Psi_{xx} - \Psi_{yy}$$

siendo M y N los términos de deformación. Ahora, si se toma la raíz cuadrada de (2.15), se obtiene

$$\nabla^2 \psi = -f \pm \left(2\nabla^2\phi + f^2 + M^2 + N^2 - f_x\psi_x - f_y\psi_y\right)^{1/2} \qquad (2.16)$$

En donde como ya se señaló, el signo positivo (+) corresponde al Hemisferio Norte y el signo negativo (-) al Hemisferio Sur.

La transformación de la ecuación (2.16) sobre una proyección cónica de Lambert tangente a 30°, queda de la siguiente manera

$$\nabla^2 \psi = \frac{-f \pm \left(2m^2\nabla^2\phi + f^2 + m^4(M^2+N^2) - m^2\, 2\nabla f \cdot \nabla\psi\right)^{1/2}}{m^2} \qquad (2.17)$$

siendo m(φ) el factor de mapa dado por

$$m(\varphi) = \frac{\cos 30^\circ}{\cos\varphi}\left[\frac{\operatorname{sen}(45 - \varphi/2)}{\cos(45 - \varphi/2)} \Big/ \tan 30^\circ\right]^{\operatorname{sen} 30^\circ} \qquad (2.18)$$

donde φ es la latitud.

La condición de elipticidad (2.14) asegura que el radical de (2.17) sea real y, así, que una solución físicamente útil exista. Por lo tanto, la ecuación (2.17) puede ser usada para calcular ψ dado un geopotencial ϕ, como tambien calcular ϕ dada una función corriente ψ como un problema de valores a la frontera. La solución numérica de la ecuación de Monge-Ampère (2.5) fue obtenida por K. Miyakoda (1956), basado en la forma (2.17).

3. DISCRETIZACION DE LA ECUACION DE BALANCE.

La solución numérica de la ecuación de balance por el metodo de diferencias finitas requiere de dos condiciones: que la ecuación sea consistente matemáticamente cuándo se reemplace por su forma en diferencias, que el error de truncación de cualquier término tenga el mismo orden de magnitud cuándo se reemplace igualmente por su forma en diferencias.

El esquema adoptado en el presente trabajo tiene como característica y ventaja sobre otros, que satisface la condición siguiente: si las cantidades originales tienen la propiedad de que su integral de superficie se convierta en la integral de contorno, entonces se debe exigir que las cantidades aproximadas por diferencias finitas cumplan con relaciones similares; esto es, que el área de suma pueda ser reducida a la suma periférica del dominio en cuestión.

Supongase que el espacio x , y horizontal, que comprende la región de estudio, que para el presente caso es la región IV (ver figura 3), esta dividido en una malla de p x q puntos separados por una distancia d, que es del orden de 219,550 mts. Entonces, se pueden escribir las coordenadas como sigue: $X=ixd$ $Y=jxd$, donde $i=1,2,...,p$; $j=1,2,...,q$; los valores de p y q son 27 y 35 respectivamente. Así, cualquier punto de la malla es identificado de manera única por los índices (i,j). La figura 1, muestra una parte representativa del espacio discreto de que se trata. En la misma figura las líneas punteadas indican la periferia de un domínio unitario de integración, que será mas adelante la base en la construcción del esquema en diferencias, que transforma a la ecuación (2.17), en un sistema de ecuaciones algebraicas.

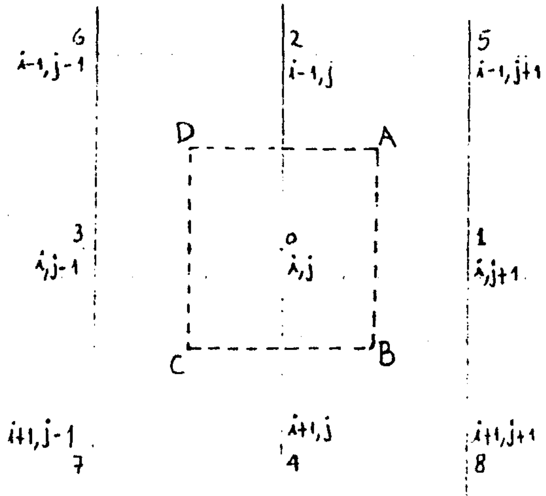

Figura 1. Identificación de los puntos de la malla por los indices i,j sobre una rejilla de diferencia finita de p x q puntos.

En la construcción del esquema en diferencias finitas el método adoptado considera un sistema de 9 puntos (figura 1).

El Jacobiano $\mathbb{J}(u,v)$ como cantidad original, tiene la propiedad de que su integral de superficie se convierte en la integral de contorno; esto es

$$2\iint \mathbb{J}(u,v)\,dx\,dy = \int \left(u\frac{\partial v}{\partial c} - v\frac{\partial u}{\partial c}\right) dc$$

$$= \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial c}\frac{\partial^2 \psi}{\partial c\,\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial n}\frac{\partial^2 \psi}{\partial c^2}\right) dc \qquad (3.1)$$

donde c es la coordenada a lo largo de la frontera y n la coordenada sobre el plano normal a ésta.

Si ahora, las cantidades a la derecha de (3.1), las descomponemos en diferencias a lo largo de la periferia del dominio unitario(ver figura 1), y se continua el análisis a todos los dominios unitarios restantes de la región, se ve que se cumple la condición impuesta al esquema; esto es, el área de suma de la región puede ser reducida a la suma periferica del dominio de ésta. La figura 2, muestra gráficamente que si la condición se satisface en los dominios unitarios, también es válida para el dominio entero.

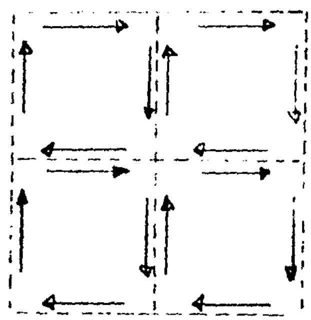

Figura 2. Representa gráficamente que la suma de los dominios unitarios se reduce a la suma periferica de la región.

Por lo tanto, con el objeto de establecer el esquema en - diferencias para $J(u,v)$, es necesario recurrir a la expresión diferencial a la derecha de (3.1), respecto al dominio unitario(figura 1).

Así para $\frac{\partial\psi}{\partial c}\frac{\partial^2\psi}{\partial c\partial n}$ a lo largo de AD,

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial c}\frac{\partial^2\psi}{\partial c\partial n}\right)_{AD} \rightarrow \frac{1}{4d}\left(\psi_2-\psi_4+\psi_5-\psi_8\right)\cdot\frac{1}{2d^2}\left(\psi_2-\psi_4-\psi_5+\psi_8\right)$$

$$= \frac{1}{8d^3}\left[\left(\psi_2-\psi_4\right)^2-\left(\psi_5-\psi_8\right)^2\right] \qquad (3.2)$$

donde el subindice de ψ denota el valor de la función corrien te en los puntos señalados numéricamente en la figura 1. Y para $\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{\partial^2\psi}{\partial c^2}$ a lo largo de AD, se tiene

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{\partial^2\psi}{\partial c^2}\right)_{AD} \rightarrow \frac{1}{d}\left(\psi_0-\psi_1\right)\frac{1}{2d^2}\left[\left(\psi_2+\psi_4-2\psi_0\right)+\left(\psi_5+\psi_8-2\psi_1\right)\right] \qquad (3.3)$$

En las expresiones anteriores como en las subsiguientes - donde aparezca la flecha se indica el reemplazo que se hace en- diferencias finitas. Tambien, se puede observar que para calcular las diferencias finitas a lo largo de la frontera del dominio unitario, es necesario hacer un promedio entre las diferencias finitas calculadas de antemano a la derecha e izquierda - de dicha línea, esto para la línea AD es dado por

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial c}\right)_{AD} \rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2d}\left(\psi_2 - \psi_4 + \psi_5 - \psi_8\right)\right]$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial c^2}\right)_{AD} \rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1}{d^2}\left(\psi_2 + \psi_4 - 2\psi_0\right) + \frac{1}{d^2}\left(\psi_5 + \psi_8 - 2\psi_0\right)\right]$$

Totalizando las cantidades anteriores a toda la frontera- del dominio unitario y notando que el sentido en que se tome - su construcción no afecta el resultado final, se obtiene

$$\begin{aligned} 2J(u,v) \rightarrow & \frac{1}{8d^4}\Big[2(\psi_2-\psi_4)^2 + 2(\psi_1-\psi_3)^2 - (\psi_5-\psi_6)^2 \\ & -(\psi_6-\psi_7)^2 - (\psi_7-\psi_8)^2 - (\psi_8-\psi_5)^2\Big] \\ & + \frac{1}{2d^4}\Big[(\psi_1-\psi_0)(\psi_5+\psi_8-2\psi_1) + (\psi_2-\psi_0)(\psi_5+\psi_6-2\psi_2) \\ & + (\psi_3-\psi_0)(\psi_6+\psi_7-2\psi_3) + (\psi_4-\psi_0)(\psi_7+\psi_8-2\psi_4) \\ & + 2(\psi_1+\psi_3-2\psi_0)(\psi_2+\psi_4-2\psi_0)\Big] \end{aligned} \qquad (3.4)$$

En la expresión anterior se ha hecho la siguiente simplificación

$$(\Psi_1-\Psi_0)(\Psi_2+\Psi_4-2\Psi_0)+(\Psi_2-\Psi_0)(\Psi_1+\Psi_3-2\Psi_0)$$

$$+(\Psi_3-\Psi_0)(\Psi_2+\Psi_4-2\Psi_0)+(\Psi_4-\Psi_0)(\Psi_1+\Psi_3-2\Psi_0)$$

$$=(\Psi_1+\Psi_3-2\Psi_0)(\Psi_2+\Psi_4-2\Psi_0)$$

A continuación se construye en forma de diferencias finitas la totalidad de la ecuación de balance, para lo cual se integra la ecuación diferencial (2.5), obteniéndose la relación siguiente

$$\int\left(\frac{\partial\Psi}{\partial c}\frac{\partial^2\Psi}{\partial c\,\partial n}-\frac{\partial\Psi}{\partial n}\frac{\partial^2\Psi}{\partial c^2}+f\frac{\partial\Psi}{\partial n}-\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)dc=0 \qquad (3.5)$$

Por lo tanto, el término $(f\Psi_x)_x+(f\Psi_y)_y$ se convierte a

$$\frac{\partial}{\partial x}(f\Psi_x)+\frac{\partial}{\partial y}(f\Psi_y)\rightarrow\frac{1}{2d^2}\Big[(f_1+f_0)(\Psi_1-\Psi_0)-(f_3-f_0)(\Psi_0-\Psi_3)$$

$$+(f_2+f_0)(\Psi_2-\Psi_0)-(f_4+f_0)(\Psi_0-\Psi_0)$$

$$=\frac{1}{d^2}f_0\nabla^2\Psi+\frac{1}{2d^2}\mathbb{C} \qquad (3.6)$$

donde

$$\nabla^2\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 - 4\Psi_0 \qquad (3.6a)$$

y

$$\mathbb{C} = (f_1 - f_0)(\Psi_1 - \Psi_0) + (f_2 - f_0)(\Psi_2 - \Psi_0) + (f_3 - f_0)(\Psi_3 - \Psi_0)$$

$$+ (f_4 - f_0)(\Psi_4 - \Psi_0) \qquad (3.6b)$$

para los subindices de f se utiliza la misma convención que pa ra los de Ψ.

Se observa en el desarrollo anterior, que el parámetro de Coriolis f para las fronteras del dominio unitario, es el promedio de los valores de f_0 y f_1 correspondientes a los meridianos o paralelos que se encuentran a la derecha e izquierda dela misma; esto es, para f a lo largo de la frontera AD,

$$f = \frac{1}{2}(f_0 + f_1)$$

repitiéndose lo mismo en las fronteras restantes.

Para la transformación del Laplaciano de Φ a su forma en diferencias, de acuerdo al esquema adoptado, se siguen los mismos pasos que en los casos anteriores; es por ello que se hace necesario recurrir al término correspondiente de la expresión (3.5) y calcular para cada una de las fronteras del dominio -- unitario. Obteniéndose la expresión siguiente

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{d^2}\left(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 - 4\Phi_0\right) \tag{3.7}$$

donde de la figura 1

$$\Phi_0 = \Phi(i,j);\ \Phi_1 = \Phi(i,j+1);\ \Phi_2 = \Phi(i-1,j);\ \Phi_3 = \Phi(i,j-1);\ \Phi_4 = \Phi(i+1,j)$$

Finalmente, en la ecuación (2.17), queda por expresar el- término $M^2 + N^2$, para ello se utiliza la relación siguiente

$$2\left[\Psi_{xx}\Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2\right] = \frac{1}{2}\left[(\nabla^2\Psi)^2 - M^2 - N^2\right] \tag{3.8}$$

La expresión a la izquierda de la igualdad en la relación anterior, corresponde al Jacobiano que ya fue expresado en su- forma de diferencias finitas(ver 3.4), el Laplaciano de Ψ a la derecha tiene similar expresión que en (3.6a). Por lo tanto despejando $M^2 + N^2$ de (3.8) se obtiene

$$M^2 + N^2 = (\Psi_1 + \Psi_3 - 2\Psi_0)^2 + (\Psi_2 + \Psi_4 - 2\Psi_0)^2$$

$$- (\Psi_1 - \Psi_0)(\Psi_5 + \Psi_8 - 2\Psi_1) - (\Psi_2 - \Psi_0)(\Psi_6 + \Psi_5 - 2\Psi_2)$$

$$- (\Psi_3 - \Psi_0)(\Psi_6 + \Psi_7 - 2\Psi_3) - (\Psi_4 - \Psi_0)(\Psi_7 + \Psi_8 - 2\Psi_4)$$

$$+ \tfrac{1}{4}\left[(\Psi_5-\Psi_8)^2+(\Psi_6-\Psi_5)^2+(\Psi_7-\Psi_6)^2+(\Psi_8-\Psi_7)^2\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}\left[(\Psi_2-\Psi_4)^2+(\Psi_3-\Psi_1)^2\right] \qquad (3.9)$$

Ahora, se esta ya en condiciones de escribir la ecuación-(2.17), en su forma de diferencias finitas, para ello se utiliza una notación que las exprese

$$\nabla^2\psi = \frac{-f \pm \left(2m^2\nabla^2\Phi + f^2 + m^4(\mathbb{M}^2+\mathbb{N}^2) - m^2\mathbb{C}\right)^{1/2}}{m^2} \qquad (3.10)$$

Esta es una ecuación algebraica a la que se dara solución numérica por un método iterativo en la sección 5.

4. CONDICIONES DE FRONTERA.

Los valores de la función en la frontera se fijan hciendo coincidir el flujo con el viento geostrófico en esos puntos, - esto queda expresado de la siguiente manera:

$$\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial c} = \frac{\partial \Psi}{\partial c}$$

$$\Phi/\bar{f} = \Psi \qquad (4.1)$$

donde f es un promedio del parámetro de Coriolis en la región-
que se esta trabajando.

5. METODO DE SOLUCION DE LA ECUACION EN DIFERENCIAS.

El procedimiento seguido para darle solución numérica a - la ecuación en diferencias; es como sigue (ver K. Miyakoda, -- 1960); basándose en la ecuación (2.17)

$$\nabla^2 \psi = \sigma \tag{5.1}$$

$$\sigma = -f + \left(2m^2 \nabla^2 \phi + f^2 + m^4 (M^2 + N^2) - m^2 C\right)^{1/2} \tag{5.2}$$

σ es calculada usando ψ^{ν}, donde ψ^{ν} es el ν-esimo- valor iterado y entonces por un método de relajación (ver apen dice A) la ecuación tipo Poisson (5.1) es resuelta. La solu--- ción corresponde a $\psi^{\nu+1}$. Entonces $\psi^{\nu+1}$ es insertada en (5.2) Este procedimiento es repetido hasta que $\psi^{\nu+1} - \psi^{\nu}$ tenga un va- lor dentro de un pequeño rango $+\varepsilon, -\varepsilon$. Shuman (1957), llamó- al proceso iterativo con respecto a ν un ciclo y al proceso- de relajación para resolver la ecuación de Pŏisson un barrido- de la malla, esto significa que el anterior método puede ser - llamado barrido en ciclos ("cycle-scan").

En este proceso se considero lo siguiente:

-En los puntos de la malla donde el geopotencial no cum-- ple con la condición de elipticidad impuesta (2.13), dicho geopotencial es modificado: de manera que

$$\nabla^2 \Phi = 2\nabla f \cdot \nabla \Psi - \frac{1}{2} f^2$$

ver por ejemplo, S. J. Bijlsma, 1983.

-Como adivinanza inicial de Ψ , se tomo $\Phi/\bar{f}$, donde - Φ es el geopotencial y $\bar{f}$ es el parámetro de Coriolis a una latitud media de 30° N.

-El valor de ε se hace gradualmente decreciente con el - ciclo, iniciando con 20 mts. en unidades de altura geopotencial y reduciéndolo por la mitad hasta 0.3125 mts.

6. RESULTADOS.

En la figura 3, se muestra la región de trabajo que es -- la región IV meteorológica, y la malla utilizada en la integración numérica la cual es de 27 x 35 puntos.

En la figura 4, se presenta el análisis objetivo para el- campo de la altura geopotencial en 500mb., correspondiente al- 21 de febrero de 1982, a las 12:00 Z. Se utilizó el esquema de análisis objetivo desarrollado originalmente por R. Revilla D. y T. Morales A. En la figura 5, se muestra el patron de la función corriente ψ , solución de la ecuación de balance y en la figura 6, el patron del geopotencial llamado de regreso, obtenido al resolver (2.17) para el geopotencial.

En las figuras 7 y 8, se presentan las gráficas que comparan respectivamente: el geopotencial inicial y la solución ψ de la ecuación de balance, el geopotencial inicial con el de - regreso. A lo largo de la linea AB que se indica en la figura- 4.

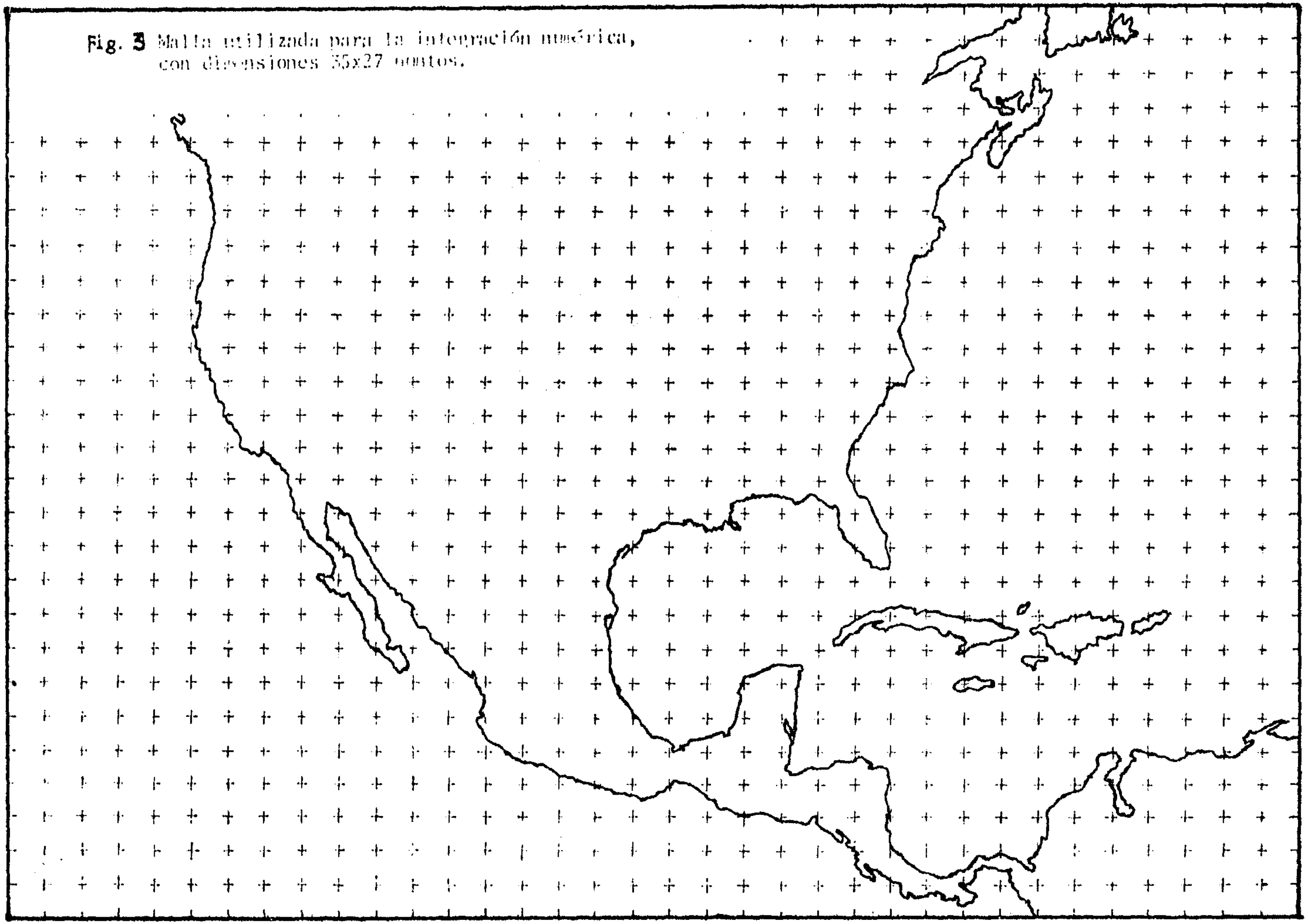

Fig. 3 Malla utilizada para la integración numérica, con dimensiones 35x27 puntos.

COTAS DE LOS SIMBOLOS

SIMBOLO	INFERIOR	SUPERIOR
A	.5081E+08	.5099E+08
B	.5117E+08	.5135E+08
C	.5154E+08	.5172E+08
D	.5190E+08	.5208E+08
E	.5227E+08	.5245E+08
F	.5263E+08	.5282E+08
G	.5300E+08	.5318E+08
H	.5336E+08	.5355E+08
I	.5373E+08	.5391E+08
J	.5410E+08	.5428E+08
K	.5446E+08	.5464E+08
L	.5483E+08	.5501E+08
M	.5519E+08	.5537E+08
N	.5556E+08	.5574E+08
O	.5592E+08	.5611E+08
P	.5629E+08	.5647E+08
Q	.5665E+08	.5684E+08
R	.5702E+08	.5720E+08
S	.5739E+08	.5757E+08
T	.5775E+08	.5793E+08

Para las figuras (4) y (6).

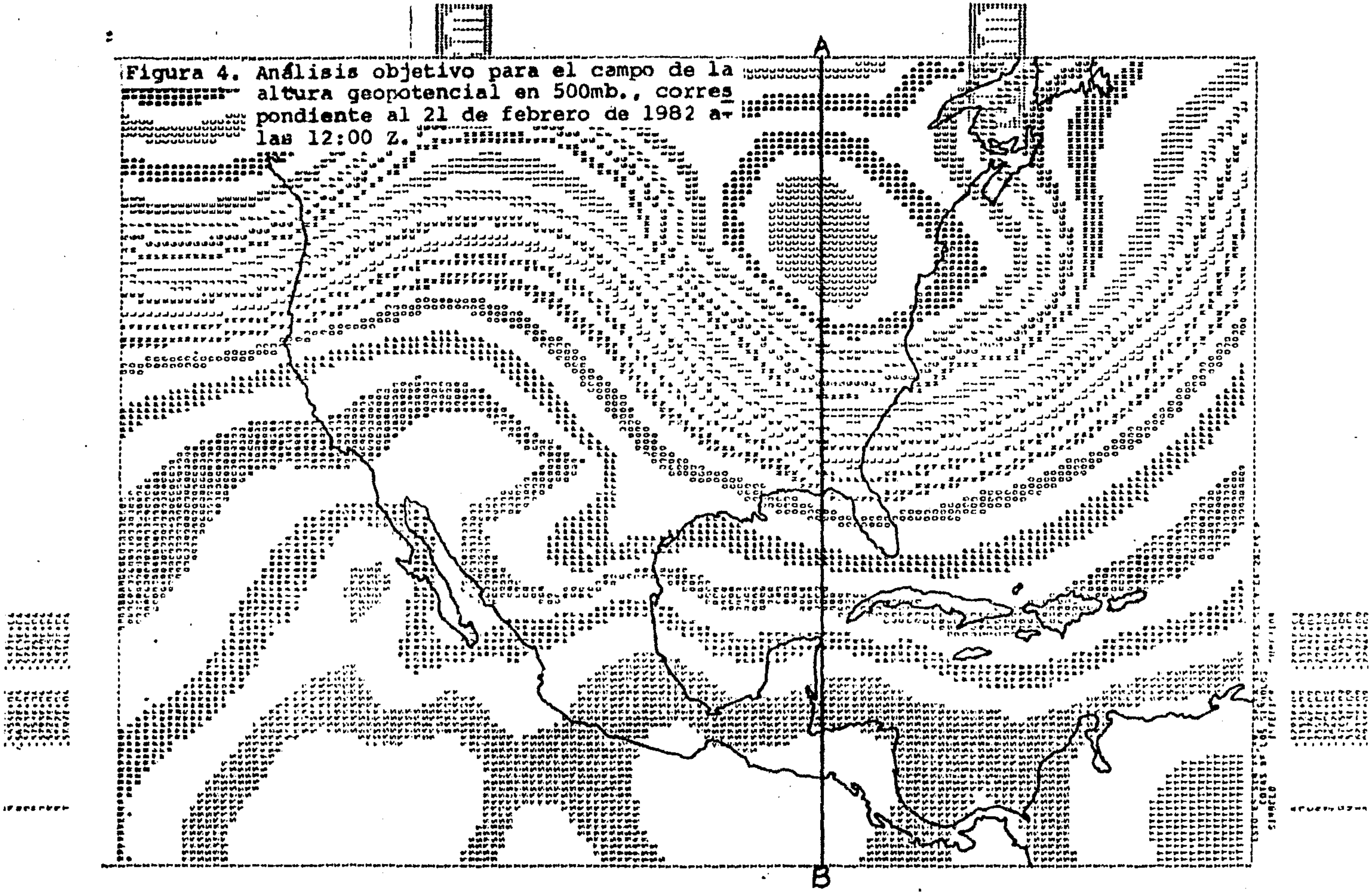

Figura 4. Análisis objetivo para el campo de la altura geopotencial en 500mb., correspondiente al 21 de febrero de 1982 a las 12:00 Z.

COTAS DE LOS SIMBOLOS

SIMBOLO	INFERIOR	SUPERIOR
A	.7183E+08	.7207E+08
B	.7231E+08	.7255E+08
C	.7279E+08	.7304E+08
D	.7328E+08	.7352E+08
E	.7376E+08	.7400E+08
F	.7424E+08	.7448E+08
G	.7472E+08	.7496E+08
H	.7520E+08	.7544E+08
I	.7568E+08	.7593E+08
J	.7617E+08	.7641E+08
K	.7665E+08	.7689E+08
L	.7713E+08	.7737E+08
M	.7761E+08	.7785E+08
N	.7809E+08	.7833E+08
O	.7858E+08	.7882E+08
P	.7906E+08	.7930E+08
Q	.7954E+08	.7978E+08
R	.8002E+08	.8026E+08
S	.8050E+08	.8074E+08
T	.8098E+08	.8123E+08

Para la figura (5).

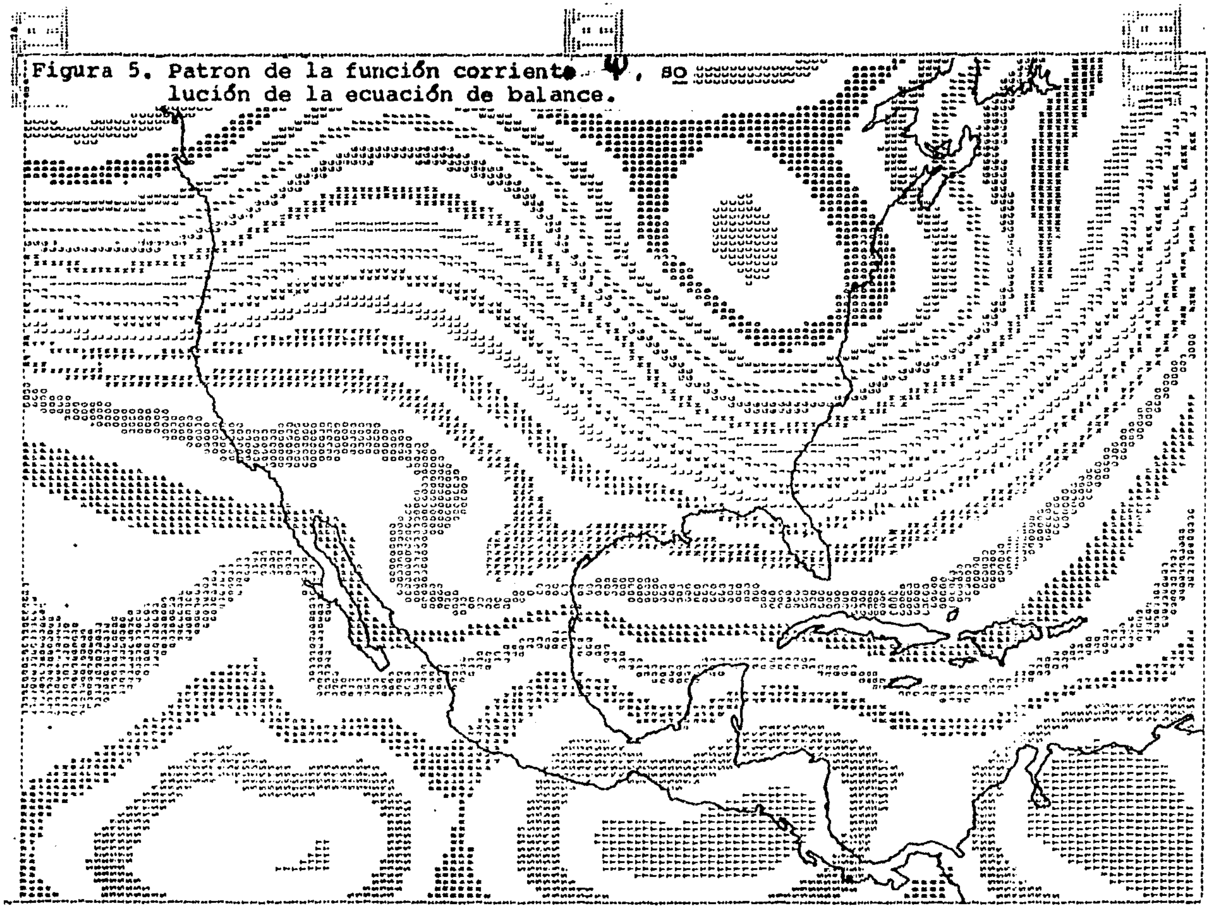

Figura 5. Patron de la función corriente Ψ, solución de la ecuación de balance.

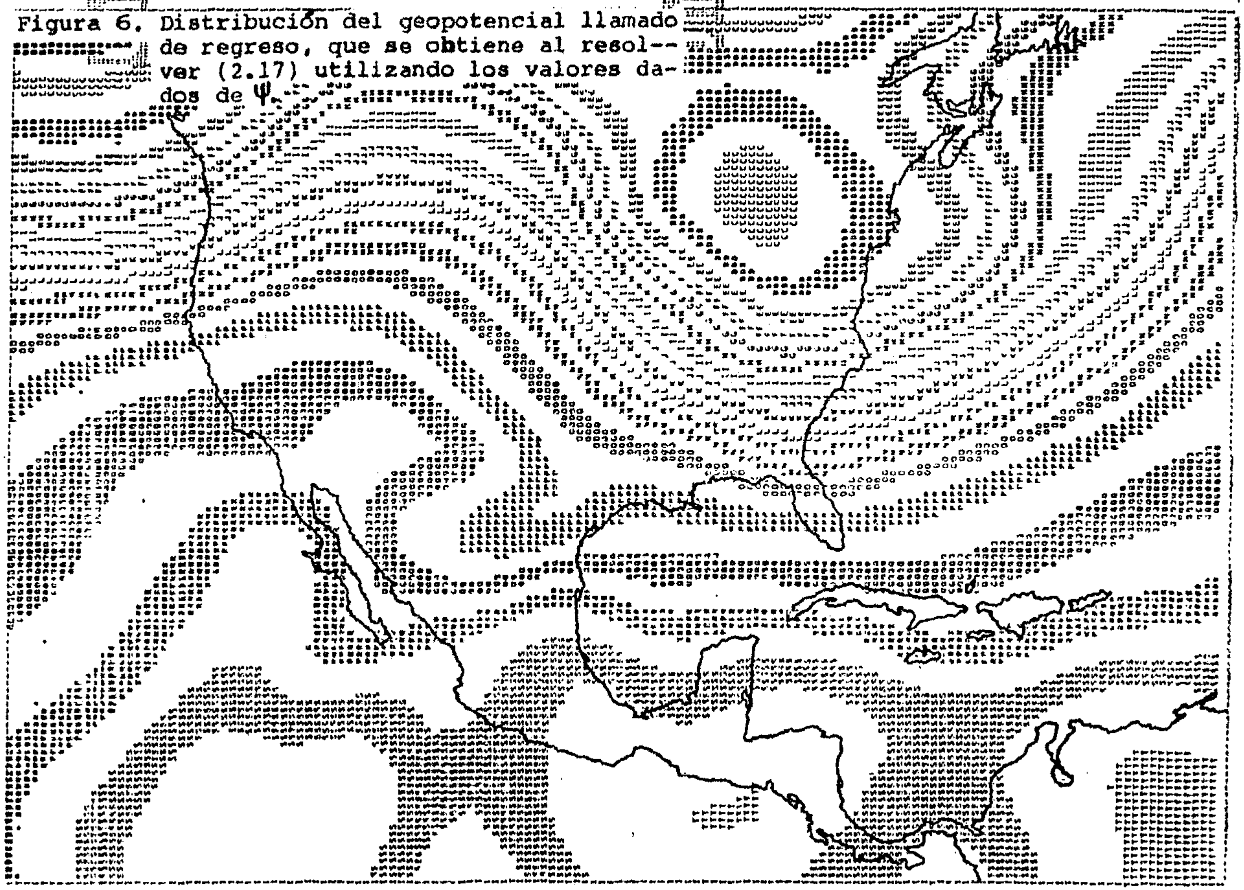

Figura 6. Distribución del geopotencial llamado de regreso, que se obtiene al resolver (2.17) utilizando los valores dados de ψ.

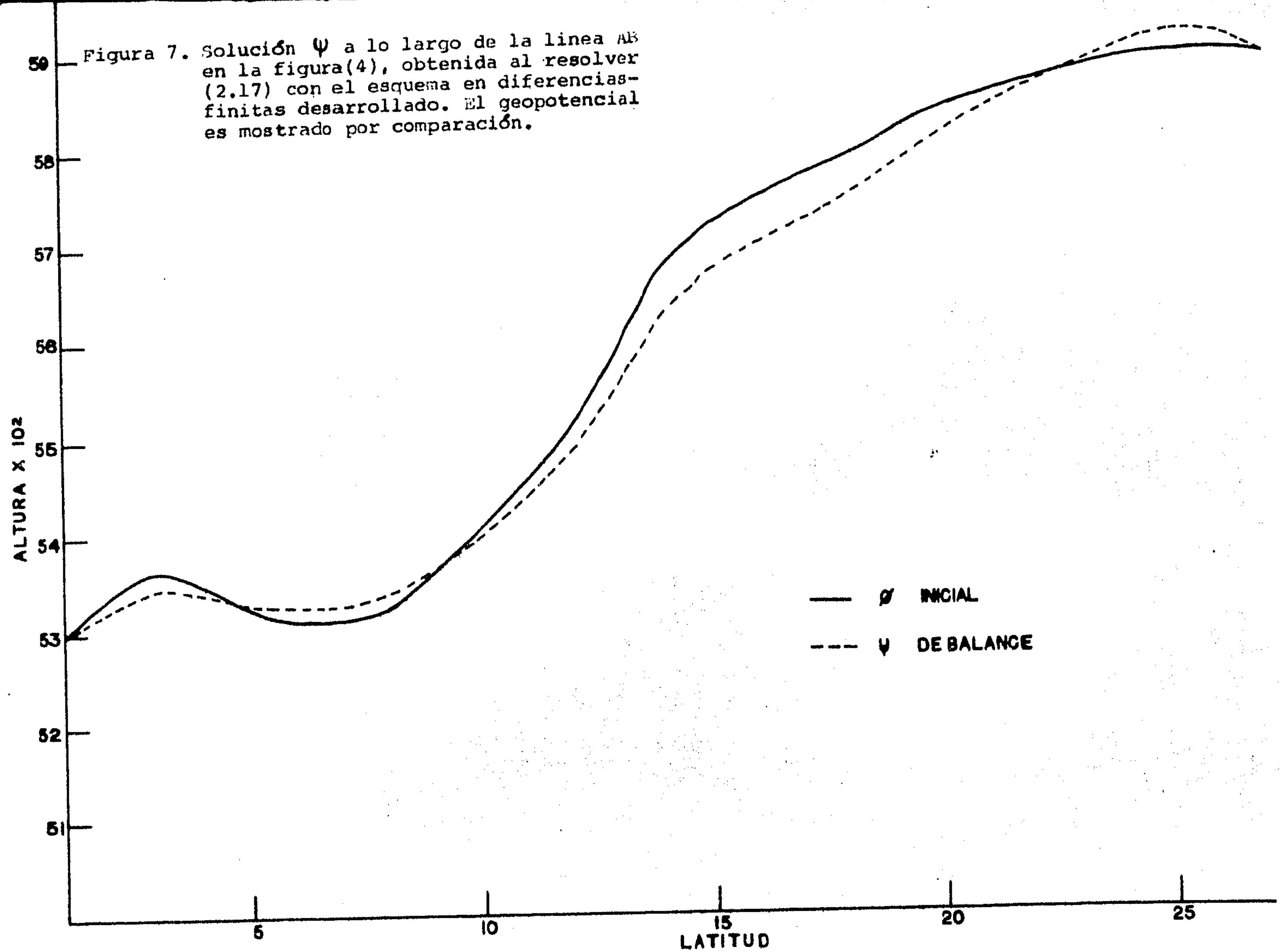

Figura 7. Solución ψ a lo largo de la linea AB en la figura(4), obtenida al resolver (2.17) con el esquema en diferencias-finitas desarrollado. El geopotencial es mostrado por comparación.

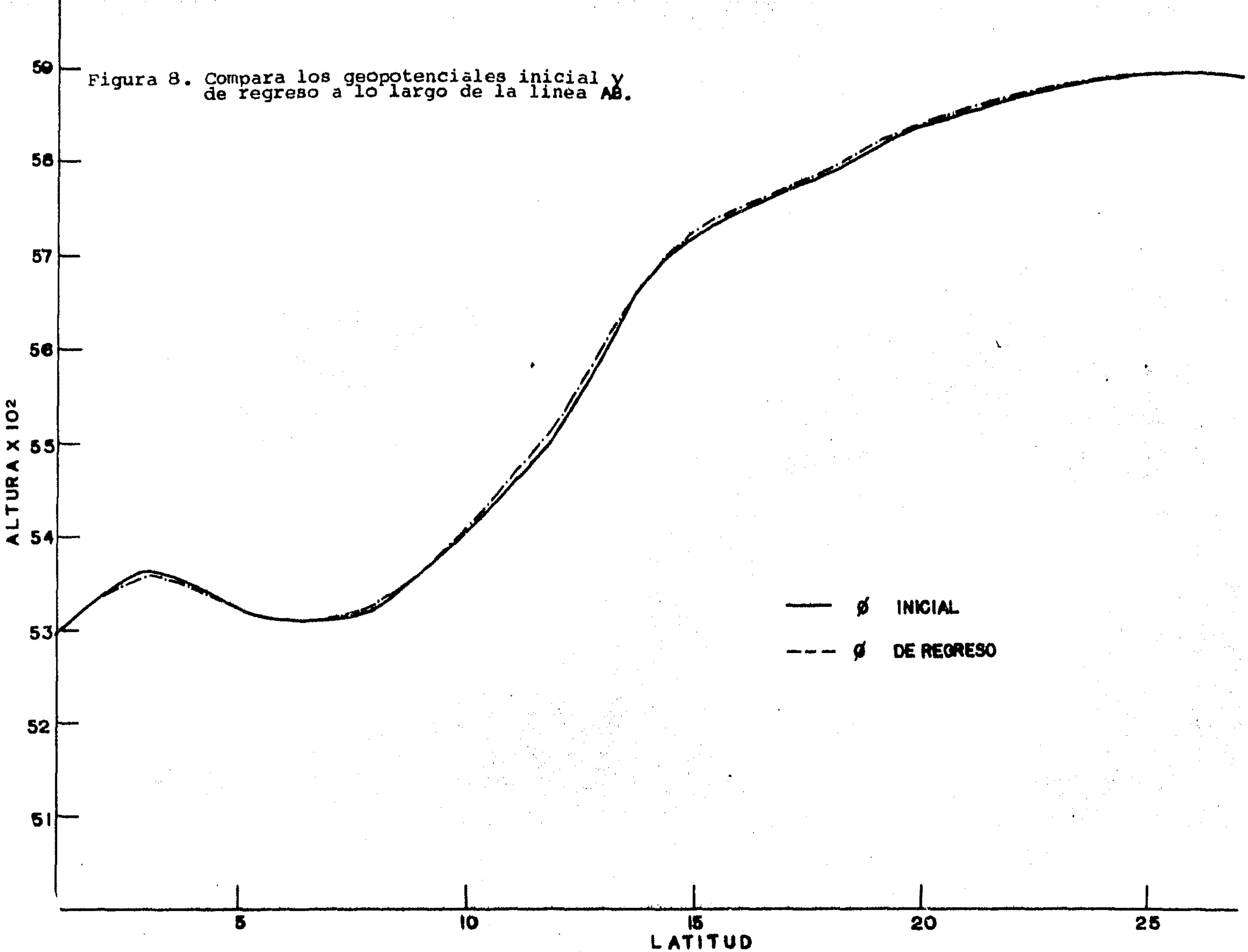

Figura 8. Compara los geopotenciales inicial y de regreso a lo largo de la linea AB.

7. CONCLUSIONES.

En el presente trabajo no se abordaron todos los caminos-que en la actualidad han sido desarrollados para la solución -numérica de la ecuación de balance. No obstante, en el presente se eligió uno de los métodos de solución que de acuerdo a -los datos reportados resulta ser uno de los mejores (ver método B, en K. Miyakoda, 1960).

El criterio que se adopto para comprobar la verecidad de-los resultados que se obtuvieron al resolver numéricamente la-ecuación de balance, fué el siguiente: primero dicha ecuación-se resolvio como una ecuación del tipo Monge-Ampère, en donde-es buscada ψ para una distribución dada de Φ, como un problema de valores a la frontera y para el caso elíptico. Luego, se invirtió el proceso y la ecuación de balance se resolvió como una ecuación del tipo Poisson en donde la solución Φ es obtenida dada la distribución de la función corriente calculada-previamente, con valores de Φ en las fronteras rodeando un dominio cerrado. El esquema aplicado es el mismo en los dos ca--sos; esto es, solo se invierte el proceso utilizando la misma-ecuación y el respectivo esquema.

A continuación se analizan los resultados a que se llego-y se señalan conclusiones de importancia en la solución de la-ecuación de balance para una región limitada.

Analizando las gráficas de la figura (7) y las figuras --(4) y (5), se concluye que: la solución ψ de la ecuación de-balance es diferente a la respectiva función corriente que se-obtiene por aproximación geostrófica. Esto ya se esperaba, ---

al resolver la ecuación de balance se tiene una función corrien te con menos restricciónes que en el caso de la aproximación geostrófica, donde los términos no lineales de dicha ecuación-son eliminados, provocando con ello que su aplicación se reduzca a regiones donde por análisis de escala, estos términos no-lineales sean de poco peso, comparados con los del resto de la ecuación de que se hace mención. Estas regiones corresponden a latitudes medias lejos de los trópicos.

Por otro lado, del análisis de las gráficas de la figura-(8) en donde se compara el geopotencial inicial con el llamado de regreso, los trazos no coinciden idénticamente, no quiere - decir por ello, que el balance esté equivocado, mas bien esta-diferencia nos dá una medida de que tan bueno es el balance; - pero si la diferencia fuera muy grande, habría que buscar posibles errores o definitivamente probar otro camino. En este caso que se trata las gráficas no difieren mucho, la diferencia-puede ser despreciada, es por ello que se puede decir que el - balance es bueno. Siguiendo adelante se analiza el por que de-estas diferencias.

La región de trabajo es no elíptica en ciertas partes, sobre todo en latitudes bajas, que son regiones donde dominan -- las zonas hiperbólicas; ahora, como la solución de la ecuación de balance es sólo para el caso elíptico, entonces, ahí en --- esas regiónes hiperbólicas que no cumplen con la condición impuesta, se hace necesario modificar a el geopotencial si se -- quiere obtener un balance.

Esta modificación al geopotencial va a estar presente en-la solución Ψ de la ecuación de balance y trasmitida cuando - se invierta el proceso, al nuevo geopotencial llamado de regreso. Conclusión, por lo antes expuesto, el geopotencial llamado de regreso no coincidirá con el geopotencial inicial.

Otra causa que afecta y que hay que tomar en cuenta son - las condiciones de frontera, éstas son mantenidas constantes - durante todo el proceso, lo que provoca cambios irreversibles- que tambien van a manifestarse en la diferencia de las dos gráficas analizadas.

Por lo anteriormente analizado se concluye que si no se - consideran los efectos de frontera y se trabaja en una región- que sea elíptica en su totalidad, el proceso es totalmente reversible por lo que se acaba de exponer y las respectivas gráficas de geopotencial (inicial y de regreso), deben coincidir idénticamente. Entonces, el criterio adoptado en la comprobación de los resultados es bueno y sirve como una referencia - de prueba.

Finalmente se considera de acuerdo a los resultados obtenidos, que el balance es bueno, aunque no es todo lo que se - quiere, sino que habrá que buscar los posibles errores o ha-- cer aportaciones que mejoren el método de solución de la ecuación de balance, sobre un dominio de área limitada.

APENDICE A

1. METODO DE RELAJACION SIMULTANEA. La ecuación tratada es una ecuación del tipo Poisson

$$\nabla^2 \Psi = \sigma(x, y) \qquad \text{(A.1)}$$

donde σ es un termino de forzamiento.

Para resolver numéricamente la ecuación (A-1), bajo ciertas condiciones de frontera, se emplea un método de aproximación sucesiva. Este es llamado "metodo iterativo". Es decir, dando una "adivinanza inicial", el valor de la solución es aproximado al valor final en un proceso iterativo. Por lo tanto si la solución en una iteración arbitraria no satisface la ecuación original, esta diferirá de la solución verdadera por una cantidad llamada residual R; esto es

$$\nabla^2 \Psi^{\nu} - \sigma = R^{\nu} \qquad \text{(A.2)}$$

ν indica una iteración arbitraria.

Si R^{ν} se hace cero en todos los puntos, entonces Ψ^{ν} será la solución verdadera de la ecuación (A-1). Se vera como se puede lograr esto. Por definición de $\nabla^2\Psi$ y de acuerdo con el arreglo de la figura (1-A)

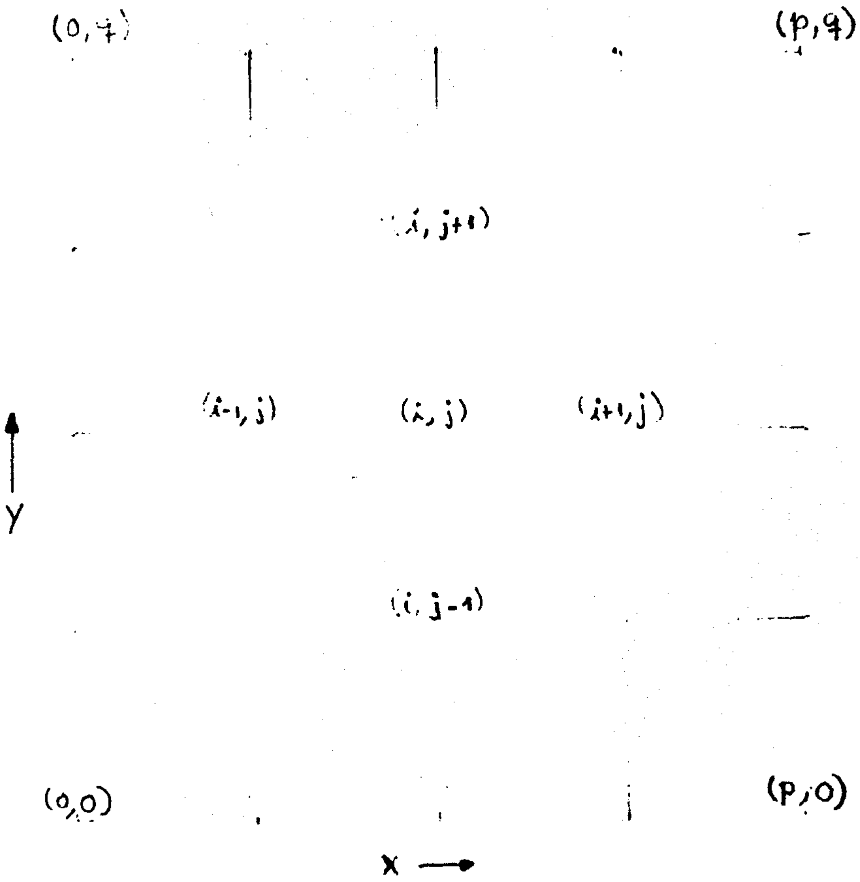

Figura 1A. Identificación de los puntos de la malla por los indices i,j. Sobre - una rejilla de diferencia finita - de p x q puntos.

$$\nabla^2\Psi = \Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} - 4\,\Psi_{i,j} \tag{A.3}$$

entonces la ecuación (A-2) queda como

$$\Psi^{\nu}_{i+1,j} + \Psi^{\nu}_{i-1,j} + \Psi^{\nu}_{i,j+1} + \Psi^{\nu}_{i,j-1} - 4\,\Psi^{\nu}_{i,j} = \sigma_{i,j} + R^{\nu}_{i,j} \tag{A.4}$$

Ahora se supone que nuestra adivinanza en un punto particular i,j fué cambiada por una cantidad $\delta\Psi_{i,j}$, aclarando que no se altera la adivinanza en algunode los puntos vecinos. Por lo tanto, como $\sigma_{i,j}$ es fijo, la ecuación anterior implica que- el cambio resultante en el residual en el mismo punto i,j es

$$\delta R_{i,j} = -4\,\delta\,\Psi_{i,j} \tag{A.5}$$

Si se tuviese unicamente un punto interior en la malla, - se cambiaría $\Psi^{\nu}_{i,j}$ en ese punto de tal forma que el residual re sultante se anule; esto es, tal que

$$\delta R_{i,j} = -\,R^{\nu}_{i,j} \tag{A.6}$$

de acuerdo a la anterior ecuación (A-5) seria

$$\delta\Psi_{i,j} = \frac{1}{4} R_{ij}^{\nu} \qquad \text{(A.7)}$$

o, si Ψ'_{ij} denota el resultado del cambio $\delta\Psi_{ij}$

$$\Psi'_{ij} = \Psi_{ij}^{\nu} + \delta\Psi_{ij} = \Psi_{ij}^{\nu} + \frac{1}{4} R_{ij}^{\nu} \qquad \text{(A.8)}$$

Así, se tiene que al considerar Ψ_{ij}^{ν} como una "nueva adivinanza", ésta se aplica nuevamente en (A-8) con el objeto de reducir el error y así sucesivamente, se obtiene entonces para un proceso de esta naturaleza que

$$\Psi_{ij}^{\nu+1} = \Psi_{ij}^{\nu} + \frac{1}{4} R_{ij}^{\nu} \qquad \text{(A.9)}$$

donde

$$R_{ij}^{\nu} = \nabla^2\Psi_{ij} - \sigma_{ij}$$

La ecuación anterior define un procedimiento iterativo debido a Richardson, llamado relajación simultanea.

2. METODO ORDINARIO DE LIEBMANN. El método de Richardson es -- muy lento en convergencia. La revisión de este esquema dio como resultado el método ordinario de Liebmann, en el cual $\Psi_{i-1,j}^{\nu}$ y $\Psi_{i,j+1}^{\nu}$ son reemplazados por los nuevos valores obtenidos.

3. METODO ACELERADO DE LIEBMANN. Por último, el método ordinario de Liebmann es extendido al llamado método acelerado de -- Liebmann, por la introducción de la técnica de sobrerrelaja--- ción. El procedimiento de corrección es escrito como sigue

$$\psi_{ij}^{\nu+1} = \psi_{ij}^{\nu} + \frac{1+\upsilon}{4}\left[\psi_{i+1,j}^{\nu} + \psi_{i-1,j}^{\nu+1} + \psi_{i,j+1}^{\nu+1} + \psi_{i,j-1}^{\nu} - 4\psi_{ij}^{\nu} + \sigma_{ij}\right] \tag{A.10}$$

donde el coeficiente de sobrerrelajación υ esta dado por la- fórmula

$$\upsilon = 1 - \sqrt{2}\ \sqrt{\left(\frac{\pi}{p-1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{q-1}\right)^2} \tag{A.11}$$

donde p = 35 y q = 27, son el número de puntos de la malla en- x , y. (ver K. Miyakoda, 1962, pp. 96-101.)

APENDICE B

1. PROGRAMA DE COMPUTO.

```
       PROG. HECHO POR EUGENIO DEL VALLE Y LUIS DIAZ *
       $RESET LIST
       FILE  5=LATI,UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=30
       FILE  7=GRANI,UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=30
       FILE  6=NOMBRE,UNIT=PRINTER,RECORD=22
             DIMENSION AAMBR(27,35),XANG(27,35),DIF(27,35),DGFGSI(27,35),
            *DOSLAP(27,35),PACO(27,35),PACO2(27,35),PTC(27,35)
            *,SI(27,35),SI2(27,35),SIGMA(27,35),VEME(27,35),VEZO(27,35)
            *,XLAT(945),PPTC(945),XMAP(27,35),GG(35,27),ZZ(27,35)
            *,XLAPSI(27,35),GFGSI(27,35),XJAC(27,35)
            *,SIGMA2(27,35),DIF2(27,35),PTC2(27,35),PTC3(27,35)
             DATA PEGA/7.292115432 E-05/,PODI/219550.0/,PARE/1.7848828/,
            *REL/4.0E+05/,PEG/2.56 E-05/,RE/3125/,RE2/.5/
             READ(7,198)(PPTC(J),J=1,945)
       198    FORMAT (13(I3,1X))
             READ(5,199)(XLAT(J),J=1,945)
        199   FORMAT(13(F5.2))
        197   FORMAT(4(1PE15.4,1X))
             DO 555 I=1,27
             DO 555 J=1,35
             XANG(I,J)=XLAT(35*(I-1)+J)
             XANG(I,J)=XANG(I,J)*.01745
             PTC(I,J)=5000.0+PPTC(35*(I-1)+J)
       555     CONTINUE
             WRITE(6,930)
        930  FORMAT(5X,"ESTE PROGRAMA ES DER251")
             WRITE(6,931)
             WRITE(6,297)((PTC(I,J),J=1,35),I=1,27)
             DO 3 I=1,27
             DO 3 J=1,35
```

```
      PACO(I,J)=2.*PEGA*SIN(XANG(I,J))
    3 CONTINUE
  931 FORMAT(5X,"USA MY CON FRONTERA VAR,SR,Y A 42G")
       XX=0.866
      DO 556 I=1,27
      DO 556 J=1,35
      XMAP(I,J)=(0.5/SIN(XANG(I,J)))*((SIN(0.5*XANG(I,J))/
     *            COS(0.5*XANG(I,J)))/0.2679)**XX
  556  CONTINUE
       CALL SUAVIZ(PTC,27,35,1)
      CALL ORDENA(27,35,GG,PTC)
      CALL AUTASI(27,35,DIIF,XMIN,PTC,XXMAX)
      CALL MAPA(GG,XMIN,DIIF,145,127)
      DO 9 I=2,26
      DO 9 J=2,34
      DOSLAP(I,J)=(PTC(I,J+1)+PTC(I,J-1)+PTC(I+1,J)+PTC(I-1,J)
     *-4.*PTC(I,J))*(PODI*PODI)*2.0/(XMAP(I,J)*XMAP(I,J))
    9 CONTINUE
      DO 9999 I=2,26
      DO 9999 J=2,34
      PACO2(I,J)=(PACO(I,J)*PACO(I,J)*PODI*PODI*PODI*PODI)
     */(XMAP(I,J)*XMAP(I,J)*XMAP(I,J)*XMAP(I,J))
 9999 CONTINUE
      DO 3333 I=1,27
      DO 3333 J=1,35
       SI(I,J)=PTC(I,J)/PEGA
 3333 CONTINUE
      CALL ORDENA(27,35,GG,SI)
      CALL AUTASI(27,35,DIIF,XMIN,SI,XXMAX)
      CALL MAPA(GG,XMIN,DIIF,145,127)
      WRITE(6,197)((SI(I,J),J=1,35),I=1,27)
   13 L=L+1
      REL=0.5*REL
      CALL SIG(SI,PACO,PACO2,DOSLAP,XMAP,SIGMA,L)
```

```
          CALL RELAX(SI,SI2,SIGMA,REL,M,CERO)
          WRITE(6,777) M,REL
  777     FORMAT(19X,"NUMERO DE ITER=",I3,10X,"REL=",F10.2)
          DO 15 I=1,27
          DO 15 J=1,35
   15     SI(I,J)=SI2(I,J)
          IF (REL .LE. RE) GO TO 99
          IF (L .LE. 7) GO TO 13
   99     IF (L .EQ. 9) GO TO 13
          CALL ORDENA(27,35,GG,SI)
          CALL AUTASI(27,35,DIIF,XMIN,SI,XXMAX)
          CALL MAPA(GG,XMIN,DIIF,145,127)
          WRITE(6,197)((SI(I,J),J=1,35),I=1,27)
          DO 101 I=2,26
          DO 101 J=2,34
          XLAPSI(I,J)=PACO(I,J)*(SI(I+1,J)+SI(I-1,J)+SI(I,J+1)+SI(I,J-1)-
         *4.*SI(I,J))
          GFGSI(I,J)=((PACO(I,J+1)-PACO(I,J))*(SI(I,J+1)-SI(I,J))+
         *(PACO(I-1,J)-PACO(I,J))*(SI(I-1,J)-SI(I,J))+(PACO(I,J-1)-
         *PACO(I,J))*(SI(I,J-1)-SI(I,J))+(PACO(I+1,J)-PACO(I,J))*
         *(SI(I+1,J)-SI(I,J)))
          XJAC(I,J)=((2.*(SI(I-1,J)-SI(I+1,J))*(SI(I-1,J)-SI(I+1,J))+2.*
         *(SI(I,J+1)-SI(I,J-1))*(SI(I,J+1)-SI(I,J-1))-(SI(I-1,J+1)-
         *SI(I-1,J-1))*(SI(I-1,J+1)-SI(I-1,J-1))-(SI(I-1,J-1)-SI(I+1,J-1))*
         *(SI(I-1,J-1)-SI(I+1,J-1))-(SI(I+1,J-1)-SI(I+1,J+1))*(SI(I+1,J-1)-
         *SI(
         *I+1,J+1))-(SI(I+1,J+1)-SI(I-1,J+1))*(SI(I+1,J+1)-SI(I-1,J+1)))/
         *(8.*PODI*PODI))+(((SI(I,J+1)-SI(I,J))*(SI(I-1,J+1)+
         *SI(I+1,J+1)-2.*SI(I,J+1))+(SI(I-1,J)-SI(I,J))*(SI(I-1,J+1)+
         *SI(I-1,J-1)-2.*SI(I-1,J))+(SI(I,J-1)-SI(I,J))*(SI(I-1,J-1)+
         *SI(I+1,J-1)-2.*SI(I,J-1))+(SI(I+1,J)-SI(I,J))*(SI(I+1,J-1)+
         *SI(I+1,J+1)-2.*SI(I+1,J))+(SI(I,J+1)+SI(I,J-1)-2.*SI(I,J))*
         *(SI(I-1,J)+SI(I+1,J)-2.*SI(I,J)))/(2.*PODI*PODI))
          XJAC(I,J)=XMAP(I,J)*XMAP(I,J)*XJAC(I,J)
```

```
          SIGMA2(I,J)=XLAPSI(I,J)+GFGSI(I,J)+XJAC(I,J)
    101   CONTINUE
          DO 103 I=1,27
          DO 103 J=1,35
    103   PTC2(I,J)=PEGA*SI(I,J)
          WRITE(6,297)((PTC2(I,J),J=1,35),I=1,27)
    111   M=M+1
          CERO=0.0
          DO 102 I=1,27,26
          DO 102 J=1,35
    102   PTC3(I,J)=PEGA*SI(I,J)
          DO 104 I=2,26
          DO 104 J=1,35,34
    104   PTC3(I,J)=PEGA*SI(I,J)
          DO 105 I=2,26
          DO 105 J=2,34
          PTC3(I,J)=PTC2(I,J)+(1.0/4.)*(PTC2(I,J+1)+PTC2(I+1,J)+
         *PTC2(I,J-1)+PTC2(I-1,J)-(4.*PTC2(I,J))-SIGMA2(I,J))
          DIF2(I,J)=ABS(PTC3(I,J)-PTC2(I,J))
          ERROR2= AMAX1(CERO,DIF2(I,J))
          CERO=ERROR2
    105   CONTINUE
          DO 121 I=1,27
          DO 121 J=1,35
          PTC2(I,J)=PTC3(I,J)
    121   CONTINUE
          IF (CERO .LE. KE2) GO TO 109
          IF (M .LE. 1000) GO TO 111
    109   IF (M .EQ. 1001) GO TO 18
          WRITE(6,113) M
    113   FORMAT(19X, "NUMERO DE ITER" ,2X,I4)
    297    FORMAT(5(1PE15.4,1X))
          DO 115 I=1,35
          DO 115 J=1,27
```

```
 115  GG(I,J)=0.0
      CALL ORDENA(27,35,GG,PTC2)
      CALL AUTASI(27,35,DIIF,XMIN,PTC2,XXMAX)
      CALL MAPA(GG,XMIN,DIIF,145,127)
      WRITE(6,222)((PTC2(I,J),J=1,35),I=1,27)
  18  STOP
      END
                SUBROUTINE  ORDENA (N,M,TZ,Z)
           DIMENSION  TZ(35,27), Z(27,35)
          K=N+1
        DO 80  I=1,M
        DO 80  J=1,N
  80              TZ(I,J) = Z(K-J,I)
        RETURN
        END
                SUBROUTINE  SUAVIZ (Z,NI,NJ,M)
           DIMENSION  Z(27,35), ZZ(27,35)
          DO 30 L=1,M
          S = 0.5
        DO 10 K=1,2
          DO 1  I = 2,NI-1
          DO 1  J = 2,NJ-1
    1     ZZ(I,J) = Z(I,J)+(.5*S*(1-S)*(Z(I+1,J)+Z(I-1,J)+Z(I,J+1)+
     *               Z(I,J-1)-4.0*Z(I,J))+0.25*S*S*(Z(I+1,J+1)+Z(I-1,J+1)
     *               Z(I-1,J-1)+Z(I+1,J-1)-4.0*Z(I,J))
          DO 2  I = 2,NI-1
          DO 2  J = 2,NJ-1
    2     Z(I,J) = ZZ(I,J)
   10  S =-1.5
  30     CONTINUE
        RETURN
        END
                 SUBROUTINE  MAPA (Z,BASE,CINT,NL,NC)
           DIMENSION  Z(35,27),SIMB (20),V(130)
```

```
      DATA SIMB/"A","B","C","D","E","F","G","H","I","J","K","L","M",
     *          "N","O","P","Q","R","S","T"/
      DATA  CRUZ, ASTER/ "+","*"/
      DATA  BLK, GUION/ " ","_"/
      NLM1 = NL-1
      NCM1 = NC-1
      CINT2= 2.0*CINT
      R17 = 26.0/NCM1
      R34 = 34.0/NLM1
      WRITE (6,100)
  100 FORMAT(11X,"COTAS DE LOS SIMBOLOS",/,7X,"SIMBOLO",7X,"INFERIOR",
     *  4X,"SUPERIOR",//)
      DO 1 K=1,20
      CONTI = BASE + 2.0*CINT*(K-1)
      CONTS = CONTI + CINT
      WRITE (6,101) SIMB(K),CONTI,CONTS
  101 FORMAT (10X,A1,6X,2F17.4)
    1 CONTINUE
      WRITE (6,102)
  102 FORMAT (" ",////,1X,"2",128X,"16")
      DO 2 J=2,NCM1
      V(J) = GUION
    2 CONTINUE
      WRITE (6,103)  (V(J),J=2,NCM1)
      DO 10  LINEA = 2,NLM1
      RI = 1.0 + (LINEA - 1 ) * R34
       I = IFIX (RI)
       X = RI - FLOAT (I)
      J130W = IFIX (5.395527 * (LINEA - 2) * (4.225/2.5384) + 0.5 )
      DO 11  JCAR = 2,NCM1
          RJ = 1.0 + (JCAR-1)* R17
           J = IFIX (RJ)
           Y = RJ - FLOAT (J)
          A1 = Z (I,J)
```

```
             A2 = Z (I+1,J) - A1
             A3 = Z (I,J+1) - A1
             A4 = Z (I+1,J+1) - A1 - A2 - A3
            ZINT = A1 + A2 * X + (A3+A4*X) * Y
          V(JCAR) = BLK
           DO  12  K=1,20
           CONTI = BASE + (K-1) * CINT2
           CONTS = CONTI + CINT
              IF ( ZINT.LE.CONTI.OR.ZINT.GT.CONTS)  GO TO 12
          V(JCAR) = SIMB (K)
      12   CONTINUE
              IF (JCAR.EQ.J130W)  V(JCAR) = CRUZ
      11   CONTINUE
           WRITE (6,103) (V(J),J=2,NCM1)
     103   FORMAT (1X, "I",125A1,"I")
      10   CONTINUE
           DO 19  J= 2,NCM1
           V(J) = GUION
      19   CONTINUE
           WRITE (6,103)  (V(J), J=2,NCM1)
           RETURN
           END
              SUBROUTINE AUTASI(N,M,DIF,WW,XVAR,XMAX)
              DIMENSION XVAR(N,M)
              VV=XVAR(1,1)
              WW=XVAR(1,1)
              DO 1 I=1,N
              DO 1 J=1,M
              XMAX=AMAX1(VV,XVAR(I,J))
              XMIN=AMIN1(WW,XVAR(I,J))
              VV=XMAX
              WW=XMIN
       1      CONTINUE
              DIF=(VV-WW)/39.0
```

```
                  RETURN
                  END
            SUBROUTINE SIG(SI,PACO,PACO2,DOSLAP,XMAP,SIGMA,L)
            DIMENSION SI(27,35),PACO(27,35),PACO2(27,35),DOSLAP(27,35)
           *,AAMB3(27,35),DGFGSI(27,35),XMAP(27,35),SIGMA(27,35),PACO1(27,35)
            DATA PEGA/7.292115432 E-5/,PODI/219550.0/
            DO 222 I=2,26
            DO 222 J=2,34
            DGFGSI(I,J)=((PACO(I,J+1)-PACO(I,J))*(SI(I,J+1)-SI(I,J))+
           *(PACO(I-1,J)-PACO(I,J))*(SI(I-1,J)-SI(I,J))+(PACO(I,J-1)-
           *PACO(I,J))*(SI(I,J-1)-SI(I,J))+(PACO(I+1,J)-PACO(I,J))*
           *(SI(I+1,J)-SI(I,J))) *PODI*PODI
            DGFGSI(I,J)=DGFGSI(I,J)/(XMAP(I,J)*XMAP(I,J))
       222  CONTINUE
            DO 10 I=2,26
            DO 10 J=2,34
            AAMB3(I,J)=(SI(I,J+1)+SI(I,J-1)-2.*SI(I,J))*(SI(I,J+1)+SI(I,
           *J-1)-2.*SI(I,J))+(SI(I-1,J)+SI(I+1,J)-2.*SI(I,J))*(SI(I-1,J)+
           *SI(I+1,J)-2.*SI(I,J))-(SI(I,J+1)-SI(I,J))*(SI(I-1,J+1)+SI(I+1,
           *J+1)-2.*SI(I,J+1))-(SI(I-1,J)-SI(I,J))*(SI(I-1,J-1)+SI(I-1,J+1)
           *-2.*SI(I-1,J))-(SI(I,J-1)-SI(I,J))*(SI(I-1,J-1)+SI(I+1,J-1)-2.*
           *SI(I,J-1))-(SI(I+1,J)-SI(I,J))*(SI(I+1,J-1)+SI(I+1,J+1)-2.*
           *SI(I+1,J))+(1./4.)*((SI(I-1,J+1)-SI(I+1,J+1))*(SI(I-1,J+1)-
           *SI(I+1,
           *J+1))+(SI(I-1,J-1)-SI(I-1,J+1))*(SI(I-1,J-1)-SI(I-1,J+1))
           *+(SI(I+1,J-1)-SI(I-1,J-1))*(SI(I+1,J-1)-SI(I-1,J-1))+(SI(I+1,J+1)-
           *SI(I+1,J-1))*(SI(I+1,J+1)-SI(I+1,J-1)))-(1./2.)*((SI(I-1,J)-SI(I+1
           *,J))
           **(SI(I-1,J)-SI(I+1,J))+(SI(I,J-1)-SI(I,J+1))*(SI(I,J-1)-SI(I,J+1))
           *)
            IF(L.EQ.1) AAMB3(I,J)=.5*AAMB3(I,J)
            PACO1(I,J)=(PACO(I,J)*PODI*PODI)/(XMAP(I,J)*XMAP(I,J))
       10   CONTINUE
            DO 33 I=2,26
```

```
      DO 33 J=2,34
      IF(L.GE.1.AND.(DOSLAP(I,J)+PACO2(I,J)-DGFGSI(I,J)).LT.0)DOSLAP(I,J
     *)=DGFGSI(I,J)-PACO2(I,J)
      SIGMA(I,J)=(-PACO1(I,J)+SQRT(PACO2(I,J)+AANBB(I,J)-DGFGSI(I,J)+
     *DOSLAP(I,J)))
   33 CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE RELAX(W,SI2,SIGMA,REL,M,CERO)
      DIMENSION W(27,35),SI2(27,35),SIGMA(27,35),WW(27,35)
     *,DIF(27,35),RESI(27,35)
      DATA PEG/9.56 E-05/,XL/3125/,PARE/1.785/
      DO 6 I=1,27
      DO 6 J=1,35
      WW(I,J)=W(I,J)
    6 CONTINUE
      M=0
    9 M=M+1
      CERO=0.0
      DO 14 I=2,26
      DO 14 J=2,34
      RESI(I,J)=.25*(WW(I,J+1)+WW(I+1,J)+WW(I,J-1)+WW(I-1,J)-(4.*WW
     *(I,J))-SIGMA(I,J))
      RESI(I,J)=PARE*RESI(I,J)
      WW(I,J)=WW(I,J)+RESI(I,J)
      DIF(I,J)=ABS(RESI(I,J))
      ERROR=AMAX1(CERO,DIF(I,J))
      CERO=ERROR
   14 CONTINUE
      IF(CERO .GT. REL) GO TO 9
      DO 10 I=1,27
      DO 10 J=1,35
   10 SI2(I,J)=WW(I,J)
      RETURN
      END
```

* Las subroutinas: ORDENA, AUTASI, MAPA, SUAVIZ, que en el programa son utilizadas para suavizar el campo inicial y para ejecutar los mapas, fueron desarrolladas originalmente por R. Revilla D. y T. Morales Acoltzi.

BIBLIOGRAFIA

'Arnason, G., 1957: A convergent method for solving the balance equation. Tech. Rep., Joint Numerical Weather Prediction Unit, Suitland, Md.

Asselin, R., 1967: The operational solution of balance equation. Tellus 19, 24-31.

Bijlsma, S. J., and Hoogendoorn, R. J., 1983: A convergence analysis of a numerical method for solving the balance equation. Mon. Wea. Rev., 111, 997-1001.

Bolin, B., 1955: Numerical forecastin with the barotropic model. Tellus, 7 27-49.

Courant, R., and D. Hilbert, 1962: Methods of Mathematical Physics, Vol. II. Interscience Publishers, 322-325.

Charney, J. G., 1955: The use of the primitive equations of motion in numerical prediction. Tellus, 7 22-26.

Gronas, S., and Lystad M., 1977: Solutions of the balance equation with minimun correction of the mass field. Tellus 29 502-511.

Haltiner, J. G. and R. T. Williams, 1980: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology, J. Wiley and Sons, 477 pp.

Holton, J. R., 1979: An Introduction to Dynamic Meteorology, - (Second Edition), Academic Press, 391 pp.

Iversen, T., and Nordeng T. E., 1982: A convergent method for- solving the balance equation. Mon. Wea. Rev., 110, 1347-- 1353.

Kasahara, A., 1982: Significance of non-elliptic regions in ba lance flows of the tropical atmosphere. Mon. Wea. Rev., - 110, 1956-1967.

Miyakoda, K., 1956: On a method of solving the balance equa--- tion. J. Meteor. Soc. Japan, 34, 364-367.

Miyakoda, K., 1960: Numerical solution of the balance equation Tech. Rep. Japan Meteorological Agency, 3, 15-43.

Miyakoda, K., 1962: Contribution to the numerical weather pre- diction -computation with finite diference-, Jap. Journal of Geophysics, 3, pp. 96-101.

Paegle, J., and J. N. Paegle, 1974: An efficient and accurate- aproximation to the balance wind with application to non- elliptic data. Mon. Wea. Rev., 102, 838-846.

Paegle, J., and E. M. Tomlinson., 1975: Solution of the balan- ce equation by Fourier transform and Gauss elimination. - Mon. Wea. Rev., 103, 528-535.

Petterssen, S., 1953: On the relation between vorticity, defor mation and divergence and the configuration of the pressu re field. Tellus, 5, 231-238.

Shuman, F. G., 1957: Numerical methods in weather prediction: I The balance equation. Mon. Wea. Rev., 85, 329-332.