

2^{er}
3



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

**EFFECTOS DE POLARIZACION EN
ELECTRODINAMICA CUANTICA**

T E S I S

Que para obtener el título de:

F I S I C O

P r e s e n t a :

FERNANDO ALEJANDRO BARRIOS ALVAREZ



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

<u>INTRODUCCION</u>	1.1
<u>CAPITULO II</u>	
II.I ESPACIO MOMENTAL Y ESPACIO FASE	II.1
II.II REACCION DE DOS PARTICULAS EN EL ESTADO INICIAL Y TRES EN EL ESTADO FINAL	II.3
II.III INTEGRAL DEL ESPACIO FASE EN BREMSSTRAHLUNG	II.5
II.IV JUSTIFICACION TEORICA DEL USO DE LA SUBROUTINA PHSP	II.9
<u>CAPITULO III</u>	
III.I CAMPO DE RADIACION	III.1
III.II BREMSSTRAHLUNG	III.4
III.III ELEMENTO DE MATRIZ DE DISPERSION	III.6
III.IV CALCULO DEL ELEMENTO DE MATRIZ	III.8
<u>CAPITULO IV</u>	
IV.I USO DE LA SUBROUTINA PHSP	IV.1
IV.II POLARIZACION "n" y "s" DEL FOTON	IV.2
IV.III DISTRIBUCION ANGULAR DE LOS ESTADOS FINALES	IV.3
IV.IV CATASTROFE INFRARROJA	IV.5
IV.V CONCLUSIONES	IV.7
<u>HISTOGRAMAS</u>	IV.10
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	B.1

Introducción

Las leyes de la Electrodinámica Clásica establecen que una carga eléctrica acelerada emite radiación electromagnética, es decir luz. Esto explica que cuando un electrón incide en el campo eléctrico de un núcleo y siente una fuerza que se traduce en una aceleración, el electrón emite radiación electromagnética, este efecto de "frenado" se conoce con el nombre de Bremsstrahlung.

El efecto descrito en el párrafo anterior puede ser estudiado en forma cuántica, en ese caso se habla de fotones emitidos por un electrón que interactúa con el campo del núcleo. Entonces las leyes que describen el fenómeno son las de la Electrodinámica Cuántica.

Esta sección se obtiene a partir de un cálculo no trivial, con polarización del fotón emitido y sumando a todos los estados de espín finales y promediando a los estados de espín iniciales del electrón.

introducción I.2.

A pesar de existir numerosos cálculos de la sección diferencial de Bremsstrahlung anteriores a este trabajo Bethe (3), Koch (16), además de aparecer en numerosos libros de texto Bjorken (5), Feynman (11), Heitler (14), hasta ahora no se ha encontrado un trabajo que calcule la sección diferencial con polarización en el fotón. Los trabajos mencionados se concretan a calcular las secciones diferenciales completas, es decir, promediadas al espín de la partícula como a polarización en el fotón.

Uno de los motivos por el que se hizo este cálculo es que en la actualidad se sabe que en la colisión de un electrón con un positrón, se observan "chorros" de partículas (Figura I.1(a)), esto se explica diciendo que la reacción $e e$ produce un quark y antiquark los cuales a su vez producen dos "chorros" de partículas, pero experimentalmente la presencia de tres "chorros" ha hecho pensar a los expertos en el campo, que esto se debe a una especie de efecto de Bremsstrahlung, sólo que en este caso con quarks y gluones.



FIGURA I.1. Colisión $e e$ a) con producción de dos "chorros" de partículas. b) con producción de tres "chorros".

Este trabajo es un primer paso de una serie de ideas que ayuden a la comprensión de reacciones leptónicas complejas como la colisión e^+e^- . Esto es, con base en teorías que se conocen bien, como es la Electrodinámica Cuántica (QED), hacer distintos cálculos -como el del presente trabajo- que después contribuyan en la comprensión de fenómenos que son descritos por teorías más complejas como la Cromodinámica Cuántica (QCD).

En esta tesis se calculan dos diagramas de Feynman de Bremsstrahlung (Figura I.II). Si el diagrama presentado en la Figura I.II (a) se expresa como se muestra en la Figura I.II(a) substituyendo después del potencial A_μ de carácter general por el potencial de una desintegración e^+e^- como se muestra en la Figura I.III.(b).

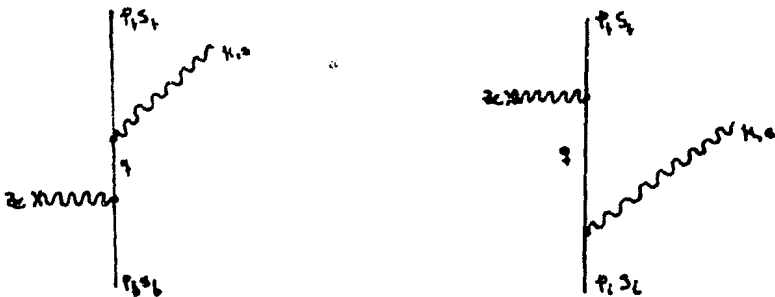


FIGURA I.II. Diagramas de Feynman para BREMSSTRAHLUNG, a orden más bajo y no nulo (aproximación de Born).

Y si finalmente se identifican las líneas 1,2 y 3 de la Figura I.III. (b) con quark, antiquark y gluón se observará que es el diagrama de la colisión e^+e^- con producción de tres "chorros". Se ha querido enfocar lo anterior de esta manera, porque en un cálculo más general hecho por Moreno (17), se pueden sustituir los potenciales antes mencionados en la fórmula de la sección diferencial.

Así, un conocimiento del comportamiento del Bremsstrahlung puede ser de gran ayuda conforme se avance en el estudio de reacciones leptónicas a altas energías.

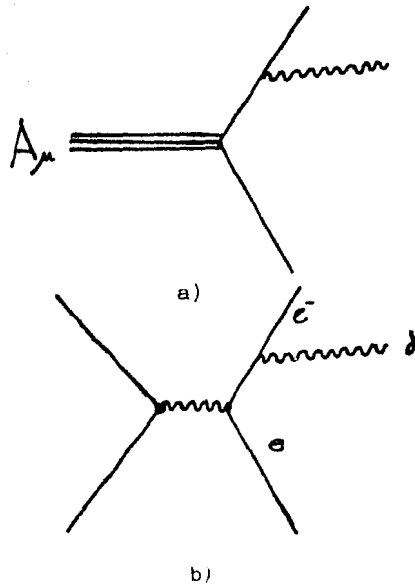


FIGURA I.III. Diagrama alternativo para representar el diagrama de Feynman de la FIGURA I.II.a. b) Diagrama de Feynman para A_μ substituido por una colisión e^+e^- en la figura a.

Otra aplicación posible de una fórmula general de Bremsstrahlung se encuentra en el decaimiento del Z^0 , Arnison (1), Banner (2), con el fin de dar una explicación al número de efectos anómalos -con emisión de un fotón-, ya que de aproximadamente 16 eventos observados hasta la actualidad, 4 tienen emisión de un fotón siendo que se esperaba menos de un 5% de estos efectos anómalos por Bremsstrahlung.

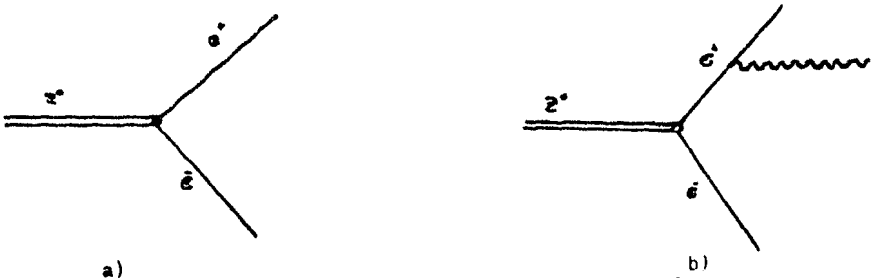


FIGURA I.IV. a) Decaimiento del Z^0 en par e^+e^-
 b) decaimiento anómalo del Z^0 en e^+e^- con emisión de un fotón.

La parte numérica de la sección diferencial hecha en este trabajo se basa en una subrutina que genera eventos en el espacio fase por método de Monte Carlo, escrito por B. Knapp, que se llama PHSP. Para hacer uso de PHSP fue necesario modificarla, de tal forma que se pudiese utilizar para calcular con el elemento de la matriz de dispersión que también se calculó en este trabajo. Estas modificaciones consistieron en optimizarla suprimiendo partes que no se usaron y sobre todo en cambiar la forma en la que se le dan las semillas para el generador de números casuales. Además de que fue necesario escribir dos subrutinas que hacen histogramas en escala decimal y logarítmica, llamadas HISESCA y LOGHIS, respectivamente. Esto último fue necesario ya que no se pudo hacer uso de las subrutinas de graficación del paquete de B. Knapp pues al parecer no se cuenta con la documentación básica necesaria.

La notación de esta tesis así como el desarrollo teórico, están basados fundamentalmente en el libro de Bjorken y Drell (5).

El Capítulo II está dividido en dos partes. La primera es un desarrollo del espacio fase de la reacción de dos partículas en el estado inicial y tres partículas en el estado final, obteniéndose expresiones teóricas para la integral del espacio fase de cada una de las partículas. En la segunda, a partir de fundamentos de cinemática relativista, usando la variable "s" de Mandelstam, se expresa la reacción de dos partículas como el decaimiento de una partícula virtual.

El elemento de matriz de dispersión para Bremsstrahlung, a orden más bajo, o sea en la aproximación de Born, se calcula en el Capítulo III, usando principalmente los teoremas de traza.

El Capítulo IV consta de la discusión de los resultados obtenidos en forma de histogramas que genera el programa BREMSS (cuya elaboración formó parte de esta tesis) y de las conclusiones generales obtenidas a partir de estos resultados.

Capítulo II

El objetivo de este trabajo es el cálculo de la sección diferencial de la radiación de frenado de un electrón en un campo coulombiano. En esta sección diferencial ocurre un factor cinemático llamado el término debido al espacio fase. En este capítulo se deriva una expresión para el espacio fase que ocurre en la sección diferencial y se deriva una expresión para una integral del espacio fase en el caso de que la masa del núcleo sea infinita.

II.1 ESPACIO MOMENTAL Y ESPACIO FASE

La discusión se iniciará considerando una reacción de dos partículas en el estado inicial y n partículas en el estado final, de la siguiente forma :

$$p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

que se puede representar en forma gráfica como se muestra en la figura II.1.

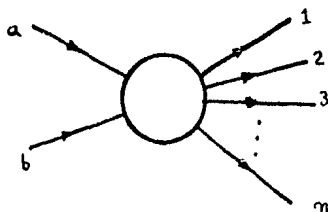


FIGURA II.1 Reacción de dos partículas en el estado inicial y n en el estado final.

En esta reacción se debe cumplir la conservación de cuadrimentos en los estados finales respecto de los estados iniciales, que se expresa en las siguientes ecuaciones :

$$E_a + E_b = \sum_{i=1}^n E_i \quad \text{II.2.a}$$

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \quad \text{II.2.b}$$

$$E_i^2 = p_i^2 + m_i^2 \quad \text{II.2.c}$$

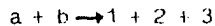
En las expresiones anteriores, el símbolo E_i es la energía de la partícula i , y m_i es la masa de la partícula i en reposo.

Para cada estado inicial dado los momentos de las partículas en el estado final p_i no pueden tomar valores arbitrarios, sino que deben cumplir las condiciones expresadas en (II.2).

El espacio de $3n$ dimensiones de los vectores p_i sin ninguna construcción se llama espacio momental y el espacio fase es el hipersuperficie de $3n - 4$ dimensiones que se obtiene de aplicar las constricciones dadas por (II.2) al espacio momental.

II.2 REACCION DE DOS PARTICULAS EN EL ESTADO INICIAL Y TRES EN EL ESTADO FINAL.

En el caso especial de una reacción de dos partículas en el estado inicial y tres en el estado final :



que se puede expresar gráficamente como se muestra en la figura II.II. La conservación de cuadrivectores se expresa mediante cuatro ecuaciones :

$$p_a + p_b = p_1 + p_2 + p_3 \quad \text{II.3}$$

y la relación entre masa y el momento de cada partícula se escribe como :

$$p_i^2 = m_i^2 \quad i = a, b, 1, 2, 3 \quad \text{II.4}$$

Las ecuaciones (II.3) y (II.4) son las condiciones que definen el espacio fase. De aquí se sigue que el espacio fase tiene $3n - 4$ dimensiones pues los momentos p_i son cuadrivectores. En el caso que se discute en

esta tesis $n = 3$ y el espacio fase tiene cinco dimensiones, por consiguiente para su descripción se requiere de cinco variables cinemáticas independientes.

Las cinco variables cinemáticas necesarias para describir el bremsstrahlung de un electrón en un campo coulombiano externo se muestran en el diagrama de la figura II.III.

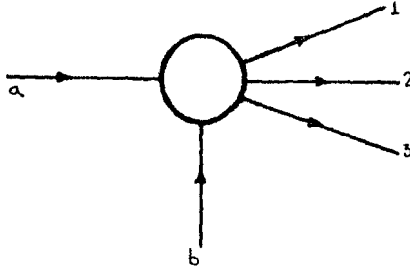


FIGURA II.II Representación gráfica de una reacción con dos partículas en el estado inicial y tres partículas en el estado final.

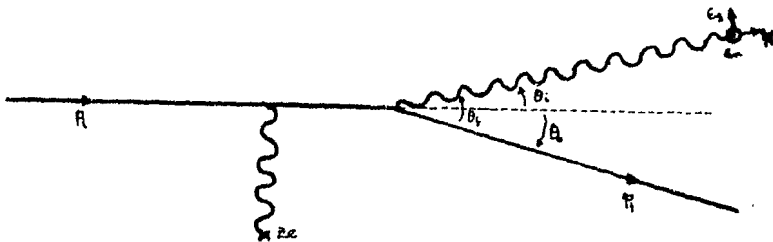


FIGURA II.III Las variables cinemáticas para describir el Bremsstrahlung son, el momento del electrón en su estado inicial p_i , el momento del electrón en su estado final, el momento del fotón emitido k , el ángulo de dispersión entre la dirección inicial del electrón y la dirección final de éste θ_e , el ángulo que forman la dirección final del electrón y la dirección de emisión del fotón θ_k , y el ángulo que forman la dirección de emisión del fotón y la dirección inicial del electrón θ . ϵ_i y ϵ_f denotan los dos estados de polarización del fotón.

integral del espacio fase en bremsstrahlung II.5.

II.3 INTEGRAL DEL ESPACIO FASE EN BREMSSTRAHLUNG.

Una expresión para la sección diferencial en términos de la amplitud $|M_{fi}|$, que es una invariante de Lorentz, se obtiene al elevar al cuadrado el elemento de matriz de dispersión, sumando sobre todos los estados finales posibles tanto del electrón como del fotón y dividiendo entre el flujo $|J_{inc}| = |\vec{v}_i|/V$, con V elemento de volumen a que están normalizadas las funciones de onda que describen a las partículas, finalmente se obtiene :

$$\frac{d\sigma_{fi}}{dx} = \frac{1}{|\vec{v}_i|} \int \prod_{i=1}^n \frac{m_i d^3 p_i}{E_i} \delta(p - \sum_i p_i) |M_{fi}|^2 \quad \text{II.5}$$

Quando se desea calcular la distribución de estados en el espacio fase se iguala el elemento de matriz $|M_{fi}|^2$ a uno, en la ecuación (II.5) y se calcula la integral, que se conoce como la integral del espacio fase.

En el caso de bremsstrahlung esta integral se reduce a :

$$PhSP_{fi} = \int \frac{m d^3 p_f}{(2\pi)^3 E_f} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} (2\pi)^4 \delta(p_i - k - p_f) \quad \text{II.6}$$

Usando la normalización convenida en el libro de Bjorken & Drell, la integral se simplifica a :

$$PhSP = (2\pi)^{-2} m_e \int \delta(E_i + \omega - E_f) \frac{d^3 k}{2\omega} \frac{d^3 p_f}{E_f} \quad \text{II.7}$$

si los elementos de volumen $d\vec{k}$ y $d\vec{p}_f$ se escriben en forma explícita, $d\vec{k} = k dk d\Omega_k$ y $d\vec{p}_f = p_f^2 dp_f d\Omega_f$, se obtiene :

$$PhSP = (2\pi)^{-2} \int \delta(E_i + \omega - E_f) \frac{k^2 dk d\Omega_k}{2\omega} \frac{p_f^2 dp_f d\Omega_f}{E_f}$$

ahora puede hacerse la integral sobre k y se obtiene :

$$PhSP = \frac{(2\pi)^{-2}}{2} \int (E_i - E_f) d\Omega_k |\vec{p}_f| dE_f d\Omega_f \quad \text{II.8}$$

integral del espacio fase en bremsstrahlung II.6

para hacer la integral se aprovechó la relación $w^2 = k^2$, tal que $kdk = wdw$ y la relación $p_f dp_f = |\vec{p}_f| dE_f$, y la de magnitud de momento del electrón en el estado final como :

$$|\vec{p}_f| = \sqrt{E_f^2 - m_f^2}$$

con lo que la integral del espacio fase se escribe de la siguiente forma :

$$PhS_p = \frac{(2\pi)^{-2}}{4} \int (E_i - E_f)(E_f^2 - m_f^2)^{1/2} dE_f d\Omega_k d\Omega_f,$$

ahora se integra sobre las variables angulares :

$$PhS_p = \frac{2(2\pi)^{-2}}{(2\pi)^{-2} 2} \int (E_i - E_f)(E_f^2 - m_f^2)^{1/2} dE_f$$

lo que permite expresar la integral del espacio fase como función de la energía del electrón en los estados inicial y final :

$$PhS_p = \int (E_i - E_f) \sqrt{E_f^2 - m_f^2} dE_f \quad II.9$$

la expresión que ocurre en (II.9) como integrando es la distribución de los estados finales del electrón en la energía para un estado inicial dado de energía E_i .

La integral del espacio fase se puede expresar en función de la energía del electrón en el estado inicial y de la energía del fotón emitido siguiendo un razonamiento similar al anterior partiendo de :

$$PhS_p = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2w} \frac{d^3p_f}{2E_f} \delta(E_i + w - E_f) \quad II.10$$

si se usa el hecho de que $E_f = E_i - w$ y $p_f = \sqrt{E_f^2 - m_f^2}$ y las mismas expresiones para las diferencias de volumen dk y dp_f se obtiene :

$$PhS_p = \int \sqrt{(E_i - w)^2 - m_f^2} w dw \quad II.11$$

El integrando de la expresión anterior (II.11) es la distribución de los estados del fotón emitido en la energía w para un estado inicial dado de la energía del fotón w .

El ángulo θ_{kf} entre el momento del electrón en el estado final y el fotón emitido es otra de las variables cinemáticas de interés para la descripción de la radiación de frenado. Por lo cual es conveniente calcular la distribución de los estados finales en el coseno de este ángulo. Esta distribución se obtiene a partir de la misma integral :

$$\int \frac{d^3k}{2w} \frac{d^3p_f}{2E_f} \delta(E_i + w - E_f)$$

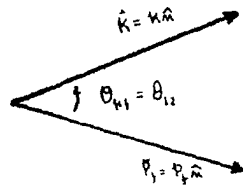


FIGURA II.IV El ángulo θ_{kf} puede ser representado en función de las diferenciales de ángulo sólido, haciendo un cambio de variable.

Haciendo un cambio de variable las diferenciales de ángulo sólido $d\Omega_w$ y $d\Omega_f$ se pueden expresar en función del coseno del ángulo θ_{kf} entre el momento del electrón en el estado final y el momento del fotón. Se introducen los vectores \hat{n}_1 y \hat{n}_2 de magnitud unidad y que sean paralelos a \vec{p}_f y \vec{k} respectivamente, entonces el ángulo θ_{kf} , que se muestra en la figura (II.IV) es igual al ángulo entre \hat{n}_1 y \hat{n}_2 como se indica en la

misma figura. Las componentes cartesianas de estos vectores se pueden escribir en función de las coordenadas polares esféricas de cada uno de ellos como :

$$\begin{aligned} \hat{n}_1 &= (\text{SEN } \theta_1 \cos \varphi_1, \text{ SEN } \varphi_1 \text{ SEN } \theta_1, \cos \theta_1) \\ \hat{n}_2 &= (\text{SEN } \theta_2 \cos \varphi_2, \text{ SEN } \varphi_2 \text{ SEN } \theta_2, \cos \theta_2) \end{aligned} \quad \text{II.12}$$

a partir de estas relaciones y usando la notación $x_1 = \cos \theta_1$ y $x_2 = \cos \theta_2$ se obtiene la expresión :

$$\cos \theta_{12} = \sqrt{1-x_1^2} \sqrt{1-x_2^2} (\cos(\varphi_2 - \varphi_1)) + x_1 x_2 \quad \text{II.13}$$

ya que $\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 = |\hat{n}_1| |\hat{n}_2| \cos \theta_{12} = \cos \theta_{12}$.

$$\begin{aligned} \text{Por otro lado } d\Omega_1 d\Omega_2 &= d\cos \theta_1 d\varphi_1 d\cos \theta_2 d\varphi_2 \\ &= (\text{cte}) dx_1 dx_2 d(\varphi_1 - \varphi_2) d(\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

se hace el siguiente cambio de variables :

$$\begin{array}{ll} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \\ x_3 = \Phi & \cos \theta_{12} = u \end{array}$$

con $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$. Conviene notar que el jacobiano de la transformación es :

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \frac{\partial u}{\partial \Phi} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial \Phi} \\ J = \frac{\partial u}{\partial \Phi} &= \sqrt{1-x_1^2} \sqrt{1-x_2^2} \text{ sen } \Phi \end{aligned} \quad \text{II.14}$$

lo que finalmente da :

$$d\Omega_1 d\Omega_2 = (\text{cte}) \frac{dx_1 dx_2 du}{J}$$

El término sen que aparece en (II.14) se expresa también en función de x_1 , x_2 y u . Haciendo uso de la relación (II.13) se obtiene :

$$\cos \Phi = \frac{u - x_1 x_2}{\sqrt{1-x_1^2} \sqrt{1-x_2^2}}$$

de la expresión anterior se tiene :

$$\text{SEN } \Phi = \sqrt{1 - \cos^2 \Phi}$$

Y la expresión para el jacobiano queda como :

$$J = \sqrt{1-x_1^2} \sqrt{1-x_2^2} \sqrt{1 - \frac{(u - x_1 x_2)^2}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}} \quad \text{II.15}$$

lo que permite llegar a la expresión buscada para las diferenciales de ángulo sólido en función del coseno entre k y p_f .

$$d\Omega_1 d\Omega_k = \frac{dx_1 dx_2 d\cos \theta_{k1}}{\sqrt{1-x_1^2} \sqrt{1-x_2^2} \sqrt{1 - \frac{(\cos \theta_{k1} - x_1 x_2)^2}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}} \quad \text{II.16}$$

Todas las variables que ocurren en (II.16) están definidas entre menos uno y uno.

Las integrales (II.9), (II.11) y (II.16) fueron calculadas por métodos numéricos, dando como resultado las distribuciones de estados finales en la energía para un estado inicial dado de la energía del electrón en su estado inicial, como las que se muestran en las figuras (II.V), (II.VI) y (II.VII).

Las integrales (II.9), (II.11) y (II.16) fueron calculadas teóricamente para ser comparadas con las obtenidas usando la subrutina PHSP de B. Knapp.

II.4 JUSTIFICACION TEORICA DEL USO DE LA SUBROUTINA PHSP

La subrutina PHSP de B. Knapp, genera un evento en el espacio fase usando métodos de simulación del tipo Monte Carlo. Posteriormente este evento, que es generado en el sistema de coordenadas fijo en el C. M. por medio de la subrutina BOOST se transforma al sistema de laboratorio, que es el sistema en que el blanco está en reposo inicialmente y en el caso ideal finalmente también. Los parámetros de entrada, para

la subrutina PHSP, son la masa de la partícula "padre", que decae, y el modo en que va a decaer, o sea las masas de las partículas en el estado final.

El caso que se analizará en este trabajo no es un decaimiento sino la producción de un fotón, sin embargo la subrutina PHSP se puede usar si se procede de la siguiente manera;

a) Se supone una partícula virtual de masa M_V que decae en el estado final del proceso que se está estudiando.

b) La masa M_V de la partícula virtual se obtiene como una variable de Mandelstam (s) a partir de los momentos del electrón y el núcleo en el estado inicial, este procedimiento se representa gráficamente en la figura II.IV

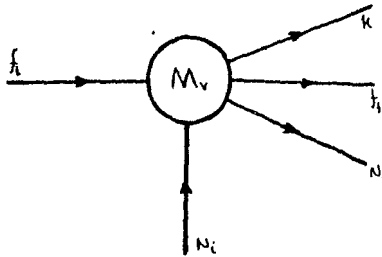
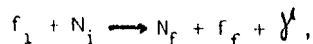


FIGURA II.V Representación gráfica de la reacción entre un fermión en el estado inicial f_i y un nucleón en el estado inicial N_i que dan origen a una partícula virtual M_V que decae en tres partículas un fotón k , un fermión f_f y un nucleón N_f .

La figura II.IV representa la reacción de un fermión y un nucleón en el estado inicial que dan lugar a un fermión un fotón y un nucleón en el estado final;



y se deben cumplir las siguientes condiciones;

$$f_i^2 = f_f^2 = m^2 \quad \text{masa del fermión en reposo al cuadrado}$$

$$N_i^2 = N_f^2 = M^2 \gg m^2 \quad \text{masa del nucleón al cuadrado, que idealmente tiende a infinito.}$$

Los cuadrinomientos, en el sistema del laboratorio del fermión y del nucleón en el estado inicial son;

$$r_i = (E_i , \vec{p}_i)$$

$$N_i = (M , \vec{0})$$

o sea que el nucleón está en reposo inicialmente. Se obtiene:

$$M_V^2 = s = (N_i + f_i)^2$$

$$s = (M + E_i)^2 - \vec{p}_i^2$$

$$s = M^2 + m^2 + 2MmE_i \quad \text{II.17}$$

se elige el eje OZ en el sistema de laboratorio, paralelo a P_i ;

$$\vec{p}_i = p_i \hat{k} \quad \text{con } p_i = \sqrt{E_i^2 - m^2} \quad , \quad \text{II.18}$$

se puede pensar que esta reacción es el decaimiento de una partícula virtual de masa $M_V = \sqrt{s}$ (ecuación II.17) en tres partículas. La partícula M_V está en reposo en el sistema de referencia fijo en el centro de momento,

$$f_i^* + N_i^* = p_V^* = (E_V^* , \hat{0})$$

$$= (\sqrt{s} , \hat{0}).$$

El momento de velocidad " BOOST", a , es la transformación del sistema localizado en el C.M. al sistema de laboratorio, y está definido por;

$$N_i + f_i = p_V = a p_V^* = a (N_i^* + f_i^*) .$$

Cuando se escriben las transformaciones de Lorentz de la siguiente manera;

$$\begin{aligned}t &= \gamma (t' - \beta z') \\z &= \gamma (-\beta t' + z') \\x &= x' \\y &= y'\end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

se obtiene para $p_v = ap_v^*$

$$\begin{pmatrix} M + E_i \\ p_i \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M + E_i \\ p_i \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix} \sqrt{s}$$

que resultan en;

$$M + E_i = \gamma \sqrt{s}$$

II.20

$$p_i = -\gamma \sqrt{s}$$

II.21

dividiendo la ecuación (II.21) entre la ecuación (II.20) se obtiene;

$$\begin{aligned}\frac{p_i}{M + E_i} &= -\beta \\ -\beta &= \frac{\sqrt{E_i^2 - m^2}}{M + E_i}\end{aligned}$$

II.22

haciendo uso de $p_i = \sqrt{E_i^2 - m^2}$.

Las expresiones (II.17), (II.18), (II.19) y (II.20) simplifican el uso de la subrutina PHSP y BOOST en el programa principal

llamado BREMSS, que se uso para hacer el cálculo de la integral del espacio fase. Este mismo programa BREMSS, escribe los histogramas de la distribución en la energía y el ángulo de dispersión en los estados finales, estos histogramas se muestran en el capítulo IV.

MISOTOPAMA DEL ESPACIO FASE DEL FOTON
 CALCULO TEORICO



FIGURA II.V INTEGRAL DEL ESPACIO FASE

grafica del espacio fase del caseno del anulo entre electron y el electron en su estado final.

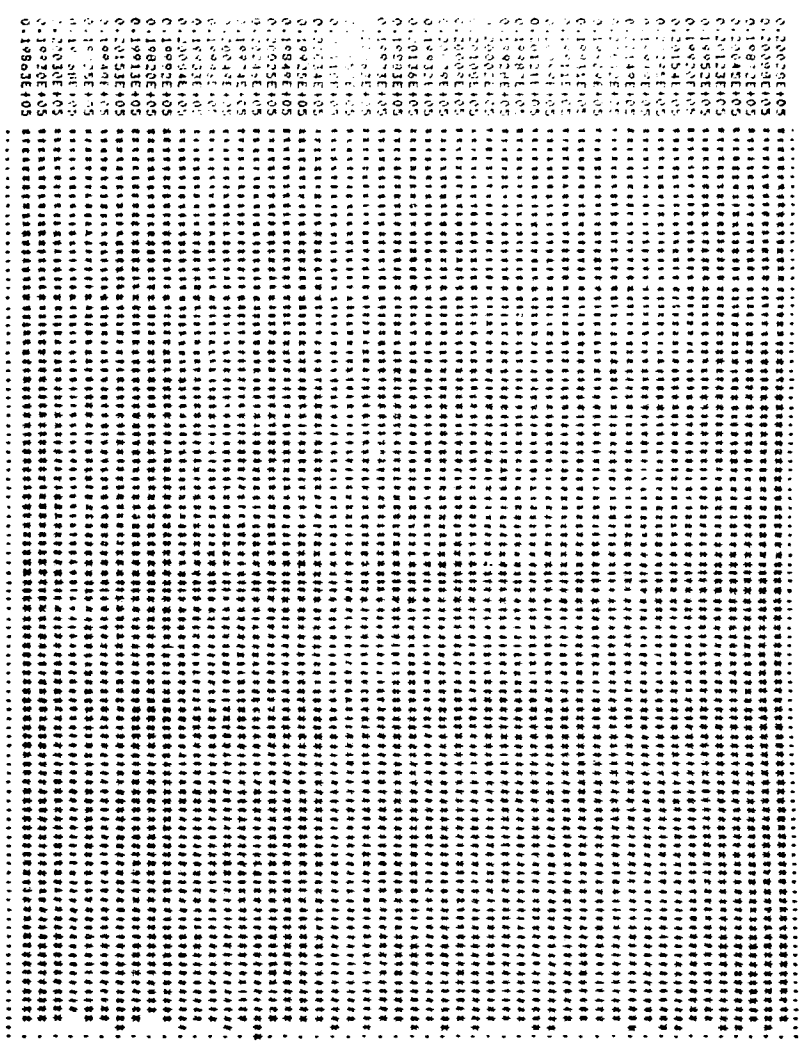


FIGURA I.VI Integral del espacio fase

HISTORAMA DEL ESPACIO FASE DEL FOTON
 CALCULO NUMERICO

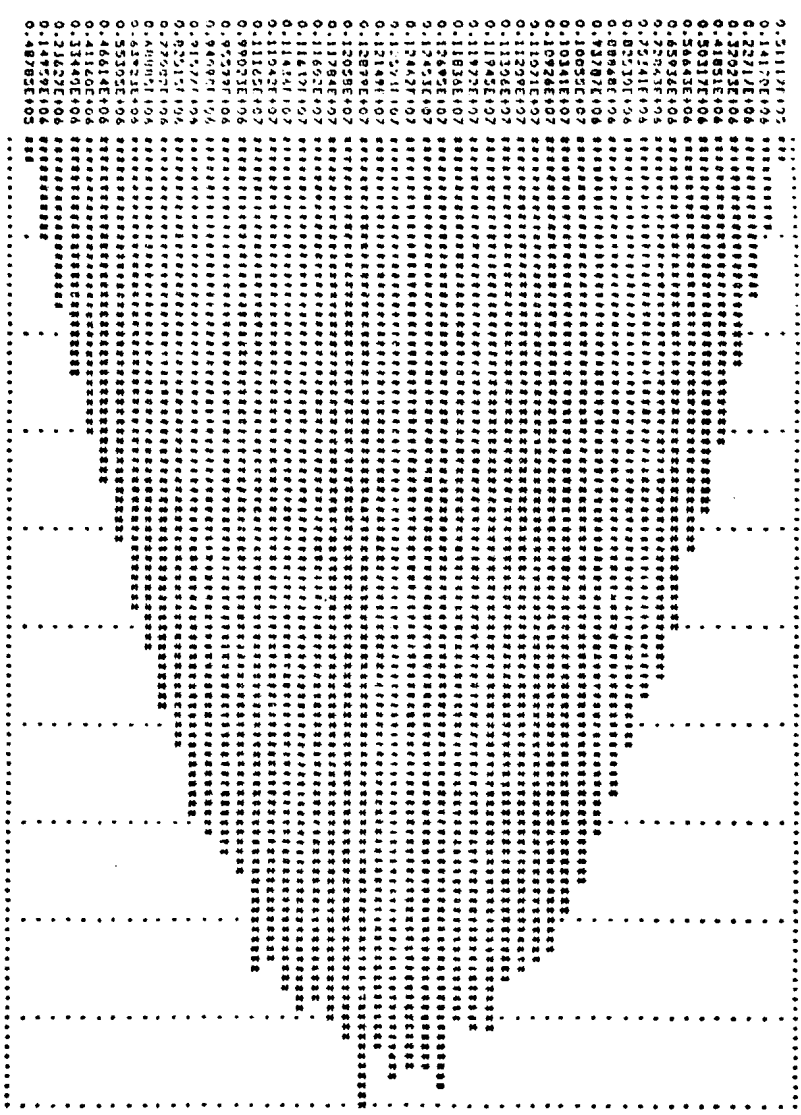


FIGURA II.VII Integral del espacio fase del fotón.

Capítulo III

En este capítulo se calcula el elemento de matriz de dispersión S_{ji} , para el proceso en que un electrón interactúa con el campo coulombiano de un núcleo y en el proceso emerge un cuanto de radiación libre o bremsstrahlung. Finalmente se llega a una expresión para la sección diferencial, la cual es una integral de cierto grado de complejidad, por lo que es calculada por métodos numéricos del tipo Monte Carlo cuyos resultados se discuten en el capítulo IV.

III.1 CAMPO DE RADIACION

En este estudio se hace una aproximación semiclassical de la interacción de una partícula con un campo de radiación en un proceso de dispersión, es decir, el campo de radiación de un fotón es descrito por las

ecuaciones de Maxwell, mientras que las partículas, en este caso electrones, se ven regidas por la ecuación de Dirac.

El fotón se puede describir por un potencial cuyo cuadrivector A_μ , sea una onda plana con cuadrimomento K_μ y polarización ϵ_μ , tal que :

$$A_\mu(x; k) = K \epsilon^\mu (e^{-ik_\nu x^\nu} + e^{ik_\nu x^\nu}) \quad \text{III.1}$$

K es una constante de normalización y el cuadrivector $K_\mu = (\omega, k_x, k_y, k_z)$ cumple con la condición $K_\mu K^\mu = 0$ que se obtiene al resolver las ecuaciones de Maxwell en el vacío.

$$\square^2 A_\mu = -4\pi j_\mu$$

En el vacío la densidad de corriente y de carga es cero, por lo tanto :

$$4\pi j_\mu = 0, \text{ así :}$$

$$\square^2 A_\mu = 0 \quad \text{III.2}$$

$$\nabla_\nu \nabla^\nu A_\mu = -K_\nu K^\nu A_\mu = 0$$

$$\therefore K_\nu K^\nu = 0$$

El cuadrivector unitario de la polarización es ϵ_μ y satisface la condición de transversalidad :

$$\epsilon_\mu K^\mu = 0 \quad \text{III.4}$$

que resulta de trabajar en la norma de Lorentz :

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$\nabla_{\mu} A^{\mu} = 0$$

III.5

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} A^{\mu} &= -iK \epsilon^{\mu} k_{\mu} (e^{-i k_{\mu} x^{\mu}} - e^{i k_{\mu} x^{\mu}}) \\ &= \epsilon^{\mu} k_{\mu} [-iK (e^{-i k_{\mu} x^{\mu}} - e^{i k_{\mu} x^{\mu}})] = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \epsilon^{\mu} k_{\mu} = 0$$

En un marco de referencia de Lorentz ϵ^{μ} puede ser espacialoide, esto es $\epsilon^{\mu} = (0, \hat{\epsilon})$ con $\hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon} = 1$. En un marco de referencia arbitrario es espacialoide y normalizado a :

$$\epsilon_{\mu} \epsilon^{\mu} = -1$$

III.6

La constante de normalización K en (III.1) es escogida de tal forma que la energía de la onda descrita por A^{μ} sea $w = k_0 = |\vec{k}|$. Lo anterior se puede calcular a partir de :

$$U = \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{E}' + \vec{B}')^2$$

III.7

que en las unidades que estamos usando ($c=1$) es :

$$U = \int d^3x \vec{B}^2$$

ya que $|\vec{E}'| = |\vec{B}'|$.

De las ecuaciones de Maxwell, se tiene que :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{B} &= iK \vec{R} \times \hat{\epsilon} (e^{-i k_{\mu} x^{\mu}} - e^{i k_{\mu} x^{\mu}}) \end{aligned}$$

$$\vec{B} = K (\vec{R} \times \hat{\epsilon}) \text{SEN } k_{\mu} x^{\mu}$$

$$\vec{B}^2 = K^2 (\vec{R} \times \hat{\epsilon}) \cdot (\vec{R} \times \hat{\epsilon}) \text{SEN}^2 k_{\mu} x^{\mu}$$

III.8

Usando una identidad vectorial conocida, la condición de transversalidad (III.4) y la normalización de $\hat{\epsilon}^\mu$ (III.6) :

$$\begin{aligned} \hat{k} \times \hat{\epsilon} \cdot \hat{k} \times \hat{\epsilon} &= \hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon} - (\hat{k} \cdot \hat{\epsilon})^2 \\ &= \hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon} - (\epsilon^0)^2 \\ &= -(\epsilon_\mu \epsilon^\mu) \\ &= +1 \end{aligned}$$

como U debe ser igual a w

$$\begin{aligned} U &= K^2 \int d^3x \text{SEN}^2 k_\mu x^\mu \\ w &= K^2 \int d^3x \text{SEN}^2 (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ K &= \frac{1}{\sqrt{2wV}} \end{aligned}$$

III.2 BREMSSTRAHLUNG

En este trabajo se aproxima el campo del núcleo por un potencial coulombiano estático, debido a su simplicidad y se calcula la matriz de dispersión S_{fi} al término más bajo del desarrollo en e (la carga del electrón), que no sea cero. Los diagramas de Feynman que representan este proceso se muestran en la figura III.1.

La matriz de dispersión es :

$$S_{fi} = -ie \int d^4x \bar{\Psi}_f(x) \cancel{A}(x) \Psi_i(x) \tag{III.9}$$

con $e < 0$, igual a la carga del electrón. A orden más bajo Ψ_i se reduce a la onda plana $\Psi_i(x)$ que describe al electrón incidente :

$$\Psi_i(x) = \sqrt{\frac{m}{E_i V}} U(p_i, s_i) e^{-i p_i \cdot x} \tag{III.10}$$

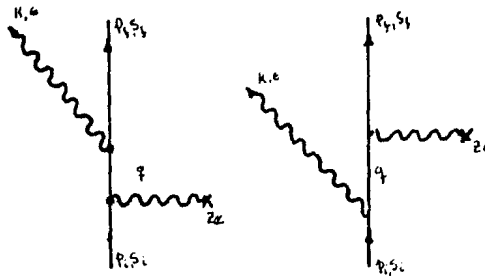


FIGURA II.I Diagramas de Feynman que representan los dos términos de la matriz de dispersión a orden más bajo, del Bremsstrahlung de un electrón en un campo coulombiano.

La función de onda escrita en (III.10) está normalizada a la unidad en una caja de volumen V y el electrón está descrito por un espinor $u(p_i, s_i)$ de momento p_i y espín s_i . Para el electrón en su estado final de momento p_f y espín s_f similarmente se tiene :

$$\bar{\psi}_f(x) = \sqrt{\frac{m}{E_f V}} \bar{u}(p_f, s_f) e^{i p_f \cdot x} \quad \text{III.11}$$

El elemento de matriz de dispersión S_{fi} , a segundo orden se obtiene a partir de los diagramas de Feynman en la figura III.I que dan origen a dos términos .

$$S_{fi} = e^2 \int d^4x d^4y \bar{\psi}_f(x) \left\{ -i A(x; \mu) i S_F(x-y) (-i \gamma^0) A_0(y) + (-i \gamma^0) A_0(x) i S_F(x-y) (-i A(x; \mu)) \right\} \psi_i(x) \quad \text{III.12}$$

$A_0(x)$ es el potencial de Coulomb debido al núcleo :

$$A_0(x) = \frac{-Ze}{4\pi|x|} \tag{III.13}$$

$S_F(x-y)$ es el propagador relativista para una partícula libre entre los dos vértices como los de la figura (III.1) y es de la forma :

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (\not{x} + m) \tag{III.14}$$

Si en la ecuación III.12, de S_{fi} , se sustituyen las ecuaciones (III.10), (III.11), (III.13) y (III.14) y se agrupan términos, de tal manera que éstos obtengan forma de transformada de Fourier y se hacen todas las integrales sobre las coordenadas espaciales, la ecuación (III.12) se transforma al espacio momental quedando :

$$S_{fi} = \frac{-Ze^3}{\sqrt{V}} 2\pi \int (E_f + K - E_i) \frac{1}{\sqrt{2k}} \sqrt{\frac{m^2}{E_f E_i}} \frac{1}{|\vec{q}|^2} \times \bar{u}(p_f, s_f) \left\{ -i\gamma \frac{i}{\not{k} + \not{K} - m} (-i\gamma^0) + (-i\gamma^0) \frac{i}{\not{k} - \not{K} - m} (-i\gamma) \right\} u(p_i, s_i) \tag{III.15}$$

En la ecuación anterior (III.15) el símbolo q representa el momento transferido al núcleo y es igual a $q = P_f + K - P_i$ y sólo se hizo uso del primer término del potencial del fotón (III.1) ya que es un proceso de emisión de radiación y el segundo término de dicho potencial está relacionado con el proceso de absorción de radiación que no contribuye en este caso en particular.

III.3 ELEMENTO DE MATRIZ DE DISPERSION $|M_{fi}|^2$

La sección diferencial transversal de Bremsstrahlung se calcula de la ecuación (III.15) de donde el interés se centra en el elemento de matriz M_{fi} . Que es un escalar de Lorentz, llamado amplitud invariante,

que en este caso queda definido por :

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{1}{|q|^2} \bar{U}(p_i, s_i) \left[\not{\epsilon} \frac{\not{p}_i + \not{k} + m}{(p_i+k)^2 - m^2} \not{y}^0 + \not{y}^0 \frac{\not{p}_i - \not{k} + m}{(p_i-k)^2 - m^2} \not{\epsilon} \right] U(p_i, s_i) \quad \text{III.16}$$

$$\Gamma = \not{\epsilon} \frac{\not{p}_i + \not{k} + m}{(p_i+k)^2 - m^2} \not{y}^0 + \not{y}^0 \frac{\not{p}_i - \not{k} + m}{(p_i-k)^2 - m^2} \not{\epsilon} \quad \text{III.17}$$

En Mecánica Cuántica la probabilidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, es decir $|\mathcal{M}_{fi}|^2$. Usando (III.17), la ecuación (III.16) al cuadrado puede expresarse como :

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \left| \bar{U}(p_i, s_i) \Gamma U(p_i, s_i) \right|^2$$

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \bar{U}(p_i, s_i) \Gamma U(p_i, s_i) \bar{U}(p_i, s_i) \overline{\Gamma} U(p_i, s_i) \quad \text{III.18}$$

Si se usa la siguiente propiedad de los espinores u :

$$U_\alpha(p, s) \bar{U}_\rho(p, s) = \left[\Lambda_+(p) \Sigma(s) \right]_{\alpha\rho} \quad \text{III.19}$$

$\Lambda_+(p)$ es el proyector de momento de energía positiva :

$$\Lambda_+(p) = \frac{\not{p} + m}{2m}$$

y $\Sigma(s)$ es el proyector de espín :

$$\Sigma(s) = \frac{1 + \not{y}_s \not{\epsilon}}{2}$$

Así las componentes de (III.18) quedan expresadas de la siguiente forma :

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{|q|^4} \bar{U}(+)_\alpha \Gamma_{\alpha\rho} U(i)_\rho U(i)_\gamma \overline{\Gamma}_{\gamma\delta} U(+)_\delta$$

En términos de los elementos de las matrices que forman. Si se usa la expresión (III.19) se obtiene :

$$\begin{aligned}
 |M_{fi}|^2 &= \frac{1}{|q|^4} \bar{u}^{(s)}_\alpha \Gamma_{\alpha\rho} (\Lambda^{(i)} \Sigma^{(i)})_{\rho\gamma} \bar{\Gamma}_{\gamma\delta} u^{(s)}_\delta \\
 &= \frac{1}{|q|^4} u^{(s)}_\delta \bar{u}^{(s)}_\alpha \Gamma_{\alpha\rho} (\Lambda^{(i)} \Sigma^{(i)})_{\rho\gamma} \bar{\Gamma}_{\gamma\delta} \\
 &= \frac{1}{|q|^4} (\Lambda^{(i)} \Sigma^{(i)})_{s\alpha} \Gamma_{\alpha\rho} (\Lambda^{(i)} \Sigma^{(i)})_{\rho\gamma} \bar{\Gamma}_{\gamma s}
 \end{aligned}$$

que es una expresión de una traza, así

$$|M_{fi}|^2 = \frac{1}{|q|^4} \text{Tr}(\Lambda^{(i)} \Sigma^{(i)} \Gamma \Lambda^{(i)} \Sigma^{(i)} \bar{\Gamma}) \quad \text{III.20}$$

En este caso particular no se toma en cuenta el efecto del espín de la partícula, por lo que se "suma a espín", lo que tiene el efecto de hacer 1 los proyectores de espín $\Sigma(S)$, por lo que la expresión (III.18) toma la forma :

$$|M_{fi}|^2 = \frac{1}{|q|^4} \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_i + m}{2m} \Gamma \frac{\not{P}_i + m}{2m} \bar{\Gamma} \right] \quad \text{III.21}$$

Y si en (III.17) se hacen las siguientes sustituciones : $a = P_f + k$ y $b = P_i - k$, y se sustituyen en (III.21) se obtiene :

$$|M_{fi}|^2 = \frac{1}{|q|^4} \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_i + m}{2m} \left(\not{a} \frac{\not{a} + m}{a^2 - m^2} \not{y} + \not{y} \frac{\not{b} + m}{b^2 - m^2} \right) \frac{\not{P}_i + m}{2m} \left(\not{y} \frac{\not{a} + m}{a^2 - m^2} + \not{a} \frac{\not{b} + m}{b^2 - m^2} \right) \right] \quad \text{III.22}$$

III.4 CALCULO DEL ELEMENTO DE MATRIZ $|M_{fi}|^2$

La expresión de la traza (III.22) se puede dividir en la suma de 4 trazas más pequeñas para que su cálculo resulte más sencillo :

$$|M_{II}|^2 = \frac{1}{|q|^4} \left[\text{Tr} \frac{p_1+m}{2m} \not{\epsilon} \frac{a+m}{a^2-m^2} \not{y} \frac{p_1+m}{2m} \not{y} \frac{a+m}{a^2-m^2} \not{\epsilon} \right] \quad \text{III.23.1}$$

$$+ \text{Tr} \frac{p_1+m}{2m} \not{\epsilon} \frac{a+m}{a^2-m^2} \not{y} \frac{p_1+m}{2m} \not{\epsilon} \frac{b+m}{b^2-m^2} \not{y} \quad \text{III.23.2}$$

$$+ \text{Tr} \frac{p_1+m}{2m} \not{y} \frac{b+m}{b^2-m^2} \not{\epsilon} \frac{p_1+m}{2m} \not{y} \frac{a+m}{a^2-m^2} \not{\epsilon} \quad \text{III.23.3}$$

$$+ \text{Tr} \frac{p_1+m}{2m} \not{y} \frac{b+m}{b^2-m^2} \not{\epsilon} \frac{p_1+m}{2m} \not{\epsilon} \frac{b+m}{b^2-m^2} \not{y} \quad \text{III.23.4}$$

Aplicando teoremas de traza y otros trucos algebraicos (III.23.1) se obtiene como resultado :

$$\frac{1}{4m^2} \frac{1}{a^2-m^2} \left[-8p_1 \cdot a p_1 \cdot a - 16p_1 \cdot \epsilon \epsilon \cdot a p_1 \cdot a + 32a^0 p_1^0 p_1^0 \epsilon \epsilon \cdot a + 16p_1^0 a^0 p_1^0 a \right. \\ \left. + 4a^2 p_1 \cdot p_1 + 8a^2 p_1 \cdot \epsilon p_1 \cdot \epsilon - 8a^2 p_1^0 p_1^0 - 16a^2 p_1^0 \epsilon^0 \right. \\ \left. + m^2 (-4p_1 \cdot p_1 - 8p_1 \cdot \epsilon p_1 \cdot \epsilon + 8p_1^0 p_1^0 + 8p_1 \cdot a + 16\epsilon \cdot a \epsilon \cdot p_1 \right. \\ \left. + 8p_1 \cdot a - 16p_1^0 a^0 - 4a^2) - 4m^4 \right]$$

Haciendo lo mismo con (III.23.4) ésta se reduce a :

$$\frac{1}{4m^2} \frac{1}{b^2-m^2} \left[-8p_1 \cdot b p_1 \cdot b - 16p_1 \cdot \epsilon p_1 \cdot b \epsilon \cdot b + 32b^0 p_1^0 p_1^0 \epsilon \cdot b \cdot \epsilon + 16b^0 p_1^0 p_1^0 b \right. \\ \left. + 4b^2 p_1 \cdot p_1 + 8b^2 p_1 \cdot \epsilon p_1 \cdot \epsilon - 8b^2 p_1^0 p_1^0 - 16p_1^0 \epsilon^0 b^2 p_1 \cdot \epsilon \right. \\ \left. + m^2 (-4p_1 \cdot p_1 - 8p_1 \cdot \epsilon p_1 \cdot \epsilon + 8p_1^0 p_1^0 + 8p_1 \cdot b - 16b^0 p_1^0 \right. \\ \left. + 8p_1 \cdot b + 16p_1 \cdot \epsilon b \cdot \epsilon - 4b^2) - 4m^4 \right]$$

y (III.22.2), (III.23.3) resultan en :

$$\frac{1}{4m^2} \frac{1}{(a^2-m^2)(b^2-m^2)} \left[4(P_f \cdot a P_i \cdot b + P_f \cdot b P_i \cdot a - P_f \cdot P_i \cdot a \cdot b) \right. \\ \left. + 8(a \cdot \epsilon)(P_f \cdot \epsilon P_i \cdot b + P_f \cdot b \cdot \epsilon P_i - P_f \cdot P_i \cdot \epsilon \cdot b) - 8(P_i \cdot \epsilon)(P_i \cdot \epsilon a \cdot b + P_f \cdot b \cdot \epsilon a \right. \\ \left. - P_f \cdot a \cdot \epsilon b) - 8P_i^0(P_f \cdot a \cdot b^0 + P_f \cdot b \cdot a^0 - P_i^0 a \cdot P_i) + 16b^0 \cdot \epsilon \cdot P_f (\epsilon \cdot a P_i^0 \right. \\ \left. + \epsilon \cdot P_i a^0 - a \cdot P_i \cdot \epsilon^0) + m^2(4P_i \cdot P_f + 8P_f \cdot \epsilon P_i \cdot \epsilon - 8P_i^0 P_f^0 - 4P_f \cdot a \right. \\ \left. - 8a \cdot \epsilon P_f \cdot \epsilon - 4P_f \cdot b + 8b^0 P_f^0 - 4a \cdot P_i + 8P_i^0 a^0 - 4P_f \cdot b - \right. \\ \left. - 8P_i \cdot \epsilon \cdot b \cdot \epsilon + 4a \cdot b + 8a \cdot \epsilon \cdot b \cdot \epsilon - 8b^0 a^0) + 4m^4 \right]$$

$$\frac{1}{4m^2} \frac{1}{(a^2-m^2)(b^2-m^2)} \left[4(P_i \cdot b P_f \cdot a + P_f \cdot a P_i \cdot b - P_f \cdot P_i \cdot a \cdot b) - 8b^0(P_f^0 P_i \cdot a + P_i^0 P_f \cdot a - a^0 P_f \cdot P_i) \right. \\ \left. + 8P_i^0(P_f^0 a \cdot b + b^0 P_f \cdot a - a^0 P_f \cdot b) + 8P_i \cdot \epsilon(P_f \cdot b \cdot \epsilon \cdot a + P_f \cdot a \cdot b \cdot \epsilon + P_f \cdot \epsilon \cdot b \cdot a) \right. \\ \left. - 16b^0 P_i \cdot \epsilon(P_f^0 \cdot a + \epsilon^0 P_f \cdot a - a^0 P_f \cdot b) - 8a \cdot \epsilon(P_f \cdot b P_i \cdot \epsilon + P_f \cdot P_i \cdot b \cdot \epsilon - P_f \cdot \epsilon P_i \cdot b) - \right. \\ \left. + 16P_f^0 a \cdot \epsilon(b^0 \cdot \epsilon P_i + P_i^0 \cdot \epsilon \cdot b - \epsilon^0 b \cdot P_i) + m^2(4P_f \cdot P_i + 8P_f \cdot \epsilon P_i \cdot \epsilon - 8P_i^0 P_f^0) \right. \\ \left. + 8P_f^0 b^0 - 8P_f \cdot \epsilon a \cdot \epsilon - 4P_f \cdot a - 8b \cdot \epsilon P_i \cdot \epsilon - 4P_f \cdot b + 8a^0 P_i^0 - 4P_f \cdot a \right. \\ \left. + 8b \cdot \epsilon a \cdot \epsilon + 4b \cdot a - 8b^0 a^0 - 4P_f \cdot b \right] + 4m^4$$

sustituyendo los valores de a y b ($a = P_f + k$ y $b = P_i - k$). Reduciendo términos semejantes y sumando todas las expresiones de (III.23) se obtiene la expresión final de $|T_{fi}|^2$:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{1}{|q_f|^4} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{p_f \cdot \epsilon}{p_f \cdot k} - \frac{p_i \cdot \epsilon}{p_i \cdot k} \right)^2 \left(1 - \frac{p_f \cdot p_i}{m^2} + 2 \frac{E_i E_f}{m^2} \right) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{p_f \cdot k p_i \cdot k} \left(-1 + \frac{p_f \cdot p_i}{m^2} + 2 \frac{p_i \cdot \epsilon p_f \cdot \epsilon}{m^2} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{\omega}{m^2} \left(\frac{1}{p_i \cdot k} - \frac{1}{p_f \cdot k} \right) (E_i - E_f) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{m^2} \left(\frac{\epsilon \cdot p_i}{k \cdot p_i} - \frac{\epsilon \cdot p_f}{k \cdot p_f} \right)^2 (k \cdot p_i - k \cdot p_f) \\
 &\quad + \frac{\omega}{m^2} \left(\frac{\epsilon \cdot p_f}{k \cdot p_f} E_i + \frac{\epsilon \cdot p_i}{k \cdot p_i} E_f \right) \left(\frac{\epsilon \cdot p_i}{k \cdot p_i} - \frac{\epsilon \cdot p_f}{k \cdot p_f} \right) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2 m^2} \left(\frac{-(p_f \cdot p_i - k \cdot p_f)^2}{2 k \cdot p_i - k \cdot p_f} \right) \right] \tag{III.24}
 \end{aligned}$$

Para calcular la sección diferencial se eleva la matriz de dispersión S_{fi} al cuadrado, se divide entre el flujo de partículas $|\vec{v}|/V$ y el tiempo $2\pi d(0)=T$, para que sea una proporción y se suma ésta sobre todos los posibles estados finales $V^2 d^3k d^3p_f / (2\pi)^6$, en el intervalo observado el espacio fase (ecuación 11.5) obteniéndose :

$$d\sigma = \frac{Z^2 e^4 m^2}{2|\vec{v}_i| E_i} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 2\pi \delta(E_f + k - E_i) \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega} \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 E_f} \tag{III.25}$$

con $|\mathcal{M}|^2$ representada en (III.24).

Como se puede ver, la solución analítica de la integral (III.25) es difícil de realizar, razón por la cual se resolvió por métodos numéricos del tipo Monte Carlo. Este cálculo se realizó con el programa BREMS cuyos resultados se discuten en el capítulo IV.

Capítulo IV

R. Feynman en su libro "Lecciones de Física", describe al **Bremsstrahlung** como una radiación electromagnética debida a un electrón en movimiento, en el campo electrostático de un núcleo atómico. Esta radiación sale dirigida hacia "adelante", es decir, en la dirección inicial del electrón. Usando la expresión (III.23) y las subrutinas PHSP, MATRIZ, HISESCA y LOGHIS, se escribió un programa, el cual después de calcular el espacio fase de cada evento, evalúa el elemento de matriz acumulando los resultados en los histogramas que se muestran al final del Capítulo, Figuras IV.V, IV.VI, IV.VII, IV.VIII. A partir de los histogramas mencionados, se puede llegar a distintas conclusiones que se discuten en el presente capítulo.

IV.1 USO DE LA SUBROUTINA PHSP.

En el Capítulo II se dedujeron tres expresiones para la integral del espacio fase en Bremsstrahlung. Una para la distribución de los estados finales del electrón en la energía, para un estado inicial dado de energía E_i . Otra para la distribución de los estados finales del fotón emitido en la energía, para un estado inicial dado de energía w_i . Y la tercera para la distribución angular entre el fotón emitido y el electrón en su estado final. Estas tres expresiones fueron evaluadas por métodos numéricos de tipo Monte Carlo. Resultando en los histogramas que se muestran en las Figuras (II.V),(II.VI), (II.VII).

En el Capítulo II, también se dedujo una expresión para representar una reacción de dos partículas, como el decaimiento de una partícula virtual, la que se usó para hacer los histogramas de las distribuciones en la energía del fotón y el electrón, y la distribución angular de los estados finales del fotón y electrón tal como son generados por la subrutina PHSP. Los histogramas obtenidos (Figuras IV.V y IV.VI, números 9, 10, 11) al ser comparados con los mostrados en las Figuras II.V, II.VI, II.VII, en general se ve que coinciden. Todo esto se hizo para verificar que PHSP se usó en la forma correcta.

La discusión anterior permite concluir que la representación de la reacción de dos partículas como el decaimiento de una partícula virtual de masa determinada por la variable s de Mandelstam, permite hacer uso de la subrutina PHSP.

IV.II POLARIZACION "n" Y "s" DEL FOTON.

La polarización del fotón se puede definir de dos formas, como "n" o sea normal al plano que forman el vector \vec{k} de momento del fotón y el vector \vec{p}_i de momento del electrón en su estado inicial. La polarización "s" se define en el plano que forman \vec{k} y \vec{p}_i , y "n" y "s" son perpendiculares entre sí (Figura III.I).

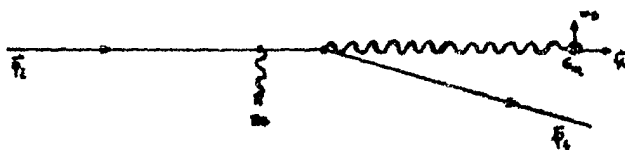


FIGURA IV.I Definición de dos direcciones de polarización

polarización "n" y "s" del fotón IV.3

La polarización normal $\hat{\epsilon}_n$ se calculó usando el producto cruz de los vectores \vec{p}_1 y \vec{k} ,

$$\frac{\vec{p}_1 \times \vec{k}}{|\vec{p}_1 \times \vec{k}|} = \hat{\epsilon}_n \quad (\text{IV.I})$$

y la polarización en el plano, $\hat{\epsilon}_p$, se define :

$$\frac{\hat{\epsilon}_n \times \vec{k}}{|\hat{\epsilon}_n \times \vec{k}|} = \hat{\epsilon}_p \quad (\text{IV.II})$$

Usando las expresiones (IV.I) y (IV.II) se sustituyen en el elemento de matriz en lugar del cuadrivector de polarización ϵ_μ , por esta razón se tienen dos cálculos en cada distribución, uno con el fotón emitido con polarización normal $\hat{\epsilon}_n$ y el otro con polarización del fotón emitido en el plano $\hat{\epsilon}_p$.

IV.111 DISTRIBUCION ANGULAR DE LOS ESTADOS FINALES

Las Figuras 5 y 6 de cada grupo muestran la distribución en el coseno del ángulo entre la dirección de emisión del fotón y la dirección del momento del electrón en su estado inicial. De estos histogramas se concluye que en general $\cos \theta \approx 1$ $\theta \approx 0$ lo que concuerda con la idea expuesta de que la radiación sale emitida hacia adelante. Una segunda observación a estos histogramas nos hará notar que : los eventos con polarización "s" son más abundantes que aquéllos con polarización "n", además que un buen número de eventos con polarización "s" salen emitidos con ángulos muy distintos de cero.

Los histogramas mostrados en las figuras 7 y 8, de cada grupo, muestran la distribución de estados finales en el coseno del ángulo entre la dirección de emisión del fotón y la dirección del momento del electrón en su estado final. De estos histogramas, se puede concluir que el electrón y el fotón salen prácticamente en la misma dirección $\theta \approx 0$. Hay que hacer notar que otra vez son los fotones con polarización "s" los que se desvían un ángulo mayor que cero

distribución angular de los estados finales IV.4

con una mayor frecuencia, lo cual nos permite hacer un par de esquemas como los que se muestran en las Figuras IV.II y IV.III.

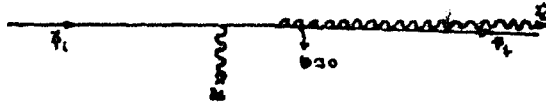


FIGURA IV.II Esquema de la dispersión de un electrón en un campo electrostático, en general el ángulo es aproximadamente cero y k se encuentra en una dirección muy similar a p_i

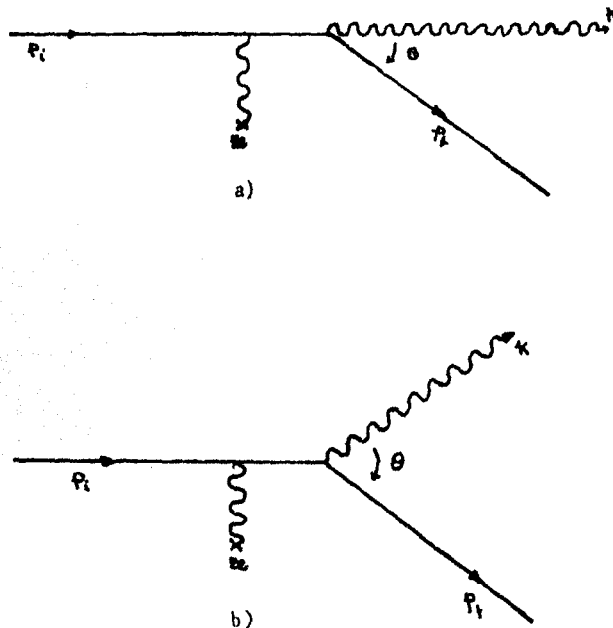


FIGURA IV.III En este caso se muestran dos dispersiones, donde es mayor que cero, en el primer caso a) la dirección del fotón emitido es prácticamente igual a p_i , pero el electrón sale muy desviado, en b) tanto el fotón como el electrón salen desviados con respecto a la dirección de p_i . Según los cálculos que se realizaron este tipo de eventos tiene una probabilidad más alta de que sean con polarización "s" en el fotón.

distribución de los estados finales del fotón en la energía IV.5.

IV.IV DISTRIBUCION DE LOS ESTADOS FINALES DEL FOTON EN LA ENERGIA

Los histogramas que se muestran en las figuras IV.VII, IV.VIII son de la distribución de los estados finales del fotón en la energía. Para bajas energías del electrón en su estado inicial $E_i \approx 1 \text{ MeV}$, se puede observar que en la distribución de los estados finales del fotón en la energía, existe un pico bien definido para energías bajas $w \approx .1 \text{ MeV}$. Mientras que para electrones de mayor energía inicial $E_i \approx 100 \text{ MeV}$, este pico en la distribución de la energía del fotón se ve corrido a energías más altas, es decir, las contribuciones más importantes ya no se encuentran a energías bajas. Si vemos todos los histogramas de la distribución en la energía del fotón podemos concluir que para electrones que inciden en el campo del núcleo con baja energía, la contribución más importante a la distribución del fotón es básicamente de fotones "suaves". En este trabajo los fotones "suaves" son aquellos que cumplen con estar en el siguiente rango de energía : $E_{\text{max}}/N \times 50 < E_{\text{suave}} < E_{\text{max}}/50$, con N número de eventos en la primer columna del histograma del espacio fase correspondiente. Mientras que para electrones más energéticos o ultra relativistas, la contribución más importante a la distribución en la energía del fotón, deja de ser la de los fotones suaves y pasa a ser de energías mayores.

Otro punto es que básicamente los eventos con polarización "s", son más numerosos, es decir, que en la distribución de estados en la energía del fotón, aquéllos con polarización "s", son uno o dos órdenes de magnitud más abundantes, con respecto a aquellos con polarización "n". Así se observa una diferencia en el comportamiento del fotón emitido y es que su componente de la polarización "s" es más probable.

IV.V CATASTROFE INFRARROJA

Si en la expresión II.25 para la sección diferencial se sustituye la expresión III.24 del element de matriz, se observa que el primer término se comporta con respecto a la energía del fotón, como w^{-1} , mientras que el resto de los términos se comportan de forma que tienen exponentes mayores. Si sólo tomamos en cuenta este primer término, se

obtiene :

$$d\sigma = \frac{Z^2 e^4 m^2}{4|\vec{v}_i| E_i} \left(\frac{P_f \cdot \epsilon}{k \cdot P_f} - \frac{P_i \cdot \epsilon}{k \cdot P_i} \right)^2 \left(1 - \frac{P_f \cdot P_i}{m^2} + \frac{2 E_f E_i}{m^2} \right) \frac{2\pi \int d(E_f + k - E_i) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \omega} \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 E_f}}{|\vec{q}|^4} \quad \text{IV.III}$$

El binomio alcuadrado en el integrando ya se dijo, se comporta como w^2 y si expresamos las diferencias de volumen $d^3 k$ y $d^3 p_f$ como se hizo en el capítulo II (pág. II.5).

$$d\sigma = \frac{Z^2 e^4 m^2}{4|\vec{v}_i| E_i} \left(\frac{P_f \cdot \epsilon}{P_f \cdot k} - \frac{P_i \cdot \epsilon}{P_i \cdot k} \right)^2 \left(1 - \frac{P_f \cdot P_i}{m^2} + \frac{2 E_f E_i}{m^2} \right) \frac{2\pi \int d(E_f + k - E_i) \omega^2 \omega d\Omega_k P_f^2 d\Omega_{p_f}}{|\vec{q}|^4 (2\pi)^3 \omega (2\pi)^2 E_f} \quad \text{IV.IV}$$

En la expresión IV.IV se puede observar que el factor w^2 se cancela con el factor w^{-2} del integrando y la distribución para la energía del fotón se comporta como dw/w , que da lugar a una divergencia cuando $w=0$, es decir, que la probabilidad de observar un fotón de energía cero se hace infinita, a este hecho se le conoce con el nombre de catástrofe infrarroja. En realidad se sabe que todos los detectores tienen un límite, a partir del cual pueden medir la presencia de fotones.

Si se toman en cuenta correcciones radiativas en los diagramas de Feynman que describen el fenómeno sin emisión de fotón, los términos que agregan éstas, tienen divergencias que cancelan la catástrofe infrarroja (Figura IV.IV).

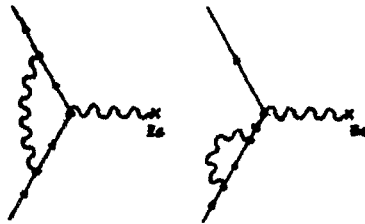


FIGURA IV.IV Dos posibles correcciones radiativas para la dispersión de un electrón en el campo electrostático de un núcleo.

Siguiendo la discusión del libro de Bjorken & Drell () que expresa la integral IV.IV, en función de la dispersión coulombiana de un electrón más

catástrofe infrarroja IV.7

el término de Bremsstrahlung, como :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_i} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_i} \right)_{\text{Eléctrico}} \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_{K_{\text{min}}}^{K_{\text{max}}} \frac{d\omega}{\omega} \int d\Omega_k \left(\frac{2 \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f}{k \cdot \mathbf{p}_i \cdot k \cdot \mathbf{p}_f} - \frac{m^2}{(\mathbf{p}_i \cdot k)^2} - \frac{m^2}{(\mathbf{p}_f \cdot k)^2} \right) \quad \text{IV.V}$$

La cual está sumada sobre polarización del fotón. Lo importante de esta expresión IV.V es que permite hacer la integral sobre la energía del fotón que es el punto de interés por el momento, que da como resultado un logaritmo, es de este punto en que se dice que cuando $K_{\text{min}} = 0$ se tiene una divergencia logarítmica para fotones de energía igual a cero.

De la discusión anterior es de esperar que los histogramas de la distribución en la energía del fotón tuvieran un pico en la parte cercana al cero, lo cual no se observa en todos ellos, y sólo se observa cuando la energía del electrón en su estado inicial es baja. Pero cuando la energía del electrón en su estado inicial empieza a aumentar la contribución principal se corre a energías más altas y cerca de cero desaparece el pico que se espera observar. Para explicar esto, es necesario observar que la distribución en la energía del fotón en el espacio fase, tiene forma de una distribución gaussiana y que cerca del cero hay muy pocos eventos y toma la forma de una función creciente, mientras que el máximo de eventos se sitúa aproximadamente en el 50% de la energía del electrón en su estado inicial. Esto tiene un efecto de apantallamiento, que no permite ver que pasa con eventos cerca del cero. Es decir, que no importa que el elemento de matriz para energías cercanas a cero dé una contribución muy grande, por que para energías mayores se tienen muchos más eventos, por lo que a pesar de que cerca del cero existe un pico, se ve "oculto" por picos de contribuciones de energías más altas. Este "ocultamiento" se debe a la naturaleza del método Monte Carlo y no a aquella usada para el elemento de matriz.

IV.VI CONCLUSIONES

La polarización es un parámetro que distingue el comportamiento del fotón, es decir que el fotón se emite polarizado, preferentemente, en la dirección "s". Ya que se puede distinguir entre las

distribuciones en la energía y angular del fotón para las dos direcciones de polarización "n" y "s". Siendo la proyección en "s" más abundante. Y este comportamiento se distingue mejor conforme la energía del electrón en su estado inicial, aumenta.

Conforme la energía del electrón incidente comienza a aumentar, el fotón emitido y el electrón en su estado final forman un ángulo entre ellos, cada vez menor. Y prácticamente salen dirigidos hacia "adelante", es decir en una dirección prácticamente igual a la del electrón en su estado inicial. Cuando la energía de incidencia del electrón es muy alta (1000 MeV), el ángulo entre el fotón emitido y el electrón en su estado final se empieza a abrir.

La contribución más importante de la distribución en la energía del fotón, está localizada cerca de $w=0$ cuando el electrón incide con una energía menor de 10 MeV. Pero conforme la energía de incidencia del electrón aumenta, la contribución más importante a la distribución en la energía, se corre a energías cada vez mayores. Del orden E_γ tal que $E_\gamma > E_{\max}/50$. De lo anterior se puede concluir que la contribución del fotón "suave" (de frecuencias bajas) no siempre es la principal y conforme la energía de incidencia del electrón aumenta, la mayor contribución a la distribución en la energía es de fotones que no son "suaves".

El pico que se espera observar en la distribución de la energía del fotón a frecuencias cercanas al cero, no siempre se observa, esto se debe a que la catástrofe intrarroja se ve "apantallada" por la naturaleza del cálculo numérico Monte Carlo que se realizó, ya que el espacio fase (PHSP) del fotón aporta muy pocos eventos a energías cercanas al cero, mientras que hay una cantidad mucho mayor de eventos a energías similares a la mitad de la energía del electrón en su estado inicial ($w \approx .5E_1$).

Estas conclusiones están basadas en el cálculo de la amplitud invariante $\left| \mathcal{M}_{fi} \right|^2$, sumada a espín en el electrón en su estado

final y promediada a espín en el electrón inicial. Es de esperar que si $|\langle \uparrow \uparrow | \psi \rangle|^2$ se calcula con una dirección de espín bien definida en el electrón en su estado inicial, el comportamiento de la polarización del fotón se ve alterado.

FIGURA IV.V 1.a.

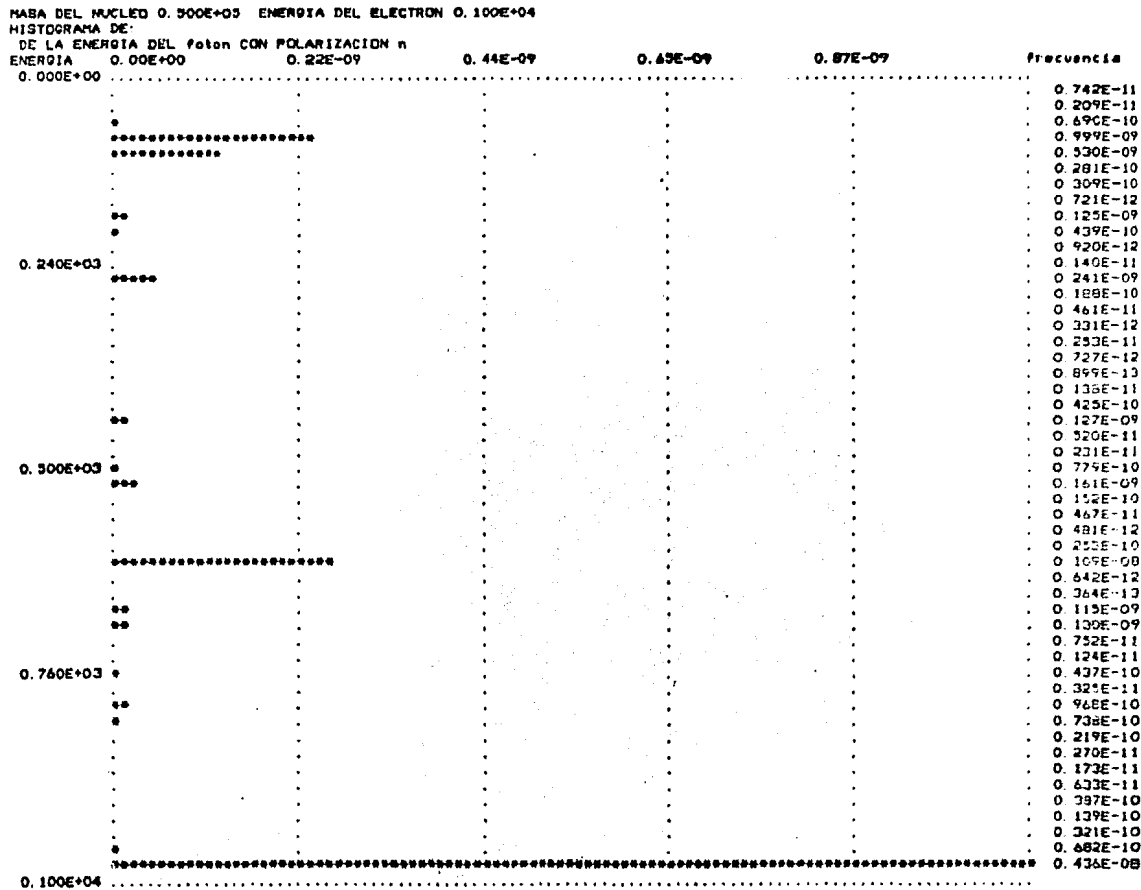


FIGURA IV.V 2.a.

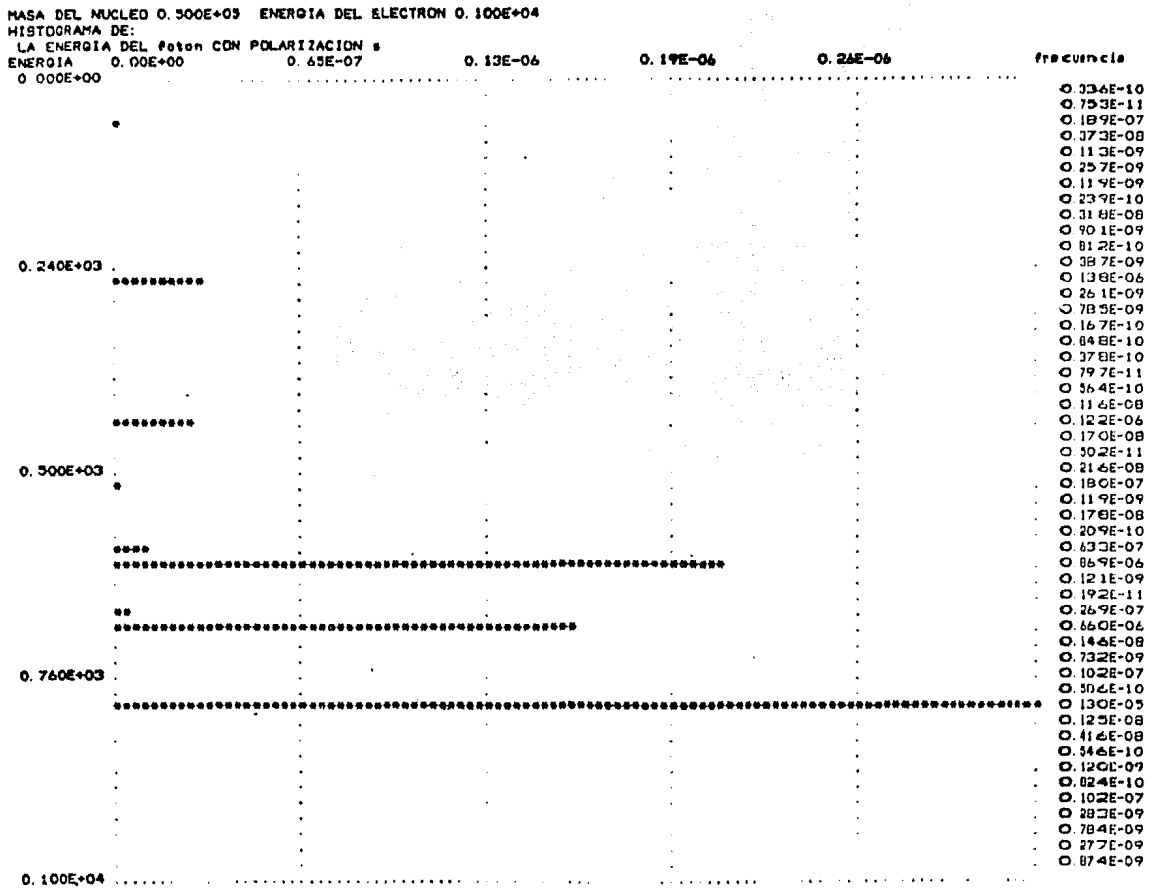


FIGURA IV. V 2. B.

CON ESCALA LOGARITMICA
 MASA DEL NUCLEO 0.500E+03 ENERGIA DEL ELECTRON 0.100E+04
 HISTOGRAMA DE:

LA ENERGIA DEL foton CON POLARIZACION s

ENERGIA -0.12E+02

-0.12E+02

-0.11E+02

-0.11E+02

-0.11E+02

frecuencia

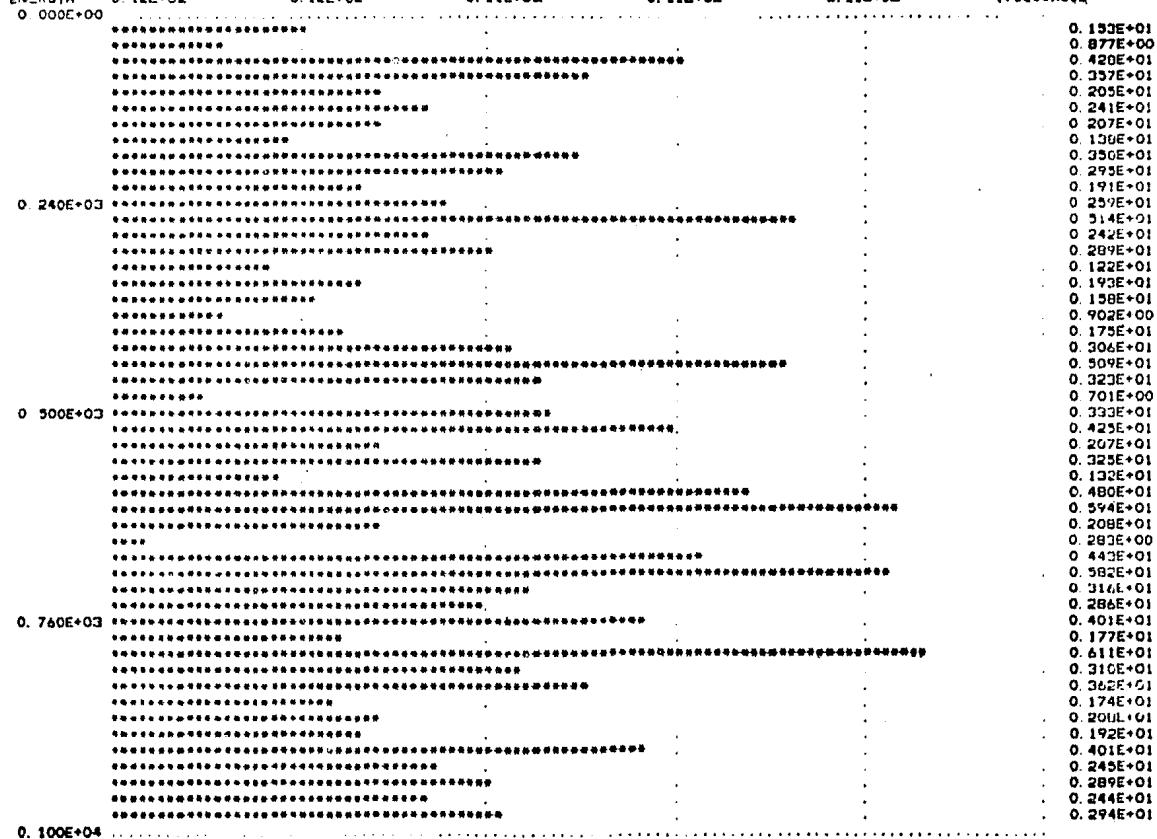


FIGURA IV.V 3.a.

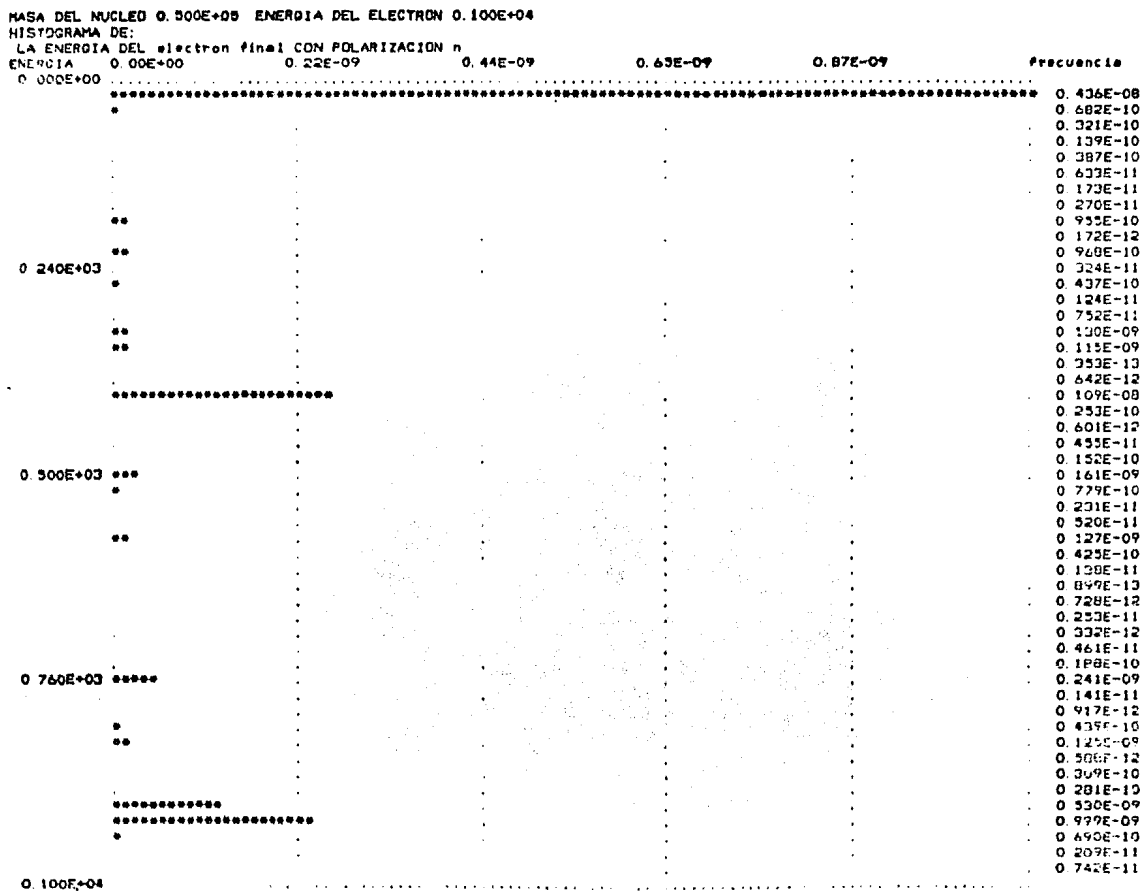


FIGURA IV.V 4.a.

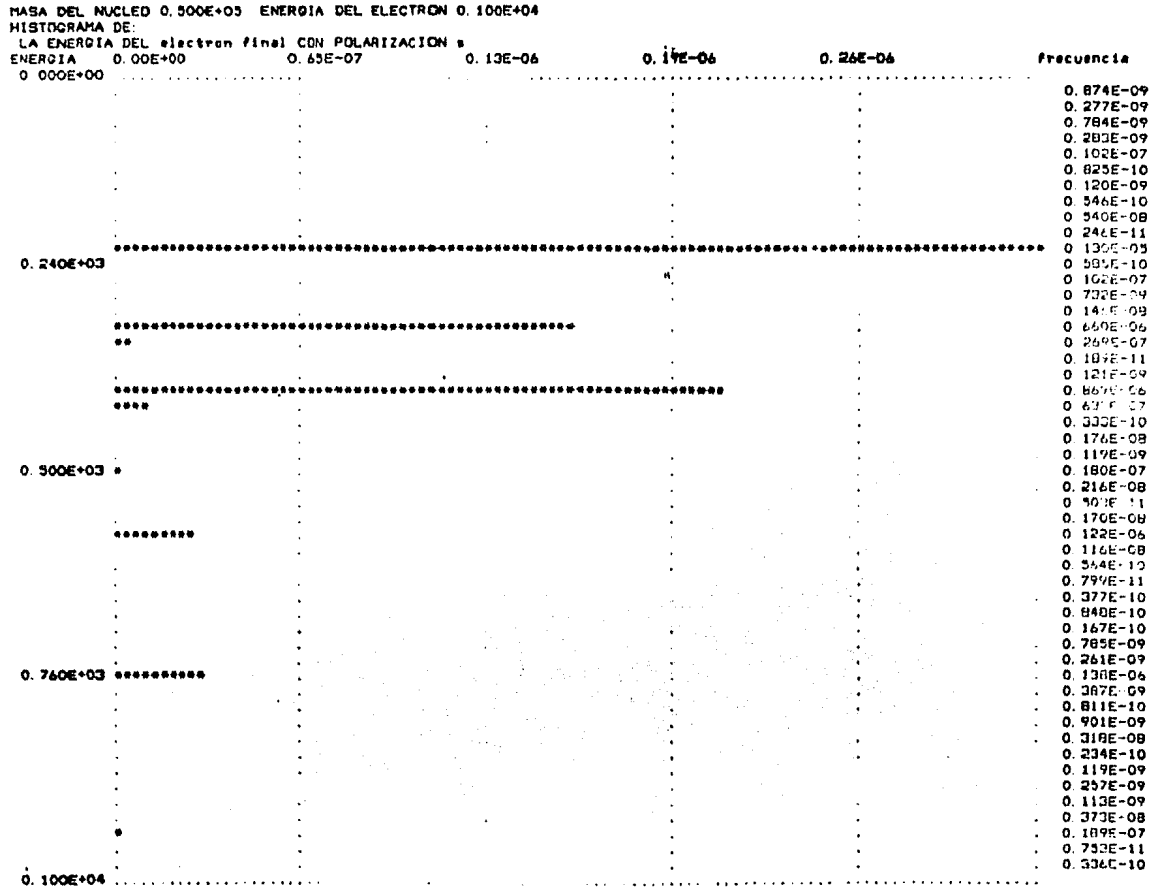


FIGURA IV.V 4.B.

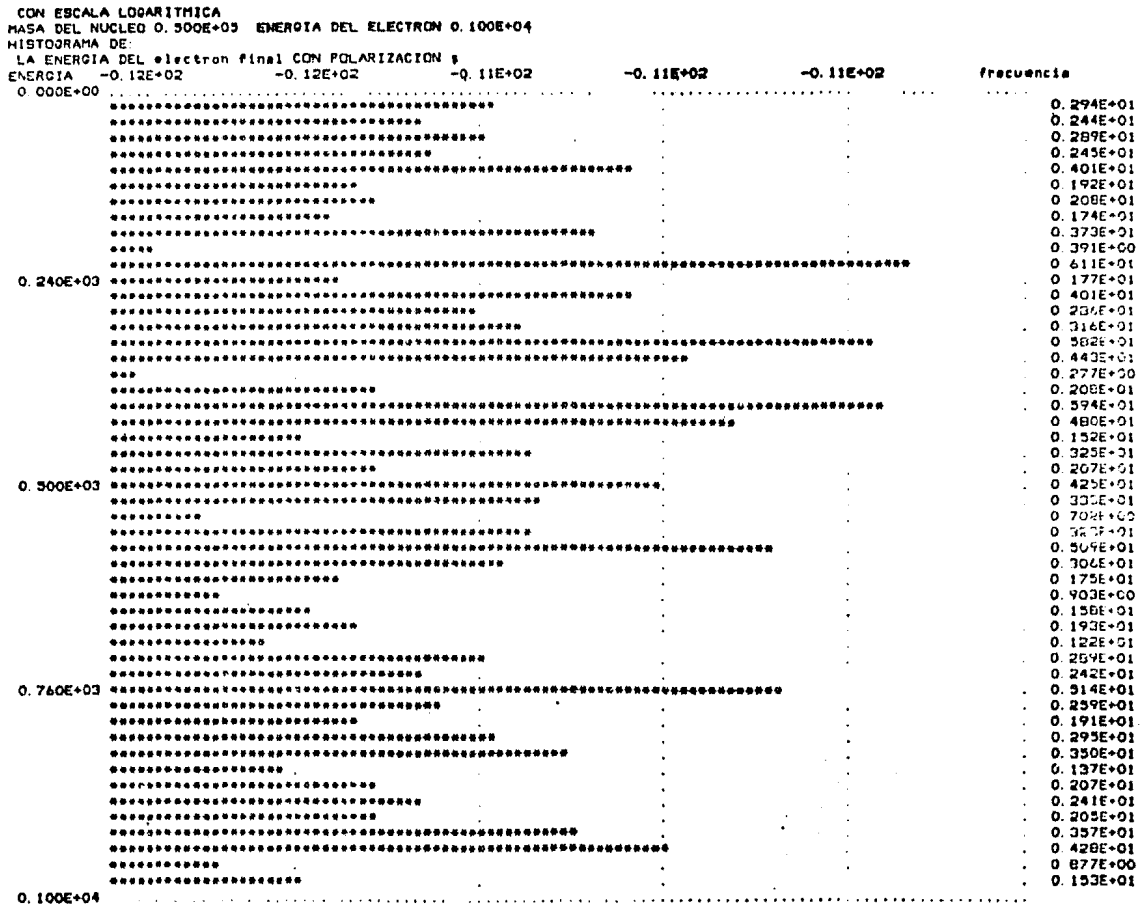


FIGURA IV.V
5.a.

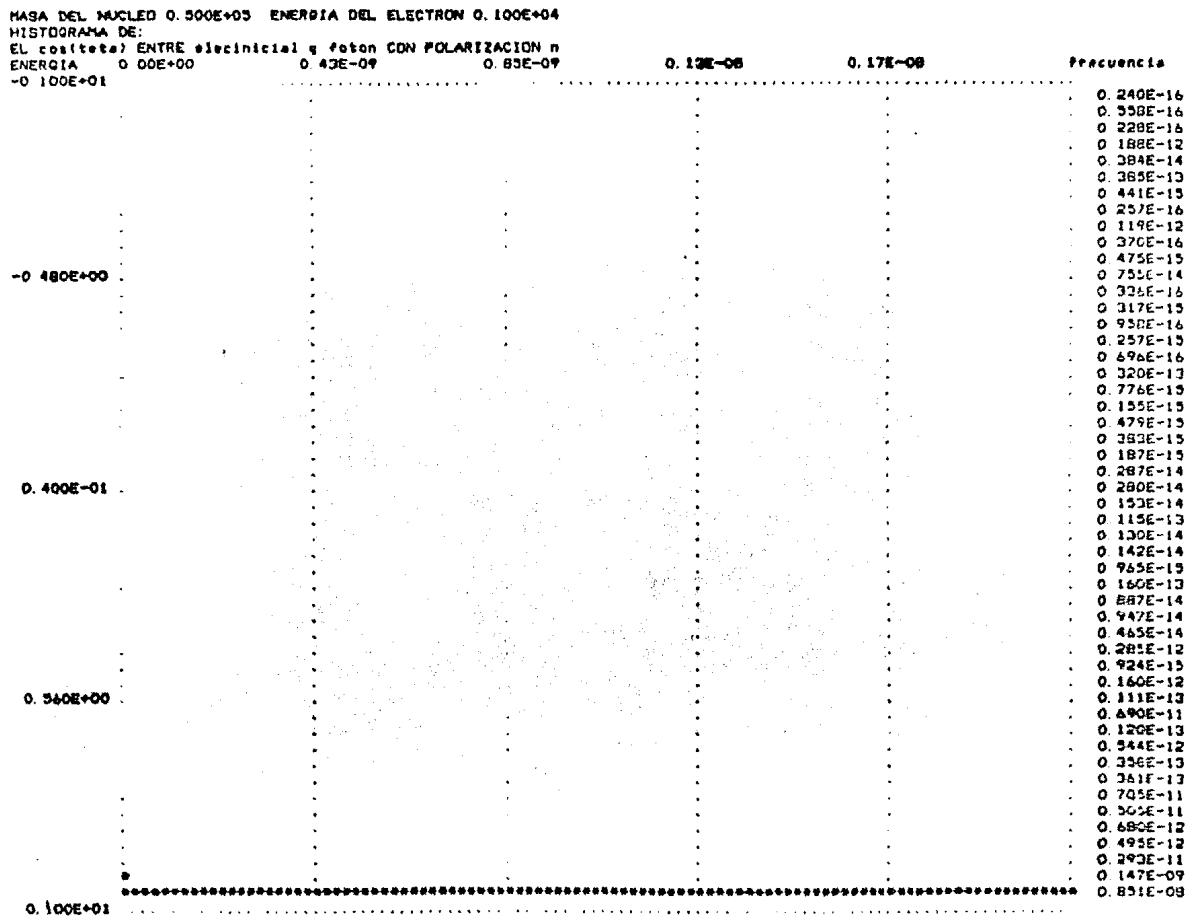


FIGURA IV. V S. D.

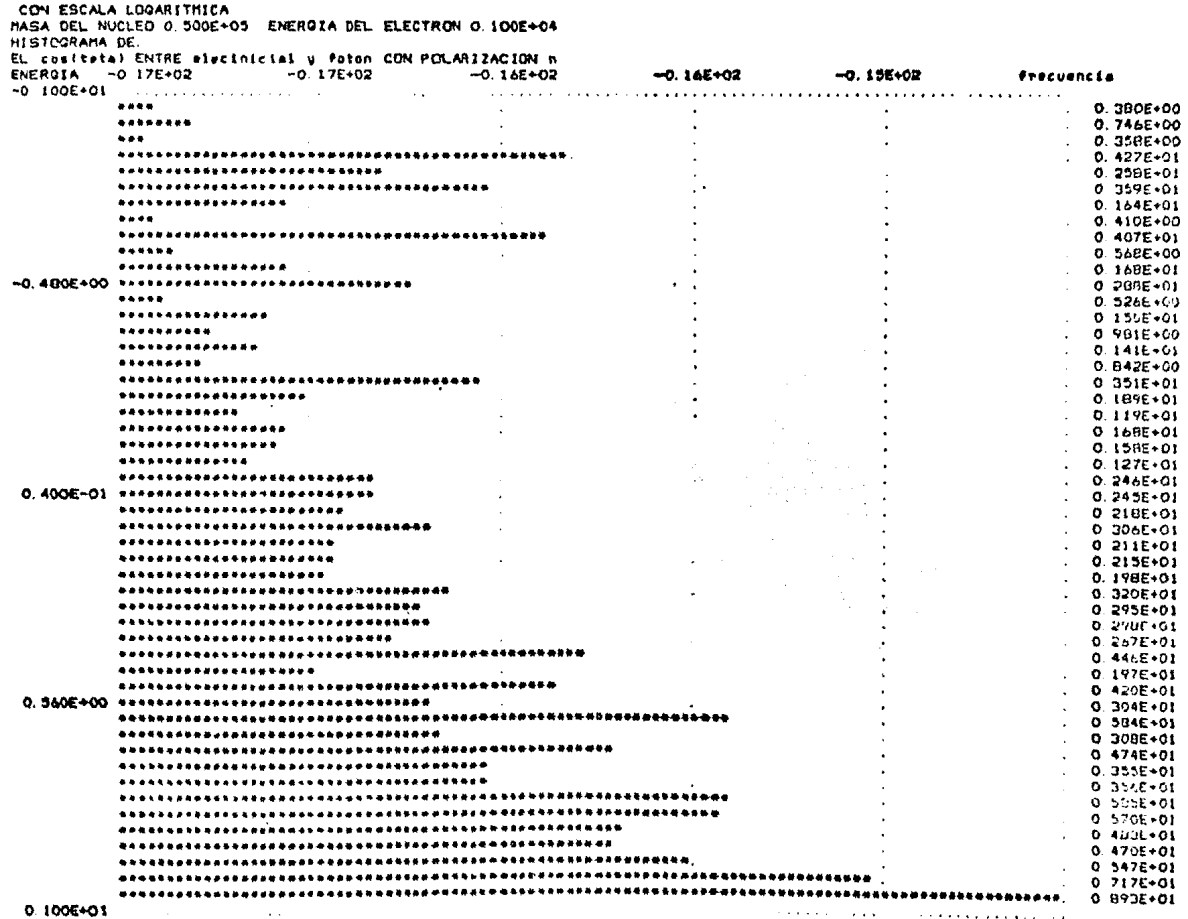


FIGURA IV. V 6.a.

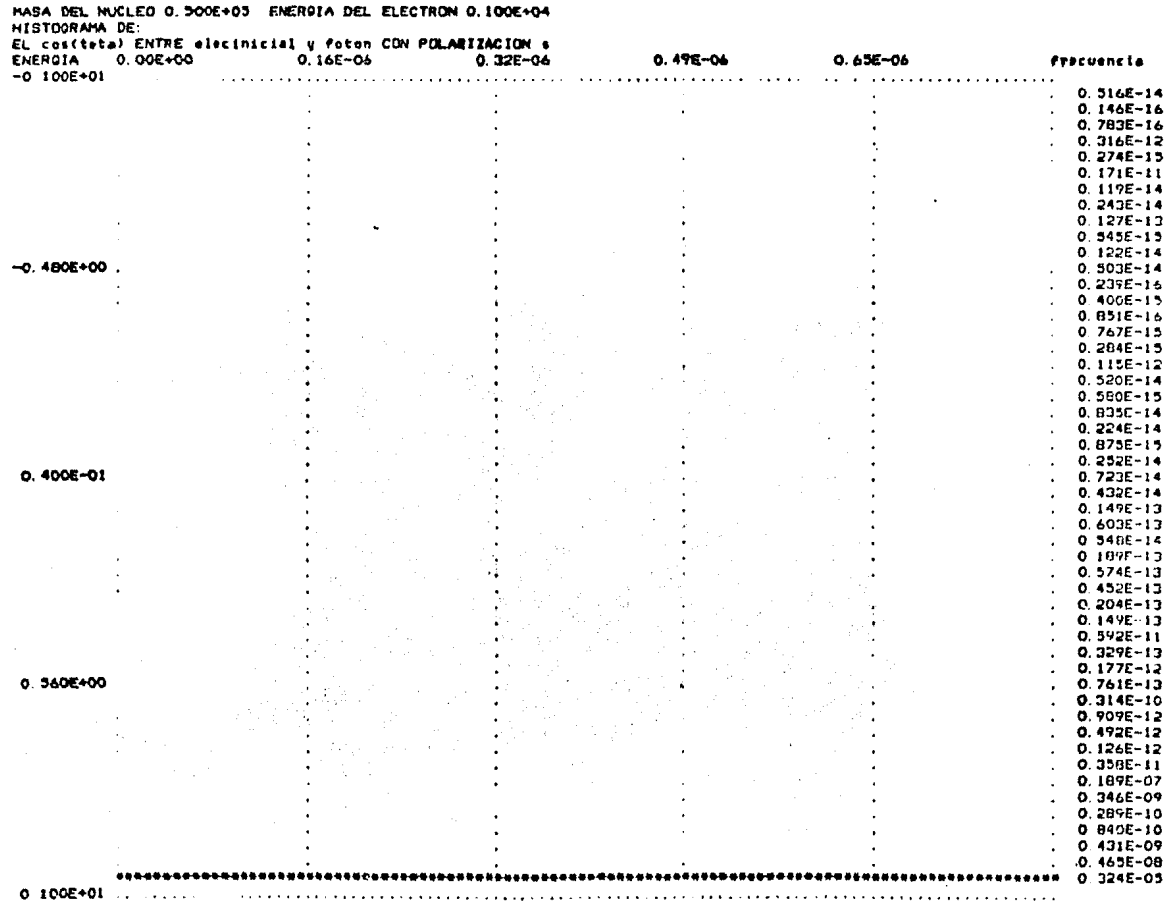


FIGURA IV. V G. B.

CON ESCALA LOGARITMICA
 MASA DEL NUCLEO 0.500E+05 ENERGIA DEL ELECTRON 0.100E+04
 HISTOGRAMA DE:
 EL cos(theta) ENTRE electron y foton CON POLARIZACION s
 ENERGIA -0.17E+02 -0.16E+02 -0.16E+02

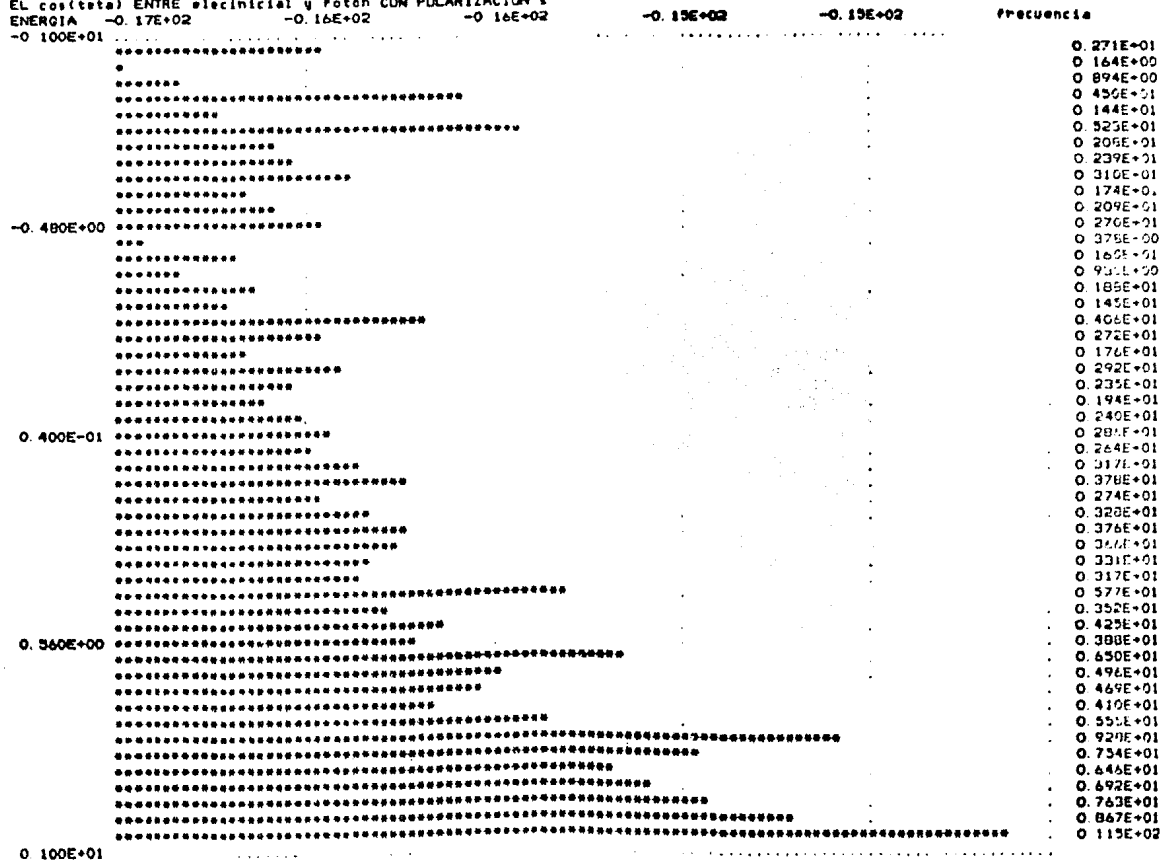


FIGURA IV.V "a."

TASA DEL NUCLEO 0.300E+03 ENERGIA DEL ELECTRON 0.100E+04
HISTOGRAMA DE
EL cos(theta) ENTRE electron Y foton CON POLARIZACION n
ENERGIA 0.00E+00 0.22E-09 0.44E-09
0.100E+01

0.68E-09

0.87E-09

Frecuencia

-0.480E+00

0.400E-01

0.360E+00

0.100E+01

0.976E-15
0.902E-15
0.281E-13
0.386E-11
0.206E-12
0.470E-13
0.785E-12
0.350E-15
0.129E-12
0.607E-12
0.940E-14
0.295E-15
0.114E-14
0.382E-13
0.170E-13
0.693E-13
0.292E-13
0.285E-11
0.125E-14
0.949E-15
0.188E-14
0.175E-13
0.988E-14
0.607E-13
0.110E-12
0.206E-13
0.183E-14
0.267E-13
0.209E-13
0.295E-13
0.761E-12
0.280E-13
0.220E-12
0.628E-12
0.436E-12
0.350E-13
0.425E-08
0.222E-12
0.837E-11
0.894E-10
0.110E-11
0.195E-11
0.148E-10
0.126E-10
0.275E-11
0.221E-10
0.504E-11
0.126E-09
0.751E-09
0.328E-08

FIGURA IV. V 7. b.

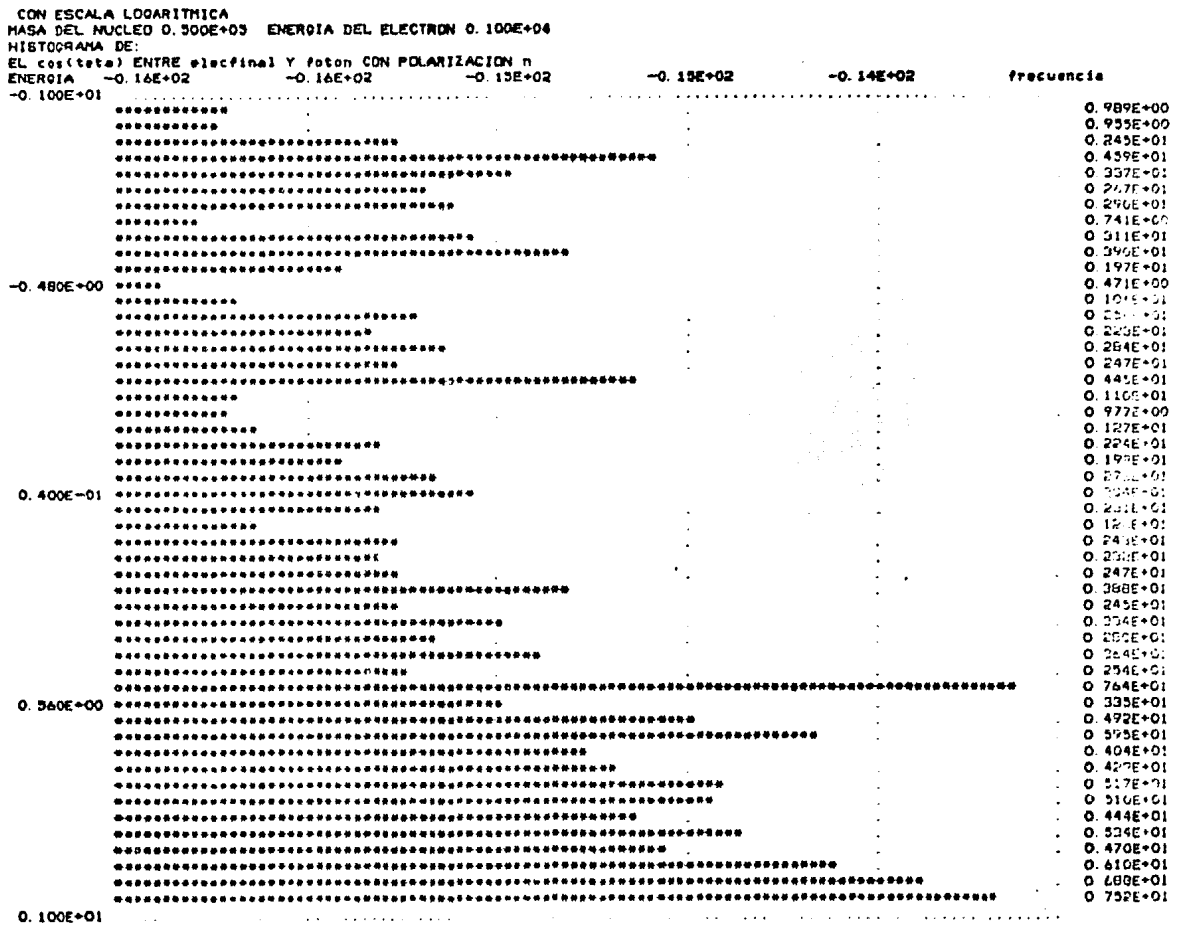


FIGURA IV. V. 8. a.

MASA DEL NUCLEO 0.500E+05 ENERGIA DEL ELECTRON 0.100E+04
 HISTOGRAMA DE:
 EL cos(theta) ENTRE electron y foton CON POLARIZACION s
 ENERGIA 0.00E+00 0.65E-07 0.13E-06

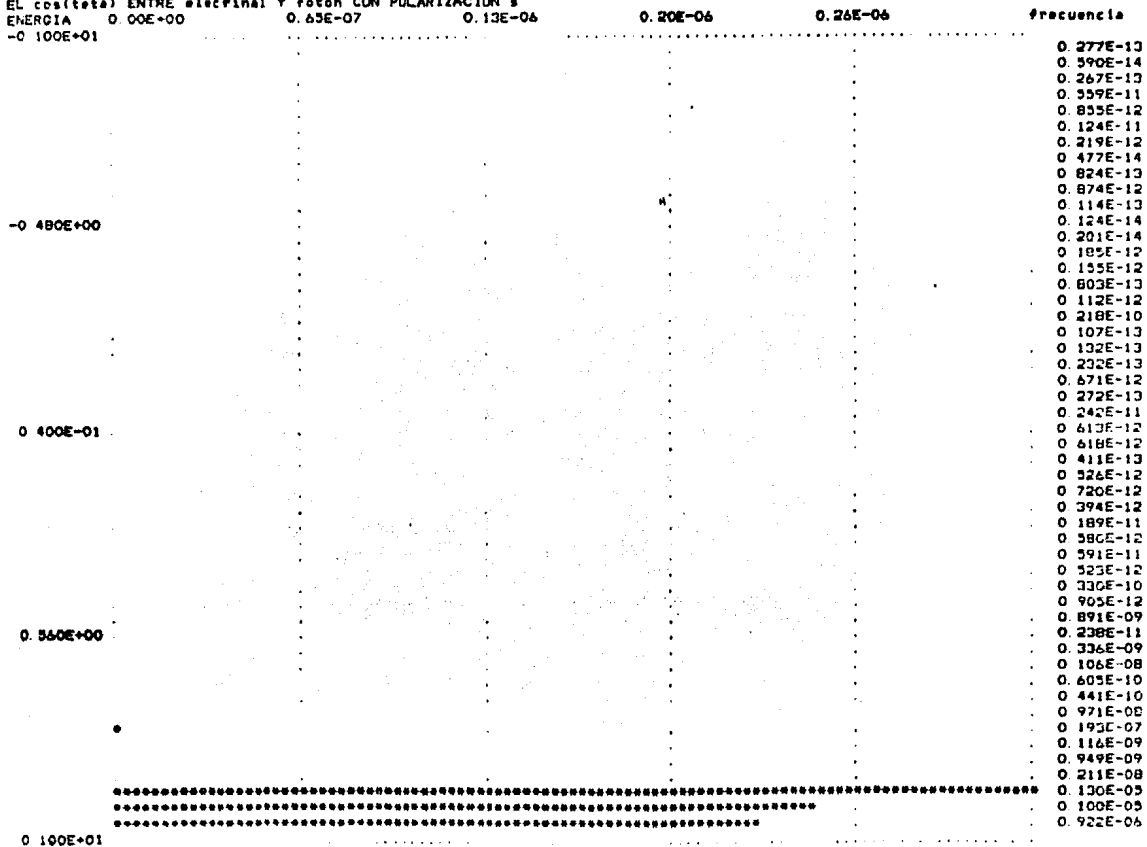
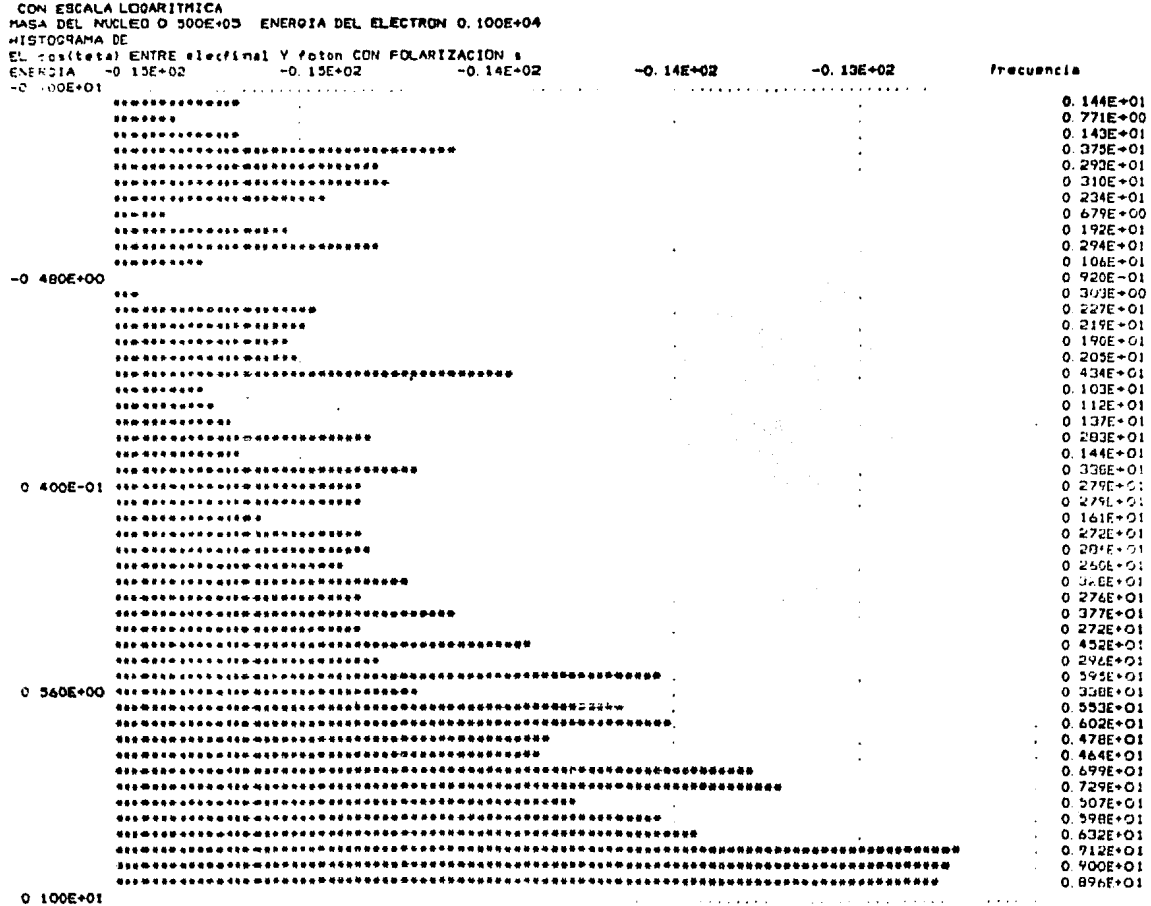


FIGURA IV. V 8. b.



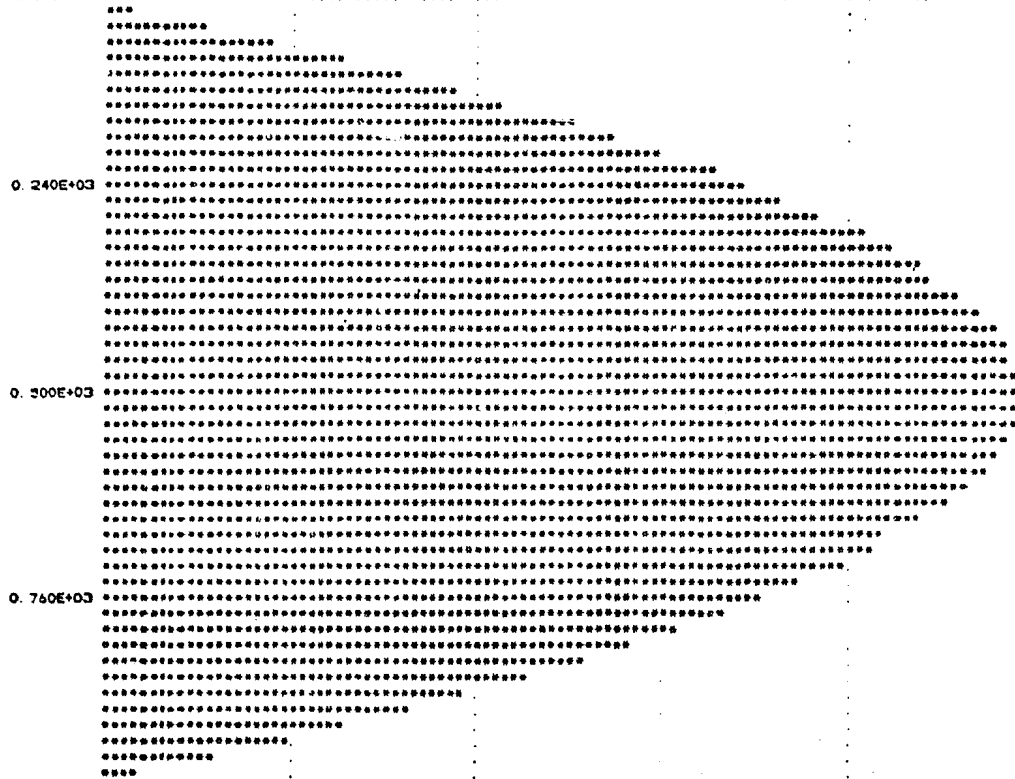
MASA DEL NUCLEO 0.300E+03 ENERGIA DEL ELECTRON 0.100E+04

HISTOGRAMA DE

LA ENERGIA DEL foton COMO ES GENEREADA POR phsp

ENERGIA 0.00E+00 0.15E+04 0.31E+04 0.46E+04 0.62E+04

0.000E+00



frecuencia

0.119E+04
0.359E+04
0.374E+04
0.811E+04
0.101E+05
0.119E+05
0.136E+05
0.158E+05
0.173E+05
0.188E+05
0.205E+05
0.216E+05
0.228E+05
0.241E+05
0.255E+05
0.265E+05
0.273E+05
0.277E+05
0.287E+05
0.291E+05
0.298E+05
0.300E+05
0.303E+05
0.306E+05
0.306E+05
0.309E+05
0.304E+05
0.302E+05
0.300E+05
0.295E+05
0.289E+05
0.282E+05
0.274E+05
0.262E+05
0.257E+05
0.248E+05
0.234E+05
0.221E+05
0.210E+05
0.193E+05
0.177E+05
0.161E+05
0.142E+05
0.123E+05
0.105E+05
0.815E+04
0.621E+04
0.383E+04
0.182E+04
0.204E+03

FIGURA IV.V 9.a.

FIGURA IV.VI 2.a.

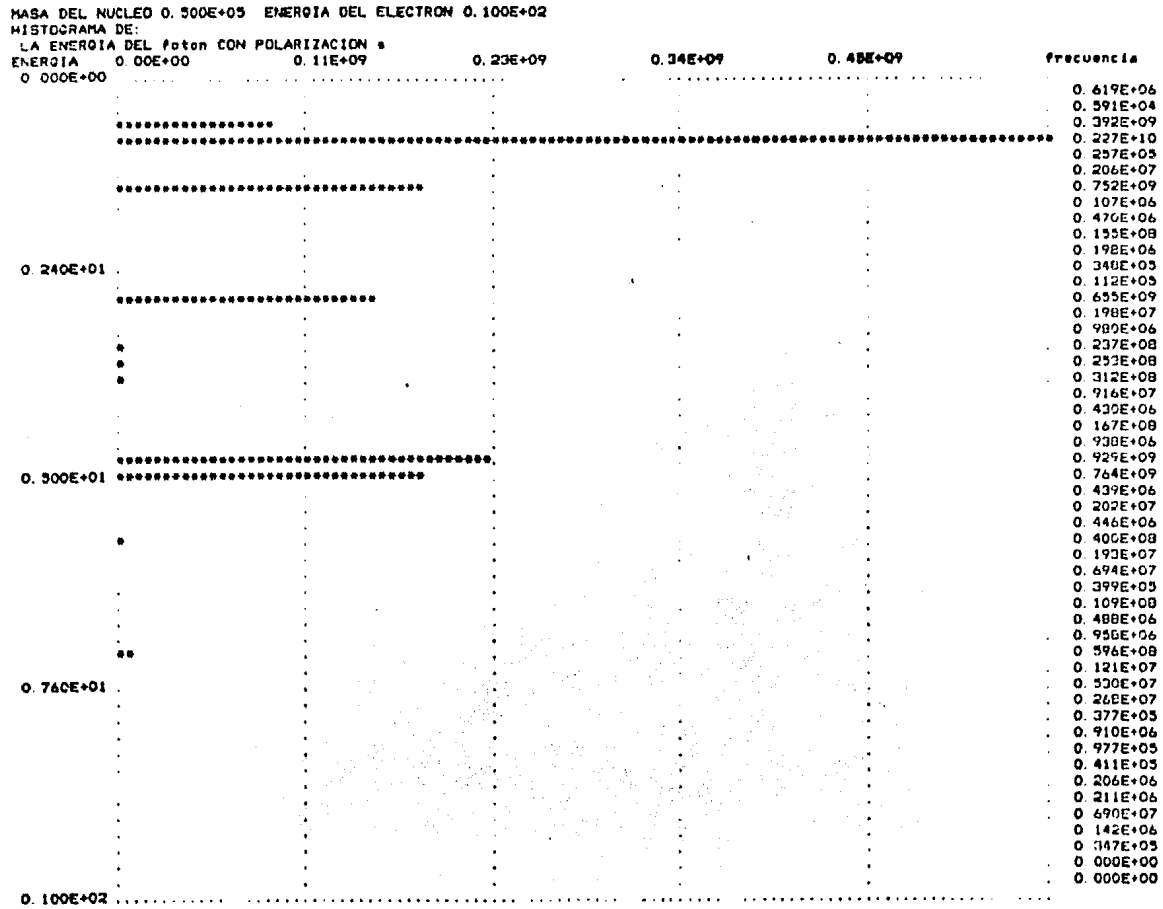
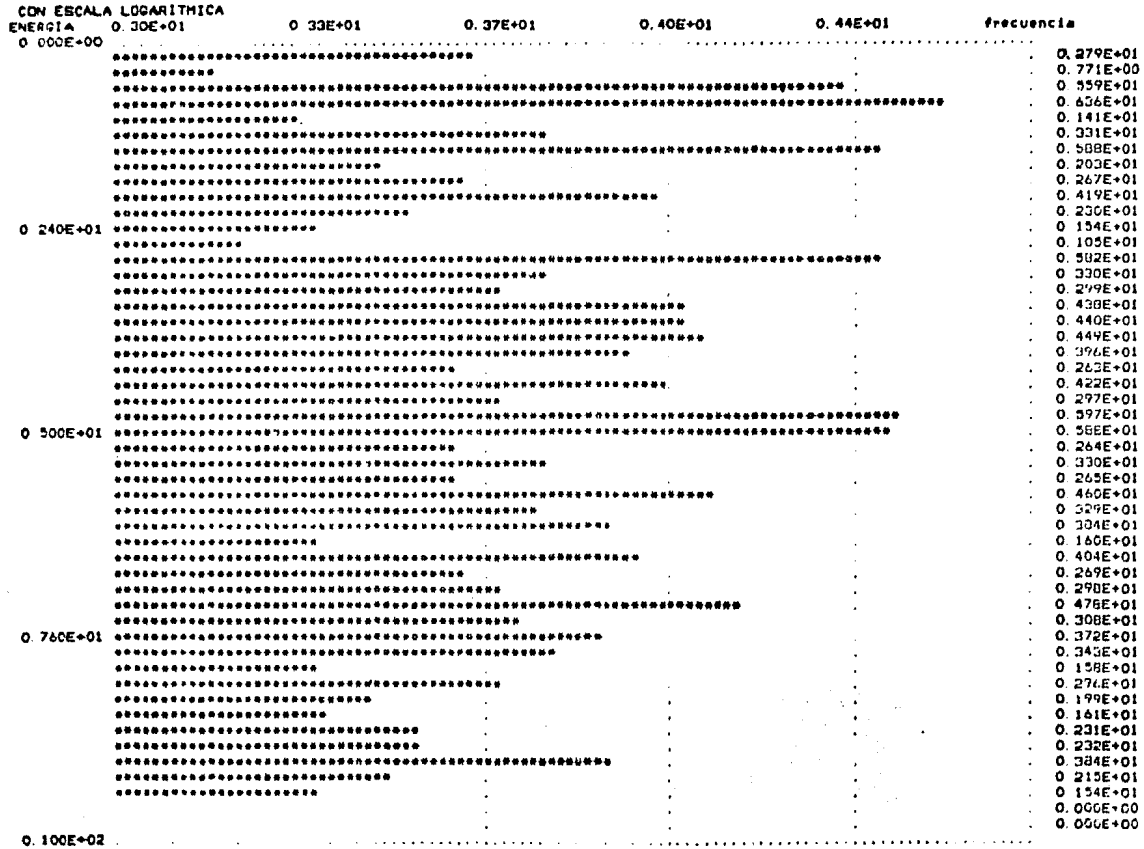
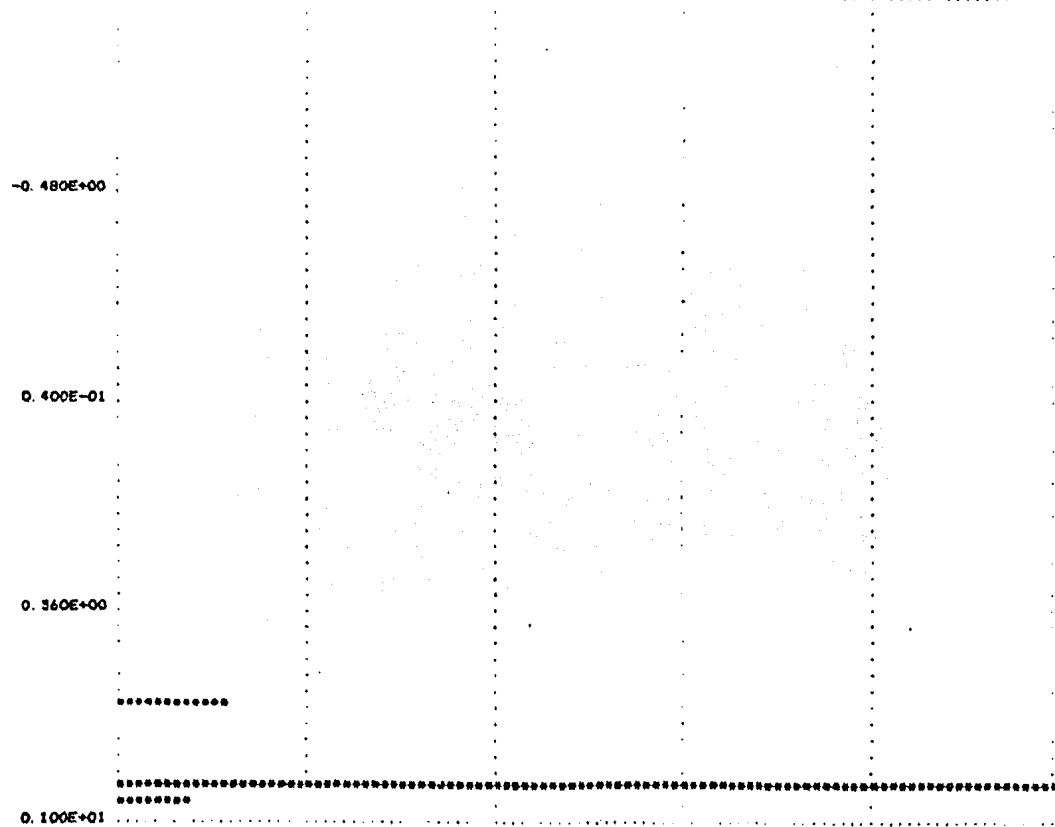


FIGURA IV. VI 2. b.



MASA DEL NUCLEO 0.500E+03 ENERGIA DEL ELECTRON 0.100E+02
 HISTOGRAMA DE:
 EL cos(theta) ENTRE electron y foton CON POLARIZACION n
 ENERGIA 0.00E+00 0.68E+07 0.14E+08 0.20E+08 0.27E+08



Frecuencia
 0.59E+01
 0.159E+00
 0.126E+02
 0.591E+01
 0.276E+03
 0.237E+00
 0.167E+00
 0.837E+00
 0.206E+01
 0.426E+00
 0.120E+03
 0.91E+00
 0.79E+00
 0.430E+02
 0.134E+02
 0.196E+02
 0.197E+03
 0.373E+01
 0.709E+00
 0.172E+02
 0.119E+02
 0.80E+01
 0.67E+03
 0.949E+01
 0.764E+02
 0.319E+01
 0.525E+01
 0.879E+01
 0.165E+02
 0.318E+04
 0.333E+02
 0.406E+02
 0.246E+02
 0.712E+05
 0.535E+02
 0.133E+03
 0.261E+03
 0.724E+03
 0.845E+02
 0.134E+04
 0.229E+02
 0.142E+03
 0.221E+05
 0.166E+08
 0.542E+03
 0.270E+04
 0.634E+04
 0.166E+05
 0.135E+09
 0.109E+08

FIGURA IV.VI 3.a.

FIGURA IV.VI 3.b.

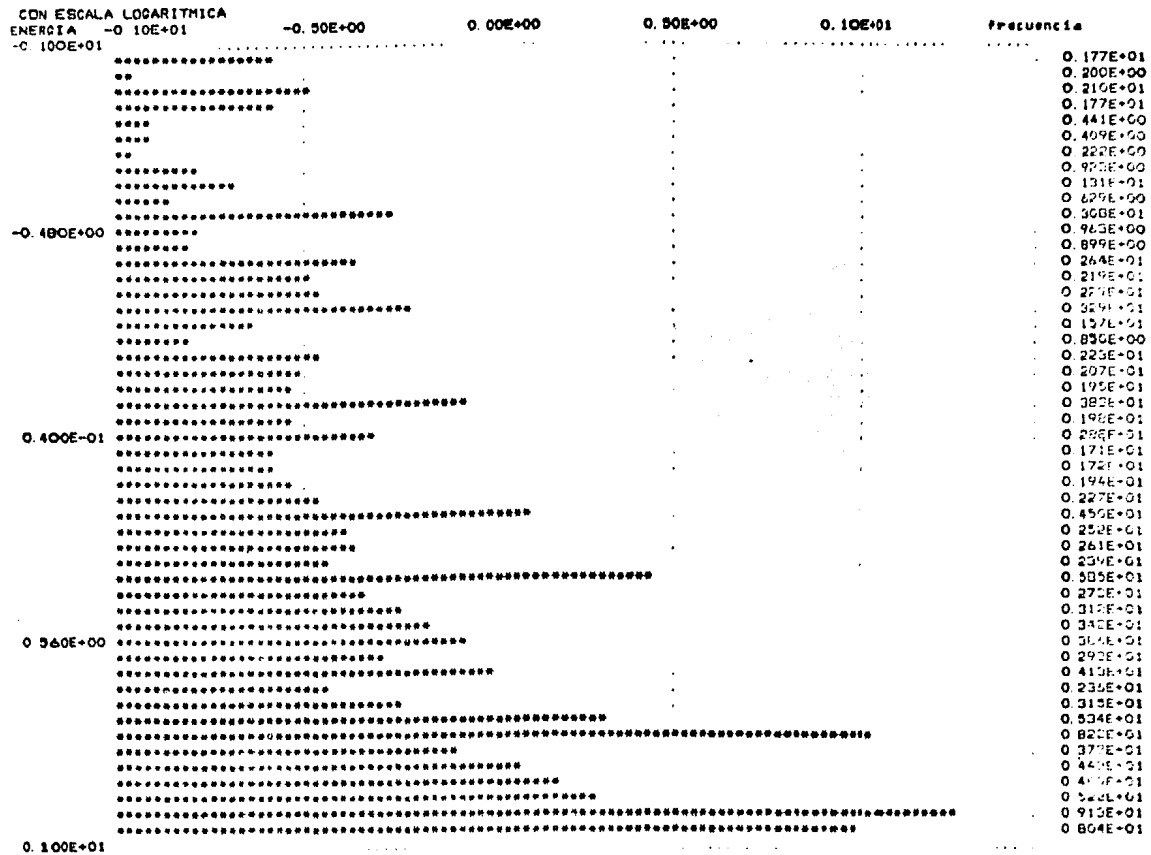


FIGURA IV. VI 4.a.

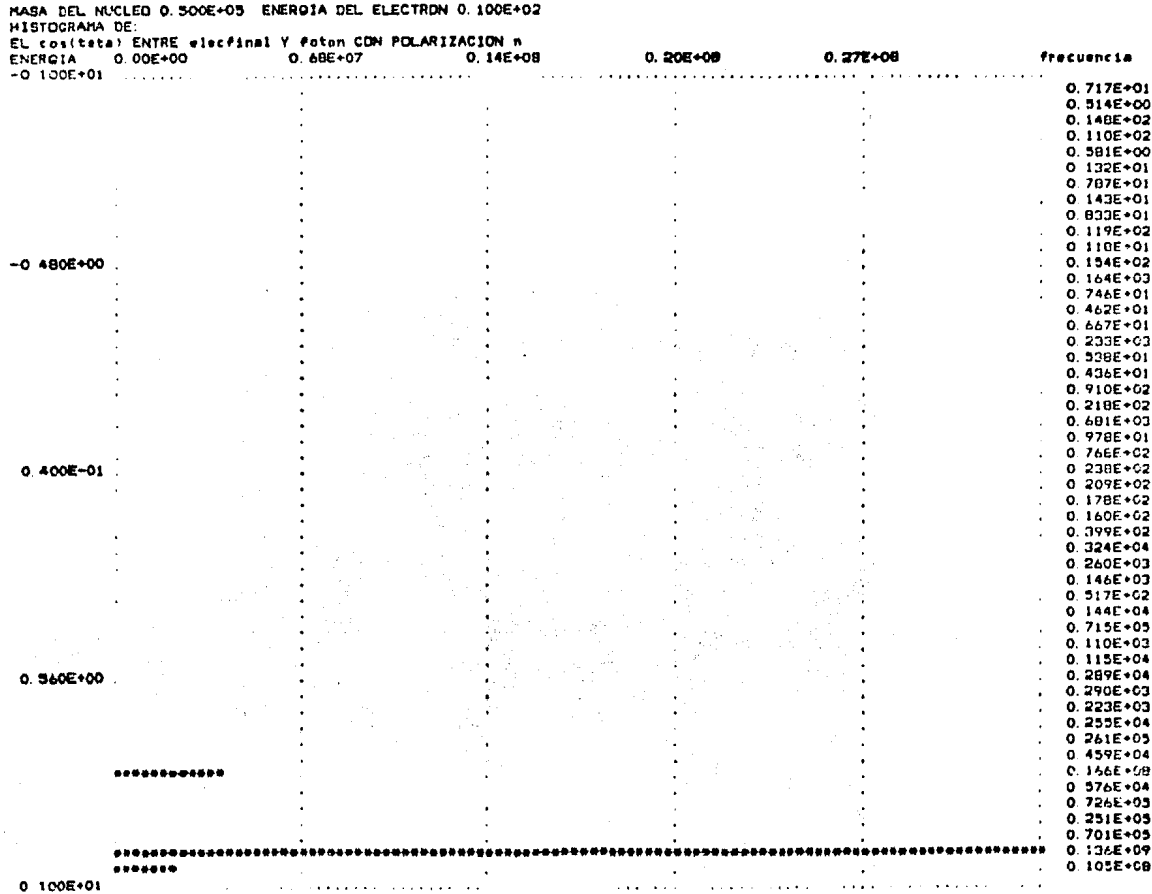


FIGURA IV. VI S. a.

MASA DEL NUCLEO 0.500E+05 ENERGIA DEL ELECTRON 0.100E+02
 HISTOGRAMA DE
 EL cos(theta) ENTRE electron y foton CON POLARIZACION s
 ENERGIA 0.00E+00 0.15E+09 0.30E+09

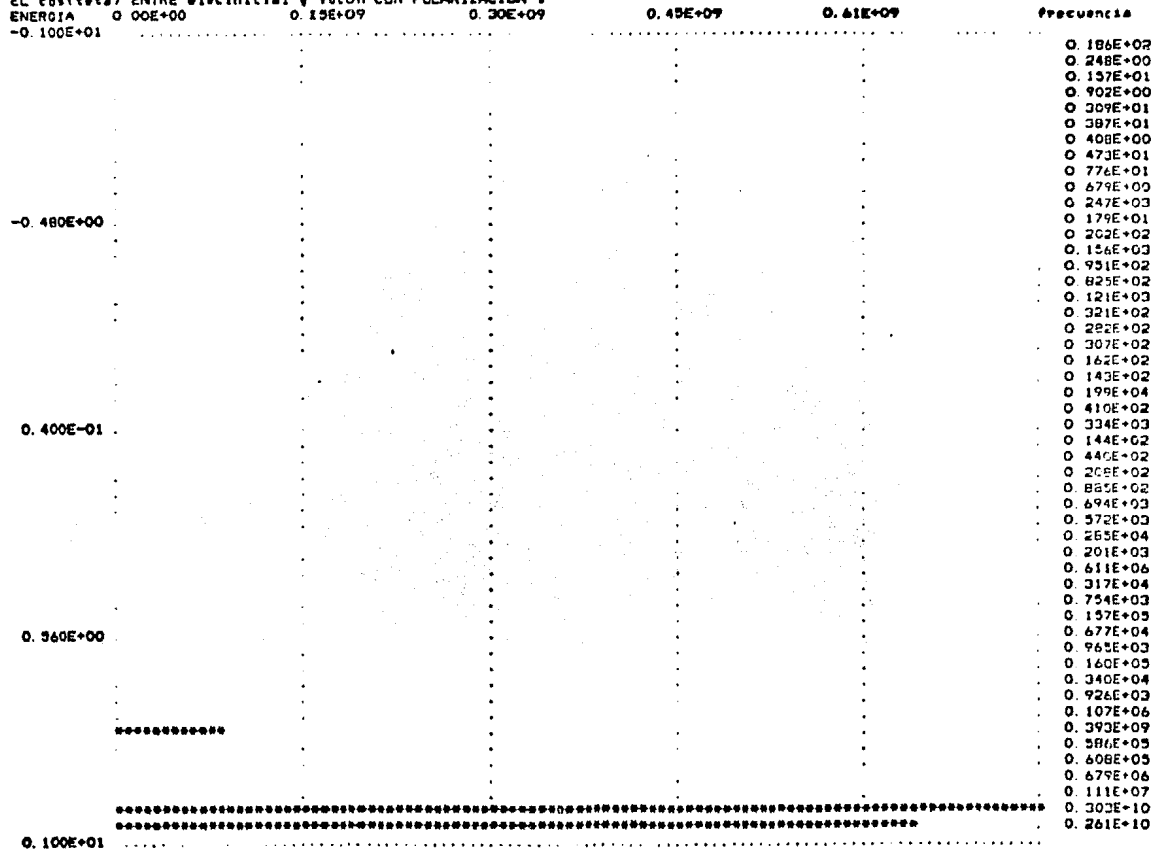


FIGURA IV.VI 6.a.

MASA DEL NUCLEO 0.500E+05 ENERGIA DEL ELECTRON 0.100E+02
 HISTOGRAMA DE
 EL cos(theta) ENTRE electron Y foton CON POLARIZACION s
 ENERGIA 0.00E+00 0.16E+09 0.31E+09

0.47E+09 0.62E+09

frecuencia

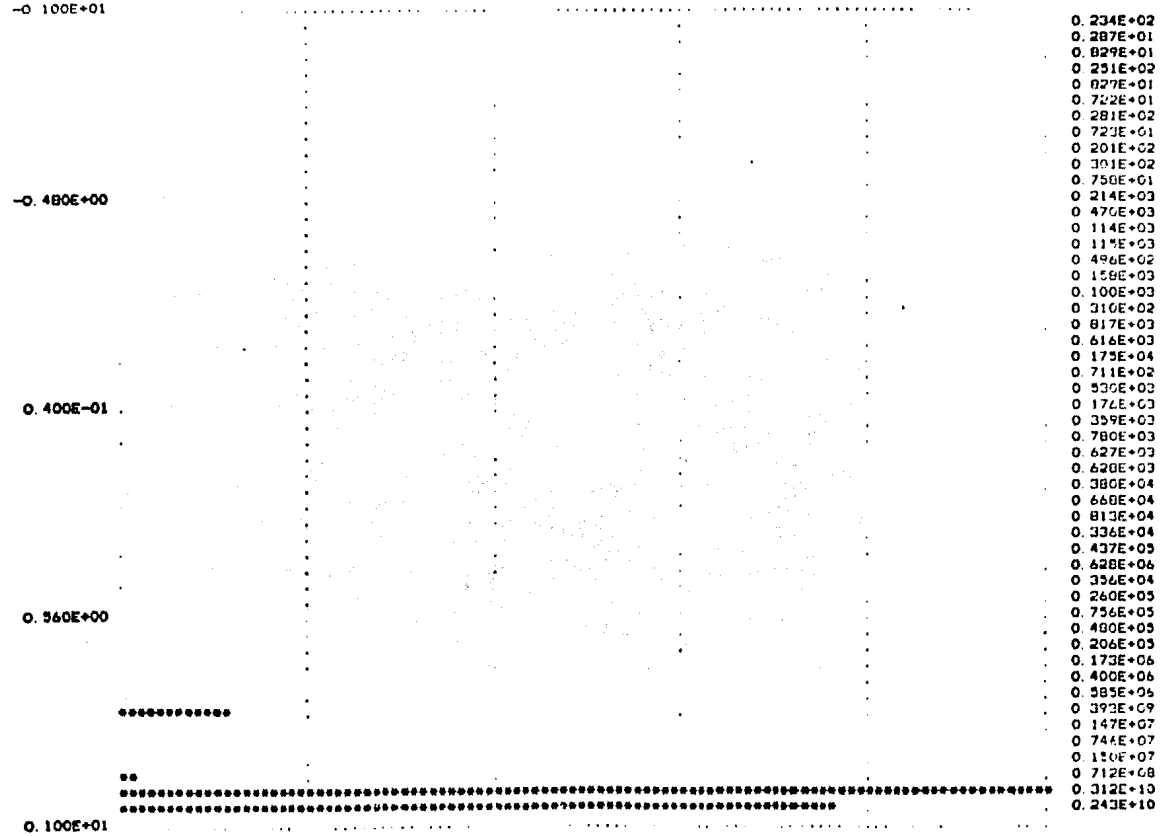
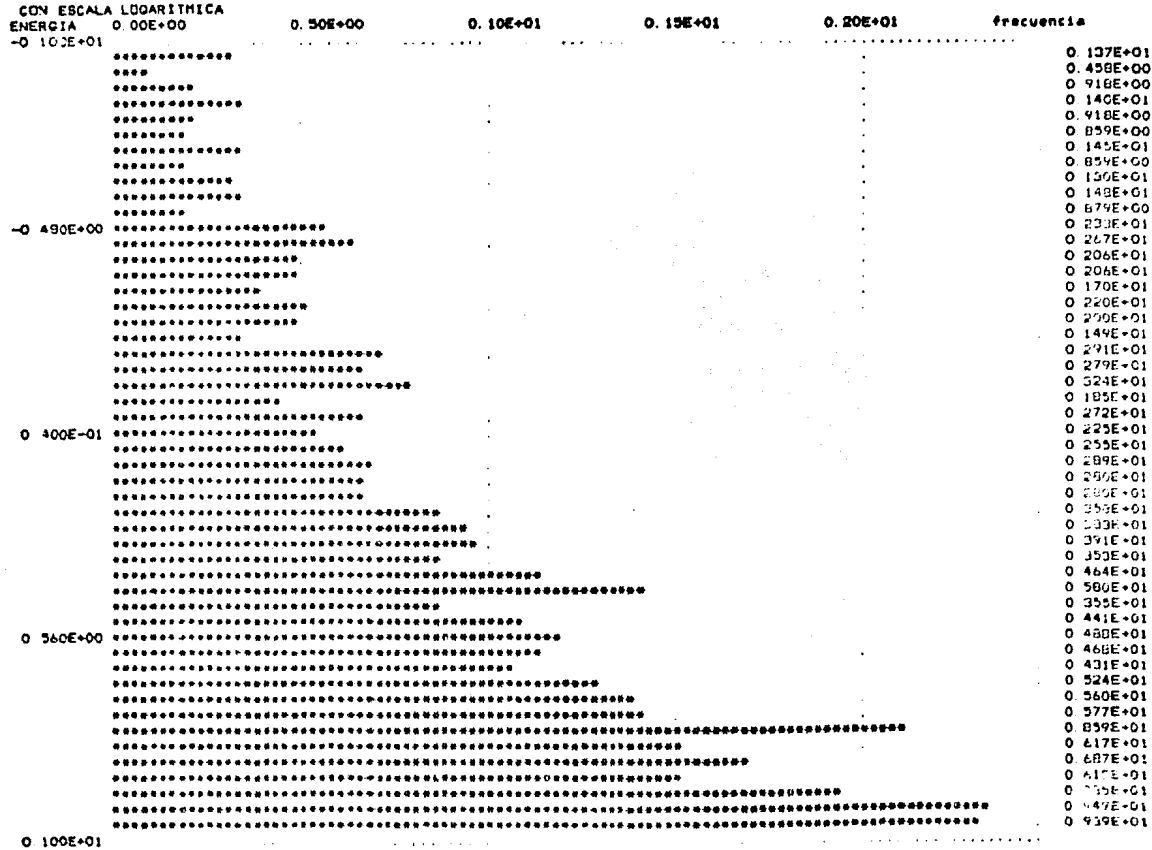


FIGURA IV.VI
O.L.C.



MASA DEL NUCLEO 0.500E+03 ENERGIA DEL ELECTRON 0.100E+02

HISTOGRAMA DE

LA ENERGIA DEL foton COMO ES GENERADA POR phsp

ENERGIA 0.00E+00

0.15E+04

0.31E+04

0.46E+04

0.62E+04

frecuencia

0.00E+00

0.240E+01

0.500E+01

0.760E+01

0.100E+02

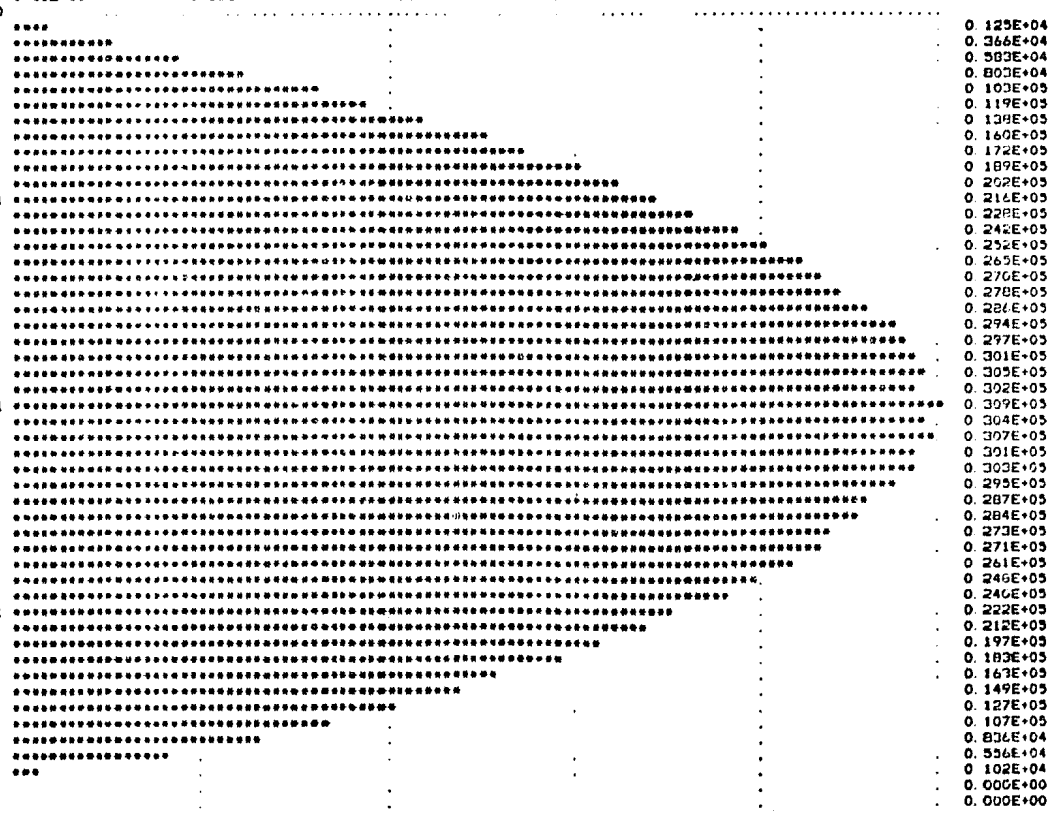


FIGURA IV. VI 7.

FIGURA IV. VI

8

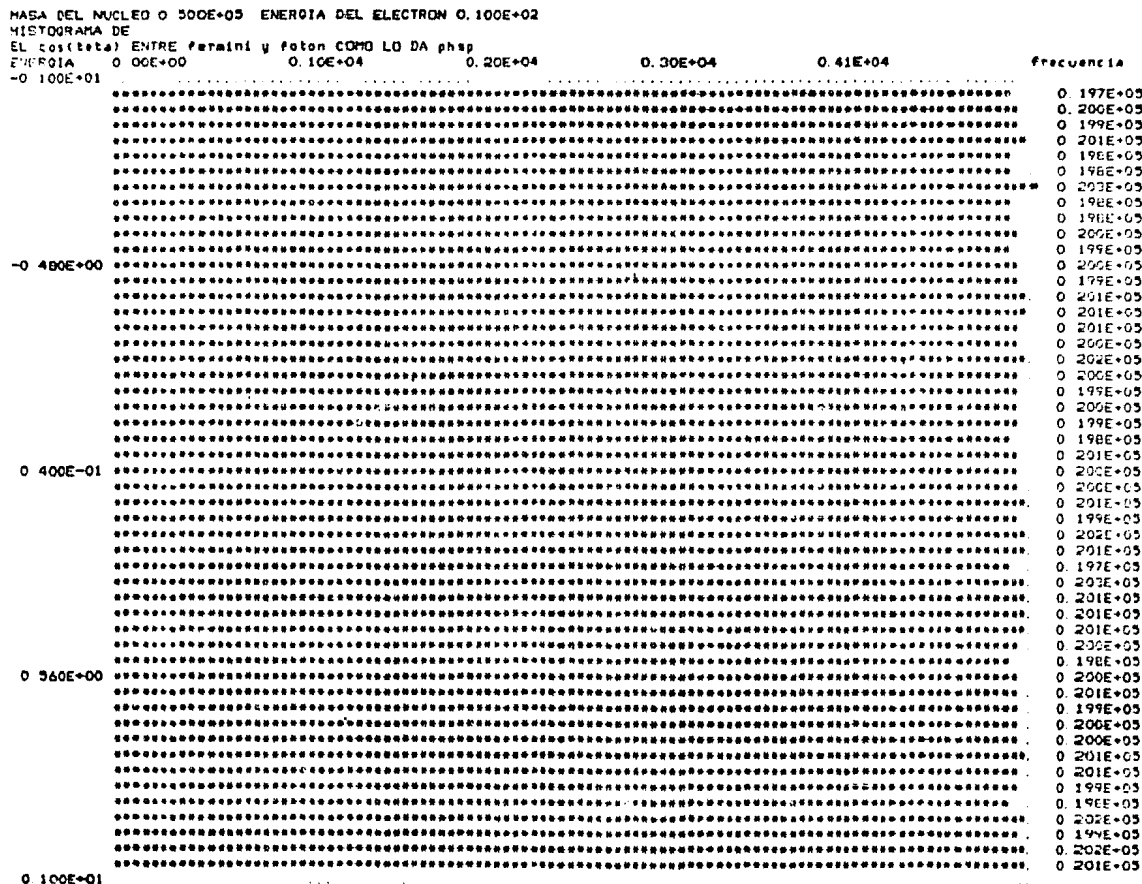
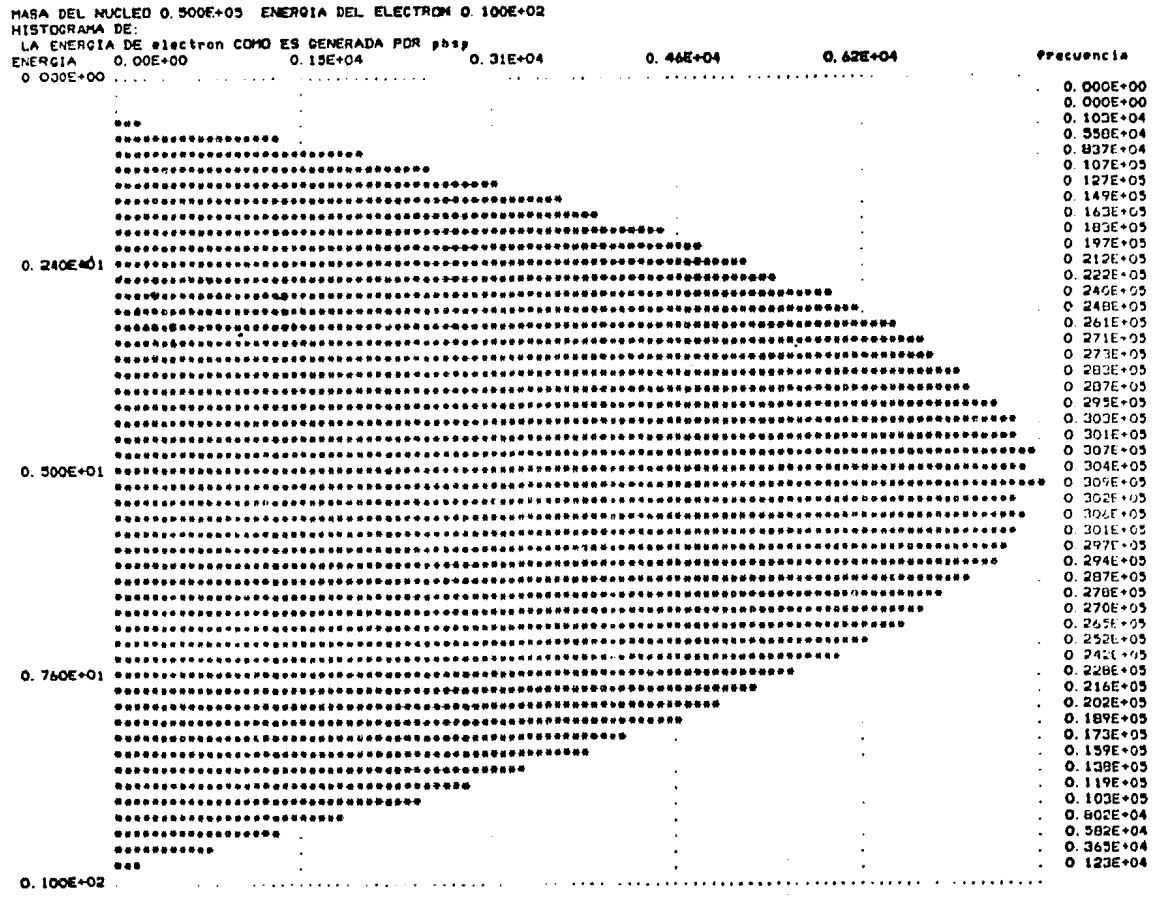


FIGURA IV. VI 9



PASA DEL NUCLEO 0.500E+05 ENERGIA DEL ELECTRON 0.100E+01
 HISTOGRAMA DE
 LA ENERGIA DEL foton CON POLARIZACION s

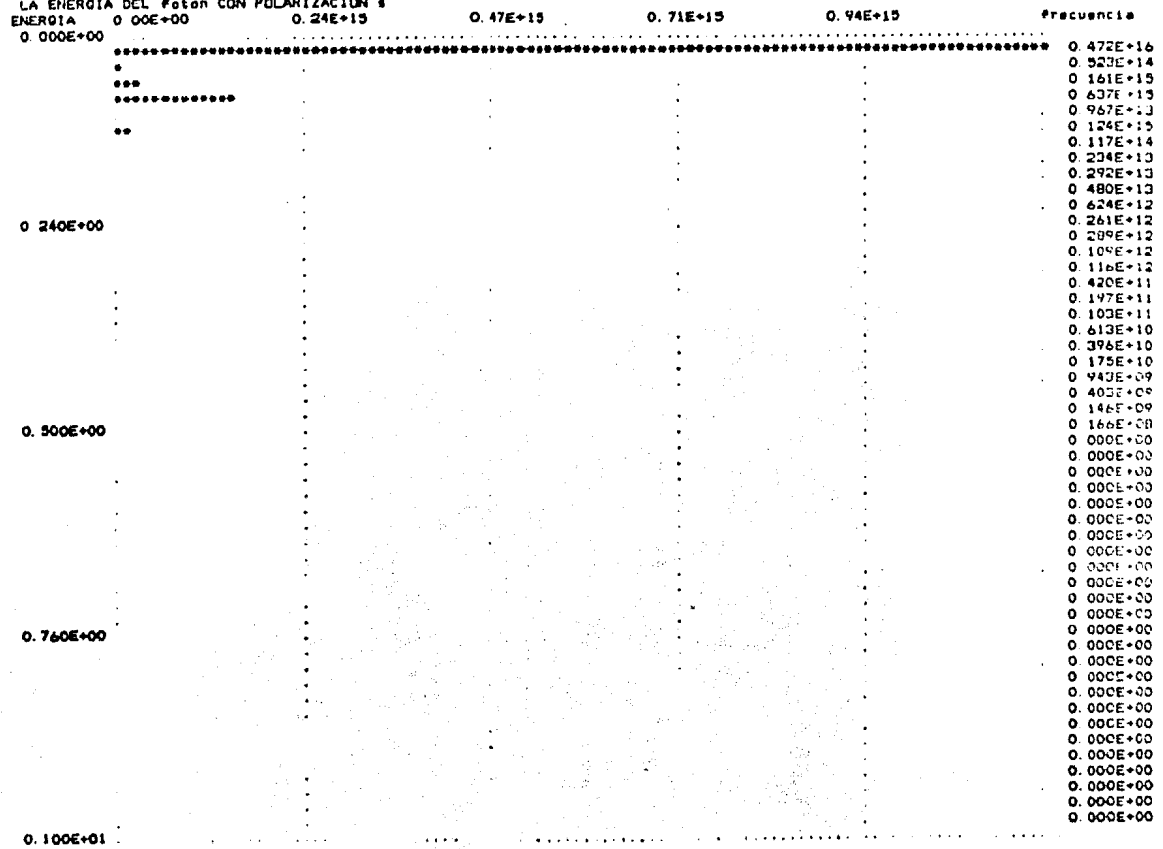
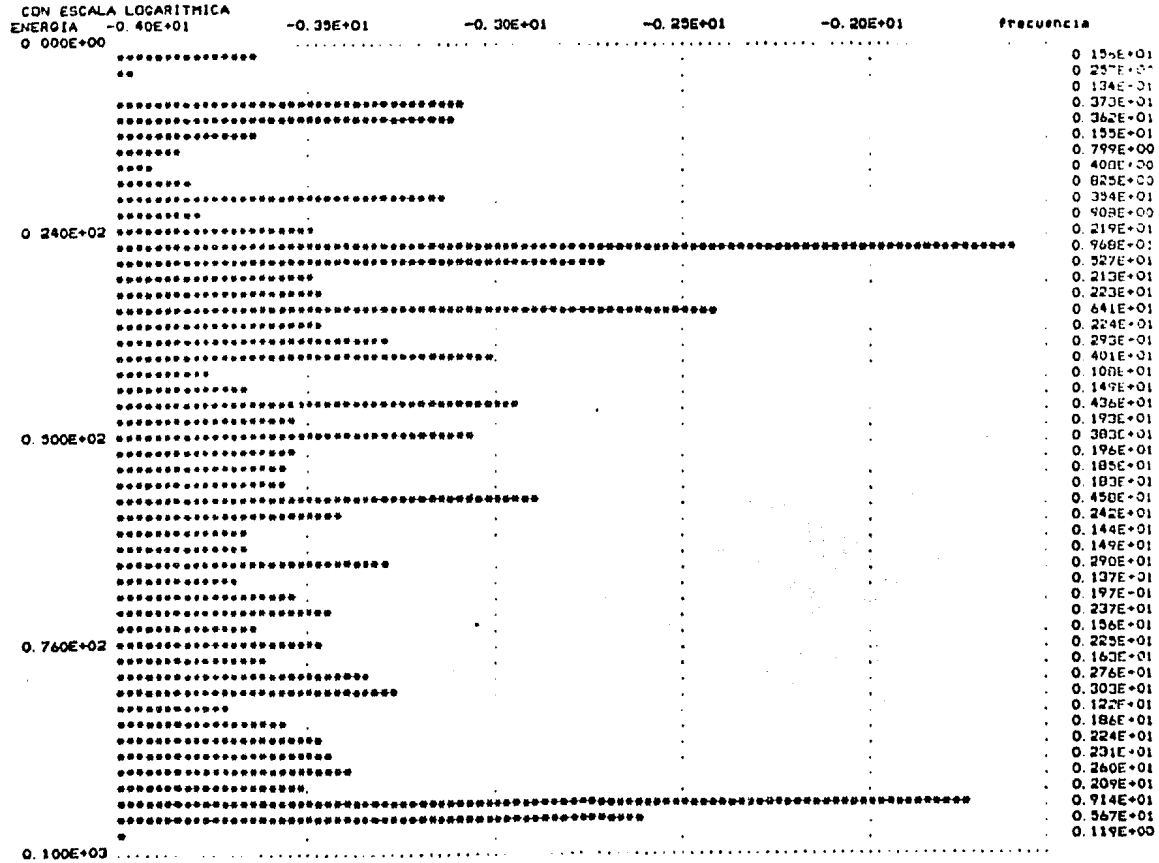


FIGURA IV.VII a.

FIGURA IV. IX 3.



Bibliografía

- (1) Annison G., Phys. Lett. 122 B, 103 (1983).
Annison G., Phys. Lett. 126 B, 398 (1983).
- (2) Banner M., Phys. Lett. 122 B, 322 (1983).
Banner M., Phys. Lett. 129 B, 130 (1983).
- (3) Bethe, H.A., Heitler W., PROC. ROY. SOC. 146, 83 (1934) LONDON.
- (4) Bjorking E., Kajantie K., "Particle Kinematics", John Wiley & Sons, London (1975).
- (5) Bjorken J.D., Drell S.D., "Relativistic Quantum Mechanics", Mc Graw Hill, New York (1964).
- (6) Bjorken J.D., Drell S.D., "Relativistic Quantum Fields", McGraw Hill, New York (1964).
- (7) Davis G.B., Hoffmann T.R., "Fortran 77 : A structured, disciplined style", McGraw Hill, Tokyo (1983).
- (8) Dirac P.A.M., "The Principles of Quantum Mechanics", Oxford University Press (1958).
- (9) Feynman R.P., Phys. Rev., 76, 749 (1949).
- (10) Feynman R.P., Phys. Rev. 76, 769 (1949).
- (11) Feynman R.P., "Quantum Electrodynamics", Benjamin Inc., New York (1962).
- (12) Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M., "The Feynman Lectures on Physics" Vol. I y Vol. II, Addison-Wesley Publishing Co., Reading (1975).
- (13) Hagedorn, "Relativistic Kinematics", Benjamin Inc., New York.
- (14) Heitler W., "The Quantum Theory of Radiation", Oxford Press, New York (1954).
- (15) Jackson J.D., "Classical Electrodynamics", John Wiley & Sons, New York (1975).
- (16) Koch H.W., Moltz J.W., Rev. of Mod. Phys., 31, 921 (1959).
- (17) Moreno M.F., "Closed Formula for The Products of n Dirac Matrices", Pre-tiro CINVESTAV (1984).
- (18) Rossi, B. "Optics", Addison-Wesley Publishing Co., Reading (1967).
- (19) Schiff L.P., "Quantum Mechanics", McGraw-Hill, New York (1968).