UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INFERENCIA Y PREDICCION EN EL MODELO LINEAL CLASICO RESTRINGIDO A SATISFA CER UNA OBSERVACION

T E S I S

que presenta

MARIA DOLORES CASTRO RIVERO

para obtener el título de

ACTUARIA

MEXICO,D.F. 1985

INDICE

I. INTRODUCCION

En general los fenómenos económicos presentan dificultad en su análisis debido principalmente a la imposibilidad de observarlos en condiciones experimentales. Frecuentemente se abordan utilizando modelos que suponen que la estructura económica arroja observaciones con comportamiento constante, siendo que en la realidad esto no sucede. Tal es el caso cuando se propone un modelo lineal para explicar y pronosticar el comportamiento de la variable $\underline{y}_T$ llamada endógena, en función de un conjunto de P variables exógenas $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_p)$. Esto es,

$$\underline{y}_T = X_T \underline{B} + \underline{u}_T \qquad (1.1)$$

donde $\underline{B}$ es el vector de parámetros fijos y desconocidos, T es el tamaño de muestra, X_T a la matriz (TXP) donde está contenida la información de las P variables exógenas mencionadas anteriormente para los T períodos. Es decir, el t-ésimo renglón ($\underline{x}'_t$) contiene la información en el período t de dichas variables. Para simplificar el análisis supondremos en lo sucesivo que las variables exógenas son no estocásticas. El análisis que se obtenga es condicional a los valores observados de ellas, es decir a X_T. Aunque no será abordado el caso cuando X_T es estocástica, buena parte de los resultados que se establecerán, en particular los de tipo asintótico, son también válidos si X_T es estocástica, cumple con ciertas condiciones de convergencia en sus segundos momento y es independiente de $\underline{U}_T$.

Por último, $\underline{U}_T$ es un vector no observable de perturbaciones, para el que se supone distribución normal. Se hace esta suposición pues facilita la construcción de intervalos de confianza y pruebas de significancia aunque no resulte necesaria en general, si la muestra es lo suficientemente grande.

Adicionalmente, supondremos que los errores son independientes e identicamente distribuídos con media cero y varianza σ^2 . En resumen,

$$\underline{U}_T \sim N(0, \sigma^2 I_T)$$

donde I_T es la matriz identidad de orden T.

El modelo (1.1) con estos supuestos es conocido como el Modelo Lineal Clásico.

Ahora, para los efectos de este estudio se supondrá para X_T que:

- La información de cada variable exógena es exclusiva es decir cada una deberá aportar información que no sea repetida de alguna forma en otra, por lo que todas las columnas de la matriz X_T deberán ser linealmente independientes entre sí. Con esto puede garantizarse que el rango de X_T es P, al igual que el de $X_T' X_T$, por lo que:

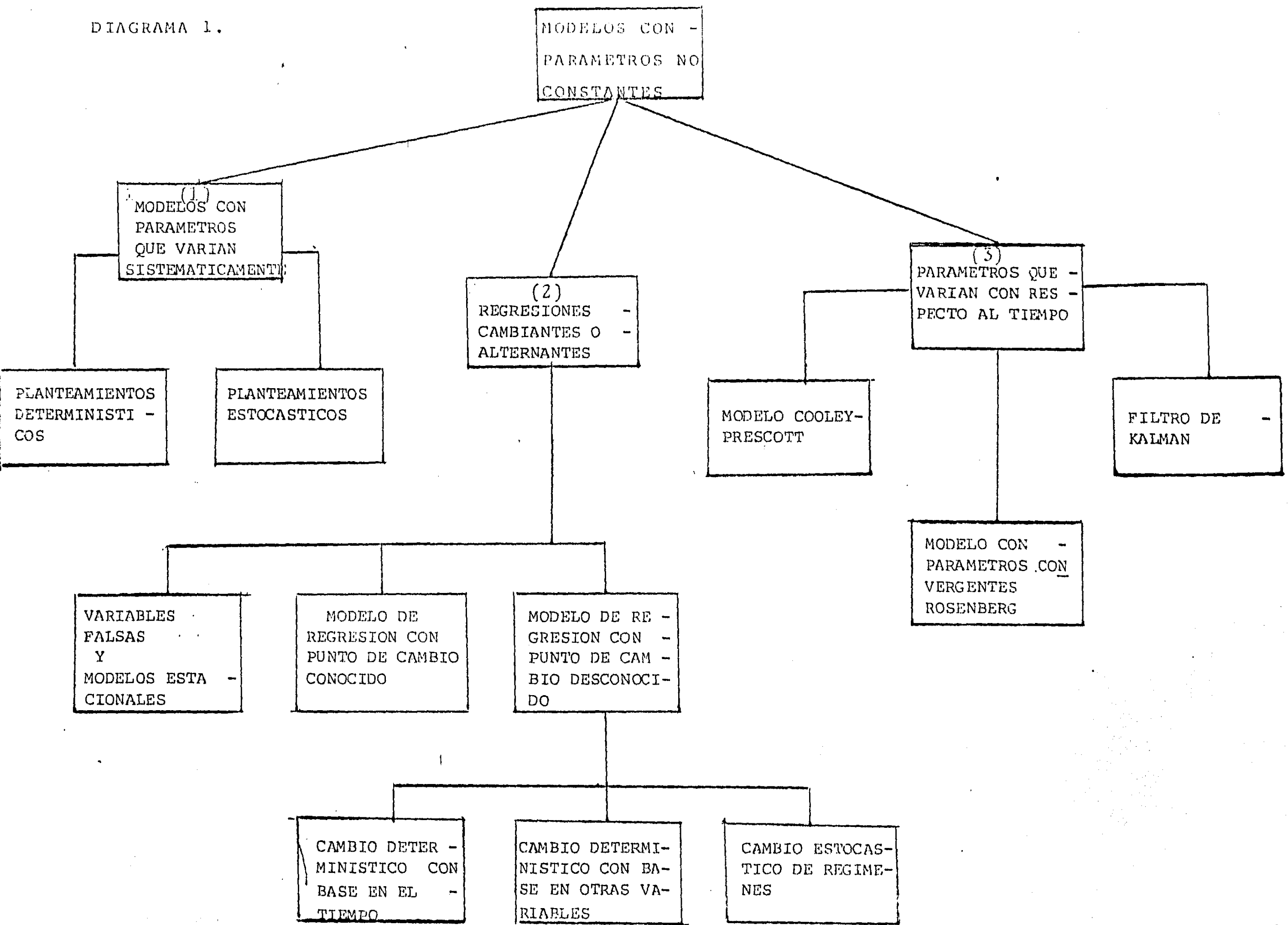
$$V_T = (X_T' X_T)^{-1} \qquad \text{existe.}$$

En la práctica se ha observado que en muchos casos las predicciones sobre fenómenos económicos resultan erróneas, y se argumenta que esto se debe a que la técnica utilizada no es adecuada pues ignora la naturaleza cambiante de la estructura económica o no la aborda adecuadamente. Sin embargo recientemente se han desarrollado técnicas de estimación más adecuadas, con nuevas especificaciones para atacar el problema de variación parametral.

Algunos de los modelos propuestos para solucionar el problema presente cuando los parámetros varían de forma sistemática, estan contenidos en el diagrama 1.[1/]

1/ Tanto este diagrama como algunos resultados que serán utilizados en este este estudio se extrajeron de: "The Theory and Practice of Econometrics". Judge / Griffiths / Hill / Lee (Capítulo 10)

DIAGRAMA 1.



Fuente: The Theory and Practice of econometrics Judge/Ariffths/Hill/Lee. page 383.

Este diagrama presenta la relación entre distintos tipos de modelos, los que se dividen en 3 grupos principales y cada uno de éstos se sibdivide a su vez.

El primer grupo (1) contiene a los modelos donde los parámetros son considerados variantes a través de las observaciones en función de valores y variables explicativas.

El segundo grupo (2) presenta los modelos donde los parámetros hacen cambios discretos a puntos conocidos y desconocidos en la serie observada. Esto incluye modelos que consideran efectos estacionales.

Y en el tercero (3), los modelos considerados son aquellos que pretenden describir el sistema en el transcurso del tiempo mediante un proceso dinámico.2/

El presente trabajo propone una forma alternativa a las presentadas en el diagrama 1 para tratar el problema de cambio estructural.

2/ Para profundizar sobre tales grupos se recomienda consultar la bibliografía. Judge et al (op cit).

Este tratamiento consiste en suponer el modelo (1.1) con las mismas características y estimar su vector de parámetros $\underline{B}$ de tal forma que el ajuste de la última observación sea exacto.

La idea que se tiene cuando se estima exactamente a la última observación, es considerar al período más reciente como el más relevante para la explicación del presente y la predicción del futuro, lo cual no sucede con el estimador MCO (mínimo cuadrático ordinario)[3/], ya que al crecer la muestra éste varía por una regla autónoma y donde todas las observaciones son tratadas con igual peso. Aunque desde luego, esto podría modularse a través de cambiar las varianzas de las perturbaciones reduciéndolas gradualmente a medida que el tiempo transcurre. Lo anterior podría tener, en relación al método aquí propuesto, la ventaja de no centrar toda la importancia en el pasado estrictamente inmediato, sino graduar la relevancia de toda la información histórica en relación al presente.

Sin embargo, la estimación que aquí se propone sólo podría abordarse como caso límite, pues como quedará claro a lo

---

3/ Estimador sumamente común en la literatura estadística.

largo de la exposición, implicaría utilizar varianza nula para el último período. Si se utiliza el estimador de Aitken, - la singularidad de la matriz de varianzas y covarianzas será eliminada desechando el renglón asociado a la última observación.[4/]

Este tratamiento de cambio estructural a partir de heteroscedasticidad es interesante y consideramos que podría incluirse en el grupo (1) del diagrama presentado. Sin embargo, no - se tratará en este trabajo por motivos de extensión y queda - como tema para futura investigación y análisis. Es posible -- que una combinación de ambos métodos (el de heteroscedasticidad y el propuesto aquí) proporcione resultados más atractivos.

El método que aquí se propone, si bien se verá en un contexto mas ampli en su derivación, parte de la idea de cambio estructural sobre la base de que la relación es estable en - términos de las variables involucradas. Esto es, la variabilidad endógena en función de las variables exógenas en cada período aunque posiblemente con diferente relación, es decir

---

4/ Theil aborda el problema en forma adecuada al notar que la singularidad en la matriz de varianzas implica la imposición de restricciones dependientes de las observaciones redundantes.
H. Theil. "Principles of Econometrics. (pag. 282-293)

$$y_t = f_1(\underline{x}_t) + u_t \qquad \forall t$$

y suponiendo que la relación sea lineal (lo que podría propo nerse como aproximación local de primer orden) se tendría:

$$y_t = \underline{x}'_t \underline{B}_t + u_t$$

Si se tienen T observaciones secuenciales en el tiempo -- (t-1,...,T) y bajo el planteamiento de que la historia más - reciente es más relevante para explicar el presente y el futu- ro, nuestro interés se centra en la última observación

$$y_T = \underline{x}'_T \underline{B}_T + u_T$$

Dada la no observabilidad de u_T , se pensaría en estimar- a $\underline{B}_T$ incorporando la relación

$$\underline{x}'_T \underline{B}_T = y_T \tag{1.2}$$

que siempre tiene solución pues

$$\rho(\underline{x}'_t \underline{B}_T) = \rho(\underline{x}'_t) = 1 \qquad \text{pues} \qquad \underline{B}_T \in \mathbb{R}^p$$

por tanto las soluciones son infinitas.

Se propone utilizar el resto de las observaciones como - información adicional para resolver este problema. Pero esto debe hacerse de forma tal que la ecuación (1.2) se mantenga.- Es decir, para t=1,...,T-1 se tiene que,

$$y_t = \underline{x}_t' \underline{B}_t + u_t$$

$$= \underline{x}_t' \underline{B}_t + \underline{x}_t' \underline{B}_T - \underline{x}_t' \underline{B}_T + u_t$$

$$= \underline{x}_t' \underline{B}_T + u^*_{t,T}$$

donde $u^*_{t,T} = u_T + \underline{x}_t'(\underline{\beta}_t - \underline{\beta}_T)$ se interpretaría como una -- perturbación de "trancisión" del estado de la economía del -- tiempo t al T.

Se tendrá entonces, agrupando observaciones

$$\underline{y}_T = X_T \underline{B}_T + \underline{U}^*_{T,T} \qquad (1.3)$$

donde $\underline{U}^*_{T,T} = (u^*_{1,T}, u^*_{2,T}, \ldots, u^*_{T,T})$ y $u^*_{T,T} = u_T$

El problema es entonces estimar $\underline{B}_T$ en (1.3) sujeto a (-1.2).

De esta forma, el planteamiento de cambio estructural está implícito en el proceso de estimación de (1.3), que propone explícitamente permanencia estructural. Obviamente, esta permanencia estructural depende de que el comportamiento intertemporal de $u^*_{t,T}$ sea estable. Esta estabilidad puede lograrse a nivel de supuesto de diferentes formas.

Una manera sería introducir coeficientes estocásticos sujetos a una transición "estable" en cierto sentido. Si se supone, como es común en los modelos con coeficientes aleatorios que

$$\underline{\beta}_t - \underline{\beta}_T \sim iid(0, \Omega)$$

independiente de u_t , se tendría un efecto heteroscedático pues

$$u^*_{t,T} \sim iid(\underline{0}, \sigma^2 + \underline{x}'_t \Omega \underline{x}_t)$$

lo que no lograría estabilidad. Lo que se requeriría es suponer que la transición "estable" se da en términos de $\underline{x}'_t(\underline{\beta}_t - \underline{\beta}_T)$. Es decir,

$$\underline{x}'_t(\underline{\beta}_t - \underline{\beta}_T) \sim iid(0, \sigma^2_*) \quad , \quad (\sigma^2_* = cte)$$

independiente de u_t , con lo que

$$u^*_{t,T} \sim iid(0, \sigma^2 + \sigma^2_*)$$

Este concepto de "estabilidad" parece más adecuado a nuestro planteamiento pues implica un cambio gradual en la distribución de $\underline{B}_t - \underline{B}_T$ que está en función del estado de la economá, representado parcialmente por $\underline{x}_t$.

Si bien no sería demasiado complejo abordar el tratamiento de coeficientes estocásticos antes descrito, se considera que en un primer acercamiento al tema puede resultar más claro con un enfoque más simple que evite problemas colaterales. En este sentido, el supuesto que será utilizado dada su simplicidad va a ser $\underline{x}'_t(\underline{B}_t - \underline{B}_T) = 0$, lo que es el caso particular cuando $\sigma^2_* = 0$ (o bien $u^*_{t,T} = u_t$). Bajo esta simplificación $\underline{B}_t - \underline{B}_T$ pertenece al espacio nulo de $\underline{x}'_t$ (un espacio de dimensión P-1), lo cual supone para t=1,...,T-1 que nuestro tratamiento del cambio estructural se restringe a

$$\left\{ \underline{B}_T \mid B_t - \underline{B}_T \in N(\underline{x}'_t) \quad , t = 1, 2, \ldots, T-1 \right\}$$

lo que resulta difícil de analizar más allá de este planteamiento pues se trata de lainterseccíón de T-1 espacios de dimensión P-1. El cambio sucesivo en $\underline{B}_t$ dificulta la interpre tación.

Hechos estos planteamientos, en síntesis, se pretende estimar (1.1) sujeto a (1.2). Cabe aclarar que si bien ésta es la forma técnica de resolver el problema, existe una diferencia fundamental con (1.1) que está implícita en el argumento. Bajo la propuesta que se hace, el vector de coeficientes estimado de toda la muestra es el correspondiente a la última observación, a diferencia del modelo lineal clásico que postula un vector de coeficientes igual para todas las observaciones.

En los siguientes capítulos se desarrollará y analizará esta propuesta, contrastándola con el tratamiento clásico de estimar (1.1) en forma irrestricta.

Los estimadores para el modelo lineal clásico

$$\underline{y}_T = X_T \underline{B} + \underline{U}_T$$

sin y con restricciones lineales de la forma $C'\underline{B}=\underline{S}$ son, respectivamente:

$$\hat{\underline{B}}_T = (X_T' X_T)^{-1} X_T \underline{y}_T = V_T X_T' \underline{y}_T \quad \text{5/} \tag{1.4}$$

5/ Applied Regression Analysis
Norman Draper / Harry Smith (pag. 243)

y

$$ {}_R\hat{\underline{\beta}}_T = \hat{\underline{\beta}}_T - V_T C(C'V_T C)^{-1}(C'\hat{\underline{\beta}}_T - \underline{S}) \quad (1.5)$$ 6/

donde $V_T = (X_T' X_T)^{-1}$

En el estimador (1.5) se tiene que:

C es una matriz de constantes (PXR) que representan R restricciones sobre los P parámetros. Las R columnas son linealmente independientes y $R \leq P$, con esto se garantiza que las restricciones sean consistentes y no redundantes, dado que las R columnas tienen en -- sus P componentes(renglones) los coeficientes de las distintas combinaciones lineales que se complemen-- tan con $\underline{S}$.

$\underline{S}$ vector de constantes (RX1)

Para que el estimador satisfaga la t-ésima observación, - las restricciones consideradas son:

6/ Applied Regression Analysis
Norman Draper / Harry Smith (pag. 122)

$$C = \underline{x}_t \qquad y \qquad \underline{S} = y_t$$

por lo que, la segunda expresión $({}_R\hat{\underline{B}}_T)$ se modifica a:

$$_t\hat{\underline{B}}_T = \hat{\underline{B}}_T + \frac{\hat{u}_{t,T}}{n_{t,T}} V_T \underline{x}_t \qquad , t = T \qquad (1.6)$$

En la relación (1.6), $\hat{u}_{t,T}$ es el t-ésimo residuo que se obtiene de $\hat{\underline{B}}_T$ con un tamaño de muestra T $(\hat{u}_{t,T} = y_t - \underline{x}_t' \hat{\underline{B}}_T)$ y -- $n_{t,T}$ es el elemento (t,t) de la matriz de proyección $N_T = X_T \cdot (X_T'X_T)^{-} X_T'$ sobre el espacio generado por X_T (y $n_{t,T} = \underline{x}_t' V_T \underline{x}_t$).

Analizaremos las propiedades de $\hat{\underline{B}}_T$ y ${}_t\hat{\underline{B}}_T$ en el contexto mas amplio de un modelo de la forma

$$\underline{y}_T = X_T \underline{B} + Z_T \gamma + \underline{U}_T$$

haciendo notar dos casos:

a) Si $\gamma = 0$, se tiene una correcta especificación, -- pues se estimó bajo este supuesto.

b) Si $\gamma \neq 0$, se dice que se tiene incorrecta especificación, pues la estimación se hizo suponiendo $\gamma = 0$.

Para referir el problema de especificación en el segundo caso a cambio estructural en la última observación, la matriz Z_T será de la forma especfica

$$Z_T = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{x}'_T \end{bmatrix} = I_{\cdot T} \cdot \underline{x}'_T$$

esto es, una matriz cuya dimensión es (TXP) y su T-ésimo renglón representa dicha observación.

A continuación, se dará una breve descripción de los capítulos restantes en este documento así como su contenido a grandes rasgos.

En en capítulo II, se presentan las propiedades de los estimadores bajo correcta e incorrecta especificación (a partir de la forma (1.4), (1.5) y (1.6))

En el capítulo III, se obtienen los errores cuadráticos medios de estimadores y predictores bajo los distintos supuestos ($\gamma=0$ y $\gamma\neq 0$), y la comparación entre éstos en cada caso.

En el capítulo IV, se presentan aplicaciones del estimador de interés con datos económicos, contrastándolos con los del estimador lineal clásico.

Finalmente, en el capítulo V se presentan las conclusiones de este estudio.

Con el fin de agilizar la lectura, la notación será presentada en el apéndice que aparece al final del trabajo. Sin embargo cada concepto será definido a medida que vaya apareciendo.

II. PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES

Este capítulo será dividido en dos grandes etapas: la primera (A) abordará resultados concernientes sólo al estimador $\hat{\underline{B}}_T$, y la segunda (B) los referentes al estimador de interés $_T\hat{\underline{B}}_T$.

En ambas etapas, los desarrollos que se presenten supondrán que

$$\underline{Y}_T = X_T \underline{B} + Z_T \underline{\gamma} + \underline{U}_T \tag{2.1}$$

debido a que el modelo lineal clásico (1.1) puede deducirse de éste, cuando $\gamma = 0$.

No se hace este supuesto desde el inicio de este estudio, pues el modelo presente en ambas estimaciones de los parámetros ($\hat{\underline{B}}_T$ y $_T\hat{\underline{B}}_T$) no incluye el término afectado por $\underline{\gamma}$.

La razón por la que se incorporó este modelo (2.1), se debe al interés que se tiene sobre la comparación de los resultados asociados a ambos estimadores bajo correcta ($\gamma = 0$) e incorrecta ($\gamma \neq 0$) especificación, tomando en cuenta la forma (1.4) y (1.6).

II.A PROPIEDADES DE $\hat{\underline{B}}_T$.

Bajo el modelo (2.1), se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{\underline{B}}_T &= V_T X_T' \underline{y}_T \\ &= V_T X_T' (X_T \underline{B} + Z_T \underline{\gamma} + \underline{U}_T) \\ &= V_T X_T' X_T \underline{B} + V_T X_T' Z_T \underline{\gamma} + V_T X_T' \underline{U}_T \\ &= \underline{B} + V_T X_T' Z_T \underline{\gamma} + V_T X_T' \underline{U}_T\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \hat{\underline{B}}_T = \underline{B} + V_T X_T' Z_T \underline{\gamma} + V_T X_T' \underline{U}_T \tag{2.2}$$

sin embargo, dada la forma supuesta para Z_T,

$$X_T' Z_T = [X_T' \quad \underline{x}_T] \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{x}_T' \end{bmatrix} = \underline{x}_T \underline{x}_T' \tag{2.3}$$

por lo que

$$\hat{\underline{B}}_T = \underline{B} + V_T \underline{x}_T \underline{x}_T' \underline{\gamma} + V_T X_T' \underline{U}_T \tag{2.4}$$

Cuando $\gamma = 0$, de este último se deriva el resultado usual para $\hat{\underline{B}}_T$,

$$\hat{\underline{B}}_T = \underline{B} + V_T X_T' \underline{U}_T \tag{2.5}$$

RESIDUOS $\hat{\underline{U}}_T$

Así, de manera inmediata pueden obtenerse los residuos -- asociados a cada estimador, los cuales son:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{U}}_T &= \underline{Y}_T - X_T\hat{\underline{B}}_T \\ &= \underline{Y}_T - X_T V_T X_T' \underline{Y}_T = (I - N_T)\underline{Y}_T = M_T\underline{Y}_T \qquad (2.6)\end{aligned}$$

donde

$N_T = X_T V_T X_T'$ es la matriz de proyección sobre el espacio generado por X_T, y

$M_T = I_T - N_T$ es la matriz de proyección sobre el espacio ortogonal al generado por X_T.

N_T y M_T son simétricas e idempotentes por construcción y cumplen con

$$X_T' N_T = X_T' \quad ; \quad N_T X_T = X_T$$

y

$$X_T' M_T = 0 \quad ; \quad M_T X_T = 0$$

Sustituyendo (2.1) en (2.6)

$$\hat{\underline{U}}_T = M_T(X_T\underline{B} + Z_T\underline{\gamma} + \underline{U}_T) = M_T Z_T \underline{\gamma} + M_T \underline{U}_T \qquad (2.7)$$

y si $\gamma = 0$

$$\hat{\underline{U}}_T = M_T \underline{U}_T$$

DISTRIBUCION DE $\hat{\underline{B}}_T$

La distribución para $\hat{\underline{B}}_T$, se establecerá a partir de saber que

$$\underline{y}_T \sim N(X_T\underline{B} + Z_T\underline{\gamma},\ \sigma^2 I_T)\ \underline{1/}$$

y de (2.3), por lo que es inmediato que

$$\hat{\underline{B}}_T \sim N(\underline{B} + V_T x_T' z_T \underline{\gamma},\ \sigma^2 V_T) \qquad (2.8)$$

y si $\gamma = 0$,

$$\hat{\underline{B}}_T \sim N(\underline{B},\ \sigma^2 V_T)$$

siguiendo de esto, que el estimador $\hat{\underline{B}}_T$ es insesgado cuando $\gamma = 0$.

1/ Si $\underline{W} \sim N(\mu, \mathcal{W})$ y C es una matriz (PXN) y $\underline{R}$ un vector (PX1) entonces $C'\underline{W} + \underline{R} \sim N(C\mu + \underline{R}, C'\mathcal{W}C)$
The Estatistical Implications of Stein-rule and Preliminary Test Estimators in Econometrics. Judge G.G. y W. Bock (Apéndice A)

DISTRIBUCION DE $\hat{\underline{U}}_T$

Análogamente al caso anterior y utilizando(2.7), así como el teorema citado en 1/, la distribución para los residuos se expresa como:

$$\hat{\underline{U}}_T \sim N(M_T Z_T \underline{\gamma}\ ,\ \sigma^2 M_T) \qquad (2.9)$$

y por lo tanto, si $\gamma=0$ como

$$\hat{\underline{U}}_T \sim N(0, \sigma^2 M_T)$$

La independencia entre $\hat{\underline{U}}_T$ y $\hat{\underline{B}}_T$ pueden ser fácilmente demostrable, debido a que se distribuye normalmente. Por lo que, - bastará demostrar que $COV(\hat{\underline{B}}_T, \hat{\underline{U}}_T) = 0$

Como $\hat{\underline{B}}_T - E(\hat{\underline{B}}_T) = V_T X_T' \underline{U}_T$

y $\hat{\underline{U}}_T - E(\hat{\underline{U}}_T) = M_T \underline{U}_T$ se tiene que

$$COV(\hat{\underline{B}}_T, \hat{\underline{U}}_T) = E(V_T X_T' \underline{U}_T \underline{U}_T' M_T) = \sigma^2 V_T X_T' M_T = 0$$

pues $X_T' M_T = 0$ y con esto se sigue que $\hat{\underline{B}}_T$ y $\hat{\underline{U}}_T$ son independientes.

ESTIMADOR DE σ^2

Utilizando la expresión encontrada para los residuos $\hat{\underline{U}}_T$ en (2.7), se deduce que el estimador de la varianza asociado a $\hat{\underline{B}}_T$ es:

$$\hat{\sigma}_T^2 = \frac{1}{T}\hat{\underline{U}}_T'\hat{\underline{U}}_T = \frac{1}{T}(Z_T\underline{\gamma} + \underline{U}_T)' M_T (Z_T\underline{\gamma} + \underline{U}_T)$$

y si $\gamma = 0$

$$\hat{\sigma}_T^2 = \frac{1}{T}\hat{\underline{U}}_T'\hat{\underline{U}}_T = \frac{1}{T}\underline{U}_T' M_T \underline{U}_T$$

DISTRIBUCION DE $\hat{\sigma}_T^2$

De la distribución para $\underline{y}_T$, se deduce directamente la asociada al estimador de la varianza(σ^2) $\hat{\sigma}^2$, que que resulta ser una Ji-cuadrada de la forma:

$$\frac{1}{\sigma^2}\underline{y}_T' M_T \underline{y}_T \sim \chi^2_{(k,\lambda)} \quad \text{2/} \qquad (2.10)$$

donde

$$\lambda = \frac{1}{2}(\underline{\gamma}' Z_T M_T \underline{\gamma})$$

2/ Si $\underline{W} \sim N(\mu, v)$ entonces $\underline{W}'B\underline{W} \sim \chi^2_{(k,\lambda)}$ con $\lambda = \frac{1}{2}\mu' B \mu$ y k=rango(B) $\Leftrightarrow$ Bv es idempotente

The Statistical Implications of Stein-rule and Preliminary test Estimators in Econometrics. G.G. Judge y W. Bock (Apéndice A) y

$$K = \text{rango}\,(M_T) = T - P$$

ya que $M_T \cdot I_T = M_T$ y es idempotente.

Si $\underline{\gamma} = 0$

$$\frac{1}{\sigma^2}\, \underline{Y}_T'\, M_T\, \underline{Y}_T \sim \chi^2_{(T-P)}$$

RESULTADOS ASINTOTICOS DE $\hat{\underline{B}}_T$

En ocasiones, resulta difícil establecer propiedades de un estimador, tornándose complicada la inferencia estadística que con este puede realizarse. En tales casos, se recurre a resultados asintóticos que son más generales en cuanto a que permiten establecer resultados independientemente de la distribución de las variables aleatorias involucradas, y donde el tamaño de muestra T se supone bastante grande. Estrictamente los resultados asintóticos se obtienen y son válidos cuando $T \to \infty$.

Asintóticamente, las suposiciones sujetas a cambio son:

a) $E(X_T' \underline{U}_T) = 0$

b) $V_T = (X_T' X_T)^{-1}$

las cuales serán reemplazadas respectivamente por:3/

a) $\text{plim}\left(\frac{1}{T} X_T' \underline{U}_T\right) = 0$

b) $Q = \text{plim}\left(\frac{1}{T} X_T' X_T\right)$ matriz positiva definida

Por lo que en vez de probar que $E(\hat{\underline{B}}_T) = B$ para saber si es insesgado, se desea demostrar que $\text{plim}(\hat{\underline{B}}_T) = \underline{B}$ para saber si este estimador es consistente.

Utilizando la expresión de $\hat{\underline{B}}_T$ cuando $\gamma \neq 0$ y los nuevos supuestos, se tiene que:

$$\text{plim}(\hat{\underline{B}}_T) = \underline{B} + Q^{-1}\,\text{plim}\left(\frac{1}{T} X_T' Z_T \gamma\right) \qquad (2.11)$$

De este resultado puede afirmarse 2 cosas:

1) Si $X_T' Z_T$ incorpora información a medida que T crece, $\hat{\underline{B}}_T$ es inconsistente, pues no siempre ocurriría que $\text{plim}\left(\frac{1}{T} X_T' Z_T \gamma\right) = 0$

2) Si Z_T es de la forma propuesta en este estudio, $\hat{\underline{B}}_T$ es

---

3/ Estas suposiciones también son válidas cuando X_T es estocástica.

consistente, debido a que aunque la muestra crezca $X_T' Z_T = \underline{x}_T \underline{x}_T'$ y esté dividido entre $T \to \infty$ es cero es decir $\text{plim}\left(\frac{1}{T}\underline{x}_T \underline{x}_T'\right) = 0$ y con esto $\hat{\underline{B}}_T$ es consistente pues $\text{plim}(\hat{\underline{B}}_T) = \underline{B}$

Por lo tanto si Z_T es la misma matriz Z_{T-1} incluyendo - como último renglón el correspondiente al tiempo T, entonces

$\text{plim}\left(\frac{1}{T} X_T' Z_T \underline{\gamma}\right)$ no es necesariamente cero.

Y si Z_T es de tal forma que la información en el tiempo T es la única que se incorpora como último renglón, llenando el resto con ceros, entonces

$$\text{plim}\left(\frac{1}{T}\underline{x}_T \underline{x}_T'\right) = 0$$

y $\hat{\underline{B}}_T$ es consistente.

Si $\gamma = 0$, el estimador siempre es consistente.

Una vez determinado el caso para el que $\hat{\underline{B}}_T$ es consistente y para el cual no, se encontrará la distribución asintótica del mismo.

Utilizando algunos resultados anteriores, puede deducirse que

$$\text{plim}\left(\sqrt{T}\left(\hat{\underline{\beta}}_T - \underline{\beta}\right)\right) = Q^{-1}\,\text{plim}\left(\frac{1}{\sqrt{T}} X_T' Z_T \underline{\gamma}\right) + Q^{-1}\,\text{plim}\left(\frac{1}{\sqrt{T}} X_T' \underline{U}_T\right)$$

Para establecer la distribución para $\sqrt{T}(\hat{\underline{\beta}}_T - \underline{\beta})$ se requerirá de la siguiente distribución

$$\frac{1}{\sqrt{T}} X_T' \underline{U}_T \overset{a}{\sim} N(0, \sigma^2 Q)$$ 4/

Así,

$$\text{plim}\left(\sqrt{T}\left(\hat{\underline{\beta}}_T - \underline{\beta}\right)\right) - Q^{-1}\,\text{plim}\left(\frac{1}{\sqrt{T}} X_T' Z_T \underline{\gamma}\right) \sim N(0, \sigma^2 Q^{-1})$$

y si $\gamma = 0$

$$\text{plim}\left(\sqrt{T}\left(\hat{\underline{\beta}}_T - \underline{\beta}\right)\right) \sim N(0, \sigma^2 Q^{-1}).$$

Cabe señalar que si se trata de la matriz Z_T que se ha supuesto hasta ahora, éstas últimas distribuciones son iguales.

PREDICTORES DE $\hat{\underline{\beta}}_T$

La forma asociada a los predictores de $\hat{\underline{\beta}}_T$ ($\hat{y}_t$, $t > T$), se obtienen a partir del producto vectorial entre $\underline{x}_t$ y $\hat{\underline{\beta}}_T$,-

4/ Principles of Econometrics . H. Theil (cap. VIII) esto es

$$\hat{y}_t = x'_t \, \hat{\underline{B}}_T \qquad (t > T)$$

$\therefore$ si $\gamma \neq 0$

$$\hat{y}_t = \underline{x}'_t \underline{B} + x'_t V_T X'_T Z_T \underline{\gamma} + \underline{x}'_t V_T X'_T \underline{U}_T$$

y si $\gamma = 0$

$$\hat{y}_t = \underline{x}'_t \underline{B} + \underline{x}_t V_T X'_T \underline{U}_T$$

RECURSIVIDAD PARA $\hat{\underline{B}}_T$

Como forma recursiva de obtención para $\hat{\underline{B}}_T$, se establece la siguiente relación

$$\hat{\underline{B}}_T = \hat{\underline{B}}_{T-1} + V_{T-1} \underline{x}_T \left(\hat{u}_{T,T-1} / 1 + n_{T,T+1} \right) \; \text{5/}, \quad T = p+1, p+2, \ldots$$

y como forma recursiva para V_T se tienen dos casos:

a) Cuando la información no incluída en V_{T-1} es $\underline{x}_t$ 5/

5/ The Theory and Practice of Econometrics.
Judge / Griffiths / Hill / Lee (pag. 121)

$$V_T = V_{T-1} - \frac{1}{1+h_{t,T-1}} V_{T-1} \underline{x}_t \underline{x}'_t V_{T-1}$$

b) Cuando la información no incluída en V_{T-1} es $\underline{x}_t$ (con recursividad inversa)

$$V_{T-1} = V_T + \frac{1}{m_{t,T}} V_T \underline{x}_t \underline{x}'_t V_T \quad \underline{6/} \qquad 1 \leq t \leq T$$

6/ Regression Diagnostic Identifying Influential Data an Sources of Colinearity. Besley/Kuh/Welsh (pag. 64)

II.B ESTIMADOR ${}_T\hat{\underline{B}}_T$

En esta segunda mitad sólo se tratarán resultados sobre el estimador de interés ${}_T\hat{\underline{B}}_T$.

Como se ha supuesto la forma general (2.1) y de acuerdo a la expresión presentada en la introducción para este estimador puede decirse que:

$$ {}_T\hat{\underline{B}}_T = \underline{B} + W Z_T \underline{\gamma} + W \underline{U}_T $$

donde

$$ \underset{(p\times T)}{W} = V_T X_T' + \frac{1}{n_{T,T}} V_T \underline{x}_T \underline{A}' $$

$$ \hat{u}_{t,T} = \underline{A}' Z_T \underline{\gamma} + A' \underline{U}_T $$

$$ \underset{(1\times T)}{\underline{A}'} = I_{t.} - \underline{x}_t' V_T X_T \quad 7/, \quad t=\overline{1,T} $$

si $\gamma=0$ entonces

$$ {}_T\hat{\underline{B}}_T = \underline{B} + W \underline{U}_T $$

RESIDUOS ${}_T\hat{\underline{U}}_T$

7/ $\underline{A}' X_T = 0$, $\underline{A}' \underline{A} = m_{t,T}$

Los residuos para este estimador son:

$$ {}_{T}\hat{\underline{U}}_{T} = \underline{Y}_{T} - X_{T}\,{}_{T}\hat{\underline{B}}_{T} $$

los cuales, de acuerdo a las igualdades anteriormente señaladas presentan las siguientes modificaciones:

Si $\gamma \neq 0$

$$ {}_{T}\hat{\underline{U}}_{T} = (I_{T} - X_{T}W)(Z_{T}\underline{\gamma} + \underline{U}_{T}) $$

donde

$$ X_{T}W = N_{T}\left(I_{T} + \frac{1}{n_{T,T}} \underline{I}_{\cdot T}\,\underline{A}' \right) $$

$$ {}_{T}\hat{\underline{U}}_{T} = \left(M_{T} - \frac{1}{n_{T,T}} N_{T}\,\underline{I}_{\cdot T}\,\underline{A}'(Z_{T}\underline{\gamma} + \underline{U}_{T}) \right) $$

y como

$$ \underline{I}'_{T\cdot}\,\underline{A}' = \underline{I}_{\cdot T}\,\underline{I}_{T\cdot}\,M_{T} $$

entonces esta última expresión para ${}_{T}\hat{\underline{U}}_{T}$ también cumple:

8/ Utilizando que $\underline{x}_{T} = X'_{T}\,\underline{I}_{\cdot T} = X'_{T}(0\ 0 \ldots 0\ 1)$
$\underline{I}_{\cdot t}(\underline{I}_{t\cdot})$ = a la(el) columna(renglón) t de la matriz I_T

$$ {}_T\hat{\underline{U}}_T = (I_T - \frac{1}{n_{T,T}} N_T \underline{I}_{\cdot T} \underline{I}_{T\cdot}) M_T (Z_T \underline{\gamma} + \underline{U}_T) $$

Por lo que si $\gamma = 0$, estas expresiones para ${}_T\hat{\underline{U}}_T$ sufren los - siguientes cambios. En orden de aparición:

$$ {}_T\hat{\underline{U}}_T = (I_T - X_T W) \underline{U}_T $$

$$ {}_T\hat{\underline{U}}_T = (M_T - \frac{1}{n_{T,T}} N_T \underline{I}_{\cdot T} \underline{A}') \underline{U}_T $$

$$ {}_T\hat{\underline{U}}_T = (I_T - \frac{1}{n_{T,T}} N_T \underline{I}_{\cdot T} \underline{I}_{T\cdot}) M_T \underline{U}_T $$

DISTRIBUCION DE ${}_T\hat{\underline{B}}_T$

Para establecer la distribución de este estimador será -- necesario conocer lo siguiente:

$$ ECM({}_T\hat{\underline{B}}_T) = E(\underline{B} + W Z_T \underline{\gamma} + W \underline{U}_T) = \underline{B} + W Z_T \underline{\gamma} $$

$$ COV({}_T\hat{\underline{B}}_T) = COV(\hat{\underline{B}}_T) + \frac{1}{n_{T,T}} V_T \underline{x}_T \underline{x}_T' V_T \, COV(u_{T,T}) $$

$$ = \sigma^2 V_T + \sigma^2 \frac{m_{T,T}}{n_{T,T}} V_T \underline{x}_T \underline{x}_T' V_T \quad \underline{9/} $$

9/ Pues $\hat{\underline{B}}_T$ y $u_{T,T}$ son independientes con el teorema utilizado en la sección anterior (cuando se - obtuvo la distribución de $(\hat{\underline{B}}_T)$), puede deducirse que:

$$_T\hat{\underline{B}}_T \sim N(\underline{B} + WZ_T\underline{\gamma}, \sigma^2(V_T + \frac{m_{T,T}}{n_{T,T}} V_T \underline{x}_T \underline{x}_T' V_T)$$

si $\gamma = 0$

$$_T\hat{\underline{B}}_T \sim N(\underline{B}, \sigma^2(V_T + \frac{m_{T,T}}{n_{T,T}} V_T \underline{x}_T \underline{x}_T' V_T))$$

Con esto se asegura que bajo correcta especificación, $_T\hat{\underline{B}}_T$ es insesgado.

DISTRIBUCION DE $_T\hat{\underline{U}}_T$

Utilizando la expresión

$$_T\hat{\underline{U}}_T = (\underline{I}_T - X_T W)(Z_T\underline{\gamma} + \underline{U}_T)$$

se deriva que la distribución de éstos, es:

Si $\gamma \neq 0$

$$_T\hat{\underline{U}}_T \sim N((\underline{I}_T - X_T W)Z_T\underline{\gamma}, \sigma^2(\underline{I}_T - X_T W)(\underline{I}_T - X_T W)')$$

y si $\gamma = 0$

$${}_T\hat{U}_T \sim N(0, \sigma^2((I_T - X_T W)(I_T - X_T W)')$$.

ESTIMADOR DE σ^2

El estimador de la varianza asociado a ${}_R\hat{\underline{\beta}}_T$ está dado por

$${}_R\hat{\sigma}^2_T = \frac{1}{T}\, {}_R\hat{\underline{U}}_T \cdot {}_R\hat{\underline{U}}_T$$

el cual cumple con

$${}_R\hat{\sigma}^2_T = \hat{\sigma}^2_T + \frac{1}{T}(\hat{\underline{\beta}}_T - {}_R\hat{\underline{\beta}}_T)' X_T' X_T (\hat{\underline{\beta}}_T - {}_R\hat{\underline{\beta}}_T)$$ 10/

donde

$$(\hat{\underline{\beta}}_T - {}_R\hat{\underline{\beta}}_T)' X_T' X_T (\hat{\underline{\beta}}_T - {}_R\hat{\underline{\beta}}_T) = (C'\hat{\underline{\beta}}_T - \underline{S})'(C'V_T C)^{-1}(C'\hat{\underline{\beta}}_T - \underline{S})$$ 11/

(2.12)

$$\Rightarrow \quad {}_R\hat{\sigma}^2_T = \hat{\sigma}^2_T + \frac{1}{T}(\hat{\underline{\beta}}_T - {}_R\hat{\underline{\beta}}_T)'(C'V_T C)^{-1}(C'\hat{\underline{\beta}}_T - \underline{S})$$

(2.13)

pero a su vez, utilizando la igualdad para $\hat{\underline{\beta}}_T$ y definiendo

---

10/ Utilícese que $\underline{y}_T - X_T \cdot {}_R\hat{\underline{\beta}}_T = \underline{y}_T - X_T \hat{\underline{\beta}}_T + X_T \hat{\underline{\beta}}_T - X_T \cdot {}_R\hat{\underline{\beta}}_T$

11/ Véase igualdad para ${}_R\hat{\underline{\beta}}_T$ en (1.5) la matriz H (simétrica e idempotente) como:

$$H = X_T V_T C(C'V_T C)^{-1} C' V_T X_T$$ se tiene:

$$(C'\hat{\underline{\beta}}_T - \underline{s})(C'V_T C)^{-1}(C'\hat{\underline{\beta}}_T - \underline{s}) = (\underline{y}_T - X_T C(C'C)^{-1}\underline{s})' H \; (\underline{y}_T - X_T C \cdot \cdot (C'C)^{-1}\underline{s})$$ 12/

Por lo tanto, como la igualdad (2.12) se cumple, entonces también es válido que:

$$(\hat{\underline{\beta}}_T - {}_R\hat{\underline{\beta}}_T) X_T' X_T (\hat{\underline{\beta}}_T - {}_R\hat{\underline{\beta}}_T) = (\underline{y}_T - X_T C(C'C)^{-1}\underline{s}\; H (\underline{y}_T - X_T C(C'C)^{-1}\underline{s})$$

De acuerdo a este resultado, se afirma que:

$${}_R\hat{\sigma}_T^2 = \hat{\sigma}_T^2 + \frac{1}{T}(\underline{y}_T - X_T C(C'C)^{-1}\underline{s}) H (\underline{y}_T - X_T C(C'C)^{-1}\underline{s})$$

Por lo que, cuando $C = \underline{z}_\tau$ y $\underline{s} = y_\tau$:

$${}_t\hat{\sigma}_T^2 = \frac{1}{T}\, {}_t\hat{\underline{U}}_T'\, {}_t\hat{\underline{U}}_T \quad , \quad (t \neq T)$$

$${}_t\hat{\sigma}_T^2 = \hat{\sigma}_T^2 + \frac{1}{T n_{t,T}} (\underline{z}_t' \underline{\gamma} + u_t)^2$$ 13/ $(t = T)$

12/ Pues $C' V_T X_T' \underline{y}_T - \underline{s} = C' V_T X_T' (\underline{y}_T - X_T C(C'C)^{-1}\underline{s})$

13/ Si $\gamma \neq 0$, $y_t - \underline{z}_t' \hat{\underline{\beta}}_T = \underline{z}_t' \underline{\gamma} + u_t$

$$ {}_t\hat{\sigma}^2_T = \hat{\sigma}^2_T + \frac{1}{T}(\underline{y}_T - X_T \underline{x}_t(\underline{x}_t'\underline{x}_t)^{-1}y_t)^{-1} H_1(\underline{y}_T - X_T\underline{x}_t(\underline{x}_t'\underline{x}_t)^{-1}y_t) $$

donde H_1 es similar a H pero con $C = \underline{x}_t$

De esta última, se deduce que:

$$ {}_t\hat{\sigma}^2_T = \hat{\sigma}^2_T + \frac{1}{T}\underline{y}_T(I_T - X_T\underline{x}_t(\underline{x}_t'\underline{x}_t)^{-1}\underline{I}_{t.})' H_1(I_T - X_T\underline{x}_t(\underline{x}_t'\underline{x}_t)^{-1}\underline{I}_{t.})\underline{y}_T $$ 14/

Todos los resultados sobre la varianza son válidos tanto para $\gamma = 0$ como $\gamma \neq 0$ incorporando para cada caso, los términos correspondientes ($\hat{\underline{B}}_T$, ${}_R\hat{\underline{B}}_T$, $\hat{\sigma}^2_T$, $\underline{y}_T$), que supongan (o no) permanencia estructural.

DISTRIBUCION DE ${}_R\hat{\sigma}^2_T$

Para establecer la distribución de ${}_R\hat{\sigma}^2_T$ es necesario conocer la distribución del segundo sumando de (2.9), pues ya se conoce la del primero. Puede afirmarse:

$$ \frac{1}{\sigma^2}(\underline{y}_T - X_T C(C'C)^{-1}\underline{S})' H(\underline{y}_T - X_T C(C'C)^{-1}\underline{S}) \sim \chi^2_{(k',\lambda')} $$ 15/

14/ $y_t = \underline{I}_{t.}\underline{y}_T$

15/ Véase teorema en 2/

donde

$$\lambda' = \frac{1}{2}(\underline{\gamma}' Z_T X_T V_1 C(C'V_1C)^{-1}C'V_T X_T' Z_T \underline{\gamma})$$

y

$$K' = \text{rango}\,(H) = tr\,(I_R) = R$$

El valor para λ', se obtuvo a partir de:

- $\underline{y}_T = X_T \underline{B} + Z_T \underline{\gamma} + \underline{U}_T$

- factorizar de tal forma que, que aparezcan en la expresión términos afectados por $C'\underline{B} - \underline{S}$ pues cuando se estimó, - se supuso que $C'\underline{B} = \underline{S} \Rightarrow C'\underline{B} - \underline{S} = 0$

Si se considera que $\gamma = 0$, esto provoca que la distribución anterior sea una χ^2 central, es decir $\lambda' = 0$. Por lo tanto bajo este supuesto

$$\frac{1}{\sigma^2}(\underline{y}_T - X_T C(C'C)^{-1}\underline{S})' H (\underline{y}_T - X_T C(C'C)^{-1}\underline{S}) \sim \chi^2_{(R)}$$

Si se demuestra que los sumandos de (2.13) son independientes la distribución de interés será establecida fácilmente. -

Para ello, será demostrado que $HM_T = 0$ 16/

$$HM_T = (X_T V_T C(C'V_T C)^{-1} C' V_T X_T')(I_T - N_T) = 0$$

$\therefore$ H y M_T son independientes.

Se desprende de los resultados anteriores que:

$$\frac{{}_R\hat{\sigma}_T^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(T-P)} + \chi^2_{(R)} \quad \text{17/}$$

$$\frac{{}_R\hat{\sigma}_T^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(T-P+R)}$$

Esto si se cumple que $\underset{\sim}{\gamma} = 0$, pero si no lo es entonces:

$$\frac{{}_R\hat{\sigma}_T^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(T-P+R,\ \lambda_1 + \lambda_2)}$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\gamma}' Z_T M_T Z_T \underset{\sim}{\gamma}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\gamma} Z_T' X_T V_T C(C'V_T C)^{-1} C' V_T X_T' Z_T \underset{\sim}{\gamma}$$

16/ Si $\underset{\sim}{y}'A\underset{\sim}{y}$ y $\underset{\sim}{y}'B\underset{\sim}{y}$ tienen distribución χ^2 , éstos son independientes si $AB=0$.

17/ Si son independientes, la distribución es igual a la suma de las χ^2.

RESULTADOS ASINTOTICOS PARA ${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$

Con respecto a las propiedades asintóticas de este estimador serán utilizadas nuevamente las suposiciones presentadas en la sección correspondiente para $\hat{\underline{\beta}}_T$, para que a partir de ellas se establezca:

$$\text{plim}\,({}_T\hat{\underline{\beta}}_T) = \text{plim}\left(\hat{\underline{\beta}}_T + \frac{\hat{u}_{T,T}}{n_{T,T}} V_T \underline{z}_T\right)$$

$$= \text{plim}(\hat{\underline{\beta}}_T) + \text{plim}\left(\frac{1}{n_{T,T}} \underline{z}_T'(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_T) V_T \underline{z}_T + \frac{1}{n_{T,T}} \underline{z}_T' \underline{\gamma} V_T \underline{z}_T\right.$$

$$\left. + \frac{1}{n_{T,T}} u_T V_T \underline{z}_T\right)$$

$$= \underline{\beta} + Q^{-1}\,\text{plim}\left(\frac{1}{T} X_T' Z_T \underline{\gamma}\right) + Q^{-1}\,\text{plim}\left(\frac{\underline{z}_T' \underline{\gamma}}{T n_{T,T}} \underline{z}_T\right)$$

$$+ Q^{-1}\,\text{plim}\left(\frac{1}{T}\frac{1}{n_{T,T}} \underline{z}_T u_T\right)$$

Si $\underline{\gamma}=0$ entonces

$$\text{plim}\,({}_T\hat{\underline{\beta}}_T) = \underline{\beta} + Q^{-1}\,\text{plim}\left(\frac{1}{T n_{T,T}} \underline{z}_T u_T\right)$$

Cabe señalar que el límite probabilístico depende de un termino aleatorio lo que no le permite ser consistente en ninguno de los casos.

De las expresiones anteriores:

$$\text{plim}\,({}_t\hat{\underline{B}}_T - \underline{B}) \overset{a}{=} \text{plim}\left(\frac{n_{T,T}^{-1}}{\sqrt{T}}\right) Q^{-1}\,\text{plim}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\, \underline{\mathcal{X}}_T u_T\right) +$$

$$Q^{-1}\,\text{plim}\left(\frac{1}{T} X_T' Z_T \underline{\gamma}\right) + Q^{-1}\,\text{plim}\left(\frac{1}{T}\, \frac{\underline{\underline{z}}_T' \underline{\gamma}}{n_{T,T}}\, \underline{\mathcal{X}}_T\right)$$

como $\frac{1}{\sqrt{T}} X_T' \underline{U}_T \overset{a}{\sim} N(0, \sigma^2 Q)$ entonces

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\, \underline{\mathcal{X}}_T u_T \overset{a}{\sim} N(0, \sigma^2\, \underline{\underline{I}}_{T\cdot}\, Q\, \underline{\underline{I}}_{\cdot T}$$

$$Q\,\text{plim}\left(\frac{\sqrt{T}}{n_{T,T}^{-1}}\right)\left[\text{plim}\,({}_T\hat{\underline{B}}_T - \underline{B}) - Q^{-1}\,\text{plim}\left(\frac{1}{T} X_T' Z_T \underline{\gamma}\right) -\right.$$

$$\left. Q^{-1}\,\text{plim}\left(\frac{1}{T}\, \frac{\underline{\underline{z}}_T' \underline{\gamma}}{n_{T,T}^{-1}}\, \underline{\mathcal{X}}_T\right)\right] \overset{a}{\sim} N(0, \sigma^2\, \underline{I}_{T\cdot}\, Q\, \underline{I}_{\cdot T})$$ 18/

Si $\gamma = 0$

$$Q\,\text{plim}\left(\frac{\sqrt{T}}{n_{T,T}^{-1}}\right) \text{plim}\,\sqrt{T}\,({}_T\hat{\underline{B}}_T - \underline{B}) \overset{a}{\sim} N(0, \sigma^2\, \underline{\underline{I}}_{T\cdot}\, Q\, \underline{\underline{I}}_{\cdot T})$$

La razón por la que este estimador no resultó ser consis-

18/ Para establecer la distribución asintótica de un estimador, generalmente se afecta por $\sqrt{T}$ para "frenar" la rapidez de convergencia (cuando es consistente).

tente en ningún caso, aún que es máximo verosímil es que una de las condiciones de regularidad no se cumple. Y esto sucede debido a que, al incorporar la restricción $\underline{x}_t' B = y_t$ cuando se estimó $\underline{\beta}$, el recorrido de y_t deja de ser de $-\infty$ a ∞ y pasa a ser dependiente de $\underline{\beta}$. 19/

RELACION ENTRE ${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$ Y ${}_T\hat{\underline{\beta}}_{T-1}$

A continuación se encontrará la relación que guardan entre sí ${}_T\hat{\underline{\beta}}_{T-1}$ y ${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$. Para ello serán utilizadas las fórmulas recursivas presentadas en la primera sección de este capítulo, por lo que de manera general se tiene:

$$
\begin{aligned}
{}_t\hat{\underline{\beta}}_{T-1} &= \hat{\underline{\beta}}_{T-1} + (\hat{u}_{t,T-1}/n_{t,T-1}) V_{T-1} \underline{x}_t \quad , \quad (t=T) \\
&= (\hat{\underline{\beta}}_T - V_T \underline{x}_t (\hat{u}_{t,T}/m_{t,T})) + (\hat{u}_{t,T-1}/n_{t,T-1}) V_{T-1} \underline{x}_t \\
&= \hat{\underline{\beta}}_T - (\hat{u}_{t,T}/m_{t,T}) V_T \underline{x}_t + (m_{t,T}/n_{t,T})(\hat{u}_{t,T}/m_{t,T}) \cdot \\
&\quad \cdot ((1/m_{t,T}) V_T \underline{x}_t) \\
&= \hat{\underline{\beta}}_T - ((n_{t,T}-1)/n_{t,T})(\hat{u}_{t,T}/m_{t,T}) V_T \underline{x}_t \\
&= \hat{\underline{\beta}}_T + (m_{t,T}/n_{t,T})(\hat{u}_{t,T}/m_{t,T}) V_T \underline{x}_t \\
&= \hat{\underline{\beta}}_T + (\hat{u}_{t,T}/n_{t,T}) V_T \underline{x}_t \\
&= {}_t\hat{\underline{\beta}}_T
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad {}_t\hat{\underline{\beta}}_{T-1} = {}_t\hat{\underline{\beta}}_T$$

19/ Para demostrar de manera estricta que el estimador es consistente y asintóticamente eficiente deberá probarse que ciertas condiciones de regularidad se cumplen. (véase Parametric Estimation p.173.(12) y 153)

Se concluye por tanto que si se estima de manera exacta - la t-ésima observación, no será necesario introducirla dentro de la matriz X_T pues la información que ésta proporciona, ya es considerada al imponer tal restricción en la estimación.

PREDICTORES DE $_T\hat{\underline{\beta}}_T$

Con respecto a los predictores asociados a $_t\hat{\underline{\beta}}_T$ donde -- t=T+1,T+2,... estarán definidos por:

$$_t\hat{y}_T = \underline{x}_t'(_t\hat{\underline{\beta}}_T)$$

si $\gamma \neq 0$, éste puede reexpresarse como:

$$_t\hat{y}_T = \underline{x}_t'\underline{\beta} + \underline{x}_t' W Z_T \underline{\gamma} + \underline{x}_t' W \underline{U}_T$$

si $\gamma = 0$

$$_t\hat{y}_T = \underline{x}_t'\underline{\beta} + \underline{x}_t' W \underline{U}_T$$

FORMAS RECURSIVAS DE OBTENCION PARA $_T\hat{\underline{\beta}}_T$

Para este estimador se presentan 3 familias, que son:

1) La familia de estimadores con un mismo tamaño de mues-

tra (T), pero con distintos puntos de ajuste exacto, es decir

$$\left\{ {}_t\hat{\underline{\beta}}_T \;\middle|\; \begin{array}{l} t=1,2 \\ T \text{ dada} \end{array} \right\} = {}_1\hat{\underline{\beta}}_T \,,\; {}_2\hat{\underline{\beta}}_T \,,\; {}_3\hat{\underline{\beta}}_T \,, \ldots$$

y donde cada elemento cumple:

$${}_{t+1}\hat{\underline{\beta}}_T = {}_t\hat{\underline{\beta}}_T - V_T \left(\frac{\hat{u}_{t+1,T}}{n_{t+1,T}} \underline{x}_{T+1} - \frac{\hat{u}_{t,T}}{n_{t,T}} \underline{x}_t \right) \underline{20}/$$

que depende del estimador con el ajuste exacto en la observación inmediata anterior y el diferencial en los residuos asociados.

2) La segunda familia tiene como característica un tamaño de muestra variable (T) y el ajuste exacto constante, por lo que queda definida como:

$$\left\{ {}_t\hat{\underline{\beta}}_T \;\middle|\; \begin{array}{l} T=p,p+1,\ldots \\ t \text{ fija } (1 \le t \le T) \end{array} \right\} = \left\{ {}_t\hat{\underline{\beta}}_1 \,,\; {}_t\hat{\underline{\beta}}_2 \,, \ldots \right\}$$

y cada elemento se expresa recursivamente:

$${}_t\hat{\underline{\beta}}_{T+1} = {}_t\hat{\underline{\beta}}_T + V_T \left[\frac{\hat{u}_{t,T+1}}{n_{t,T+1}} \left(\underline{I}_p - \frac{1}{1+n_{T+1,T}} \underline{x}_{T+1} \underline{x}'_{T+1} V_T \right) \underline{x}_T + \frac{\hat{u}_{T+1,T}}{1+n_{T+1,T}} \underline{x}_{T+1} - \frac{\hat{u}_{t,T}}{n_{t,T}} \underline{x}_t \right]$$

20/ Despejando $\hat{\underline{\beta}}_T$ de la expresión para ${}_{t+1}\hat{\underline{\beta}}_T$

La igualdad anterior se obtuvo a partir de las siguientes igualdades:

$$ {}_{t}\hat{\underline{\beta}}_{T+1} = \hat{\underline{\beta}}_{T+1} + (\hat{u}_{t,T+1}/n_{t,T+1}) V_T \underline{x}_t \qquad 1 \leq t \leq T $$

$$ \hat{\underline{\beta}}_{T+1} = \hat{\underline{\beta}}_{T} + (\hat{u}_{T+1,T}/(1+n_{T+1,T})) V_T \underline{x}_{T+1} $$

$$ {}_{t}\hat{\underline{\beta}}_{T} = \hat{\underline{\beta}}_{T} + (\hat{u}_{t,T}/n_{t,T}) V_T \underline{x}_t $$

3) La última familia contiene a los estimadores que ajustan exactamente a la última observación a medida que la muestra crece. Es decir,

$$ \left\{ {}_{T}\hat{\underline{\beta}}_{T} \;\middle|\; T = P, P+1, \ldots \right\} = \left\{ {}_{P}\hat{\underline{\beta}}_{P} \,,\; {}_{P+1}\hat{\underline{\beta}}_{P+1} \,,\; \ldots \right\} $$

que cumplen con

$$ \begin{aligned} {}_{T+1}\hat{\underline{\beta}}_{T+1} &= {}_{T+1}\hat{\underline{\beta}}_{T} = \hat{\underline{\beta}}_{T} + (\hat{u}_{T+1,T}/n_{T+1,T}) V_T \underline{x}_{T+1} \\ &= {}_{T}\hat{\underline{\beta}}_{T} - (\hat{u}_{T,T}/n_{T,T}) V_T \underline{x}_T + (\hat{u}_{T+1,T}/n_{T+1,T}) V_T \underline{x}_{T+1} \end{aligned} $$

Por lo tanto cada elemento de la familia s e expresa re-- cursivamente

$$ {}_{T+1}\hat{\underline{\beta}}_{T+1} = {}_{T}\hat{\underline{\beta}}_{T} + V_T \left[(\hat{u}_{T+1,T}/n_{T+1,T}) \underline{x}_{T+1} - (\hat{u}_{T,T}/n_{T,T}) \underline{x}_T \right] $$

El expresar al estimador de esta familia en términos de una muestra menor, involucra la presencia de los residuos - con información de T+1 y T, así como la del estimador $\hat{\underline{\beta}}_T$.

III. ERROR CUADRATICO MEDIO

Uno de los criterios que se utiliza para poder determinar si un estimador o predictor es mejor que otro, es por medio del error cuadrático medio (ECM) y dado el interés que se tiene sobre la relación entre los estimadores alternativos y sus predictores, se obtendrán los mismos para poder así, analizarlos bajo este criterio.Primeramente, se dejará de manera general dichos errores para que, posteriormente se incorpore el caso particular cuando COV($\underline{U}_T$) = $\sigma^2 I$

Los planteamientos al igual que en el capítulo antrior abordarán el caso de correcta e incorrecta especificación.

III.A ERROR CUADRATICO MEDIO PARA ESTIMADORES

Utilizando la expresión para $\hat{\underline{B}}_T$ en (2.2), la definición del ECM[1/] y las propiedades sobre $\underline{U}_T$ se obtiene lo siguiente:

a) ECM($\hat{\underline{B}}_T$)

1/ $ECM(\hat{\Theta}) = E[(\hat{\Theta} - \Theta)(\hat{\Theta} - \Theta)']$

$$ECM(\hat{\underline{\beta}}_T) = V_T X_T' Z_T \underline{\gamma}\,\underline{\gamma}' Z_T X_T V_T + V_T X_T COV(\underline{U}_T) X_T V_T$$

la cual queda reducida a lo siguiente cuando $\gamma=0$

$$ECM(\hat{\underline{\beta}}_T) = V_T X_T' COV(\underline{U}_T) X_T V_T$$

Si incorporamos el supuesto que sobre la matriz de varianzas y covarianzas se hizo ($COV(\underline{U}_T)=\sigma^2 I_T$), entonces:

Si $\gamma\neq 0$

$$ECM({}_T\hat{\underline{\beta}}_T) = V_T X_T' Z_T \underline{\gamma}\,\underline{\gamma}' X_T V_T + \sigma^2 V_T$$

y si $\gamma=0$

$$ECM({}_T\hat{\underline{\beta}}_T) = \sigma^2 V_T$$

b) $ECM({}_T\hat{\underline{\beta}}_T)$

De la misma forma como se hizo para ${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$ y con $\gamma\neq 0$ se tiene:

$$ECM({}_T\hat{\underline{\beta}}_T) = W Z_T \underline{\gamma}\,\underline{\gamma}' Z_T' W' + W\, COV(\underline{U}_T) W'$$

y si $\gamma=0$

$$ECM({}_{T}\hat{\beta}_{T}) = W\,cov(U_{T})\,W'$$

Si al igual que en el caso anterior $cov(U_{T}) = \sigma^2 I$, entonces cuando $\gamma \neq 0$

$$ECM({}_{T}\hat{\beta}_{T}) = W Z_{T} \gamma \gamma' Z_{T}' W' + \sigma^2 \left(V_{T} + \frac{m_{T,T}}{n_{T,T}^2} V_{T} x_{T} x_{T}' V_{T} \right) \quad 2/$$

(3.2)

y cuando $\gamma = 0$

$$ECM({}_{T}\hat{\beta}_{T}) = \sigma^2 \left(V_{T} + \frac{m_{T,T}}{n_{T,T}^2} V_{T} x_{T} x_{T}' V_{T} \right)$$

III.B ERROR CUADRATICO MEDIO PARA PREDICTORES

a) $ECM(\hat{y}_{T+1})$

$$ECM(\hat{y}_{T+1}) = E[(\hat{y}_{T+1} - y_{T+1})(\hat{y}_{T+1} - y_{T+1})'] \quad 3/$$

$$= E[(x_{T+1}' V_{T} X_{T}' Z_{T} \gamma - z_{T+1}' \gamma + x_{T+1}' V_{T} X_{T}' U_{T} - u_{T+1}) \cdot$$

$$\cdot (x_{T+1}' V_{T} X_{T}' Z_{T} \gamma - z_{T+1}' \gamma + x_{T+1}' V_{T} X_{T}' U_{T} - u_{T+1})']$$

Esta última igualdad puede simplificarse a partir de las -

2/ $WW' = V_{T} + (m_{T,T} / n_{T,T}^2)\, V_{T} x_{T} x_{T}' V_{T}$

3/ $\hat{y}_{T+1} = x_{T+1}' \hat{\beta}_{T}$

las siguientes igualdades:

$$\underset{(T+1)\times P}{Z_{T+1}} = \begin{bmatrix} Z_T \\ z_{T+1} \end{bmatrix} \quad , \quad \underset{(T+1)\times 1}{\underline{U}_{T+1}} = \begin{bmatrix} \underline{U}_T \\ u_{T+1} \end{bmatrix} \quad , \quad \underset{1\times(T+1)}{\underline{D}'} = [\underline{x}'_{T+1} V_T X'_T \quad -1]$$

$$\therefore \underline{x}'_{T+1} V_T X'_T Z_T \underline{\gamma} - \underline{z}'_{T+1}\underline{\gamma} = [\underline{x}'_{T+1} V_T X'_T \quad -1]\begin{bmatrix} Z_T \\ z'_{T+1} \end{bmatrix}\underline{\gamma} = \underline{D}' Z_{T+1}\underline{\gamma}$$

$$\therefore \underline{x}'_{T+1} V_T X'_T \underline{U}_T - u_{T+1} = [\underline{x}'_{T+1} V_T X'_T \quad -1]\begin{bmatrix} Z_T \\ z'_{T+1} \end{bmatrix}\underline{\gamma} = \underline{D}' Z_{T+1}\underline{\gamma}$$

$$\Rightarrow ECM(\hat{y}_{T+1}) = \underline{D}' Z_{T+1}\underline{\gamma}\underline{\gamma}' Z'_{T+1}\underline{D} + \underline{D}' COV(\underline{U}_{T+1})\underline{D}$$

$$\therefore \text{ Si } \gamma \neq 0 , \; ECM(\hat{y}_{T+1}) = \underline{D}' Z_{T+1}\underline{\gamma}\underline{\gamma}' Z'_{T+1}\underline{D} + \underline{D}' COV(\underline{U}_{T+1})\underline{D}$$

$$\therefore \text{ Si } \gamma = 0 , \; ECM(\hat{y}_{T+1}) = \underline{D}' COV(\underline{U}_{T+1})\underline{D}$$

Bajo el supuesto de que la $COV(\underline{U}_{T+1}) = \sigma^2 I_{T+1}$,

$$ECM(\hat{y}_{T+1}) = \underline{D}' Z_{T+1}\underline{\gamma}\underline{\gamma}' Z_{T+1}\underline{D} + \sigma^2(n_{T+1,T} + 1) \; ^{4/} \tag{3.3}$$

$$ECM(\hat{y}_{T+1}) = \sigma^2(n_{T+1,T} + 1) \quad , (\gamma = 0)$$

b) $ECM({}_{T+1}\hat{y}_T)$

4/ $\underline{D}\,\underline{D}' = n_{T+1,T} + 1$

$$ECM({}_{T+1}\hat{y}_T) \overset{5/}{=} E[(\underline{x}_{T+1}'WZ_T\underline{\gamma} + \underline{x}_{T+1}'W\underline{U}_T - z_{T+1}'\underline{\gamma} - u_{T+1})\cdot$$

$$\cdot(\underline{x}_{T+1}'WZ_T\underline{\gamma} + \underline{x}_{T+1}'W\underline{U}_T - z_{T+1}'\underline{\gamma} - u_{T+1})']$$

Esta expresión será reducida con:

$$\underline{x}_{T+1}'WZ_T\underline{\gamma} - z_{T+1}\underline{\gamma} = [\underline{x}_{T+1}'W \quad -1]\begin{bmatrix} Z_T \\ z_{T+1} \end{bmatrix}\underline{\gamma} = [\underline{x}_{T+1}'W,$$

$$-1]\,Z_{T+1}\underline{\gamma}$$

$$\underline{x}_{T+1}'W\underline{U}_T - u_{T+1} = [\underline{x}_{T+1}'W \quad -1]\begin{bmatrix} \underline{U}_T \\ u_{T+1} \end{bmatrix} = [\underline{x}_{T+1}'W \quad -1]\underline{U}_{T+1}$$

si $\underset{1\times(T+1)}{\underline{G}} = [\underline{x}_{T+1}'W \quad -1]$ entonces

$$ECM({}_T\hat{y}_{T+1}) = E[(\underline{G}'Z_{T+1}\underline{\gamma} + \underline{G}'\underline{U}_T)(\underline{G}'Z_{T+1}\underline{\gamma} + \underline{G}'\underline{U}_T)']$$

$$ECM({}_T\hat{y}_{T+1}) = \underline{G}'Z_{T+1}\underline{\gamma}\underline{\gamma}Z_{T+1}'\underline{G} + G'COV(\underline{U}_{T+1})\underline{G}$$

$$\therefore\ ECM({}_T\hat{y}_{T+1}) = \underline{G}'Z_{T+1}\underline{\gamma}\underline{\gamma}'Z_{T+1}'G + G'COV(\underline{U}_{T+1})\underline{G}$$

Si $\gamma=0$ entonces

$$ECM({}_T\hat{y}_{T+1}) = \underline{G}'COV(\underline{U}_{T+1})\underline{G}$$

5/ ${}_{T+1}\hat{y}_T = \underline{x}_{T+1}'\,{}_T\hat{\underline{B}}_T$

En cada caso, si $cov(\underline{U}_{T+1}) = \sigma^2 I_{T+1}$ entonces

$$ECM({}_T\hat{y}_{T+1}) = \underline{G}' Z_{T+1} \underline{\gamma}\, \underline{\gamma}' Z'_{T+1} \underline{G} + \sigma^2 \left(n_{T+1,T} + 1 + \frac{m_{T,T}}{n_{T,T}} (\underline{x}'_{T+1} V_T \underline{x}_T)^2 \right) \quad \underline{6}/$$

y si además $\gamma = 0$

$$ECM({}_T\hat{y}_{T+1}) = \sigma^2 \left(n_{T+1,T} + 1 + \frac{m_{T,T}}{n_{T,T}} (\underline{x}'_{T+1} V_T \underline{x}_T)^2 \right)$$

III.C COMPARACION DE LOS ECM

A partir de los errores cuadráticos medios obtenidos, se desea conocer las condiciones bajo las cuales los estimadores y predictores tratados, son mejores.

a) Correcta especificación

Para demostrar que $\hat{\underline{B}}_T$ es mejor que ${}_T\hat{\underline{B}}_T$, bastará de-- mostrar que

$$ECM({}_T\hat{\underline{B}}_T) > ECM(\hat{\underline{B}}_T)$$

donde

$\underline{6}/$ $\underline{G}\underline{G}' = \underline{x}'_{T+1} W W' \underline{x}_{T+1} + 1 = \underline{x}'_{T+1} (V_T + \frac{m_{T,T}}{n^2_{T,T}} V_T \underline{x}_T \underline{x}'_T V_T) \underline{x}_{T+1} + 1$
$= n_{T+1,T} + 1 + \frac{m_{T,T}}{n^2_{T,T}} (\underline{x}'_{T+1} V_T \underline{x}_T)^2$

$$ECM(\hat{\underline{\beta}}_T) = \sigma^2 V_T$$

$$ECM({}_T\hat{\underline{\beta}}_T) = \sigma^2 V_T + \sigma^2 \frac{m_{T,T}}{n^2_{T,T}} V_T \underline{x}_T \underline{x}'_T V_T$$

$$\Rightarrow \quad ECM({}_T\hat{\underline{\beta}}_T) - ECM(\hat{\underline{\beta}}_T) = \sigma^2 \frac{m_{T,T}}{n^2_{T,T}} V_T \underline{x}_T \underline{x}'_T V_T$$

y dado que $\sigma^2 (m_{T,T}/n^2_{T,T}) > 0$, es necesario imponer condi-ciones a $V_T \underline{x}_T \underline{x}'_T V_T$. Así, si ésta es positiva definida entonces $\hat{\underline{\beta}}_T$ es mejor que ${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$ o en su defecto igual.

b) Incorrecta especificación

Se cree que el estimador ${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$, bajo este supuesto será mejor que $\hat{\underline{\beta}}_T$, debido a las justificaciones mencionadas en capítulos anteriores, sobre la contemplación de cambio estructural.

Si

$$ECM(\hat{\underline{\beta}}_T) = V_T X'_T Z_T \underline{\gamma}\underline{\gamma}' Z'_T X_T V_T + \sigma^2 V_T$$

y de acuerdo con (3.2) se tiene que:

$$ECM({}_T\hat{\underline{\beta}}_T) = ECM(\hat{\underline{\beta}}_T) + \frac{1}{n_{T,T}} V_T X'_T Z_T \underline{\gamma}\underline{\gamma}' Z_T \underline{A}\, \underline{x}_T V_T$$

$$\frac{1}{n_{T,T}} V_T \underline{x}_T \underline{A}' Z_T X_T V_T + \frac{1}{n_{T,T}^2} V_T \underline{x}_T \underline{A}' Z_T \underline{\gamma}\underline{\gamma}' Z_T' \underline{A}\, \underline{x}_T' V_T + \sigma^2 V_T \underline{x}_T \underline{x}_T' V_T$$

$\hat{\underline{\beta}}_T$ es mejor que ${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$ cuando

$$ECM(\hat{\underline{\beta}}_T) < ECM({}_T\hat{\underline{\beta}}_T) \Rightarrow ECM({}_T\hat{\underline{\beta}}_T) - ECM(\hat{\underline{\beta}}_T) > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n_{T,T}} V_T X_T' Z_T \underline{\gamma}\underline{\gamma}' Z_T' A\, \underline{x}_T' V_T + \frac{1}{n_{T,T}} V_T \underline{x}_T \underline{A}' Z_T X_T V_T + \frac{1}{n_{T,T}^2} V_T \underline{x}_T \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, \underline{A}' Z_T \underline{\gamma}\underline{\gamma}' Z_T' \underline{A}\, \underline{x}_T' V_T + \sigma^2 V_T \underline{x}_T \underline{x}_T' V_T \right) > 0$$

Cuando $X_T' Z_T = \underline{x}_T \underline{x}_T'$, lo anterior se modifica a:

$$\frac{1}{n_{T,T}} V_T \underline{x}_T \underline{x}_T' \underline{\gamma}\underline{\gamma}' Z_T' \underline{A}\, \underline{x}_T' V_T + \frac{1}{n_{T,T}} V_T \underline{x}_T \underline{A}' Z_T X_T V_T +$$

$$\frac{1}{n_{T,T}^2} V_T \underline{x}_T \underline{A}' Z_T \underline{\gamma}\underline{\gamma}' Z_T' \underline{A}\, \underline{x}_T' V_T + \sigma^2 V_T \underline{x}_T \underline{x}_T' V_T > 0$$

Si esta expresión matricial resulta ser positiva definida se afirmará al igual que en el caso anterior que $\hat{\underline{\beta}}_T$ es mejor que ${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$. Si por lo contrario no lo es, ${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$ es mejor que $\hat{\underline{\beta}}_T$.

Por lo que, en ambos casos dependerá de los valores que -

se tengan en X_T y para este último no sólo de éstos, sino - también de la magnitud del cambio estructural contemplado en el vector $\underline{\gamma}$. Es decir, los resultados están condicionados por X_T bajo correcta e incorrecta especificación, y para la última también por $\underline{\gamma}$.

IV. APLICACIONES

El interés de este estudio se centra en analizar la actuación de los estimadores alternativos $\hat{\underline{B}}_T$ y ${}_T\hat{\underline{B}}_T$ frente al comportamiento entre consumo e ingreso tanto en cifras a precios constantes (reales) como corrientes (nominales). Se piensa que este ejercicio es interesante dada la relativa estabilidad de la propensión a consumir en términos reales.

Los modelos que serán utilizados son de la forma:

$$c_t = \alpha + \beta y_t + u_t \qquad (t=1,\ldots,T)$$
$$c_t = \alpha + \beta y_t + \lambda c_{t-1} + u_t \qquad (t=1,\ldots,T)$$

Con el objeto de contrastar el comportamiento de los estimadores en el contexto de un modelo estático (4.1) y dinámico (4.2). Los correspondientes vectores de parámetros son $(\alpha, \beta)'$ y $(\alpha,\beta,\lambda)'$ respectivamente.

Se incorporan en este ejercicio tanto cifras reales como nominales pues aunque se maneja de manera explícita - vía la forma del modelo (1.1)- permanencia estructural, se incorporará implícitamente - vía los datos - el cambio estructural. Esto

1/ c_t = consumo en el tiempo t
y_t = ingreso en el tiempo t

último se afirma, tomando como base, que introducir precios constantes (cifras reales) puede traducirse como la suposición de permanencia estructural entre estas variables económicas [consumo (C_t) e ingreso (Y_t)], mientras que con precios corrientes (cifras nominales) se supondría lo contrario, debido a que el comportamiento actual de los precios es sumamente irregular dados los continuos cambios que presentan por la inflación, y donde esta última ha sido uno de los más grandes problemas de la economía mexicana, tanto por su repercusión económica como por lo difícil de su análisis.

Se piensa que el estimador propuesto (${}_T\hat{\underline{B}}_T$) resultará ser mejor que el clásico cuando se presente cambio estructural y viceversa. La conjetura, por tanto, es que el estimador clásico ($\hat{\underline{B}}_T$) es mejor en el primer caso (cifras a precios constantes-reales), mientras que el estimador propuesto (${}_T\hat{\underline{B}}_T$) lo es en el segundo (cifras a precios corrientes-nominales).

La información para realizar este ejercicio se extrajo de la publicación "La economía mexicana en cifras (1981)" publicada por NAFINSA. El período de tal información es de 1950 a 1979 (30 observaciones) con periodicidad anual, a nivel nacional y cuyas unidades son miles de millones de pesos. Asimismo, las cifras reales tienen como base a 1960.

Para efectuar este análisis se obtuvieron para cada modelo (con ambos tipos de cifras) los estimadores que resultan de considerar un tamaño de muestra T, donde T tomaría valores desde 3 hasta 30 ó 29.[2/] Es decir, para cada modelo se consideran 2 casos: cuando las cifras son reales y cuando son nominales, y en cada caso se tendrán para cada tamaño de muestra (T), los ajustes ($t \leq T$) y pronósticos ($t > T$) de cada estimador ($\hat{\underline{\beta}}_T$ y $\tilde{\underline{\beta}}_T$), teniendo en el último caso (cuando T=30 ó 29) solo ajustes; por lo que con cada tamaño de muestra T se tendrá, que el número de ajustes más el número de pronósticos es igual a 30 ó 29 (dependiendo del modelo que se esté utilizando), los cuales aumentarán y disminuirán respectivamente a medida que T crezca.

Lo anterior se hizo con el fin de presentar "estadísticas" significativas -dado que se tiene un número elevado de casos -- (106)- para poder realizar un estudio comparativo entre ellos.

A continuación serán presentadas algunas tablas que contiene un resumen de los resultados más importantes [3/].

2/ Depende del modelo que se utilice, ya que si es el (4.2) se pierde una observación por la inclusión del termino C_{t-1} , teniendo solo 29 observaciones.

3/ Los resultados fueron arrojados por programas realizados en FORTRAN. Se anexa dicha programación para el Modelo $C_t = \alpha + \beta y_t + u_t$

Analicemos por separado cada modelo, para hacerlo de manera simultánea posteriormente.

a) Modelo: $C_t = \alpha + \beta y_t + u_t$

El primer modelo a analizar corresponde al que tiene como característica esencial su naturaleza estática, notándose que el número de casos favorables para los ajustes con el estimador $\hat{\beta}_T$ (#CFABT) fue bastante mayor al número de casos favorables para $_T\hat{\beta}_T$ (#CFARBT), con ambos tipos de cifras. El criterio que se utilizó para determinar estas estadísticas consistió en contabilizar los casos en los que cada estimador proporcionaba el mínimo residuo en valor absoluto, esto para cada tamaño de muestra (T) (Tabla 1)4/. Lo cual queda resumido en la siguiente tabla.

REALES		NOMINALES	
%(#CFABT)	%(#CFARBT)	%(#CFABT)	%(#CFARBT)
21/28	6/28	23/28	4/28

4/ Véase al final, la descripción general de cada tabla, así como la información de cada una.

Para los pronósticos obtenidos con este modelo pudo notarse -totalizando en cada tamaño de muestra T, de los (29-T) pronósticos- que el número de casos favorables para $\hat{\underline{B}}_T$ (#CFPBT) fue menor al número de casos favorables para ${}_T\hat{\underline{B}}_T$ (#CFPBT) tanto para cifras reales como nominales. Lo anterior puede comprobarse con la siguiente tabla, que se dedujo de la tabla 2.

R E A L E S		N O M I N A L E S	
%(#CFPBT)	%(#CFPRBT)	%(#CFPBT)	%(#CFPRBT)
12/27	15/27	11/27	16/27

Con respecto a los pronósticos inmediatos se presentaron los siguientes resultados:

R E A L E S		N O M I N A L E S	
CFPBT	CFPRBT	CFPBT	CFPRBT
9	18	11	16

que reafirman lo esperado -en términos de pronósticos- pues ${}_T\hat{\underline{B}}_T$ ha resultado hasta estos momentos ser mejor que $\hat{\underline{B}}_T$.

Las sumas de residuos al cuadrado para los ajustes fueron en todos los casos menores cuando $\hat{\beta}_T$ se utilizaba, lo cual era de esperarse pues este es el estimador mínimo cuadrático. Esto es, el número de veces en las que la suma de cuadrados del estimador $\hat{\beta}_T$ (#SCABT) es menor a la de ${}_T\hat{\beta}_T$ (#SCARBT) es igual a - 28 (T=3, 30).

En cuanto a la suma de cuadrados de los residuos de los -- pronósticos con cifras reales, en 14 casos dicha suma fue menor para $\hat{\beta}_T$ (SCPBT) y en 13 para ${}_T\hat{\beta}_T$ (SCPRBT). Para las cifras - nominales, en 9 casos $\hat{\beta}_T$ tuvo menor suma que ${}_T\hat{\beta}_T$ y en 18 sucedió lo contrario. Es decir,

R E A L E S		N O M I N A L E S	
% (#SCPBT)	%(#SCPRBT)	%(#SCPBT)	% (#SCPRBT)
14/27	13/27	9/27	18/27

b) Modelo: $C_t = \alpha + \beta y_t + \lambda C_{t-1} + u_t$

Este modelo cuya peculiaridad es la dinamicidad que introduce por medio del término desfasado C_{t-1}, repitió el mismo -- comportamiento en cuanto los casos favorables para los ajustes con ambos estimadores, pues con ambos tipos de cifras $\hat{\beta}_T$ fue mejor que ${}_T\hat{\beta}_T$, lo cual se comprueba con la siguiente tabla -

derivada de la Tabla 1.

R E A L E S		N O M I N A L E S	
% (#CFABT)	% (#CFARBT)	% (#CFABT)	% (#CFARBT)
17/27	8/27	20/27	6/27

De la Tabla 2, se observó que los pronósticos realizados con $\hat{\underline{B}}_T$ fueron mejores que los de ${}_T\hat{\underline{B}}_T$ cuando las cifras utilizadas eran reales, contrastándose el caso inverso cuando las cifras eran nominales. Es decir,

R E A L E S		N O M I N A L E S	
% (#CFPBT)	% (#CFPRBT)	% (#CFPBT)	% (#CFPRBT)
13/26	11/26	10/26	15/26

Para los pronósticos inmediatos se tiene:

R E A L E S		N O M I N A L E S	
CFPBT	CFPRBT	CFPBT	CFPRBT
15	11	12	14

en donde se observa que $\hat{\underline{B}}_T$ es mejor con cifras reales y ${}_T\hat{\underline{B}}_T$ es mejor con cifras nominales.

Para las sumas de cuadrados de los residuos, nuevamente en todos los casos la mínima suma correspondía a $\hat{\underline{B}}_T$, lo que por definición debe cumplirse para todos los casos.

Por último, las sumas de cuadrados de residuos asociados a los pronósticos, mostraron un comportamiento distinto al deseado ya que con cifras reales el número de casos en el que se tuvieron "menores sumas" fue el mismo para ambos estimadores y con cifras nominales el número de casos favoreció a $\hat{\underline{B}}_T$, pues en 16 casos (de 26) resultaron menores dichas sumas para ${}_T\hat{\underline{B}}_T$.

R E A L E S		N O M I N A L E S	
% (#SCPBT)	%(#SCPCBT)	%(#SCPBT)	%(#SCPRBT)
13/26	13/26	16/26	10/26

En síntesis, hasta ahora de los resultados anteriores, pudo concluirse:

- En los resultados asociados a los ajustes, el estimador $\hat{\underline{B}}_T$ siempre estuvo por encima del estimador ${}_T\hat{\underline{B}}_T$, lo cual es justificable pues por definición éste es el que proporciona el mejor ajuste (mínima suma de residuos al cuadrado).

- El estimador ${}_T\hat{\underline{B}}_T$ casi siempre venció -en términos de pronósticos- cuando las cifras utilizadas eran nominales, que era lo que en un principio se había argumentado. Para cifras reales resultó ser también mejor en algunos casos ${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$, sin embargo no se observa un patrón definido.

Conjuntando todos los resultados anteriores -para cada tipo de modelo se elaboró la presente tabla con el fin de plantear las condiciones en las que cada estimador es el conveniente[5/].

MODELOS	$C_t = \alpha + \beta y_t + u_t$ (ESTATICO)				$C_t = \alpha + \beta y_t + \lambda C_{t-1} + u_t$ (DINAMICO)			
INFORMACION	REALES		NOMINALES		REALES		NOMINALES	
CONCEPTO / ESTIMADORES	$\hat{\underline{\beta}}_T$	${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$	$\hat{\underline{\beta}}_T$	${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$	$\hat{\underline{\beta}}_T$	${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$	$\hat{\underline{\beta}}_T$	${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$
CFA	✓		✓		✓		✓	
CFP		✓		✓	✓			✓
PI		✓		✓	✓			✓
SCA	✓		✓		✓		✓	
SCP	✓			✓	✓	✓	✓	

CFA = Casos favorables en los ajustes (# de menores residuos)
CFP = Casos favorables en los pronósticos (# de menores residuos)
PI = Casos favorables en los pronósticos inmediatos
SCA = Sumas de cuadrados de residuos de los ajustes (menores)
SCP = Sumas de cuadrados de residuos de los pronósticos (menores)

5/ ✓ Estadísticas favorables

Analizando esta tabla puede afirmarse:

- En cuestión de ajustes, las conclusiones anteriores se mantienen.

- Si el modelo es estático, los pronósticos con el estimador ${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$ son mejores tanto para cifras reales como nominales.

- Si el modelo es dinámico, con cifras reales las "estadísticas" sobre pronósticos favorecieron en casi todos los casos a $\hat{\underline{\beta}}_T$, mientras que con cifras nominales sucedió lo contrario.

De lo anterior se deriva que para pronosticar con un modelo estático -independientemente el tipo de cifra que se utilice- el estimador ${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$ en general es mejor que $\hat{\underline{\beta}}_T$, y si el modelo es dinámico se recomienda utilizar ${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$, cuando las cifras contempladas son nominales.

Descripción de las Tablas

Tabla 1 Contiene los casos favorables en ajustes ($t \leq T$) para cada estimador -en términos de los mínimos residuos- para cada tamaño de muestra con los distintos modelos (cifras reales y nominales).

Tabla 2 Igual a la tabla anterior pero para pronósticos ($t > T$)

Tabla 3 Contiene las sumas de los residuos al cuadrado de los ajustes para cada estimador y con los distintos tamaños de muestra (cifras reales y nominales).

Tabla 4 Contiene lo mismo que la tabla 3 pero para pronósticos

Tabla 5 y 6 Contienen las estimaciones con y sin restricción de - los parámetros $(\alpha, \beta)'$ pues el modelo considerado es - $C_t = \alpha + \beta y_t + u_t$. Para cifras reales y nominales.

Tabla 7 y 8 Contienen las estimaciones (con y sin restricción) - de los parámetros $(\alpha, \beta, \lambda)'$ pues el modelo considerado es $C_t = \alpha + \beta y_t + \lambda C_{t-1} + u_t$. Para cifras reales y nominales.

TABLA 1. AJUSTES

TAMAÑO DE MUESTRA	$c_t = \alpha + \beta y_t + u_t$				$c_t = \alpha + \beta y_t + \lambda c_{t-1} + u_t$			
	R E A L E S		NOMINALES		R E A L E S		NOMINALES	
	CFABT	CFARBT	CFABT	CFARBT	CFABT	CFARBT	CFABT	CFARBT
3	2	1	2	1	1	1	0	1
4	3	1	1	3	3	1	3	1
5	1	4	3	2	3	2	2	3
6	4	2	3	3	2	4	2	4
7	2	5	3	4	5	2	5	2
8	4	4	5	3	3	5	5	3
9	4	5	7	2	4	5	5	4
10	8	2	6	4	7	3	5	5
11	7	4	8	3	6	5	3	8
12	10	2	8	4	6	6	8	4
13	10	3	7	6	11	2	8	5
14	10	4	9	5	11	3	8	6
15	9	6	10	5	7	8	12	3
16	6	10	12	4	10	6	13	3
17	10	7	15	2	10	7	16	1
18	10	8	17	1	8	10	10	8
19	10	9	16	3	15	4	16	3
20	15	5	17	3	17	3	14	6
21	17	4	19	2	16	5	8	13
22	18	4	17	5	9	13	14	8
23	16	7	7	16	13	10	14	9
24	17	7	8	16	22	2	13	11
25	23	2	21	4	14	11	14	11
26	22	4	18	8	7	19	12	14
27	7	20	20	7	11	16	15	12
28	11	17	21	7	21	7	23	5
29	19	10	24	5	17	12	18	11
30	22	8	25	5	--	--	--	--

TABLA 2. PRONOSTICOS

TAMAÑO DE MUESTRA	$c_t = \alpha + \beta y_t + u_t$ REALES		NOMINALES		$c_t = \alpha + \beta y_t + \lambda c_{t-1} + u_t$ REALES		NOMINALES	
	CFPBT	CFPRBT	CFPBT	CFPRBT	CFPBT	CFPRBT	CFPBT	CFPRBT
3	1	26	11	16	0	26	26	0
4	26	0	26	0	25	0	5	20
5	22	3	9	16	24	0	5	19
6	24	0	16	8	2	21	7	16
7	0	23	16	7	22	0	15	7
8	1	21	15	7	7	14	20	1
9	2	19	19	2	8	12	8	12
10	9	11	17	3	14	5	18	1
11	9	10	17	2	15	3	16	2
12	14	4	18	0	4	13	3	14
13	14	3	17	0	15	1	1	15
14	16	0	0	16	15	0	0	15
15	14	1	0	15	1	13	0	14
16	1	13	0	14	13	0	0	13
17	13	0	0	13	1	11	3	9
18	0	12	0	12	0	11	1	10
19	0	11	0	11	0	10	3	7
20	0	10	1	9	7	2	9	0
21	3	6	3	6	5	3	4	4
22	2	6	2	6	7	0	6	1
23	1	6	7	0	0	6	6	0
24	2	4	6	0	5	0	2	3
25	5	0	1	4	2	2	4	0
26	4	0	0	4	1	2	1	2
27	2	1	0	3	1	1	2	0
28	2	0	0	2	1	0	0	1
29	0	1	0	1	--	--	--	--
30	--	--	--	--	--	--	--	--

TABLA 3
SUMA DE RESIDUOS AL CUADRADO
(AJUSTES)

TAMAÑO DE MUESTRA	$C_t = \alpha + \beta y_t + u_t$				$C_t = \alpha + \beta y_t + \lambda C_{t-1} + u_t$			
	R E A L E S		NOMINALES		R E A L E S		NOMINALES	
	SCABT	SCARBT	SCABT	SCARBT	SCABT	SCARBT	SCABT	SCARBT
3	.3953	.5305	.+195	1.0713	.0004	.0002	0.0	0.0
4	4.9743	10.7352	1.0899	1.5348	.2194	.2255	.7057	.7189
5	5.0862	5.1249	1.4162	1.5909	3.4866	4.5031	.7099	.7108
6	8.7963	10.5928	1.7889	1.9683	3.8218	4.0306	.7389	.7539
7	8.8326	8.8610	1.8317	1.8649	10.8611	16.2884	3.8641	6.3010
8	18.9829	28.9122	4.2778	6.6445	11.5144	11.6629	5.8841	7.3151
9	26.2291	35.1454	7.8300	11.2611	11.6431	11.6975	6.0067	6.0966
10	39.7955	66.2337	7.4830	7.7342	12.1383	12.9158	6.6492	7.5816
11	42.6341	47.7239	7.8774	8.5502	13.4167	15.2063	6.7790	6.9733
12	54.4294	79.2236	8.4075	9.4663	13.1944	14.4910	6.8689	7.0281
13	60.8708	76.3279	8.4072	8.4135	19.7085	31.8594	7.9864	10.0891
14	67.2452	81.6534	10.1089	13.9914	27.9396	37.8489	8.0049	8.0145
15	68.3874	70.5588	12.4945	16.9967	36.3853	49.5018	13.7061	24.2935
16	69.0764	70.5811	16.8009	26.2519	36.4677	36.6520	21.9358	39.0688
17	70.0528	72.3811	26.9057	50.1061	49.7581	76.0980	38.0360	76.5322
18	74.4291	85.9614	44.2810	87.8336	50.3117	51.4553	39.9882	43.8872
19	76.7167	82.8166	48.9330	60.9530	64.9719	104.4983	52.6409	83.2693
20	86.7518	115.8744	65.7682	110.6940	179.0442	487.5224	114.4595	218.6012
21	212.8929	597.2234	162.3793	419.9872	210.4525	312.0708	114.6001	114.9726
22	252.5981	394.7954	162.9699	164.7080	210.5119	210.5916	136.8791	167.5158
23	264.8479	308.6120	166.3553	175.7784	213.0666	220.4002	153.2564	158.7396
24	286.0606	361.3903	166.9659	166.7147	524.1830	1864.1263	291.9689	321.0735
25	700.6034	2255.3041	849.1833	1933.6926	590.2259	597.2607	359.6368	432.109
26	721.8274	810.1086	850.6372	852.9402	590.8756	592.6460	496.7815	682.167
27	475.0328	856.7466	1132.5261	1559.7714	597.7768	612.0153	541.2753	554.1194
28	825.0680	1244.0071	1496.5443	1933.6506	598.2671	600.6229	2213.4232	4307.1597
29	825.1773	825.7194	3475.5556	5352.7170	608.8776	634.6995	4167.6201	5797.985
30	831.5661	861.3951	7157.665	12076.3031	-	-	-	-

TABLA 4
SUMA DE RESIDUOS AL CUADRADO
(PRONOSTICOS)

	$C_t = \alpha + \beta y_t + u_t$				$C_t = \alpha + \beta y_t + \lambda C_{t-1} + u_t$			
TAMAÑO DE MUESTRA	R E A L E S		NOMINALES		R E A L E S		NOMINALES	
	SCPBT	SCPRBT	SCPBT	SCPRBT	SCPBT	SCPRBT	SCPBT	SCPRBT
3	32648	19565.	158075	73133	11386.6	11238.2	2606162	2317173
4	1046.3	38108.7	232703	366449	11340.8	12514.8	26366.9	35507.8
5	3288.2	4649.5	128387	86098	2909.3	9532.2	31329	32597
6	25884.4	45351.2	72913	52507	1397.6	870.2	37072	40336
7	24022.4	22618.0	64374	58203	6183.7	23994.0	90029	151411
8	3105.1	1230.1	114326	178270	1589.7	1085.0	105901	118415
9	3047.0	883.5	163793	241281	1186.7	1051.6	108040	109640
10	975.0	4403.2	172262	187572	1576.6	2401.4	128905	162684
11	881.41	1788.0	184642	206816	2223.5	3428.3	129297	129883
12	1619.7	6750.5	196219	220674	1934.6	1613.1	129580	120106
13	2588.5	6514.7	196902	198485	3072.5	6620.2	108959	75196
14	3781.7	7622.3	182143	150742	4869.4	7704.7	104064	101648
15	4332.3	5508.8	166414	138779	3626.1	2197.5	99852	92379
16	3988.6	3298.6	150571	118753	3723.4	3944.0	77107	39728
17	4321.5	5182.8	131386	92615	2972.8	1824.3	61298	31680
18	3746.1	2470.5	112092	70989	2777.7	2405.5	51007	33539
19	3413.4	2621.1	104044	84762	2826.8	1148.2	36826	13183
20	2871.6	1635.9	91564.	62527	907.5	1028.0	6184	38854
21	1495.8	668.4	68162	24453	387.2	456.9	6467	7292
22	1064.6	465.6	66770	62768	399.7	616.6	20934	62903
23	900.9	547.0	69802	78643	538.8	446.7	53926	68877
24	738.03	473.4	70333	71536	51.4	2842.5	8815	5354
25	140.1	2980.1	35937	7572	28.9	22.0	14447	22908
26	149.2	415.6	34941	33398	25.1	18.4	9041	4594
27	98.0	85.3	24690	13234	14.6	16.7	12609	13821
28	8.3	264.4	16800	9888	15.2	20.7	4296	621
29	7.8	6.0	7153	1850	- -	- -	- -	- -
30	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -

TABLA 5. ESTIMADORES PARA EL MODELO $C_t = \alpha + \beta y_t + u_t$ (Cifras reales)

3	-2.99 0.79	- 6.43 0.83	17	-25.69 1.03	-26.60 1.04
4	-16.66 .95	-33.87 1.15	18	-24.99 1.02	-23.17 1.01
5	-13.55 0.92	-12.48 0.90	19	-24.54 1.02	-23.33 1.01
6	- 3.76 0.81	0.97 0.75	20	-23.72 1.01	-21.32 1.00
7	- 4.31 0.81	- 4.75 .82	21	-21.10 0.99	-13.11 0.93
8	-10.70 0.88	-16.94 0.95	22	-19.86 0.99	-15.43 0.95
9	-14.45 0.92	-19.43 0.97	23	-19.21 0.98	-16.90 0.96
10	-18.04 0.96	-25.02 1.03	24	-18.41 0.97	-15.55 0.96
11	-19.56 0.97	-22.30 1.00	25	-15.17 0.95	- 3.04 0.87
12	-22.08 1.00	-27.38 1.05	26	-14.53 0.95	-11.83 0.93
13	-23.63 1.01	-27.36 1.05	27	-15.11 .95	-17.92 .97
14	-25.08 1.02	-28.36 1.05	28	-16.10 0.96	-21.27 0.99
15	-25.68 1.03	-26.82 1.04	29	-16.06 0.96	-15.88 0.96
16	-25.30 1.03	-24.48 1.02	30	-15.78 0.96	-14.45 0.95

TABLA 6. ESTIMADORES PARA EL MODELO $G_T = \alpha + \beta y_t + u_t$ (cifras nominales)

3	0.20 0.84	1.53 0.81	17	1.11 0.83	2.55 0.82
4	- 0.66 0.86	- 1.89 0.89	18	1.83 0.83	3.64 0.81
5	0.79 0.83	1.56 0.82	19	2.17 0.82	3.06 0.82
6	1.92 0.81	2.47 0.80	20	2.77 0.82	4.37 0.80
7	2.15 0.81	2.33 0.80	21	4.12 0.81	7.72 0.78
8	0.92 0.83	- 0.26 0.85	22	4.21 0.81	4.49 0.81
9	- 0.06 0.84	- 1.34 0.87	23	4.00 0.81	3.39 0.81
10	- 0.22 0.85	- 0.50 0.85	24	3.95 0.81	3.86 0.81
11	- 0.47 0.85	- .88 0.86	25	7.58 .79	13.34 0.76
12	- 0.70 0.85	- 1.17 0.86	26	7.73 0.79	7.96 0.79
13	- 0.71 0.85	0.75 0.85	27	9.54 0.78	12.29 0.77
14	- 0.38 0.85	0.38 0.84	28	11.55 0.77	13.96 0.76
15	0.02 .84	0.80 0.84	29	15.14 0.76	19.70 0.74
16	0.48 0.84	1.49 0.83	30	19.95 0.74	25.93 0.72

TABLA 7. ESTIMADORES PARA EL MODELO $C_t = \alpha + \beta y_t + \lambda C_{t-1}$ (cifras reales)

3	3.3574 .1941 .7379	3.2318 .1979 .7345	14	-18.6462 .6384 .4395	-23.2340 .7632 .3265	25	- 5.9604 .4889 .5124	- 7.9575 .5742 .4219
4	-18.2393 .5463 .5775	-18.8178 .5557 .5733	15	-18.6082 .6926 .3678	-18.5489 .7766 .2568	26	- 5.8599 .4784 .5246	- 5.5823 .4494 .5585
5	- 3.7782 .3773 .5970	.7127 .3248 .6031	16	-18.7024 .6923 .3693	-18.9148 .6916 .3724	27	- 5.2847 .4350 .5740	- 4.0918 .3450 .6764
6	- 5.9749 .4105 .5831	- 7.3512 .4313 .5745	17	-19.0210 .7516 .2955	-19.6521 .8690 .1495	28	- 5.2153 .4352 .5732	- 4.8925 .4361 .5698
7	-13.2594 .3741 .7353	-18.9040 .3460 .8533	18	-18.4687 .7368 .3091	-17.3363 .7065 .3370	29	- 6.4375 .4795 .5274	- 9.4177 .5876 .4155
8	-12.0123 .4865 .5642	-11,7308 .5118 .5255	19	-17.9624 .7536 .2827	-26.5991 .7986 .2119			
9	-11.9899 .5155 .5241	-11.9803 .5277 .5072	20	-12.7891 .6288 .3938	1.1912 .2916 .6941			
10	-12.6034 .5144 .5336	-13.5659 .5127 .5485	21	-10.5142 .5732 .4439	- 3.1540 .3931 .6058			
11	-12.8796 .4877 .5733	-13.2673 .4501 .6291	22	-10.7402 .5815 .4353	-11.0394 .5926 .4240			
12	-13.0044 .5108 .5438	-13.1611 .5397 .5067	23	- 9.7031 .5454 .4720	- 7.5063 .4688 .5497			
13	-14.8406 .5349 .5333	-18.6816 .5855 .5115	24	- 4.2436 .4155 .5902	14.6095 .0332 .9984			

TABLA 8. ESTIMADORES PARA EL MODELO $C_t = \alpha + \beta y_t + \lambda C_{t-1} + u_t$ (cifras nominales)

3	23.7432 .2425 .2428	23.7828 .2412 .2436	14	.1948 .7583 .1232	.2277 .7553 .2791	25	2.6829 .6123 .2791	2.3941 .6492 .2312
4	3.7575 .7770 .0166	3.3839 .7870 .0124	15	.7749 .7716 .0942	1.8520 .7964 .0470	26	3.4159 .5872 .3089	4.4064 .5532 .3491
5	3.5276 .7823 .0149	3.4733 .7835 .0145	16	1.4575 .7509 .1131	2.8790 .7077 .1524	27	4.3503 .6308 .2435	4.6203 .6432 .2296
6	3.2105 .7833 .0207	3.0463 .7838 .0237	17	2.2542 .7417 .1157	4.1563 7197 .1220	28	8.2826 .6207 .2379	13.2063 .6083 .2309
7	1.2002 .7956 .0473	- .3680 .8051 .0680	18	2.5218 .7246 .1353	3.0552 .6904 .1744	29	6.6609 .5201 .3902	5.3078 .4362 .5172
8	.0457 .7561 .1296	- .7721 .7281 .794	19	3.1096 .7013 .1599	4.5323 .6449 .2193			
9	.1899 .7688 .1045	.2957 .7782 .0897	20	4.2323 .5798 .3094	6.1226 .3752 .5611			
10	- .2410 .7828 .0935	- .8667 .8030 .0775	21	4.1855 .5821 .3008	4.0626 .5881 .3001			
11	- .3508 .7779 .1020	- .5154 .7705 .1148	22	3.7913 .6641 .2016	3.2491 .7770 .0569			
12	- .2822 .7816 .0958	- .1613 .7882 .0850	23	3.8521 .7698 .0608	3.8724 .8051 .0137			
13	.1298 .7644 .1125	.9050 .7320 .1439	24	2.9525 .5778 .3238	2.7637 .5375 .3790			

PROGRAMA PRINCIPAL

```
[illegible]
[illegible] (17)
      PROGRAMA PRINCIPAL
C ***********************************************************
C **********  ESTE PROGRAMA ESTA [illegible] PARA OBTENER  *****
C **********  TANTO EL ESTIMADOR LINEAL CLASICO Y EL -   *****
C **********  ESTIMADOR LINEAL CON LA CARACTERISTICA -   *****
C **********  [illegible] LA ULTIMA [illegible]          *****
C **********  [illegible] ASI COMO [illegible] QUE       *****
C **********  LOS ATANEN.                                *****
C
C
C **********  LA INFORMACION QUE DEBERA SER PROPORCIONA  *****
C **********  DA CONSISTE EN  EL NUMERO DE [illegible] - *****
C **********  [illegible]                                *****
C **********  [illegible]                                *****
C **********  [illegible]                                *****
C **********  NUMERO DE VARIABLES EXOGENAS QUE INTERVIE  *****
C **********  EN EL MODELO,INCLUYENDO LA CONSTANTE.      *****
C **********       ASI COMO LA INFORMACION REFERENTE A L' *****
C **********  VARIABLE DEPENDIENTE (Y).                  *****
C
C
C **********  EL ARCHIVO DONDE SE DEPOSITARAN LOS RESUL  *****
C **********  TADOS SE LLAMA SAL-SAL                     *****
C **********  Y EL ARCHIVO DONDE SE ENCUENTRA LA INFOR   *****
C **********  MACION NECESARIA PARA QUE ESTE PROGRAMA -  *****
C **********  FUNCIONE SE LLAMA DATOS                    *****
C ***********************************************************
C
      REAL X(50,50),V(50,50),TX(50,50),TXY(50,50),
     + TXY(50,50),COEF(50,50),COEF1(50),AJUS(50,50),Y(50,50),
     + RCOEF(50,50),RCOEF1(50),RAJUS(50,50),RAJUS1(50),
     + VTX(50,50),NT(50,50),U1(50),AJUS1(50),RCOEFM(50,50),
     + RU(50,50),RRU(50,50),RU1(50),RRU1(50),AA(50,50),
     + RU1(50),Y1(50),RAA(50,50),COEFM(50,50),UNVTX1(50),
     + L(50,50),RL(50,50)
      INTEGER T,P,S
      DEFINE FILE 3(APRINT,,132)
      CALL LEEDAT(T,P,X,Y1)
      DO 100 S=2,T
        DO 10 I=1,S
        DO 10 J=1,P
          TX(J,I)=X(I,J)
10      CONTINUE
       DO 12 I=1,T
         Y(I,1)=Y1(I)
12     CONTINUE
      CALL MULT(P,S,P,TX,X,TXX)
      CALL INVER(P,TXX,V)
      CALL MULT(P,S,1,TX,Y,TXY)
      CALL MULT(P,P,1,V,TXY,COEF)
          DO 15 I=1,P
            COEF1(I)=COEF(I,1)
15        CONTINUE
      CALL MULT(T,P,1,X,COEF,AJUS)
          DO 18 I=1,T
            AJUS1(I)=AJUS(I,1)
18        CONTINUE
      CALL MULT(P,P,S,V,TX,VTX)
      CALL MULT(S,P,S,X,VTX,NT)
          DO 20 I=1,T
            U1(I)=Y1(I)-AJUS1(I)
20        CONTINUE
      UN=U1(S)/NT(S,S)
          DO 40 I=1,P
            UNVTX1(I)=UN*VTX(I,S)
            RCOEF1(I)=COEF1(I)+UNVTX1(I)
            RCOEF(I,1)=RCOEF1(I)
40        CONTINUE
      CALL MULT(T,P,1,X,RCOEF,RAJUS)
          DO 50 I=1,T
            RAJUS1(I)=RAJUS(I,1)
            AA(I,S)=AJUS1(I)
            RAA(I,S)=RAJUS1(I)
            RU1(I)=Y1(I)- RAJUS1(I)
            L(I,S)=U1(I)
            RL(I,S)=RU1(I)
50        CONTINUE
C *
C *
C ***** MATRIZ CON LOS CRECIMIENTOS PORCENTUALES DE LOS RESI-
C ***** DUOS OBTENIDOS BAJO AMBOS ESTIMADORES.
C *
          DO 60 I=2,T
            RU1(I)=((U1(I)-U1(I-1))/U1(I-1))*100.0
            RRU1(I)=((RU1(I)-RU1(I-1))/RU1(I-1))*100.0
            RU(I,S)=RU1(I)
            RRU(I,S)=RRU1(I)
60        CONTINUE
C *
C *
C ***** MATRIZ CON LOS COEFICIENTES OBTENIDOS A PARTIR DE LAS
C ***** DISTINTAS MUESTRAS.
          DO 70 I=1,P
            COEFM(S,I)=COEF1(I)
            RCOEFM(S,I)=RCOEF1(I)
70        CONTINUE
100   CONTINUE
      CALL IMPRES(P,T,X,Y1,AA,RAA,RU,RRU,L,RL,COEFM,RCOEFM)
      STOP
      END
$EIN
```

SUBRUTINA IMPRES

```
[illegible]
      [illegible]
      SUBROUTINE IMPRES(F,T,X,Y1,AA,RAA,FU,RFL,L,RL,COEFM,RCOEFM)
      [illegible]
     + [illegible]
      INTEGER P,T,S
      WRITE(7,5)
      WRITE(7,*)'            MODELO  [illegible] A + BYT  +  UT',
      WRITE(7,*)'            (DATOS [illegible])  1950-1979 '
      WRITE(7,5)
      WRITE(7,*)'            MATRIZ  X: '
      WRITE(7,5)
      WRITE(7,10)((X(I,J),J=1,P),I=1,T)
 10   FORMAT(F10.4)
      WRITE(7,5)
      WRITE(7,*)'VECTOR Y1'
      WRITE(7,5)
      WRITE(7,20)(Y1(I),I=1,T)
 20   FORMAT(F10.4)
      DO 70 S=1,30
      WRITE(7,80)
      WRITE(7,*)'                    TAMAÑO DE MUESTRA    ',S
      WRITE(7,25)S,S
 25   FORMAT(/,2X,'---------------------------------------',
     + '-----------------------------------',
     + '------------------------------------------',/,
     + 2X,'E S T I M A D O R E S',10X,'A J U S T E S  HASTA',I3,
     + [illegible]
     + [illegible]'PRONOSTICOS [illegible]
     + 2X,'-------------------------',2X,'---------------------------',
     + 2X,'-------------------------',2X,'---------------------------',
     + /,6X,'BT',12X,'RBT',5X,'CON BT',9X,'CON RBT',
     + 5X,'CON BT',7X,'CON RBT',10X,
     + 'BT',10X,'RBT',//)
      DO [illegible]
      WRITE(7,30)COEFM(S,I),RCOEFM(S,I),AA(I,S),RAA(I,S),
     + L(I,S),RL(I,S),FU(I,S),RFL(I,S)
 30   FORMAT(1X,F10.4,4X,F10.4,4X,F11.4,4X,F11.4,4X,F11.4,4X,
     + F11.4,4X,F12.3,3X,F12.3)
 38   CONTINUE
      DO 50 I=1,T
      WRITE(7,40)AA(I,S),RAA(I,S),L(I,S),FL(I,S),FU(I,S),RFL(I,S)
 40   FORMAT(13X,F11.4,4X,F11.4,4X,F11.4,4X,F11.4,4X,F12.3,4X,
     + F12.3)
 50   CONTINUE
C
      SUM=0.0
      RSUM=0.0
      DO 60 I=1,S
        SUM=SUM+L(I,S)*L(I,S)
        RSUM=RSUM+RL(I,S)*RL(I,S)
 60   CONTINUE
      WRITE(7,65)SUM,RSUM
 65   FORMAT(//,2X,'SUMA DE RESIDUOS AL CUADRADO(AJUSTES CON BT)  ',
     + F16.4,//,2X,'SUMA DE RESIDUOS AL CUADRADO(AJUSTES CON RBT)  ',
     + F16.4,/)
      SUM=0.0
      RSUM=0.0
      DO 61 I=S+1,30
        SUM=SUM+L(I,S)*L(I,S)
        RSUM=RSUM+RL(I,S)*RL(I,S)
 61   CONTINUE
      WRITE(7,66)SUM,RSUM
 66   FORMAT(//,2X,'SUMA DE RESIDUOS AL CUADRADO(PRONOST.CON BT)  ',
     + F16.4,//,2X,'SUMA DE RESIDUOS AL CUADRADO(PRONOST.CON RBT)  ',
     + F16.4,/)
C
C ***** CASOS FAVORABLES EN LOS AJUSTES PARA CADA ESTIMADOR
C ***** DE ACUERDO A LA COMPARACION DE SUS RESIDUOS
          CFABT=0.0
          CFARBT=0.0
          DO 55 I=1,S
      IF (ABS(L(I,S)).GT.ABS(RL(I,S))) CFARBT=CFARBT + 1.0
      IF (ABS(L(I,S)).LT.ABS(RL(I,S))) CFABT=CFABT + 1.0
 55       CONTINUE
C
C
C ***** CASOS FAVORABLES EN LOS PRONOSTICOS PARA CADA ESTIMADOR
C ***** UTILIZANDO TAMBIEN EL CRITERIO DE RESIDUALES UTILIZADO
C ***** ANTERIORMENTE.
          CFPBT=0.0
          CFPRBT=0.0
          DO 58 I=S+1,T
      IF (ABS(L(I,S)).GT.ABS(RL(I,S))) CFPRBT=CFPRBT + 1.0
      IF (ABS(L(I,S)).LT.ABS(RL(I,S))) CFPBT=CFPBT + 1.0
 58       CONTINUE
      WRITE(7,69)S,CFABT,CFARBT,S,CFPBT,CFPRBT
 69   FORMAT(//,2X,'CASOS FAVORABLES EN LOS ',I3,'  AJUSTES. ',
     + //,2X,'PARA EL ESTIMADOR BT ',F4.1,10X,
     + 2X,'PARA EL ESTIMADOR RBT ',F4.1,10X,
     + 3(/),2X,'CASOS FAVORABLES PARA LOS PRONOSTICOS (QUE',
     + ' INICIAN DESPUES DE LA ',I3,'-ESIMA OBSERVACION ',
     + //,2X,'PARA EL ESTIMADOR BT ',F4.1,10X,
     + 2X,'PARA EL ESTIMADOR RBT ',F4.1)
 70   CONTINUE
 80   FORMAT(1H1,//,10X)
 5    FORMAT(//,10X)
      RETURN
      END
```

SUBRUTINA -INVER

```
1 S74C1C 08/07/85 13 59 25 (17)
  @FTN,IRC ,CO,INVER
        SUBROUTINE INVER(P,A,AINV)
        REAL A(100,100),AINV(100,100),IDNT(100,100)
        INTEGER P
C ********************************************************************
C **                                                                **
C **              PROGRAMA QUE INVIERTE UNA MATRIZ                  **
C **   POR EL METODO DE GAUSS-JORDAN,TAMANO MAX. ES 100 POR 100     **
C **    TAMBIEN RESUELVE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES          **
C **                                                                **
C ********************************************************************
C **           CREA MATRIZ IDENTIDAD           **
        DO 7 I=1,P
        DO 7 J=1,P
7       IDNT(I,J)=0.0
              DO 10 I=1,P
                 IDNT(I,I)=1.0
10            CONTINUE
C
C
C ******  DIVIDE UN RENGLON POR EL PRIMER ELEMENTO NO IGUAL 0  ******
              DO 70 J=1,P
                 K=0
30            CONTINUE
                 K=K+1
                 IF (K .GT. P) THEN
                    PRINT *,'** MATRIZ SINGULAR(NO HAY INVERSA) **'
                    STOP 'TERMINA CORRIDA POR ERROR'
                 END IF
                 PIV=A(J,K)
               IF (PIV .EQ. 0.0) GO TO 30
               DO 40 N=1,P
                  A(J,N)=A(J,N)/PIV
                  IDNT(J,N)=IDNT(J,N)/PIV
40             CONTINUE
C
C
C ********* RESTA UN RENGLON DE OTRO  PARA DEJAR UN CERO   *******
                 DO 60 N=1,P
                    IF (N .EQ. J) GO TO 60
                    IF (A(N,K).EQ.0.0) GO TO 60
                    FACTOR=A(N,K)
                    DO 50 M=1,P
                       A(N,M)=A(N,M)-A(J,M)*FACTOR
                       IDNT(N,M)=IDNT(N,M)-IDNT(J,M)*FACTOR
50                  CONTINUE
60               CONTINUE
70             CONTINUE
C
C
C   **** ORDENA LA MATRIZ RESULTANTE PARA FORMAR LA INVERSA ****
            DO 110 I=1,P
               IF (A(I,I) .EQ. 0.0) THEN
                  DO 80 J=1,P
                     IF (J.EQ.I) GO TO 110
                     IF (A(J,I) .EQ. 1.0) GO TO 90
80                   CONTINUE
90                   CONTINUE
                     DO 100 K=1,P
                      AUXMTR=A(J,K)
                      A(J,K)=A(I,K)
                      A(I,K)=AUXMTR
                      AUXINV=IDNT(J,K)
                      IDNT(J,K)=IDNT(I,K)
                      IDNT(I,K)=AUXINV
100               CONTINUE
                 END IF
110          CONTINUE
        DO 115  I=1,P
        DO 115  J=1,P
115     AINV(I,J)=IDNT(I,J)
          RETURN
          END
@FIN
```

```
@.LEED,T
974510 08/07/85 13 58 30 (17)
          08      @FIN,INC ,GO,LEEDAT
          08            SUBROUTINE LEEDAT(M,N,C,D)
          08            REAL C(50,50),D(50)
          10            OPEN(9,FILE='DATAN',ACCESS='SEQ',STATUS='OLD')
          08            READ(9,*)M,N
          08            READ(9,*)((C(I,J),J=1,N),I=1,M)
          08            READ(9,*)(D(I),I=1,M)
          08            RETURN
          08            END
          08      @FIN
 .  ERRORS  NONE. TIME   1,047 SEC. IMAGE COUNT  10

******        ******
```

```
@.MULT
974510 08/07/85 13 58 32 (9)
          05      @FIN,INC ,GO,MULT
          05            SUBROUTINE MULT(N,KS,M,A,B,AB)
          05      C
          05      C
          05      C ********************************************************
          05      C ******  ESTA SUBRUTINA MULTIPLICA DOS MATRICES A Y B *****
          05      C ****** DONDE A TIENE N RENGLONES Y S COLUMNAS, Y      *****
          05      C ****** B TIENE S RENGLONES Y M COLUMNAS.              *****
          05      C ******                                                *****
          05      C ******  EL ORDEN MAXIMO DE LA MATRIZ ES DE 100 X 100.*****
          05      C ******                                                *****
          05      C ********************************************************
          06            REAL A(100,100),B(100,100),AB(100,100)
          05            DO 10 I=1,N
          05              DO 10 J=1,M
          05                AB(I,J)=0.0
          05                DO 10 K=1,KS
          08                AB(I,J)=AB(I,J) + A(I,K)*B(K,J)
          08      10          CONTINUE
          05            RETURN
          05            END
          05      @FIN
 .  ERRORS  NONE. TIME   1.164 SEC. IMAGE COUNT  [illegible]
```

BRUTINAS LEEDAT Y MULT

V. CONCLUSIONES

A lo largo de este estudio, en el que se destacó la presentación, caracterización y comparación de los estimadores MCO y ${}_T\hat{\beta}_T$, se obtuvieron algunos resultados que permitieron forjar una idea general sobre las características esenciales de ambos, siendo más "familiares" las del primero por lo común en la literatura estadística.

Dichos estimadores fueron tratados bajo dos distintos contextos: correcta e incorrecta especificación, resaltándose en el primer caso insesgamiento en estimadores y residuos, manteniéndose sin alteración la varianza(en cada caso). Por lo que, se concluyó que incorporar el término afectado por $\underline{\gamma}$, sólo influye en el sesgo pues la varianza permanece sin variación alguna. En el caso de la distribución para σ^2 (con ambos estimadores), lo que se ve afectado es la centralidad de las Ji-cuadradas (χ^2), teniéndose en el primer caso Ji-cudradas centrales.

Bajo el supuesto de que $X_T' Z_T = \underline{x}_T \underline{x}_T'$, el estimador es consistente en ambos contextos, mientras que ${}_T\hat{\underline{\beta}}_T$ en ningún caso lo es pues en el plim de éste se contempla un término aleatorio (u_T).

Con respecto a los errores cuadráticos medios pudo observarse - bajo el supuesto de que COV ($\underline{U}_T$) = $\sigma^2 I_T$ - que para correcta e incorrecta especificación, la relación comparativa entre ambos estimadores estará condicionada por los valores en X_T - y también por la magnitud de $\underline{\gamma}$ - en el segundo caso.

Los resultados analizados en el capítulo IV (Aplicaciones) reafirmaron lo que se había argumentado en un principio, con respecto a los pronósticos con cifras nominales y el estimador de interés fue mejor que $\hat{\underline{B}}_T$, cuando las cifras utilizadas eran nominales, presentándose también buen comportamiento con cifras reales. Por lo que en relación a los pronósticos $_T\hat{\underline{B}}_T$, sí fue en general superior a $\hat{\underline{B}}_T$, relevándose lo contrario cunado se trataba de ajustes.

De acuerdo a los resultados empíricos obtenidos así como los teóricos, no pudieron establecerse condiciones específicas en las que el estimador propuesto fuera mejor que el estimador $\hat{\underline{B}}_T$. Por lo que este estudio sólo servirá como inicio para futuras investigaciones sobre procedimientos alternativos para el tratamiento de cambio estructural, sin necesidad de incorporar parímetros estocásticos.

Se propone continuar estudio para el cambio estructural, como posible incorporación de heteroscedasticidad, disminuyendo gradualmente las varianzas a medida que el tiempo transcurre, esto con el fin de ir dando mayor peso a la información de las observaciones más recientes, que fue precisamente en general la óptica utilizadas en este trabajo.

APENDICE A. NOTACION

La notación que se utilizó en esta tesis tiene las siguientes características;

- Las matrices siempre serán denotadas con letras mayúsculas (ej. A,B,C)

- Si son vectores, podrán ser utilizadas tanto letras mayúsculas como minúsculas, pero siempre con una raya horizontal en la parte inferior (ej. $\underline{A}$,$\underline{b}$,$\underline{c}$)

- Si son reales, siempre serán letras minúsculas aunque existen excepciones como

  T tamaño de muestra
  P número de parámetros.

Cuando en la parte inferior izquierda de una matriz, vector o escalar aparece un subíndice, éste señala exclusivamente la intervención de restricción(es). Si por lo contrario aparecen del lado derecho se refiere(n) al tamaño de muestra y/o elemento o renglon si estos últimos se tratan de un escalar o un vector respectivamente.

Una vez señaladas las características generales de la notación se presentará en su totalidad la que estuvo presente en el estudio en orden de aparición:

$\underline{y}_T$	variable endógena con T períodos (vector T X 1)
y_t	t-ésimo elemento de $\underline{y}_T$ (escalar(1X1))
X_T	matriz con información de las P variables exógenas en T períodos (matriz (TXP))
$\underline{x}'_t$	t-ésimo renglón de X_T, con la información de las P variables exógenas en el tiempo t (vector transpuesto 1XP)
$x_{i,j}$	i-ésimo elemento del j-ésimo renglón de la matriz X_T (escalar (1X1))
$\underline{B}$	vector de parámetros ($B_1, B_2, \ldots, B_P$) (PX1)
$\underline{U}_T$	vector de perturbaciones (TX1)
u_t	t-ésimo elemento de $\underline{U}_T$
$X'_T X_T$	matriz cuadrada (PXP)
$V_T = (X'_T X_T)^{-1}$	matriz inversa (PXP)
$\hat{\underline{B}}_T$	estimador mínimo cuadrático ordinario (MCO) (PX1)
$\hat{\underline{y}}_T$	ajuste de $\underline{y}_T$ utilizando $\hat{\underline{B}}_T$ (TX1) $(X'_T \hat{\underline{B}}_T)$
$\hat{y}_{i,j}$	i-ésimo elemento de $\underline{y}_j$ (1X1) $(\underline{x}'_i \hat{\underline{B}}_j)$
$\hat{\underline{U}}_T$	vector de residuos utilizando $\hat{\underline{B}}_T$ (tX1)
$\hat{u}_{i,j}$	i-ésimo elemento de $\hat{\underline{U}}_j$ (1X1) $(y_{i,j} - \hat{y}_{i,j})$
${}_R\hat{\underline{B}}_T$	estimador de $\underline{B}$ con restricciones (vector (PX1))
C	matriz con R restricciones sobre los P parámetros (PXR)
$\underline{S}$	complemento de las R restricciones (vector de constantes RX1)

N_T	matriz proyección sobre el espacio generado por X idempotente y simétrica (TXT) $(X_T V_T X_T')$
$n_{i,i}$	(i,i) elemento de la matriz Nj $(\underline{x}_i' V_j \underline{x}_i)$
I_T	matriz identidad de orden T
M_T	matriz proyección sobre el espacio ortogonal al - generado por X_T, idempotente y simétrica (TXT) $(I-N_T)$
$m_{i,i}$	(i,i) elemento de M_T $(1-n_{i,i})$
$\underline{\gamma}$	vector de parámetros desconocidos (PX1)
Z_T	matriz cuyo único renglón distinto de cero es el - t-ésimo (TXP) $[0 \quad \underline{x}_T]'$
$X_T' Z_T$	matriz (PXP) $(\underline{x}_T \underline{x}_T')$
σ^2	varianza para cada u_t
Q^{-1}	plim $(\frac{1}{T} X_T' X_T)$ matriz positiva definida (PXP)
$\underline{I}_{t.}$	t-ésimo renglón de la matriz identidad de orden T (vector (1XT))
$I_{.t}$	t-ésimo columna de la matriz identidad de orden T (vector (1XT))
$\underline{A}'$	(vector (TX1)) $(\underline{I}_{t.} - \underline{x}_t' V_T X_T)$ y cumple:

$$A' X_T = 0$$

$$\underline{A}' \underline{A} = m_{t,t}$$

W	$V_T X_T' + \frac{1}{n_{T,T}} V_T \underline{x}_T \underline{A}'$	matriz (PXT)
H	$X_T V_T C (C' V_T C)^{-1} C' V_T X_T'$	simétrica e idempotente
Z_{T+1}	$\begin{bmatrix} Z_T \\ \underline{z}_{T+1} \end{bmatrix}$	matriz particionada ((T+1)XP)
$\underline{U}_{T+1}$	$\begin{pmatrix} \underline{U}_T \\ u_{T+1} \end{pmatrix}$	vector particionado ((T+1)XP)

$\underline{D}'$	=	$[\,\underline{z}'_{T+1}\, V_T X_T' \quad -1]$ vector particionado (1X(T+1))
$\underline{G}'$	=	$[\,\underline{z}'_{T+1}\, W \quad -1]$ vector (1X(T+1))
CFABT		casos favorables para los ajustes utilizando el estimado- $\hat{\underline{B}}_T$
CFARBT		casos favorables para los ajustes utilizando el estimado- ${}_T\hat{\underline{B}}_T$
CFPBT		casos favorables para los pronósticos utilizando el estimado $\hat{\underline{B}}_T$
CFPRBT		casos favorables para los pronósticos utilizando el estimado ${}_T\hat{\underline{B}}_T$
SCABT		suma de residuos al cuadrado de los ajustes utilizando $\hat{\underline{B}}_T$
SCARBT		suma de residuos al cuadrado de los ajustes utilizando - ${}_T\hat{\underline{B}}_T$
SCPBT		suma de residuos al cuadrado de los pronósticos utilizando $\hat{\underline{B}}_T$
SCPRBT		suma de residuos al cuadrado de los pronósticos utilizando ${}_T\hat{\underline{B}}_T$
PI		pronósticos inmediatos (casos favorables)

BIBLIOGRAFIA

1. Besley et al (1980)	Regression Diagnostic Identifying Influential Data and Sources of Colinearity, John Wiley
2. Draper, N. y H. Smith (1966)	Applied Regression Analysis, Wiley Intersciense
3. Hoel, P et al (1971)	Introduction to Probability Theory, Houghton-Miffin
4. Judge, G et al (1980)	The Theory and Practice of Econometrics, John Wiley
5. Judge G. G. y W. Bock (1978)	The Statistical implications of Stein-fule and preliminary test estimators in Econometrics,- North Holland
6. Theil, H. (1971)	Principles of Econometrics, John Wiley, North Holland
7. Wasan, M.T. (1970)	Parametric Estimation, Mc. Graw-Hill