2G.
6

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CRUZAMIENTOS DE LAS TRAYECTORIAS DE UN PROCESO ESTOCASTICO A UN NIVEL FIJO Y OTRAS PROPIEDADES RELACIONADAS.

Tesis Profesional

Que para obtener el Título de

A C T U A R I O

p r e s e n t a

JOSE ROBERTO BAUTISTA ATENOGENES

México, D. F. 1984

INTRODUCCION

Los procesos estocásticos son una rama de la Probabilidad que se encarga de estudiar los fenómenos aleatorios que se desarrollan en el tiempo y éstos abundan en la naturaleza. Ocurren en Medicina, Biología, Física, Oceanografía, Economía y Psicología, por mencionar algunos solamente. Si un científico toma en cuenta la naturaleza probabilistica del fenómeno con el cual está trabajando, debería, invariablemente, hacer uso de la teoría de procesos estocásticos.

El trabajo consta de cuatro capítulos:

- El primero está compuesto por cinco secciones en las cuales se pretende dar un panorama muy general sobre los resultados que utilizaremos de los procesos estocásticos y la teoría de Probabilidad, desde definiciones hasta propiedades que nos serán de utilidad para los capítulos posteriores, tales como procesos estocásticos separables, estacionarios, gaussianos, teorema de Kolmogorov, lema de Borel-Cantelli, etc. Para las personas que han estudiado teoría elemental de Probabilidad y algún curso sobre procesos estocásticos, podrán pasar rápidamente sobre este capítulo. De cualquier forma al final de la tesis se incluye la bibliografía correspondiente a estos temas y podrá consultarse, por ejemplo Feller [1], Gnedenko [1], Loeve [1].
- El segundo capítulo se compone de dos secciones. La primera habla sobre la continuidad de las trayectorias de un proceso estocástico, para lo cual se enuncian dos resultados; uno sobre las condiciones para que un proceso esto--

cástico acepte una versión que casi seguramente tiene sus trayectorias continuas y el otro sobre la relación de la separabilidad y la continuidad. Veremos además que aumentando la separabilidad a algunas condiciones sobre la distribución de X, implican la continuidad del proceso y no sólo de una versión. Se da también un corolario con su generalización.

La segunda sección habla sobre la diferenciabilidad de las trayectorias de un proceso estocástico. Se enuncia sólo un teorema en el cual se dan condiciones para las cuales un proceso estocástico tiene sus trayectorias casi seguramente con derivada continua y, como en la sección primera, se enuncia un corolario con su generalización.

- El tercer capítulo consta de cuatro secciones. Este es la parte medular de la tesis. Contiene desde las definiciones de lo que se va a entender por cruzamiento de las trayectorias de un proceso estocástico a un nivel fijo, los cruzamientos hacia arriba, cruzamientos hacia abajo y "tangencias", hasta el estudio de nuevas variables aleatorias que se definen en el capítulo llamadas "tiempos de excedencia".

La primera sección consta de resultados sobre las condiciones bajo las cuales se puede asegurar que las "tangencias" no ocurran. Dichos resultados son para un tipo de procesos estocásticos con trayectorias con derivada continua.

La segunda sección se encamina a obtener algunas características de la variable aleatoria "número de cruzamientos" en el caso muy particular en que el proceso es gaussiano.

La tercera sección nos da algunas características numéricas de las variables aleatorias - "número de cruzamientos hacia arriba (abajo)", así como un resultado sobre la no ocurrencia- de las tangencias por parte de las trayecto-- rias de un proceso estocástico, también cuando es gaussiano.

La cuarta sección nos adentra en el estudio - de unas nuevas variables aleatorias, que definiremos en esta misma sección, llamadas "tiempos de excedencia" y se obtienen algunas de - sus características numéricas.

-El cuarto capítulo está constituido por dos - secciones cuyo objetivo es presentar resultados sobre la distribución de la variable aleatoria "número de cruces", pero cuando el ni-- vel que estábamos considerando fijo, ahora lo tomaremos como una variable que tiende a infinito, además de trabajar con una definición - alternativa de cruzamientos hacia arriba llamada ε-cruzamiento hacia arriba.

La primera sección nos da una distribución asintótica de la media de los ε-cruzamientos hacia arriba, cuando el nivel se va haciendo- cada vez más grande. Este resultado es debido a James Pickands III [1], [2].

La segunda sección nos da una distribución asintótica del número de ε-cruzamientos ha-- cia arriba y se demuestra que bajo ciertas -- condiciones esta distribución es una Poisson. Esta demostración fue hecha primero por Vol-- konski & Rozanov [1].

La demostración de estos resultados se hace - por medio de varios lemas que se enuncian pero no se prueban. Se dan sus demostraciones, que son muy técnicas, en dos anexos que se encuentran al final de la tesis.

Cabe hacer una aclaración en cuanto a la notación que se utiliza en este trabajo. Consta, en su mayoría de cuatro caracteres dados en la siguiente forma: ----- (*.*.*.*.), donde los asteríscos representas algún número o letra, según sea el caso.

El primero indica el número del capítulo.

El segundo se refiere a la sección correspondiente.

El tercer caracter denota si es un teorema (T), lema (L), corolario (C) ó definición, la cual se representará con un número consecutivo.

El cuarto nos da el número de teorema, lema o corolario de la sección.

En caso de haber un quinto caracter, éste se referirá a alguna igualdad del teorema, lema o corolario correspondiente.

Siendo así, por ejemplo:

(4.2.T.2.3.)

Se representaría la tercera igualdad del segundo - teorema de la sección dos del capítulo IV.

Me gustaría agradecer al Dr. Jorge Santibañez Rome-
llón el que me haya dirigido este trabajo, así como tam-
bién a mis sinodales M. en C. Arturo Nieva Gochicoa, M.
en C. Samuel Escarela Cornejo, Dr. Joaquín Curiel Cañe-
do y Mat. Rodolfo Morales Martínez, por sus valiosas a-
portaciones al mismo.

Agradezco a
Mónica Griselda Flores Barragán,
Gabriela Erika Ortiz Malcher y a
Elvia Ojeda Apreza por haber me-
canografiado esta Tesis.

I N D I C E

C A P I T U L O   I

CONCEPTOS PRELIMINARES.

1.1 ¿QUE ESTUDIAN LOS PROCESOS ESTOCASTICOS?

La teoría de la Probabilidad se encarga, dentro de un marco matemático formal, de estudiar aquellos fenómenos en los cuales, bajo un conjunto fijo de condiciones, el resultado de un experimento es incierto, es decir, los llamados fenómenos aleatorios. Por ejemplo:

a) Lanzar un dado
b) Número de llamadas que llegan a un conmutador a las 10:00 hrs.
c) Número de aviones que piden pista a las 11:00 hrs.
d) La cantidad de agua en una presa a las 12:00 hrs.

En los ejemplos b), c) y d) se tiene una cierta dependencia del tiempo. Los procesos estocásticos se encargan de estudiar aquellos fenómenos aleatorios que dependen de un parámetro (en particular el tiempo), dentro de un marco matemático formal.

1.2 ¿QUE ES UN PROCESO ESTOCASTICO?

Consideremos una familia arbitraria de variables aleatorias $\{X_t\}$ donde t toma valores sobre algún conjunto de índices T.

Dado lo anterior, podemos dar una primera definición de un proceso estocástico, como una familia arbitraria de variables aleatorias. Si T consta de un número a lo más numerable de valores, la familia $\{X_t ; t \in T\}$ de variables aleatorias es llamada un proceso estocástico con parámetro discreto. Cuando T consta de un número no numerable de valores, la familia de variables aleatorias es llamada un proceso estocástico con parámetro continuo.

Tomemos el caso en que el conjunto de variables aleatorias consta de una sola. El valor numérico, digamos $X(t)$, de la variable aleatoria para un t fijo no estará determinado de manera única porque estarán actuando influencias aleatorias en el instante t. Para un modelo matemático de los fenómenos aleatorios que dependen del tiempo, sería natural pensar $X(t)$ para cada t fijo como una variable aleatoria definida sobre algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Cuando t varía sobre T, obtenemos una familia de variables aleatorias $X(t)$ dependientes del parámetro t y definidas en el mismo espacio de probabilidad. En base a esto, podemos dar la definición formal de un proceso estocástico.

DEFINICION 1.2.1.
Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, T un conjunto arbitrario. Un proceso estocástico es una función $X(t,\omega)$ la cual, para cada $t \in T$ fijo es una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Esto es, un proceso estocástico está definido como una función $X(t,\omega)$ de dos variables, siendo T y Ω los dominios respectivos. La notación que utilizaremos será X_t ó $X(t)$ en lugar de $X(t,\omega)$ omitiendo la dependencia de ω, sin olvidar que sigue siendo una función de dos variables.

Por otro lado, para cada ω elemento de Ω fijo, en un espacio de probabilidad $X(t,\omega)$ se convierte en una función no aleatoria (es decir, no depende de ω) de t definida para todo $t \in T$. Esto es, para cada ω, resultado posible, existe una y sólo una función de t. Esta función $X(t) = X(t,\omega)$ con ω fijo describe el desarrollo de un cierto experimento E en un caso particular, cuando el resultado ω se ha dado. De acuerdo con esto, $X(t)$ denotará una realización particular del proceso estocástico y le llamaremos trayectoria del proceso. Con base en esto, damos la definición de trayectoria de un proceso estocástico.

DEFINICION 1.2.2.
Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, $X = \{X(t);\ t \in T\}$ un proceso estocástico real definido sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
$\forall\ \omega \in \Omega$ a la aplicación que $\forall t \in T$ asocia $X(t) = X(t,\omega)$ se le llama trayectoria del proceso estocástico X.

La trayectoria $X(t)$ puede ser interpretada como un "punto" en el espacio L de todas las funciones $f(t)$ de la variable $t \in T$. El espacio L será llamado el espacio de trayectorias del proceso estocástico.

En la teoría de procesos estocásticos estaremos interesados en las propiedades (que definiremos más adelante en el Capítulo II) de las distribuciones de probabilidad en el conjunto de trayectorias asociado al proceso bajo consideración. Podemos, por ejemplo, desear conocer la probabilidad de que una trayectoria de un proceso dado tenga una propiedad específica, esto es que pertenezca a algún subconjunto específico A del espacio L. Muchas veces conocemos la familia finito dimensional de distribuciones de un proceso estocástico ó en el último de los casos, algo acerca de las propiedades de esta familia y queremos deducir de este conocimiento tanto como sea posible acerca de la distribución de probabilidad correspondiente en el espacio de trayectorias. Esto nos induce a la siguiente pregunta: ¿hasta dónde está la --

distribución de probabilidad, en el espacio de trayectorias L inducido por un proceso estocástico dado, determinada por la familia de distribuciones finito dimensionales del proceso estocástico?, es más, si una familia de distribuciones finito dimensionales, con el conjunto de parámetros T está dada a priori, ¿bajo qué condiciones existirá un proceso estocástico que tenga como distribuciones finito dimensionales a esta familia de funciones de distribución?

Las respuestas a estas preguntas están contenidas en un teorema, debido a Kolmogorov , el cual será dado sin su demostración.

<u>TEOREMA</u> 1.1.T.1.

1) <u>Sea $X=\{X(t);\ t\in T\}$ un proceso estocástico con una familia de distribución finito dimensional dada. Entonces, esta familia define de manera única</u> (salvo equivalencia) <u>la distribución de probabilidad en el espacio de trayectorias L</u>.

La segunda parte del teorema da respuesta a la pregunta: dada una familia de distribuciones finito dimensionales con un conjunto arbitrario T , ¿bajo qué condiciones existirá un proceso estocástico asociado a dichas distribuciones?

2) <u>Es necesario y suficiente que la familia de distribuciones; dada a priori, satisfaga las siguientes dos condiciones para que exista un proceso estocástico asociado a dichas distribuciones.</u>

i) <u>Condición de simetría</u>

<u>La función de distribución</u> n-<u>dimensional</u> $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$, <u>debe ser simétrica en todos los</u> (x_j,t_j). <u>Esto es,</u> F <u>debe permanecer inva-</u>

riante cuando la x_j y t_j sufren alguna permutación, es decir

$\forall n$

$$P\{X(t_1)\leq x_1, X(t_2)\leq x_2, \ldots, X(t_n)\leq x_n\} =$$

$$= P\{X(t_3)\leq x_3, X(t_2)\leq x_2, \ldots, X(t_n)\leq x_n\} .$$

ii) Condición de consistencia

Está expresada por la siguiente relación:

$$\lim_{x_n\to\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) =$$
$$= F[(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}]$$

lo cual está basado en que para cada $\omega\in\Omega$ el conjunto definido por las desigualdades

$$X(t_1)\leq x_1, \ldots, X(t_{n-1})\leq x_{n-1}, X(t_n)\leq x_n$$

cuando $x_n\to\infty$ tiende al conjunto definido por

$$X(t_1)\leq x_1, \ldots, X(t_{n-1})\leq x_{n-1} .$$

Si se desea, la demostración del teorema puede verse en Cramer & Leadbetter [1, p. 32-37]

1.3 EJEMPLOS DE PROCESOS ESTOCASTICOS.

Dentro de la teoría de los procesos estocásticos, existen algunos que por sus características muy especiales, reciben un nombre determinado. Uno de los más importantes para nuestro estudio son, sin duda, los llamados gaussianos, cuya definición daremos a continuación.

DEFINICION 1.3.1.-

Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, $X=\{X(t); t\in T\}$ un proceso estocástico real sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Decimos que X es gaussiano si para toda n y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ la distribución conjunta de $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ es una normal multivariada.

Entre los procesos gaussianos sobresale el llamado proceso de Wiener ó movimiento Browniano. Como su nombre lo indica, este proceso provee un modelo probabilista para el fenómeno aleatorio del movimiento Browniano. Específicamente, la trayectoria del proceso puede representar una coordenada de una partícula que describe el movimiento Browniano como una función de $t \geq 0$.

Matemáticamente un proceso de Wiener está definido por las hipótesis de que todas las distribuciones finito dimensionales sean vectores aleatorios con distribución normal n-variada con media cero y matriz de covarianza dada por:

$$\forall s,t \quad \operatorname{cov}\{X(s),X(t)\} = E\{X(t),X(s)\}$$
$$= \min(s,t)$$

A continuación mencionaremos otros ejemplos sobre procesos estocásticos y lo que significan sus trayectorias.

1) Consideremos el siguiente fenómeno aleatorio: la cantidad de agua en una presa en cualquier instante del día. Si $\Omega = \{\text{días}\}$, la variable aleatoria $X(\omega)$ (con $\omega \in \Omega$) denota la cantidad de agua el día ω. Como estamos interesados en la cantidad de agua el día ω en el instante t, entonces $X_t(\omega)$ con $\omega \in \Omega$, $t \in [0,24]$ denota la cantidad de agua en la presa el día ω en el instante t. Dada la definición 1.2.1. tenemos un proceso estocástico: $X = \{X_t(\omega);\ t \in [0,24]\}$.

Si fijamos ω y hacemos variar t, tenemos el desarrollo en el día ω (fijo) de la cantidad de agua las 24 hrs. (ver figura 1.3.1.)

FIGURA 1.3.1.

2) En el ejemplo b) de 1.1 podemos considerar el número de llamadas que llegan al conmutador entre las 10:00 hrs. y 11:00 hrs. Si consideramos de nuevo $\Omega = \{\text{días}\}$, entonces $X_t(\omega)$ con $\omega \in \Omega$ y $t \in [10, 11]$ es un proceso estocástico. Fijando nuevamente ω, la función $X_t(\omega)$ nos describe como varía la intensidad de llamadas que llegan al conmutador en el transcurso de las 10:00 a las 11:00 hrs. (ver figura 1.3.2.)

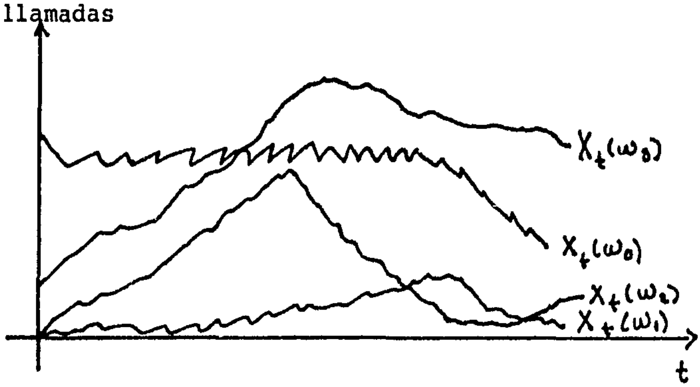


FIGURA 1.3.2.

3) Supongamos que tenemos un transmisor que emite diferentes tipos de señales. Sea $\Omega = \{$ señales $\}$, entonces $X_t(\omega)$
con $t \in [0,24]$ y $\omega \in \Omega$ es un proceso estocástico que denota el comportamiento de la señal ω en el transcurso de un día. Fijando ω tenemos el desarrollo de la señal en el transcurso del día, desde que es emitida al principio y durante todo el trayecto hasta que es recibida (ver figura 1.3.3.)

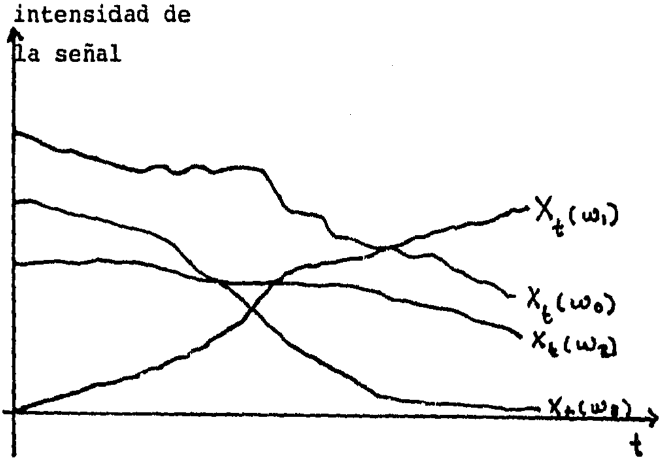


FIGURA 1.3.3.

Como funciones de $t \in T$ cuando fijamos ω , nos interesan las propiedades clásicas de regularidad de las funciones como son intensidad y diferenciabilidad. En el ejemplo (1), si todas las trayectorias son continuas y diferenciables, querrá decir que el comportamiento del agua en la presa es regular. En (3) si alguna trayectoria no es continua nos estaría diciendo que la señal emitida se pierde y si no son diferenciables entonces su comportamiento es muy irregular.

1.4 ALGUNOS CONCEPTOS.

En ocasiones no es posible trabajar con el proceso original y entonces requerimos de uno que sea "equiva-- lente" al primero, en base a esto damos la siguiente

DEFINICION 1.4.1.
Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad -- $X=\{X(t);t\in T\}$, $Y=\{Y(t);t\in T\}$ dos procesos estocás ticos definidos sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Decimos que el proceso Y es una versión del proceso X - si para toda $t\in T$, $X_t(\omega)$ y $Y_t(\omega)$ son va-- riables aleatorias equivalentes; esto es, si para toda $t\in T$

$$P\{\omega\in\Omega; X_t(\omega)=Y_t(\omega)\}=1$$

Una observación importante es la siguiente: podemos tener que una propiedad P se cumpla para toda $t\in T$ y sin embargo no cumplirse para el proceso. Veamos el- ejemplo siguiente: sean $\Omega=[0,1]$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ el espacio de probabilidad correspondiente, X un proceso estocástico sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $T=[0,1]$ $\mathcal{P}$, una probabilidad- que no cargue los puntos (con parte atómica nula). Supongamos que $X_t(\omega)$ satisface P excepto para ω_t (esto- es; $X_t(\omega)$ satisface casi seguramente P), entonces existe $N_t\subset\Omega$ tal que $P(N_t)=0$ y para toda $\omega\in N_t$, $X_t(\omega)$ no satisface P. X satisface P si existe N_X tal que $P(N_X)=0$ y para toda $\omega\in\Omega$ en N_t, X no satisface P proque $P\{\bigcup_{t\in T} N_t\}$ no está definida.

En particular una versión Y de un proceso estocástico X puede poseer una propiedad P y X no poseerla (ver el ejemplo anterior, es decir, no es lo mismo $P\{X_t\in\mathcal{P}, \forall t\}=1$
que
$\forall t$ $P\{X_t\in\mathcal{P}\}=1$

Un concepto que intenta resolver los problemas que plantea la observación que acabamos de hacer es el de separabilidad de un proceso estocástico. Intuitivamente - es un proceso estocástico separable si existe un subconjunto denso numerable de T tal que, en cuanto a las - trayectorias de X estas se comprotan igual en el subconjunto denso numerable que en T . En base a esto, damos a continuación la definición de separabilidad como sigue:

DEFINICION 1.4.2.

Sea $X=\{X_t; t\in T\}$ un proceso estocástico. Es separable si existe S (llamado separante) contenido en T tal que para todo intervalo abierto I cuya intersección con T es no vacía, casi seguramente, se cumple alguna de las siguientes condiciones:

i) $\inf\limits_{s_j \in I\cap S} X_{s_j} = \inf\limits_{t \in I\cap T} X_t$

$\sup\limits_{s_j \in I\cap S} X_{s_j} = \sup\limits_{t \in I\cap T} X_t$

ii) $\inf\limits_{s_j \in I\cap S} X_{s_j} \leq \inf\limits_{t \in I\cap T} X_t$

$\sup\limits_{t \in I\cap T} X_t \quad \sup\limits_{s_j \in I\cap S} X_{s_j}$

iii) $\inf\limits_{s_j \in I\cap S} X_{s_j} \leq X_t \leq \sup\limits_{s_j \in I\cap S} X_{s_j} \qquad t \in I\cap T$

y para toda t en la cerradura de T

i') $\liminf\limits_{s_j \to t} X_{s_j} = \liminf\limits_{t' \to t} X_{t'}$

$\limsup\limits_{t' \to t} X_{t'} = \limsup\limits_{s_j \to t} X_{s_j}$

ii') $\liminf\limits_{s_j \to t} X_{s_j} \leq \liminf\limits_{t' \to t} X_{t'}$

$\limsup\limits_{t' \to t} X_{t'} \leq \limsup\limits_{s_j \to t} X_{s_j}$

iii') $\liminf\limits_{s_j \to t} X_{s_j} \leq X_t \leq \limsup\limits_{s_j \to t} X_{s_j} \qquad t \in T$

El siguiente teorema nos provee de una herramienta-matemática en cuanto a procesos estocástico separables.

TEOREMA 1.4.1.

Todo proceso estocástico admite una versión - separable.

Este teorema es debido a Dobb y si se desea, puede verse la demostración en el Loeve [1].

1.5 ESTACIONARIDAD Y LEMA DE BOREL-CANTELLI

La estacionaridad es otro concepto que facilita el- estudio del comportamiento de las trayectorias dentro de la teoría de los procesos estocásticos.

DEFINICION 1.5.1.

Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, -- $X = \{X(t) ; t \in T\}$ un proceso estocástico real de finido sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. X es estacionario si $\forall n$, $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in T^n$ y $h > 0$

$$P\{X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n\} =$$

$$= P\{X_{t_1+h} \leq x_1, X_{t_2+h} \leq x_2, \dots, X_{t_n+h} \leq x_n\}$$

esto quiere decir, en particular, que

$$X_t - X_{t+h}$$

es independiente de t y sólo depende de -- h.

Por último, un resultado que nos sería de mucha utilidad en los capítulos posteriores es el llamado lema de Borel-Cantelli que daremos a continuación.

Consideremos $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión infinita de miembros de $\mathcal{A}$. En base a esto definimos

1) $\lim\sup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

2) $\lim\inf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

lo cual quiere decir que

(1) $\forall n, \exists k \geq n$ tal que A_k sucede a partir de un cierto valor

(2) $\exists n$ tal que $\forall k \geq n$ sucede A_k para todo valor de k .

LEMA DE BOREL-CANTELLI.

Con la notación que acabamos de introducir,

i) $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow$

$$P\{\lim\sup_{n\to\infty} A_n\} = 0$$

es más, si las A_n son independientes y

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Rightarrow$

$$P\{\lim\sup_{n\to\infty} A_n\} = 1 .$$

Su aplicación en trayectorias la veremos en el Capítulo II.

C A P I T U L O II

CONTINUIDAD Y DIFERENCIABILIDAD DE TRAYECTORIAS

En éste capítulo, vamos a estudiar algunas propiedades analíticas de las trayectorias de un proceso estocástico $X=\{X(t) ; t\in T\}$, tales como: continuidad y deferenciabilidad de las trayectorias de un proceso. Es decir, nos podemos preguntar, ¿Cuándo las trayectorias de un proceso serán continuas (diferenciables) ?, o más bien, en términos probabilistas, ¿Bajo qué condiciones un proceso X tiene casi todas sus trayectorias continuas (diferenciables) ?.

Hemos hablado de continuidad y diferenciabilidad, sin embargo, no hemos hablado de qué se entiende por continuidad de las trayectorias de un proceso y diferenciabilidad de las mismas.

Entonces, para precisar lo que entendemos por continuidad o diferenciabilidad, necesitamos dar las siguientes definiciones:

<u>Definición</u> 2.1

<u>Sea $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espacio de probabilidad, $X=\{X(t);t\in T\}$ un proceso estocástico real sobre el espacio $(\Omega,\mathcal{A},P)$, en éstas condiciones definimos</u>:

1) <u>Decimos que un proceso X tiene sus trayectorias continuas si</u>:

$$P\{\omega\in\Omega ; t\longrightarrow X_\omega(t) \text{ es continua}\} = 1$$

2) <u>Decimos que un proceso X tiene sus trayectorias diferenciables si</u>:

$$P\{\omega\in\Omega ; t\rightarrow X_\omega(t) \text{ es diferenciable}\} = 1$$

2.1 CONTINUIDAD

Concentremonos primero en la continuidad de trayectorias. Para responder a la pregunta planteada al principio del capítulo, con respecto a la continuidad de -- las trayectorias de un proceso, tenemos el siguiente - resultado:

Sean g y q dos funciones pares crecientes en- una vecindad del origen, en estas condiciones tenemos - el siguiente

TEOREMA 2.1.T.1 (Continuidad de Trayectorias).

Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad --- $T=[0,1]$, $X=\{X(t)\ ; t\in T\}$ un proceso estocástico real sobre el espacio de probabilidad -- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, supongamos que se verifican las- siguientes condiciones:

i) $\forall\ t, t+h \in T$
$P\{\,|X(t+h) - X(t)| \geq g(h)\,\} \leq q(h)$

Tales que:

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} g(2^{-n}) < \infty$ y

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n} q(2^{-n}) < \infty$

Entonces existe un proceso η , equivalente- a X , cuyas trayectorias son casi seguramente continuas en T .

La demostración se hará de la siguiente manera:

Nos aproximaremos a una trayectoria del proceso original X , por medio de una sucesión de trayectorias poligonales definidas para cada punto diádico del intervalo $[0,1]$ (i.e. en los puntos de la forma $t_{n,r} = r/2^{n}$ para $r = 0,1,2,3,\ldots,2^{n}$ y alguna $n \in N$, igual que las -- trayectorias del proceso original y para el resto de -- los puntos (entre dos diádicos) como la recta que los une (ver figura 2.1.1.).

Se mostrará que para cada $n \in N$, cada proceso definido así, tiene sus trayectorias continuas. Asimismo, mostraremos que la sucesión que definen las trayectorias poligonales, convergen uniformemente a las trayectorias de un proceso que llamaremos η, que tendrá, con probabilidad uno, sus trayectorias continuas, ya que la convergencia es uniforme. Finalmente, demostraremos que para toda $t \in [0,1]$, $\eta(t)$ es equivalente a $X(t)$.

Dentro de la demostración, se utilizarán varios resultados, vistos en el Capítulo I, tales como: Lema de Borel-Cantelli, equivalencia de procesos y otros más.

DEMOSTRACION

Supongamos que una parte de una trayectoria de X está dada como sigue:

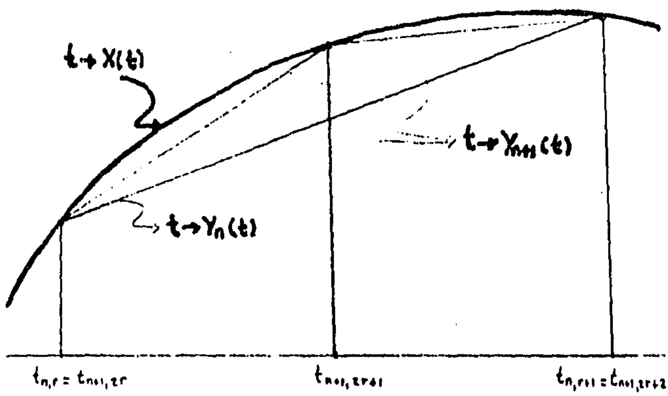


FIGURA 2.1.1.

donde

$$t_{n,r} = r/2^n \qquad , \; r = 0,1,2,\ldots,2^n$$

$X(t)$.- la trayectoria del proceso original

$Y_n(t)$.- la n-ésima aproximación a $X(t)$

$Y_{n+1}(t)$.- la (n+1)-ésima aproximación a $X(t)$

De la figura 2.1.1. podemos ver que para ---- $t \in (t_{n,r}\,, t_{n,r+1})$ como $Y_n(t)$ es la recta que - une los puntos $(t_{n,r}\,, X(t_{n,r}))$ y $(t_{n,r+1}\,, X(t_{n,r+1}))$

con pendiente $\quad m = \dfrac{X(t_{n,r+1}) - X(t_{n,r})}{t_{n,r+1} - t_{n,r}}$

podemos expresar $Y_n(t)$ para $t_{n,r} \leq t \leq t_{n,r+1}$ como:

$$Y_n(t) = X(t_{n,r}) + 2^{n}(t - t_{n,r})\left[X(t_{n,r+1}) - X(t_{n,r})\right]$$

Ahora bien, de la misma figura 2.1.1. podemos ver que la diferencia $Y_{n+1}(t) - Y_n(t)$ la podemos acotar por:

$$|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| \leq \left|X(t_{n+1,2r+1}) - 2^{-1}\left[X(t_{n+1,2r}) + X(t_{n+1,2r+2})\right]\right|$$

y si hacemos

$$A = |X(t_{n+1,2r+1}) - X(t_{n+1,2r})|$$

$$B = |X(t_{n+1,2r+1}) - X(t_{n+1,2r+2})|$$

aplicando la desigualdad del triángulo, tenemos:

$$|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| \leq \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{1}{2}(A + B)$$

Como podemos observar, A y B no dependen de t en el intervalo $[t_{n,r}\,, t_{n,r+1}]$; por lo que

$$\max_{t_{n,r} \leq t \leq t_{n,r+1}} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| \leq \frac{1}{2}(A+B)$$

aplicando la hipótesis i) del teorema

$$P\left\{\max_{t_{n,r} \leq t \leq t_{n,r+1}} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| \geq g(2^{-n-1})\right\} \leq$$

$$\leq P\{A \geq g(2^{-n-1})\} + P\{B \geq g(2^{-n-1})\} \leq 2\, q(2^{-n-1})$$

Ahora bien, como esto es para un intervalo en particular y tenemos 2^n intervalos que co--- rresponden a los 2^n valores de r $(r = 0,1,2,\ldots,2^{n-1})$, encontraremos que para todo el intervalo $[0,1]$:

$$P\{ \max_{0 \leq t \leq 1} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| \geq g(2^{-n-1}) \} \leq 2^{n+1} q(2^{-n-1})$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(2^{-n}) < \infty$

podemos aplicar el lema de Borel-Cantelli, entonces $Y_n(t)$ converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$ con probabilidad uno y converge a una trayectoria de un proceso η , que es continuo (sus trayectorias son continuas), ya que la convergencia de las trayectorias de Y_n es uniforme a las del proceso η . Sólo falta mostrar que η es una versión de X . Es decir, que para toda t que pertenezca al intervalo $[0,1]$

$$P\{ X(t) = \eta(t) \} = 1$$

Para esto, vemos que si $t = t_{n,r}$ entonces para p = 0,1,2,3,... $Y_{n+p}(t) = X(t)$ y por lo tanto $P\{ X(t) = \eta(t) \} = 1.$

Si $t \neq t_{n,r}$ entonces $t = \lim_{n \to \infty} t_{n,r_n}$ para cualquier n y r con $0 \leq t - t_{n,r} \leq 2^{-n}$. Entonces por hipótesis

$$P\{ |X(t_{n,r_n}) - X(t)| \geq g(t - t_{n,r_n}) \} \leq q(t - t_{n,r})$$

y como $0 \leq t - t_{n,r_n} \leq 2^{-n}$ y q es creciente

$$q(t - t_{n,r_n}) \leq q(2^{-n})$$

por lo que

$$P\{ X(t_{n,r_n}) - X(t) \geq g(2^{-n}) \} \leq q(2^{-n})$$

Una aplicación del lema de Borel-Cantelli, nos permite concluir que $P\{ X(t_{n,r_n}) \to X(t) \} = 1$ por lo tanto como $\eta(t)$ es a trayectorias continuas $\eta(t_{n,r}) \to \eta(t)$ con probabilidad uno, pero $X(t_{n,r}) = \eta(t_{n,r})$ entonces:

$$P\{ X(t) = \eta(t) \} = 1 \quad .$$

El siguiente corolario nos da condiciones suficientes para que el teorema 2.1.T.1. se cumpla.

COROLARIO 2.1.C.1.

Si con las notaciones del teorema 2.1.T.1., tenemos que:

$$E\{ |X(t+h)-X(t)|^{p} \} \leq k|h| / |\log |h||^{1+r}$$

donde $p < r$ y K son constantes positivas, entonces la conclusión del teorema 2.1.T.1. se cumple.

La demostración está basada en la aplicación de la desigualdad de Markov, que dice:

Para cualquier variable aleatoria Z y $a > 0$

$$P\{ |Z| \geq a \} \leq E\{ |Z|^{p} \} / a^{p}$$

Incluso una generalización de este corolario sería:

Si $E\{ X(t+h) - X(t) \} \leq f(h)$

con $\sum_{n=1}^{\infty} f(2^{-n})\, g(2^{-n})\, 2^{n} < \infty$

y $\sum_{n=1}^{\infty} g(2^{-n}) < \infty$

donde $f(h)$ y $g(h)$ son decrecientes cuando $h \downarrow 0$ entonces X tiene una versión a trayectorias continuas.

Una pregunta interesante sería, ¿Bajo qué condiciones el proceso es a trayectorias continuas y no sólo posee una versión con esta propiedad?. Si analizamos la demostración, nos daremos cuenta de que lo que está en el fondo de la misma es el concepto de separabilidad visto en el Capítulo I, es decir, analizamos las trayectorias del proceso en un conjunto separante (los diádicos), si el comportamiento del proceso está determinado por su comportamiento en un conjunto denso y numerable, entonces podemos formular el siguiente

TEOREMA 2 1.T.2.

Sea X un proceso estocástico con $0 \leq t \leq 1$ real y separable, que cumple con las condiciones del teorema 2.1.T.1., entonces el proceso X es a trayectorias continuas.

DEMOSTRACION

Sean S el conjunto separante e $I \subset [0,1]$, abierto, entonces para todo t en S tenemos:

$$\lim_{t \in I \cap S} \sup X(t) = \lim_{t \in I \cap T} \sup X(t)$$

y

$$P\{\eta(t) = X(t)\} = 1$$

Ahora bien, para t_0 fijo, por la continuidad de las trayectorias de η

$$|\eta(t) - \eta(t_0)| < \varepsilon \text{ si } |t - t_0| < \delta.$$

Sea $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, entonces

$$X(t_0) \geq \inf_{t \in I} X(t) = \inf_{t \in I \cap S} X(t) = \inf_{t \in I \cap S} \eta(t) \geq \eta(t) - \varepsilon$$

análogamente para $\sup X(t)$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, entonces

$$X(t_0) \geq \eta(t_0) \quad y \quad \eta(t_0) \geq X(t_0)$$

por lo que

$$X(t_0) = \eta(t_0)$$

entonces para toda t en $[0,1]$, $\eta(t) = X(t)$

por lo tanto

$$P\{X(t) = \eta(t) \; ; \; 0 \leq t \leq 1\} = 1$$

es decir,

$$P\{\omega \in \Omega \; ; \; t \to X_\omega(t) \text{ es continua}\} = 1$$

Es decir, si tenemos un proceso estocástico separable, tenemos continuidad para X y no sólo para una versión del mismo.

Con esto terminamos la parte de continuidad. En la siguiente sección veremos algunos resultados sobre la diferenciabilidad de las trayectorias de un proceso estocástico.

2.2 DIFERENCIABILIDAD

Concentremonos ahora, en el problema de obtener condiciones suficientes para que las trayectorias de un proceso estocástico X sean, con probabilidad uno, con derivada continua en $0 \leq t \leq 1$.

Sean g_1 y q_1 dos funciones pares crecientes en una vecindad del origen, en estas condiciones tenemos el siguiente

TEOREMA 2.2.T.1. (Diferenciabilidad de Trayectorias).

Supóngase que las hipótesis del teorema 2.1.T.1. se cumplen, más aún, supongamos que:

i) para toda $t-h$, t, $t+h$ en $0 \leq t \leq 1$

$$P\{ |X(t+h) + X(t-h) - 2X(t)| \geq g_1(h) \} \leq q_1(h)$$

donde

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n g_1(2^{-n}) < \infty$

y

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n q_1(2^{-n}) < \infty$

entonces, existe un proceso Z, versión de X, tal que:

$P\{ Z$ tenga sus trayectorias con derivada continua Z', para toda t en $[0,1] \} = 1$.

DEMOSTRACION

La demostración se hará en dos partes. En la primera se demostrará que la versión η encontrada en la demostración del teorema 2.1.T.1., bajo una cierta defi nición de su derivada, ésta será continua.

En la segunda, se definirá un proceso Z_n tal que para toda t que esté en $[0,1]$, $Z_n(t)=Y_n(t)$ excepto en una vecindad alrededor de $t=t_{n,r}$, y se mostrará que Z_n' converge uniformemente en $[0,1]$ a las trayectorias de un proceso Z_n' que es continuo en todo $[0,1]$, en donde Z es versión de X.

Finalmente, se mostrará que Z_n converge a Z donde para toda $t \in [0,1]$, $P\{X(t)=Z(t)\}=1$ y Z' es la derivada de las trayectorias de Z que es versión de X.

Sea $Y_n(t)$ definido como en la demostración del teorema 2.1.T.1. Entonces, Y_n es a trayectorias continuas, así como también su derivada Y_n' excepto en los puntos $t=t_{n,r}$ donde Y_n' se definirá como la derivada izquierda para r = 1,...,2^n y la derivada derecha para r = 0 (ver figura 2.2.1.).

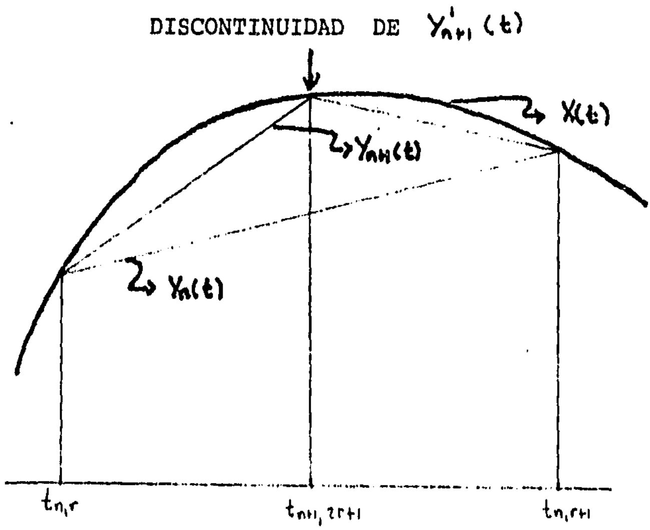


FIGURA 2.2.1.

Entonces $Y_n'(t)$ está definido para toda --- $t \in [0,1]$ y tiene discontinuidad en los pun tos $t = t_{n,r}$ para $r = 1,\ldots,2^n - 1$.

Ahora bien, del teorema 2.1.T.1. teníamos que para toda $t \in (t_{n,r}, t_{n,r+1}]$

$$Y_n(t) = X(t_{n,r}) + 2^n(t - t_{n,r})[X(t_{n,r+1}) - X(t_{n,r})]$$

para toda $t \in (t_{n+1,2r+1}, t_{n+1,2r+2}]$

$$Y_{n+1}(t) = X(t_{n+1,2r+1}) + 2^{n+1}(t - t_{n+1,2r+1})[X(t_{n+1,2r+2}) - X(t_{n+1,2r+1})]$$

para toda $t \in (t_{n+1,2r}, t_{n+1,2r+1}]$

$$Y_{n+1}(t) = X(t_{n+1,2r}) + 2^{n+1}(t - t_{n+1,2r})[X(t_{n+1,2r+1}) - X(t_{n+1,2r})]$$

Entonces tenemos que:

para toda $t \in (t_{n+1,2r}, t_{n+1,2r+2}]$

$$Y_n'(t) = 2^n[X(t_{n+1,2r+2}) - X(t_{n+1,2r})]$$

para toda $t \in (t_{n+1,2r}, t_{n+1,2r+1}]$

$$Y_{n+1}'(t) = 2^{n+1}[X(t_{n+1,2r+1}) - X(t_{n+1,2r})]$$

para toda $t \in (t_{n+1,2r+1}, t_{n+1,2r+2}]$

$$Y_{n+1}'(t) = 2^{n+1}[X(t_{n+1,2r+2}) - X(t_{n+1,2r+1})]$$

y podemos verificar fácilmente que:

para toda $t \in (t_{n+1,2r}, t_{n+1,2r+2}]$

$$|Y_{n+1}'(t) - Y_n'(t)| = 2^n |X(t_{n+1,2r}) + X(t_{n+1,2r+2}) - 2X(t_{n+1,2r+1})|$$

luego entonces, aplicando la hipótesis i) -- del teorema

$$P\{\max_{t_0 \le t \le t_{n,r+1}} |Y_{n+1}'(t) - Y_n'(t)| \geq 2^n g_1(2^{-n-1})\} \leq q_1(2^{-n-1}) \tag{2.2.T.1.1.}$$

y para todo el intervalo $[0,1]$

$$P\left\{\max_{0\leq t\leq 1} |Y'_{n+1}(t)-Y'_n(t)| \geq 2^n g_1(2^{-n-1})\right\} \leq 2^n q_1(2^{-n-1})$$

y una aplicación del lema de Borel-Cantelli y la desigualdad (2.2.T.1.1.), implica que $Y'_n(t)$ converge con probabilidad uno, uniformemente en $[0,1]$.

Ahora bien, en los puntos de discontinuidad $t = t_{n,r}$ con r = 1,2,...,2^n -1, tenemos que

$$Y'_n[(t_{n,r})+0]-Y'_n(t_{n,r}) = 2^n|X(t_{n,r-1})+X(t_{n,r+1})-2X(t_{n,r})|$$

y por hipótesis para el salto de $Y'_n(t)$ en $t = t_{n,r}$

$$P\left\{|\text{salto de } Y'_n(t) \text{ en } t=t_{n,r}| \geq 2^n g_1(2^{-n})\right\} \leq q_1(2^{-n})$$

Y para el máximo de los saltos de $Y'_n(t)$ en todos los $t_{n,r}$

$$P\left\{\max_{0\leq t\leq 1}|\text{salto de } Y'_n(t)| \geq 2^n g_1(2^{-n})\right\} \leq (2^n-1)\, q_1(2^{-n})$$

las hipótesis de convergencia de g_1 y q_1 -- permiten aplicar el lema de Borel-Cantelli para concluir que:

$$P\left\{\max_{0\leq t\leq 1} |\text{salto de } Y'_n(t)| \longrightarrow 0\right\} = 1$$

...(2.2.T.1.2.)

Con ésto queda demostrado que $Y'_n(t)$ es continuo,-- i.e , Y'_n tiene sus trayectorias con derivada continua.

Pasaremos a la segunda parte de la demostración.

Sea $Z_n(t) = Y_n(t)$ excepto en una vecindad alrededor de $t_{n,r}$ de radio 2^{-n^2} para r = 1,2,.. ...,2^n -1. Entonces $Z_n(t)$ tiene derivada continua . En los intervalos excluidos se ajusta un arco (ver figura 2.2.2.).

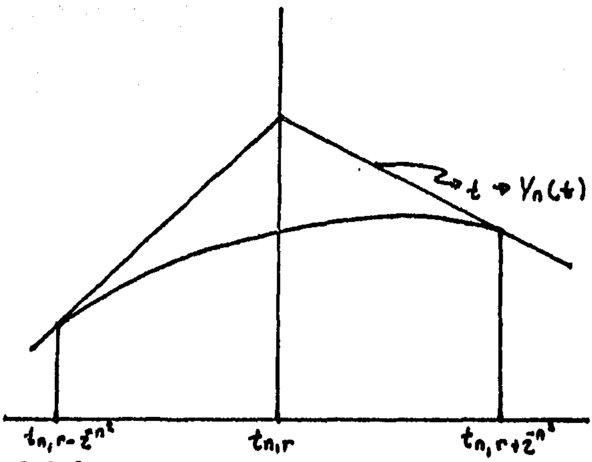


FIGURA 2.2.2.

Entonces

$$|Z_n'(t) - Y_n'(t)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |\text{saltos de } Y_n'(t)|$$

...(2.2.T.1.3.)

y como

$$P\{ \max_{0 \leq t \leq 1} |\text{saltos de } Y_n'(t)| \longrightarrow 0 \} = 1$$

entonces $Z_n'(t) - Y_n'(t) \to 0$ con probabilidad uno, es decir, Z_n' converge uniformemente en $[0,1]$ y llamemos Z' al límite, que es continuo también en $[0,1]$

Ahora bien, para los puntos $t \in (t_{n,r}-2^{-n}, t_{n,r}+2^{-n})$ tenemos la desigualdad (2.2.T.1.2.) por la que:

$$|Z_n(t) - Y_n(t)| \leq \int_{t_{n,r}-2^{-n}}^{t} |Z_n'(s) - Y_n'(s)|\, ds \leq$$

$$\leq 2 \cdot 2^{-n} |\text{ salto de } Y_n'(t) \text{ en } t_{n,r}|$$

y como consecuencia, para todo $t \in [0,1]$

$$\max_{0\leq t\leq 1} |Z_n(t)-Y_n(t)| < 2\cdot 2^{-n^2} \max_{0\leq t\leq 1} |\text{salto de } Y_n'(t)|$$

Luego entonces, en virtud de la expresión --- (2.2.T.1.2.)

$$Z_n(t)-Y_n(t) \to 0 \text{ y } \quad Z_n(t) \longrightarrow Z(t)$$

en donde $Z(t)$ es igual $\eta(t)$, definida en la- demostración del teorema (2.1.T.1.), enton-- ces, tenemos que;

$$\forall\, t \in [0,1] \qquad P\{\, Z(t) = X(t) \} = 1$$

y que Z' es la derivada de Z, con lo cual- queda demostrado el teorema.

Como en la sección anterior, daremos un corolario- que proporciona condiciones suficientes para que el teo rema 2.2.T.1. se cumpla.

COROLARIO (2.2.C.1.)

Si las condiciones del corolario (2.1.C.1.) - se cumplen y si

$$E\{\, |X(t+h)+X(t-h)-2X(t)|^p \} < \frac{K|h|}{|\log|h||^{1+r}}$$

donde $p<r$ y K son constantes positivas, en- tonces el teorema (2.2.T.1.) se cumple.

La prueba está basada en la desigualdad de Markov- y el corolario (2.1.C.1.) de continuidad.

Incluso una generalización del mismo sería:

Si las condiciones del corolario (2.1.C.1.) - de continuidad se cumplen, y si

$$E\{\, |X(t+h)+X(t-h)-2X(t)|^p \} \leq f(h)\,\ell(h)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \ell(2^{-n}) < \infty \quad , \sum_{n=1}^{\infty} 2^n f(2^{-n})\ell(2^{-n}) < \infty$$

entonces el teorema (2.2.T.1.) se cumple.

Como una ilustración de los teoremas vistos en estas dos secciones, podemos mencionar el proceso de Wiener o Movimiento Browniano que vimos en el Capítulo I.

Se puede demostrar a partir del teorema (2.1.T.1.) de continuidad, que el proceso de Wiener tiene sus trayectorias continuas, basta encontrar las funciones $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{q}$ correspondientes para que dicho teorema se cumpla.

El teorema (2.2.T.1.) de diferenciabilidad es un poco más difícil de aplicar, más no imposible, pero nos podemos preguntar si el proceso Gaussiano tiene sus trayectorias continuas y con derivada continua. Esto es afirmativo para la continuidad, pero no así para la diferenciabilidad, es decir, no cualquier Gaussiano tiene trayectorias diferenciables, incluso ni el Browniano.

Ahora bien, las condiciones del teorema (2.2.T.1.) de diferenciabilidad implican directamente las de continuidad; haciendo una analogía con los teoremas de funciones reales de variable real, baste recordar que si una función tenía derivada continua en un intervalo, era continua en ese mismo intervalo. Entonces, si un proceso tiene sus trayectorias con derivada continua, también tiene sus trayectorias continuas, y esto se puede ver de las condiciones del teorema (2.2.T.1.) de diferenciabilidad.

Si analizamos más detenidamente sobre las hipótesis de los teoremas 2.1.T.1. y 2.2.T.1., nos damos cuenta que las mismas son hipótesis sobre la distribución del proceso y condiciones para aplicar el lema de Borel-Cantelli, es decir, que este problema lo podríamos analizar también como un problema de teoría de la distribución de un proceso estocástico y quizá ahí, obtuviesemos resultados similares a los que vimos en este Capítulo.

C A P I T U L O III

CRUZAMIENTOS

En este capítulo nos concentraremos en el siguiente problema. Dado un proceso estocástico y una constante u, que llamaremos nivel, ¿Cuál es el comportamiento del número de veces que las trayectorias del proceso cruzan la recta u?, o mejor dicho, ¿Bajo qué condiciones podemos asegurar (o decir que con probabilidad uno), que las trayectorias del proceso cruzan al nivel u?, y si lo cruzan, ¿Cuántas veces sucede esto?.

Como un ejemplo de las aplicaciones que pueden tener estas cuestiones, podemos considerar a u por ejemplo, como la capacidad de una presa y si el proceso denota la cantidad de agua en el instante t, si una trayectoria cruza al nivel u querrá decir que la presa se ha desbordado o si u es la recta $u = 0$ y una trayectoria toca a u, querrá decir que la presa se ha quedado sin agua.

La transmisión de señales, sería otra aplicación, ya que si $X(t)$ denota la intensidad de la señal en el instante t y u representa la capacidad del canal de transmisión, entonces si una trayectoria cruza a u querrá decir que la señal se distorsiona al rebasar la capacidad del canal.

Existen numerosos ejemplos que se podrían mencionar, como teoría de inventarios, crecimiento de población, teoría de colas, etc.

Otro cuestionamiento interesante sería, preguntarnos por el tiempo que permanece la trayectoria del proceso, por arriba del nivel u (o por abajo), es decir por la periodicidad de los cruces.

En los dos ejemplos anteriores, si una trayectoria cruza a u , el tiempo que permanece por arriba de u será el tiempo que está desbordada la presa o que está distorsionada la señal.

Pasemos a formalizar algunos conceptos que no hemos definido y estamos manejando, como el de cruce de una trayectoria a un nivel u . Con el primer problema que nos enfrentamos es si vamos a contar sólo los cruzamientos "genuinos", o también las veces que una trayectoria del proceso sólo toca a u .

Entonces debemos dar las definiciones precisas de estos conceptos y trabajar sobre ellas.

Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, u una constante real, que llamaremos nivel, $X = \{X_t ; 0 \leq t \leq 1\}$ un proceso estocástico real sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tal que:

$$P\{\omega \in \Omega ; X_t(\omega) \text{ SEA CONTINUA}\} = 1$$

G_u el conjunto de todas las trayectorias de X , tales que:

$$\forall I \subset [0,1], I \text{ abierto } \exists t \in I \text{ e } X(t) \neq u, X(0) \neq u, X(1) \neq u.$$

En estos términos damos las siguientes definiciones:

<u>DEFINICION</u> 3.1. <u>Sea</u> X <u>en</u> G_u. <u>Si</u> <u>existe</u> t_0 <u>en</u> $(0,1)$ <u>tal</u> <u>que</u> <u>existe</u> $\varepsilon > 0$ y <u>para</u> <u>todo</u> t <u>en</u> $(t_0 - \varepsilon, t_0), X(t) \leq u$ y <u>para</u> <u>todo</u> t <u>en</u>

$(t_0, t_0+\varepsilon)$, $X(t) \geq u$, entonces decimos que X tiene un cruzamiento hacia arriba en t_0. Denotaremos por U_u el número de cruces hacia arriba por las trayectorias de X en $[0,1]$, (ver figura 3.1.).

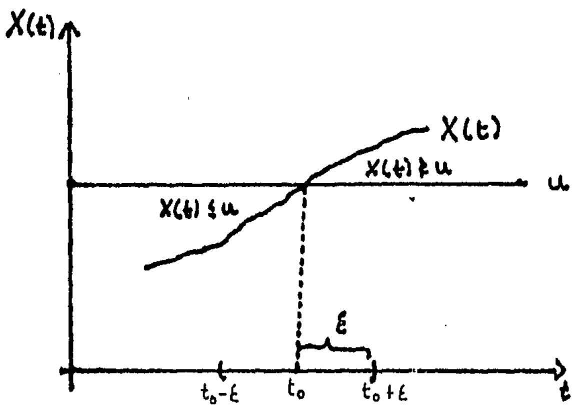


FIGURA 3.1.

DEFINICION 3.2. Sea X en G_u. Si existe t_0 en $(0,1)$ tal que existe $\varepsilon > 0$ y para todo t en $(t_0-\varepsilon, t_0)$, $X(t) \geq u$ y para todo t en $(t_0, t_0+\varepsilon)$, $X(t) \leq u$, entonces decimos que X tiene un cruzamiento hacia abajo en t_0. Denotaremos por D_u el número de cruces hacia abajo por X en $[0,1]$. (ver figura 3.2.).

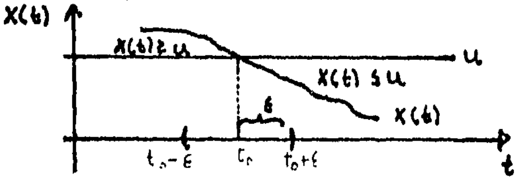
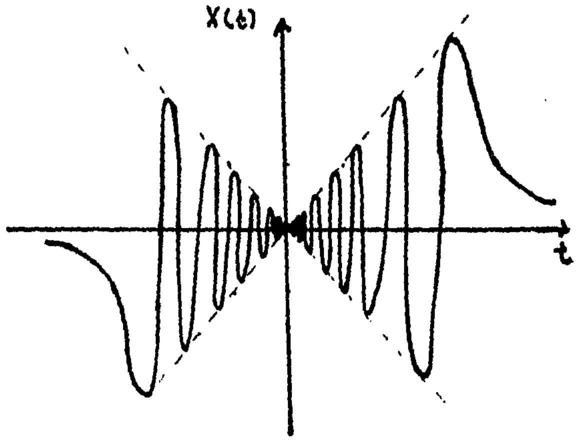


FIGURA 3.2

DEFINICION 3.3. Sea X en G_u. Si existe t_0 en $(0,1)$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que existen t_1, t_2 en $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ tales que $[X(t_1)-u][X(t_2)-u] < 0$ entonces decimos que X tiene un cruzamiento en t_0. Denotaremos por C_u el número de cruces de X en $[0,1]$.

De estas definiciones tenemos que $C_u \geq U_u + D_u$. Es decir, que hay cruces que no son ni hacia arriba, ni hacia abajo, (ver figura 3.3).



Tiene un cruce del nivel $u=0$ en $t_0=0$ que no es hacia arriba ni hacia abajo.

FIGURA 3.3.

Si X cruza al nivel u en t_0 es claro que $X(t_0)=u$. Sin embargo, es posible que $X(t_0)=u$ y que X no cruce a u. Si esto último sucede, diremos que X tiene una tangencia al nivel u en t_0. Equivalentemente, X tiene una tangencia en t_0 si $X(t_0)=u$ y existe una vecindad de t_0 en donde $X(t)-u$ no cambia de signo. Si tenemos que $X(t)-u$ es no negativa en esa vecindad, la tangencia se llamará por abajo y si $X(t)-u$ es negativa, se llamará tangencia por arriba. - Por supuesto, las tangencias son o por arriba o por abajo. Sean T_u y B_u las notaciones respectivas para el número de tangencias por arriba y por abajo, (ver figura 3.4.).

Y por último, sea N_u el número de veces que la trayectoria del proceso cruza a u , es decir, $X(t) = u$ en $[0,1]$, Entonces $N_u = C_u + T_u + B_u$.

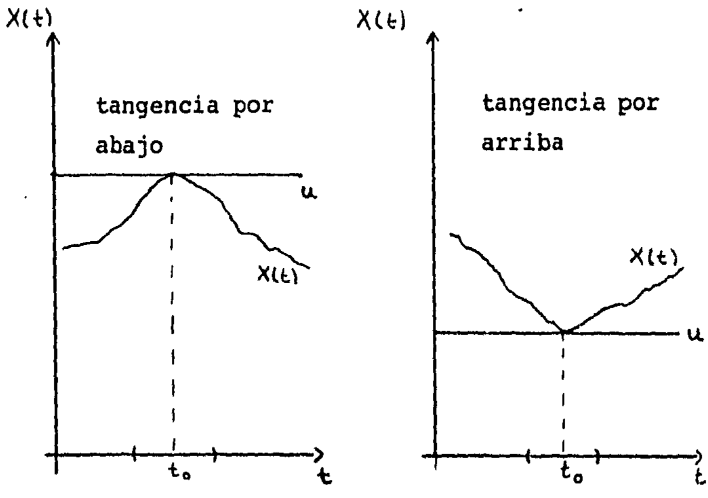


FIGURA 3.4.

3.1 TANGENCIAS

Consideremos ahora el problema de obtener condiciones bajo las cuales, las trayectorias de un proceso estocástico casi seguramente no tendrá tangencias en un nivel u en un período de interés. Posteriormente daremos algunos resultados para procesos normales estacionarios. Esos resultados serán sobre el valor de N_u el número total de veces que $X(t)=u$ en $[0,1]$. Sin embargo, comenzaremos a trabajar con el valor C_u esto es, excluyendo las tangencias. Si podemos decir que casi seguramente las tangencias no ocurren, las variables aleatorias N_u y C_u serán equivalentes y podremos restringir nuestra atención a la variable aleatoria C_u y obtener resultados para la variable aleatoria N_u.

En esta primera parte, se verá un resultado debido a Bulinskaya [1], el cual se refiere a las condiciones bajo las cuales, las trayectorias de un proceso casi seguramente no serán tangentes a u en todo el intervalo $[0,1]$. Sin embargo, las condiciones bajo las cuales será dado este resultado son más restrictivas que cuando veamos el caso en que la distribución del proceso es normal.

Primero necesitamos un resultado sobre el módulo de continuidad.

<u>DEFINICION</u> 3.1.1. <u>Sean $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espacio de probabilidad, $\eta=\{\eta_t; t\in[0,1]\}$ un proceso estocástico real sobre $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Definimos para toda $\omega\in\Omega$ el módulo de continuidad de η como</u>

$$\forall t\in[0,1]\ ;\ \omega_\eta(t)=\sup_{s,s',|s-s'|\le t}|\eta(s)-\eta(s')|$$

En base a lo anterior, tenemos el siguiente

<u>LEMA</u> 3.1.L.1.

<u>Sean $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espacio de probabilidad $\eta=\{\eta_t; t\in[0,1]\}$, un proceso estocástico real sobre $(\Omega,\mathcal{A},P)$ tal que:</u>

$$P\{\omega\in\Omega\ ;\ \eta_t(\omega)\ \text{sea continua}\}=1,$$

<u>$\omega_\eta(t)$ el módulo de continuidad de η, entonces para toda $\varepsilon>0$ es posible encontrar una función $\omega_\varepsilon(t)$ tal que si $\omega_\varepsilon(t)\searrow 0$ cuando $t\searrow 0$ entonces</u>

$$P\{\omega_\eta(t)<\omega_\varepsilon(t)\ \text{para}\ 0\le t\le 1\}>1-\varepsilon$$

DEMOSTRACION

La demostración es simple. Tomemos un t en $[0,1]$, $\omega_\eta(t)$ es una variable aleatoria y por la continuidad de las trayectorias de η tenemos:

para $c>0$ fijo, $\lim_{t\to 0} P\{\omega_\eta(t)<c\}=1$

tomemos $c_1>c_2>\ldots$ que tienda a cero. Si $\varepsilon>0$ es dado, podemos encontrar para toda n en los naturales un t_n tal que

$$P\{\omega_\eta(t_n)<c_n\}>1-\varepsilon/2^{n+1}$$

entonces, como $\omega_\eta(t)$ nunca crece cuando t decrece, tenemos

$$P\{\omega_\eta(t)<c_n \text{ PARA } 0<t\leq t_n\}>1-\varepsilon/2^{n+1}$$

Esta última relación se cumple si t_n es reemplazado por cualquier número pequeño (positivo), luego podemos suponer $t_1>t_2>\ldots$ que tienda a cero, entonces:

$$P\{\omega_\eta(t)<c_n \text{ PARA } 0<t<t_n,\ n=1,2,\ldots\}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=1-\varepsilon/2$$

Ahora, si para $t_{n+1}<t\leq t_n$ escribimos $\omega_\varepsilon(t)=c_n$ tenemos que:

$$P\{\omega_\eta(t)<\omega_\varepsilon(t) \text{ PARA } 0<t<t_1\}>1-\varepsilon/2 \quad (3.1.L.1.1.)$$

Si $t_1<1$ para $t_1<t\leq 1$ podemos tomar $\omega_\varepsilon(t)=c_0$ y escoger c_0 tan grande que

$$P\{\omega_\eta(t)<c_0 \text{ para } t_1<t\leq 1\}>1-\varepsilon/2 \quad (3.1.L.1.2.)$$

de (3.1.L.1.1.) y (3.1.L.1.2.) se concluye el lema.

En base a lo anterior, estamos en condiciones de enunciar el teorema debido a Bulinskaya, que fue mencionado anteriormente. La primera parte, se refiere a las tangencias de las trayectorias de un proceso estocástico, la segunda parte se refiere a la finitud del número de cruces de las trayectorias del proceso a un nivel fijo u, en un intervalo de tiempo.

TEOREMA 3.1.T.1. (Bulinskaya).

Sea u en $\mathbb{R}$ fijo, $X=\{X_t ; t\in[0,1]\}$ un proceso estocástico tal que:

i) $P\{\omega\in\Omega ; X_t(\omega)$; es con derivada continua $\} = 1$

ii) Para toda t en $[0,1]$ y x, la densidad unidimensional $g_t(x)$ del proceso, está acotada en x por $C>0$

entonces:

1) La probabilidad de que para t en $[0,1]$ se tenga el mismo tiempo que $X(t) = u$ y $X'(t)=0$ es cero, en particular, la probabilidad de que $X(t)$ sea tangente a u en todo el intervalo $[0,1]$ es cero.

2) Bajo las mismas condiciones de (1), el número de veces que para toda t en $[0,1]$ $X(t)=u$, es finito con probabilidad uno.

DEMOSTRACION

La demostración de la afirmación (1) es la más larga y la de la afirmación (2) se basa en la de la (1).

La primera se dará en seguida:

Sea $C^{(1)}$ el conjunto de todas las funciones $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ tales que tienen derivada continua en todo su dominio y sea P' la medida de probabilidad en el espacio de trayectorias --

que corresponden al proceso X , esto es el-espacio (Γ, F, P') de probabilidad donde Γ es-el conjunto de todas las posibles trayecto---rias del proceso X , definida como sigue: para cada A' en F , $P'(A') = P(A)$ donde $A = \{\omega \in \Omega ; X_t(\omega) \in A\}$ está en $\mathcal{Q}$

Sea $A_{h,n,K}$, el conjunto de todas las funcio--nes $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ tales que $f(t)$ está en $C^{(1)}$ y que-para $1 \leq K \leq n$ existe al menos un punto τ_x , -en el intervalo $[\frac{K-1}{n}, \frac{K}{n}]$ tal que $|f(\tau_x) - u| \leq h$ y $f'(\tau_x) = 0$, (ver figura 3.5.).

Sea $f(t)$ en $A_{h,n,K}$, por el teorema del Valor-Medio, tenemos:

para $0 < \theta < 1$

$$f(\tfrac{K}{n}) = f(\tau_x) + (\tfrac{K}{n} - \tau_x)\, f'[\tau_x + \theta(\tfrac{K}{n} - \tau_x)]$$

y entonces

$$|f(\tfrac{K}{n}) - u| \leq h + n^{-1}\omega_{f'}(n^{-1}) \qquad (3.1.T.1.1.)$$

donde $\omega_{f'}$ es el módulo de continuidad de la-derivada $f'(t)$ que se definió anteriormente.-

Para cualquier función $\omega(t) \downarrow 0$ cuando $t \downarrow 0$, definimos B_ω como el conjunto de funciones -$f(t)$ en $C^{(1)}$ tales que para toda t en $[0,1]$ $\omega_{f'}(t) \leq \omega(t)$. Por el lema 3.1.L.1. dada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar una función $\omega_\varepsilon(t) \downarrow 0$ cuando $t \downarrow 0$, así que $P(B_\omega) > 1 - \varepsilon/2$.

Sea A_h el conjunto de todas las funciones -$f(t)$ para las cuales existe al menos un punto t_x tal que $f'(t_x) = 0$ y $|f(t_x) - u| \leq h$ entonces

$$A_h = \sum_{k=1}^{n} A_{h,n,K}$$

y

$$P(A_h) \leq \sum_{k=1}^{n} P\{A_{h,n,K} \cap B_{\omega_\varepsilon}\} + P\{B^c_{\omega_\varepsilon}\} \qquad (3.1.T.1.2.)$$

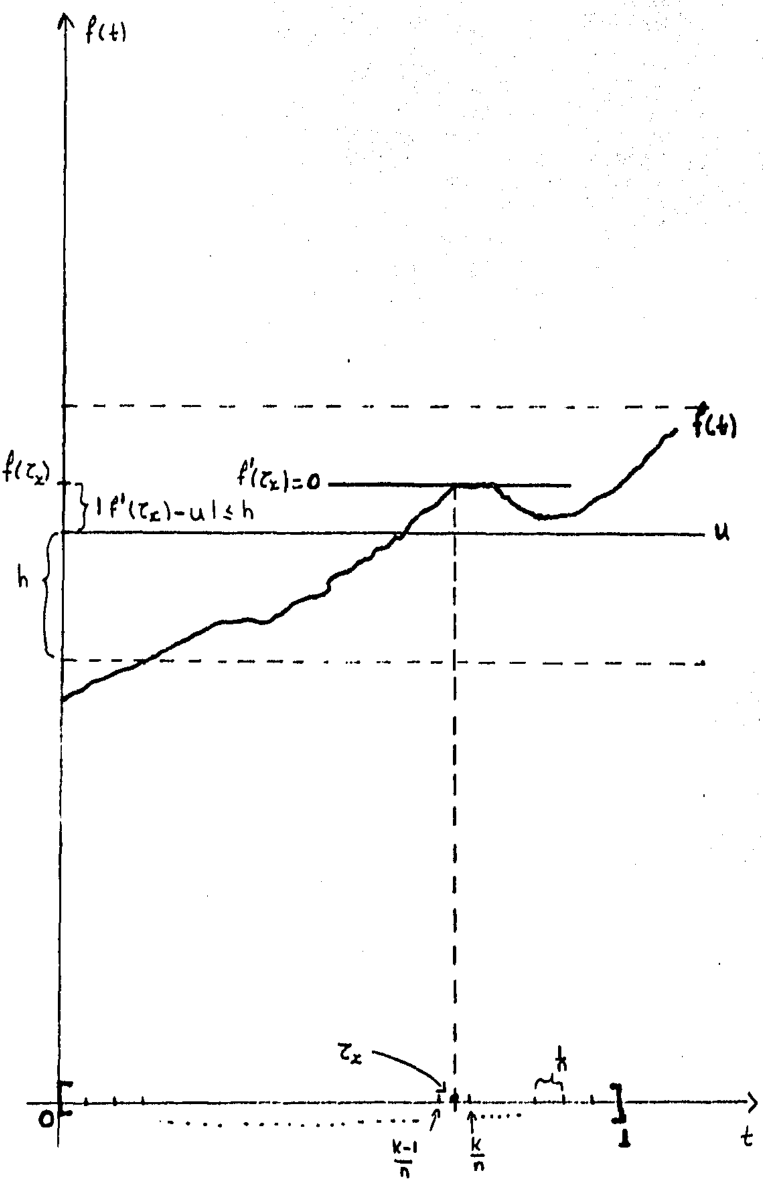


FIGURA 3.5

por (3.1.T.1 1.), el primer término de la derecha de (3.1.T.1.2.) está dominado por:

$$n P\{ | f(\tfrac{k}{n}) - u | \leq h + n^{-1}\omega_\varepsilon(n^{-1}) \} =$$

$$= n \int_{-(h+n^{-1}\omega_\varepsilon(n^{-1}))}^{h+n^{-1}\omega_\varepsilon(n^{-1})} g(t)\,dt \leq n \int_{-(h+n^{-1}\omega_\varepsilon(n^{-1}))}^{h+n^{-1}\omega_\varepsilon(n^{-1})} c \; dt =$$

$$= 2c\,[\, h + n^{-1}\omega_\varepsilon(n^{-1})\,]$$

(3.1.T.1.3.)

ya que $| g_t(x) | < c$

(y es la única parte donde se utiliza el hecho).

Por otro lado, como $\omega_\varepsilon(t) \downarrow 0$ cuando $t \downarrow 0$, podemos seleccionar primero n_0 y luego h_0 tales que la expresión (3.1.T 1.3.) sea menor que $\varepsilon/2$. Es más, como $P(B^c_{\omega_\varepsilon}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ tenemos -- $P(A_{h_0}) \leq \varepsilon$.

Sea A el subconjunto de $C^{(1)}$ que consiste -- de todas las funciones tales que para algún - punto t en $[0,1]$, $f(t) = u$ y $f'(t) = 0$. Entonces es claro que $P(A) = 0$ por lo que -- (1) está demostrado.

Para demostrar (2), primero probaremos que cualquier función $f(t)$ en $A^c_{h_0}$, toma el valor u a lo -- más, un número finito de veces.

Supongamos que existen una infinidad de puntos $t_1, t_2, \ldots$ en $[0,1]$, tales que para toda -- i, $f(t_i) = u$. Por el teorema de Weierstrass [1] existe al menos un punto límite t_0 de la sucesión $\{t_i\}$ y de la continuidad de $f(t)$ tenemos que $f(t_0) = u$

Ahora bien, entre cualesquiera dos cruces, de be haber un extremo, esto es, un punto con -- $f'(t)=0$. Por definición de A_{h_0}, tendremos que $|f(t)-u|>h_0$ en cualquier extremo, así que - t_0 será el límite de una sucesión de puntos t con $|f(t)-u|>h_0$. Lo que contradice el hecho de que $f(t)$ sea continua en todo $[0,1]$ - en particular en $t=t_0$ ya que $f(t_0)=u$. Entonces tenemos que cualquier función $f(t)$ - con un número infinito de cruces pertenece a- A_{h_0}. Dado que $P(A_0)\leq \varepsilon$ para valores arbi-- trariamente pequeños de ε, tenemos que la- probabilidad de que para t en $[0,1]$, $X(t)=u$ un número infinito de veces, es cero, de aquí (2) está demostrado.

Como hicimos notar el teorema 3.1.T.1. da condiciones suficientes para que las tangencias al nivel u casi seguramente no ocurran. Sin embargo, bajo las mis-- mas condiciones, cualquier evento que implique que para alguna t en $[0,1]$ se tenga que $X(t)=u$ y $X'(t)=0$, casi seguramente no ocurre. Esto incluye cualquier punto de inflexión t de X en el cual $X(t)=u$.

3.2 CARACTERISTICAS NUMERICAS DE LA VARIABLE ALEATORIA C_u (CASO GAUSSIANO).

En esta sección nos interesaremos por el número -- medio de cruces (la media de C_u) de una trayectoria- de un proceso a un nivel u. En esta y en las secciones subsecuentes, trabajaremos con un proceso normal estacionario y donde no sea así, se hará la aclaración.

Como $C_u(0,T)$ es una variable aleatoria, podemos hablar de la media de $C_u(0,T)$. También debemos partir - de que el proceso sea a trayectorias continuas, de no - ser así, po el teorema de Belyaev [1] podemos decir que para cualquier M en $\mathbb{R}$ y $J \subset [0,T]$

$$P\{\sup_{t\in J} X(t) > M\} = P\{\inf X(t) < -M\} = 1.$$

Entonces consideraremos el caso en que, con probabilidad uno el proceso sea a trayectorias continuas.

Antes de pasar al resultado importante daremos algunas definiciones relacionadas con los procesos estocásticos y algunas otras que necesitaremos.

Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabiliddad, $X=\{X_t; t\in[0,1]\}$ un proceso estocástico normal estacionario real con media cero.

En estos términos damos las siguientes definiciones:

DEFINICION 3.2.1.

Sea $F(\lambda)$ la función espectral del proceso, entonces definimos la función de covarianza en su forma real como:

i) $r(\tau) = \int_0^\infty \cos(\lambda\tau)\, dF(\lambda)$

y el 2i-ésimo momento (si existe) de la función espectral como:

ii) $\lambda_{2i} = \int_0^\infty \lambda^{2i}\, dF(\lambda)$

$i = 0,1,2,\ldots$ y $u \in \mathbb{R}$

El resultado al que llegaremos, ha sido obtenido por varios autores, entre ellos el primer trabajo es debido a Rice [1]. Las condiciones bajo las cuales es válido, han sido debilitadas por Ivanov [1], Bulinskaya [1], Ito [1] e Ylvisaker [1].

La condición de que el proceso tenga media cero no es muy importante, ya que si $X(t)$ tiene media m $m \neq 0$, sólo es necesario reemplazar u por $u-m$, ya que $X(t)$ cruza al nivel u cuando $X(t)-u\,m$ cruza al nivel $u-m$. También se supondrá que $\lambda_0 = 1$.

Primero se dará un lema y después el resultado ---

principal de esta sección.

LEMA 3.2.L.1.

Para cada n, sea $Y_n(t)$ el proceso definido como en la demostración del teorema 2.1.T.1. que coincide con $X(t)$ en los puntos $t_{n,r}=r/2^n$, $r = 0,1,\ldots,2^n$ y lineal entre tales puntos. Sea C_n^u el número de cruzamientos del nivel u en $[0,1]$ por $Y_n(t)$. Entonces $C_n^u \uparrow C_u$ con probabilidad uno cuando $n \to \infty$.

DEMOSTRACION

Se usará el teorema de la convergencia monótona.

Como $Y_{n+1}(t)$ tiene al menos tantos cruces como $Y_n(t)$ entonces:

$P\{C_n^u$ sea no decreciente cuando n crece$\} = 1$ por lo que C_n^u converge a un límite $C^u \leq \infty$

Si C_u es finito, los puntos de cruce de $X(t)$ pueden ser cubiertos por intervalos abiertos ajenos $I_1, I_2, \ldots, I_{C_u}$ y podemos encontrar en cada I_j dos subintervalos tales que $X(t)-u$ sea estrictamente positivo en uno y negativo en otro.

Entonces para n suficientemente grande se tiene que $Y_n(t)-u$ toma en cada I_j tanto valores positivos como negativos, por lo tanto $Y_n(t)$ debe cruzar al menos una vez u en el intervalo I_j. Luego $C_n^u \geq C_u$ para n suficientemente grande. Por lo que $C^u \geq C_u$, pero $C_n^u \leq C_u$, entonces $C^u = C_u$.

Si C_u es infinito, sea $m \in N$ y sean $t_1, t_2, \ldots, t_m$ puntos de cruce contenidos en intervalos abieros ajenos $I_1, I_2, \ldots, I_m$. $Y_m(t)$ tiene un cruce en cada I_j (al menos; por el mismo argumento anterior) cuando n es suficiente--

mente grande. En consecuencia $\mathcal{C}^* \geq m$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{C}^* = \infty = \mathcal{C}_u$

Estamos ya en condiciones de enunciar el siguiente

TEOREMA 3.2.T.1.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, $X = \{X(t);\ 0 \leq t \leq 1\}$ un proceso estocástico real-normal estacionario sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

i) Si $\lambda_2 = \infty$

$$E\{\mathcal{C}_u(0,1)\} = \infty.$$

ii) Si $\lambda_2 < \infty$

$$E\{\mathcal{C}_u(0,1)\} = \frac{\lambda_2^{\frac{1}{2}}}{\pi} \exp(-u^2/2) \qquad (3.2.T.1.1.)$$

DEMOSTRACION

La demostración completa no se hará aquí, sólo daremos un pequeño esboso de cómo sería.

Como $\mathcal{C}_n^* \uparrow \mathcal{C}_u$ con probabilidad uno, entonces por el teorema de convergencia monótona

$$E\{\mathcal{C}_n^*\} \longrightarrow E\{\mathcal{C}_u\} \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

y el problema se reduce a la evaluación de $E\{\mathcal{C}_n^*\}$ y su límite cuando $n \to \infty$.

(Ver Cramer & Leadbetter)

Es decir, el número esperado de cruces en el intervalo $[0,1]$, por las trayectorias del proceso es finito si la función de covarianza $r(\tau)$ tiene segunda derivada finita en el origen.

3.3 CARACTERISTICAS NUMERICAS DE LAS VARIABLES ALEATORIAS N_u, $\mathcal{C}_u$, D_u Y TANGENCIAS.

En la sección anterior, calculamos la media del número de cruces de una trayectoria a un nivel u en el intervalo $[0,1]$. Concentremos nuestra atención en-la variable aleatoria N_u , el número total de veces - que la trayectoria del proceso toma el valor u en el- intervalo $[0,1]$. En virtud de nuestra definición --- $N_u = C_u + T_u + B_u$ y si $P(T_u = 0) = P(B_u) = 1$, entonces podemos asegurar que $E(N_u) = E(C_u)$. Con el objeto de demostrar - esto, primero se darán las medias de D_u y U_u.

Como vimos anteriormente, puede haber cruces que - no son ni hacia arriba, ni hacia abajo. Sin embargo, - si el número de curces C_u es finito, entonces se puede probar que todos los cruces son hacia arriba o hacia a- bajo, es decir $C_u = D_u + U_u$.

Esto será utilizado en la demostración del siguien te:

TEOREMA 3.3.T.1.

Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, ----- $X = \{X(t);\ 0 \leq t \leq 1\}$ un proceso estocástico normal - real estacionario sobre el espacio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$,- entonces:

Si $\lambda_2 < \infty$ tenemos que

$$E\{U_u\} = E\{D_u\} = \frac{E\{C_u\}}{2}. \quad (3.3.T.1.1.)$$

DEMOSTRACION

Como $\lambda_2 < \infty$, entonces por el teorema 3.2.T.1. $E(C_u) < \infty$, de aquí que $P\{C_u < \infty\} = 1$. Usando - este hecho, puede ser mostrado que para todas aquellas trayectorias para las cuales $P(C_u < \infty) = 1$ que

i) Si $X(0) < u < X(1)$, $U_u = \dfrac{C_u + 1}{2}$

y $D_u = \dfrac{C_u - 1}{2}$

ii) Si $X(0) > u > X(1)$, $U_u = \dfrac{C_u - 1}{2}$

y $D_u = \dfrac{C_u + 1}{2}$

iii) Otro caso, $U_u = \dfrac{C_u}{2}$

y $D_u = \dfrac{C_u}{2}$

entonces:

$$E\{U_u\} = E\{\tfrac{C_u+1}{2}\}\, I_{\{X(0)<u<X(1)\}} +$$

$$+E\{\tfrac{C_u-1}{2}\}\, I_{\{X(0)>u>X(1)\}} + E\{\tfrac{C_u}{2}\}$$

$$E\{D_u\} = E\{\tfrac{C_u}{2}\} + E\{\tfrac{C_u-1}{2}\}\, I_{\{X(0)>u>X(1)\}} +$$

$$+E\{\tfrac{C_u+1}{2}\}\, I_{\{X(0)<u<X(1)\}}$$

$$E\{U_u\} - E\{D_u\} = E\{\tfrac{1}{2} I_{\{X(0)<u<X(1)\}} + \tfrac{1}{2} I_{\{X(0)>u>X(1)\}}\} -$$

$$- E\{\tfrac{1}{2} I_{\{X(0)>u>X(1)\}} + \tfrac{1}{2} I_{\{X(0)<u<X(1)\}}\} =$$

$$= P\{X(0) < u < X(1)\} -$$

$$- P\{X(0) > u > X(1)\} =$$

$$= 0,$$

con lo que el teorema queda demostrado.

Encontraremos ahora resultados concernientes a las tangencias, para lo que requerimos el siguiente

LEMA 3.3.L.1.

Supongamos que X satisface las condiciones del teorema 3.3.T.1. Esto implica que

$$P\{U_u + B_u \leq \liminf_{n\to\infty} U_{u-\frac{1}{n}}\} = 1$$

DEMOSTRACION

Supongamos que para alguna m, $U_u + B_u \geq m$. Entonces podemos escoger m puntos $t_1, t_2, \ldots t_m$ en los cuales X tiene un cruce hacia arriba o una tangencia por abajo de u. Cubrimos esos puntos con intervalos abiertos ajenos $(t_i - a, t_i + a)$. Por tanto, existe s_i en $(t_i - a, t_i + a)$ en el cual tenemos que $X(s_i) < u$. Elegimos n_0 tal que para toda $i = 1, \ldots, m$, $X(s_i) < u - \frac{1}{n_0}$. Pero, por continuidad de las trayectorias de X se tiene $X(t_i)=u>u-\frac{1}{n}$, se sigue que cuando - $n \geq n_0$ hay un cruce de $u-\frac{1}{n}$ en cada intervalo- (s_i,t_i) . Si el primer cruce es t_0 en (s_i,t_i) este debe ser hacia arriba ya que si no lo es implica la existencia de un punto t en (t_0,t_i) en el cual $X(t)>u$ y de aquí, otro cruce en --- (t_0,t_i), por lo que cada intervalo (s_i,t_i)con-- tiene un cruce hacia arriba del nivel $u-\frac{1}{n}$ - cuando $n \geq n_0$. Entonces para toda $n \geq n_0$, -

$$U_{u-\frac{1}{n}} \geq m \quad y \quad \liminf_{n\to\infty} U_{u-\frac{1}{n}} \geq U_u + B_u .$$

Y por consiguiente, el lema queda demostrado.

En estas condiciones podemos dar el siguiente lema que corresponde a la no ocurrencia de tangencias.

LEMA 3.3.L.2.

Bajo las mismas condiciones del lema 3.3.L.1 . si $\lambda_2 < \infty$ entonces:

$$P(T_u = 0) = 1 .$$

DEMOSTRACION

Por el lema 3.3.L.1. tenemos que:

$$P\{ B_u \leq \liminf_{n\to\infty} U_{u-\frac{1}{n}} - U_u \} = 1.$$

ahora bien, por (3.3.T.1.1.) y (3.2.T.1.1.)-- y el lema de Fatou, $E\{U_u\}$ es continua en u , se sigue que la variable aleatoria no negativa $U_{u-\frac{1}{n}} - U_u$ tiene esperanza cero y entonces - debe ser cero con probabilidad uno. Esto --- quiere decir que $B_u = 0$. Consideraciones similares pueden ser aplicadas al número de tangencias por arriba y llegar a que $P\{T_u = 0\} = 1$ Con lo que el lema está probado.

Ylvisaker [1] , ha demostrado que este resultado - es válido sin la suposición $\lambda_2 < \infty$. Sin embargo, el método anterior se puede generalizar para incluir proce--

sos normales no estacionarios, mientras que el método usado por Ylvisaker depende fuertemente de la estacionaridad.

Recordemos que al principio de este capítulo se dió un resultado general para las tangencias debido a Bulinskaya, el cual no es aplicable a los procesos Gaussianos debido a que, en general, no cumplen con la hipótesis

$$P\{\omega \in \Omega ; X_t(\omega) \text{ sea con derivada continua}\} = 1$$

Haciendo una comparación, vemos que en el teorema 3.1.T.1. una hipótesis era que el proceso fuese con derivada continua. En esta sección esa hipótesis se suprimió y el lema 3.3.L.2. es más sutil a lo que estamos estudiando. Usando este resultado, escribiremos el teorema 3.2.T.1. en términos de la variable aleatoria N_u.

TEOREMA 3.3.T.2.

Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, $X=\{X(t); 0 \leq t \leq 1\}$ un proceso estocástico real normal estacionario sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

i) Si $\lambda_2 = \infty$

$$E\{N_u(0,1)\} = \infty$$

ii) Si $\lambda_2 < \infty$

$$E\{N_u(0,1)\} = E\{C_u(0,1)\} = \frac{\lambda_2^{\frac{1}{2}}}{\pi} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right).$$

DEMOSTRACION

Como $N_u = T_u + B_u + C_u$, si $\lambda_2 < \infty$ el resultado ya está probado por el teorema 3.2.T.1. Ahora bien, si $\lambda_2 = \infty$, entonces

$$E\{N_u\} \geq E\{C_u\} = \infty$$

con lo cual, termina la demostración.

3.4. TIEMPO DE ESTANCIA SOBRE UN NIVEL; MEDIDAS DE EXCEDENCIA Z_n.

En esta sección, trabajaremos con una nueva variable aleatoria que definiremos para el proceso estocástico X . Los resultados que se obtendrán serán: la media y la varianza de las variables aleatorias que definiremos.

Otra vez, supongamos que $X=\{X(t); t\in T\}$ es un proceso estocástico normal Gaussiano, tal que es a trayectorias continuas y sea u un número real fijo (nivel); en estas condiciones definimos:

Para cada $\omega \in \Omega$

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } & X(t) > u \\ 0 \text{ O.L.} \end{cases}$$

y $$Z_0(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \eta(t)\,dt$$

Entonces $Z_0(T)$ es la proporción de tiempo $0 \le t \le T$, en la cual una trayectoria del proceso X permanece por arriba del nivel u .

Deseamos calcular $E\{Z_0(T)\}$, la cual está dada por:

$$E\{Z_0(T)\} = \frac{1}{T}\int_0^T E\{\eta(t)\}\,dt =$$

$$= E\{\eta(t)\} = P\{X(t) > u\}$$

y como $$\sigma^2 = r(0) = \lambda_0$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Para obtener la varianza, vemos que:

$$E\{\eta(t)\,\eta(s)\} = P\{X(t) > u,\ X(s) > u\} =$$
$$= \sigma^2 \int_u^\infty \int_u^\infty \phi\left(\frac{v}{\sigma}, \frac{w}{\sigma}; \rho\right) dv\, dw$$

donde $\phi\left(\frac{v}{\sigma}, \frac{w}{\sigma}, \rho\right)$ es la función de densidad normal bivariada con correlación ρ , i.e.

$$\phi\left(\frac{v}{\sigma},\frac{w}{\sigma};\rho\right)=\frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}}\exp\left\{\frac{-v^2-2\rho vw+w^2}{2(1-\rho^2)}\right\}$$

y $\rho=\rho(t-s)=r(t-s)/r(0)$

entonces

$$E\{Z_0^2(T)\}=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T dt\,ds\,\cdot$$

$$\cdot\int_{\frac{u}{\sigma}}^{\infty}\int_{\frac{v}{\sigma}}^{\infty}\phi(v,w;\rho)\,dv\,dw$$

(3.4.2.)

Ahora bien, si usamos la identidad

$$\int_u^{\infty}\int_u^{\infty}\phi(v,w;\rho)\,dv\,dw=$$

$$=\left(\int_u^{\infty}\phi(v)\,dv\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\phi^{(n)}(u)]^2}{n!}\rho^n \qquad (3.4.3.)$$

$$=\left(\int_u^{\infty}\phi(v)\,dv\right)^2+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\rho}\exp\left(\frac{-v^2}{1+v}\right)\cdot(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}dv$$

(3.4.4.)

en donde $\phi^{(n)}$ es la n-ésima derivada de la función de densidad normal estándar ϕ .

La identidad (3.4.3.) está dada en Cramér [1], y la identidad (3.4.4.) en Cramér & Leadbetter [1]

Estas dos igualdades nos dan dos alternativas para $VAR(Z_0(T))$. Usando la identidad (3.4.3.) tenemos:

$$VAR(Z_0(T))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\phi^{(n)}(\frac{u}{\sigma})]^2}{n!\,\sigma^{2n}}\cdot\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T r^n(t-s)\,dt\,ds=$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\phi^{(n)}(\frac{u}{\sigma})]^2}{n!\,\sigma^{2n}}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)r^n(t)\,dt \qquad (3.4.5.)$$

y usando la igualdad (3.4.4.)

$$\mathrm{VAR}(Z_0(T)) = \frac{1}{2\pi T^2}\int_0^T\int_0^T dt\,ds \int_0^{\rho(t-s)} \exp\left\{-\frac{u^2}{\sigma(1+v)}\right\}\cdot(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}\,dv =$$

$$= \frac{1}{\pi T}\int_0^T \left(1-\frac{t}{T}\right)dt \int_0^{\frac{r(t)}{\sigma^2}} \exp\left\{\frac{-u^2}{\sigma^2(1+v)}\right\}(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}\,dv \qquad (3.4.6.)$$

Para trabajo teórico, la igualdad (3.4.6.) parece-ser la más viable de usar. Por otro lado, para propósitos computacionales la igualdad (3.4.5.) nos provee un-resultado conveniente cuando una forma específica de la función de covarianza es dada. Los coeficientes pueden ser obtenidos por tablas de funciones teóricas (por - ejemplo, las dadas por Pearson [1] tabla VII). A menudo sólo unos cuantos términos son significativos en la-suma. Si la función de covarianza $r(\tau)$ es integrable - desde cero hasta infinito, entonces para T muy grande se sigue de (3.4.5.) y por teorema de convergencia dominada que si $T \to \infty$

$$T\,\mathrm{VAR}(Z_0(T)) \longrightarrow 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\phi^{(n)}(\frac{u}{\sigma})]^2}{n!\,\sigma^{2n}} \int_0^{\infty} r^n(t)\,dt$$

En el caso que $r(\tau)$ no sea integrable, el resultado puede también ser simple, por ejemplo:

si $t \to \infty$

y $\dfrac{r(t)}{r(0)} \sim \dfrac{A}{|t|}$

entonces

$$\text{si } T \to \infty, \quad \mathrm{VAR}(Z_0(T)) \sim \frac{A}{\pi}\, e^{-\frac{u^2}{\sigma^2}}\, \frac{\log T}{T}.$$

Estos últimos resultados se han dado para cuando - queremos estudiar el tiempo que alguna trayectoria del-proceso X permanece arriba de un sólo nivel fijo u . Desde el punto de vista de las aplicaciones, debería -- ser importante estudiar el tiempo que alguna trayecto--

ria del proceso X permanece arriba o abajo de un ni-- vel fijo $\pm u$ respectivamente. Resultados similares po- drían obtenerse, si $Z_0^*(T)$ denota la proporción de tiempo que el proceso permanece fuera de los niveles fijos- $\pm u$ en $0 \leq t \leq T$, tenemos:

$$E\{ Z_0^*(T) \} = \frac{1}{T} \int_0^T E(\eta(t))\, dt$$

con

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(t) > +u \\ & \text{ó } X(t) < -u \\ 0 & \text{O.L.} \end{cases}$$

por lo que

$$E\{ Z_0^*(T) \} = P\{ X(t) > u \} + P\{ X(t) < -u \} = $$
$$= 2 \left[1 - \phi\left(\tfrac{u}{\sigma}\right) \right]$$

y

$$\mathrm{VAR}(Z_0^*(T)) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\phi^{(n)}(\frac{u}{\sigma})]^2}{(2n)!\, \sigma^{4n}} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) r^n(t)\, dt =$$
$$= \frac{1}{\pi T} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt \int_{1-\rho}^{\rho} \exp\left\{ \frac{-u^2}{\sigma^2 (1-v)} \right\} (1-v^2)^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{SGN}(v)\, dv.$$

donde $\rho = \rho(t) = r(t) / r(0)$

Z_0 como vimos, es una variable aleatoria que describe las excursiones que las trayectorias del proceso- X hacen por arriba del nivel u (entendiendose por- excursiones las veces que una trayectoria cruza hacia - arriba a u). Ahora se definirán otras variables a-- leatorias, relacionadas con $Z_0(T)$, pero las cuales - tomarán en cuenta las excursiones de las trayectorias - del proceso X sobre u de varias maneras. Todas --- esas variables aleatorias tendrán en común con $Z_0(T)$ la propiedad de que un valor cero de las variables aleatorias ocurre si y sólo si las trayectorias del proceso - permanecen por abajo de u en todo T . Este hecho - nos ayudará para obtener desigualdades muy usadas, del- tipo de Tchebychev, para la probabilidad de que las tra yectorias del proceso X no crucen a u en todo ---- $0 \le t \le T$.

Entonces definimos:

para cada $\omega \in \Omega$

$$\eta_n(t) = \begin{cases} (X(t)-u)^n & \text{si } X(t) > u \\ 0 & \text{O.L.} \end{cases}$$

y

$$Z_n(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \eta_n(t)\,dt \qquad n=0,1,2,\ldots$$

La integral está bien definida, ya que el proceso- X es a trayectorias continuas. LLamaremos a estas variables aleatorias las "medidas de excedencia Z_n". Z_0 es la variable aleatoria considerada anteriormente llamada la proporción de tiempo del intervalo $(0,T)$ que tiene también una interpretación física: es el área de la trayectoria de X con respecto a u , en $0 \le t \le T$ (ver figura 3.4.1.)

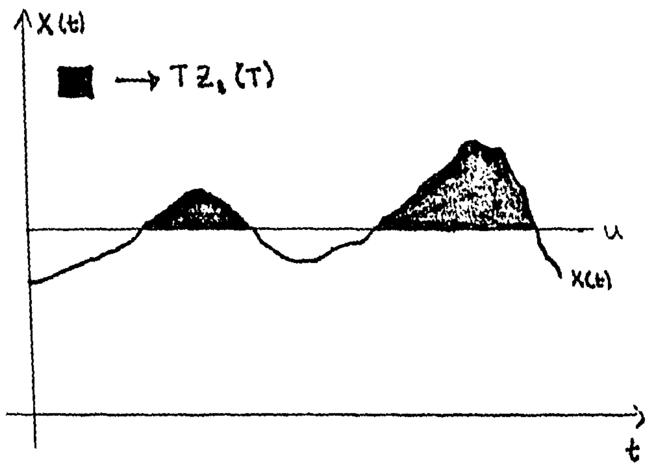


FIGURA 3.4.1.

Es claro que podemos definir una multitud de variables aleatorias, pero sólo nos concentraremos en las -- mencionadas anteriormente.

También podríamos considerar otra vez dos niveles- $+u_1$ y $-u_2$ y obtener resultados para los dos. Aquí daremos solamente para un nivel u_1 .

Obtendremos fórmulas correspondientes a (3.4.2.),-(3.4.5.) para la media y la varianza de $Z_n(T)$. Primero para reducir la notación, supondremos la varianza de -- X , $\lambda_0 = 1$, Con esto no se pierde generalidad ya que en el caso general $Z_n(T) = \lambda_0^{n/2} Z_n^*(T)$, donde $Z_n^*(T)$es la -- Z_n -medida de excedencia para un proceso con varianza unitaria correspondiente al nivel $u/\lambda_0^{1/2}$. En efecto, -si $\lambda_0 = 1$, simplemente reemplazamos u por $u/\lambda_0^{1/2}$ y se --multiplica (3.4.7.) y (3.4.8.) por $\lambda_0^{n/2}$, λ_0^{n} , respectivamente. De aquí, podemos obtener la media y la varianza en el caso general bajo la suposición $\lambda_0 = 1$.

$$E\{Z_n(T)\} = \int_u^{\infty} (x-u)^n \phi(x)\, dx \qquad (3.4.7.)$$

para el caso de la varianza tenemos:

$$\mathrm{VAR}(Z_n(T)) = \frac{2(n!)^2}{T} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!\,[(n-j)!]^2} \Big[\int_u^{\infty} (v-u)^{n-j} \phi(v)\, dv \Big]^2 \cdot \int_0^T \Big(1-\frac{t}{T}\Big) \rho^j(t)\, dt + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[\phi^{(n)}(u)]^2}{(n+j)!} \int_0^T \Big(1-\frac{t}{T}\Big) \rho^j(t)\, dt \Big\} \qquad (3.4.8.)$$

Para la demostración completa, ver Cramér & Lead--better[1].

C A P I T U L O IV

CRUZAMIENTOS HACIA ARRIBA DE LAS TRAYECTORIAS DE UN PROCESO ESTOCASTICO GAUSSIANO. (OTRO ENFOQUE).

En el Capítulo III, dimos la definición de lo que se entendía por un cruzamiento hacia arriba de las trayectorias de un proceso estocástico y obtuvimos resultados para algunos de sus parámetros como su media y varianza. Sin embargo, dicha definición en el fondo involucra derivación de las trayectorias del proceso, cosa que en general con los procesos Gaussianos no se tiene. Esto es, la definición de un cruzamiento hacia arriba, de las trayectorias de un proceso estocástico, a un nivel fijo, se podría enunciar como sigue: un cruzamiento del nivel fijo u por las trayectorias del proceso estocástico X ocurre en t_0 si

$$X(t_0) = u \qquad y \qquad X'(t_0) > 0$$

En el caso que X sea gaussiano, no podemos asegurar que $X'(t)$ exista para cualquier t .

Lo que debemos hacer es dar una definición alternativa de un cruzamiento hacia arriba, que corresponda a lo que entendemos intuitivamente por cruzamiento hacia arriba y que analíticamente nos permita llegar a conclusiones sobre este concepto sobre este concepto para el caso de los procesos gaussianos.

DEFINICION 4.1.

Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, $u \in \mathbb{R}$ (nivel), $X = \{X(t) ; t \in \mathbb{R}\}$ un proceso estocástico gaussiano real, estacionario, separable y a trayectorias continuas y $\varepsilon > 0$, en estas condiciones decimos que un ε-cruzamiento hacia arriba del nivel u por las trayectorias del proceso X ocurre en $t_0 \in \mathbb{R}$ si

$$\forall t \in [t_0-\varepsilon, t_0) \Rightarrow X(t_0) = u \quad y \quad X(t) < u.$$

Denotaremos por $U(\varepsilon, u, t)$ el número de ε-cruzamientos hacia arriba del nivel u en el intervalo $[0,t]$

Con esta definición alternativa, se evita la necesidad de que $X(t)$ sea derivable para cualquier t.

Los resultados que se obtendrán sobre la teoría de los ε-cruzamientos hacia arriba en las dos secciones siguientes son debidos a James Pickands III [2].

En la primera sección se dará una forma límite para la media de los ε-cruzamientos hacia arriba cuando el nivel u se va haciendo cada vez más grande, esto es, en el Capítulo III se dieron los resultados de cruzamientos pero cuando el nivel u era fijo, y en este capítulo lo vamos a considerar como una variable que tienda a infinito.

En la segunda se mostrará que los ε-cruzamientos hacia arriba satisfacen el teorema de distribución límite Poisson, como se cumplía para los cruzamientos del tipo convencional (definido en la Capítulo III). Esto es, que bajo ciertas condiciones de "mezclado" (las cuales definiremos más adelante), para cualquier $\lambda > 0$

$$\lim_{u\to\infty} P\{N(u, \lambda/\mu) = k\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\ldots$$

con μ el número promedio de -cruzamientos hacia arriba por unidad de tiempo, esto es $\mu = E\{U(u,t)/t\}$.

4.1 MEDIA DE LOS ε-CRUZAMIENTOS HACIA ARRIBA

Para poder trabajar con las trayectorias de un proceso estocástico gaussiano real, separable y estacionario, supondremos que estas son continuas con probabilidad uno. Una condición suficiente para que esto ocurra y que involucra a la función de covarianza del proceso-

(definida en el Capítulo III), es que exista $\beta > 1$ tal- que

$$\limsup_{t \to 0} \left| \log(t) \right|^{\beta} (1 - r(t)) < \infty \tag{4.1.1.}$$

con $r(t) = E\{ X(s) \cdot X(s+t) \}$ que por la estacionaridad no depende de s, (ver Belyaev [1], para este resultado y para otros resultados más generales sobre la continuidad de procesos estocásticos gaussianos, ver tesis de Jesús Fernández Moran, " Continuidad de Procesos Estocásticos Gaussianos").

En toda esta sección se supondrá que la función de covarianza $r(t)$ admite la expresión, cuando $\lambda_2 > 0$ y $\forall\, \alpha \in (0,2]$

$$r(t) = 1 - \lambda_2 t^{\alpha} + o(t^{\alpha}) \tag{4.1.2.}$$

en una vecindad del origen.

Es claro que α no puede ser mayor que dos, ya que $r(t)$ debe ser positiva definida, por el teorema de Cramér, cualquier función positiva definida, define un proceso que tiene como función de covarianza a esa función.

Para los cruzamientos hacia arriba del tipo convencional, se demostró en 3.2 y 3.3 que

$$\mu = E\{ U(u,t)/t \} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{2\pi}}\, \exp\left\{ -\frac{u^2}{2} \right\}$$

donde

$$\lambda_2 = \int_0^{\infty} \lambda^2 \, dF(\lambda) < \infty$$

pero esta expresión de μ es válida solamente cuando (4.1.2.) se cumple para $\alpha = 2$. Esto es, si (4.1.2.) se cumple para $\alpha = 2$ entonces X posee una versión a trayectorias derivables. Y la negación también se cumple, es decir, si (4.1.2.) se cumple para cualquier ---

$0<\alpha<2$ entonces X es a trayectorias no derivables, -ver por ejemplo Cramér & Leadbetter [1].

Un ε-cruzamiento hacia abajo puede ser definido-como sigue:

DEFINICION 4.1.1.

Sea X un proceso estocástico gaussiano real estacionario y separable. Decimos que un --- ε-cruzamiento hacia abajo del nivel u ocurre en t_0, si un ε-cruzamiento hacia arriba del nivel u ocurre en $-t_0$ por las -- trayectorias del proceso $X(-t)$.

Entonces, los resultados que se obtengan para los-ε-cruzamientos hacia arriba serán válidos para los -ε-cruzamientos hacia abajo.

Antes de enunciar el teorema que nos da una forma-asintótica para $E\{U(\varepsilon,u,t)\}$ cuando $u\to\infty$ introduciremos cierta notación que nos será de utilidad.

Sea X un proceso estocástico gaussiano real centrado, estacionario y separable.

$r(t)=E\{X(s)\cdot X(s+t)\}$ la función de covarianza de -X. En estas condiciones definimos para -$\alpha\in(0,2]$

$$A_1(t)=\inf_{0\leq s\leq t}|s|^{-\alpha}(1-r^2(s))/2$$

$$A_2(t)=\sup_{0\leq s\leq t}|s|^{-\alpha}(1-r^2(s))/2$$

$$B(t)=\inf_{0\leq s\leq t}r(t)$$

$$\Psi(u)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}u^{-1}\exp\{-\tfrac{u^2}{2}\}$$

Si $Y(t)$ es un proceso gaussiano no estacionario con media $-|t|^{\alpha}$ y función de covarianza -

$$\operatorname{cov}(Y(t_1), Y(t_2)) = -|t_1+t_2|^{\alpha} + |t_1|^{\alpha} + |t_2|^{\alpha}$$

entonces

$$0 < H_{\alpha} = \lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^{\infty} e^{s} P\{ \sup_{0\le t\le T} Y(t) > s \} ds < \infty$$

$$Z(t) = \sup_{0\le s\le t} X(s)$$

$$H_{\alpha}(a) = \lim_{n\to\infty} H_{\alpha}(n,a)/n > 0$$

$$H_{\alpha}(n,a) = 1 + \int_0^{\infty} e^{s} P\{ \max_{0\le k\le n} Y(ka) > s \} ds < \infty$$

$$\phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-s^2/2} ds$$

Y para cualquier a , u con $0<a,u<\infty$ definimos la medida de probabilidad $P_u(\cdot)$ como sigue:

Para cualquier entero K , la distribución conjunta de $\{X(ja\,u^{-2/\alpha})\}$, $-K \le j \le K$ es la misma bajo $P_u(\cdot)$ que $P(\cdot)$. Para cualquier t sea K el entero tal que $Kau^{-2/\alpha} \le t \le (k+1)au^{-2/\alpha}$ Entonces, bajo $P_u(\cdot)$ con probabilidad uno,

$$X(t) = X(k\,a\,u^{-2/\alpha}).$$

En base a lo anterior, estamos en condiciones de enunciar el resultado fundamental de esta sección.

TEOREMA 4.1.T.1.

Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, $X=\{X(t);t\in\mathbb{R}\}$ una versión separable de un proceso estocástico gaussiano real, estacionario con media cero y función de covarianza $r(t)$ la cual cumple con (4.1.2.) entonces si

$$\inf_{0\le t\le\varepsilon} |t|^{-\alpha}(1-r(t)) > 0$$

$$\lim_{u\to\infty} E\{ U(\varepsilon,u,t)/u^{2/\alpha}\Psi(u)\,t \} = \lambda_2^{\frac{1}{2}} H_{\alpha}.$$

DEMOSTRACION

Supongamos $\lambda_2 = 1$. Entonces existe un $\varepsilon' > 0$ tal que $|t|^{-\alpha}(1-r(t))$ está acotada en una vecindad del origen (en virtud de 4.1.1.).

Definimos los eventos A y B de la siguiente manera:

$$A = \{\omega \in \Omega;\ X_t(\omega) > u \text{ para alguna } t \in [-\varepsilon, 0]\}$$

$$B = \{\omega \in \Omega;\ X_t(\omega) > u \text{ para alguna } t \in [0, \varepsilon]\}$$

Entonces, por la estacionaridad del proceso X, si $u \to \infty$

$$P\{A \cup B\} = P\{Z(\varepsilon+\varepsilon') > u\} \sim H_\alpha[\varepsilon+\varepsilon'] u^{2/\alpha}\Psi(u)$$

$$\sim H_\alpha \varepsilon u^{2/\alpha}\Psi(u) + H_\alpha \varepsilon' u^{2/\alpha}\Psi(u) \quad (4.1.T.1.1.)$$

Suponiendo válida esta aproximación (que demostraremos posteriormente a través de varios lemas en el anexo 2), se tiene que si $u \to \infty$

$$P\{A\} \sim H_\alpha \varepsilon u^{2/\alpha}\Psi(u)$$

$$(4.1.T.1.2.)$$

$$P\{B\} \sim H_\alpha \varepsilon' u^{2/\alpha}\Psi(u)$$

pero

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P(A \cap B)$$

entonces cuando $u \to \infty$

$$P\{A \cap B\} = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = o(u^{2/\alpha}\Psi(u))$$

$$(4.1.T.1.3.)$$

Ahora, por las definiciones de $U(\varepsilon, u, \varepsilon')$ y B

$$\{\omega \in \Omega;\ U(\varepsilon,u,\varepsilon') = 1\} \subset B \subset \{U(\varepsilon,u,\varepsilon') = 1\} \cup \{A \cap B\}$$

así que

$$P\{U(\varepsilon,u,\varepsilon') = 1\} \leq P(B) \leq P\{U(\varepsilon,u,\varepsilon') = 1\} + P\{A \cap B\}$$

En consecuencia

$$P\{B\} - P\{A \cap B\} \leq P\{U(\varepsilon, u, \varepsilon') = 1\} \leq P(B)$$

y por las desigualdades (4.1.T.1.2.) y ---- (4.1.T.1.3.), si $u \to \infty$

$$P\{U(\varepsilon, u, \varepsilon') = 1\} \sim$$

$$\sim H_\alpha \varepsilon' u^{2/\alpha} \psi(u) \qquad (4.1.T.1.4.)$$

pero ε' puede ser escogido tal que sea más-pequeño que ε. De aquí que sólo puede haber un ε -cruzamiento hacia arriba en el intervalo $[0, \varepsilon']$ y por (4.1.T.1.3.)

$$P\{U(\varepsilon, u, \varepsilon') = 1\} = E\{U(\varepsilon, u, \varepsilon')\}$$

Entonces el teorema se cumple si $\lambda_2 = 1$

Supongamos que $\lambda_2 \neq 1$. Definimos

$$X_1(t) = X(t \lambda_2^{-1/\alpha})$$

Entonces $X_1(t)$ satisface el teorema con $\lambda_2 = 1$. Un $\varepsilon \lambda_2^{-\frac{1}{\alpha}}$-cruzamiento hacia arriba del nivel- u por las trayectorias del proceso X_1 es un ε -cruzamiento del mismo nivel por las trayectorias del proceso X. Además el -- proceso X_1 satisface las condiciones del - teorema si y sólo si X lo hace.

Nótese que el resultado del teorema es independiente de la elección de ε.

Con esto concluye la demostración del teorema. - Pasaremos a enunciar el lema que hace válida la aproximación (4.1.T.1.1.).

LEMA 4.1.L.1.

Supongamos que $r(t) = 1 - \lambda_2 t^\alpha + o(t^\alpha)$ se cumple-- para $\lambda_2 = 1$. Entonces si $A_1(t) > 0$

$$\lim_{u \to \infty} P\{z(t) > u\} / u^{2/\alpha} \psi(u) t = H_\alpha \qquad (4.1.L.1.1.)$$

La demostración de este lema no cae dentro de los - objetivos de este trabajo y puede verse en el anexo 2.

4.2 DISTRIBUCION ASINTOTICA.

En esta sección se mostrará que baja condiciones -- muy generales, el teorema límite de distribución Poisson- se cumple para los ε -cruzamientos hacia arriba, como -- también se cumple para los cruzamientos hacia arriba del- tipo convencional. El resultado importante de esta sec-- ción fué probado primeramente por Volkonski y Rozanov [1] bajo condiciones relacionadas con las propiedades de "mezclado" del proceso.

Para los resultados de esta sección se ha supuesto- que los cruzamientos hacia arriba constituyen una suce--- sión de eventos regular estacionaria (ver anexo 1). Las condiciones de mezclado a las que nos referimos involu--- cran el comportamiento de covarianza r(t) vuando $t \to \infty$. Es bien conocido que con el objeto de que las ocurrencias de un fenómeno tengan la distribución Poisson, es necesario y suficiente que en cualquier conjunto de intervalos- abiertos ajenos, el número de eventos sean mutuamente independientes. Esto es falso para los cruzamientos hacia arriba cuando X es gaussiano. Es intuitivamente claro -- pensar que si los eventos fuesen removidos en el tiempo y tenderían así a ser menos dependientes, la condición de - independencia puede ser aprovechada en el límite. De aquí que el teorema límite de distribución Poisson pueda ser aplicado. Las condiciones de mezclado que expresan esta -- "independencia en el límite" antes referidas realmente involucran la debilidad de la dependencia sobre el tiempo. - Sin embargo es un condición un poco restrictiva y muy difi cil de verificar. Observando que esto es así Cramer [ ] probó que esta condición puede ser reemplazada por una más simple. El supuso que si $t\to\infty$, $r(t)=O(t^{-\alpha})$ para alguna $\alpha>0$, entonces debe ser razonable suponer que un resultado similar se cumple para los ε-cruzamientos hacia arriba. Eso es exactamente el contenido de esta sección.

Nuevamente trabajaremos con un proceso estocástico gaussiano, real, estacionario y separable, con trayectorias contínuas. Antes de enunciar el teorema definiremos algunas cantidades que vamos a necesitar.

Sean a,λ cualesquier números tales que $a,\lambda>0$ $a>0$, $\lambda>0$, n un entero positivo, $\varepsilon>0$. P'_u la medida producto, $\mu=E\{U(\xi,u,t)/t\}$ la cual tiene el mismo valor para todo t positivo.

Sea B_i, $1\le i\le n$ el evento: un ε-cruzamiento del nivel u ocurre en el intervalo $\left(\frac{(i-1)\lambda}{n\mu}, \frac{i\lambda}{n\mu}\right]$, y A es unión de algunos de los conjuntos B_i.

$r_K(u)=r(Kau^{-1/\alpha})$, $l=[\varepsilon u^{1/\alpha}/a]$

$m=[\lambda u^{1/\alpha}/a\mu]\sim[\lambda/a H_\alpha\Psi(u)]$ si $u\to\infty$

$Q_K(u)=(1+r(u))(1-\phi(u, q_K(u)))$

$q_K(u)=((1-r_K(u))/(1+r_K(u)))^{1/2}$

especificamente, para cada i $(1\le i\le n)$

$$P_u(B_i)=P'_u(B_i)$$

pero bajo $P'_u(B_i)$ los eventos B_i's son mutuamente independientes.

Y por último sea

$$D_n(a,\lambda,u)=\max_A |P_u(A)-P'_u(A)|$$

En base a lo anterior tenemos el siguiente

<u>TEOREMA</u> 4.2.T.1.

<u>Sea</u> $X=\{X(t);t\in\mathbb{R}\}$ <u>un proceso estocástico, real</u>,-

estacionario, gaussiano y separable. Supongamos que X satisface las condiciones del teorema 4.1.T.1. y que

i) $\lim\limits_{u\to\infty} D_n(a,\lambda,u) = 0$ (4.2.T.1.1.)

ii) $\limsup\limits_{u\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} Q_k(u) \leq \lambda/a \, H_\alpha$ (4.2.T.1.2.)

Entonces para cualquier $k = 0,1,2,\ldots$

$$\lim_{u\to\infty} P\{U(\varepsilon,u,\tfrac{\lambda}{\mu}) = k\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad (4.2.T.1.3.)$$

DEMOSTRACION

Sean D_k el evento de que $\{X(ka u^{-\frac{2}{\alpha}}) \leq u$ y --- $\forall t \in (a k u^{-\frac{2}{\alpha}}, a(k+1)u^{-\frac{2}{\alpha}}), X(t) > x\}$, C el evento de -- que las dos medidas $P(\cdot)$ y $P_u(\cdot)$ asignen valores - diferentes a $U(\varepsilon,u,\frac{\lambda}{\mu})$ y por último sea

$$\omega(a) = \frac{\lambda \, H_\alpha(a)}{a \, H_\alpha} \quad (4.2.T.1.4.).$$

Supongamos $\lambda_1 = 1$ Entonces

$$C \subset \bigcup_{k=0}^{m} D_k$$

y

$$P(C) \leq \sum_{k=0}^{m} P(D_k)$$

Por la estacionaridad del proceso X

$$\sum_{k=0}^{m} P(D_k) = (m+1)\, P(D_1)$$

Aplicando el lema 4.1.L.2

$$\limsup_{u\to\infty} P(C) \leq \lambda H(a)/a\, H_\alpha$$

con $H(a)$ dado en el lema 4.1.L.1.

Entonces

$$\lim_{a\to 0} \frac{\lambda H(a)}{a\, H_\alpha} = 0$$

y por el lema 4.1.L.1. y argumentos que probaremos en el lema 4.2.L.1.

$$\lim_{a\to 0} \omega(a) = \lambda \quad (4.2.T.1.5.)$$

Con lo que el resultado esta probado para --- $\lambda_1 = 1$. Si hacemos la misma transformación que en la demostración del teorema 4.1.T.1. para cuando $\lambda_2 \neq 1$ se sigue el resultado en general.

Ahora, para mostrar la validez de la desigualdad -- (4.2.T.1.5.) se tiene el siguiente

LEMA 4.2.L.1.

Supongamos que las condiciones del teorema -- 4.2.T.1. se satisfacen. Entonces para cualesquier a, λ, $0 < a, \lambda < \infty$, si $\lambda_2 = 1$

$$\lim_{u \to \infty} P_u \{ U(\varepsilon, u, \tfrac{\lambda}{\mu}) = k \} = \frac{e^{-\omega(a)} \omega(a)^k}{k!} \quad (4.2.L.1.1.)$$

DEMOSTRACION

Sea n un entero positivo arbitrario. Sean B_i los eventos definidos en el enunciado -- del teorema 4.2.T.1., $N(1,n)$ el número de eventos B_i que ocurren, es decir, $N(1,n)$ es el número de subintervalos en cada uno de los cuales al menos un ε -cruzamiento hacia arriba ocurre. Siendo estos n subintervalos

$$\left(\frac{(i-1)\lambda}{n\mu}, \frac{i\lambda}{n\mu} \right] \qquad 1 \leq i \leq n$$

Bajo la medida $P'_u(\cdot)$, la función generadora de $N(1,n)$ sería

$$Q'_u(s) = E'_u \{ S^{N(1,n)} \} =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} (1 + P'_u(B_i)(s-1))$$

Donde E'_u denota la esperanza con respecto a la medida $P'_u(\cdot)$. Dado que los eventos B_i son un número finito, si mantenemos n fijo, - por la condición (4.2.T.1.1.) para toda s

$$\lim_{u \to \infty} | Q_u(s) - Q'_u(s) | = 0$$

donde $Q_u(s)$ es la misma función generadora pero bajo $P_u(\cdot)$. Como mostraremos en el lema --- 4.2.L.2., y para cualquier i, $1 \leq i \leq n$, si $n \to \infty$

$$\liminf_{u\to\infty} P(B_i) \geq \frac{\omega(a)}{n} - O\left(\frac{\omega(a)}{n}\right)^2$$

y

$$\limsup_{u\to\infty} P(B_i) \leq \frac{\omega(a)}{n} \qquad (4.2.L.1.2.)$$

Como probaremos en el lema 4.2.L.4

$$E\{N(z,n)\} = n\,O\left(\frac{\omega(a)}{n}\right)^2 \qquad (4.2.L.1.3.)$$

Donde $N(z,n)$ es el número de intervalos en cada- uno de los cuales al menos dos ε -cruzamien tos hacia arriba ocurren. De estas últimas -- conclusiones se sigue el lema.

Ahora, para mostrar la validez de la desigualdad -- (4.2.L.1.2.) se necesitan dos lemas. El primero se mos-- trará enseguida.

LEMA 4.2.L.2

Supongamos que 4.1.2 se cumple para $\lambda_1 = 1$ y que las condiciones del teorema 4.1.T.1. se satis- facen. Entonces para cualquier a, λ, $0 < a, \lambda < \infty$

$$\limsup_{u\to\infty} P_u\{U(\varepsilon, u, \tfrac{\lambda}{\mu}) \geq 1\} \leq \omega(a) \qquad (4.2.L.2.1.)$$

DEMOSTRACION

Sean A_K los eventos que $\{X(i a u^{-\frac{2}{\alpha}}) > u\}$ PARA

$$\left[\frac{K u^{2/\alpha}}{a}\right] \leq i \leq \left[\frac{(K+1)\, u^{2/\alpha}}{a}\right]$$

Entonces por definición de $U(\varepsilon, u, \frac{\lambda}{\mu})$

$$\{U(\varepsilon, u, \tfrac{\lambda}{\mu})\} \subset \bigcup_{K=0}^{[\lambda/\mu]} A_K$$

Aplicando el lema 4.1.L.6. y el teorema 4.1.T.1., para toda K

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P(A_K)}{\mu} = \frac{H_\alpha(a)}{a H_\alpha} = \frac{\omega(a)}{\lambda} \quad \text{PERO CUANDO } u\to\infty$$

$$P\{U(\varepsilon, u, \tfrac{\lambda}{\mu}) \geq 1\} \leq \left(\left[\tfrac{\lambda}{\mu}\right] + 1\right) P(A_1) \sim \omega(a)$$

Por lo que el lema esta probado.

Otro lema que se necesita es

LEMA 4.2.L.3.

Supongamos que 4.1.2. se cumple para $\lambda_2 = 1$ y que las condiciones del teorema 4.1.T.1. también se cumplen. Entonces si para cualquier a, λ, $0 < a, \lambda < \infty$ la condición (4.2.T.1.2.) se cumple, cuando $\lambda \to \infty$

$$\liminf_{u \to \infty} P_u\{ U(\varepsilon, u, \tfrac{\lambda}{\mu}) \geq 1 \} \geq \omega(a) - \frac{\lambda^2}{a^2 H_\alpha^2}$$

DEMOSTRACION

$$P_u\{ U(\varepsilon, u, \tfrac{\lambda}{\mu}) \geq 1 \} \geq$$

$$\geq \sum_{K=0}^{[\lambda/\mu]} P(A_K) - \sum_{i,j=0, |i-j| \geq \ell}^{[\lambda/\mu]} P(A_i \cap A_j) \geq$$

Con A_K definido como en el lema 4.2.L.2.

$$\geq [\tfrac{\lambda}{\mu}] P(A_\ell) - \sum_{i,j=0, |i-j| \geq \ell}^{m} P_{|i-j|}(u) =$$

$$= [\tfrac{\lambda}{\mu}] P(A_\ell) - m \Psi(u) \sum_{K=1}^{\infty} Q_K(u)$$

Donde $\ell, m, Q_K(u)$ están dados como en la definición 4.2.1. Por argumentos que mostraremos enseguida y el lema 4.2.L.2. se puede concluir el resultado.

Para terminar enunciaremos el lema que hace válida la expresión (4.2.L.1.3.)

LEMA 4.2.L.4

Supongamos que 4.1.2. se cumple para $\lambda_2 = 1$ y que las condiciones del teorema 4.1.T.1. también son satisfechas. Entonces para cualquier a, λ $0 < a, \lambda < \infty$

$$\limsup_{u \to \infty} P_u\{ U(\varepsilon, u, \tfrac{\lambda}{\mu}) \geq 2 \} \leq \left(\frac{\lambda}{a H_\alpha} \right)^2 \qquad (4.2.L.4.1.)$$

DEMOSTRACION

Por definición

$$P_u\{ U(\varepsilon, u, \tfrac{\lambda}{\mu}) \geq 2 \} \leq \sum_{i,j=0, |i-j| \geq \ell}^{m} P_{|i-j|}(u) \qquad (4.2.L.4.2.)$$

con ℓ, m dados como en la definición 4.2.1 y -- $P_K(u) = P\{X > u, Y > u\}$ con X, Y distribuidas normales cada una con media cero, varianza unitaria y correlación $r_K(u)$. Aplicando el lema 4.1.L.8.

$$P_K(u) \leq \Psi(u)\, Q_K(u)$$

sustituyendo en (4.2.L.4.2.)

$$P_u\{U(\varepsilon, u, \tfrac{\ell}{\mu}) \geq 2\} \leq 2m\, \Psi(u) \sum_{K=1}^{m} Q_K(u)$$

y por 4.2.T.1.3. y la definición 4.2.1. obtenemos el resultado deseado.

El siguiente teorema nos da las condiciones de mezclado a las que nos hemos estado refiriendo, para que los ε-cruzamientos hacia arriba cumplan con el teorema límite de distribución Poisson.

TEOREMA 4.2.T.2.

Supongamos que $E\{X(t)\} = 0$, $E\{X^2(t)\} = 1$ y que 4.1.2. se cumple. Entonces, la conclusión del teorema 4.2.T.1. es válida si

$$\lim_{t \to \infty} r(t) \log(t) = 0 \qquad (4.2.T.2.1.)$$

ó

$$\int_{-\infty}^{\infty} r^2(t)\, dt < \infty \qquad (4.2.T.2.2.)$$

La demostración se hará por medio de la equivalencia entre la condición (4.2.T.2.1.) ó ------ (4.2.T.2.2.) con las dos del teorema 4.2.T.1., y esa equivalencia nos la dan los seis lemas que enunciaremos al final de la demostración.

DEMOSTRACION

Supongamos que (4.2.T.2.1.) ó (4.2.T.2.2.) se -

cumple, entonces por los lemas (4.2.L.6.) y -- (4.2.L.7.) la condición (4.2.T.1.2.) se satisface.

Ahora bien, por los lemas (4.2.L.8.), (4.2.L.9.) y (4.2.L.10.) la condición (4.2.T.1.1.) se cumple. Con lo que el resultado está probado.

Pasaremos a enunciar los lemas correspondientes.

LEMA 4.2.L.6.

Supongamos que (4.2.T.2.1.) ó (4.2.T.2.2.) se cumple, entonces

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\log T}{T} \int_0^T r(t)\,dt = 0 \qquad (4.2.L.6.1.)$$

y

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = 0 \qquad (4.2.L.6.2.)$$

LEMA 4.2.L.7.

Si

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\log T}{T} \int_0^T r(t)\,dt = 0$$

y

$$\lim_{T\to\infty} r(t) = 0$$

Entonces la condición (4.2.T.1.2.) se cumple.

LEMA 4.2.L.8.

Para que la desigualdad (4.2.T.1.1.) se cumpla, basta que (4.2.T.2.1) ó (4.2.T.2.2.) se satisfagan.

LEMA 4.2.L.9.

Si 4.1.2. se cumple y para toda $m \geq 1$

si $u \to \infty$

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} |r_k(u)| = \frac{1}{T}\int_0^T |r(t)|\,dt + o(a\,u^{-2/\alpha})$$

con

$$T = m\,a\,u^{-2/\alpha}$$

y por último

LEMA 4.2.L.10.

Sea c cualquier real positivo finito y sean $P(\cdot)$, $P'(\cdot)$ las dos medidas gaussianas multivariadas normalizadas. Esto es $P(\cdot)$, $P'(\cdot)$ son medidas bajo las cuales las componentes están distribuidas normales conjuntas con media cero y cada una varianza unitaria. Sean las covarianzas respectivas r_{ij} y r'_{ij}. Entonces

$$\left| P\left\{\bigcup_{k=1}^{n} (X_k(\cdot) > c)\right\} - P'\left\{\bigcup_{k=1}^{n} X_k(\cdot) > c\right\}\right| \leq D_n =$$

donde

$$= \sum_{i,j=1}^{n} |r_{ij} - r'_{ij}| \, \phi(c, |r''_{ij}|)$$

$$\phi(c, |r''_{ij}|) = (1 - r''^{2}_{ij})^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{-c^2}{(1 + |r''_{ij}|)}\right\}$$

y $r''_{ij} = \max(r_{ij}, r'_{ij})$.

Este lema fue probado originalmente por Berman [1] para el caso en que ambas medidas son estacionarias. El presente lema esta dado y probado en James Pickands III [2].

ANEXO 1

CRUZAMIENTOS COMO CORRIENTES (SUCESIONES) ESTACIONARIAS

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, $X=\{X_t; t\in[0,1]\}$ un proceso estocástico normal, real, estacionario sobre el espacio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$$\lambda_2 = \int_0^\infty \lambda^2 \, dF(\lambda) < \infty$$

Como $N(a, a+t)$ es independiente de a por la estacionaridad, mostraremos que los instantes en los cuales $X(t)$ cruza al nivel u forman una corriente (sucesión) estacionaria de eventos.

Similarmente, los cruces hacia arriba y hacia abajo del nivel u forman también corrientes (sucesiones) estacionarias de eventos, así como también los instantes en que un máximo local ocurre.

Consideremos la corriente de eventos definida por los tiempos de cruce de un nivel u de las trayectorias del proceso $X(t)$. Sea $\omega(t)$ la probabilidad de al menos uno de tales cruces ocurra en el instante t . Entonces se sigue que la estacionaridad de X, garantiza la existencia de $\lambda > 0$ (posiblemente infinito) tal que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\omega(t)}{t} = \lambda$$

es decir cuando $t \to 0$.

$$\omega(t) = \lambda t + o(t) .$$

Sea $\mu = E\{e(0,1)\}$. Es intuitivamente lógico suponer que $\lambda = \mu$, desde que esto se cumple un poco trivialmente en muchas situaciones. Aquí se mostrará que esto es así, aunque la prueba no es tan fácil ni inmediata, como lo es por ejemplo para procesos de Poisson.

Si la corriente de eventos de cruce es "regular", podemos utilizar el teorema de Kolmogorov para mostrar que $\lambda = \mu$.

La regularidad de una corriente estacionaria significa que si la probabilidad de dos ó más eventos en el instante t son denotadas por $h(t)$, entonces $h(t)=o(t)$ cuando $t \to 0$.

Sea $\eta=\{\eta_t ; t\in[0,1]\}$ un proceso estocástico estacionario con función de distribución uni-dimensional continua y $P\{\omega\in\Omega ; R_t(\omega)$ sea contínua$\}=1$. Supongamos que ---- $\mu=E\{C_u(0,1)\}$ entonces, la corriente de eventos formada por los instantes de cruce del nivel u es estacionaria y regular. La "intensidad" de la corriente estacionaria es justo μ y cuando $t\to 0$

$$\omega(t)=\mu t+o(t) \quad .$$

Para $X(t)$ proceso estocástico normal estacionario, la condición $\lambda_2<\infty$ es suficiente.

ANEXO 2

El lema 4.1.L.1. nos da condiciones suficientes -- para que la desigualdad (4.1.T.1.1.) se cumpla. Las condiciones referidas son sobre la distribución del máximo- del proceso en el límite. Este lema depende de tres más que son el 4.1.L.2, 4.1.L.6 y 4.1.L.5., que a su vez dependen, de la siguiente manera, de otros.

El lema 4.1.L.5. sólo depende del lema 4.1.L.4. -- El lema 4.1.L.2. depende del 4.1.L.4. y del 4.1.L.3. y - el lema 4.1.L.6 del 4.1.L.5. y del 4.1.L.7. y finalmente el lema 4.1.L.7. depende del lema 4.1.L.8. (ver Diagrama 1).

<u>LEMA</u> 4.1.L.1.

<u>Supongamos que</u> $r(t) = 1-\lambda_2 t^{\alpha} + o(t)$ <u>se cumple</u> -- <u>para</u> $\lambda_2 = 1$. <u>Entonces si</u> $A_1(t) > 0$

$$\lim_{u\to\infty} P\{Z(t)>u\} / u^{2/\alpha}\,\Psi(u)\,t = H_\alpha$$

(4.1.L.1.1.)

<u>DEMOSTRACION</u>

Definimos

$$H(a,\gamma) = \left(\frac{a}{2}\right)^{\alpha/2} \sum_{K=0}^{\infty} 2^{K(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot R\left[\gamma(1-b)\left(\frac{a}{2}\right)^{-\alpha/2} \cdot (2^{\alpha/2} b)^{K} - 2^{-1/2}\left(\frac{a}{2}\right)^{\alpha/2} 2^{\frac{-\alpha K}{2}}\right]$$

con

$$R(x) = x^{-1}\,\Psi(x)$$

y

$$H(a) = \inf_{0<\gamma<\infty} (H(a,\gamma) + e^{\gamma} - 1)$$

Entonces

$$\lim_{u\to\infty} \sup P\{ (z(t)>u) - P_u(z(t)>u)\} / u^{2/\alpha}\psi(u) t$$

$$\leq H_\alpha - (H_\alpha(a)/a) \leq H(a)/a$$

(4.1.L.1.2.)

(Los argumentos de esta desigualdad se darán en el lema 4.1.L.2.).

Sea T un número real positivo, y sea $n=\left[\frac{T}{a}\right]$

Entonces por el lema 4.1.L.5. que demostrare mos posteriormente

$$\lim \sup \frac{\{P(z(na\,u^{-2/\alpha})>u) - P_u(z(na\,u^{-2/\alpha})>u\}}{n a\, \psi(u)} =$$

$$= H'_\alpha(T) - \{ H_\alpha([T/a],a) / a[T/a] \leq$$

$$\leq H(a)/a$$

(4.1.L.1.3.)

con

$$H'_\alpha(T) = \lim_{u\to\infty}\sup P\{z(na\,u^{-2/\alpha})>u\}/na\,\psi(u) =$$

$$= \lim_{u\to\infty} \sup P\{z(T u^{-2/\alpha})>u\}/\psi(u)T$$

y por el mismo lema 4.1.L.5.

$$H'_\alpha(T) = T^{-1}\{1+\int_0^\infty e^{s} P\{\sup_{0\leq t\leq T} Y(t)>s\}\, ds$$

(4.1.L.1.4.)

Vamos a demostrar que $H'_\alpha(T)$ es el límite de $H\alpha$.

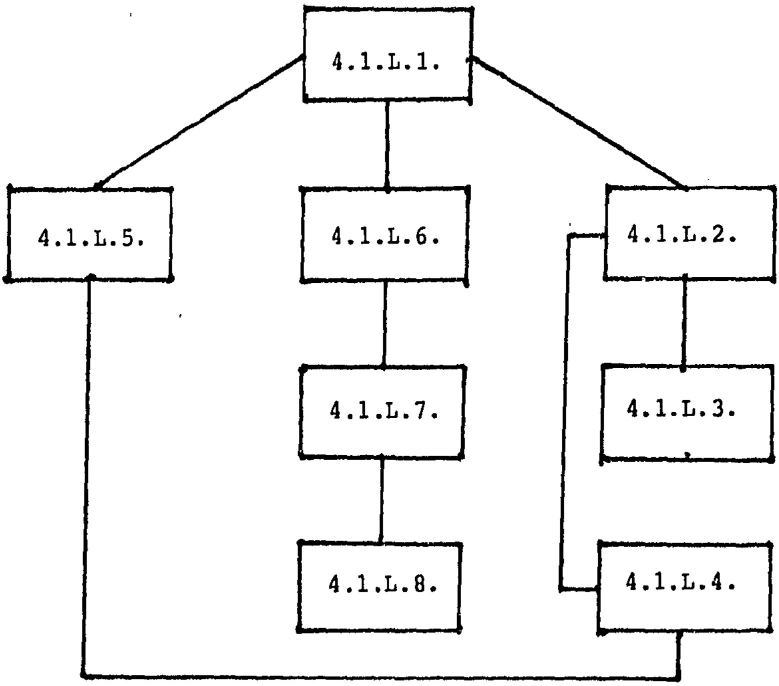
Sea $\varepsilon>0$. Escogemos a tal que $\frac{H(a)}{a}<\frac{\varepsilon}{3}$.

Sea T' tal que si $T>T'$ entonces por el lema 4.1.L.6.

$$|(H_\alpha(a)/a) - H_\alpha([T/a],a)/a[T/a]| \leq \varepsilon/3$$

(4.1.L.1.5.)

DIAGRAMA 1



Ahora

$$|H'_\alpha(T) - H_\alpha| \leq |H_\alpha - (H_\alpha(a)/a)| -$$
$$- |(H_\alpha(a)/a) - (H_\alpha[T/a], a)/a[T/a]| +$$
$$+ |(H_\alpha([T/a], a)/a[T/a]) - H'_\alpha(T)| \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{T\to\infty} H'_\alpha(T) = H_\alpha \qquad \square$$

Para la verificación de la desigualdad (4.1.L.1.2) tenemos el siguiente

LEMA 4.1.L.2.

Supongamos que 4.1.2. se cumple cuando $\lambda_2 = 1$

Sea $a > 0$ cualquier número entonces

$$\lim \sup P\{X(0) \leq u, Z(au^{-\frac{2}{\alpha}}) > u\}/\Psi(u) \leq H(a)$$

donde $\Psi(u)$ está dado por la definición 4.1.2 y $H(a)$ en el lema 4.1.L.1.

DEMOSTRACION

Para cualquier $\gamma > 0$

$$P\{X(0) \leq u, Z(au^{-\frac{2}{\alpha}}) > u\} \leq$$
$$\leq P\{X(0) \leq u - u^{-1}\gamma, Z(au^{-2/\alpha}) > u\} +$$
$$+ P\{u - u^{-1}\gamma < X(0) \leq u\} \qquad (4.1.L.2.1.)$$

si $u \to \infty$

$$P\{X(0) > u - u^{-1}\gamma\} \sim e^{\gamma}\,\Psi(u) \qquad (4.1.L.2.2.)$$

(Lo probaremos posteriormente en el lema ---- 4.1.L.4.)

De (4.1.L.2.1.) y (4.1.L.2.2.) y el lema ---- 4.1.L.3. que veremos a continuación, obtenemos el resultado deseado.

Se puede mostrar también que

$$\lim_{a \to 0} \frac{H(a)}{a} = 0$$

y esto es claro dada la definición de $H(a)$ - en el lema 4.1.L.1.

Con el objeto de verificar la conclusión del lema-4.1.L.2. se enuncia el siguiente

LEMA 4.1.L.3.

Supongamos que 4.1.2. se cumple cuando $\lambda_2 = 1$ Sean a , γ , b números cualesquiera tales que $a, \gamma > 0$ y $2^{-\frac{\alpha}{2}} < b < 1$, entonces

$$\limsup_{u \to \infty} P\{X(0) \leq u - u^{-1}\gamma,\ Z(a u^{-\frac{2}{\alpha}}) > u\} / \Psi(u) \leq$$
$$\leq H(a, \gamma)$$

con $H(a, \gamma)$ dado como en el lema 4.1.L.1.

La demostración de este resultado no cae dentro de los objetivos de este trabajo. Si se desea, puede verse en el artículo de James Pickands III [1, p.59, 60].

Ahora, para mostrar la aproximación dada en ------ (4.1.L.2.2.) tenemos el siguiente

LEMA 4.1.L.4.

Para toda $x > 0$

$$\Psi(x)(1 - x^{-2}) \leq 1 - \phi(x) \leq \Psi(x) \qquad (4.1.L.4.1.)$$

más aún

$$\lim_{x \to \infty} (1 - \phi(x)) / \Psi(x) = 1 \qquad (4.1.L.4.2.)$$

con $\Psi(x)$ dado en la definición 4.1.2. y -----

$$\phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

DEMOSTRACION

Para verificar (4.1.L.4.1.) se derivan ambos-lados con respecto a x y la igualdad ------

(4.1.L.4.2.) se sigue si suponemos que $\psi(x) \neq 0$ para $x > 0$ entonces dividiendo (4.1.L.4.1.) - por $\psi(x)$ y tomando límite obtenemos el resultado deseado.

Para demostrar la validez de la desigualdad ----- 4.1.L.1.3. daremos el siguiente

LEMA 4.1.L.5,

Supongamos que 4.1.2. se cumple cuando $\lambda_2 = 1$ Sea $a > 0$ cualquier número, entonces

$$\lim_{u\to\infty} P_u \{ z(a u^{-2/\alpha}) > u \} / \psi(u) = H_\alpha(n, a) \equiv 1 + \int_0^\infty e^s P \{ \max_{0 \le K \le n} Y(Ka) > s \} ds.$$

con $Y(t)$ dado como en la definición 4.1.2.

La demostración de este resultado no cae dentro de los objetivos de este trabajo, por lo que no se dará aquí. Puede verse en el artículo de James Pickands III-

.

Para la desigualdad (4.1.L.1.5.) se tiene también- el siguiente

LEMA 4.1.L.6.

Supongamos que 4.1.2. se cumple para $\lambda_2 = 1$. Si $A_1(t) > 0$ entonces

$$\lim_{u\to\infty} P_u \{ z(t) > u \} / u^{2/\alpha} \psi(u) t = H_\alpha(a)/a \qquad (4.1.L.6.1.)$$

y la función $H_\alpha(a)$, definida en el teorema- 4.1.T.1., está acotada para a suficientemente pequeña.

DEMOSTRACION

Para cada entero positivo K definimos el evento $B_K = \{ X(Kau^{-2/\alpha}) > u \}$ y para un entero arbitrario n , sea $A_K = \bigcup_{\ell=(K-1)n+1}^{Kn} B_\ell$. Entonces

$$P \{ z(t) > u \} \le P \{ \bigcup_{K=1}^{[u^{2/\alpha} t / na]+1} A_K \}$$

donde $[a]$ es el entero más grande menor o igual que a . Por la estacionaridad del pro ceso X, $P(A_K)=P(A_1)$ para toda $K \geq 1$. Consecuentemente

$$P_u\{Z(t)>u\} \leq \{[\frac{u^{2/\alpha}t}{na}]+1\}P(A_1) \simeq ([\frac{u^{2/\alpha}t}{na}])P_u\{Z(na\bar{u}^{2/\alpha})>u\}$$

Entonces aplicando el lema 4.1.L.5.

$$\lim_{u\to\infty}\sup P_u\{Z(t)>u\}/u^{2/\alpha}\Psi(u)\,t \leq$$

$$\leq \frac{H_\alpha(n,a)}{na} \qquad (4.1.L.6.2.)$$

por otro lado

$$P_u\{Z(t)>u\} \geq \sum_{K=1}^{[\frac{u^{2/\alpha}t}{na}]} P(A_K) - \sum_{K\neq l=1}^{[\frac{u^{2/\alpha}t}{na}]} P(A_K \cap A_l) \geq$$

$$\geq ([\frac{u^{2/\alpha}t}{na}])\{P(A_1) - \sum_{K=1,\, l=n+1}^{n\ [u^{2/\alpha}t/na]} P(B_K \cap B_l)$$

pero

$$u^2(1-r^2(a\bar{u}^{2/\alpha}m)) > 2A_1(t)(ma)^\alpha$$

nuevamente, por el lema 4.1.L.5.

$$\lim_{u\to\infty}\inf P_u\{Z(t)>u\}/u^{2/\alpha}\Psi(u)\,t \geq$$

$$\geq \{H_\alpha(n,a) - \sum_{K=1,\, l=n+1}^{\infty} d_{|K-l|}\}/na \qquad (4.1.L.6.3.)$$

con

$$d_m = 2(1-\phi((A_1(t)(ma)^\alpha/\varepsilon)^{1/2}))$$

se puede ver que

$$\sum_{m=1}^{\infty} d_m < \infty \ , \sum_{K=1,\, l=n+1}^{\infty} d_{|K-l|} = \sum_{K=1}^{n}(\sum_{l=K}^{\infty} d_l)$$

y

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{l=K}^{\infty} d_l = 0$$

pero convergencia de Cesaro, implica convergencia, así que

$$\lim_{n\to\infty}\{[\sum_{K=1,\, l=n+1}^{\infty} d_{|K-l|}]/na\} = 0 \qquad (4.1.L.6.4.)$$

Combinando (4.1.L.6.2.), (4.1.L.6.3.) y ----- (4.1.L.6.4.) se obtiene el resultado.

Para ver que $H_\alpha(a)$ está acotada para a suficientemente pequeña, necesitaremos de otro- lema que demostraremos al final del siguiente párrafo.

Sean a_0, a_1, constantes tales que $0 < a_0, a_1 < \infty$ y para cualquier $a > a_0$ $H_\alpha(a) > a_1 > 0$.

Luego para cualquier a existe un entero --- m tal que $am > a_0$. Por definición de -- $H_\alpha(n,a)$ tenemos $H_\alpha(n,am) \geq H_\alpha(n,a)$. De a-- quí que $H_\alpha(a) > H_\alpha(am) > a_1$. Así que $H_\alpha(a)$ - está uniformemente acotada.

Ahora probaremos el resultado por el cual podemos- asegurar lo escrito al final del lema 4.1.L.6.

LEMA 4.1.L.7.

Supongamos que 4.1.2. se cumple cuando $\lambda_2 = 1$ Si $A_1(t) > 0$ entonces

$$\liminf_{u \to \infty} P_u\{z(t) > u\} / u^{2/\alpha}\psi(u)t \geq$$

$$\geq \frac{1}{a}\left\{1 - 4\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - \phi\left((A_1(t)(ka)^{\alpha}/8\right)^{1/2}\right)\right\} \qquad (4.1.L.7.1.)$$

el cual es mayor que cero para toda a.

DEMOSTRACION

Por definición

$$P_u\{z(t) > u\} \geq \sum_{k=0}^{m} P\{X(kau^{-2/\alpha}) > u\} -$$

$$-\sum_{k \neq l = 0}^{m} P\{X(kau^{-2/\alpha}) > u, X(lau^{-2/\alpha}) > u\} \qquad (4.1.L.7.2.)$$

donde

$$m = [u^{2/\alpha} t / a]$$

por la estacionaridad de X (4.1.L.7.2.) se- puede expresar como

$$P_u\{z(t)>u\} \geq m\,P\{X(0)>u\} -$$

$$-2\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\,P\{X(0)>u,\ X(k a u^{-2/\alpha})>u\}$$

(4.1.L.7.3.)

Por medio de una aproximación que demostraremos en el lema 4.1.L.8., tenemos

$$P\{X(0)>u,\ X(k a u^{-2/\alpha})>u\} \leq$$

$$\leq 2\,\Psi(u)\,(1-\phi((A_1(t)(ka)^{\alpha}/8)^{1/2}))$$

(4.1.L.7.4.)

sustituyendo en (4.1.L.7.3.) se obtiene el resultado deseado

Para probar la desigualdad (4.1.L.7.4.) enunciamos el siguiente

LEMA 4.1.L.8.

Sean X $\wedge$ Y dos variables aleatorias cada una con media cero y varianza uno con correlación r, y densidad conjunta normal. Entonces

$$P\{X>x,\ Y>y\} \leq (1+r)\,\Psi(x)\cdot$$

$$\cdot\{1-\phi(x((1+r)^{-1}(1-r))^{1/2})\}$$

(4.1.L.8.1.)

DEMOSTRACION

Por definición

$$P\{X>x,\ Y>y\} = (2\pi)^{-1}(1-r^2)^{-1/2}\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}\exp\left\{-\frac{(s^2+t^2-2rst)}{2(1-r^2)}\right\}ds\,dt$$

y

$$P\{X>x,\ Y>x\} = (2\pi)^{-1}(1-r^2)^{-1/2}\int_x^{\infty}\int_x^{\infty}\exp\left\{-\frac{(s^2+t^2-2rst)}{2(1-r^2)}\right\}ds\,dt$$

Sea $\omega = x(1-r^2)^{-1/2}$ y hagamos el cambio de variables $s = x + x^{-1}z$, $t = x + x^{-1}v$

entonces

$$P\{X>x, Y>x\} = (2\pi)^{-1} x^{-2} \exp\left(\frac{-x^2}{1+r}\right)(1-r^2)^{-\frac{1}{2}}\, I(x,r)$$

(4.1.L.8.2.)

con

$$I(x,r) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(z+v)}{1+r}\right) \exp\left(-\frac{(z-v)^2}{2x^2(1-r^2)}\right) dz\, dv$$

$$\leq J(x,r) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(z+v)}{1+r}\right) \exp\left(-\frac{(z-v)^2}{2\omega^2}\right) dz\, dv$$

como $\frac{1}{1+r} - \frac{1}{2} = \frac{1-r}{2(1+r)}$ aplicando (4.1.L.8.2.)-tenemos

$$P\{X>x, Y>x\} \leq (2\pi)^{-1}\omega^{-1} \exp\left\{\frac{-\omega^2}{2(1+r)^2}\right\} \psi(x)\, J(x,r)$$

(4.1.L.8.3.)

Ahora evaluaremos $J(x,r)$. Sea $s = \frac{z+v}{1+r}$ y $t = \frac{z-v}{\omega}$. Los límites son $-\infty < t < \infty$ y $\frac{\omega|t|}{1+r} \leq s < \infty$

El Jacobiano de la transformación es:

$$|J| = 2/\omega(1+r)$$

así que

$$ds\,dt = 2\,dz\,dv/\omega(1+r)$$

luego entonces

$$J(x,r) \leq \left(\frac{\omega(1+r)}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \int_{\frac{\omega|t|}{1+r}}^{\infty} e^{-s}\, ds\, dt =$$

$$= \omega(1+r)\int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{\omega|t|}{1+r}\right\} dt =$$

$$= \omega(1+r)\int_0^{\infty} \exp\left\{-\left(t+\frac{\omega}{1+r}\right)^2/2\right\} dt\, \exp\left\{\frac{\omega^2}{2(1+r)^2}\right\} =$$

$$= (2\pi)^{1/2}\omega(1+r) \exp\left\{\frac{\omega^2}{2(1+r)^2}\right\}\left(1 - \Phi\left(\frac{\omega}{1+r}\right)\right)$$

(4.1.L.8.4.)

Multiplicando (4.1.L.8.4.) y (4.1.L.8.3.) se-obtiene el resultado.

ANEXO 3

DEMOSTRACION DE LOS LEMAS UTILIZADOS PARA LA DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4.2.T.2.

LEMA 4.2.L.6.

Supongamos que (4.2.T.2.1.) ó (4.2.T.2.2.) se-cumple, entonces

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\log T}{T}\int_0^T r(t) = 0 \qquad (4.2.L.6.1.)$$

y

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = 0 \qquad (4.2.L.6.2.)$$

DEMOSTRACION

Supongamos que (4.2.T.2.1.) se cumple, es de--cir $\lim_{t\to\infty} r(t)\log(t) = 0$

entonces es claro que

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$$

Por otro lado, para mostrar que (4.2.T.2.1) -- implica (4.2.L.6.1.), consideremos el hecho de que

$$\frac{\log T}{T}\int_0^T r(t)dt = \frac{\log T}{T}\int_0^{\sqrt{T}} r(t)\,dt + $$
$$+ \frac{\log T}{T}\int_{\sqrt{T}}^T r(t)\,dt \qquad (4.2.L.6.3.)$$

Tomemos el primer término del lado derecho de-(4.2.L.6.3.)

$$\frac{\log T}{T}\int_0^{\sqrt{T}} r(t)\,dt \leq \frac{\log T}{\sqrt{T}} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

Tomemos ahora el segundo término del lado dere cho de (4.2.L.6.3.)

$$\frac{\log T}{T}\int_{\sqrt{T}}^T r(t)\,dt$$

Sea $\varepsilon>0$ arbitrario. Entonces para T suficien-temente grande

$$r(t) < \frac{\varepsilon}{\log(t)} \qquad \text{si} \quad t > \sqrt{T}$$

así que

$$\frac{\log T}{T}\int_{\sqrt{T}}^{T} r(t)dt \leq \frac{\varepsilon \log T}{T}\int_{\sqrt{T}}^{T}\frac{dt}{\log t} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon(T-\sqrt{T})}{T\log\sqrt{T}}\log T \leq 2\varepsilon$$

y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario el resultado se sigue en su primera parte.

Supongamos ahora que

$$\int_0^{\infty} r^2(t)dt < \infty$$

directamente

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$$

falta mostrar que

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\log T}{T}\int_0^T r(t)\,dt = 0$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\frac{\log T}{T}\int_0^T r(t)dt \leq \frac{\log T}{T}\left(\int_0^T r^2(t)dt\right)^{1/2} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

Por lo que el lema está demostrado.

LEMA 4.2.L.7.

Si

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\log T}{T}\int_0^T r(t)dt = 0$$

y

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$$

Entonces la condición (4.2.T.1.2.) se cumple.

DEMOSTRACION

Sean $\varepsilon' > 0$ arbitrario. t_0 tal que si $t \geq t_0, r(t) < \varepsilon'$ (esto es posible porque $r(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ se cumple) y sea m' el entero más pequeño tal que ------- $(m'+1)\, a\, u^{2/\alpha} \geq t_0$. Esto es

$$m' = [\, u^{2/\alpha} t_0 / a \,]$$

Disponiendo la suma de (4.2 T.1.2) como sigue

$$\sum_{k=1}^{m} Q_k(u) = \sum_{k=1}^{m'} Q_k(u) + \sum_{k=m'+1}^{m} Q_k(u)$$

por

$$\delta = \sup_{\varepsilon' \leq t < \infty} r(t) < 1$$

entonces

si $u \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{m'} Q_k(u) \leq \{ [u^{2/\alpha}(t_0-\varepsilon)/a] + 1 \} \{ 1 + \phi(u\delta) \} \to 0$$

Sea θ cualquier valor tal que $0 < \theta < 1$. Por - el lema 4.1.L.4., si $u > 0$

$$\{ 1 - \phi(\theta u) \} \leq \Psi(\theta u) = \theta^{-1} u^{\theta - 1} (\Psi(u))^{\theta} \leq$$

$$\leq \theta^{-1} u^{\theta-1} (1 - \phi(u))^{\theta} (1 - u^{-2})^{-\theta} \leq$$

$$\leq \theta^{-1} (1 - \phi(u))^{\theta} (1 - u^{-2})^{-\theta} .$$

Consecuentemente, cuando $u \to \infty$

$$\sum_{k=m'+1}^{m} Q(u) \leq (1+\varepsilon') \sum_{k=m'+1}^{m} (1 - \phi(u))^{q_k(u)} =$$

$$= (1+\varepsilon') \{ \left(\frac{\lambda}{a H_\alpha} \right) + o(1) \} +$$

$$+ (1 - \phi(u)) \sum_{k=m'+1}^{m} \{ (1 - \phi(u))^{q_k(u)-1} - 1 \}$$

Pero como $\varepsilon' > 0$ era arbitrario, es suficiente - probar que

$$\lim_{u \to \infty} (1 - \phi(u)) \sum_{k=m'+1}^{m} \{ (1 - \phi(u))^{q_k(u)-1} - 1 \} = 0 .$$

Se puede mostrar que existe una constante C_1 positiva tal que por definición de $q_K(u)$

si $r_K(u) \leq \delta$

$$(1-\phi(u))^{q_K(u)-1} - 1 \leq C_1(-\log(1-\phi(u)))\, r_K(u)$$

y entonces es suficiente probar

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log m}{m} \sum_{K=1}^{m} r_K(u) = 0 \qquad (4.2.L.7.1)$$

Por el lema 4.2.L.9., la condición (4.2.L.7.1.) es equivalente a la condición

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\log T}{T} \int_0^T r(t)\,dt = 0$$

con lo que el lema está probado.

LEMA 4.2.L.8.

Para que la desigualdad (4.2.T.1.1.) se cumpla basta que (4.2.T.2.1) ó (4.2.T.2.2.) se satisfagan.

DEMOSTRACION

Sean $f(x)$ una función no negativa tal que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \ , \ \lim_{x\to\infty} x^{\frac{2}{\alpha}} f(x)\, \Psi(x) = 0$$

Y $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Para x suficientemente grande

$$f(x)/\{\lambda / H_\alpha\, x^{2/\alpha}\, \Psi(x)\} =$$

$$= H_\alpha\, x^{\frac{2}{\alpha}} f(x)\, \Psi(x)/\lambda \leq \varepsilon .$$

Por el lema 4.1.L.1., entonces

$$\limsup_{x\to\infty} P\{ Z(f(x)) > x \} \leq \varepsilon$$

Y como ε es arbitrario

$$\limsup_{x\to\infty} P\{ Z(f(x)) > x \} = 0$$

Por la estacionaridad de X se sigue que en -- cualquiera de los intervalos

$$\left\langle \frac{(j-1)\lambda}{K H_\alpha\, x^{2/\alpha}\, \Psi(x)} \ , \ \frac{(j-1)\lambda}{K H_\alpha\, x^{2/\alpha}\, \Psi(x)} + f(x) \right\rangle$$

La probabilidad de que $X(t) > x$ se aproxima a cero en el límite cuando $x \to \infty$.
De aquí lo mismo pasa para $P_u(\cdot)$.
Por el lema 4.2.L.5.

$$D_n(a, \lambda, u) \leq m \sum_{k=\ell}^{m} | r_k(u)| \phi(u, |r_k(u)|)$$

con

$$\ell = \left[\frac{u^{2/\alpha} f(u)}{a} \right]$$

$$m = \left[\lambda / H_\alpha \, u^{2/\alpha} \psi(u) \right]$$

$$\phi(u, r) = (1 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ \frac{-C_1^2}{1+|r|} \right\} .$$

La condición (4.2.T.2.1.) implica directamente que

$$\lim_{t \to \infty} r(t) = 0$$

Entonces por (4.2.T.2.2.) se sigue que

$$\sup_{1 \leq k < \infty} | r_k(u)| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad u \to \infty$$

Así que sin pérdida de generalidad podemos reemplazar el término $(1 - r_k^2(u))^{-\frac{1}{2}}$ por cualquier constante C_2 más grande que uno. Esto es, para u suficientemente grande

$$D_n(a, \lambda, u) \leq C_2 \, m \sum_{k=\ell}^{m} |r_k(u)| \exp\left\{ \frac{-u^2}{1+|r_k(u)|} \right\} =$$

$$= C_2 \, m \sum_{k=\ell}^{m} | r_k(u)| \left(\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \right)^{\frac{2}{1+|r_k(u)|}}$$

$$= C_3 \, m \sum_{k=\ell}^{m} | r_k(u)| \, u^{\frac{2}{1+|r_k(u)|}} (\psi(u))^{\frac{2}{1+|r_k(u)|}}$$

con C_3 otra constante finita positiva.
Es más, existe una constante C_4 positiva finita tal que

$$D_n(a, \lambda, u) \leq C_4 \, m^{-1} \sum_{k=1}^{m} |r_k(u)| \, u^{\frac{2}{1+|r_k(u)|}} \, m^{\frac{2|r_k(u)|}{1+|r_k(u)|}} \qquad (4.2.L.8.1.)$$

Primero supongamos que (4.2.T.2.1.) se cumple.
Sea

$$\delta(t) = \sup_{t \leq s < \infty} | r(s)|$$

Entonces

$$\delta(t)\log t \leq \sup_{t\leq s<\infty} r(s)\log(s) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

pero

$$m^{\frac{2|r_K(u)|}{1+|r_K(u)|}} = \exp\left\{\frac{2\log m\,|r_K(u)|}{1+|r_K(u)|}\right\}$$

Para $K \geq \ell+1$ $\leq \exp\{2\delta((\ell+1)a\,u^{-\frac{2}{\alpha}})\log m\}$

pero

$$\delta((\ell+1)a\,u^{-\frac{2}{\alpha}})\log m \leq C_5\,\delta(f(u))\log(1/\psi(u))$$

con C_5 una constante positiva finita.

Sea $f(x) = (\psi(x))^{-1/2}$

Entonces $f(x)$ satisface las condiciones del lema.

Pero

$$\delta(f(u))\log(1/\psi(u)) = \delta(f(u))\log((f(u))^2) =$$
$$= 2\delta(f(u))\log f(u) \xrightarrow[u\to\infty]{} 0$$

y como

$$u^{\frac{2}{1+|r_K(u)|}} \leq u^2 \underset{u\to\infty}{=} o(\log m)$$

Sustituyendo en (4.2.L.8.1.)

$$m^{-1}\sum_{K=1}^{m}|r_K(u)|\,u^{\frac{2}{1+|r_K(u)|}}\,m^{\frac{2|r_K(u)|}{1+|r_K(u)|}} \leq$$
$$\leq \delta(f(u))\log((f(u))^2)\,o(\log m)\,\cdot$$
$$\cdot\exp\{\delta(f(u))\}\log((f(u))^2) \xrightarrow[u\to\infty]{} 0$$

Así que esto muestra que (4.2.T.2.1.) es sufi-- ciente.

Ahora consideremos la condición (4.2.T.2.2.).

Sea β tal que $0<\beta<\frac{1}{2}$ para u suficientemente - grande.

$$\sup_{1\leq K<\infty}|r_K(u)| \leq \beta \qquad \text{y}$$

$$\sup_{1\leq K<\infty} u^{\frac{2}{1+|r_K(u)|}}\,m^{\frac{2|r_K(u)|}{1+|r_K(u)|}} \leq m^{\beta}$$

Así, por el lema 4.2.L.9.

$$D_n(a,\lambda,u) \leq C_1 m^{\beta-1} \sum_{K=1}^{m} |r_K(u)| \leq (u^{2/\alpha} a)^{\beta} T^{\beta-1} \cdot$$

$$\cdot \int_0^T |r(t)| dt + o(a u^{-2/\alpha})^{1-\beta} \leq T^{2\beta-1} \int_0^T |r(t)| dt + o(a u^{-2/\alpha})^{1-\beta}$$

Entonces es suficiente probar que existe una - $\beta > 0$ tal que

$$\lim_{T \to \infty} T^{\beta-1} \int_0^T |r(t)| \, dt = 0$$

Por la desigualdad de Cauchy-Shwarz

$$\left(T^{\beta-1} \int_0^T r(t) dt\right)^2 \leq T^{2\beta-1} \int_0^T r^2(t) \, dt \xrightarrow[T \to \infty]{} 0$$

Para cualquier $\beta \in (0, 1/2)$. Con lo que está demostrado que la condición (4.2.T.2.2.) es suficiente y el lema esta probado.

<u>LEMA</u> 4.2.L.9.

<u>Si</u> 4.1.2. <u>se cumple para toda</u> $m \geq 1$

<u>si</u> $u \to \infty$

$$\frac{1}{m} \sum_{K=1}^{m} |r_K(u)| = \frac{1}{T} \int_0^T |r(t)| \, dt + o(a u^{-2/\alpha})$$

<u>Con</u> $T = m a u^{-2/\alpha}$

<u>DEMOSTRACION</u>

Por definición

$$\sum_{K=1}^{m} r_K(u) = \sum_{K=1}^{m} |r_K(K u^{-2/\alpha} a)| =$$

$$= u^{2/\alpha} a \sum_{K=1}^{m} \int_{(K-1)a u^{-2/\alpha}}^{K a u^{-2/\alpha}} ds \, |r_K(K a u^{-2/\alpha})| \geq (\leq)$$

$$\geq (\leq) \; u^{2/\alpha} a \sum_{K=1}^{m} \int_{(K-1)a u^{-2/\alpha}}^{K a u^{-2/\alpha}} |r(s)| ds \; + (-)$$

$$+ (-) \; u^{2/\alpha} a \sum_{K=1}^{m} \int_{(K-1)a u^{-2/\alpha}}^{K a u^{-2/\alpha}} |r(s) - r(K a u^{-2/\alpha})| ds$$

Por la desigualdad de incrementos Loeve [1] p. 195] y por la estacionaridad

$$\int_{(K-1)a u^{-2/\alpha}}^{K a u^{-2/\alpha}} |r(s) - r(K a u^{-2/\alpha})| ds \leq 2 \int_0^{a u^{-2/\alpha}} (1 - r(s)) ds$$

por lo tanto

$$\left| \frac{1}{m}\sum_{K=1}^{m}|r_K(u)| - \frac{u^{2/\alpha}}{am}\int_0^{mau^{-2/\alpha}} |r(s)|ds \right| =$$

$$= 2\int_0^{au^{-2/\alpha}} (1-r(s))ds = o(au^{-2/\alpha})$$

Cuando $u \to \infty$ uniformemente en m .

Por lo que el lema está probado.

Y por último

LEMA 4.2.L.10.

Sea C cualquier real positivo finito y sean - $P(\cdot)$, $P'(\cdot)$ las dos medidas gaussianas multivaria das normalizadas. Esto es $P(\cdot)$ y $P'(\cdot)$ son medi-- das bajo las cuales las componentes están dis- tribuidas normales conjuntas con media cero y- cada una varianza unitaria. Sean las covarian zas respectivas r_{ij} y r'_{ij} .

Entonces

$$\left| P\{\bigcup_{K=1}^{n}(X_K(\cdot) > c)\} - P'\{\bigcup_{K=1}^{n}(X_K(\cdot) > c)\} \right| \leq D_n$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} |r_{ij} - r'_{ij}|\ \phi(c, |r''_{ij}|)$$

Donde

$$\phi(c, |r''_{ij}|) = (1-r''^{2}_{ij})^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{c^2}{(1+|r''_{ij}|)}\}$$

y

$$r''_{ij} = \max(r_{ij}, r'_{ij})$$

Este lema fué probado originalmente por Berman [1] para el caso en que ambas medidas son es tacionarias. El presente lema está dado y pro bado en James Pickands III [1].

BIBLIOGRAFIA

BELYAEV, YU K.

[1] "Local properties of the sample functions of - stationary processes".
Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya 5, 1960.
pag. 128-131.

BERMAN, S. M.

[1] "Limit theorems of the maximun term in stationa ry sequences".
Ann. Math. Statist.35, 1964.
pag. 502-516.

BULINSKAYA, E.V.

[1] "On the mean of crossings of a level by a sta-- tionary gaussian processes".
Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya 6, 1961.
pag. 474-477.

CRAMER, H.

[1] "Mathematical methods of statistics".
Princeton Univ. Press,
Princeton, N.J., 1946.

CRAMER & LEADBETTER

[1] "Stationary and related stochastic processes".
Sample function properties and their applica-- tions.
John Wiley & Sonos, Inc., 1967.

FELLER, W.

[1] "An introduction to Probability theory and its applications".
Vol. I, segunda ediciÓn.
John Wiley & Sons, Inc. 1957.

GNEDENKO, B. V.

[1] "The theory of Probability".
Chelsea Publishing Co., New York, 1962.

ITO, K.

[1] "The expected number of zeros of continuous stationary gaussian processes".
J. Math. Kyoto Univ. 3-2, 1964
pag. 207-216.

IVANOV, V. A.

[1] "On the average number of crossings of a level - by sample functions of a stochastic processes".
Toeriya veroyatnostei i ee primeneniya 5, 1960.
pag. 319-323.

LEADBETTER, M.R.

[1] "On crossings of levels and curves by a wide - class of stochastic processes".
Ann. Math. Statist. 37, 1966.
pag. 260-267.

LOEVE, M.

[1] "Probability Theory".
Van Mostrand, Princeton N.J., 1960.

PEARSON, K.

[1] "Tables for statisticians and biometricans".
Cambridge University Press.
Cambridge, England, 1930.

PICKANDS III, JAMES.

[1] "Maxima of stationary gaussian processes".
Z. Wahrcheinlichkeitstheorie und vew.
Gebiete 7, 1967.
pag. 190-223.

[2] "Upcrossings probabilities for stationary gaussian processes".
Transactions of the American Mathematical Society, volume 145, 1969.
pag. 51-73.

RICE,S. O.

[1] "Mathematical analysis of random noise".
Bell system Tech, J 24, 1945.
pag. 46-156.

VOLKONSKI, V.A. & ROZANOV, YU A.

[1] "Some limit theorems for random functions, II".
Teor. verojatnost. , primenen 6, 1961
pag. 202-215.
Theor. Probability appl. 6, 1961.
pag. 186-198.

WEIERSTRASS, TEOREMA DE

[1] RUDIN, WALTER
"Principios de Análisis Matemático"
Mc. Graw Hill, 1980.

YLVISAKER, N.D.

[1] "The expected number of zeros of a stationary - gaussian processes".
Ann. Math. Statist. 36, 1965.
pag. 1043-1046.