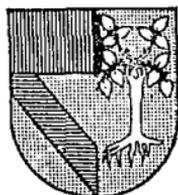


308923



UNIVERSIDAD PANAMERICANA

ESCUELA DE PEDAGOGIA
Incorporada a la
Universidad Nacional Autónoma de México

22
2ej

"ORIENTACIONES TEORICO-METODOLOGICAS A
PROFESORES DE 3º. DE PRIMARIA SOBRE EL
PROCESO DE ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LA
GEOMETRIA CON BASE EN LA TEORIA
PSICOGENETICA DE PIAGET Y EN LA TEORIA DE
VAN HIELE"

TESIS PROFESIONAL

QUE PRESENTA:

EDNA LETICIA HERNANDEZ GARDUÑO

PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN PEDAGOGIA

DIRECTOR DE TESIS:

Lic. Georgina Quintanilla Cerda

México, D. F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1992



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	Página
INTRODUCCION	1
CAPITULO 1	
TRASCENDENCIA DEL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRIA EN LA FORMACION DEL NINO	5
1.1 Analisis del concepto de "hombre"	5
1.2 Conceptualización del significado de "educación"	7
1.3 Didáctica	13
1.3.1 División de la didáctica	16
1.3.1.1 Didáctica general	17
1.3.1.2 Didáctica especial	17
1.3.2 Elementos de la didáctica	18
1.3.3 Didáctica especial de las matemáticas	20
1.3.4 Didáctica especial de la Geometria	21
1.4 Matemáticas	22
1.4.1 Analisis del significado de las "matemáticas"	22
1.4.2 Trascendencia de las matemáticas y de su enseñanza	23
1.4.2.1 El mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas a nivel internacional	29
1.4.2.2 Concepción de las matemáticas de primaria en México	31
1.5 Geometria	32
1.5.1 El papel de la geometria en la educación matemática	32
1.5.1.1 Qué es la geometria	32
1.5.1.2 Una tendencia en la educación de la geometria	35
1.4.1.3 Importancia de la educación en geometria en el niño de 3º de primaria	35
1.5.2 Las teorías del aprendizaje y la geometria	37
1.5.2.1 Qué es una teoría del aprendizaje	37
1.5.2.2 Clasificación de las teorías de aprendizaje	38

1.5.2.3	La teoría psicogenética de Piaget y la teoría de Van Hiele	39
---------	--	----

CAPITULO 2

LA TEORIA PSICOGENETICA DE PIAGET		40
2.1	Biografía de Piaget	40
2.2	Propósito fundamental de Piaget	44
2.3	La teoría de Piaget	47
2.3.1	Pensamiento sensoriomotriz	62
2.3.2	Pensamiento simbólico o preoperacional	71
2.3.3	Pensamiento operacional	87
	2.3.3.1 Operaciones concretas	87
	2.3.3.2 Operaciones formales	97
2.3.4	La unidad de la conducta. Una teoría más que cognoscitiva	103
2.3.5	La enseñanza de la geometría según Piaget	105
	2.3.5.1 Desarrollo histórico de la geometría	105
	2.3.5.2 Desarrollo de los conceptos de espacio en el niño	107
	2.3.5.2.1 Geometría Topológica	107
	2.3.5.2.2 Geometría Euclídana	109
	2.3.5.2.3 Geometría Proyectiva	114
	2.3.5.3 La geometría que se debe enseñar en cada periodo	115

CAPITULO 3

LA TEORIA DE VAN HIELE Y SU UNION CON LA TEORIA PSICOGENETICA EN LA ELABORACION DE UN MODELO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE		116
3.1	Niveles de desarrollo para el aprendizaje de la geometría según Van Hiele	116
3.1.1	Surgimiento de la teoría de Van Hiele	116
3.1.2	Elementos del modelo	120
3.1.3	Propiedades del modelo de Van-Hiele	125
3.1.4	El "Brooklyn College Project"	129
3.2	Un modelo de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas como marco de referencia	141
3.2.1	Implicaciones educativas de la teoría de Piaget	144
	3.2.1.1 Conocimiento de las características generales del alumno que intervienen en su aprendizaje	144

3.2.1.2	Objetivos	146
3.2.1.3	Selección y organización de contenidos	149
3.2.1.4	Selección y organización de actividades de aprendizaje	150
3.2.1.5	Evaluación	168
3.2.2	Implicaciones educativas de la teoría de Van Hiele	170
3.2.2.1	Conocimiento de las características generales del alumno que intervienen en su aprendizaje	170
3.2.2.2	Objetivos	170
3.2.2.3	Selección y organización de contenidos	171
3.2.2.4	Selección y organización de actividades de aprendizaje	172
3.2.2.5	Evaluación	177
3.2.3	Implicaciones educativas comunes a ambas teorías	179
3.2.3.1	Conocimiento de las características generales del alumno que intervienen en su aprendizaje	179
3.2.3.2	Objetivos	181
3.2.3.3	Selección y organización de contenidos	181
3.2.3.4	Selección y organización de actividades de aprendizaje	183
3.2.3.5	Evaluación	187

CAPITULO 4

	PROPUESTA METODOLOGICA CON BASE EN EL ANALISIS DEL PROGRAMA DE GEOMETRIA PARA 3º DE PRIMARIA, Y FUNDAMENTANDOSE EN LA TEORIA PSICOGENETICA Y EN LA TEORIA DE VAN HIELE	188
4.1	Programa de geometría vigente para el 3º grado de primaria en México	188
4.1.1	Generalidades	188
4.1.2	Las matemáticas de 3º de primaria	192
4.1.3	La geometría de 3º de primaria	194
4.1.4	Objetivos generales de las matemáticas	195
4.1.5	Objetivos y actividades por unidad	196
4.2	Evaluación del programa de 3º de primaria con base en el modelo propuesto a partir de la teoría psicogenética y del modelo de Van Hiele	207
4.2.1	Formulación de objetivos	207

4.2.2	Selección y organización de contenidos	209
4.2.3	Selección de actividades de aprendizaje	211
4.2.4	Organización de actividades de aprendizaje	215
4.2.5	Evaluación	219
4.2.6	Cuadro comparativo de las diferencias conceptuales sobre la educación matemática entre la SEP, Piaget y Van Hiele	221
4.3	Propuesta metodológica aplicada a la enseñanza de la geometría en tercero de primaria con base en la teoría psicogenética y en la teoría de Van Hiele	222
4.3.1	Indicaciones generales	223
4.3.2	Cuadro conceptual propuesto	225
4.3.3	Sugerencias por unidad	226
CONCLUSIONES		248
BIBLIOGRAFIA BASICA		254
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA		256

INTRODUCCION

INTRODUCCION

El presente trabajo tiene como objetivo dar orientaciones teórico-metodológicas sobre el proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría en 3º de primaria con base en un análisis de las etapas de desarrollo intelectual en el niño.

La necesidad de proporcionar dichas orientaciones surge a partir del reconocimiento de los problemas que se presentan en el salón de clases cuando el niño, lejos de comprender, reduce sus procesos intelectuales a mecanismos memorísticos, impidiendo el desarrollo oportuno de las estructuras adecuadas.

Es importante conocer el origen de estos problemas porque cuando el niño tiene dificultades en el aprendizaje de la geometría, se ven afectadas otras áreas del conocimiento matemático, produciendo un lento desarrollo de estructuras mentales.

Una metodología basada en el conocimiento de las etapas evolutivas de la psicología infantil y de los niveles de razonamiento en geometría podría mejorar significativamente los resultados.

La selección de contenidos y la metodología en la enseñanza de la geometría no pueden depender únicamente de lo que los adultos consideren "necesario" que el niño aprenda. Un buen criterio de selección debe también contemplar las capacidades y necesidades

del niño en cada una de sus etapas evolutivas. De esta manera, además de contribuir acertadamente al desarrollo intelectual del educando, el proceso de enseñanza-aprendizaje se sustentará en habilidades realmente existentes, produciendo así un aprendizaje significativo, orientado hacia la creatividad y la resolución de problemas, y no se verá reducido a una simple reproducción memorística.

Con el objetivo de lograr un aprendizaje significativo, y de contribuir a la formación integral del educando, se propone una metodología derivada de las implicaciones prácticas de la teoría psicogenética de Piaget y de la teoría de Van Hiele.

La propuesta que se hace es de tipo didáctico, basada en conocimientos de psicología y de las matemáticas. Piaget aporta bases teóricas referentes a la psicología del desarrollo cognoscitivo del niño. Van Hiele aporta los niveles de adquisición de la geometría. Sin embargo, se considero que hacia falta un modelo didáctico de las matemáticas que organizara y diera sentido a la unión de los aportes de ambas teorías pero sin modificarlas. Por ello se elaboro un modelo de enseñanza-aprendizaje con el fin de exponer de manera ordenada las sugerencias metodológicas derivadas de las dos teorías en cuestión.

Debido a que toda propuesta metodológica proviene explícita o implícitamente de una noción de hombre y de educación, se

abordaran estos conceptos a partir de un análisis de la naturaleza de la persona humana.

De esta manera, en la primera parte del capítulo I se establece una noción de hombre y una de educación que posteriormente se contrastan con otras ideas que sobre los mismos conceptos se manifiestan en la Constitución y en el Programa para la Modernización Educativa.

En segunda instancia, y como parte del mismo capítulo, se aborda el tema de la didáctica, de la didáctica especial y de aquella enfocada a las matemáticas, con el fin de ubicar dentro de esta disciplina pedagógica la metodología que aquí se propone.

Este capítulo continúa con un análisis del significado de las matemáticas y de la geometría, así como de su importancia en la educación. Con esto se pretende dar una idea global sobre la trascendencia del aprendizaje de la geometría en la formación del niño, según las exigencias de su naturaleza.

En la última parte del capítulo I se elabora una reseña sobre las diversas teorías de aprendizaje existentes, y se explican las razones por las que se escogieron las teorías que sustentan este trabajo.

En el segundo capítulo se desarrolla la teoría psicogenética con el fin de conocer las bases del desarrollo cognoscitivo. Además de exponer la teoría, se explica el propósito fundamental de

Piaget, así como la trascendencia de todo su pensamiento en el ámbito de la epistemología. Las principales fuentes bibliográficas que se consultaron sobre este tema fueron: J. Piaget, Ginsburg, Richmond, Emma Castelnuovo y Copeland.

En el tercer capítulo se expone, por un lado, la teoría de Van Hiele, y por el otro, un modelo de enseñanza-aprendizaje elaborado con base en las ideas de Antonio Gago Huet. Dicho modelo provee de parámetros para vincular la teoría de Piaget con la de Van Hiele.

En el cuarto capítulo se analiza el programa de geometría para 3º de primaria (propuesto por la Secretaría de Educación Pública) de acuerdo a los parámetros anteriormente señalados. En esta sección también se contempla un análisis sobre los lineamientos generales que se proponen en relación a los objetivos de primaria.

La segunda parte del cuarto capítulo es una propuesta de objetivos y actividades con base en la teoría psicogenética y en la teoría de Van Hiele.

Finalmente, se enuncian conclusiones generales sobre la aplicación de ambas teorías al aprendizaje de la geometría.

C A P I T U L O I

TRASCENDENCIA DEL APRENDIZAJE DE LA
GEOMETRIA EN LA FORMACION DEL NIÑO

1. TRASCENDENCIA DEL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRIA EN LA FORMACION DEL NIÑO.

1.1 ANALISIS DEL CONCEPTO DE "HOMBRE".

Todo proceso educativo tiene que basarse en una concepción del hombre. Es menester conocer lo que es la persona humana para así poderla educar de acuerdo a su naturaleza y a su fin.

La persona humana es una "substancia individual de naturaleza racional". (1)

Es substancia porque es un ser que existe "en sí", es decir, no es un accidente cuya existencia sólo pueda darse en otra cosa.

El hombre es persona. Los términos "persona" e "individuo" hacen referencia a distintas realidades:

Individuo es el hombre físico, parte del universo, centrado en sí mismo y oponiéndose a todo otro individuo. La persona es el hombre espiritual, que trasciende al universo por su libertad, abierto a todo ser y capaz de entrar en comunión con las demás personas. (2)

(1) VERNEAUX, Roger.. Filosofía del hombre.. p. 232-234

(2) ibidem.. p. 233

La individualidad proviene del cuerpo. la personalidad, en cambio, proviene del alma. Pero no hay que olvidar que el hombre es cuerpo y alma. por lo tanto, es un "individuo de naturaleza racional" (3). es una persona. Tiene inteligencia y voluntad, lo cual le convierte en sujeto de deberes y derechos.

Las notas implícitas en el concepto de persona son:

a) Singularidad. la persona humana no solo se distingue de los demás en virtud de su separación real y diferenciación numérica, sino que también existen diferencias cualitativas que lo hacen ser quien es.

b) Autonomía. La persona es principio de sus acciones: su libertad le permite gobernarse a si mismo. Estas notas dan al hombre una dignidad que le hace sentirse sujeto. En tanto sujeto es una realidad distinta y superior a los objetos.

c) Apertura. El hombre tiene la necesidad y la posibilidad de comunicarse con otros y de convivir con ellos.

La capacidad de apertura se desarrolla en tres niveles:

1. Nivel objetivo. El hombre está abierto al mundo objetivo que le rodea y que le provee de los primeros estímulos necesarios para su desarrollo cognoscitivo.

(3) ibidem, p. 234

2. Nivel social. Para el desarrollo de su personalidad el hombre necesita convivir con otros sujetos.

3. Nivel trascendental. El hombre tiene la posibilidad de acceder a una vida religiosa gracias a su capacidad de preguntarse sobre la existencia de un Ser trascendente.

En virtud de que el hombre es un ser finito e incompleto, puede adquirir nuevas formas a través de la educación. Estas nuevas formas implican un perfeccionamiento.

1.2 CONCEPTUALIZACION DEL SIGNIFICADO DE "EDUCACION".

Vulgarmente, la educación se entiende como urbanidad y cortesía. Es decir, adquiere una connotación social y se considera como un resultado observable en las formas externas.

Etimológicamente, el término "educación" viene de las raíces latinas "educare" (conducir) y "educere" (sacar de, extraer): por lo tanto, indica un proceso de modificación interno e individual en el hombre.

Es así que el término "educación" implica proceso (origen etimológico) y resultado (origen vulgar): es decir, acción y efecto. Dado que el hombre es un ser imperfecto, el resultado o efecto de la educación debe ser una mayor perfección (característica que personas como Platón, Pestalozzi, Fröbel y Vinette, entre otros, han catalogado como inherente a la

educacion).

Pero esa perfección debe tener un parametro que la oriente. Ese parametro es la misma naturaleza del hombre, que le impone un fin. Por lo tanto, la educacion debe perfeccionar al hombre acercándolo a su fin, el cual está determinado por su naturaleza. Sin embargo, la naturaleza no guia por si sola al hombre hacia su perfeccionamiento. Este debe perfeccionarse de modo voluntario, intencional. La intencionalidad pone de manifiesto que la educacion se ordena hacia un fin preconcebido, un fin conocido por la inteligencia y querido por la voluntad. Además, "la educacion es un proceso intencional porque no se reduce a una evolucion psiquica o biologica". (4)

La educacion, a diferencia del adiestramiento, que se refiere al desarrollo de facultades psiquicas de orden inferior (funciones sensoriomotoras), hace referencia al perfeccionamiento de las funciones superiores del hombre (inteligencia y voluntad).

Resumiendo todo lo anterior, podemos concluir que la educacion es el "perfeccionamiento intencional de las potencias especificamente humanas". (5)

(4) GARCIA HOZ, Victor., Principios de pedagogia sistematica, p. 22-23

(5) ibidem, p. 25

Segun su significado vulgar, la educacion es "disponer adecuadamente a los hombres para la convivencia", y segun su significado más profundo, es un "desarrollo de las posibilidades de vivir como hombre", por lo que la educacion puede entenderse como "humanizacion de la vida". (6) Esto implica capacitar al hombre para satisfacer sus necesidades y desarrollar sus capacidades.

Habiendo ya analizado los requerimientos educativos de la persona humana, enunciaremos lo que algunas instancias de poder en Mexico consideran sobre la educacion (lo cual tambien infuirá en la enseñanza de la geometria).

En el Artículo 3o. Constitucional se establece que toda propuesta educativa debe propugnar por una educación nacional, democrática y científica que sea para todos los mexicanos un factor de bienestar social; subraya que la educación debe "proporcionar los elementos científicos y tecnológicos que permitan el conocimiento e interpretacion de los fenomenos naturales y sociales, así como posibilitar la participación consciente y responsable en todos los ambitos de la vida social del pais". (7)

(6) ibidem., p. 29-30

Como se puede apreciar, existe aquí un énfasis en el carácter social de la educación, y una inclinación por el conocimiento científico y tecnológico.

En el Programa de Modernización Educativa (1989-1994) se plantea que uno de los fines educativos que debe orientar el proceso de construcción de planes y programas es el siguiente:

"Desarrollar la capacidad de interpretación racional de los fenómenos sociales y naturales fundamentada en el conocimiento científico, la actitud crítica y autónoma y la opinión derivada del análisis y la reflexión, respetando la divergencia de juicios." (8)

Este objetivo educacional es congruente con el Artículo 38 Constitucional al orientar la educación hacia el conocimiento científico.

Los fines de la educación básica según "Los planes de estudio de la educación básica" de la Modernización Educativa (1989-1994) son:

(7) Los planes de estudio de la educación básica. Modernización educativa.. p. 9

(8) ibidem.. p. 10

- a) Fomentar el amor y el respeto al patrimonio y a los valores de la nación.
- b) Valorar el conocimiento y el desarrollo histórico, así como las manifestaciones culturales nacionales y regionales.
- c) Promover la solidaridad nacional y con otros pueblos del mundo, basada en la práctica de los derechos humanos, que conduzcan a la convivencia pacífica.
- d) Propiciar la práctica de la democracia como forma de vida que propicie el respeto a los derechos de los demás y la dignidad humana.
- e) Conocer el desarrollo de los distintos lenguajes como formas de comunicación humana.
- f) Adquirir las habilidades intelectuales que posibiliten la apropiación de las bases del conocimiento científico y tecnológico.
- g) Estimular las capacidades para la apreciación y expresión de las manifestaciones artísticas.
- h) Impulsar la formación para el aprovechamiento racional de los recursos naturales y la preservación del equilibrio ecológico.
- i) Fomentar el desarrollo de una conciencia crítica y responsable en la relación de los procesos socio-económicos, ambientales, culturales y políticos con la dinámica demográfica.
- j) Promover la formación de actitudes para la conservación y mejoramiento de la salud individual y social.

k) Adquirir las capacidades que favorezcan la formación del pensamiento reflexivo, crítico y creativo y la continuidad en el aprendizaje como proceso de autoformación.

Al hacer referencia a los fines de la educación, la modernización educativa se centra en las habilidades intelectuales útiles para adquirir el conocimiento científico y tecnológico, y se apoya en valores nacionales y de bienestar común. Lo que se indica en relación a la formación personal se refiere especialmente a aspectos intelectuales del desarrollo.

Existen elementos en el desarrollo individual y social que no se contemplan de manera explícita ni en la Constitución ni en la Modernización Educativa. Sobre este tipo de carencia Araujo afirma lo siguiente:

... no se ha prestado demasiada atención a una educación diversificada que tenga en cuenta verdaderamente las numerosas necesidades de los jóvenes y que aliente en ellos sentimientos de seguridad y de amor más que de ansiedad y de espíritu de competición.

(9)

(9) DEBESSE, Mialaret.. Las ciencias de la educación.. p. 46

Un curriculum y una metodología en matemáticas deben adecuarse, no solo, a los objetivos educacionales propuestos en la Modernización Educativa, sino también, a las exigencias educativas de la naturaleza humana. Es decir, debe promover el desarrollo de la inteligencia y de la voluntad. Es por ello que la metodología propuesta en el último capítulo, además de adecuarse a los lineamientos del Sistema Educativo Nacional, busca desarrollar las capacidades superiores del hombre con base en la teoría psicogenética y en la teoría de Van Hiele.

1.3 DIDACTICA

Las sugerencias metodológicas a las que se pretende llegar en este trabajo se encuentran dentro del ámbito de la didáctica.

No basta conocer bien un campo del conocimiento para enseñarlo bien. Es necesario además contar con técnicas de enseñanza adecuadas a las características de los alumnos (edad, intereses, habilidades, etc.). La didáctica centra su interés en cómo se va a enseñar y no en qué va a ser enseñado.

Etimológicamente, el término didáctica significa "arte de enseñar"; proviene del griego didaskein (enseñar) y tecne (arte).

(10)

(10) NERICI, Imideo.. Hacia una didáctica general dinámica.. P. 54

La didáctica es ciencia y arte de enseñar. Es ciencia porque, a partir de bases teóricas dadas por ciencias en las que se apoya la educación (psicología, filosofía, sociología, biología, etc.), investiga y experimenta nuevas técnicas de enseñanza. Es arte porque, con base en los datos científicos y empíricos de la educación, señala pautas de comportamiento didáctico. (11)

La "Didáctica" se puede definir como:

- a) "Disciplina pedagógica de carácter práctico y normativo que tiene por objeto específico la técnica de la enseñanza, esto es, la técnica de incentivar y orientar eficazmente a los alumnos en su aprendizaje". (12) Esta definición distingue a la didáctica de las otras disciplinas pedagógicas.
- b) "Conjunto sistemático de principios, normas, recursos y procedimientos específicos que todo profesor debe conocer y saber aplicar para orientar con seguridad a sus alumnos en el aprendizaje de las materias de los programas, teniendo en vista sus objetivos educativos". (13) En esta definición se describe su contenido específico.

La didáctica está orientada a la práctica, pues su principal objetivo es orientar la enseñanza. Y, dado que la enseñanza

(11) apud. idem

(12) MATTOS, Luiz A. de. Compendio de didáctica General. p. 24

(13) ibidem. p. 25

dirige el aprendizaje. "en ultima instancia, la didáctica está constituida por un conjunto de procedimientos y normas destinados a dirigir el aprendizaje de la manera más eficiente que sea posible". (14)

La didáctica científica tiene por finalidad deducir del conocimiento psicológico de los procesos de formación intelectual, las técnicas metodológicas más aptas para producirlos. (15)

La didáctica tiene como fin implícito el perfeccionamiento del que aprende.

Puesto que la didáctica aborda el proceso de enseñanza-aprendizaje, distingamos estos dos conceptos.

Aprendizaje:

El aprendizaje consiste en la modificación del comportamiento del alumno y en el enriquecimiento de su personalidad.

La esencia de aprender no consiste... en repetir mecánicamente textos de libros ni en escuchar con atención explicaciones verbales de un maestro.

(14) NERICI, Imideo.. op. cit... p. 54

(15) AEBLI, Hans.. Una didáctica fundamentada en la psicología de Jean Piaget.. p. 9

Consiste, eso sí, en la "actividad mental intensiva" a la que los alumnos se dedican en el "manejo directo de los datos de la materia", procurando asimilar su contenido y sus significados, encuadrándolos dentro de esquemas mentales definidos. (16)

Para Piaget, el aprendizaje va más allá de la simple memorización, pues implica modificación de las estructuras mentales en virtud de un proceso de adaptación.

Enseñanza:

"La enseñanza es la actividad que dirige el aprendizaje". (17)

La enseñanza planea, orienta y controla con técnicas adecuadas las experiencias de trabajo reflexivo de los alumnos.

1.3.1 DIVISION DE LA DIDACTICA

Considerando los aspectos generales aplicables a todas las materias, o bien, los aspectos particulares relativos a una sola disciplina, la didáctica se puede clasificar en didáctica general y didáctica especial.

(16) MATTOS, Luiz A. de .. op. cit... p. 35

(17) ibidem... p. 32

1.3.1.1 DIDACTICA GENERAL

La didáctica general estudia las condiciones más generales de la enseñanza con el fin de señalar principios, técnicas y procedimientos aplicables a cualquier materia o disciplina.

La acción didáctica en general consta de tres momentos. (18)

1. Planeamiento: se prevee la manera de alcanzar los objetivos.
2. Ejecución: puesta en práctica del proceso enseñanza-aprendizaje.
3. Verificación: evaluación de los resultados obtenidos a partir de la ejecución.

Estos tres momentos son analizados en el capítulo tres con base en un modelo de enseñanza-aprendizaje.

1.3.1.2 DIDACTICA ESPECIAL

La didáctica especial aplica las normas de la didáctica general a una disciplina específica.

Puede ser estudiada a partir de dos criterios: (19)

1. Según el nivel de enseñanza (primaria, secundaria o superior).

(18) apud.. NERICI. Imideo.. op. cit., p. 57

(19) idem

2. Según la enseñanza de cada disciplina (matemáticas, geografía, historia, ciencias naturales, etc.). Estudia la forma en que se aplican los principios de la didáctica general a cada materia.

El tema de este trabajo pertenece al ámbito de la didáctica especial. Nos ocupamos de un nivel de enseñanza en particular: 3º de primaria. La disciplina que nos interesa es la matemática, y dentro de ésta la geometría.

1.3.2 ELEMENTOS DE LA DIDACTICA

La didáctica analiza, integra y orienta seis elementos de la situación docente: el educando, el docente, los objetivos, las asignaturas, el método y el medio geográfico, económico, cultural y social.

"... didáctica no es sinónimo de metodología, la metodología estudia el "método en sí" y como tal es solo parte de la didáctica." (20)

A partir de la integración de la teoría psicogenética de Piaget con la teoría de Van Hiele se propone una metodología de enseñanza-aprendizaje y se abordan los seis elementos citados:

(20) MATTOS, Luiz A. de.. op. cit... p. 27

- a) el educando. desde un punto de vista psicológico. Se analizan los periodos del desarrollo cognoscitivo. así como los niveles de pensamiento en geometría.
- b) el docente. de acuerdo a su papel dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje en el área de las matemáticas.
- c) los objetivos (que son directrices de toda labor educativa por orientar hacia fines deseables específicos) derivan aquí de la integración de la teoría de Piaget y de la teoría de Van Hiele.
- d) la asignatura que se aborda es la geometría.
- e) Con base en lo anterior. se elabora un método de enseñanza-aprendizaje de la geometría en 3º de primaria. Aun cuando todo método está en parte condicionado por la lógica de la naturaleza de la materia. el método aquí propuesto está basado fundamentalmente en la psicología del alumno que realizará el aprendizaje.
- f) el medio está constituido por las condiciones geográficas. económicas. culturales y sociales en las que está inmerso un niño mexicano de 3º de primaria. Aun cuando estas condiciones no inciden directamente en la presente propuesta metodológica. sí influirán en su implementación.

1.3.3 DIDACTICA ESPECIAL DE LAS MATEMATICAS

La didáctica especial de las matemáticas estudia los factores que inciden en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, tanto en la educación regular, como en la educación especial. Es decir, analiza las condiciones didácticas más apropiadas para la educación matemática del alumno promedio, así como los procedimientos de apoyo para el estudiante con dificultades en el aprendizaje.

Ha sido una práctica común en la escuela primaria intentar "transmitir" al estudiante los conocimientos a través de "explicaciones" de conceptos "abstractos". Esto supone que el profesor, por el simple hecho de comunicar verbalmente contenidos educativos, logrará que el alumno los aprenda.

Por otro lado, se toma más en consideración la lógica de la materia que la psicología del alumno en el proceso de aprendizaje. Esto resulta en una tendencia a enseñar axiomáticamente las matemáticas, de tal suerte que la única tarea que tiene el alumno es memorizar y mecanizar. En la educación tradicional, se considera que el conocimiento es una "copia" del mundo, más no una "reconstrucción" del mismo.

La educación matemática no debe restringirse a procesos memorísticos y mecánicos, debe extenderse, en particular, hacia el desarrollo de la inteligencia y, en general, hacia el desenvolvimiento de la personalidad total. De esta manera, los

conocimientos podrán salir de la escuela para ser aplicados a problemas de la vida real.

Para ello, el profesor debe conocer, además de la estructura y los contenidos de su materia, los aspectos psicológicos del educando que influyen en su aprendizaje.

1.3.4 DIDACTICA ESPECIAL DE LA GEOMETRIA

La didáctica especial de la geometría estudia los procedimientos y las normas que promueven el aprendizaje eficiente de esta disciplina.

A partir de la investigación basada en elementos teóricos proporcionados por otras ciencias de la educación, se elaboran criterios sobre cómo planear, implementar y verificar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría

Antes de abordar las teorías sobre el desarrollo del pensamiento, se analizarán los conceptos de matemáticas y de geometría.

1.4 MATEMATICAS

1.4.1 ANALISIS DEL SIGNIFICADO DE LAS "MATEMATICAS".

Las matemáticas son una creación arbitraria de la mente humana, mas no algo que exista por si mismo en la naturaleza.

Para Bertrand Russel, las matemáticas son "la ciencia de la que nunca sabemos a que nos referimos ni si lo que decimos es cierto".

La esencia y el significado de las matemáticas han ido cambiando de acuerdo al desarrollo de esta disciplina a lo largo de la historia.

Los pilares de las matemáticas de la Antigüedad fueron la aritmética (ciencia de los números) y la geometría (ciencia de las formas y de las relaciones espaciales). A través de los siglos la aritmética se amplió con el álgebra, que dispuso una notación abreviada para resolver los problemas en el supuesto de que hubiese cantidades desconocidas. En el siglo XVII, la aritmética y el álgebra se unificaron con la geometría en la "geometría analítica", la cual introdujo una técnica para representar los números como puntos en un diagrama, para convertir las ecuaciones en formas geométricas y para convertir las formas geométricas en ecuaciones. El enfoque analítico de esta nueva geometría abrió el camino a disciplinas de matemáticas superiores resumidas en una palabra: "análisis".

En la época actual, los geómetras están alcanzando una abstracción todavía mayor a través de la "topología", el "arte de analizar aquellas propiedades de una forma que permanecen inalteradas después de que esta se ha contraído, alargado o retorcido." (21)

Son muchas las discusiones sobre el significado de las matemáticas, pero adoptaremos la siguiente definición: "ciencia de las relaciones cuantitativas y de las formas espaciales en el mundo real" (22). Esta definición se irá expandiendo constantemente en contenido, pues los requerimientos internos de las matemáticas, así como las nuevas necesidades de la tecnología y de las ciencias naturales, van influyendo en que esta definición incorpore elementos tales como: la total diversidad de formas de espacios de cualquier número de dimensiones.

1.4.2 TRASCENDENCIA DE LAS MATEMÁTICAS Y DE SU ENSEÑANZA

En el Observatorio Nacional de Radio en Green Bank, Virginia Occidental, se colocaron antenas en dirección a dos estrellas muy lejanas: Tau Cita y Epsilon Eridani, a fin de escuchar "bips" matemáticamente organizados. Tal esfuerzo muestra la

(21) BERGAMINI, David.. op. cit... p. 12

(22) "Mathematics": Encyclopaedia of Mathematics.. p. 148

universalidad de las matemáticas. En consecuencia, no resulta extraño que muchos de los grandes pensadores de la humanidad hayan señalado que las matemáticas encierran la verdad absoluta. Platon afirmó que "Dios siempre hace geometría"; Carl Gustav Jacob Jacobi dijo en el siglo XIX que "Dios siempre hace aritmética". En el siglo XX, el físico británico sir James Jeans declaró que: "El Gran Arquitecto del Universo empieza ahora a revelarse como un matemático puro". (23)

A pesar de que los matemáticos consideran que esta disciplina es universal, hay quienes niegan que posea categoría de verdad absoluta.

Más que ser un cuerpo de conocimiento, las matemáticas son un tipo de lenguaje, tan perfecto y abstracto que se supone pueda ser comprendido por seres inteligentes en todo el universo. Su gramática son las reglas de la lógica. Su vocabulario son símbolos tales como: cifras para los números; letras para los números desconocidos; "ecuaciones para las relaciones entre números, símbolos para realizar operaciones, etc." (24)

Todos estos símbolos apoyan muchísimo al científico, pues le ayudan a abreviar su pensamiento. Sin embargo, para quienes no

(23) BERGAMINI, David.. Matemáticas.. p. 9

(24) GINSBURG, Herbert v OPPER, Sylvia.. Piaget's theory of intellectual development. An introduction.. p. 176

conocen mucho sobre matemáticas. éstas parecen, más que una lengua universal, una barrera lingüística entre dos culturas.

Las matemáticas pueden relacionarse tanto con la filosofía, la economía, la estrategia militar, la composición musical, la física atómica, la perspectiva artística y los juegos de salón. Todas estas relaciones hacen que quien verdaderamente conoce sobre matemáticas las ame con gran efusión.

Por su aspecto estético y su falta de vinculación con la práctica, las matemáticas puras pueden parecer lo más absurdo. Sin embargo, incluso algunas ramas de las matemáticas que eran consideradas inútiles han adquirido radical importancia para los industriales, los estrategas militares y los planificadores del gobierno. "Nuestra civilización no existiría sin las leyes físicas y las técnicas intelectuales desarrolladas como producto de la investigación matemática." (25)

Vito Volterra sustentó en su discurso de apertura de la Universidad de Roma en 1901 lo siguiente:

Es necesario hacer comprender que el matemático se encuentra en posesión de un instrumento admirable y precioso, creado por los esfuerzos acumulados en el largo transcurso de los siglos por los ingenios más

(25) BERGAMINI, David.. Matemáticas.. p. 10

agudos y por las mentes más sublimes. Aquí tenemos, por decirlo así, la llave que puede abrir el camino, a muchos misterios oscuros del universo, y un medio para resumir en pocos símbolos la síntesis que abarca y liga vastos y dispersos resultados de ciencias diversas.

(26)

En las "matemáticas clásicas", nombre que se da a las matemáticas que se estudiaban a principios de siglo, se ponía el énfasis en cada uno de los capítulos de las matemáticas (aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, etc.) y en sus elementos-base (los números, el punto, la recta, etc.).

Se le ha llamado "matemáticas modernas" a aquellas cuyo fundamento son las leyes operatorias que gobiernan esos capítulos. Tales leyes se consideran como sistemas de reglas -axiomatización-. Por lo que la axiomatización es la base de las matemáticas modernas.

Retomando la analogía que hace Emma Castelnuovo (27), los capítulos de las matemáticas son sus "palacios", y la axiomatización son sus "leyes arquitectónicas".

(26) CASTELNUOVO, Emma.. Didáctica de la matemática moderna.. p. 12

(27) apud.. CASTELNUOVO, Emma.. op. cit... p. 37

El análisis sobre las matemáticas y su historia puede no ser comprendido por los alumnos, pero los profesores lo deben conocer y comprender para tener un criterio más amplio en relación a la dirección de la enseñanza y a la interpretación de los problemas.

Las crisis que ha ido sufriendo la matemática afecta con sus consecuencias a los educandos y a toda la humanidad. Por eso es conveniente que se hable a los educandos de las vicisitudes históricas para que comprendan lo difícil del camino de los descubrimientos y lo largo del camino para construir una ciencia.

Y démonos cuenta también -es la experiencia adquirida en la clase la que nos dará la razón-, que son propias de las cuestiones tan profundas que, apasionando a los niños por "las cosas más grandes que ellos", operan una maduración intelectual y aceleran el paso de lo concreto a lo abstracto, típico del período de la preadolescencia. (28)

Por lo tanto, si por lo menos el maestro tiene una idea de las vicisitudes históricas de las matemáticas, transmitirá al alumno mensajes que le harán comprender que no se trata de una ciencia ya acabada en relación a la cual únicamente debe aprender conceptos y fórmulas ya hechas (y por lo general memorísticamente). El alumno comprenderá entonces su papel

(28) ibidem, p. 46

activo en el aprendizaje de las matemáticas apasionándose por la construcción de una ciencia a la cuál él podría llegar a hacer aportaciones.

Las matemáticas son una ciencia adecuada para fomentar en el niño el espíritu creativo que tanto hace falta en la actualidad debido a la existente masificación. Por otro lado, desarrolla el análisis lógico en las personas.

"Las matemáticas deben ser entendidas más como un hábito mental que como una suma de conocimientos." (29)

Esto implica que las matemáticas, lejos de reducirse a repeticiones verbales o mecánicas, deben desarrollar habilidades mentales.

En última instancia, las matemáticas deben constituir un instrumento aplicable a los problemas cotidianos:

La lógica del pensamiento matemático "se hace aplicable a una mayor cantidad de problemas que los meramente matemáticos, si la estudiamos en relación con las situaciones propias de la vida diaria". (30)

Los conceptos matemáticos deben encontrar su máxima aplicación en la solución de problemas.

(29) ibidem.. p. 10

(30) HOWARD F., Fehr.. Enseñanza de la matemática.. p. 10

Si en la actualidad alguien dudara del valor y del significado de la enseñanza de las matemáticas, bastaría responderle con las palabras de Gaetano Scorza: "Las matemáticas son bellas y esto basta." (31)

Una metodología apropiada en la enseñanza de las matemáticas debe evitar los siguientes efectos:

- aburrición.
- encontrar demasiado difícil las matemáticas.
- crear la idea de que las matemáticas se reducen a mecanismos, que son una construcción perfecta y terminada. (32)

1.4.2.1 El mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas a nivel internacional

La preocupación por mejorar la enseñanza de las matemáticas se da a nivel internacional. Los esfuerzos conjuntos de mayor trascendencia han surgido en este siglo.

A partir de 1908 se han creado organizaciones para coordinar esfuerzos a nivel mundial en la enseñanza de las matemáticas.

(31) G. Scorza. Essenza e valore della matematica... Catania. Circolo Matematico. 1921

(32) CASTELNUOVO. Ensa. op.cit.... p. 9. 10

cas: (33)

1908: se crea la "Comisión Internacional de Enseñanza Matemática" en el IV Congreso Internacional de Matemáticos.

1952: esta comisión se convirtió en una sección de la "Unión Matemática Internacional".

1950: nace la "Comisión Internacional para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas", cuyos fundadores fueron G. Choquet, J. Piaget y C. Cattegno (un matemático, un psicólogo y un pedagogo).

Actualmente existen otros grupos dedicados al mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas (34). Cualquier cambio que se realice en el programa y en los métodos de enseñanza de las matemáticas en nuestro país debe considerar los resultados a los que han llegado estos grupos.

Aun cuando la matemática es un campo de estudio muy antiguo y desde hace mucho tiempo se ha dado gran importancia a la enseñanza de las matemáticas, no ha sido sino hasta hace 25 o 30

[33] apud. ibidem., p. 46

[34] Existen asociaciones profesionales tales como International Commission on Mathematical Instruction, Special Interest Group in Mathematics Education, Psychology in Mathematics Education, International Group for the National Council of teachers of Mathematics, Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas.

años que se ha desarrollado un Área de estudio denominada "educación matemática". y justamente, uno de los campos que estudia la educación matemática son los "niveles de pensamiento en el estudio de la geometría".

Freudenthal (1978) afirma que todavía no existe una ciencia de la educación matemática. Sin embargo, si existe una red internacional de investigadores, y practicantes de la educación matemática... prueban y refinan los marcos conceptuales correspondientes, los modelos, instrumentos de medición, etc. Estos investigadores se reúnen y prestan trabajos en foros especializados tales como congresos y simposios de educación matemática. (35)

Ahora bien, conozcamos la noción que sobre las matemáticas se tiene en México.

1.4.2.2 Concepción de las matemáticas de primaria en México

Con base en el Programa de Modernización Educativa encontramos las siguientes concepciones:

Matemáticas de primaria: se presenta como espacio de

(35) FLORES, Alfino.. ¿Que es la educación matemática?.. p. 75

sistematización de 19 a 69 grados.

De acuerdo a la Modernización Educativa, el tratamiento sistemático permitirá que el alumno desarrolle progresivamente los procesos cuantitativos y relacionales del pensamiento y las habilidades intelectuales de flexibilidad, reversibilidad y memoria generalizada para la interpretación, análisis y reflexión de los problemas cotidianos que se le presenten.

Las matemáticas constituyen todo un lenguaje que permite al educando expresarse mediante simbología propia.

Como la Lengua Nacional, llamada en otro momento Español, las Matemáticas son instrumentos indispensables para la adquisición de nociones y conceptos de otros campos de estudio.

1.5 GEOMETRIA

1.5.1 EL PAPEL DE LA GEOMETRIA EN LA EDUCACION

1.5.1.1 ¿Qué es la geometría?

"Geometria" es una palabra griega que significa "medición de la tierra" (36) y fue utilizada por Herodoto, quien relata que en el antiguo Egipto la gente uso la geometria para restaurar su tierra despues de la inundacion del Nilo.

(36) "Geometria". Enciclopedia Matemática.. p. 591-592.

Lo que se entiende por geometría ha ido variando con el tiempo. (37) Probablemente, la geometría inició antes que la historia escrita, como una acumulación de ideas subconscientes sobre el espacio físico y las formas (geometría subconsciente). Posteriormente, pasó a ser una colección de reglas empíricas, basadas en la inducción y en el método empírico (geometría científica).

En el siglo VI a.C. los griegos introdujeron el método deductivo en la geometría, gracias a lo cual tuvo un desarrollo axiomático (geometría sistemática).

A principios del siglo XVII surgió la geometría analítica, que veía al espacio como una colección de puntos. En el siglo XIX se inventaron las geometrías no euclidianas, que concebían la existencia de más de un espacio y, por lo tanto, más de una geometría.

Actualmente, la noción de geometría es tan extensa que resulta difícil distinguir sus bordes con otras ramas de la matemática. Está estrechamente vinculada con el álgebra. Las interpretaciones de tipo geométrico esclarecen muchos conceptos matemáticos. Es por ello que algunos matemáticos del siglo XX han optado por no considerar a la geometría como un cuerpo

(37) apud. EVES, Howard., Estudio de las Geometrías. p. 433-436

independiente, sino como un "punto de vista". El lenguaje de la geometría, por ser simplificador y elegante, economiza el pensamiento y la comunicación de las ideas.

... la intuición geométrica puede sugerir lo que es importante, accesible e interesante, y puede, a su vez, orientar al matemático y evitar que se pierda en un desierto de problemas, ideas y métodos. (38)

Bertrand Russel ve la geometría como un rama estrictamente deductiva de la matemática pura, y la define como "el estudio de series de dos o más dimensiones". (39)

El término "geometría" en el uso cotidiano significa "la rama de las matemáticas que trata con las figuras espaciales" (40).

(38) PIAGET, J. et. al... La enseñanza de las matemáticas modernas.. p. 300

(39) RUSSELL, Bertrand.. Los principios de la matemática.. p. 424

(40) "Geometría". Enciclopedia Matemática.. p 591-592 matemática en Sevres, Francia, en 1957. (41)

1.5.1.2. Una tendencia en la educación de la geometría

En las últimas décadas ha existido un interés creciente por la enseñanza de la geometría. Tradicionalmente, se enseñaba de manera axiomática, sin embargo, los resultados obtenidos no eran los esperados. De esta manera, diversos países se han preocupado por hacer innovaciones en esta área:

Los soviéticos han realizado cambios innovadores en su currículo de geometría basándose en una investigación rusa inspirada por dos psicólogos y educadores. El primero es Jean Piaget y el segundo es P.M. Van Hiele, un educador holandés, cuyo trabajo sobre el papel de la intuición en el aprendizaje de la geometría atrajo la atención de los soviéticos después de haber dado a conocer una disertación intitulada "El pensamiento del niño y la geometría" en una conferencia de educación matemática en Sevres, Francia, en 1957. (41)

1.5.1.3 Importancia de la educación en geometría en el niño de 3º de primaria

La educación en geometría es una parte importante en el currículo del niño de kindergarten a cuarto de primaria por dos razones:

(41) FUYS, David, et. al., The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents., p. 4

- a) desarrolla en el estudiante un sentido espacial.
- b) le proporciona los elementos necesarios para desarrollar niveles más altos de pensamiento en geometría: se trata de elementos "esenciales para modelar problemas matemáticos y estudiar pruebas geométricas" (42).

Los niños que desarrollan fuerte sentido de las relaciones espaciales y que dominan los conceptos y en lenguaje de la geometría están mejor preparados para aprender nociones del número y de la medición, así como también otros temas avanzados de matemáticas. (43)

Un estudio realizado por Usiskin en 1982 (44) reveló que la instrucción sistemática en geometría antes de la secundaria es necesaria para asegurar el éxito posterior del estudiante en un curso tradicional de geometría.

La geometría ayuda al alumno a esquematizar geoméricamente las situaciones reales.

(42) TEPO. Anne.. Van Hiele levels of geometric thought
revisited.. p. 215

(43) NCTM 1989.. p. 48

(44) apud.. TEPO. Anne. op. cit... p. 215

1.5.2 LAS TEORIAS DEL APRENDIZAJE Y LA GEOMETRIA

La enseñanza y el aprendizaje de la geometria han de basarse en una teoria del aprendizaje que fundamente todo el proceso educativo.

1.5.2.1 ¿Qué es una teoria del aprendizaje?

"En el sentido más amplio, una teoria es una interpretación sistemática de un área del conocimiento." (45)

De la investigación educativa se concluyen leyes del aprendizaje que requieren ser integradas en teorias.

Una teoria del aprendizaje reúne tres consideraciones:

- 1) "es un enfoque de un área del conocimiento, una manera de analizar, de discutir y de hacer investigación sobre el aprendizaje". (46)
- 2) "una teoria del aprendizaje es un intento de resumir una gran cantidad de conocimientos acerca de las leyes de aprendizaje en un espacio relativamente pequeño". (47)

(45) HILL, Winfred F., Teorias Contemporáneas del aprendizaje, p. 40

(46) idem

(47) idem

'3) "una teoria del aprendizaje es un intento creativo de explicar que es el aprendizaje y por qué actúa como lo hace". (48)

Este tipo de teorías son interpretaciones psicológicas del aprendizaje que se han desarrollado paralelamente a los estudios experimentales del mismo.

1.5.2.2 Clasificación de las teorías del aprendizaje

Las teorías del aprendizaje han sido clasificadas en dos tipos de teorías: conexionistas y cognitivas.

Las teorías conexionistas del aprendizaje consideran que el aprendizaje es el resultado de conexiones entre estímulos y respuestas. Estas conexiones pueden denominarse hábitos, nexos de estímulo-respuesta o respuestas condicionadas.

Las teorías cognitivas estudian las cogniciones (percepciones y/o actitudes y/o creencias) que se tienen sobre el medio ambiente, así como la forma en que dichas cogniciones afectan la conducta. Se considera que el aprendizaje son cambios en las cogniciones desencadenados por la experiencia.

(48) idem

1.5.2.3 La teoría psicogenética de Piaget y la teoría de Van Hiele

La teoría psicogenética de Piaget pertenece a la segunda clasificación, pues no conceptúa el aprendizaje como la conexión de un estímulo con una respuesta, sino como el desarrollo de estructuras cognitivas.

Esta teoría ha sido elegida para el tratamiento de la educación en geometría por las siguientes razones:

- a) Lejos de restringirse al análisis del ámbito intelectual, integra en una totalidad el desarrollo psicomotriz, el intelectual y el socio-afectivo.
- b) Relaciona al sujeto con su medio (a través de un proceso de equilibración y adaptación).
- c) La teoría de Piaget hace referencias concretas al desarrollo de nociones matemáticas y, en especial, al desarrollo de nociones espaciales.

Por otro lado, la teoría de Van Hiele también pertenece al segundo tipo, pues estudia aspectos cognitivos en el desarrollo del pensamiento en geometría. Sin embargo, no es una teoría general del aprendizaje, ya que se enfoca específicamente a la geometría proponiendo niveles de pensamiento.

C A P I T U L O I I

LA TEORIA PSICOGENETICA
DE PIAGET

2. LA TEORIA PSICOGENETICA DE PIAGET

Comprender la teoría psicogenética requiere comprender las inquietudes que encuazaron su creación. Esto, a su vez, exige conocer las motivaciones intelectuales más profundas de Piaget, inquietudes que resultan de un gran número de experiencias.

En consecuencia, entender la teoría de Piaget implica conocer, en primera instancia, su biografía.

2.1 BIOGRAFIA DE PIAGET

Jean Piaget nació en 1896 en Neuchâtel, Suiza. Su padre fue un historiador especializado en literatura medieval, y su madre una mujer dinámica, inteligente y religiosa.

Desde pequeño mostró un gran interés por la naturaleza. A los once años publicó su primer artículo en una revista de historia natural. En ese artículo describió un gorrión albino que observó en el parque. Poco después entró como ayudante del director de un museo de historia natural en Neuchâtel colaborando en la clasificación de la colección de zoología. Estudió a los moluscos. De los 15 a los 18 años publicó una serie de artículos sobre los crustáceos. Uno de los artículos que escribió a los 15 años fue motivo para que le ofrecieran el puesto de encargado de la colección de moluscos en el museo de historia natural de Ginebra. Piaget no pudo aceptar esta oferta debido a que aún tenía que terminar la secundaria.

Piaget se interesó también por la filosofía, la religión y la lógica. Le interesaba encontrar las respuestas a preguntas como: ¿Qué es el conocimiento? ¿Cómo se adquiere? ¿Se puede tener un conocimiento objetivo de la realidad externa, o el conocimiento que uno tiene del mundo está influenciado por factores internos? Piaget consideraba que las respuestas que daba la filosofía eran demasiado especulativas y que las de la ciencia eran demasiado factuales. Para Piaget, lo que se necesitaba era la unión de ambas.

En la adolescencia, Piaget se interesó por la biología y la epistemología. Había un gran abismo entre estas ciencias: la biología se dedicaba a la vida y tenía métodos científicos, mientras que la epistemología se enfocaba al conocimiento y usaba métodos especulativos. Piaget quería encontrar un puente de unión entre ambas: quería investigar los problemas del conocimiento usando el método científico de la biología.

En 1916 se graduó en ciencias naturales y en 1918, a los 21 años, obtuvo el doctorado con una tesis sobre moluscos.

En Zurich trabajó en los laboratorios psicológicos y en la clínica psiquiátrica de Bleuler, donde entró en contacto con el psicoanálisis y con las ideas de Freud, Jung y otros. En 1920 publicó un artículo sobre las relaciones entre el psicoanálisis y la psicología del niño.

De 1921 a 1923 estudió psicología anormal, lógica, epistemología

v filosofía de la ciencia en la Sorbona.

En 1920 aceptó un puesto con el Dr. Theophile Simon en el Laboratorio Binet en París, donde tenía que estandarizar versiones francesas de tests de razonamiento ingleses.

Piaget se dio cuenta de que aun cuando en los tests de inteligencia lo que se consideraba era la habilidad del niño para dar respuestas correctas, las respuestas incorrectas eran mucho más interesantes. Encontró un nuevo método (el método clínico) para estudiar la inteligencia dejando que las respuestas de los niños determinaran el curso de las preguntas.

Mientras usaba el método clínico para estudiar el pensamiento infantil, leía sobre lógica y se le ocurrió que la lógica abstracta podría ser útil en el estudio del pensamiento del niño. El método clínico revisado, que es el que utiliza en la segunda parte de su trabajo (a partir de 1940), tiene como características: 1) Las preguntas del examinador se refieren a objetos concretos o eventos que el niño tiene frente a sí; va el niño no tiene que imaginar estas cosas únicamente a partir de la descripción verbal. 2) Se le permite al niño dar su respuesta apoyándose en la manipulación de objetos y no tiene que expresarse solo a través del lenguaje.

Trabajando en el laboratorio de Binet, Piaget concluyó que la psicología podría aportar el puente de unión entre la biología y

la epistemología. Entonces decidió estudiar la evolución del conocimiento en el niño. para después aplicar los resultados a la solución de problemas teóricos.

En 1950 Piaget llevó a cabo su proyecto de escribir una epistemología genética. en la que incluyó su "Traité de Logique". donde exponía las relaciones entre las estructuras formalizadas de la ciencia matemática clásica y las estructuras naturales del pensamiento del niño y del adolescente.

De 1920 a 1940 Piaget se interesó por problemas que el niño enfrenta en su ambiente natural. tales como el juicio moral. la comunicación verbal o el encontrar un objeto detrás de un obstáculo. Posteriormente. su trabajo versó sobre la comprensión que el niño tiene acerca de conceptos filosóficos. matemáticos e ideas científicas como espacio. tiempo. causalidad. velocidad. correspondencia biunívoca. y nociones similares. En este segundo periodo se enfocó al desarrollo de los sistemas matemáticos que tratan de explicar la estructura del pensamiento infantil.

Su interés por la biología influyó en que definiera la inteligencia en términos de crecimiento. etapas. adaptación. equilibrio. y factores similares.

La teoría de Piaget recibe el nombre de "Epistemología Genética".

2.2 PROPOSITO FUNDAMENTAL DE PIAGET

El proposito fundamental de Piaget no era investigar los procesos de pensamiento del niño, aun cuando dedico a esto 45 años de su vida. Su principal objetivo era elucidar problemas epistemológicos. Piaget se formulaba preguntas como: ¿adquirimos el conocimiento a través del razonamiento o de la experiencia con el mundo externo?. ¿cómo se relacionan los componentes subjetivos y objetivos del conocimiento (es decir, la persona y el medio ambiente)?. ¿existe una diferencia entre lo que las cosas parecen ser y lo que realmente son?

Para el logro de su objetivo, Piaget se cuestionó si utilizaría el método de la ciencia o el de la filosofía.

Para Piaget habian dos criterios de distinción entre la ciencia y la filosofía: el objeto de estudio y la metodología.

a) La filosofía estudia muchos aspectos de la realidad simultáneamente para llegar a una noción del lugar del hombre en el mundo y su finalidad en la vida. El principal método para lograr este conocimiento es la reflexión. El filósofo observa diversos aspectos de la realidad, los evalúa y, a partir de un proceso de pensamiento especulativo, adopta una posición filosófica. Este acercamiento a la realidad es general y subjetivo. Es general porque abarca muchas manifestaciones de la vida, y es subjetivo porque las conclusiones alcanzadas son el resultado de la reflexión del

filosofo. Por lo tanto, el ámbito de estudio de la filosofía es demasiado amplio y sus métodos demasiado falibles. Cada filósofo o escuela filosófica tiene ciertas premisas pero no tiene un método objetivo para evaluarlas. En consecuencia, las distintas escuelas filosóficas no tienden a estar en acuerdo.

- b) La ciencia se limita al estudio de un campo restringido de fenómenos. No obtiene sus conclusiones a partir de la introspección ni de la reflexión, sino con base en métodos objetivos de observación y de recolección de datos. Al restringir su ámbito a los aspectos observables de la realidad, la ciencia busca reducir la influencia de factores subjetivos. De esta manera es más fácil llegar a consensos, al menos en relación al ámbito estudiado.

Debido a que cada vez un mayor número de problemas filosóficos son investigados con el método científico, es difícil determinar los límites que separan a la ciencia de la filosofía. Un ejemplo de esto es la psicología.

Piaget extrajo la epistemología de la filosofía y le dio un método científico.

Piaget se preguntó si sería conveniente aplicar el método científico al estudio de la adquisición de los conocimientos científicos. Observó que existen tantas formas de conocimiento

como disciplinas científicas. Cada una está constituida por conceptos específicos cuya elaboración él quería analizar. De esta manera la epistemología genética se veía dividida para así estudiar el incremento de los diversos conocimientos y no el conocimiento absoluto.

El conocimiento atraviesa por un largo periodo de evolución en el individuo y en la sociedad. Se debe estudiar el desarrollo del conocimiento en ambos niveles. Por lo tanto, para resolver los problemas epistemológicos se necesita tanto de un estudio genético del niño como de un estudio histórico del conocimiento.

Piaget abordó estos problemas dentro de un marco tanto biológico como psicológico. Para estudiar la adquisición individual del conocimiento, Piaget pensó en términos de embriología: con el desarrollo, las estructuras mentales adquieren formas cualitativamente distintas, pero al mismo tiempo mantienen cierta continuidad dado que cada una evoluciona a partir de estructuras previas. Piaget también se interesó en relacionar el incremento del conocimiento en el individuo con el incremento del conocimiento en la sociedad. Esto es análogo a la comparación del desarrollo de las especies (filogénesis) con el desarrollo del individuo (ontogénesis).

Para reconstituir históricamente la evolución de las nociones de una ciencia se requiere un método histórico-crítico. Este método solo puede estudiar la evolución de una ciencia en tanto producto

de mentes adultas que, como tales, ya poseen ciertas operaciones mentales. Sin embargo no puede estudiar las etapas iniciales ni el origen de dichos conceptos.

Por lo tanto, el método histórico crítico sería una segunda parte de la epistemología genética, que debe complementarse con un método psicogenético que estudie el desarrollo de la inteligencia en el niño.

Mientras que los métodos filosóficos tienden a resultados absolutos, la epistemología genética obtendría resultados relativos, propios del conocimiento científico, puesto que la ciencia está en constante evolución.

Para que el método genético alcanzara tales resultados absolutos, se tendría que suponer como conocido el estado final de todos los conocimientos posibles, lo cual solo podría suceder si el espíritu fuera coextensivo con la realidad.

En breve, Piaget utilizó la información sobre desarrollo cognitivo del niño y sobre el desarrollo histórico de la cultura con el fin de entender la naturaleza del conocimiento individual y del conocimiento social.

2.3 LA TEORIA DE PIAGET

La epistemología genética se define como el estudio del origen del conocimiento del mundo externo a través de los sentidos.

El metodo psicogenetico trata sobre el desarrollo individual de ciertas nociones científicas tales como el espacio, el numero. o el tiempo. desde su aparición hasta la etapa en que estas nociones adquieren sus formas más maduras.

El metodo historico critico es consiste en un análisis del pensamiento colectivo en relación a un conjunto de nociones de un campo determinado durante un periodo de tiempo. Después de analizar el desarrollo histórico de una noción particular. Piaget trata de buscar algún paralelo entre la adquisición individual del conocimiento y el desarrollo del conocimiento colectivo.

Un ejemplo de esto lo encontramos en el campo de las matemáticas. P. Boutroux analizó la evolución del pensamiento matemático desde el periodo griego hasta el presente y encontro que esto se puede dividir en tres periodos (con los cuales Piaget esta de acuerdo):

1. El primer periodo comienza con los griegos. cuando la mayor parte de las matemáticas era en esencia la aritmética y lo que ahora llamamos geometría Euclidiana. Las matemáticas de aquel tiempo se concentraban en las formas geométricas. o en la configuración espacial más que en las operaciones que sustentaban esas formas. Tales matemáticas. preocupadas más por los resultados de las operaciones que por las operaciones mismas. resultaban ser bastante estériles. La atención se centraba en la realidad conocida. Para Piaget, este periodo puede ser comparado con la etapa de pensamiento preoperacional en el niño. En este

periodo el niño puede realizar ciertas acciones y descubrir algunos atributos de objetos y figuras. Reconoce algunas formas geométricas. Puede establecer la relación espacial de objetos, y puede realizar ciertas transformaciones en su ambiente. Sin embargo, no es consciente de su actividad mental o motora. Al igual que los matemáticos griegos, es capaz de comprender ciertos aspectos de la realidad, pero no se preocupa sobre cómo interactúa con su ambiente.

2.- El segundo periodo en la historia del pensamiento matemático se dio en el siglo XVII. Se descubrieron el álgebra y la geometría analítica. Los matemáticos ya no centraron su atención en el resultado de las operaciones matemáticas (la cosa conocida), sino en las operaciones mismas (cómo se obtiene este conocimiento). En sus primeras etapas, la geometría analítica se usaba para dar pruebas alternativas a los problemas que los griegos habían estudiado. Estas pruebas eran mejores. Las pruebas euclidianas, aunque lógicas y elegantes generalmente se descubrían al azar. Por el contrario, la geometría analítica las abordaba de manera ordenada reduciendo todos los problemas de Euclides a problemas algebraicos. Este periodo corresponde al periodo de operaciones concretas del niño, durante el cual, además de poder clasificar las cosas, ordenarlas, o realizar en ellas una serie de operaciones mentales, también está consciente de las transformaciones que realiza sobre los objetos. El niño va no se centra en los estados finales de la realidad, sino que

también considera las transformaciones u operaciones. El niño está más consciente de su trabajo mental, lo que le facilita comprender y controlar situaciones concretas difíciles.

3.- El tercer periodo comenzó a finales del siglo XIX. Los griegos eran muy selectivos al escoger los objetos matemáticos que iban a estudiar, pues tendían hacia los que eran intuitivamente atractivos (debido a ello siempre les disgustó el valor de x : 3.1415926535). En el niño esto se puede comparar con el periodo de operaciones formales. Aquí el adolescente está más consciente de su poder de operar en las cosas tanto a nivel concreto como abstracto. La realidad se vuelve un caso de lo posible. No sólo se interesa en los resultados reales de un experimento, sino también en las posibilidades y en las generalizaciones a las que puedan llevar.

Así como el desarrollo intelectual del niño comienza con un periodo de egocentrismo, caracterizado por un pensamiento fenomenalístico que se concentra en los aspectos superficiales o periféricos de la realidad, también la historia del pensamiento matemático parece ser en un principio egocéntrico. Tanto en el pensamiento individual como en el colectivo, el periodo inicial se caracteriza por una falta de conciencia sobre los aspectos más profundos y sutiles de la realidad y de las complejidades del pensamiento y de la actividad mental. Gracias a un proceso gradual de descentración se va produciendo una conciencia más profunda y objetiva de la realidad externa y de la interna. El

individuo. en su desarrollo intelectual. atraviesa por varios periodos: sensorio-motriz (0-2 años). preoperacional (2-7 años). operacional concreto (7-11 años) y operacional formal (11 años en adelante).

Piaget observó que a menudo la ontogénesis o desarrollo individual. recapitula la sociogénesis o desarrollo colectivo.

Por otro lado. tanto la ontogénesis como la sociogénesis estudian el origen del conocimiento a partir de una relación sujeto-objeto.

El problema epistemológico de la relación sujeto-objeto ha sido discutido en el ámbito filosófico por racionalistas y empiristas:

a) Los racionalistas creen en la capacidad inherente del intelecto humano de aprehender el mundo. Un ejemplo de esto es Kant. quien analiza las categorías a priori del entendimiento. Se considera que la realidad externa juega un rol secundario puesto que el sujeto cognoscente le impone sus propias estructuras.

b) Por otro lado. los empiristas sobrevaloran el papel de la experiencia en la relación sujeto-objeto. Consideran que el conocimiento se origina a partir de la experiencia sensible con el mundo. El sujeto reproduce en su mente una copia de los objetos existentes. Su papel es pasivo. pues se reduce a descubrir el mundo externo a través de los sentidos. A esta

postura se adhiere Watson, quien hace referencia a la tábula rasa, en la que se plasman las impresiones del ambiente. Por lo tanto, la realidad externa juega un rol predominante en el conocimiento.

Cada una de estas dos posturas tiene implicaciones distintas para la educación.

La postura racionalista supone que hay un conocimiento pre-existente y por lo tanto, no se requiere del mundo externo para aprehenderlo.

Por su parte, la postura empírica supone que el conocimiento se origina a partir de lo que captan los sentidos cuando se exponen al mundo externo. La maduración o los contenidos cognitivos previos del sujeto cognoscente no tienen importancia.

Piaget intenta sintetizar las dos posturas anteriores proponiendo lo que él llama teoría de la interacción. Pone énfasis en la interrelación entre el conocido y el cognoscente en el proceso de descubrimiento de la realidad, atribuyéndosele a ambos igual contribución. El niño posee una estructura mental o esquemas que influirán en su manera de aprehender la realidad. Por lo tanto, las experiencias solas no determinan la realización mental del cognoscente.

Piaget no es ni un maduracionalista ni un ambientalista. Su posición incorpora elementos de ambas posturas, y las elabora de

manera original. El se considera a si mismo un "interaccionista", puesto que insiste en que el desarrollo intelectual es resultado de la interaccion entre factores internos y externos.

Para Piaget, la inteligencia es un tipo de adaptación biológica, es decir, un equilibrio entre el individuo y su medio ambiente hacia el cual tienden todas sus estructuras cognitivas.

Aun cuando su definición no enfatiza las emociones, Piaget reconoce que las emociones influyen en el pensamiento, e incluso ningún acto de la inteligencia está completo sin las emociones. Ellas son el aspecto energético o motivacional de la actividad intelectual.

Piaget considera que la inteligencia es un proceso de adaptación. Esta definición deriva del concepto de adaptación biológica.

Los principios del concepto de inteligencia son:

1. Un organismo vivo y el medio en el que vive son interdependientes.
2. Organismo y medio interactúan en un proceso de acción y reacción.
3. Debe existir un equilibrio.

En esencia, Piaget ve la inteligencia en términos de contenido, estructura y funcionamiento:

- a. Contenido: Para Piaget no es tan importante la descripción del contenido del pensamiento, sino los procesos básicos que subyacen al contenido y lo determinan.
- b. Estructuras hereditarias: (factores biológicos)
- b.1 Transmisión hereditaria de estructuras físicas. Diferentes especies tienen, por herencia, diferentes estructuras físicas. Las estructuras físicas permiten ciertos logros intelectuales e impiden otros.
- b.2 Reacción conductual automática (reflejos). Ante un estímulo del ambiente, el organismo automáticamente responde con un comportamiento particular. Los reflejos tienden a ser adaptativos: ayudan al organismo en su interacción con el ambiente. El concepto de esquema se refiere a los reflejos y otros tipos de comportamiento innato. En los primeros días de vida, la experiencia modifica los reflejos y los transforma en un nuevo tipo de mecanismo no hereditario (estructura psicológica).
- c. Principios generales de funcionamiento. Todas las especies heredan dos tendencias básicas o "funciones invariantes": la organización y la adaptación.
- c.1 Organización: tendencia de todas las especies a integrar estructuras (físicas o psicológicas) dentro de sistemas o estructuras más ordenadas.
- c.2 Adaptación: La manera en que se da la adaptación difiere de una especie a otra, de un individuo a otro dentro de

una misma especie. de una etapa a otra dentro de un individuo. La adaptación resulta de dos procesos complementarios: asimilación y acomodación.

c.2.1 Acomodación: el individuo modifica sus estructuras en respuesta a las demandas del medio.

c.2.2 Asimilación: el individuo usa sus estructuras para incorporar elementos del mundo externo.

La adaptación intelectual también es una interacción entre la persona y su ambiente. La persona asimila las características de la realidad externa dentro de sus estructuras psicológicas. y modifica o acomoda sus estructuras psicológicas para enfrentar las presiones del medio.

Como consecuencia de esta adaptación hay un equilibrio entre la inteligencia y el medio.

El medio ambiente no evoca y recompensa el comportamiento en un sujeto pasivo. El niño es activo y busca niveles mayores de estimulación en su ambiente.

d. Estructuras psicológicas. Las estructuras psicológicas son la base de la actividad intelectual y son el producto de una interacción entre los factores biológicos y la experiencia. Dicha interacción está regida por la tendencia a adaptarse al medio y la tendencia a organizar comportamientos y pensamientos.

Las estructuras son operaciones interiorizadas en la mente, a su vez reversibles, que tienen una naturaleza lógica y matemática.

"Estructura" significa el modo en que las partes de un todo se agrupan u organizan. Las "estructuras mentales" son "dinámicas y se definen en virtud de reglas operacionales que, en conjunto, forman un sistema equilibrado". (49)

Conforme la persona va creciendo, varían sus estructuras, pero sus funciones son siempre las mismas.

De los factores que intervienen en el desarrollo intelectual se da mayor importancia a las estructuras psicológicas: las funciones invariantes ocupan un segundo lugar. Los contenidos del pensamiento no tienen gran trascendencia en la teoría psicogenética.

Piaget utilizó lenguajes formales (lógica y matemáticas) para describir las estructuras que subyacen a las actividades del niño.

El desarrollo de las estructuras mentales depende de cuatro factores esenciales:

- a) madurez.
- b) experiencia.

(49) RICHMOND, P.G.. Introducción a Piaget. p. 128

c) transmisión social y

d) equilibrio.

a) Madurez nerviosa. La estructura física más importante para el desarrollo cognitivo es el sistema nervioso central.

b) Experiencia. Existen dos tipos de experiencia: la física y la lógico-matemática. La experiencia física proviene de acciones que permiten abstraer las propiedades físicas de los objetos (abstracción empírica). Por otro lado, la experiencia lógico-matemática no proviene del objeto en sí mismo, sino de la reflexión del sujeto sobre su acción con los objetos. Implica una coordinación interna de las acciones que originalmente se realizaron con objetos (abstracción reflexiva). En este segundo tipo de experiencia, el aprendizaje no proviene de la percepción de los objetos, sino de la acción realizada sobre ellos.

c) Transmisión social. La estructura sintáctica del lenguaje promueve la organización de acciones mentales en sistemas operacionales.

Piaget señala que hay cuatro factores de índole social que afectan la formación de las estructuras.

1. El lenguaje usado por la sociedad.
2. Las creencias y valores de una sociedad.
3. Las formas de razonamiento que una sociedad acepta como

válidas.

4. La clase de relaciones entre los miembros de una sociedad.

El medio social, al igual que el físico, afecta el desarrollo de las estructuras a través del proceso de asimilación-acomodación.

- d) La tendencia al equilibrio. Todos los organismos tienden hacia un equilibrio con su ambiente. El equilibrio se refiere a una serie de cambios entre un sistema abierto y su medio con el fin de lograr un balance. Se trata de desarrollar estructuras que sean coherentes y estables, es decir, efectivas en la interacción con la realidad. Esto significa que cuando ocurre un nuevo evento, el organismo tratará de asimilarlo dentro de sus estructuras ya existentes (asimilación) y tratará de modificar sus patrones actuales de comportamiento para responder a los requerimientos de la nueva situación (acomodación). Con la experiencia adquiere más estructuras que le permiten adaptarse con mayor rapidez a las nuevas situaciones.

"El niño trata de comprender las cosas, de estructurar su experiencia y dar coherencia y estabilidad a su mundo." (50)
En cada periodo se logra un nivel más alto de equilibrio. El grado de equilibrio depende de tres dimensiones:

(50) ibidem., p. 106

- aplicación: objetos o propiedades de objetos sobre los que la persona actúa:
- movilidad: distancias espaciales y temporales que separan a la persona de los objetos o características de los mismos: entre mayor sea esta distancia, mayor movilidad tendrá el equilibrio.
- estabilidad: es la capacidad de compensar cambios por medio de acciones u operaciones mentales con el fin no causar disturbios en la estructura previa. Esta actividad puede ser abierta (periodo sensoriomotor) o interna (periodo de operaciones mentales).

El niño compensa los cambios por medio de la reversibilidad en sus dos formas: reciprocidad y negación.

El equilibrio de las estructuras procede de dos factores: la reversibilidad de las operaciones realizadas y el contenido a que se aplican. El equilibrio sensorio-motriz muestra reversibilidad de acciones motrices, y los contenidos son entidades reales. El equilibrio operacional concreto muestra reversibilidad de clases por inversión, y de relaciones por reciprocidad. Los contenidos son propiedades concretas del medio. El equilibrio operacional formal muestra la reversibilidad integrada del grupo de transformaciones, y los contenidos cubren tanto el

medio posible como el real. (51)

En virtud de que el niño de 3º de primaria se encuentra en el periodo de operaciones concretas, el equilibrio al que tenderá en su aprendizaje de geometría procederá de la reversibilidad abierta sobre propiedades concretas.

Durante el desarrollo se presentan momentos de desequilibrio, pero al restaurarse el equilibrio, la estabilidad es mayor y, por lo tanto, la inteligencia está mejor adaptada.

El factor que impulsa el desarrollo intelectual es la motivación, la cual proviene de un desequilibrio y de la necesidad de reestablecer el equilibrio. La persona experimenta dicho desequilibrio a nivel intelectual y/o valorativo.

La motivación debe ser previa al proceso de aprendizaje, por lo que una metodología de la enseñanza de la geometría debe provocar desequilibrios que motiven la creación de estructuras más adaptativas.

Los cuatro factores mencionados intervienen en el desarrollo intelectual: sin embargo, no se sabe con exactitud cuál es la contribución de cada una de ellos, ni tampoco la manera en que interactúan. Por lo tanto, no se puede determinar cómo acelerar

(51) ibidem., p. 112

el desarrollo intelectual.

No obstante, se puede definir en que factores la escuela si es capaz de influir:

- a) La madurez es un aspecto biologico externo al marco de influencia escolar.
- b) La experiencia fisica adecuada si puede ser promovida en la escuela.
- c) La interacción social es una variable completamente susceptible de ser modificada y controlada en el ámbito escolar.
- d) La tendencia al equilibrio es inherente a la naturaleza de todo organismo. Lo que en la escuela se puede hacer es provocar desequilibrios cognitivos que exijan la construcción de estructuras más estables.

Por lo tanto, en cuanto al aprendizaje de la geometria, la escuela puede:

- 1) fomentar las experiencias fisicas y sociales que promuevan el desarrollo del pensamiento en geometria.
- 2) provocar desequilibrios que exijan una re-estructuración cognitiva.

Piaget divide el desarrollo intelectual en estadios y periodos cuya duracion obedece a criterios cronologicos. Estos periodos son:

- a) Pensamiento sensorio-motriz (0 a 2 años).
 - b) Pensamiento simbolico o preoperacional (2 a 7 años).
- Pensamiento operacional:
- c) Operaciones concretas (7 a 11 años) y
 - d) Operaciones formales (11 años en adelante).

El curso de este desarrollo presenta varias irregularidades:

1. Las edades en las que se llega a un periodo determinado varia entre culturas y dentro de una misma cultura.
2. Debido a que los periodos que señala Piaget son abstracciones idealizadas que solo describen las características sobresalientes del desarrollo, es posible que los niños presenten conductas no consideradas como típicas.
3. El niño puede estar en diferentes periodos de desarrollo en relacion a problemas que requieran de operaciones mentales similares. A esto se le llama un "décalage" horizontal.

2.3.1 PENSAMIENTO SENSORIO-MOTRIZ:

El niño no es una creatura completamente débil. Llega al mundo con ciertas habilidades heredadas.

Al nacer, el niño no distingue entre el yo ni el no yo. El mundo es una "experiencia indiferenciada del presente sin espacio ni tiempo y sin objetos." (52)

La conducta del niño obedece a modelos innatos de comportamiento. A través del ejercicio de estos modelos satisface sus necesidades internas. De la interacción de estos modelos pseudoreflexos con el medio ambiente, se obtienen nuevos modelos de conducta o adaptaciones. Las nuevas conductas son de carácter mucho más general.

Los objetos se reconocen cuando se repite una actividad motriz que ha sido realizada con ese objeto. El reconocimiento no se reduce a una acción mental, sino que también implica una respuesta motriz visible.

Poco antes de cumplir el primer año, la conducta del niño es básicamente exploratoria, intencional y experimental. El mundo va adquiriendo permanencia cuando el niño disocia los objetos de las acciones que realiza sobre ellos.

Los objetos se hacen externos y permanentes, y se crea un sistema de relaciones sensorio-motrices entre el niño y los objetos.

El niño va adquiriendo la capacidad de representar en su mente

(52) ibidem., p. 20

acciones motrices simples y de combinarlas. pudiendo así inventar nuevos metodos de actividad. Las cualidades de las representaciones son espaciales y resultan de la exploracion tactil y visual. Estos son los terminos de su pensamiento. por lo que impedir al niño jugar es como impedirle pensar.

ETAPAS:

1) Primera etapa: Del nacimiento al mes de edad.

El recién nacido depende en gran medida de sus reflejos para interactuar con el ambiente. Sin embargo, el ambiente no solo activa y desactiva los reflejos. El niño, aun en el primer mes de vida, aprovecha la experiencia y modifica activamente los esquemas reflejos.

La asimilacion toma tres formas particulares:

- a) Asimilacion funcional. Cuando un organismo tiene una estructura disponible, hay una tendencia básica a ejercitar la estructura, de hacerla funcionar.
- b) Asimilacion generalizadora. Dado que los esquemas necesitan ejercicio y repetición, también requieren de objetos que se usen para satisfacer esta necesidad. Por lo tanto, el esquema de succión tiende a generalizarse a una variedad de objetos.

Tanto la asimilacion funcional como la generalizadora son

energéticas: dan comienzo a la conducta del recién nacido. Durante estas actividades tiene la oportunidad de aprender sobre el medio ambiente.

- c) Asimilación reconocedora. Aparece en el primer mes de vida. Solo busca ejercitar esquemas. Por ejemplo: chupar aun cuando no tenga hambre.

Al final de la primera etapa, la succión ya no es un patrón automático de comportamiento dado por la herencia. De acuerdo con el principio de organización, el esquema de succión se ha elaborado y se ha desarrollado en una estructura psicológica compleja.

El aprendizaje en esta etapa está limitado a la esfera de los reflejos.

2) Segunda etapa: De 1 a 4 meses.

El niño muestra patrones de comportamiento alejados de la situación alimenticia.

- a) Desarrollo las reacciones circulares primarias. Casualmente, el niño realiza una acción cuyo efecto tiene valor para él; aprende a repetir ese comportamiento para crear nuevamente el efecto. La culminación del proceso es un esquema organizado.
- b) Anticipaciones primitivas. Aprende de una manera primitiva a

anticipar eventos futuros. Cuando se le coloca en la posición apropiada, el niño anticipa que va a ser alimentado, imitando movimientos de succión.

- c) Aparecen los primeros signos de curiosidad. El niño muestra interés en eventos moderadamente nuevos.

La curiosidad es una función de la relación entre el nuevo objeto y la experiencia previa del alumno. "La curiosidad depende del grado en que un objeto discrepe de lo que es familiar para el individuo". (53)

- d) Imitación. El niño repite a veces el comportamiento de modelos. Esta imitación es muy primitiva, dado que ocurre solo cuando el modelo realiza una acción muy similar al esquema que tiene el niño. Es como si el niño no distinguiera los actos del modelo de los suyos propios: por lo tanto, la imitación aparente es simplemente una repetición por parte del niño de la conducta que él cree que es suya.

Dado que su repertorio de acciones es aun muy limitado, la imitación se restringe a movimientos vocales y visuales elementales, y a la prensión de objetos.

- e) Categorías de la realidad. Conforme el niño comienza a manipular los objetos que le rodean, gradualmente va

(53) GINSBURG, Herbert y OPPER, Sylvia.. op. cit... p. 39

desarrollando una comprensión práctica de la realidad externa. Durante el periodo sensoriomotor, el niño elabora varias dimensiones básicas de la realidad, especialmente las nociones primitivas del objeto permanente, espacio, tiempo y causalidad.

- f) El niño no tiene un concepto maduro de objeto, pero desarrolla varios patrones de comportamiento que son pasos preliminares. Coordina los esquemas de mirar y oír, entre otros que antes eran independientes. Muestra expectativa pasiva observando por corto tiempo el lugar donde un objeto ha desaparecido.

3) Tercera etapa: De 4 a 10 meses.

Las reacciones circulares de esta etapa son secundarias porque conllevan eventos u objetos en el medio externo. Las reacciones circulares secundarias describen la habilidad recién encontrada del niño para desarrollar esquemas que reproducen eventos interesantes que fueron inicialmente descubiertos por casualidad en el medio externo.

- a) El niño desarrolla reacciones secundarias secundarias. Por casualidad descubre un evento interesante en el medio ambiente y trata de redescubrir las acciones que lo produjeron.
- b) Clases primitivas. El niño muestra conductas preliminares de clasificación o significado. Cuando se le presenta un objeto

familiar. a veces reacciona mostrando simples abreviaciones de las acciones que generalmente realiza.

- c) La imitación del niño es mas sistemática y precisa.
- d) El niño progresa en la adquisición del concepto de objeto. Si el mismo ha provocado la desaparición del objeto. trata de hacer una búsqueda visual o táctil.

En esta etapa el objeto no tiene una existencia independiente. sino que se relaciona con la acción del niño.

4) Cuarta etapa: de 10 a 12 meses.

La conducta del niño es cada vez mas sistemática y organizada.

- a) Es capaz de coordinar esquemas secundarios. Tiene una meta en mente desde el principio. y utiliza un esquema como medio para alcanzar la meta y un segundo esquema para enfrentar la meta. Un esquema sirve como medio y el otro como fin. La originalidad del niño reside en la forma de combinar dos esquemas. Este comportamiento es intencional y por lo tanto inteligente.
- b) Interactuando con su medio ambiente. el niño aprende aspectos sobre las relaciones de los objetos.
- c) El niño anticipa eventos que no dependen de sus propias acciones. En este periodo espera que la gente actue de

ciertas maneras.

- d) El niño comienza a imitar la nueva conducta de los modelos.
- e) El concepto de objeto que posee niño ya casi está totalmente desarrollado. Emplea una variedad de comportamiento para buscar objetos desaparecidos. Atribuye a los objetos un grado de substancia y permanencia. Sin embargo, aun no puede seguir una serie compleja de desplazamientos de un objeto.

5) Quinta etapa: de 12 a 18 meses.

Es el climax del periodo sensoriomotor.

- a) Reacciones circulares terciarias. El niño se interesa por el objeto en tanto objeto. Hay un interés por lo novedoso.
- b) Descubrimiento de nuevos medios. Cuando se enfrenta a un obstáculo trata de desarrollar nuevas formas de enfrentarlo, y no confía en los esquemas que le sirvieron anteriormente.
- c) El niño es cada vez más hábil para imitar nuevas acciones o modelos. El principal objetivo de la imitación es ahora reproducir el acto de un modelo.
- d) El concepto de objeto está más elaborado. Ahora puede comprender una serie compleja de desplazamientos (solo si son visibles) y buscar un objeto en el lugar correcto.

6) Sexta etapa

Es la transición al pensamiento simbólico.

- a) El niño trata de pensar sobre un problema para crear soluciones a nivel mental más que físico.
- b) Es capaz de imitar a un modelo aun cuando este no este presente.
- c) Concepto de objeto. El niño ya es capaz de reconstruir una serie de desplazamientos invisibles de un objeto gracias a sus nuevas habilidades de representación.

A través de este desarrollo se puede observar un proceso de descentración. Con su desarrollo, el niño separa el sí mismo del ambiente.

Clasificación:

Hay una clase primitiva de clasificación motora (0 a 2 años) cuando el niño aplica a los objetos abreviaciones de esquemas familiares. Sin embargo, los esquemas abreviados no representan todavía una verdadera clasificación. Una razón es que los esquemas se aplican a los objetos individuales durante un periodo de tiempo y no a una colección de objetos. La clasificación madura conlleva la concepción de una colección de cosas, ya sea que estén inmediatamente presentes o sean imaginadas. Otra razón es que no existen relaciones de inclusión es decir, la habilidad

de construir una clasificación jerárquica.

Implicaciones pedagógicas:

El niño en el periodo sensoriomotor es aun incapaz de clasificar las figuras geométricas de manera jerárquica.

Al final de esta etapa ya se posee la noción de objeto permanente, esencial para el estudio posterior de figuras geométricas.

Aun cuando no hay todavía reversibilidad propiamente dicha, se están desarrollando sus bases. Esto permitirá, en un futuro comprender las transformaciones de una figura en otra.

2.3.2 PENSAMIENTO SIMBOLICO O PREOPERACIONAL:

De los dos a los cuatro años el niño adquiere la capacidad de formar símbolos mentales que representan cosas o eventos ausentes. Para operar con las cosas, ya no requiere que estén inmediatamente presentes: ahora puede crear un sustituto mental. Esta habilidad libera al niño del aquí y el ahora. El niño forma símbolos mentales a través de la imitación. El niño ve las cosas, las coge, actúa sobre ellas, y de esta manera incorpora una gran cantidad de información sobre ellas. Estas acciones del niño fundamentan el símbolo mental. De hecho, se puede considerar que la imitación es el puente de unión entre la

inteligencia sensoriomotora y la inteligencia posterior.

En la terminología de Piaget, los símbolos mentales son significantes. El símbolo es personal y se parece a aquello a lo que hace referencia. Una vez que se forman los símbolos mentales, el niño les da significado a través del proceso de asimilación. Los asimila dentro de los esquemas que ya se encuentran disponibles. A través del juego, el niño hace que ciertas cosas (símbolos) representen otras. Otro tipo de significativo es la palabra que también es usada para referirse a otra cosa.

La actividad simbólica es pre-conceptual, pues los símbolos que maneja el niño en la mente, y que se expresan en el lenguaje, son pre-conceptos. Un pre-concepto se encuentra entre el símbolo imaginado y el concepto. Se define como "la ausencia de inclusión de los elementos en un todo y la identificación directa de los elementos parciales entre sí, sin la intervención del todo". (54) Se trata del paso de la imagen privada al signo verbal público. A los siete u ocho años la imagen es el símbolo individual que sustenta al signo verbal.

El origen de la formación de los símbolos mentales reside en la imitación. El niño en la etapa sensoriomotriz representa las

(54) RICHMOND, P.G., op. cit., p. 20

cosas actuando sobre ellas. El niño preoperacional realiza tal imitación internamente, y estos movimientos corporales abreviados constituyen el símbolo mental. Llega a ser tan hábil en la imitación interna que los movimientos son extremadamente abreviados y casi imposibles de detectar.

El símbolo mental puede involucrar imágenes visuales (y probablemente no tenga características lingüísticas). La imagen visual puede considerarse la imitación interna del objeto que se percibió originalmente.

El símbolo implica acomodación debido a que el símbolo consiste en una imitación interna, y la imitación conlleva la modificación de la propia conducta para adecuarse a la de otra persona.

Durante este periodo, el niño comienza a usar palabras. Después de una etapa preliminar en la que las palabras están íntimamente relacionadas con las acciones o deseos del momento, el niño comienza a usar el lenguaje para referirse a cosas o eventos ausentes. Sin embargo, el niño no usa las palabras de la misma manera que el adulto. El significado asignado a las palabras, o el concepto asociado a ellas, es aun muy primitivo. De hecho, los conceptos del niño son pre-conceptos: a veces son demasiado generales y a veces demasiado específicos.

El símbolo es personal y de alguna manera se parece a lo que representa. Por el contrario, la palabra es social, no personal.

y está arbitrariamente relacionada a la cosa que representa.

En resumen, la imagen es un tipo de simbolo mental. El simbolo mental, a diferencia de la palabra, es personal y se parece a la cosa referida. El simbolo es un significante, conlleva imitación, y por lo tanto acomodación.

Los juegos simbólicos tienen una gran importancia en la vida emocional del niño. El niño de 2 a 4 años está comenzando a adquirir una serie de formas para enfrentar el mundo. Debe aceptar que las palabras representan cosas sin justificación aparente. Su capacidad de expresión a través del lenguaje es extremadamente limitada y rudimentaria. Sus sentimientos de inadecuación le llevan a la frustración y al conflicto con las demás personas. El juego simbólico es una forma de ayudarlo a adecuarse a la realidad. De esta manera, el niño puede asimilar el mundo externo casi de acuerdo a sus deseos y necesidades con poca acomodación. Además, a través del juego puede dar salida a situaciones conflictivas de la vida real resultando el ganador. En breve, el juego simbólico tiene un propósito catártico esencial para la estabilidad emocional del niño y su ajuste a la realidad.

El lenguaje:

En la sexta etapa del desarrollo sensoriomotor el primer uso que el niño hace de la palabra no es simbólico. Sus palabras son muy

inestables, su significado no es constante, son muy personales y en este aspecto se parecen a los símbolos mentales de ese periodo.

El siguiente paso en el desarrollo del lenguaje conlleva el uso de palabras en una forma simbólica. A los dos años el niño comienza a usar palabras para representar cosas o eventos ausentes.

Sin embargo, el hecho de que el niño use una palabra no significa que le dé lo que nosotros consideramos su significado ordinario. El niño a esta edad no es capaz de reconocer que una persona o cosa permanece siendo la misma o conserva su identidad, cuando sufre variaciones mínimas en su apariencia.

Además de una percepción insuficiente de la individualidad, el niño utiliza las palabras de formas extrañas. Por ejemplo, usa una palabra para referirse a dos cosas diferentes.

El lenguaje contribuye a la formación de los sistemas operacionales, es decir, de los esquemas conceptuales. El niño, al usar el lenguaje, desarrolla sus operaciones mentales y, de manera recíproca, el desarrollo del pensamiento operacional permite que el lenguaje se use en la actividad operacional.

En esta etapa el niño es egocéntrico: tiene una visión subjetiva y emotiva del mundo. Cree que las cosas tienen sentimientos y que con sus pensamientos puede cambiar los hechos.

El lenguaje no impone completamente en el niño las formas de pensamiento culturalmente deseables. "Más bien el niño distorsiona el lenguaje para adecuarlo a su propia estructura mental." (55)

El razonamiento:

De los 2 a los 4 años, el niño muestra tres clases diferentes de razonamiento.

1. El niño se enfrenta a una situación simple que ya ha experimentado antes. El "razona" sobre la situación muy concretamente en términos de los que le ha ocurrido en el pasado. Piaget considera que este tipo de razonamiento es una aplicación de la experiencia previa a una situación actual y no debe ser confundida con el razonamiento deductivo de una persona madura.
2. Los deseos del niño distorsionan su pensamiento.
3. El razonamiento transductivo. En lógica se hace una distinción entre la deducción y la inducción. La deducción se caracteriza como un proceso de razonamiento de lo general a lo particular. De acuerdo con Piaget, el razonamiento del niño está entre la inducción y la deducción. No va de lo

(55) GINSBRUG, Herbert y OPPER, Sylvia., op. cit.... p. 85

general a lo particular (deducción), o de lo particular a lo general (inducción), sino que va de lo particular a lo particular sin tocar lo general. El razonamiento transductivo ve una relación entre dos o más elementos concretos (particulares) cuando no hay ninguna.

Después de los cuatro años, ni las actividades sensoriomotoras, ni las simbólicas desaparecen. Pero al mismo tiempo el desarrollo del niño se extiende hacia otras áreas.

La influencia social y lingüística sobre el niño hacen que ajuste sus pensamientos. Los símbolos del niño se empiezan a interrelacionar. El lenguaje se convierte en un vehículo de pensamiento.

No todo el lenguaje del niño es comunicativo. Es común que el niño repita simplemente lo que otro dijo creyendo que lo que está diciendo es original. También suelen caer en el monólogo o en el monólogo colectivo. El monólogo se da cuando un niño está solo y habla en voz alta. El monólogo colectivo se da cuando dos o más niños están juntos y uno de ellos habla un soliloquio que los otros no escuchan. El que habla puede intentar interesar a los otros y de hecho creer que lo están escuchando. Pero la naturaleza egocéntrica de su monólogo impide que los otros lo entiendan aun cuando quisieran. Aunque se encuentra en un grupo, sus afirmaciones no son comunicativas, simplemente está hablando consigo mismo en voz alta.

El resto del lenguaje del niño es comunicativo o socializado. Sin embargo, tal lenguaje tiene ciertas deficiencias. Los niños no tratan de explicar los eventos al otro, y no hablan en términos de las causas de los eventos. Además, no tratan de dar una prueba o justificación lógica a lo que proponen. La razón es que no consideran la posibilidad de que el receptor tenga una opinión contraria.

El lenguaje del niño, en especial de los 4 o 5 a los 6 años, no tiene la función de comunicar. El niño habla de sí mismo consigo mismo.

El propósito de este lenguaje no comunicativo es:

- La repetición verbal, donde el niño simplemente imita lo que otros dicen o repite frases de él mismo. Para Piaget la repetición es una versión de la asimilación funcional. Existe la necesidad de ejercitar esquemas verbales.
- El monólogo tiene el propósito de satisfacer los deseos. Cuando las acciones de un niño no logran producir el resultado deseado, utiliza las palabras para lograr su objetivo. Otra explicación del monólogo es que las palabras y las acciones no están aun totalmente diferenciadas. Cuando el niño empieza a aprender el lenguaje, llama a menudo por su nombre a un objeto presente, o usa una palabra para describir las acciones que se están dando. En consecuencia, en su experiencia inicial con el lenguaje, la cosa (o acción) y la palabra que la designa

están simultáneamente presentes, y ambas son vistas como un todo.

En resumen, el niño en un grupo simplemente repite lo que otros dicen debido a la asimilación funcional: a veces trata de producir resultados que no puede lograr de otra forma; y finalmente, sus palabras simplemente acompañan las actividades en las que está inmiscuido.

Las tres formas de lenguaje -repetición, monólogo, y monólogo colectivo- pueden ser caracterizadas como egocéntricas.

Las cinco propiedades del discurso del niño -el inadecuado uso de pronombres y adjetivos demostrativos, el orden incorrecto de eventos, la pobre expresión de causalidad, la tendencia a omitir características importantes, y la yuxtaposición- son manifestaciones concretas del egocentrismo del niño.

Mientras que el que habla no logra tomar en cuenta las necesidades del que escucha, este también distorsiona lo que oye, elabora a partir de lo que entiende y está satisfecho de haber entendido, cuando en realidad no lo ha hecho.

Al tratar de expresarse a sí mismo y justificar sus argumentos, el niño aprende a tomar en cuenta el punto de vista del otro.

El pre-concepto desaparece. Piensa más en términos de transformación que en estados separados inconexos.

La adquisición progresiva del lenguaje va desarrollando su modelo mental del mundo en dos sentidos:

- a) ordena y relaciona sus representaciones más en consonancia con la naturaleza conceptual del lenguaje, lo cual mejora su capacidad de comunicación, y
- b) empieza a reorganizar sus representaciones dándose cuenta de la relatividad y pluralidad de los puntos de vista.

El concepto del tiempo y del espacio no alcanzan todavía un nivel abstracto. Saben, sin embargo, que el espacio puede estar tanto lleno como vacío y que el tiempo tiene duración aunque no acontezca nada.

Al final del período preoperacional aparecen las primeras conservaciones. El niño comienza a distinguir sus acciones de los comportamientos de objetos. Empieza a cooperar socialmente. Se interioriza el lenguaje.

El trabajo grupal debe permitir la cooperación y el debate. Las acciones mentales requieren de la manipulación física de objetos. El debate y la interiorización en forma simbólica serán facilitados con el conocimiento del vocabulario adecuado.

El niño presenta varios patrones primitivos de pensamiento:

- animismo: es la tendencia a considerar que los eventos naturales están vivos al igual que los seres humanos.

- artificialismo: es la tendencia a creer que algún agente (humano o divino) creó los eventos naturales.
- participación: es la idea de que las acciones humanas y los procesos naturales interactúan y están relacionados.

La moral del niño en el periodo preoperacional:

El niño es incapaz de seguir las reglas de un juego, pero al mismo tiempo considera que las reglas son sagradas e inviolables. Los niños creen que la culpa y la responsabilidad moral están determinadas no por la intención, sino por la cantidad de daño producido. El juicio moral del niño es el resultado de tendencias egocéntricas de pensamiento y la relación unilateral de respeto al adulto. El juicio moral del niño madura cuando adopta una posición de respeto mutuo hacia los adultos y entra en contacto con nuevas instituciones sociales y puntos de vista.

De acuerdo a Piaget, el aspecto esencial de la moralidad es la tendencia a aceptar y seguir un sistema de reglas que generalmente regulan el comportamiento interpersonal.

El pensamiento se caracteriza por el sincretismo: la tendencia a agrupar en un todo confuso varias cosas o eventos aparentemente no relacionados, y por la yuxtaposición, la incapacidad de ver las conexiones reales entre varias cosas o eventos.

Dado que el sincretismo y la yuxtaposición parecen ser opuestos,

su existencia simultánea en el niño pequeño es una paradoja. ¿Cómo puede el mismo niño ignorar las partes a favor del todo (sincretismo) e ignorar el todo a favor de las partes (yuxtaposición) Piaget trata de resolver esta paradoja diciendo que tanto la yuxtaposición como el sincretismo son expresiones de un modo común de pensamiento: la falta de habilidad para pensar acerca de varios aspectos de una situación simultáneamente. La yuxtaposición conlleva la incapacidad de ver cualquier relación entre las partes de un todo, y el resultado es que se perciben como no relacionadas una con la otra. El niño es incapaz de ver simultáneamente las partes como cosas separadas y las relaciones que las unen. Igualmente, en el sincretismo, el niño percibe el todo o las relaciones comunes, pero no reconoce las diferencias dentro del todo. En otras palabras, dado que el niño no puede enfocarse simultáneamente tanto en las diferencias entre las cosas como en sus relaciones comunes, solo puede ver o la sucesión de eventos no relacionados (yuxtaposición) o un todo conglomerado (sincretismo).

El egocentrismo es una tendencia común tanto en el lenguaje como en el comportamiento moral.

El niño es egocéntrico en la comunicación, tiene un concepto absolutista de las reglas, es realista en su juicio moral, y su razonamiento conlleva sincretismo y yuxtaposición.

Clasificación:

Hay un tipo primitivo de clasificación en el periodo sensoriomotor cuando el niño aplica abreviaciones de esquemas familiares a algunos objetos.

Para Piaget, las propiedades de una clase son:

- a) Ningun objeto puede ser miembro de dos clases al mismo tiempo. Las clases son mutuamente excluyentes.
- b) Todos los miembros de una clase comparten alguna similaridad.
- c) Una clase puede ser descrita en términos de los miembros que la constituyen. Esto se refiere a la "extensión" de una clase.
- d) La propiedad definitoria de una clase determina qué objetos pertenecen a ella. Dicho de otra forma, la intencion define la extensión.

Existen tres etapas en el desarrollo del niño en cuanto a la clasificación: dos etapas preoperacionales (2 a 7 años) y una tercera etapa de operaciones concretas (7 a 11 años):

- a) Etapa 1 (2 a 5 años): el niño no puede usar consistentemente una propiedad definitoria para clasificar los objetos en clases diferentes. Construye colecciones gráficas que son alineaciones parciales o formas interesantes. Utiliza el pre-concepto. A veces es incapaz de ver que un miembro

individual de una clase sigue siendo el mismo a pesar de los cambios perceptuales; y en ocasiones piensa que dos miembros distintos de la misma clase son uno solo.

- b) Etapa 2 (5 a 7 años): el niño clasifica los objetos por una propiedad definitoria razonable e incluso construye una clasificación jerárquica, pero es incapaz de comprender relaciones de inclusión. Las relaciones de inclusión son las relaciones de las partes con el todo, del todo con las partes, y de las partes con las partes. Esta incapacidad del niño se debe a que una vez que ha dividido el todo en sub-grupos, ya no puede pensar al mismo tiempo en términos del conjunto original y de las sub-divisiones. Existe yuxtaposición al no ver que varios objetos son miembros de la misma clase, y sincretismo al agrupar un número de eventos desiguales (disparate) dentro de un todo mal definido e ilógico.

Implicaciones pedagógicas:

El niño preoperacional ya puede utilizar palabras y símbolos personales para referirse a las figuras. No obstante, las palabras para el niño no tienen el mismo significado que para el adulto.

Dado que el razonamiento del niño va de lo particular a lo particular, no se puede llegar a generalizaciones en el

conocimiento de la geometría.

Debido al egocentrismo del niño de este periodo, su comunicación interpersonal no tiene como objetivo explicar los hechos de maneras que sean comprendidas por otras personas. Por otro lado, tampoco existe el esfuerzo por comprender puntos de vista ajenos. En consecuencia, aun no existe un diálogo propiamente dicho que favorezca la reconstrucción de estructuras psicológicas. Por ello, el profesor debe promover actividades de integración grupal que promuevan la descentración.

Ya que la noción de espacio no está completamente desarrollada, todavía no puede hacer distinciones claras entre figuras de tipo euclidiano (triángulo, rectángulo, círculo, etc.)

Por otro lado, al no ser capaz de ver simultáneamente las partes y el todo, no puede integrar las propiedades de una figura en una definición global.

En relación a la clasificación, debido a que el niño no puede comprender las inclusiones jerárquicas, es incapaz de clasificar jerárquicamente las figuras geométricas.

La construcción del número en el niño

Es importante comenzar señalando que, al estudiar el número, Piaget no está interesado en las habilidades de conteo tal como se enseñan en los primeros grados de la escuela primaria. La

comprensión del número implica el dominio de ciertas ideas básicas.

Entre estas ideas se encuentra la correspondencia uno-a-uno y la conservación. La correspondencia uno-a-uno establece que dos grupos de objetos pueden ser equivalentes en número sin importar la naturaleza de tales objetos. La conservación implica la capacidad del niño de ver que existen ciertos elementos constantes o invariantes en el número a pesar de que ocurran cambios en el arreglo físico de los objetos.

El niño pasa por un periodo de desarrollo en la adquisición de las operaciones mentales necesarias para poder comprender la noción de número:

Dos etapas preoperacionales:

- a) Primera etapa: El niño no usa el método de correspondencia uno-a-uno. Piensa que dos grupos de objetos tienen el mismo número si su longitud es la misma. Es incapaz de coordinar simultáneamente longitud y densidad.
- b) Segunda etapa: El niño puede construir dos grupos con igual cantidad de objetos, pero no puede conservar la equivalencia si se cambia su arreglo físico. La correspondencia uno-a-uno es perceptual, mas no comprendida a profundidad.

2.3.3 PENSAMIENTO OPERACIONAL (OPERACIONES CONCRETAS Y OPERACIONES FORMALES)

Generalidades:

Una operación mental es una "acción realizada por la mente, como un conjunto de acciones relacionadas que forman un todo integrado... La esencia de una operación mental es la manera en que la mente organiza las representaciones, mas no su contenido".
(56)

Las operaciones mentales aparecen cuando el niño es capaz de agrupar sus representaciones en un sistema interrelacionado, lo cual sucede a los siete u ocho años.

Estas operaciones mentales se derivan de las acciones físicas que han sido interiorizadas.

2.3.3.1 Operaciones concretas: (9-12 años):

Las operaciones concretas son una organización directa de datos inmediatos. No obstante, el niño puede aplicar estas operaciones más allá de los datos inmediatos. Sin embargo, el pensamiento concreto siempre permanece unido a la realidad empírica.

(56) RICHMOND, P.G.: op. cit.... p. 65

Ahora el niño ya puede realizar un registro simbólico de las acciones mentales en términos de afirmaciones matemáticas y verbales.

El desarrollo del lenguaje sigue siendo factor de aceleración del aprendizaje. Las palabras que utilizan los niños son indicativas de su nivel de comprensión.

Las operaciones se caracterizan por su reversibilidad.

Las operaciones concretas son reversibles de dos maneras:

- Por inversión de combinaciones (clases). Esta se adquiere al realizar una acción opuesta que contrarreste la primera.
- Por reciprocidad de diferencias (relaciones), que se adquiere al realizar una segunda acción, que compensa, sin contrarrestar, la primera condición.

En esta etapa, las dos formas de reversibilidad actúan de manera separada, no pueden ser utilizadas simultáneamente.

"La conservación es el proceso operacional de la mente, que produce la comprensión de que ciertos aspectos de una condición cambiante son invariables, a pesar de tales cambios. La conservación ha de concebirse como resultante de la reversibilidad operacional." (57)

(57) idem

La conservación de los objetos es la primera conservación que se obtiene (en el periodo sensorio-motriz). Las otras conservaciones se empiezan a adquirir a los 6 o 7 años:

- sustancia o cantidad entre los seis y los ocho años.
- peso entre los nueve y diez años.
- volumen entre los once y doce años.

Con la aparición de las operaciones concretas el niño puede operar con los sistemas de símbolos del lenguaje y de las matemáticas.

Las imágenes mentales tienen el siguiente desarrollo:

- a) Percepción de un objeto presente.
- b) Imitación: el niño reproduce acciones de personas o cosas.
- c) Imagen mental: esa imitación se internaliza y abrevia.

Existen tres tipos de imágenes:

De un año y medio a 7 años:

1. Imagen estática: la imagen reproduce objetos o cualquier tipo de evento en el que los elementos no sufren ningún cambio de forma o posición. La causa de esta deficiencia es una tendencia a concentrarse en los estados iniciales y finales de una situación y se niegan los eventos que producen tales cambios. Esta tendencia es la centración.

De los 7 años en adelante:

2. Imagen de transformación: el niño ve cambios en la forma más que en la posición, como en la imagen kinética.

3. Imagen kinética: imagen del movimiento de un objeto.

Estos dos tipos de imágenes son posibles gracias a que el niño ya puede imaginar las transformaciones intermedias además de los estados inicial y final de dichas transformaciones.

Las imágenes también pueden dividirse en :

a) Reproductoras: se reproduce un modelo previamente percibido.

b) Anticipatorias: imágenes que anticipan eventos o cambios de posición futuros.

Las imágenes kinéticas o de transformación pueden ser reproductoras o anticipatorias; pero las imágenes estáticas sólo pueden ser reproductoras.

Las imágenes del niño de la etapa de operaciones concretas son kinéticas y consideran las transformaciones. Por lo tanto, el pensamiento del niño en la etapa anterior estaba dirigido hacia estados aislados, más que hacia transformaciones.

Cuando aparecen las imágenes mentales, el niño puede representar eventos pasados y objetos no presentes.

El niño emplea cada vez mejor las clases y relaciones. Empieza a darse cuenta que en una situación intervienen muchos factores y trata de separarlos.

Debido a que la enorme cantidad de información que puede obtener de una situación le causa gran confusión, recurre a la experimentación causal.

Poco a poco se va perfeccionando la observación y el experimento. Se forman clases complejas y declaraciones concatenadas.

A la mitad de este periodo el niño habrá conservado el peso y podrá medir un área. Tal vez ya habrá separado el tiempo transcurrido y la distancia recorrida, y estará logrando una comprensión de la perspectiva.

Al final de este periodo el niño podrá clasificar, ordenar y relacionar su medio de maneras diversas y complejas. Comprenderá que en la explicación de hechos intervienen muchos factores.

En este periodo, el niño aun no es capaz de meditar sobre una situación, formar teorías, probarlas y alcanzar conclusiones, pues ello supone la capacidad de comprender los factores que intervienen y aislarlos. Es por ello que los niños no deben afrontar situaciones que no puedan explicarse con prontitud. Al analizar una situación se debe meditar en como resolverla, mas no en sacar conclusiones. Las soluciones alcanzadas no pueden ser generalizaciones, sino más bien probabilidades.

Todo esto en la clase implica argumentar sobre las posibles causas o razones, observaciones y registro de datos, y resultados de solución abierta.

Conforme el niño crece y entra en contacto con puntos de vista encontrados y diversas instituciones sociales variadas, su pensamiento pasa a través de un proceso de descentración. En el lenguaje, considera tanto lo que quiere expresar como las necesidades del oyente. En los juegos, considera los intereses de los otros tanto como los suyos propios, y por lo tanto quiere seguir y modificar las reglas. En el juicio moral, considera tanto los resultados del comportamiento de una persona como sus intenciones. En cuanto a su razonamiento, trata de considerar tanto las diferencias como las similitudes entre el mismo grupo de eventos. El niño descentra su pensamiento así como en el período sensoriomotor el niño descentra su comportamiento.

La etapa moral de "cooperación incipiente" dura de los 7 a los 10 u 11 años. El juego comienza a adquirir un carácter social genuino, y el niño tiene una comprensión más firme de las reglas. Aun cuando su conocimiento del juego no es perfecto, ha dominado las reglas básicas y trata de aprender el resto. El niño de esta etapa coopera y compite con su compañero. Hay cooperación en el sentido de que el niño está de acuerdo con su compañero sobre una serie de reglas comunes que son seguidas.

Hay un paralelismo entre el juego y el lenguaje. En ambos el niño de 7 años comienza a tomar en cuenta puntos de vista externos.

Clasificación: (las primeras dos etapas corresponden al período

preoperacional)

- c) Etapa 3 (7 a 11 años): el niño tiene una noción madura de clase, particularmente en relación a objetos concretos. Los clasifica por propiedades definitorias, entiende las relaciones entre clase y subclase, etc.

La construcción del número en el niño

Una etapa de operaciones concretas: (las dos etapas anteriores pertenecen al periodo preoperacional)

- c) Tercera etapa: Ahora el niño puede construir grupos con igual cantidad de objetos y puede conservar la equivalencia a pesar de los cambios en su arreglo físico.

La diferencia entre la etapa preoperacional y la operacional reside en la centración: el niño pequeño se centra únicamente en una parte de la información. El niño de la etapa de operaciones concretas descentra su atención. Existe una relación de reciprocidad o compensación entre longitud y densidad. Esta reciprocidad es un tipo e reversibilidad. Además, el niño de la etapa de operaciones concretas es capaz de usar la operación de negación: comprende que un cambio es anulado por su acción inversa. Esta negación es otro tipo de reversibilidad. Por otro lado, en la etapa de operaciones concretas, el niño usa el argumento de identidad: la cantidad de objetos en cada grupo debe ser la misma debido a que no se han añadido ni sustraído objetos.

Piaget considera que los siguientes aspectos del pensamiento son interdependientes:

centración - descentración
estático - dinámico
irreversibilidad - reversibilidad

Si un niño se centra en los aspectos estáticos de una situación, no observará las transformaciones. Por lo tanto, no tendrá un pensamiento reversible.

Hay dos etapas principales en el desarrollo de las nociones sobre la inviolabilidad de las reglas.

1. De los 4 o 5 años a los 9 o 10 años. Abarca las dos etapas de la práctica de las reglas (egocentrismo y cooperación incipiente).
 - a) Etapa absolutista: el niño cree que alguna autoridad dió origen a las reglas y que nadie jugó el juego antes de que la autoridad lo jugara. Además, la autoridad da a las reglas un carácter sagrado, incambiable; son absolutas y no pueden ser alteradas.
 - b) En la segunda parte de la primera etapa, de los 6 a los 10 años, aumenta el conocimiento del niño sobre las reglas, y en consecuencia es capaz de reconocer un cambio real en las reglas cuando éste es propuesto.

2. La segunda etapa de la concepción de reglas va de los 10 u 11 años en adelante. El niño cree que las reglas pueden ser cambiadas, que se originaron a través de la invención humana, y que son mantenidas sólo por mutuo consentimiento entre iguales. En consecuencia, el niño va a estar de acuerdo en las modificaciones al juego en tanto los otros jugadores lo estén, y en tanto el cambio sea justo. Dado que él mismo participa como un igual en la invención de nuevas reglas, se siente obligado a seguir las reglas y así lo hace.

Como ahora se ve a sí mismo como un igual a los otros, desea ayudar en la formación y modificación del código moral. Por otro lado, aumenta el contacto del niño con puntos de vista divergentes. Conforme el niño amplía su esfera de contactos más allá de la familia, descubre que hay opiniones y costumbres diversas e incluso opuestas. Concluye que las reglas deben ser, hasta cierto punto, arbitrarias y por lo tanto cambiables.

Hasta los 10 años de edad, los niños dan dos tipos de respuestas. Una respuesta sostiene que la culpa está determinada por los motivos. El segundo tipo de juicio de esta etapa es menos madura. Esta respuesta sostiene que la culpabilidad está determinado no por los motivos, sino por la cantidad de daño causado. El juicio es "realista" en el sentido de que el criterio de culpabilidad no es subjetivo (la intención) sino lo material o "real" (cantidad de daño).

Este realismo se debe a tres factores:

1. Los mismos padres son realistas. Castigan más por el grado del daño que por la intención.
2. Hay una relación unilateral de respeto. Dado que el padre es respetado, también lo son sus reglas.
3. El niño tiene patrones egocéntricos de pensamiento. Dado que no puede asumir puntos de vista distintos al suyo, no puede ver la necesidad que los otros tienen de la verdad.

El respeto unilateral y el egocentrismo fomentan el realismo moral, así como el concepto inviolable y sagrado de las reglas.

El progreso se debe a su nueva independencia de la familia, a su mayor interacción con los demás y a su contacto con puntos de vista divergentes.

Este nivel es importante tanto matemática como psicológicamente. Las operaciones del periodo de operaciones concretas incluyen la "clasificación, la seriación, la construcción de la idea de número, las operaciones de lógica elemental de clases y relaciones de matemáticas elementales, de geometría elemental e incluso de física elemental" (58)

(58) COPELAND, Richard.. op. cit... p. 16

Implicaciones pedagógicas:

La reversibilidad permite ahora al niño comprender que la longitud permanece invariante a pesar de los cambios en la forma, y que el área puede conservarse a pesar de cambios en la forma y en el perímetro de una figura.

La capacidad que el niño ha desarrollado en el uso de símbolos convencionales, tanto verbales como escritos, le permite desarrollar un vocabulario de geometría que necesitará para acceder a ciertos conocimientos y para evolucionar en su nivel de pensamiento.

Por otro lado, el uso adecuado de símbolos convencionales reflejan que hay una decentración, y permiten al niño acceder a un verdadero diálogo.

Puesto que las imágenes del niño son kinéticas y consideran las transformaciones, el niño puede comprender cómo una figura se puede transformar en otra cambiando ciertas propiedades y manteniendo otras constantes.

Gracias a sus nuevas capacidades clasificatorias, ya puede comprender las relaciones de clase y subclase entre las figuras geométricas.

2.3.3.2 Operaciones formales. (De los 11 años en adelante)

El sistema de operaciones mentales del adolescente ya ha

alcanzado un alto grado de equilibrio. Este mayor equilibrio implica que las estructuras cognitivas del adolescente ahora se pueden adaptar eficientemente a una gran variedad de problemas. Estas estructuras son lo suficientemente estables como para asimilar una gran variedad de situaciones nuevas. En consecuencia, el adolescente no necesita acomodar drásticamente sus estructuras a problemas nuevos.

Otra característica es que ahora puede imaginar muchas posibilidades inherentes a una situación. El adolescente puede trascender el aquí y el ahora. Las transformaciones pueden ser ahora compensadas mentalmente.

Características generales del pensamiento del adolescente:

1. Su pensamiento es flexible. Ya tiene un gran número de operaciones cognitivas para enfrentar problemas.
2. El adolescente no se sorprenderá de los resultados porque previamente habrá considerado todas las posibilidades.
3. Su pensamiento es reversible de dos maneras: dispone de las operaciones de negación y de reciprocidad. Esto significa que su pensamiento puede ir en una dirección y después usar varios métodos para regresar al punto de partida.

Estas nuevas capacidades lo posibilitan para participar en asuntos abstractos y teóricos tales como la política y la filosofía. En este descubrimiento de sus nuevas habilidades, el

adolescente puede perder el contacto con su realidad.

El niño ya ha creado un método para enfrentar la información de sus observaciones y experimentos. Ya puede separar las variables y además ha descubierto cómo examinar por separado cada una de ellas. Esto lo logra manteniendo constantes todas las variables excepto aquella que pretende observar.

El niño ya es capaz de imaginar las posibilidades inherentes en una situación. Antes de actuar ante un problema, lo analiza y trata de desarrollar hipótesis sobre lo que podría ocurrir.

El pensamiento del niño ya no depende de las acciones reales. La situación real incluso pasa a ser una de las posibilidades que el pensamiento puede considerar.

Conforme aumenta la capacidad para formar clases complejas de las cosas según sus propiedades, el niño se va saturando de información que no puede comprender. En estas condiciones el niño debe analizar las variables que no había tomado en cuenta antes para que no perturben en el futuro. Esto lo puede lograr experimentando con ciertas variables mientras mantiene constantes las otras.

El niño va formando clases y combinándolas creando un sistema complejo de todas las combinaciones posibles. Este sistema empieza a funcionar independientemente de su contenido y se le denomina "sistema combinatorio", que es un instrumento autónomo

de pensamiento: una totalidad autoreguladora y de autosostenimiento. Las operaciones formales resultantes de un sistema total producen:

- una reversion del pensamiento en la que lo real es un caso particular de lo posible;
- el pensamiento proposicional, y
- la estrategia hipotetico-deductiva.

Las clases que el niño forma en esta etapa son el resultado de la combinación de otras clases, y no de la combinación de propiedades de los objetos, como sucedía en las operaciones concretas. En ambas el niño mantiene constantes ciertas variables mientras que experimenta con las demás.

Gracias a las operaciones formales, el niño cuenta con un mecanismo para la resolución de problemas, pues ahora puede enfrentar su medio utilizando la hipótesis, el experimento, la deducción. Las situaciones particulares no son más que una posibilidad entre todas las creadas por el sistema combinatorio. Puede razonar de lo particular a lo general y viceversa.

Al enfrentar un problema, el adolescente:

- a) Diseña el experimento adecuadamente. El adolescente comienza imaginando una serie de resultados puramente hipotéticos. Piensa en las diferentes posibilidades antes de actuar. Luego trata de descubrir cuál de las posibilidades es

operativa manteniendo todos los factores constantes excepto uno.

- b) Observa los resultados con exactitud.
- c) Obtiene de las observaciones las conclusiones lógicas adecuadas. Estas conclusiones son ciertas y necesarias.

La diferencia entre una operación concreta y una formal es que:

- Una operación concreta es una acción mental en la que las clases de objetos o las relaciones entre los objetos se combinan para hacer declaraciones sobre el medio.
- Una operación formal es una acción mental en la que lo que se combinan son las declaraciones para formar nuevas declaraciones.

La principal propiedad de las operaciones formales es la reversion de dirección entre realidad y posibilidad.

Ahora las dos formas de reversibilidad se combinan en un sistema que funciona como un todo.

La última etapa del comportamiento moral es el de "cooperación genuina" que comienza a los 11 o 12 años de edad y es la etapa en la que el niño adquiere un dominio completo de las reglas. Al igual que antes, está de acuerdo con los otros sobre como jugar el juego, y es dentro de este marco común que trata de ganar. Además, muestra un tipo de fascinación legalista con las reglas.

Disfruta discutiendo las diferencias de opinion acerca de las reglas, inventando nuevas reglas, y elaborandolas. Incluso trata de anticipar todas las contingencias posibles que puedan surgir.

Hay tres etapas en la práctica de las reglas:

1. egocentrismo, donde el niño no sabe las reglas o como aplicarlas pero cree que lo sabe;
2. cooperacion incipiente, donde el dominio de las reglas ha mejorado y los niños comienzan a compartirlas para competir, y finalmente.
3. la cooperación genuina, donde los niños conocen bien las reglas y disfrutan elaborandolas.

Implicaciones pedagogicas:

En virtud de que el pensamiento del adolecente es totalmente reversible, puede hacer clasificaciones logicas de las figuras geometricas con base en sus propiedades definitorias.

Gracias a su capacidad de aislar variables, puede hacer hipotesis sobre los resultados que ciertas transformaciones geometricas produzcan.

2.3.4 LA UNIDAD DE LA CONDUCTA, UNA TEORIA MAS QUE COGNOSCITIVA

Aun cuando Piaget enfatiza la actividad intelectual, su teoría no se restringe al desarrollo cognitivo, sino que es una teoría unificada en la que se integran los aspectos afectivos y sociomorales del desarrollo. Esta unidad no es únicamente intrapersonal, sino también interpersonal, pues no sólo comprende el desarrollo interno del niño, sino que es una teoría sociopsicológica de cómo este desarrollo está influenciado por las relaciones con adultos y semejantes.

Toda conducta tiene un elemento cognitivo y uno afectivo. El desarrollo intelectual es colateral y dependiente del desarrollo afectivo y moral. El pensar y el sentir están unidos en la conducta.

Lo que sí resulta válido es hacer una división entre conducta relativa a objetos y conducta relativa a personas. La adaptación a los objetos conlleva un sentimiento de necesidad lógica sobre muchas verdades de la realidad física. La adaptación a las personas conlleva un sentimiento de obligación moral. Afectivamente, la adaptación al mundo de los objetos se da a nivel intra-individual, es decir, involucra el interés, los esfuerzos, los sentimientos de placer, desilusión, etc. La adaptación al mundo de la gente es inter-individual, pues involucra sentimientos recíprocos, tales como simpatías, antipatías y sentimientos morales. El elemento afectivo es más

importante en lo referente a las personas. El elemento cognitivo es más importante en lo referente a las cosas. Sin embargo, esta es una diferencia de grado, pues todos los esquemas son afectivos y cognitivos.

El sentir es importante para el desarrollo de la voluntad. Piaget considera necesario educar en la voluntad como un "regulador de sentimientos o valores". La persona sin voluntad es inestable porque en unos momentos cree en ciertos valores y en otros los olvida.

Para Piaget el interés es el "combustible" del proceso constructivo. Sin interés no hay pensamiento. En el proceso constructivo, lo cognitivo depende de lo afectivo. Los métodos que pretendan promover el proceso constructivo deben despertar el interés espontáneo del niño.

Las operaciones se ejercitan más cuando el niño tiene que explicar fenómenos o alcanzar metas en una situación intrigante (desafío intelectual). Esto le interesa más que seriar por seriar o clasificar por clasificar.

2.3.5 LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA SEGUN PIAGET

El orden que el niño sigue en el desarrollo de la geometría parece ser inverso al orden del descubrimiento histórico.

Existen muchas geometrias, pero las más íntimamente relacionadas con las experiencias infantiles son la geometría topológica, la euclidiana, la proyectiva y la métrica.

2.3.5.1 Desarrollo histórico de la geometría

La primera geometría que existió fue la euclidiana. Los griegos estudiaron este tipo de geometría hace 2000 años. Su tema de estudio son las figuras de forma rígida. La geometría euclidiana se ocupa de las relaciones o coordinación entre diferentes objetos en el espacio. Estudia si tienen la misma longitud, altura, tamaño y distancia: si son verticales o paralelos. Los objetos se ubican de acuerdo a un eje horizontal (derecha-izquierda) y otro vertical (arriba-abajo). Ubicar los objetos, uno en relación al otro, conlleva mediciones de ángulo y de distancia, o dos medidas de distancia si se utilizan ejes vertical y horizontal como marco de referencia.

La topología es una rama de las matemáticas que se desarrolló hasta el siglo XIX. En la topología, no se considera que las figuras tengan formas rígidas; pueden ser deformadas por estiramiento o compresión de manera que adquieran formas diferentes y, sin embargo, conservan sin variación algunas de sus

propiedades.

Estas propiedades son las relaciones de:

- a) proximidad (o cercanía)
- b) separación
- c) orden
- d) encierre
- e) continuidad, que es la integración de las cuatro anteriores.

Figuras simples cerradas, tales como los cuadrados, los círculos y los triángulos son equivalentes topológicamente porque pueden ser transformadas una en otra. Estas figuras son denominadas curvas cerradas simples, y comprenden todo dibujo que comience y termine en el mismo punto, sin que ningún punto sea tocado dos veces.

Las figuras abiertas y las cerradas no son equivalentes topológicamente. Estirar o comprimir (sin romper) no transforma una figura abierta en una cerrada.

Un objeto tri-dimensional como un cubo es topológicamente equivalente a una esfera. Sin embargo, ambos son diferentes topológicamente a un objeto con forma de dona.

La geometría proyectiva estudia la perspectiva o como se ve un objeto desde diferentes posiciones. Los objetos son considerados no por sí mismos, sino en relación a alguna otra posición en el espacio.

2.3.5.2 El desarrollo de los conceptos de espacio en el niño

Los conceptos de espacio del niño se desarrollan a dos niveles diferentes. Uno es el nivel perceptual o sensoriomotor, es decir, el nivel de aprendizaje basado en las impresiones sensibles que se reciben a través del tacto y de la vista.

El segundo nivel es el de pensamiento o imaginación. Este nivel no es el resultado lógico del primero, cada uno se desarrolla por su propio lado. Por lo tanto, debe haber una reconciliación de estos desarrollos separados. Las propiedades euclidianas no se captan a través de la simple "percepción". La habilidad del niño para usar estas propiedades de manera que pueda abstraer la idea de triángulo y reconocer otras figuras como pertenecientes a la clase de triángulos conlleva la "representación".

2.3.5.2.1 La geometría topológica en el niño

Las primeras impresiones que el niño tiene del espacio o del mundo en el que vive son desorganizadas. La forma no es para él algo rígido. Las formas que ve son siempre cambiantes.

A la edad de tres años el niño no puede distinguir entre cuadrados y triángulos, dibuja ambos como curvas cerradas simples. No obstante, puede distinguir entre las figuras abiertas y las cerradas. El niño puede hacer estas distinciones antes de distinguir entre diversas curvas cerradas simples de tipo euclídiano tales como triángulos, cuadrados, rectángulos.

circulos. etc. El niño aún no es consciente de las relaciones euclidianas tales como la congruencia (mismo tamaño y forma).

El niño distingue los objetos en terminos de cual está más cerca o más lejos (proximidad). La cercanía de un objeto es la manera en que fundamentalmente explora el espacio. Es capaz de distinguir un objeto de otro o las partes de un objeto entre si (separación).

Sin embargo, dado que las matemáticas son una ciencia deductiva basada en el razonamiento lógico, ha habido una tendencia en los autores de textos para primaria de presentar las ideas matemáticas a un nivel lógico.

En la práctica escolar actual, se inicia con la introducción de la geometría euclidiana, que estudia figuras tales como líneas, triángulos, cuadrados y círculos. Al presentar la geometría en la primaria, generalmente se proponen actividades tales como: unir puntos con líneas, reconocer y nombrar figuras como triángulos, cuadrados y rectángulos.

Esta práctica supone que la primera concepción que el niño tiene del espacio es euclidiana. Sin embargo, Piaget sostiene que los primeros conceptos que el niño elabora son topológicos.

En el desarrollo de las nociones topológicas se debe cuestionar al niño sobre las relaciones topológicas que existen entre varios objetos.

Para cuando el niño tiene seis o siete años de edad, las relaciones topológicas deben estar resueltas. Y no es sino hasta los ocho o nueve años que los dibujos de los niños reflejan perspectiva, proporción y distancia.

El niño desarrolla las nociones de geometría euclidiana y proyectiva mucho después de haber dominado las relaciones topológicas.

2.3.5.2.2 La geometría euclidiana en el niño

El desarrollo del niño al dibujar figuras euclidianas va evolucionando desde una primera etapa en la que sólo se observan garabatos (antes de los tres años), pasa por una segunda etapa (4 a 6 años) en la que se van diferenciando las formas curvas de las rectas, así como también el número de ángulos, hasta que por fin llegan a distinguir perfectamente las figuras. En una tercera etapa, el niño puede reproducir todas las figuras, incluso las mixtas. En esta última etapa el niño logra identificar correctamente las figuras a través de la coordinación de sus acciones físicas para explorar el objeto, lo cual implica que el niño vuelve a un punto fijo de referencia.

La secuencia en el desarrollo del reconocimiento de formas geométricas es:

- a) objetos familiares
- b) formas topológicas
- c) formas euclidianas

A los siete u ocho años, el niño ya es capaz de investigar las figuras a través de un plan general de acción en el que coordina los movimientos que realizará para reconocer la figura.

La percepción no es suficiente para reconocer las figuras. Debe haber una acción física (operación) por parte del niño sobre el objeto. Las acciones al azar cuando se recorre el contorno de un objeto no es suficiente. Tiene que ser una acción coordinada en la que el niño tenga un punto de referencia en la figura al cual el pueda regresar (reversibilidad) para verificar las relaciones que existen en la figura.

En general, la actividad motriz es de gran importancia para comprender el pensamiento espacial.

Conservación:

La conservación de la longitud y de la dirección crean una distinción importante entre la geometría euclidiana y la topología. En la geometría euclidiana, la longitud, en tanto propiedad de un segmento de línea, es rígida o conservada. En la topológica, la longitud no tiene importancia. Todos los segmentos de línea son equivalentes. Una línea se puede alargar o comprimir sin que las relaciones topológicas se vean alteradas.

La medición en una dimensión

El aprendizaje de la medición tiene sus raíces en la actividad perceptual, pero los conceptos no están completamente desarrollados sino hasta una edad entre los 8 y los 11 años.

La medición es la síntesis de las operaciones de:

- a) subdivisión: división del objeto a ser medido en subunidades del mismo tamaño, dándose cuenta de que el todo es la suma de las partes: v
- b) sustitución: sustituir una parte (el objeto con que se mide) con otro (el objeto que es medido) un número apropiado de veces, construyendo así un sistema de unidades.

La medición es ante todo un cambio de posición, ya sea del movimiento del ojo o del instrumento con que se mide. Este cambio de posición también debe remitirse a un sistema de referencia en el espacio tal como ejes horizontal y vertical. Cuando el cambio de posición de un objeto (por ejemplo: una regla) lleva a la no-conservación de la longitud, el niño aun no está listo para medir. La medición necesita de la construcción mental de un sistema independiente de referencia espacial en el cual se puedan mover los objetos a nuevas posiciones, sin que la longitud del objeto en cada una de las posiciones cambie.

Un requisito para la comprensión de la medida es la conservación o invarianza de la distancia y de la longitud. La

distancia hace referencia a la separación lineal de los objetos o espacios vacíos. La longitud se refiere a una propiedad de los objetos mismos.

La comprensión de la distancia permite al niño la transición de una noción topológica del espacio a una noción euclidiana. La distancia, en tanto relación entre dos objetos, conlleva la medición y el sistema de referencia del espacio euclidiano.

De esta manera, los conceptos necesarios de: cambio de posición, conservación, y un sistema de referencia externo, son un requisito para la medición. Estos conceptos aparecen hasta los siete u ocho años.

La estructuración del espacio en términos de ejes vertical y horizontal

La idea abstracta de ejes vertical y horizontal no es completamente operacional sino hasta los nueve años y en algunos casos, hasta los once o doce años de edad.

Piaget concluye que "solo después de la edad de once o doce años, durante la etapa de operaciones formales del pensamiento, el niño es capaz de establecer verdaderos sistemas de referencia convencionales que le permitan comparar distancias y posiciones simultáneamente". (59)

(59) CGPELAND, Richard.. op. cit.... p. 220

La medición en dos y tres dimensiones

La medición de dos o tres dimensiones hace referencia a la idea euclidiana de espacio que conlleva un sistema de coordenadas horizontal y vertical.

El desarrollo en la medición de dos dimensiones se completa aproximadamente a los nueve años. El espacio bidimensional implica una región o área. Localizar un punto en un espacio bidimensional sin un instrumento para medir ángulos requiere de un sistema de referencia tal como los ejes vertical y horizontal.

En la medición de superficies es necesario el concepto de conservación o invarianza de área. Se debe comprender que el área no cambia necesariamente con el cambio de la forma.

"La conservación de área aparece al mismo tiempo que la conservación de longitud aun cuando uno piense que la de área es más difícil". (60) La conservación de área es el resultado de poder comparar dos áreas de diferente forma contando (subdivisión aditiva) el número de subdivisiones básicas de cada una, usando una unidad de medida básica tal como un triángulo o cuadrado.

La obtención del área multiplicando sus lados es una noción que no se comprende cabalmente sino hasta los once o doce años de edad.

(60) ibidem., p. 223

Determinar el área multiplicando los lados de la figura es más difícil que el método de dividir la figura en pequeñas unidades cuadradas y después contarlas, lo cual un niño de 9 años puede hacer sin problema.

El concepto de conservación de volumen se desarrolla después que el de conservación de número, longitud o peso. El niño debe descubrir que no sólo es el contenido interior lo que no varía, sino también el espacio ocupado dentro de un contexto más amplio.

Los niños de 8 años empiezan a conservar el volumen interior, es decir, comprenden que la forma externa (longitud, ancho y altura) pueden cambiar sin que cambie el volumen interno. Pero no es sino hasta los ocho o doce años que los niños entienden la idea de conservación de volumen ocupado.

2.3.5.2.3 Geometría proyectiva en el niño

Hay una gran diferencia entre la habilidad del niño para percibir o reconocer algo recto y su habilidad para reconstruirlo.

La perspectiva o la geometría proyectiva depende de la posición del observador y cambia conforme cambia la posición del observador. Lo "recto" de una línea es la única característica de la forma que se mantiene inalterada a pesar de los cambios de perspectiva.

El niño no puede dibujar las cosas correctamente desde diferentes puntos de vista o perspectivas sino hasta los ocho o nueve años.

2.3.5.3 La geometría que se debe enseñar en cada periodo

En la sección maternal se debe enseñar una geometría topológica. En el kindergarten y el primer año de primaria se da la transición de la topología a la geometría euclidiana. En esta etapa deben haber experiencias tales como la manipulación de objetos geométricos, el trazo de contornos con los dedos y manos, y el dibujo de figuras.

A los nueve años de edad, ya es posible introducir nociones de geometría euclidiana y proyectiva.

C A P I T U L O I I I

LA TEORIA DE VAN HIELE Y SU UNION
CON LA TEORIA PSICOGENETICA EN LA
ELABORACION DE UN MODELO DE
ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

3 LA TEORIA DE VAN HIELE Y SU UNION CON LA TEORIA PSICOGENETICA EN LA ELABORACION DE UN MODELO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE

3.1 NIVELES DE DESARROLLO PARA EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRIA SEGUN VAN HIELE

3.1.1 SURGIMIENTO DE LA TEORIA DE VAN HIELE

Fueron los esposos holandeses Dina Van Hiele Geldof y Pierre Marie Van Hiele quienes presentaron el modelo de aprendizaje de la geometría en 1957.

En los años '50 los Van Hiele fueron profesores de Geometría de la enseñanza secundaria en Holanda. En su experiencia docente observaron que los alumnos tenían dificultades en la comprensión de la geometría. Consideraron que en la secundaria se les exigía un alto nivel que no habían desarrollado en grados inferiores debido a la insuficiencia de experiencias de pensamiento.

Van Hiele explica:

Cuando comencé mi carrera como profesor de matemáticas, pronto me di cuenta de que era una profesión difícil. Habían partes del tema que podía explicar y explicar, y aun los estudiantes no entendían... En los años que siguieron cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades permanecieron. Siempre parecía como si les

estuviera hablando en un lenguaje diferente. Y considerando esta idea descubri la solución. los diferentes niveles de pensamiento. (61)

El trabajo de Dina Van Hiele-Geldof (que abarco de 1957 a 1984) trato sobre un experimento didáctico cuyo fin era elevar el nivel de pensamiento del estudiante. Pierre Van Hiele (1957) formuló la estructura de los niveles de pensamiento y principios para ayudar a los estudiantes a comprender mejor la geometria.

Los esposos Van Hiele dieron a conocer su teoria en una disertacion conjunta en la Universidad de Utrecht en 1957.

Dina Van Hiele-Geldof murio poco despues de completar su disertacion. Debido a su pronta muerte, solo deio escritos su disertacion, un articulo elaborado en 1958 y un articulo de periodico realizado junto con Pierre (1958). Todos los demas escritos sobre los niveles de pensamiento en la geometria han sido escritos por Pierre Van Hiele.

La disertacion de Dina Van Hiele-Geldof describe un "experimento didáctico" de un año de duracion que involucra dos clases de niños de 12 años a los que ella enseñaba. En su estudio

(61) TEPPPO, Anne., op. cit., p. 213

investiga tres cuestiones fundamentales:

1. Si es posible seguir una didáctica para presentar el material de tal manera que se desarrolle el pensamiento del niño desde el nivel más bajo hasta los niveles más altos en un proceso continuo.
2. Si los niños de 12 años en la clase más baja de la secundaria tienen el potencial de razonar lógicamente sobre los problemas geométricos y en qué medida puede desarrollarse ese potencial.
3. En qué medida es operativo el lenguaje en la transición de un nivel al siguiente.

Pierre Van Hiele escribió muchos artículos exponiendo sus ideas sobre el aprendizaje, niveles de pensamiento, introspección y estructura. Un gran número de estos artículos llegaron a ser la base de su libro "Comprensión e introspección" (1973). Un artículo que escribió en francés en 1959 "La pensée de l'enfant et la géométrie" (El pensamiento del niño y la geometría) atrajo la atención de psicólogos y educadores soviéticos que habían estado estudiando cómo los niños aprenden, y se interesaron particularmente en las dificultades que los niños tienen en el aprendizaje de la geometría.

Pierre Van Hiele también ha escrito y publicado materiales para el currículo de geometría de los grados 7º al 12º en Holanda basándose en los niveles de pensamiento.

Los primeros en interesarse por el modelo de Van Hiele fueron los educadores soviéticos, quienes en los años '60 estaban haciendo reformas curriculares. Tras largas investigaciones y experimentaciones tomaron el modelo de Van Hiele como base teórica del currículo de geometría de primaria en la Unión Soviética, el cual no fue implementado sino hasta 1964.

En cambio, países occidentales (con excepción de Holanda) ignoraron su modelo hasta que Izaak Wirszup habló del currículo soviético y del modelo de Van Hiele en una conferencia en la reunión anual del NCTM (62). Explicó a los profesores norteamericanos que el currículo de Geometría soviético era más eficaz que el suyo.

Desde finales de los '70 se ha realizado investigación en los EE.UU. en relación a la clasificación de los cinco niveles de pensamiento que Van Hiele propuso originalmente en 1957.

En España, los matemáticos Angel Gutierrez y Adela Jaime del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia, están realizando investigaciones importantes sobre el modelo de Van Hiele.

En México, Rodríguez Luevanos comenzó a usar (en 1990) este modelo para diseñar cursos no axiomáticos en geometría.

Actualmente, el CINVESTAV (63) realiza investigaciones sobre la aplicación del modelo de Van Hiele a la enseñanza de la geometría en secundaria.

Aun cuando la teoría de Van Hiele se ha estudiado en EE.UU. durante la última década, no ha sido incorporada en la práctica educativa. No obstante, la publicación del NCTM intitulada "Curriculum and Evaluation Standards" de 1989, ha promovido su implementación.

3.1.2 ELEMENTOS DEL MODELO

El modelo de razonamiento de Van Hiele está compuesto por dos elementos:

- 1) Cinco niveles de pensamiento en geometría.
 - 2) Las fases de aprendizaje.
- 1) Los niveles de razonamiento (parte descriptiva del modelo) están referidos a la geometría y van desde el razonamiento intuitivo y visual de los niños de pre-escolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las facultades de Ciencias.
- "Estos niveles son cinco (en algunas ocasiones están numerados

(63) Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

del 0 al 4 y en otras del 1 al 5)." (64)

De acuerdo con este modelo, el educando, ayudado por las experiencias de aprendizaje adecuadas, pasa a través de los cinco niveles, no pudiendo alcanzar un nivel de pensamiento si no ha pasado por los anteriores. Comienza con el reconocimiento de las formas como un todo (nivel 0), progresa hacia el descubrimiento de propiedades de figuras y razonamiento informal acerca de estas figuras y sus propiedades (niveles 1 y 2), y culmina en un estudio riguroso de geometría axiomática (niveles 3 y 4).

Nivel 1 (o 0) (reconocimiento): El estudiante percibe las figuras como unidades en forma global, sin reconocer explícitamente sus componentes y propiedades. Identifica, nombra, compara y opera en las figuras geométricas de acuerdo a su apariencia. Los clasifica de acuerdo a las semejanzas o diferencias físicas globales.

Nivel 2 (o 1) (análisis): El estudiante analiza las figuras en términos de sus componentes y relaciones entre componentes y descubre propiedades o reglas de una clase de figuras empíricamente. Sin embargo, no puede combinar esas propiedades. Describe las figuras de manera informal, reconociendo sus componentes y propiedades, pero no puede hacer clasificaciones

(64) GUTIERREZ, A. y Jaime, A., 1989. Selecciones bibliográficas temáticas. Bibliografía sobre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. 7(1)

lógicas. Deduce nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación.

Nivel 3 o 2 (clasificación): Hace clasificaciones lógicas de los objetos y descubre nuevas propiedades con base en propiedades ya conocidas y por medio de razonamiento informal. Describe las figuras de manera formal, es decir, comprende el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta. Comprende los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada pero no comprende el encadenamiento de estos pasos ni la estructura de una demostración. No puede hacer razonamientos lógicos formales, ni siente su necesidad. En consecuencia, tampoco comprende la estructura axiomática de las matemáticas.

Nivel 4 (o 3) (deducción): El estudiante puede probar teoremas deductivamente y establece interrelaciones entre sistemas de teoremas. Puede comprender y realizar demostraciones. Hace razonamientos lógicos formales. Comprende la estructura axiomática de las matemáticas. Sabe que se puede llegar a un mismo resultado desde distintas premisas.

Nivel 5 (o 4) (rigor): El estudiante introduce teoremas dentro de sistemas de postulados y analiza estos últimos, lo cual supone el conocimiento profundo de las características de un sistema axiomático y la capacidad para manejar y relacionar varios sistemas diferentes. La persona es capaz de manejar, analizar y

comparar diferentes Geometrias. Sin embargo, las investigaciones han mostrado una inconsistencia de este nivel con los otros cuatro. Además, este nivel solamente sería accesible a los matemáticos profesionales y a algunos estudiantes adelantados de las facultades de matemáticas.

Los dos factores principales que determinan el nivel de un estudiante son la habilidad y las experiencias previas en geometría.

2) Las fases de aprendizaje (parte prescriptiva del modelo) son recomendaciones a los profesores de como pueden organizar la actividad en sus clases para que los alumnos sean capaces de acceder a un nivel de razonamiento inmediatamente superior al que tienen actualmente. Aun cuando las fases son las mismas para cada nivel, cambian el contenido matemático, el lenguaje y la forma de resolver problemas.

Las fases son las siguientes:

1. Información: El profesor informa cual es el campo a estudiar y los problemas que se tratarán de resolver, es decir, pone al estudiante en contacto con el nuevo campo de estudio, sus materiales, objetivos, etc.. también sirve para que el profesor averigüe el nivel de conocimientos previos de los alumnos sobre este tema.

2. Orientación dirigida: Los estudiantes exploran el campo a estudiar a través de actividades orientadas por el profesor. Esto tiene como objetivo llegar a descubrir y aprender los componentes y las propiedades fundamentales del tema de estudio.

3. Explicitación: Es un proceso de diálogo y discusión entre los estudiantes, con intervenciones del profesor cuando sea necesario, a fin de vincular las experiencias previamente adquiridas con los símbolos lingüísticos correspondientes de manera que los estudiantes aprendan a expresarse con precisión (de acuerdo a su nivel).

Además, este diálogo también promueve que los estudiantes reflexionen en voz alta sobre el trabajo realizado, sus soluciones, dificultades, métodos, etc. El debate entre compañeros impulsa a cada estudiante a organizar sus ideas y expresarlas con rigor.

4. Orientación libre: Los estudiantes afianzan y profundizan sus conocimientos aplicándolos a situaciones nuevas que se presentan en actividades de investigación posteriores. Conviene que estas tareas se puedan desarrollar de diversas formas o que lleve a soluciones diferentes.

5. Integración: El estudiante adquiere una visión general de los conceptos y métodos que ha aprendido sobre el tema. El profesor resume en un todo el campo estudiado para que los estudiantes integren los nuevos aprendizajes a sus conocimientos

previos relativos a este campo. Aquí no se enseña nada nuevo, solo se integran los conocimientos.

Estas fases de aprendizaje siguen una secuencia lógica inalterable a excepción de la tercera fase. La explicitación no sucede cronológicamente entre la segunda y la cuarta fase, sino que se trata de una dinámica continua que se da después de cualquier tipo de actividad.

3.1.3 Propiedades del Modelo de Van Hiele:

- a) Recursividad: lo que es implícito en un nivel llega a ser explícito en el siguiente nivel.

Esta característica se resume en la siguiente tabla: (65)

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
Nivel 1	Objetos geométricos	Propiedades matemáticas de los objetos
Nivel 2	Propiedades matemáticas de los objetos	Relaciones entre propiedades y/o elementos de los objetos
Nivel 3	Relaciones entre propiedades y/o elementos de los objetos	Deducción formal de relaciones
Nivel 4	Deducción formal de relaciones	

(65) Cuadro obtenido de GUTIERREZ, A. et JAIME, A., 1989. El modelo de Razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los giros.. p. 53

- b) Secuencialidad: los niveles son secuenciales y no se puede alterar el orden de su adquisición.
- c) Especificidad del lenguaje: cada nivel tiene su propio lenguaje para comunicarse y un significado específico del vocabulario matemático, por lo que no se pueden entender personas que utilicen lenguajes de distintos niveles. Por ello, el profesor se debe situar en el nivel del alumno.
- d) Continuidad: el progreso en los niveles de Van Hiele se produce de forma continua y pausada, y puede durar varios años en el caso de los niveles 3 y 4.
- e) Localidad: generalmente, un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en todas las áreas de la geometría, pues hay variaciones en sus conocimientos previos.
- f) "El material enseñado a los estudiantes arriba de su nivel se reduce a un nivel inferior" (66). No se puede esperar que los estudiantes de un nivel más bajo de pensamiento comprendan los contenidos de instrucción que se presentan a un nivel más alto. Según Van Hiele, "esta es la principal causa de malos resultados en la enseñanza de las matemáticas" (67).

(66) FUYS, David, et. al., op. cit., p. 8
(67) TEPPON, Anne., op. cit., p. 213

- g) El progreso de un nivel al siguiente depende más de las experiencias instruccionales que de la maduración.
- h) Se pasa a través de varias "fases" al progresar de un nivel al siguiente.

Los Van Hiele (1958) se dieron cuenta de que el aprendizaje es un proceso discontinuo y que hay saltos en la curva de aprendizaje que revelan la presencia de "niveles". Observaron que en ciertos puntos de instrucción el proceso de aprendizaje se detiene. Después continúa como antes y el estudiante parece haber madurado. Pero mientras tanto, el profesor no logra explicar la materia. Parece hablar un idioma que los alumnos que aun no han alcanzado el nuevo nivel no pueden entender. Puede que acepten la explicación del profesor, pero no estarán realmente aprendiendo. El alumno tal vez pueda imitar ciertas acciones, pero no comprende su actividad hasta que ha alcanzado el nuevo nivel.

Los niveles se caracterizan por diferencias en los objetos de pensamiento. Por ejemplo, en el nivel 0, los objetos de pensamiento son figuras geométricas. En el nivel 1 el estudiante opera sobre clases de figuras (que eran productos de actividades del nivel 0), y descubre propiedades para estas clases. En el nivel 2 las propiedades se convierten en los objetos sobre los que el estudiante actúa. En el nivel 3, las relaciones de ordenamiento se convierten en el objeto de operación. En el

nivel 4 los objetos de pensamiento son los fundamentos de estas relaciones de ordenamiento.

Van Hiele (1959/1984) también señala que cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y su propio sistema de relaciones que conectan estos símbolos. Lo que es correcto para un nivel puede no serlo para otro. La estructura del lenguaje es un factor crítico en el paso de un nivel a otro (de estructuras globales y concretas (nivel 0), a estructuras geométricas visuales (niveles 1-2), a estructuras abstractas (niveles 3-4)). Van Hiele explica que muchos de los fracasos en la enseñanza de la geometría son el resultado de una barrera en el lenguaje debido a que el profesor utiliza lenguaje de un nivel más alto al que el estudiante puede comprender.

Según los Van Hiele, el nivel de pensamiento está determinado en parte por las experiencias previas de aprendizaje. El paso de un nivel de pensamiento a otro depende más de la instrucción que de la edad o la madurez biológica, y los tipos de experiencias instruccionales pueden afectar el progreso.

Es posible que se presente al alumno material que está por arriba de su nivel de pensamiento, lo cual rebaja el contenido de la materia a un nivel inferior.

Algunos métodos de enseñanza pueden no permitir el logro de los niveles de pensamiento más elevados.

3.1.4 EL "BROOKLYN COLLOGE PROJECT"

Un grupo de investigadores norteamericanos realizaron el "Brooklyn College Project" con base en el modelo de los Van Hiele.

Los resultados del análisis de textos elaborado por el Proyecto tiene implicaciones en tres Áreas generales:

- a) Para la investigación en los materiales curriculares.
- b) para el diseño de textos y otros materiales curriculares.
- c) y para la práctica en el salón de clases.

Los resultados obtenidos por el Proyecto. tienen varias implicaciones teóricas sobre las características de los niveles:

- Su naturaleza jerárquica y secuencia fija.
- discontinuidad entre niveles.
- aspectos de lenguaje de cada nivel. y
- la característica del pensamiento de ser implícito-explicito en niveles avanzantes.

Los resultados del Proyecto sustentan la secuencia fija de los niveles. al menos en relación a los niveles 0, 1 y 2. Los estudiantes que se desempeñaron con éxito en los niveles 1 o 2 se desempeñaron igual en los niveles más bajos.

En cuanto a la consistencia de un nivel a través de diferentes temas. se observó que el nivel más alto de pensamiento que un

estudiante alcanzo en un tema tambien lo logro en otros. Sin embargo, esto no significa que el estudiante no haya tenido que comenzar desde el nivel 0 o 1 en el nuevo tema aun cuando se hubiera desempeñado a nivel 1 o más en los otros. Mientras que el nivel de "entrada" de los estudiantes pudo haber variado en diferentes temas, dependiendo basicamente de sus experiencias escolares previas, su nivel de pensamiento despues de la instruccion fue consistente.

DESCRIPTORES

El Proyecto elaboro descriptores para cada uno de los niveles. Estos descriptores fueron revisados y aceptados por el mismo Pierre Van Hiele.

Nivel 0: El estudiante identifica formas (cuadrados, triangulos, etc.) y otras configuraciones geometricas (lineas, angulos, etc.), y opera sobre ellas.

Descriptores del nivel 0:

El estudiante:

1. Identifica las instancias de una forma con base en su apariencia como un todo
 - a) en un dibujo, diagrama o recortes.
 - b) en diferentes posiciones.
 - c) en una forma u otras configuraciones mas complejas.

2. Construye, dibuja o copia una forma.
3. Nombra formas y otras configuraciones geométricas. y utiliza nombres apropiadamente.
4. Compara y clasifica formas con base en su apariencia como un todo.
5. Describe verbalmente las formas por su apariencia como un todo.
6. Resuelve problemas rutinarios manipulando las figuras más que basándose en sus propiedades.
7. Identifica las partes de una figura pero:
 - a) no la analiza en términos de sus componentes.
 - b) no piensa en las propiedades como características de una clase de figuras.
 - c) no hace generalizaciones sobre las formas ni utiliza el lenguaje correspondiente.

Nivel 1: El alumno analiza las figuras en términos de sus componentes y de las relaciones entre los mismos; establece propiedades de una clase de figuras empíricamente, y las utiliza para resolver problemas.

Descriptores del nivel 1:

El estudiante:

1. Identifica y prueba las relaciones entre los componentes de figuras.
2. Recuerda y utiliza vocabulario apropiado para los componentes y relaciones.
3. a) compara dos formas de acuerdo a las relaciones entre sus componentes.
b) clasifica las formas de diferentes maneras de acuerdo a ciertas propiedades.
4. a) interpreta y usa descripciones verbales de las propiedades de una figura y con base en ello la construye o dibuja.
b) interpreta los enunciados verbales o simbólicos de reglas y los aplica.
5. Descubre empíricamente las propiedades de figuras específicas y generaliza las propiedades a esa clase de figuras.
6. a) Describe una clase de figuras en términos de sus propiedades.
b) Dice qué forma tiene una figura, de acuerdo a ciertas propiedades.
7. Identifica qué propiedades usadas para caracterizar una clase

de figuras también se aplican a otras y compara las clases de acuerdo a sus propiedades.

8. Descubre las propiedades de una clase no familiar de figuras.
9. Resuelve los problemas geométricos usando propiedades conocidas de figuras.
10. Formula y usa generalizaciones sobre propiedades de figuras. además utiliza el lenguaje correspondiente pero.
 - a) no explica como ciertas propiedades de una figura están interrelacionadas.
 - b) No formula y usa definiciones formales.
 - c) No explica relaciones de subclase.
 - d) No ve la necesidad de probar o dar explicaciones lógicas para las generalizaciones descubiertas empíricamente. y no utiliza el lenguaje correspondiente correctamente.

Nivel 2: El estudiante formula y utiliza definiciones. da argumentos informales que organizan propiedades descubiertas anteriormente, y elabora argumentos deductivos.

Descriptores del nivel 2:

El estudiante:

1. a) Identifica diferentes conjuntos de propiedades que caracterizan una clase de figuras y prueba que estos sean suficientes.

- b) Identifica el conjunto mínimo de propiedades que pueden caracterizar una figura.
 - c) Formula y usa una definición para una clase de figuras.
2. Da argumentos informales (usando material de apoyo).
- a) Justifica, utilizando relaciones lógicas, una conclusión que obtuvo a partir de cierta información.
 - b) Ordena clases de formas.
 - c) Ordena dos propiedades.
 - d) Descubre nuevas propiedades por deducción.
 - e) Interrelaciona varias propiedades en un árbol genealógico.
3. Da argumentos informales deductivos.
- a) Sigue un argumento deductivo y puede dar parte del argumento.
 - b) Da un resumen o una variación de un argumento deductivo.
4. Da más de una explicación para probar algo y justifica estas explicaciones usando árboles genealógicos.
5. Reconoce informalmente la diferencia entre un enunciado y su inverso.
6. Identifica y usa estrategias para resolver problemas.
7. Reconoce el rol del argumento deductivo y enfrenta los problemas de manera deductiva, pero

- a) No ve la deducción en un sentido axiomático.
- b) No distingue formalmente entre un enunciado y su inverso.
- c) Aun no establece interrelaciones entre sistemas de teoremas.

Nivel 3: El estudiante incorpora, en un sistema de postulados, teoremas e interrelaciones entre sistemas de teoremas.

Descriptores del nivel 3:

El estudiante:

1. Reconoce la necesidad de terminos indefinidos, definiciones y supuestos básicas.
2. Reconoce las características de una definición formal y la equivalencia entre definiciones.
3. Prueba en un marco axiomático relaciones que fueron explicadas informalmente en el nivel 2.
4. Prueba las relaciones entre un teorema y unos enunciados.
5. Establece interrelaciones entre sistemas de teoremas.
6. Compara y contrasta diferentes pruebas de teoremas.
7. Examina, en una secuencia lógica, los efectos resultantes del cambio de una definición o postulado inicial.

8. Establece un principio general que unifica varios teoremas diferentes.
9. Hace comprobaciones a partir de axiomas simples apoyando con frecuencia sus argumentos en un modelo.
10. Da argumentos deductivos formales pero no investiga axiomas ni compara sistemas de axiomas.

Nivel 4: El estudiante establece rigurosamente teoremas en diferentes sistemas postulacionales y analiza/compara estos sistemas.

Descriptores del nivel 4:

El estudiante:

1. Los teoremas son incorporados con rigor dentro de sistemas axiomáticos diferentes.
2. Compara sistemas axiomáticos; explora espontáneamente como los cambios en los axiomas afectan la geometría resultante.
4. Inventa métodos generalizados para resolver clases de problemas.
6. Estudia a profundidad la lógica del sujeto para desarrollar nuevas formas de enfocar la inferencia lógica.

Los Van Hiele concluyeron que había discontinuidad entre niveles. A este respecto, el Proyecto obtuvo resultados contradictorios.

Por un lado, algunos estudiantes se mostaban ubicados en un nivel y parecia que no eran capaces de progresar al siguiente. En cambio, en el caso de otros alumnos, el progreso de niveles se daba en pequeños pasos. Algunos estudiantes parecian estar en transición entre los niveles 0 y 1, distinguian las propiedades de figuras familiares, pero cuando se les confrontaba con formas desconocidas, bajaban al nivel 0. Parecia un proceso oscilatorio entre los niveles 0 y 1 hasta que los objetos adquirian propiedades.

En 1986, Burger y Shaughnessy concluyeron, a partir de la observación del pensamiento transitorio, que los niveles eran de naturaleza más continua de lo que parecia. Sin embargo, es posible que la continuidad resida en la enseñanza y no en el aprendizaje.

Aun cuando el progreso de los sujetos en el estudio del Proyecto parece ser en algunos aspectos continuo, puede de hecho ser discontinuo. Es decir, bajo la guía del entrevistador, los estudiantes van progresando en el aprendizaje, en el uso de nuevos conceptos y en la formulación de juicios. Sin embargo, tal progreso no corresponde a la habilidad del estudiante para iniciar los procesos espontáneamente. Al pasar de un nivel a otro parece haber un cambio en la metacognición de los estudiantes: es decir, en su comprensión acerca de la naturaleza de una tarea y en su creencia sobre lo que constituye una

respuesta apropiada.

El estudio del Proyecto corrobora la aseveración de los Van Hiele en relación a que cada nivel tiene su propio lenguaje.

En resumen, los resultados del estudio del Proyecto sustentan las cuatro características principales del modelo de Van Hiele y sugieren posibles modificaciones de dos características, la discontinuidad y el lenguaje, para incluir aspectos de metacognición. Los resultados también sustentan la reciente caracterización de P.M. Van Hiele del modelo en términos de tres niveles: visual, descriptivo y teórico. El Proyecto correlaciona el nivel 0 con el visual, el nivel 1 con el descriptivo, y los niveles 2-4 con el teórico. El nivel 2 involucra deducciones informales, el nivel 3 es el axiomático y formal, y el nivel 4 involucra sistemas axiomáticos y la lógica. Actualmente, Van Hiele ya no incluye en su modelo el último nivel, que en realidad estaría más allá del nivel teórico. Su preocupación actual son los niveles de pensamiento que generalmente se alcanzan al final de los cursos de matemáticas de preparatoria. Es posible que los estudiantes lleguen a un nivel más riguroso del pensamiento geométrico que el nivel teórico a través de cursos universitarios avanzados. Sin embargo, su último modelo no se ocupa de ese nivel.

La mayoría de las investigaciones sobre el modelo de Van Hiele han tratado acerca de temas de geometría plana. El Proyecto

considera que valdria la pena investigar los niveles de pensamiento en aritmetica, algebra o geometria tridimensional. Sin embargo, es importante tener en cuenta que "las características propias de las distintas áreas (aritmetica, algebra, geometria, etc.) marcan diferencias en el razonamiento". (68)

Los niveles de pensamiento se han aplicado a otras áreas como la economia y la quimica. Angel Gutiérrez y Adela Jaime (1991) señalan que los intentos por aplicar el modelo de Van Hiele fuera de la geometria han tenido escaso éxito.

El Proyecto opina que el modelo de Van Hiele debe ser investigado en escenarios más generales dentro de la psicología del desarrollo y de la psicología cognitiva. Una orientacion de tal investigación seria explorar el modelo en un contexto Piagetiano. P.M Van Hiele explico que una parte importante de "las raices de su trabajo" pueden encontrarse en las teorías de Piaget, pero tambien hizo notar que hay "desacuerdos" importantes.

La similitud fundamental radica en que para ambos autores el aprendizaje parte de la actividad fisica y mental del alumno: en las primeras etapas del desarrollo del pensamiento se debe manipular un material de tipo concreto. Por otro lado, los dos

(68) GUTIERREZ, a. et Jaime, a., 1989.. op. cit... p. 49

están de acuerdo en que el diálogo y el debate son indispensables para la estructuración del pensamiento.

Sin embargo, existen diferencias esenciales: mientras que para Piaget la maduración es un elemento fundamental en el desarrollo intelectual, Van Hiele no considera que esta sea un factor que influya de manera importante en el desarrollo del pensamiento en geometría. En su opinión, las experiencias previas tienen mayor trascendencia.

Por otro lado, para Van Hiele, el aprendizaje depende de la presentación adecuada del contenido y no tanto de consideraciones afectivas o valorativas, mientras que para Piaget, lo afectivo y lo cognitivo están íntimamente ligados.

3.2 UN MODELO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS COMO MARCO DE REFERENCIA

Con el proposito de sistematizar el análisis de las aportaciones de Piaget y de Van Hiele a la enseñanza de la geometria se usarán parámetros de contrastación adoptados de un modelo de enseñanza-aprendizaje. Este modelo es un instrumento que permitirá ordenar sistemáticamente las implicaciones educativas de las teorías en cuestion.

En un modelo de enseñanza-aprendizaje se integran los elementos de la didactica (educando, docente, objetivos, asignatura y medio) con los tres momentos didácticos (planeación, implementación y evaluación). Este modelo indica de qué manera se abordara cada uno de los elementos en los tres momentos del proceso enseñanza-aprendizaje de las matematicas.

El termino modelo significa en este caso "un esquema explicativo de las operaciones que se tienen que realizar para el cabal cumplimiento del proceso de enseñanza, a la luz de la teoría en que se apoya" (69).

Proceso es un "conjunto de las fases sucesivas de un fenomeno".

(70)

(69) GAGO HUGUET, Antonio.. Modelos de sistematización del proceso de enseñanza-aprendizaje.. p. 76

(70) ibidem.. p. 77

"Proceso de enseñanza-aprendizaje" es el "conjunto de las fases sucesivas del fenómeno en que concurren como elementos el alumno, un contenido (lo que se va a aprender) y un guía (que no se considera indispensable)" (71).

La enseñanza y el aprendizaje "constituyen un proceso intencionado y sistemático que se inicia con el planteamiento de un propósito concreto y definido y concluye con la ejecución de una nueva conducta esperada del alumno" (72)

Un modelo de enseñanza-aprendizaje es un sistema, es decir, un "conjunto ordenado de componentes interrelacionados, interdependientes e interactuantes, que funcionan de manera integrada para obtener un resultado" (73).

En un sistema, cada propósito o resultado previsto determina los procesos necesarios y, a su vez, cada proceso determina el tipo de componentes que se requieren.

En todo sistema existe un "insumo" que es transformado en un "producto" final.

Característica de todo sistema es su "dinámica autocorrectiva casi permanente" (74).

(71) idem
(72) idem
(73) ibidem, p. 79
(74) ibidem, p. 60

Por lo tanto, considerando que un modelo de enseñanza-aprendizaje es un sistema, tendrá los siguientes elementos:

Proposito: objetivos educacionales

Proceso: planeación de contenidos y de experiencias de aprendizaje dirigidas al logro de los objetivos.

Componentes: recursos humanos,
recursos materiales, y
recursos tecnológicos.

Los estudiantes, que son un "insumo", pasaran por un proceso de transformación dirigido hacia el logro del proposito, obteniendo como "producto" cambios cualitativos.

Dicha transformación debe adecuarse a las características previas del estudiante que influirán en el logro de los objetivos educacionales. Por lo tanto, esas características deben ser conocidas antes de iniciar el proceso.

Considerando lo anterior, se elaboro el siguiente modelo de enseñanza-aprendizaje:

1. Conocimiento de las características del alumno que intervienen en su aprendizaje.
2. Objetivos.
3. Selección y organización de contenidos.
4. Selección y organización de actividades de aprendizaje.

Aquí se analiza, el material didáctico, así como la

metodología de la instrucción y el papel del profesor.

5. Evaluación.

Con base en este marco de referencia se irá analizando lo que sobre cada uno de los cinco aspectos establecen Piaget y Van Hiele.

3.2.1 IMPLICACIONES EDUCATIVAS DE LA TEORIA DE PIAGET

3.2.1.1 Conocimiento de las características generales del alumno que intervienen en su aprendizaje

Debido a que todos los niños tienen que pasar por los mismos estadios, se puede estructurar el currículo y las actividades con cierta organización.

Lenguaje y pensamiento:

El lenguaje y el pensamiento del niño no son iguales a los del adulto. El niño asimila el lenguaje a las estructuras que posee según su nivel de desarrollo. Así, por ejemplo, una palabra puede ser para un niño algo más parecido a una imagen que a un concepto. Es decir, la palabra no se generaliza a una clase (como en el caso de un concepto), sino que se restringe a un objeto (como lo hace una imagen). Esto implica que las operaciones no son aprendidas paralelamente a las formas lingüísticas: los

mecanismos logicos no se transmiten pasivamente con el lenguaje. sino que requieren una construcción activa por parte del sujeto.

El hecho de que el niño aprenda a hablar no implica que conozca y maneje las clasificaciones que subyacen al idioma.

El lenguaje es una condición necesaria pero no suficiente para completar las estructuras operacionales. Sin embargo, la transmisión social del lenguaje hablado no es esencial para la formación de estructuras. Esto se evidencia en el hecho de que no existen grandes diferencias entre los niños sordos y los normales en cuanto a la formación de clasificaciones elementales, pero si existen diferencias cuando se trata de clasificaciones más complejas (es decir, de completar estructuras).

Lo que hace el lenguaje es acelerar la formación de clases y series, y ayudar a su completación.

Existe, sin embargo, una diferencia entre la vinculación del lenguaje con la clasificación y su vinculación con la seriación: las estructuras de la clasificación van de la mano con las estructuras verbales, mientras que las estructuras de seriación están mucho menos conectadas con el lenguaje.

El conocimiento del mundo físico no es una copia de la realidad adquirida a través de los sentidos y de la instrucción verbal. El conocimiento es una reconstrucción interna de la realidad a partir de las acciones que se realiza con los objetos. La

estructuración que el niño haga de su mundo dependerá del periodo de desarrollo en el que se encuentre, así como de la herencia biológica.

Memoria:

La memoria es más que una simple retención, es un proceso de codificación, relacionado con el nivel de desarrollo de las operaciones de la persona. La memoria mejora con el desarrollo de la inteligencia.

3.2.1.2 Objetivos

Para Piaget, la finalidad de la educación no es impartir conocimiento. No lo es por las siguientes razones:

- 1) Es poco lo que los profesores pueden enseñar. Aun cuando pueden hacer que el niño repita verbalmente, esto no asegura una comprensión real.
- 2) El conocimiento no es una "cosa" que pueda ser transmitida. El niño debe ir construyendo su propio conocimiento. La verdadera comprensión implica acción tanto a nivel motor como a nivel intelectual.

Piaget considera que el propósito educacional básico es formar la mente del niño y no solo amueblarla: no basta con enseñar lectura, escritura y aritmética, hay que desarrollar toda la

personalidad humana.

Esta formación implica la adaptación al sistema social mediante el desarrollo del raciocinio intelectual y moral.

Según Piaget, si un programa no fomenta el desarrollo afectivo y moral, tampoco fomentará el desarrollo intelectual. En los métodos de educación que Piaget sugiere se interrelacionan los aspectos cognitivos, afectivos y sociales de la conducta.

Por lo tanto, no podemos restringir el aprendizaje de la lectura, la escritura y las matemáticas a los aspectos intelectuales de la escuela, ni podemos restringir el desarrollo moral al hogar y a la iglesia.

Piaget explicó que no podían encontrarse conductas afectivas sin elementos cognitivos ni conductas cognitivas sin elementos afectivos. Considera que los sentimientos se construyen junto con la estructuración del conocimiento.

Los objetivos educacionales siempre están dirigidos hacia la adquisición de un aprendizaje. Sin embargo, Piaget distingue entre aprendizaje en el sentido restringido y aprendizaje en el sentido amplio. El primero se refiere a la simple adquisición de respuestas específicas a situaciones particulares. Este aprendizaje es superficial, inestable, no permanente y no generalizable. El aprendizaje en el sentido amplio está basado en el desarrollo, es decir, en el logro paulatino de un mayor

equilibrio.

Por lo tanto, un autentico aprendizaje es el resultado de haber asimilado los nuevos contenidos a estructuras cognitivas ya existentes. Cuando se promueve este tipo de aprendizaje el alumno va regulando sus propias actividades, a su propio paso, y seleccionando las experiencias para aprender lo que necesita.

El aprendizaje en el sentido amplio está implícito en las metas de la educación:

La meta principal de la educación es crear hombres que sean capaces de hacer cosas nuevas y no de repetir simplemente lo que otras generaciones han hecho ya - hombres que sean creativos, de inventiva y descubridores-. La segunda meta de la educación es la de formar mentes que puedan ser críticas, que verifiquen y no acepten cuanto se les ofrece. (75)

Así pues, Piaget propone como un objetivo de la educación formar hombres creativos. Para producir respuestas originales debe haber una acomodación de los aprendizajes pasados, lo cual implica una adaptación más estable.

La creatividad encuentra un campo fértil de expresión en las actividades que requieren de acomodación. Además, la

(75) RICHMOND, P.G., op. cit., p. 153

creatividad se fomenta cuando se interrelacionan diversas materias. pues así se puede transferir creativamente lo aprendido en un área a otra. Por ejemplo, los conocimientos de matemáticas pueden ser aplicados en los trabajos manuales.

3.2.1.3 Selección y organización de contenidos de aprendizaje

El contenido de las lecciones y la organización de los cursos en las diferentes edades deben tomar en cuenta los estadios que Piaget propone.

Si existe una gran diferencia entre el contenido de aprendizaje y el nivel de estructuras cognitivas del niño, pueden suceder dos cosas: o el niño transforma la experiencia de manera que la pueda asimilar y en consecuencia no está aprendiendo lo que se quiere, o simplemente aprende una respuesta específica que no será estable ni podrá generalizarse. Además, muy probablemente desaparecerá pronto.

Para que los contenidos resulten interesantes, deben tener cierta novedad para el niño. Los niños se interesan y aprenden más cuando el contenido es relativamente nuevo. El contenido no debe ser tan nuevo como para provocar gran distorsión en la estructura mental existente y, al mismo

tiempo, debe ser lo suficientemente nuevo como para producir algún grado de conflicto.

Las primeras experiencias escolares con geometría deberían partir de lo que ya se conoce de manera intuitiva:

Piaget observó que los conceptos de geometría topológica (distinciones entre figuras cerradas y abiertas, etc.) se desarrollan en el niño antes que los de la geometría euclidiana (medición de ángulos, distancias, etc.) y que los de la geometría proyectiva (medición de perspectivas, coordenadas, etc.). Las nociones de geometría euclidiana y proyectiva se empiezan a comprender hasta los 7 años de edad aproximadamente.

3.2.1.4 Selección y organización de actividades de aprendizaje

Generalidades sobre la actividad del niño en el aprendizaje.

El aprendizaje se centra en la actividad del niño. Sobre esta actividad se puede decir lo siguiente: (76)

- a) es el resultado de motivaciones morales e intelectuales.

(76) apud, ARAUJO, J., et CHADWICK, Clifton., Tecnología educacional, teorías de instrucción.. p. 133

b) es más efectiva en un medio educativo donde reina la colaboración y la cooperación.

c) debe estar dirigida hacia el autoaprendizaje, lo cual implica fomentar la responsabilidad en el niño.

En la selección de los métodos de enseñanza y en la organización de las experiencias de aprendizaje se debe tomar en cuenta la visión de Piaget sobre el modo en que interaccionan el intelecto y el medio (es una relación de adaptación en busca del equilibrio):

Una de las sugerencias metodológicas derivadas del enfoque piagetiano es la idea de la "enseñanza por conflictos", que consiste en inducir al alumno a confrontar sus creencias actuales y los nuevos contenidos para detectar incompatibilidades. (77)

Dicho de otra manera, en las actividades de aprendizaje se debe fomentar la presencia de elementos que provoquen un "desequilibrio" que exija una nueva "acomodación" de las estructuras y en consecuencia se puedan "asimilar" los elementos perturbadores, dando así origen a un mayor "equilibrio".

(77) ibidem, p. 133

La teoría de la equilibración como fundamento de la actividad:

La teoría de la equilibración señala que los procesos autoregulatorios promueven la actividad (física y mental) para lograr una acomodación que dé lugar a aprendizajes auténticos. Cuando al niño se le permite controlar su propio aprendizaje a través de una actividad enfocada a la acomodación, puede ir construyendo sus estructuras cognitivas. Esto no será posible si se utilizan métodos de transmisión social en los que no se permite al alumno construir su propio conocimiento a través de la actividad.

El desarrollo de la inteligencia es el reestablecimiento del equilibrio entre la asimilación y la acomodación. Este desarrollo conlleva aplicar lo ya comprendido a lo que se va a comprender (asimilación). Lo no conocido modifica lo conocido (acomodación). "La asimilación es la aplicación de la experiencia pasada a la presente. La acomodación es el ajustamiento de esa experiencia para tomar consideración de la presente." (78)

Todo aprendizaje supone que la nueva experiencia sea transformada para adaptarse al modelo que el niño tiene del mundo, es decir, debe haber una asimilación. Además, esa misma experiencia

(78) RICHMOND, P.G., op. cit.... p. 129

transformará el modelo que el niño tiene del mundo, es decir, habrá también una acomodación. Esta adaptación requiere de una actividad, ya sea física o mental.

Es por ello que todo nuevo aprendizaje debe basarse en experiencias previas. Cuando una experiencia de aprendizaje no se puede asimilar, es probable que se cree un núcleo de información aislado que solo es aplicable a la situación en la que se aprendió. Esta división artificial de las experiencias de aprendizaje crea un conocimiento no aprovechable (79).

El aprendizaje es el resultado de una reestructuración de las estructuras cognitivas orientada hacia una nueva forma de equilibrio. El comportamiento visible es sólo una manifestación de esas estructuras.

Importancia de la manipulación como actividad de enseñanza:

La Escuela de Ginebra señala que la atención del niño no debe versar sobre el objeto, sino sobre las operaciones que puede realizar con los objetos. Esas operaciones serán primero manipulatorias, pero después se interiorizarán y pasarán de lo concreto a lo abstracto.

El paso de lo concreto a lo abstracto resulta más natural a

(79) ibidem, p. 130

través de las operaciones con el objeto y no a través de las observaciones de él. Los niños necesitan manipular las cosas para aprender. La instrucción verbal no es suficiente, especialmente en el caso de los niños pequeños. El niño debe interactuar físicamente con su ambiente. Sin esta actividad no hay aprendizaje significativo. La simple recepción pasiva de los hechos o conceptos es sólo una parte de la verdadera comprensión.

El niño desarrolla esquemas relativos a los objetos a través de la manipulación. Posteriormente estos esquemas son interiorizados en forma de pensamiento.

Existen tres niveles en la comprensión del niño:

- 1) Comprensión motora. El niño actúa directamente sobre los objetos, manipulándolos. Adecua sus movimientos a las propiedades de los objetos.
- 2) Actividad interna sobre una base intuitiva. El niño realiza acciones sobre los objetos de una manera muy abreviada e interna. Debido a que la actividad se puede realizar mucho más rápido a un nivel mental que a un nivel físico el niño puede hacer más en menos tiempo.
- 3) Comprensión verbal. El niño elabora conceptos a un nivel verbal abstracto y es capaz de expresar sus operaciones mentales en palabras. (Las operaciones mentales son el resultado de haber interiorizado la acción física del niño

con objetos.) Para que exista comprensión verbal o escrita debe haber habido experiencia concreta.

Esta progresión en los niveles de comprensión muestra que los procesos cognitivos van abarcando un mayor tiempo y espacio, por lo tanto va habiendo un mejor entendimiento de las relaciones causa-efecto.

Los niveles más altos (intuitivo y verbal) dependen del más bajo (el motor). La manipulación de los objetos es un prerequisite para la comprensión verbal. Por lo tanto, la experiencia física debe preceder al aprendizaje de las explicaciones verbales o al material escrito. Ahora bien, estos diferentes niveles no se restringen a ciertas edades. Por ejemplo, el niño preoperacional no es necesariamente intuitivo al cien por ciento, ni el adolescente es completamente verbal. Lo más probable es que en un período determinado de desarrollo predomine una forma de comprensión, pero sin excluir las otras formas.

Debido a la importancia de la manipulación concreta, los niños deben ser activos en el salón de clases, se les debe permitir tocar, sentir las cosas, explorar, etc.

El interés y la motivación en las actividades de aprendizaje:

El surgimiento del interés (y por consiguiente de la comprensión) depende de la interacción entre las estructuras cognitivas existentes y las experiencias nuevas:

El interés y el aprendizaje se facilitan cuando la nueva experiencia tiene alguna relevancia para lo ya conocido, pero al mismo tiempo es suficientemente nueva como para presentar incongruencias y conflictos. La experiencia no contiene en si misma propiedades de interés. El interés deriva de la interacción entre las estructuras del niño y el nuevo contenido de aprendizaje.

El interés es elemento indispensable para la construcción de estructuras matemáticas.

Si queremos suscitar interés por la investigación matemática, no se debe enunciar la propiedad y pasar después a la demostración o a la verificación porque se corta así la parte más sugestiva, más significativa de ella. Es preciso, por el contrario, poner a los alumnos en tal actitud intelectual para hacerles nacer la idea de aquella propiedad. (80)

El material didáctico como instrumento de la actividad:

La selección de las actividades de aprendizaje, así como del material didáctico, dependerá de:

(80) CASTELNUOVO, Emma., op. cit., p. 117

- a) los objetivos.
- b) el estadio de desarrollo en el que se encuentre el niño.
- c) la estructura mental que posea, y
- d) su nivel de desempeño en función a las operaciones mentales.

Los medios que se utilicen deberán promover que el niño pregunte, descubra o invente.

Piaget no está a favor de las máquinas de enseñanza, de la instrucción programada, o de la enseñanza por computadora. El sugiere actividades de discusión, juegos, modelaje, preguntas y respuestas, experiencias empíricas, empleo de la imitación, etc. Aspectos negativos del dibujo como material didáctico en la enseñanza de la geometría:

- a) Al ser estático, el dibujo no muestra todas las posibilidades resultantes de la manipulación de las variables en cuestión.
- b) No proporciona una imagen real de una situación espacial.
- c) Al trazar una figura, el niño centra su atención en el contorno dibujado y no en el interior. Un ejemplo de esto se evidencia en el siguiente caso:

En la suma de los ángulos de un triángulo los alumnos deben fijar su atención en los ángulos mismos, pero no lo hacen si estos no varían.

Características que debe poseer el material didáctico en una

metodología constructivista:

- Debe ser móvil, no estático. Este tipo de material permite estudiar las transformaciones.
- Debe ser manejable y se ha de poder construir con él, es decir, debe ser operativo. Tal material es ideal en el aprendizaje de las matemáticas. En esta disciplina no se deben estudiar los entes en sí, sino las operaciones que los unen. "El material para la enseñanza constructiva de la geometría deberá ser artificial y también ser transformable por continuidad" (81).

A diferencia del dibujo, con el material móvil el niño se da cuenta de las relaciones de la parte con el todo. Además, surgen problemas que no se presentarían con un dibujo u otro material estático. Por ejemplo, el material móvil permite considerar los casos límite. Un caso límite sería cuando un rombo está próximo a convertirse en una línea recta: esto sucedería cuando una de las diagonales casi tiene valor "0", mientras que la otra casi se confunde con los lados de la figura.



(81) ibidem., p. 91

Un material movable por continuidad, por el hecho de poder transformar un tipo de figura en una infinidad de figuras dentro de ciertos parámetros, permite crear entre las figuras en cuestión relaciones de clase y subclase: es decir, permite clasificarlas.

A partir de la observación de un número infinito de figuras (infinitas transformaciones de una figura), el niño caracterizará la figura dentro de una clase y por lo tanto la definirá (ejemplo: el cuadrado es una clase de rombo). De esta manera no se le impone ningún concepto al niño. Es por ello que no basta con que la metodología parta de lo concreto, pues tanto una metodología descriptiva como una constructiva parten de lo concreto.

Cuando el material es móvil, el alumno puede captar los conceptos en su sentido dinámico:

Se tiene un concepto más dinámico de área cuando se confronta área y perímetro, conceptos que se confunden mucho entre sí. Hay que confrontarlos de modo que uno varíe mientras que el otro se mantiene fijo. Ejemplos: cuadrado que se convierte en rombo; cuadrado que se convierte en rectángulo.

La interacción social en las actividades de aprendizaje

Los efectos de la interacción social, aun cuando son casi insignificantes durante los primeros meses de vida, se vuelven

cada vez más importantes conforme el niño crece. El pensamiento egocéntrico del niño no le permite ver las cosas objetivamente porque sólo las puede ver relacionadas con él mismo. Es incapaz de ver los objetos o eventos desde otra perspectiva que no sea la suya. Su egocentrismo le impide tener una visión objetiva de los objetos o de las personas. Conforme el niño va descentrando su atención, va enfocando varios aspectos de la realidad simultáneamente, y empieza a comprender los puntos de vista de las demás personas; adquiere un conocimiento más objetivo de la realidad.

Una forma de disminuir el egocentrismo es a través de la interacción social. Cuando un niño habla con otro, se da cuenta de que su forma de ver las cosas no es la única. Observa que otras personas no comparten sus opiniones, por lo que la interacción lleva al conflicto y a la discusión. Se cuestionan los puntos de vista del niño, lo cual lo obliga a defender sus ideas y a justificar sus opiniones. Para ello, debe esclarecer sus pensamientos. Si quiere convencer a los otros de la validez de sus puntos de vista, tendrá que expresar sus ideas de manera clara y lógica. Las demás personas no aceptarán incongruencias en su pensamiento. Por lo tanto, la interacción social no sólo promueve un ajuste de tipo emocional, también ayuda a esclarecer los pensamientos y a ser más coherente y lógico.

La experiencia social no es independiente de la experiencia física. El intercambio verbal de opiniones debe basarse en la

experiencia física previa que origine una opinión. Durante las primeras etapas del desarrollo, parece que la experiencia física juega un rol más importante que el lenguaje en el descubrimiento de la realidad. Una vez que el niño ha tenido experiencia a nivel concreto, el lenguaje puede servir como herramienta para internalizar la experiencia.

En la escuela, los niños deben hablar, compartir experiencias y debatir. La interacción social, especialmente cuando se basa en la experiencia física, promueve el desarrollo intelectual.

Piaget da gran importancia a la actividad grupal. Considera que la cooperación da mejores resultados que la competencia. Al trabajar en grupos se deben intercambiar ideas y llegar a acuerdos, justificando los propios puntos de vista.

Con el trabajo grupal se promueve el intercambio de ideas y se desarrolla el pensamiento a través de la discusión de problemas. Además, se crea una autodisciplina.

... el niño que intercambia sus ideas con sus semejantes y con el adulto, tiende a organizar de manera operatoria su propio pensamiento. (82)

Un criterio para seleccionar las experiencias de aprendizaje en relación al trabajo grupal es el siguiente:

(82) AEBLI, Hans.. Una didáctica fundamentada en la psicología de Jean Piaget., P. 82

Cuanto más se inclina un problema hacia el lado de las construcciones intelectuales nuevas, más se presta para la discusión en común, y cuanto más se aproxima una pregunta a los problemas de aplicación, más se presta para el trabajo en equipo. (83)

Con el objeto de promover la interacción entre los estudiantes y el trabajo en equipo, es sugerible que las bancas no estén dirigidas hacia el profesor y el pizarrón, sino que formen círculos de trabajo.

Metodología de la instrucción

La instrucción debe ser individualizada, pues "cada niño tiene su propia percepción, manera de interactuar con el mundo, ambiente social, deseos". (84)

Dado que a una misma edad diversos niños poseen estructuras cognitivas diferentes, no todos se interesarán por el mismo evento, ni tampoco aprenderán de él. Cada niño tiende a asimilar la experiencia que se adecua a su propio nivel de comprensión. En ocasiones, lo que el profesor tiene en mente no coincide con el nivel del niño. La efectividad de una experiencia depende de la etapa de desarrollo del niño. Esto implica que la instrucción

(83) ibidem, p. 127

(84) ARAUJO, J., y CHADWICK, Clifton., op. cit., p. 133

grupales no siempre es lo más óptimo. Los niños deben tener trabajos individuales que ellos mismos escojan.

Piaget también encuentra que un aspecto importante en el aprendizaje es la auto-regulación. Antes de entrar a la escuela, y sin la instrucción del adulto, el niño aprende. El pensamiento del niño progresa a través de una serie de etapas que el profesor debe respetar. Por lo tanto, no se debe forzar al alumno a aprender un material para el cual no está listo.

En consecuencia, una metodología de la instrucción debe tomar en cuenta, por un lado, las necesidades individuales de cada alumno, y por el otro, la capacidad de autorregulación del aprendizaje que todo niño posee.

Secuencia de la instrucción:

Una secuencia de instrucción debe considerar que:

- a) los límites de cada estadio son variables.
- b) la secuencia de los estadios no varía, pero puede haber impedimentos o regresiones.
- c) se puede estar en un estadio superior en relación a una disciplina, y en uno inferior en relación a otra.
- d) se debe dejar un tiempo suficiente para la generalización del comportamiento de un estadio a

otro. (85)

La secuencia del aprendizaje debe ser flexible, pues depende de los intereses del individuo y de su nivel de desarrollo.

El papel del profesor en las actividades de aprendizaje:

En la construcción del conocimiento importa más el interés, la preocupación y la acción del niño, que el interés, la preocupación y la acción del profesor.

El profesor en las actividades escolares debe:

- 1) estar atento al nivel de desarrollo del niño.
- 2) orientar el salón de clases más hacia el individuo que hacia el grupo. Debido a las diferencias individuales que hay en casi todas las áreas del desarrollo cognitivo, es poco probable que una tarea escolar determinada despierte en todos los alumnos el mismo interés por aprender. Algunos asimilarán la tarea fácilmente a sus estructuras mentales, mientras que otros requerirán de una mayor acomodación. Cada niño enfrentará el problema de diferente manera y le tomará diferente tiempo asimilarlo.

La labor del profesor no es tanto transmitir hechos o conceptos al niño, sino hacerlo actuar en los niveles físico y mental. Estas acciones (mucho más que los conceptos impuestos) constituyen el verdadero conocimiento.

(85) apud. ibidem. p. 155

Para promover el interés y el aprendizaje, el profesor deberá adecuar el currículo al individuo. Es conveniente que trabaje en proyectos individuales en un marco de cierta libertad. Ante tal libertad, algunos argumentan que el profesor no puede estar seguro de que todos los niños están aprendiendo el mismo material, y que se corre el riesgo de que se juegue y se pierda el tiempo. A esto se podría responder que los niños son activos en la adquisición del conocimiento: si a un niño normal se le deja a sí mismo, no permanecerá inmóvil, estará ávido por aprender. En consecuencia, se le debe permitir que estructure su propio conocimiento. Lo que el niño necesita es un ambiente rico en objetos potencialmente interesantes. Requiere de un profesor capaz de comprender sus necesidades, que pueda juzgar qué materiales son los adecuados, que lo ayude cuando lo necesite y que tenga fe en su capacidad de aprender.

El educador debe proporcionar al alumno un ambiente que lo estimule para que se desarrolle a su propio ritmo, según sus intereses, y de una manera libre. "Esto supone procedimientos que promuevan el pensamiento personal." (86) Además de proveer un ambiente físico apropiado, el profesor debe hacer las preguntas adecuadas que promuevan la acomodación y la asimilación en el niño.

(86) ibidem., p. 71

Tanto en la experiencia física como en la social, el profesor puede ayudar al niño a desarrollar su potencial para la actividad. Al darle al niño objetos que pueda manipular, el profesor está proporcionando un medio para el descubrimiento de las propiedades físicas de las cosas, es decir, para entender a un nivel motor o intuitivo. Cuando el profesor promueve la interacción social fomenta el intercambio de opiniones y por lo tanto la comprensión o aprendizaje a un nivel verbal.

Es conveniente que el profesor encauce al niño para que aplique sus conocimientos pasados a situaciones nuevas. Esto dará lugar a nuevas adaptaciones, que constituyen para el niño descubrimientos.

Aspectos que debe considerar el profesor en las situaciones de aprendizaje.

- a) Las situaciones de aprendizaje deben promover la interacción, así como la construcción del conocimiento. Debe existir interacción entre el individuo y su ambiente. Además, el aprendizaje debe ser un proceso en el que se construya. Como el niño es por naturaleza curioso y quiere dominar su ambiente, el profesor debe brindarle la oportunidad de interactuar con su ambiente para dominarlo.
- b) Se deben crear situaciones problema, es decir, que el educador ponga obstáculos, formule preguntas al niño.

mostrando las incoherencias de las acciones, etc., para estimular al niño a pensar.

Por estas razones, una buena escuela debe promover la actividad del niño, así como la manipulación y exploración de objetos. Cuando el profesor trata de impartir el conocimiento verbalmente, el resultado es superficial.

En cuanto a las relaciones del niño con los adultos en general, y recordando la unidad del desarrollo intelectual-social-moral, mencionaremos lo siguiente:

Piaget descubre dos tipos de relaciones adulto-niño, una que retrasa y otra que promueve el proceso constructivo. El primero es una relación de coacción o represión en la que el adulto da al niño reglas e instrucciones de conducta. Aquí el respeto es unilateral. El comportamiento del niño no se origina en su propio razonamiento ni en su sistema de intereses y valores. Este tipo de relación es en muchas ocasiones necesario. Sin embargo, cuando al niño siempre se le imponen ideas de otros, se vuelve sumiso, lo cual puede guiarlo a una conformidad moral e intelectual. El niño no examinará sus propias convicciones ni construirá sus propias razones para seguir reglas. No habrá la reflexión que compromete con principios morales internos. La represión sólo socializa la conducta y refuerza la tendencia del niño a confiar únicamente en la regulación externa.

El segundo tipo de relación es de respeto mutuo y cooperación. El adulto permite al niño regular su conducta voluntariamente. Al dejar que el niño elabore sus reglas, valores y guías de acción, se promueve el desarrollo de un pensamiento independiente y creativo, una personalidad descentrada, y unos sentimientos morales de reciprocidad. La descentración y reciprocidad se originan en un sentimiento de afecto y confianza mutuos. Piaget no sugiere una libertad total, sólo que se "disminuya la coacción a un grado práctico". (87)

La justicia no se desarrolla a partir de reglas impuestas por el adulto y a menudo no comprendidas por el niño. Lo que la justicia requiere es respeto mutuo y solidaridad entre los niños mismos. "Mientras que la solidaridad entre los niños crece, la noción de justicia emerge en casi completa autonomía". (88)

3.2.1.5 Evaluación

La teoría de Piaget rechaza las evaluaciones que miden el comportamiento o "salida" de los niños. Poco importa si hay respuestas correctas o equivocadas. Lo que cuenta es cómo interpreta el alumno lo que sabe y cómo continúa buscando lo que no sabe.

(87) DEVRIES, Rheta., La integración educacional de la teoría de Piaget: consideraciones afectivas, sociomorales y cognitivas en la práctica., p. 14

(88) COPELAND, Richard., op. cit., p. 237

La evaluación debe estar dirigida no hacia el producto del aprendizaje, sino hacia el proceso, así como hacia las aptitudes, capacidades y actitudes que están en juego en ese proceso. Es por ello que la evaluación debe ser formativa y diagnóstica, además de constante. "Se puede evaluar el periodo de práctica y el número de respuestas correctas en la búsqueda de estructuras nuevas y mejores, así como el esfuerzo del estudiante para alcanzar el equilibrio." (89)

Piaget se interesa en la competencia del niño a nivel potencial y no en sus manifestaciones, puesto que estas pueden ser engañosas debido a factores como la fatiga, el aburrimiento, etc.

Los tests estandarizados:

El profesor no debe confiar mucho en los tests estandarizados. El método clínico de Piaget ha mostrado que la respuesta verbal inicial del niño (el tipo de respuesta que es dada a un test estandarizado) es generalmente superficial y no da un índice confiable de la verdadera calidad de su comprensión. El profesor debe observar al niño y tratar de descubrir tanto su competencia intuitiva como sus debilidades.

El profesor constructivista como compañero/guía debe desempeñar un papel en el que combine evaluación, organización, estimulación y colaboración.

(89) ARAUJO, J., y CHADWICK, Clifton., op. cit., p. 192

3.2.2 IMPLICACIONES EDUCATIVAS DE LA TEORIA DE VAN HIELE

3.2.2.1 Conocimiento de las características generales del alumno que intervienen en su aprendizaje

El lenguaje es importante en el progreso de un nivel a otro. "Cada uno de los niveles se caracterizan por un vocabulario que se usa para representar los conceptos, estructuras y sistemas dentro de un nivel de comprensión en Geometría" (90).

Un estudio clínico conducido por el Proyecto indicó que la incapacidad de los estudiantes para avanzar en el nivel de pensamiento puede estar relacionado con sus deficiencias en el lenguaje (tanto por la ignorancia del vocabulario de geometría, como por la incapacidad para usarlo adecuadamente).

3.2.2.2 Objetivos

Los objetivos deben buscar respuestas que requieran de un razonamiento y no simplemente de memorización. En ocasiones los estudiantes resuelven los ejercicios correctamente porque se memorizan algunos hechos que probablemente no entienden. Por ejemplo, el objetivo en el que se piden las áreas de superficies puede entenderse como la aplicación de fórmulas, en lugar de

(90) TEPPPO. Anne., op. cit., p. 213

entenderse como el desarrollo del significado de área, o la explicación de fórmulas y las relaciones entre ellas.

Cuando en los objetivos se ponen verbos como "identificar" o "nombrar", se piden respuestas a nivel 0.

Pensar a un nivel es más que conocer un contenido y una forma de ciertos procesos geométricos. También es estar consciente de lo que se espera, planear el pensar en un nivel, y monitorear el propio pensamiento en la resolución de un problema. Estos son aspectos metacognitivos.

3.2.2.3 Selección y organización de contenidos

Los contenidos que el proyecto consideró que estaban más acordes al tipo de materiales de instrucción usados por Dina Van Hiele Geldof (bloques, sierras/escaleras, árboles genealógicos) son:

- Conceptos geométricos básicos (paralelismo, ángulos, congruencia), propiedades de cuadriláteros.
- Medición de ángulos, sumas de ángulos para triángulos, cuadriláteros, pentágonos, relaciones de ángulos en triángulos y paralelogramos (por ejemplo: ángulo externo, ángulos opuestos).
- Medición de área, área de rectángulos, triángulos, paralelogramos, trapezoides y figuras cuyos vértices se apoyan en dos líneas paralelas.

En cada nivel de aprendizaje se introduce lenguaje nuevo para hacer explícitos y discutir los nuevos objetos de estudio.

3.2.2.4 Selección y organización de actividades de aprendizaje

En relación a los textos educativos de matemáticas se pueden formular las siguientes preguntas sobre las actividades que proponen:

- a) Para estudiantes en el nivel 0, cuyo pensamiento sobre las formas es global, y que no comprenden las descripciones de formas en términos de propiedades, ¿es adecuada la información visual dada en el texto? ¿se proporcionan figuras con diversas orientaciones, así como contra-ejemplos? ¿Se presentan los conceptos en el marco del mundo real?
- b) En el paso del nivel 0 al 1 es fundamental el reconocimiento de propiedades como propias de una clase de figuras (no perteneciente exclusivamente a una figura específica). ¿Fomentan este reconocimiento los materiales del texto? ¿Se permite a los estudiantes descubrir/formular propiedades por sí mismos, y con base en muchos ejemplos?
- c) Van Hiele señala que en cada nivel están implícitos los procesos de pensamiento que se explicitan en el siguiente nivel. Por lo tanto, conviene escoger materiales de enseñanza que permitan el desarrollo implícito de relaciones

que se formalizarán más tarde.

Van Hiele da énfasis a la "estructura global", es decir, el que los estudiantes se involucren en lo que los rodea de manera que los ayude a formar conceptos geométricos. Todos los textos incluyen ilustraciones que intentan hacer referencia a objetos cotidianos. Sin embargo, suelen poner esos objetos fuera de contexto, o los dibujos se vean distorsionados y no muestran claramente las figuras geométricas.

A los alumnos se les debe dar la oportunidad de generalización a través de múltiples ejemplos.

Cuando se está desarrollando el nivel 0, se puede diseñar un tipo de presentación en la que se incluyan implícitamente las propiedades que serán desarrollados explícitamente en el nivel 1. Por ejemplo, se le puede pedir al estudiante de nivel 0 que construya cuadrados con palitos de varios tamaños. Mientras que esta tarea se puede realizar a nivel 0, también surgen implícitamente las propiedades de un cuadrado, dado que los estudiantes deben seleccionar palitos de igual tamaño, y deben ajustarlos a las esquinas para hacer ángulos iguales. Esta actividad se puede contrastar con aquella en la que se identifican cuadrados entre varias figuras.

Una posible técnica para el nivel 0 es encontrar figuras en el medio ambiente.

Para ayudar a los estudiantes en su avance hacia el nivel 1, se les debe permitir formular por ellos mismos y con base en muchos ejemplos, propiedades de clases de figuras. Los ejercicios y los textos deben promover este tipo de actividad, para que los estudiantes no se acostumbren a la reducción del nivel de pensamiento, y para que no se formen una idea errónea de lo que están aprendiendo (esto significa no sólo nombrar figuras, sino también observar y comparar características, así como buscar propiedades generales).

El profesor debe animar a los estudiantes a hablar sobre conceptos geométricos y a desarrollar un lenguaje expresivo en la descripción de las figuras: pues no basta con que seleccionen un nombre adecuado para una figura entre varios de una lista.

Importancia de la manipulación en las actividades de aprendizaje:

Van Hiele también enfatiza la importancia de hacer que los estudiantes manipulen los modelos geométricos.

En el "Curriculum and Evaluation Standards" se sugiere que en el periodo que abarca desde Kindergarten hasta cuarto de primaria, los estudiantes aprendan a reconocer las formas geométricas a través de una exploración activa del mundo que le rodea usando una variedad de objetos cotidianos y otros materiales físicos. Después de que los estudiantes se han familiarizado con varios objetos geométricos, "la instrucción en los grados subsiguientes

se enfocará hacia las propiedades de los objetos al tiempo que los estudiantes manipulan figuras y discuten sobre sus descubrimientos" (91).

Material didáctico en las actividades de aprendizaje:

Los Van Hiele recomiendan explícitamente no promover el medir o el cortar y pegar como técnicas en el aprendizaje de la geometría.

Se sugiere el uso de la regla, el compás y el transportador.

Es importante que el material didáctico evite la confusión entre el concepto con su representación simbólica en un diagrama.

En relación a la representación simbólica existen varios errores comunes en los textos: (92)

- cuadrados (o rectángulos, o triángulos) donde un lado está siempre vertical;
- triángulos que son siempre agudos, y no tienen ángulos muy pequeños;
- líneas paralelas siempre representadas por segmentos de línea de igual largo, o formando los lados de un rectángulo;
- polígonos que están siempre convexos.
- líneas de simetría que están siempre horizontales o verticales;

(91) ibidem.. p. 214

(92) apud.. FUYS, David, et. al... op. cit... p. 171

- prismas y pirámides con bases siempre horizontales;
- al aplicar la fórmula del área a los triángulos, las bases son siempre horizontales, las altitudes se dibujan verticalmente;
- trapezoides siempre con lados paralelos horizontales.

Metodología de la instrucción

Se debe poner cuidado en que los estudiantes no formen conceptos incorrectos basados en un rango limitado de ejemplos. También se debe poner más cuidado en la construcción y uso de la estructura global de los estudiantes en la cual surgirán los conceptos.

Debido a la importancia del lenguaje en el progreso de un nivel de pensamiento a otro, es conveniente que el profesor utilice:

- un lenguaje expresivo en términos de descripciones, así como
- recordatorios espontáneos del vocabulario en geometría. Por ejemplo, podría decir: "explica por que..." (93)

Para ayudar a los estudiantes en su progreso hacia el nivel 1, el profesor puede proponer a los estudiantes que verifiquen si las propiedades sugeridas en el libro de texto son verdaderas o no por medio de pruebas con muchos ejemplos, con dibujos u objetos manipulables.

(93) ibidem., p. 178

3.2.2.5 Evaluación

Van Hiele hace las siguientes recomendaciones:

Si a los estudiantes se les pide resolver ejercicios y exámenes sobre un tema en el nivel 0, aún cuando la exposición esté en un nivel más alto, es muy posible que, conforme los estudiantes van pasando de grado, haya una brecha cada vez mayor entre el nivel de su experiencia en geometría y el nuevo nivel de exigencia. Los estudiantes tendrán problemas en secundaria cuando se les pida un pensamiento de nivel 2, mientras que en primaria solo se les exigía el nivel 0.

Es posible que los estudiantes aparenten un nivel de razonamiento superior al que realmente tienen porque han aprendido memorísticamente el vocabulario y las formas de trabajo del nivel superior. Sin embargo no los comprenden ni los saben utilizar correctamente.

Para Van Hiele, los exámenes escritos no pueden reflejar algunos tipos de introspección (insight). Por esta razón, uno no puede esperar que los objetivos de un examen o los exámenes mismos reflejen el pensamiento del nivel 1 o 2.

Las preguntas más convenientes son las que requieren una oración como respuesta.

El "Curriculum and Evaluation Standards" recomienda que los profesores usen la observación y las preguntas orales para medir

el uso que los estudiantes hacen del lenguaje apropiado, así como para determinar el nivel del estudiante en el desarrollo de los conceptos.

Se debe corroborar que los estudiantes vean a las propiedades como características de clases de objetos, y no como atributos de un ejemplo particular. Es posible que el estudiante se quede en el nivel 0 mientras que el profesor considera que ya pasó al nivel 1 o 2.

Debido a que los estudiantes pueden responder correctamente pero en diferentes niveles a una pregunta, puede ser difícil determinar el nivel de un estudiante por medio de preguntas con respuestas de opción múltiple.

Las respuestas que requieren que el estudiante explique "por qué" (con dibujos o con explicaciones escritas) pueden asignar el nivel con mayor precisión.

3.2.3 IMPLICACIONES EDUCATIVAS COMUNES A AMBAS TEORIAS

Aun cuando hay ciertos puntos de acuerdo entre ambos autores, existen aportaciones en líneas diferentes y complementarias. Sintetizando las implicaciones educativas de Piaget y de Van Hiele obtenemos el siguiente proceso de enseñanza-aprendizaje.

3.2.3.1 Conocimiento de las características generales del alumno que intervienen en su aprendizaje

PIAGET	VAN HIELE
Existen estadios secuenciales en el desarrollo cognoscitivo.	Existen niveles secuenciales en el desarrollo del pensamiento en geometría.
El progreso de un estadio a otro depende de: maduración, experiencia (física y social) y equilibración.	El progreso de un nivel a otro depende básicamente de la experiencia educativa en geometría y de la habilidad del estudiante.
El niño de 3º de primaria se encuentra en el periodo de operaciones concretas.	La primaria es el lapso en el que el niño progresa del nivel "0" al "1".
El lenguaje contribuye acelerando la <u>formación</u> de estructuras y es indispensable en la <u>completación</u> de las mismas.	Para progresar de un nivel al siguiente, es necesario conocer y manejar un lenguaje adecuado (relativo a la geometría).
La memoria no implica una retención mecánica, sino una capacidad de codificar de acuerdo al nivel de desarrollo.	No es la memorización mecánica la que promueve el progreso de un nivel al siguiente, sino el razonamiento.

Por consiguiente, un método de enseñanza aprendizaje de la geometría en 3º de primaria debe considerar las siguientes características del alumno:

En su progreso del nivel "0" al "1" se encuentra en las operaciones concretas.

Existen factores en el desarrollo del niño sobre los cuales el profesor no puede intervenir directamente aún cuando los debe considerar:

- la maduración nerviosa.
- la tendencia al equilibrio.

Pero en cuanto a la experiencia (física y social), hay mucho que aportar. Este aspecto será estudiado en los cuatro puntos restantes del proceso enseñanza-aprendizaje.

3.2.3.2 Objetivos

PIAGET	VAN HIELE
<p><u>Formar</u> la mente del niño promoviendo su desarrollo intelectual y moral. Esto se traduce en una mejor adaptación a su medio y, por lo tanto, un mayor equilibrio.</p>	<p>En primaria, el niño debe evolucionar del nivel "0" al "1". Y, dado que en secundaria el alumno debe desarrollar explícitamente el nivel 2, conviene que al final de la primaria el niño esté desarrollando el nivel "2" de manera implícita.</p>
<p>Formar hombres creativos y mentes críticas.</p>	<p>Fomentar el razonamiento y no la simple memorización.</p>

La fusión de los objetivos de ambos autores da como resultado el proponerse que la enseñanza de la geometría promueva un mayor equilibrio de las estructuras cognitivas del niño en su paso del nivel "0" al "1".

3.2.3.3 Selección y organización de contenidos

PIAGET	VAN HIELE
<p>Los contenidos deben estar acordes a las estructuras cognitivas niño, es decir, a su nivel de desarrollo.</p>	<p>La selección y organización de los contenidos debe basarse en el nivel en el que se encuentra el alumno y promover el logro del siguiente nivel.</p>
<p>Ha de existir una cierta novedad en los contenidos de tal manera que al mismo tiempo que se puedan relacionar con lo ya conocido, provoquen algún grado de desequilibrio.</p>	<p>En el desarrollo de un nivel los nuevos contenido se sustentan en el dominio del nivel anterior, y también promueven el desarrollo implícito del siguiente nivel.</p>
<p>Los nuevos contenidos deben basarse en lo ya conocido intuitivamente.</p>	

Para el niño, una palabra representa más una imagen que un concepto. El desarrollo de los conceptos es paralelo al desarrollo cognoscitivo.

Se ha de hacer la diferencia entre los conceptos y sus representaciones simbólicas. Para ello, se debe dar un número de ejemplos que muestren todas las notas características de un concepto.

En consecuencia, una adecuada selección y organización de contenidos en la enseñanza de la geometría de 3º de primaria debe contemplar lo siguiente:

- Dado que el niño se encuentra en las operaciones concretas, y está pasando del nivel "0" al nivel "1", los contenidos deben abarcar aspectos que el alumno pueda ir descubriendo a través de sus sentidos y que lo ayuden a pasar de un reconocimiento global de las figuras (nivel "0") a un análisis de las propiedades geométricas (nivel "1").
- Los contenidos deben relacionarse con lo aprendido previamente, pero han de tener la novedad suficiente para provocar un cierto desequilibrio que al mismo tiempo que promueva la construcción de estructuras más estables, también fomente el desarrollo explícito del nivel "1", así como el desarrollo implícito del nivel "2".
- Los conceptos serán asimilados de acuerdo al nivel de desarrollo del niño. Sin embargo, independientemente del tipo de concepto que posea el niño, debe comprender que el símbolo que lo representa no contiene en sí mismo todas las notas

características del concepto.

3.2.3.4. Selección y organización de actividades de aprendizaje

PIAGET	VAN HIELE
Sin actividad física o intelectual no hay aprendizaje.	No hay aprendizaje en el nivel "1" si no se permite al alumno formular las propiedades de clases de figuras por el mismo con base en muchos ejemplos.
La actividad debe darse en un medio de colaboración y cooperación.	La actividad debe involucrar al medio que rodea al alumno. Es decir, no se deben presentar los objetos fuera de contexto.
Las actividades de aprendizaje han de crear un desequilibrio que exija una reacomodación de las estructuras para así poder asimilar los elementos perturbadores.	Las actividades de aprendizaje han de tener la siguiente secuencia: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre, integración.
La manipulación de los objetos es necesaria en el aprendizaje. La instrucción verbal es insuficiente. Las operaciones mentales (nivel abstracto) son el resultado de la interiorización de actividades manipulatorias (nivel concreto).	Los alumnos deben manipular los modelos geométricos.
Para que exista interés y motivación hacia una actividad de aprendizaje, ésta debe tener algún vínculo con las estructuras ya existentes en el alumno.	En cada nivel se debe promover el desarrollo implícito del siguiente nivel. Es decir, debe existir un vínculo entre el aprendizaje explícito de un nivel y el aprendizaje implícito del nivel anterior.
El material didáctico debe promover que el niño pregunte, descubra o invente.	En el paso del nivel "0" al "1" el material didáctico debe promover que el niño reconozca las propiedades de clases de figuras.

El material didáctico debe ser móvil, no estático.	La información visual debe mostrar diversas orientaciones de las figuras.
El intercambio verbal de opiniones debe basarse en la experiencia física previa que origine una opinión. La interacción social no sólo conlleva el compartir experiencias, sino también el debatir.	El lenguaje es importante en el progreso de un nivel de pensamiento a otro. Por ello, el profesor debe utilizar un lenguaje expresivo al referirse a las características de las figuras geométricas.
Las experiencias de aprendizaje deben estar orientadas más hacia el individuo que hacia el grupo.	El progreso de un nivel a otro es un proceso individual.
La labor del profesor: promover la actividad física y mental del alumno. Esto implica tanto proporcionar un medio físico adecuado, como fomentar la interacción social.	El profesor debe presentar los conceptos en el marco del mundo real. Además, debe promover el desarrollo de un lenguaje expresivo de conceptos geométricos.
La relación niño-adulto debe ser de respeto mutuo y cooperación. Una relación así promueve el desarrollo del pensamiento independiente y creativo.	El profesor debe promover un razonamiento crítico sobre la validez de las propiedades de las figuras.

De lo anterior, se deducen los siguientes criterios para la selección y organización de actividades de aprendizaje:

- El aprendizaje en geometría de 3º año de primaria requiere de una actividad física e intelectual que permita al alumno formular propiedades de figuras.
- Las experiencias físicas deben estar vinculadas con el contexto real del alumno, y las experiencias sociales deben darse en un marco de colaboración y cooperación.
- El aprendizaje se fomenta creando desequilibrios que requieran

de nuevas acomodaciones. Este proceso es susceptible de ser promovido a través de las fases de aprendizaje sugeridas por Van Hiele:

- | | | |
|-------------------------|-------|---|
| 1. Información | ———> | crea desequilibrios |
| 2. Orientación dirigida | }———> | promueve la reacomodación |
| 3. Explicitación | | |
| 4. Orientación libre | ———> | consolida la asimilación
y en consecuencia la
reequilibrioación |
| 5. Integración | | |

- La instrucción verbal es estéril si los alumnos no manipulan los modelos geométricos.
- Todo nuevo contenido debe vincularse con las estructuras mentales ya existentes (y en consecuencia con los aprendizajes adquiridos en el nivel de pensamiento anterior) para que se dé la asimilación. Asimismo, los nuevos aprendizajes serán el fundamento de aprendizajes posteriores (es decir, los aprendizajes implícitos en un nivel fundamentan los aprendizajes explícitos del siguiente).
- El material didáctico debe promover que el niño descubra propiedades.
- Conviene que el material didáctico sea móvil. Si es estático debe mostrar diversas orientaciones de las figuras.
- Durante la experiencia física (de la cual nacen opiniones) se deben introducir elementos lingüísticos útiles en el reconocimiento de propiedades geométricas. Tales elementos

serán retomados durante el intercambio verbal posterior.

- El desarrollo en el pensamiento es un proceso individual. por lo tanto, las experiencias de aprendizaje deben atender las necesidades y los intereses individuales. Esto no implica que la enseñanza no deba realizarse a nivel grupal o que los grupos deban ser muy pequeños. Lo importante es que el profesor busque la adecuación de las experiencias de aprendizaje a los intereses y necesidades particulares de los alumnos.
- El profesor debe propiciar un medio físico vinculado con el mundo real. Además, debe proporcionar elementos lingüísticos sobre geometría que enriquezcan la interacción social en la clase de matemáticas.
- A través de una relación de respeto mutuo y cooperación entre el profesor y el alumno se fortalecerá el pensamiento crítico en general, y en relación a las propiedades de figuras.

3.2.3.5 Evaluación

PIAGET	VAN HIELE
<p>Lo que se debe evaluar no son las respuestas concretas, sino el grado de adaptación, es decir, la forma en que el niño interpreta lo que sabe y la manera en que busca aprender lo que no sabe para alcanzar el equilibrio.</p>	<p>El nivel de pensamiento sobre el cual versa un examen debe ser el mismo que se ha trabajado durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.</p> <p>No todos los progresos se ven reflejados en una prueba.</p> <p>Las preguntas más válidas en un examen son las que requieren una oración como respuesta, y en especial las preguntas que demandan un "por qué".</p> <p>La evaluación debe verificar que el alumno reconozca a las propiedades como características de una clase de figuras y no de una figura aislada.</p>

Lo que la evaluación debe medir es el grado de adaptación, así como el nivel de pensamiento que se promovió durante la instrucción.

Para ello, conviene hacer preguntas que exijan explicaciones completas.

C A P I T U L O I V

PROPUESTA METODOLOGICA CON BASE EN EL
ANALISIS DEL PROGRAMA DE GEOMETRIA PARA
3º DE PRIMARIA Y FUNDAMENTANDOSE EN LA
TEORIA PSICOGENETICA Y EN LA TEORIA DE
VAN HIELE

4. ANALISIS DEL PROGRAMA DE GEOMETRIA PARA 3º DE PRIMARIA

4.1 PROGRAMA DE GEOMETRIA VIGENTE PARA EL 3º GRADO DE PRIMARIA EN MEXICO

4.1.1 GENERALIDADES

En el presente inciso se hacen comentarios en letra reducida sobre cada aspecto establecido por la Secretaria de Educación Pública en relación a la enseñanza de la geometría en 3º de primaria.

Primaria: es el segundo nivel de la educación básica.

Educación básica: "Es el ciclo de formación encargado de ofrecer y desarrollar los elementos fundamentales de la cultura a fin de propiciar el desenvolvimiento armónico del educando y garantizar su participación responsable en la sociedad. Comprende los niveles de preescolar, primaria y secundaria." (94)

Esto, en términos piagetianos, podría interpretarse de la siguiente manera: a través de las experiencias de aprendizaje, la primaria fomentará la adaptación del educando a su medio.

"La Educación Primaria es el nivel que se ubica entre preescolar

(94) Modernización Educativa., p. 7

y secundaria: continúa y consolida el proceso de sociabilización del educando, proporciona las herramientas fundamentales para la apropiación de la cultura como la lectura, la escritura, las nociones básicas del pensamiento lógico matemático y propicia la adquisición de conocimientos, hábitos, habilidades, actitudes y valores esenciales para su proceso formativo. Atendiendo a las tendencias naturales del niño lo inicia a través de situaciones de aprendizaje en el desarrollo del pensamiento crítico, que le permitirá una mayor y mejor expresión de su creatividad proyectada a su entorno inmediato. La educación primaria brinda aprendizajes significativos, para que el alumno cuente con los elementos indispensables para incorporarse a la vida social y promueve en él una actitud de aprendizaje permanente que le permite acceder en cualquier momento de su vida al siguiente nivel de estudios." (95)

Lo anterior indica que la primaria tiene esencialmente una doble función:

- a) sociabilizar
- b) promover el desarrollo individual.

Esto se logra promoviendo aprendizajes significativos de tipo:

- a) cognoscitivos (tales como los relativos a la lógica matemática)

(95) ibidem, p. 39

b) afectivos (como las actitudes)

c) y psicomotores (como las habilidades).

Todo ello fomentará el aprendizaje crítico, la creatividad y una actitud de aprendizaje permanente.

Algunos de los fines de la educación primaria son los siguientes (96): (Se citan los relacionados más directamente con la educación matemática.)

- Desarrollar el conocimiento y uso de principios y técnicas para obtener y organizar información y para la aplicación y manejo de métodos simples de construcción del conocimiento.

Esto implica la necesidad de contar con elementos lógico-matemáticos que permitan organizar la información y ordenar el conocimiento.

- Expresar el pensamiento lógico y relacional, mediante el empleo funcional de las estructuras básicas de la lengua y del lenguaje matemático.

El lenguaje lógico-matemático es indispensable para el ordenamiento del pensamiento y expresión de las ideas.

- Desarrollar el pensamiento reflexivo y la conciencia crítica ante la realidad nacional y los problemas de la sociedad en

(96) apud., ibidem. p. 40

general.

Las matemáticas, al igual que otras áreas del conocimiento, deben desarrollar el pensamiento reflexivo y crítico. Para Piaget, todo aprendizaje debe contribuir en la construcción de estructuras mentales, lo cual, a su vez, favorece el pensamiento autónomo y crítico. Para Van Hiele, el aprendizaje debe orientarse hacia el razonamiento más que hacia la memorización.

- Contribuir a la satisfacción de necesidades individuales y sociales, con base en el conocimiento, construcción y empleo de maquinarias simples e instrumentos y de la producción de materiales.

La construcción de tal tipo de materiales implica la necesidad de contar con profesionistas que posean sólidos conocimientos en matemáticas. En esta formación deben contribuir todos los niveles educativos, entre ellos, la primaria.

Línea de formación científica de la educación básica (97):

Se refiere a la capacidad de construir explicaciones objetivas de los fenómenos naturales y sociales, a partir del desarrollo de la creatividad y de estructuras lógicas del pensamiento y la apropiación de conceptos, métodos y lenguajes derivados de las disciplinas científicas.

(97) apud. Los planes de estudio de la educación básica, Modernización Educativa., p. 21.

La enseñanza de las matemáticas debe favorecer la creatividad y la construcción de estructuras lógicas que permitan al alumno una mejor comprensión de los fenómenos naturales y sociales.

En relación a los contenidos de aprendizaje, se ha establecido sobre las matemáticas lo siguiente:

"Las Matemáticas constituyen todo un lenguaje que permite al educando expresarse mediante la simbología propia." (98)

Por lo tanto, las matemáticas, en tanto lenguaje, contribuyen a formar y completar las estructuras mentales.

"Como la Lengua Nacional, las Matemáticas son instrumentos indispensables para la adquisición de nociones y conceptos de otros campos de estudio".

Esto significaría, en términos piagetianos, que el aprendizaje de las matemáticas contribuye al desarrollo no sólo de estructuras lógico-matemáticas, sino de todas las estructuras en busca de un equilibrio global.

4.1.2 LAS MATEMATICAS DE 3º DE PRIMARIA

Según el enfoque de las matemáticas con el que se elaboró el programa de primaria, se pretende que el niño "reconozca en dicha

(98) Modernización Educativa., p. 41-42

ciencia un instrumento que permite conocer, interpretar y transformar el mundo; es decir, que encuentre en ella un lenguaje que le ayude a organizar las ideas e informarse sobre su ambiente y a plantear y resolver una gran diversidad de problemas que surgen de dicho ambiente." (99)

Es decir, se pretende que las matemáticas constituyan, por un lado, contenidos que enriquezcan las estructuras del niño, y por el otro, un instrumento ordenador del pensamiento, de tal manera que se tenga un conocimiento ordenado sobre el mundo que permita al alumno transformar su medio.

Esta visión conlleva que el tratamiento de los temas se inicie a partir de la problemática real del niño y retorne a aplicarse a ella. También implica que el educando elabore sus conceptos matemáticos a través de la actividad corporal, la manipulación, la observación, la comparación, el análisis, la obtención de conclusiones, etc., y que aplique dichos conceptos a otras situaciones de manera creativa.

Tanto Piaget como Van Hiele apoyan lo que establece la Secretaría de Educación Pública en relación a que el tratamiento de los temas debe partir de la realidad del educando para retornar a ella. Así mismo, hay un acuerdo en que el aprendizaje ha de basarse en la manipulación concreta del material.

(99) Libro para el mtro. 39, p. 59

No obstante, la SEP no señala lineamientos sobre la manera en que las situaciones de aprendizaje deben relacionarse con la realidad concreta, ni sobre las características que debe tener el material didáctico para que la manipulación y la actividad corporal sean las adecuadas.

Los cinco aspectos que incluye el programa son: numeración, operaciones con números naturales, las fracciones, geometría, y probabilidad y estadística.

4.1.3 LA GEOMETRIA EN 3º DE PRIMARIA

Para el tratamiento de los conceptos geométricos que se manejan en este grado, tales como simetría, paralelismo, perpendicularidad, rectángulo, triángulo, área y perímetro, se sugiere partir de actividades corporales (juegos, desplazamientos, filas, trazos con cordeles): trabajar después con popotes, palitos, listones y finalmente utilizar el cuaderno para realizar los trazos, recortes o mediciones correspondientes.

La teoría psicogenética apoya las actividades de aprendizaje que erijan actividad corporal (tales como el juego y los desplazamientos). Además, propone que el material didáctico sea móvil (los popotes y los palitos no son móviles en sí mismos).

Por su parte, Van Hiele no propone el recorte-y-pegar, ni la medición como técnicas eficaces en el aprendizaje.

Dentro de tal metodología, las definiciones y las fórmulas vendrán a ser el producto de la observación, comparación y análisis de las características esenciales de las figuras o los procedimientos y no conceptos dados por dictado.

Para la teoría psicogenética tales definiciones y fórmulas serían además, y en primera instancia, el resultado de acciones físicas sobre el material didáctico. Es decir, las operaciones deben ser primero manipulatorias para después interiorizarse.

4.1.4 OBJETIVOS GENERALES DE LAS MATEMATICAS:

Al término de este grado escolar, el alumno será capaz de: (100)

- a) Resolver problemas relacionados con su entorno que impliquen operaciones con números naturales, sin que los resultados escedan de 10 000.
- b) Resolver problemas relacionados con su entorno que requieran sumar o restar fracciones de igual denominador.
- c) Trazar figuras en las que aplique sus nociones de simetría, paralelismo o perpendicularidad.
- d) Resolver problemas relacionados con su entorno que impliquen la obtención de áreas o perímetros.

(100) apud., ibidem., p. 64

- e) Registrar, organizar, graficar e interpretar datos obtenidos de investigaciones hechas en su escuela, su familia o su comunidad.
- f) Calificar resultados de algunos experimentos aplicando sus nociones de posible, imposible, más posible, menos posible o igualmente posible.

Los objetivos de los incisos "c" y "d" son los relativos a la geometría.

El objetivo "c" se reduce a "trazar" figuras. "Trazar" puede ser el resultado de una asimilación y una acomodación adecuadas, o por el contrario, de una imitación mecánica.

En el objetivo "d" se indica que se van a "resolver" problemas, lo cual ya implica un equilibrio y su consecuente adaptación al medio.

4.1.5 OBJETIVOS Y ACTIVIDADES DE UNIDAD: (sólo se mencionan los relacionados con la geometría.)

Unidad 1

Objetivos:

- Trazar algunas figuras abstraídas de objetos.

En el aprendizaje de la simetría axial, este objetivo es más un medio que un fin en sí mismo.

- Aplicar la noción de simetría axial al colorear o recortar algunas figuras.

La aplicación de los conocimientos debe recaer en la problemática real del niño, relacionarse con la "estructura global", mas no debe reducirse a una aplicación a dibujos o

recortes.

Actividades:

- Dibuje a mano figuras sugeridas por objetos de su medio:
 - Observe algunos objetos de su entorno.
 - Dibuje las figuras que le sugieran esos objetos.
 - Señale otros objetos que se parezcan a las figuras que dibujó.
 - Dibuje otros objetos sobre las figuras dibujadas; por ejemplo, dibuje una cara a partir de un círculo que observó en la tapa de un frasco.

Se sugiere que los dibujos partan de una observación del entorno, mas no de una interacción física con él.

Por otro lado, el dibujo no es la única opción en el desarrollo de la creatividad, pues también se puede construir figuras a partir de una gran variedad de elementos. Además, el dibujo, como lo señala la teoría constructivista, tiene la desventaja de ser estático.

- Coloree simétricamente algunas figuras.
 - Coloree simétricamente una figura humana ya coloreada en una de sus mitades.
 - Coloree simétricamente figuras ya coloreadas en una de sus mitades.
 - Doble por la mitad una hoja de papel y recorte, a partir del doblez, un motivo cualquiera.
 - Desdoble la hoja y observe el efecto logrado.
- Pinte simétricamente la figura recortada.

Nuevamente, no se parte de una manipulación de los objetos concretos. La actividad física se restringe a "colorear", que implica ya un cierto grado de abstracción.

El único material didáctico sugerido es el papel, que en si mismo es estático.

Se propone "recortar", lo cual Van Hiele desaconseja.

Unidad 2

Objetivos:

- Trazar figuras abstraídas de objetos, ayudándose con diferentes instrumentos.

Nuevamente, aquí encontramos el verbo "trazar".

- Clasificar figuras en simétricas y no simétricas con respecto a un eje.

La "clasificación" es, efectivamente, uno de los factores que intervienen en la construcción de estructuras mentales.

Actividades:

- Dibuje figuras sobre el terreno sin ayuda de instrumentos.
 - Observe algunos detalles de su escuela como la cancha, las

bardas, las ventanas de los salones, etc.

- Dibuje en el piso las figuras que le sugieran los detalles observados.
 - Realice juegos y ejercicios empleando las figuras dibujadas; por ejemplo, juegue a brincar adentro y afuera de ellas siguiendo órdenes y ritmos que el profesor señale.
 - Utilice las figuras dibujadas para formar sobre ellas otras figuras; por ejemplo, a partir de un círculo dibuje la cara de un gato.
 - Dibuje sobre el terreno, ayudándose con cuerdas, figuras donde utilice rectas y círculos.
 - Impregne de yeso una cuerda.
 - La extienda sobre el piso y la mantenga tirante, jalando sus extremos con ayuda de un compañero.
 - Pida a otro compañero que jale la cuerda hacia arriba y la suelte.
 - Levante la cuerda y comente con sus compañeros el dibujo realizado.
 - Extienda una cuerda sobre el piso y la tome por un extremo.
 - Pida a un compañero que amarre un gis al otro extremo de la cuerda y dé vueltas apoyando el gis en el piso para formar arcos o círculos.
 - Dibuje figuras con arcos, rectas y círculos para realizar juegos sobre ellas (el avión, la oca, etc.)
 - Dibuje figuras en su cuaderno, usando la regla y el compás.
 - Dibuje líneas rectas usando la regla.
 - Dibuje arcos y círculos utilizando el compás.
 - Trace figuras utilizando la regla y el compás.
 - Comente con sus compañeros en qué objetos observa formas como las que dibujó.
 - Discrimine figuras simétricas entre varias figuras dadas.
 - Recorte figuras diversas.
 - Doble en dos las figuras recortadas, tratando de hacer coincidir sus bordes.
 - Llame simétricas a las figuras cuyos bordes coinciden al doblarse en dos.
 - Trace una raya sobre el doblar de las figuras simétricas.
 - Llame eje de simetría a la raya trazada sobre el doblar de esas figuras.
 - Señale en un conjunto de figuras dadas cuáles son simétricas y cuáles no, y trace el eje de simetría a las que si lo son.
 - Use su regla o su compás para investigar las medidas de los segmentos simétricos de algunas figuras.
- Aspectos positivos de estas actividades:
- Se parte de una realidad concreta del niño: el edificio escolar.
 - Se proponen juegos que enfatizan la actividad corporal.
 - Se fomenta la interacción social con base en las experiencias físicas.

Unidad 3

Objetivos:

- Resolver problemas que impliquen medición y cálculo del perímetro de algunas figuras.

La verdadera asimilación y acomodación se refleja en la resolución de problemas. No obstante, esos problemas deben ser significativos para el niño, es decir, han de estar vinculados con su realidad.

- Aplicar la noción de paralelismo y perpendicularidad entre rectas al dibujar algunas figuras.

Existe un mayor equilibrio cuando el alumno demuestra que puede aplicar sus conocimientos a su entorno que cuando los aplica a un dibujo.

Actividades:

- Obtenga perímetros de algunas figuras.
 - Trace en el patio una figura cerrada formada por líneas rectas.
 - Numere los lados de la figura.
 - Se coloque adentro, afuera o en alguno de los lados de la figura, atendiendo indicaciones del profesor.
 - Mida con pasos cada uno de los lados y anote estas medidas junto a ellos.
 - Discuta con sus compañeros cómo obtener la medida de todo el contorno de la figura.
 - Anote en el piso o en su cuaderno la ecuación y adición que ayude a encontrar esa medida.
 - Resuelva la ecuación.
 - Diga cuál es la medida del contorno de la figura utilizando la solución de la ecuación con una expresión como: El perímetro de la figura es de ____ pasos.
 - Obtenga el perímetro de la misma figura siguiendo el procedimiento anterior y utilizando el metro como unidad de medida.
 - Obtenga el perímetro de las figuras trazadas por otros compañeros.
 - Forme figuras sobre la mesa con popotes o palitos.
 - Encuentre el perímetro de cada una de ellas utilizando el centímetro como unidad de medida.
 - Expresé en centímetros el perímetro de figuras dadas.
 - Calcule el perímetro de algunas figuras aplicando la idea de simetría.

El material didáctico que se sugiere es estático. Por lo tanto, no tiene las ventajas de un material móvil por continuidad, el cual permitiría ver las diferencias y la relación entre los conceptos de perímetro y superficie.

- Dibuje figuras en las que haya rectas paralelas.
 - Juegue a representar las vías del tren, las orillas de una calle, etc., formando filas con sus compañeros.
 - Coloque sobre el piso cordeles en la posición en que están

las vías del tren, las orillas de una calle, etc.

- Dibuje dos rectas que estén en la posición de las vías del tren.
- Llame paralelas a esas rectas.
- Simule paralelas sobre su mesa con popotes o palitos.
- Identifique paralelas en objetos y partes del salón, en los bordes de una mesa, del pizarrón, de la puerta, etc.
- Trace pares de paralelas ayudándose con la escuadra y la regla.
- Simule una recta sobre su mesa con popotes o palitos. Pida a un compañero que simule una paralela a esta recta.
- Dibuje una recta y luego trace una paralela a ella.
- Trace otras paralelas a esa recta.
- Trace figuras diversas utilizando paralelas.

Los ejemplos sugeridos deben permitir comprender que las líneas paralelas no tienen que tener la misma longitud, que pueden tener orientaciones diferentes, y que una línea determinada puede tener un número ilimitado de líneas paralelas a ella.

- Dibuje figuras en las que haya perpendiculares.
 - Haga filas con sus compañeros en forma de T, de L, del signo +, etc.
 - Coloque cordeles sobre el piso con la misma disposición.
 - Dibuje rectas que aparezcan en la misma disposición.
 - Llame perpendiculares a esas rectas.
 - Simule perpendiculares sobre su mesa con popotes y palitos.
 - Identifique perpendiculares en objetos y partes del salón.
 - Trace perpendiculares ayudándose con la escuadra y la regla.
 - Simule una recta con popotes sobre su mesa y pida a un compañero que simule una perpendicular a esa recta.
 - Trace una perpendicular a una recta dada.
 - Trace otras perpendiculares a la misma recta.
 - Trace figuras utilizando perpendiculares.

Al abordar el tema de las líneas perpendiculares no se parte de una actividad física con la realidad circundante. Tampoco se propone aplicar los conocimientos sobre este tema a dicha realidad.

- Descubra algunas relaciones entre paralelas y perpendiculares.
 - Trace una línea paralela a una recta dada.
 - Trace una perpendicular a esa recta y observe que también es perpendicular a la recta dada inicialmente.
 - Trace una perpendicular a una recta dada.
 - Trace otra recta que sea perpendicular a la recta dada inicialmente.
 - Observe que las dos rectas trazadas son paralelas.

No se propone una vinculación directa con la realidad circundante, es decir, no existe una "estructura global".

Tampoco se sugiere el uso de material móvil.

Unidad 4

Objetivos:

- Aplicar la idea de paralelismo y perpendicularidad en la definición de rectángulo y de triángulo rectángulo.

En el aprendizaje de estos conceptos ayuda el conocimiento previo del tema relativo a "ángulos".

- Resolver problemas que impliquen el cálculo del perímetro de algunas figuras de lados congruentes.

Conviene que tales problemas se relacionen directamente con la realidad que enfrenta el alumno.

Actividades:

- Trace triángulos rectángulos con cordeles.
 - Trace dos perpendiculares en forma de L.
 - Forme un triángulo uniendo los extremos de las perpendiculares.
 - Mida los lados del triángulo en metros y anote las medidas en cada uno de ellos.
 - Se coloque en la intersección de las rectas perpendiculares del triángulo, mire de frente uno de los catetos, dé un flanco derecho o un flanco izquierdo y diga si quedó mirando en la dirección del otro cateto.
 - Comente con sus compañeros el resultado de sus experiencias.
- Trace triángulos rectángulos en su cuaderno ayudándose con la escuadra.
 - Trace dos perpendiculares en forma de L.
 - Forme un triángulo uniendo los extremos de las perpendiculares.
 - Mida los lados del triángulo en metros y anote las medidas en cada uno de ellos.
 - Determine con su escuadra dónde hay perpendiculares.
 - Trace otros triángulos rectángulos siguiendo el mismo procedimiento.

No se parte de una manipulación de los modelos geométricos. El material que se utiliza no es móvil por continuidad.

- Identifique triángulos rectángulos.
 - Intercambie su cuaderno con sus compañeros y determine en los triángulos trazados por ellos dónde hay perpendiculares.
 - Observe semejanzas y diferencias entre los triángulos trazados por él y los trazados por sus compañeros.
 - Comente cuál es la característica común a todos los triángulos trazados.
 - Llame triángulos rectángulos a los triángulos estudiados.
 - Indique entre diversos triángulos cuáles son rectángulos y cuáles no, utilizando la escuadra.

Aspecto positivo: se propone la interacción social, la cual fomenta el diálogo y la discusión.

- Trace rectángulos en el piso ayudándose con cuerdas.
 - Trace dos rectas paralelas.
 - Dibuje un cuadrilátero trazando perpendiculares a una de esas

paralelas.

- Mida los lados del cuadrilátero en metros y anote las medidas en cada uno de ellos.
- Se pare en cada uno de los vértices y dé un flanco derecho o un flanco izquierdo como hizo con los triángulos rectángulos.
- Comente con sus compañeros el resultado de sus experiencias.
- Trace rectángulos en su cuaderno ayudándose con la escuadra.
 - Trace dos rectas paralelas.
 - Dibuje un cuadrilátero trazando perpendiculares a una de esas paralelas.
 - Determine con el compás qué lados de su cuadrilátero tienen igual longitud.
 - Determine con su escuadra dónde hay perpendiculares.
 - Indique qué lados de su cuadrilátero son paralelos.
 - Trace otros cuadriláteros siguiendo el mismo procedimiento.
- Identifique rectángulos.
 - Intercambie el cuaderno con sus compañeros y determine en los cuadriláteros trazados por ellos dónde hay perpendiculares.
 - Observe semejanzas y diferencias entre los cuadriláteros trazados por él y los trazados por sus compañeros.
 - Llame rectángulos a los cuadriláteros estudiados.
 - Indique entre varios cuadriláteros cuáles son rectángulos y cuáles no, utilizando la escuadra.
- Obtenga perímetros de figuras cuyos lados sean de igual longitud.
 - Observe algunas figuras y señale su contorno.
 - Cuente el número de lados que tiene.
 - Mida cada uno de ellos y comente si los lados tienen igual medida.
 - Exprese el perímetro de la figura por medio de una suma y por medio de un producto; por ejemplo: $3+3+3+3+3$; 5×3 .
 - Señale cuál es el producto de la figura.
 - Obtenga el perímetro de otras figuras siguiendo un procedimiento semejante.
 - Resuelva problemas en que se conozca el perímetro de figuras de lados iguales y se quiera saber la medida de un lado, o el número de lados de la figura.

El material no es móvil. Aspectos positivos: actividad corporal e interacción social.

Unidad 5

Objetivos:

- Trazar rectángulos y triángulos rectángulos de medidas dadas.
 - Determinar cuántas veces una región rectangular cabe en otra.
- El logro de ninguno de los dos objetivos garantiza que exista la acomodación y la asimilación esperadas.

Actividades:

- Trace rectángulos de medidas dadas ayudándose con la escuadra y

la regla.

- Trace dos perpendiculares en forma de L de las medidas que el profesor indique.
- Forme un rectángulo trazando paralelas o perpendiculares a partir de los extremos de las rectas trazadas.
- Mida los cuatro lados del rectángulo y observe cuáles tienen igual medida.
- Trace otros rectángulos, dadas sus dos dimensiones.
- Trace rectángulos de cuatro lados iguales siguiendo un procedimiento similar al anterior.
- Llame cuadrados a esos rectángulos.
- Trace otros cuadrados, dada la medida de uno de sus lados.
- Trace cuadrados de la misma medida sobre papel de dos colores contrastantes, los recorte y los pegue sobre una tabla o cartón, formando un tablero para jugar damas o ajedrez.
- Trace triángulos rectángulos de medidas dadas ayudándose con la escuadra y la regla.
 - Trace un rectángulo de medidas dadas.
 - Trace la diagonal de ese rectángulo.
 - Observe que se forman dos triángulos cuyos catetos tienen las medidas dadas para el rectángulo.
 - Trace dos perpendiculares como si fuera a trazar un rectángulo.
 - Marque sobre ellas las medidas que el profesor señale.
 - Trace la línea que falta para formar el triángulo.
 - Trace otros triángulos rectángulos de distintas medidas y posiciones, siguiendo el mismo procedimiento.
- Superponga rectángulos para determinar cuántas veces cabe uno en el otro.
 - Construya un cuadrado de la medida que quiera y lo superponga en algunas superficies rectangulares para determinar cuántas veces cabe en ellas.
 - Compare sus resultados con los de sus compañeros.
 - Recorte los rectángulos rojo y verde de la página 261 de su texto.
 - Tome el verde y lo superponga en los rectángulos de la página 154 para determinar cuántas veces cabe en cada uno de ellos.
 - Anote el resultado de sus mediciones utilizando expresiones como las siguientes:
 - El rectángulo verde cabe ____ veces en el rectángulo azul.
 - Hago lo mismo con el rectángulo rojo.
 - Anote los resultados de su actividad utilizando expresiones como las siguientes:
 - En el rectángulo morado caben ____ rectángulos verdes o ____ rectángulos rojos. o bien, el rectángulo morado mide ____ unidades verdes o ____ unidades rojas.
 - Realice otros ejercicios similares.

Al no utilizar un material móvil, no surgen ideas de clasificación (en término de clase y subclase) en cuanto al cuadrado y al rectángulo.

Unidad 6

Objetivos:

- Determinar en centímetros cuadrados el área de algunas superficies rectangulares.

Más importante que determinar un área es construir el concepto de área, así como la lógica que subyace a la fórmula correspondiente. Igualmente, es de gran trascendencia comprender la relación entre área y perímetro.

Actividades.

- Determine el área de algunos rectángulos superponiendo en ellos un centímetro cuadrado.
 - Mida con su regla cada uno de los lados del cuadrado rojo que recortó en la unidad anterior y lo llame centímetro cuadrado.
 - Mida cada uno de los rectángulos de la página 181 de su libro utilizando el centímetro cuadrado.
 - Anote el resultado de sus mediciones utilizando expresiones como éstas:
El centímetro cuadrado cabe ____ veces en el rectángulo azul.
El rectángulo azul mide ____ centímetros cuadrados.
 - Juegue a adivinar cuántos centímetros cuadrados miden algunas superficies rectangulares; por ejemplo, las pastas de sus cuadernos.
 - Mida esas superficies y compare la medida con su adivinanza.
- Determine el área de algunos rectángulos cuadriculándolos.
 - Trace un rectángulo con medidas dadas.
 - Marque cada uno de los centímetros que miden los lados.
 - Levante perpendiculares a partir de cada una de esas marcas.
 - Determine el área del rectángulo cuadrulado.
 - Realice otros ejercicios similares.
- Determine el área de figuras formadas por rectángulos.
 - Recorte algunos rectángulos cuya área haya determinado previamente.
 - Forme con ellos algunas figuras.
 - Determine el área de las figuras formadas.
 - Determine el área de algunas figuras formadas por rectángulos, superponiendo en ellos rectángulos cuya área conoce.

El proyecto propone una técnica similar a la del "centímetro cuadrado": cubrir las figuras con unidades de pulgadas cuadradas.

Unidad 7

Objetivos:

- Determinar el área de algunos rectángulos en función de la medida de sus lados.

El equilibrio de las estructuras mentales no muestra su estabilidad cuando los conocimientos se aplican a "algunos" rectángulos, sino cuando se ha construido la noción de área y se

puede generalizar a un sin número de casos.

Actividades:

- Calcule el área de algunos rectángulos utilizando las medidas de sus lados.
 - Trace un rectángulo con medidas dadas en centímetros exactos; por ejemplo, 7 centímetros de largo por 4 de ancho.
 - Cuadricule en centímetros cuadrados ese rectángulo.
 - Pinte de diferente color cada una de las columnas de cuadritos el rectángulo cuadriculado.
 - Cuente las columnas y observe que hay tantas como centímetros mide la base.
 - Cuente los cuadritos que hay en cada columna y observe que hay tantos como centímetros mide la altura del rectángulo.
 - Exprese el número total de cuadritos con un producto como 7×4 o bien 28.
 - Interprete ese producto como 7 columnas de 4 cuadritos cada una, o bien como el número de centímetros que tiene la base por el número de centímetros que tiene la altura.
 - Compruebe que ese producto expresa el área del rectángulo en centímetros cuadrados, contando los cuadritos de la cuadrícula trazada.
 - Repita este ejercicio con varios rectángulos.
 - Comente con sus compañeros cómo se puede obtener el área de algunos rectángulos, conociendo la medida de cada uno de sus lados.
 - Resuelva problemas que impliquen el cálculo del área de algunos rectángulos.

El material no es móvil y por lo tanto no permite:

- ver la relación área-perímetro
- comprender la constancia en el área a pesar de cambios que surgen cuando la altura de la figura aumenta mientras su longitud disminuye, o viceversa.

Unidad 8

Objetivos:

- Determinar el área de algunos triángulos aplicando sus conocimientos sobre el área del rectángulo.

Muevamente, en este caso lo más importante es construir la noción de área y no permitir que se apliquen fórmulas mecánicamente.

Actividades:

- Determine el área de algunos triángulos no rectángulos formados por otros triángulos rectángulos cuya área conoce.
 - Recorte los rectángulos de la página 269 de su libro.
 - Calcule el área de esos rectángulos.
 - Recorte los dos rectángulos por una de sus diagonales.
 - Superponga los dos triángulos obtenidos en cada uno de los rectángulos para ver si son congruentes.

- Comente con sus compañeros cuál será el área de cada uno de los triángulos.
- Anote sobre cada triángulo su área.
- Calcule el área de otros triángulos superponiendo en ellos los triángulos recortados.
- Repita la actividad anterior con triángulos que obtenga de rectángulos que trace en su cuaderno.
- Forme triángulos no rectángulos de área señalada por el profesor, uniendo los triángulos rectángulos recortados.
- Calcule el área de algunos triángulos, rectángulos y no rectángulos, que formen parte de rectángulos con medidas conocidas.
- Determine el área de triángulos calculando el área de un rectángulo que construya sobre cada uno de ellos.
- Determine el área de triángulos no rectángulos con un procedimiento semejante.

El material utilizado es estático

4.2. EVALUACION DEL PROGRAMA DE 3º DE PRIMARIA CON BASE EN EL MODELO PROPUESTO A PARTIR DE LA LA TEORIA PSICOGENÉTICA DE PIAGET Y LA TEORIA DE VAN HIELE

Un análisis del programa de geometría de 3º de primaria no se reduce al estudio del contenido, sino que debe tomar en cuenta desde objetivos hasta formas de evaluar.

4.2.1 FORMULACION DE OBJETIVOS

En el ámbito de la formación científica de la educación básica se pretende que el alumno "desarrolle la creatividad y estructuras lógicas, y que se apropie conceptos, métodos y lenguajes derivados de las disciplinas científicas." (101)

La creatividad, según Piaget, es el primer objetivo de la educación. Ahora bien, lo importante es saber lograrlo.

Las estructuras lógicas, así como la obtención de conocimientos (conceptos, métodos, etc.) son un medio para adaptarse al medio.

Por otro lado, se ve en las matemáticas un lenguaje que permite al educando expresarse mediante la simbología propia. Las matemáticas constituyen además un "instrumento indispensable para

(101) Los planes de estudio de la educación básica. Modernización Educativa., p. 21

la adquisición de nociones y conceptos de otros campos de estudio". (102)

El niño de primaria deberá reconocer en las matemáticas un lenguaje que le permita "conocer, interpretar y transformar el mundo." (103)

El tratamiento de los temas debe partir de la problemática real del niño y retornar a aplicarse a ella. El educando debe elaborar sus conceptos partiendo de la actividad corporal y aplicarlos creativamente a situaciones.

Piaget considera que la generalización es un elemento indispensable en el verdadero conocimiento.

Todo lo anterior hace referencia a objetivos generales, pero cuando se analizan los objetivos particulares de cada unidad, no se ve coherencia entre unos y otros, es decir, los objetivos particulares no contribuyen realmente al logro de los objetivos generales.

Verbos utilizados en los objetivos por unidades:

Trazar, aplicar, colorear, clasificar, resolver, identificar, obtener y determinar.

(102) idem

(103) Libro para el mtro. 3º, p. 59

Dado que para Piaget, un programa que no fomente el desarrollo afectivo y moral tampoco fomentará el desarrollo intelectual, los objetivos deben también hacer referencia a logros en estos ámbitos.

Para Van Hiele, verbos como el de "identificar" está a nivel "0". El problema aquí no radica en el nivel, sino en que las actividades y la evaluación se adecúen con el objetivo a este nivel.

4.2.2 SELECCION Y ORGANIZACION DE CONTENIDOS

No se hace ninguna referencia al respecto.

Los contenidos del programa de tercer grado de matemáticas son los siguientes:

Unidad 1

- Figuras abstraídas de objetos
- Noción de simetría axial

Unidad 2

- Figuras abstraídas de objetos
- Segmentos de recta
- Figuras simétricas

Unidad 3

- Perímetro de algunas figuras
- Noción de paralelismo y perpendicularidad entre rectas

Unidad 4

- Idea de paralelismo y perpendicularidad en la definición de rectángulo y triángulo rectángulo
- Perímetro de figuras con lados congruentes

Unidad 5

- Rectángulos y triángulos rectángulos
- Regiones rectangulares

Unidad 6

- Círculos
- Segmentos de recta
- Área de algunas superficies rectangulares

Unidad 7

- Área de algunos rectángulos

Unidad 8

- Área de triángulos

Estos contenidos no han tomado en cuenta el hecho de que los niños adquieren primero nociones topológicas antes que euclidianas.

Los contenidos de este libro trabajo tiene características que Van Hiele señala como negativas:

- Cuadrados, triángulos y rectángulos con un lado siempre vertical.
- Líneas de simetría que están siempre horizontales o verticales.
- Bases de triángulos siempre horizontales al obtener su área.

4.2.3 SELECCION DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Metodología

En el "Libro del Maestro" de matemáticas de 3º de primaria no se hace ninguna sugerencia sobre alguna metodología concreta a seguir. No obstante, es práctica común en nuestro país optar por métodos tradicionales de instrucción. Piaget hace críticas concretas a estos métodos.

Características de los métodos tradicionales de instrucción según Piaget:

Por método tradicional se hace referencia a los casos en los que el profesor utiliza un plan de sesión para dirigir a los estudiantes a través de una secuencia dada de material. Se trata de transmitir el material a partir de conferencias y

otro tipo de explicaciones verbales, se obliga a los estudiantes a cubrir las mismas lecciones, y se emplea un libro de texto como el medio básico de instrucción. En estas condiciones, los estudiantes toman posiciones fijas en el salón de clases, hablan entre sí arriesgándose a ser castigados, deben escuchar al profesor, deben estudiar el material que el profesor considera necesario, y deben tratar de aprender de los libros.

Los procedimientos tradicionales de instrucción están basados en varios supuestos relativos a la naturaleza de los niños y su aprendizaje. Un supuesto es que los estudiantes de una edad determinada deberían aprender el mismo material. Hay algo de verdad en este supuesto. Los niños de una cierta edad en un contexto cultural determinado, generalmente son de un nivel similar de desarrollo cognitivo y, por lo tanto, no pueden aprender unos conceptos pero sí otros. Sin embargo, las escuelas tradicionales se van al extremo de forzar a todos los estudiantes a cubrir el mismo material. El método tradicional ignora que hay diferencias individuales en el ritmo de aprendizaje. Además, este procedimiento no toma en cuenta otros factores que promueven el interés y el conocimiento auténtico. Se elvida que los aprendizajes significativos se dan cuando una experiencia nueva tiene un grado moderado de novedad en relación a la estructura cognitiva actual del individuo.

Un segundo supuesto es que los niños aprenden a través de explicaciones verbales por parte del profesor, o a través de exposiciones escritas en los libros. Esto es cierto en algunas ocasiones. Pero los niños requieren de actividad concreta para lograr aprendizajes genuinos. La explicación verbal y la exposición escrita pueden ser efectivos sólo después de que se ha establecido una base de actividad concreta.

Un tercer supuesto de la educación tradicional es que si a los estudiantes se les da un mayor control sobre su experiencia de aprendizaje, perderán el tiempo y aprenderán poco. Es cierto que si los estudiantes no reciben ninguna guía de los adultos, perderán algo de tiempo. Pero esto no implica que los estudiantes no deban tener ningún control sobre su aprendizaje. La mayor parte del aprendizaje depende de procesos de autoregulación. También, fuera de la escuela, los niños se las arreglan para aprender. Por lo tanto, se puede confiar en los estudiantes dejándoles una gran parte de responsabilidad en la dirección de su proceso de aprendizaje. Los adultos pueden ayudar, pero no tomar en control completo.

Un cuarto supuesto es que la plática no controlada en la clase impide el proceso educativo. Es cierto que mucho ruido impide que los alumnos aprendan, pero Piaget señala que la conversación y las opiniones encontradas, son

benéficas para el crecimiento mental. Es negativo excluir las conversaciones inteligentes y espontáneas en las escuelas.

En cuanto a la metodología, se sugiere concretamente que las definiciones y las fórmulas sean el resultado de la observación, la comparación y el análisis de la realidad, y no que los conceptos sean dictados.

Es poco lo que se impulsa a la manipulación y actividad corporal.

Según Piaget, los niños necesitan manipular las cosas para poder aprender. Además deben hablar entre ellos, argumentar, debatir; aspectos que no son mencionados en el libro de trabajo como tampoco en el del profesor.

Van Hiele da una gran importancia a que los estudiantes manipulen los objetos matemáticos, lo cual poco se impulsa en el libro de trabajo.

Por otro lado, no se especifica a que nivel de complejidad o abstracción se espera que el alumno dé sus respuestas. En este aspecto, el modelo de Van Hiele es un excelente auxiliar para clasificar dichas respuestas.

Tanto para Piaget como para Van Hiele es importante que el lenguaje sea adecuado al nivel del niño, así como a las expectativas de su progreso. Los libros de la SEP no siguen

un criterio sistemático al respecto.

4.2.4 ORGANIZACION DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Se debe partir de la "actividad corporal, la manipulación, la observación, la comparación, al análisis, la obtención de conclusiones, etc.", para luego "aplicar dichos conceptos a otras situaciones de manera creativa". (104)

Después de las actividades corporales se sugiere realizar actividades en el cuaderno.

Las actividades que se sugieren en el libro de matemáticas de 3º de primaria son las siguientes:

Unidad 1

- Se abstraen rectángulos, cuadrados y círculos en dibujos sobre la realidad circundante.
- Se reconoce la simetría de un dibujo.

Unidad 2

- Se muestra una secuencia sobre las operaciones que se pueden seguir para formar líneas rectas y curvas con base en el uso de

(104) idem

cuerdas. *

- Se muestra cómo hacer las mismas líneas utilizando regla y compás.
- Se comprueba la simetría de recortes de figuras.
- A dibujos incompletos se añade la parte faltante para que sean simétricos.

Unidad 3

- Se pasa con el dedo el contorno (perímetro) de una figura.
- Se suma el largo de sus lados para obtener su medida.
- Se aplica la noción de perímetro al contorno de los dibujos que representan cuerdas de una ciudad.
- Obtención del perímetro de figuras simétricas. (Dibujos sobre papel.)
- Deducción del significado de "rectas paralelas" a partir del análisis de los dibujos de la vía de un tren y unos cables de luz.
- Trazo de paralelas con ayuda de escuadra y regla.
- Con ayuda de regla y escuadra se analiza en varias figuras cuáles rectas son paralelas entre sí.
- Trazo de perpendiculares con ayuda de escuadra y regla.
- Con ayuda de regla y escuadra se analiza en varias figuras cuáles rectas son perpendiculares entre sí.
- Trazo de paralelas y perpendiculares con base en instrucciones.

Unidad 4

- Se observan los dibujos de triángulos rectángulos.
- Trazo de un triángulo rectángulo con base en instrucciones que hacen referencia a perpendiculares.
- Búsqueda de triángulos rectángulos en una figura.
- Se observan los dibujos de rectángulos.
- Trazo de un rectángulo con base en instrucciones que hacen referencia a perpendiculares.
- Búsqueda de triángulos rectángulos en un conjunto de diversos tipos de cuadriláteros.
- Cálculo del perímetro de figuras cuyos lados miden lo mismo.
- Construcción de un geoplano para formar figuras cuyos lados serán rectos.

Unidad 5

- Se observan rectángulos en un dibujo de una cobija.
- Se establece que el cuadrado es un tipo de rectángulo cuyos cuatro lados son de igual medida.
- Trazo de cuadrados a partir de rectas dibujadas.
- Se dibujan y recortan cuatro triángulos cuyas medidas sean 3 y 4 unidades en sus lados perpendiculares, y se investiga cuánto mide el otro lado.
- Se usan dos o más de estos triángulos para formar distintas figuras (triángulos y cuadriláteros).
- Trazo de triángulos rectángulos a partir de rectas dibujadas y

con la ayuda de regla y escuadra.

- Se investiga cuántos cuadrillos caben en varios cuadrados y rectángulos.

Unidad 6

- Trazo de círculos para analizar la relación entre las características de éstos y sus radios. (Aquí se muestra un dibujo que sugiere que el niño trace un círculo usando una cuerda y dos palos, actividad que conllevaría su transición física. *
- Medición de segmentos haciendo uso de un compás.
- Uso del compás para saber cuántas veces cabe un segmento en el contorno de una figura.
- Se cuadrícula varios rectángulos tomando como base la unidad de 1 cm. para saber cuántos cuadrillos (o centímetros cuadrados) caben en cada uno de los rectángulos, es decir, para conocer su área en centímetros cuadrados.
- Se calcula el área en centímetros cuadrados de varias figuras.

Unidad 7

- Se obtiene el área de varios rectángulos cuadrícula en cm^2 multiplicando columnas verticales por horizontales.
- Se obtiene el área de varios rectángulos usando términos de "base" y "altura".

Unidad 8

- Se miden y obtienen las áreas de un cuadrado y un rectángulo recortables.
 - Ambos se recortan diagonalmente para formar de cada figura dos triángulos. Se enciman unos sobre otros para comparar áreas. Se obtienen sus áreas y se analiza su relación con las áreas de las figuras originales.
 - A partir de rectángulos (cuadrículados en cm^2) divididos cada uno en dos triángulos rectángulos, se obtiene el área de ambos para analizar su relación.
- * Con excepción de las actividades que tienen un asterisco, casi todas las actividades sugeridas promueven que el niño vuelque su atención sobre el objeto y no sobre su actividad misma, lo cual es contrario a lo que sugiere Piaget. Pasar de lo concreto a lo abstracto debe partir de las operaciones con el objeto y no de su observación.

4.2.5 EVALUACION

No existen lineamientos generales para la evaluación. Existen ejercicios que tienen la doble finalidad de aplicar los conocimientos y de evaluar. No existe evaluación sumaria en el cuaderno de trabajo.

La teoría de Piaget sugiere que además de los tests estandarizados, se utilice la observación para evaluar al

niño.

Sólo se evalúa lo cognitivo, olvidándose los aspectos afectivo y moral.

No se evalúa el esfuerzo del estudiante para alcanzar el equilibrio.

Para Van Hiele, no basta con los exámenes escritos.

No existe, como lo sugiere Van Hiele, un criterio sobre el nivel de complejidad de las respuestas que se esperan del alumno. Además, no hay adecuación entre el nivel de complejidad de lo que se enseña y lo que se evalúa.

4.2.6 CUADRO COMPARATIVO DE LAS DIFERENCIAS CONCEPTUALES SOBRE LA EDUCACION MATEMATICA ENTRE LA SEP, PIAGET Y VAN HIELE.

CARACTERISTICA	PROGRAMA DE LA SEP	PIAGET	VAN HIELE
Finalidad de la educación	desarrollo armónico	desarrollo cognitivo	proceso en el nivel de pensamiento
Finalidad de la educación	socialización	adaptación a la realidad social	-----
Áreas de desarrollo	conocimientos, hábitos, habilidades, actitudes, valores	intelectual, social, moral	intelectual
Formas en que se manifiesta el desarrollo logrado	pensamiento crítico creatividad	pensamiento reflexivo conciencia crítica creatividad	razonamiento
Tipo de aprendizaje que se busca	aprendizaje significativo	aprendizaje en sentido amplio: logro de un mayor equilibrio	pensar explícitamente a un nivel
Efecto a largo plazo del proceso de enseñanza-aprendizaje	actitud de aprendizaje permanente	actitud responsable en el autoaprendizaje	desarrollo de aspectos cognitivos y metacognitivos en el aprendizaje
Campos que se benefician del aprendizaje de las matemáticas	ciencia y tecnología	ciencia	ciencia
¿Qué son las matemáticas?	un instrumento, un lenguaje para conocer, interpretar, organizar y transformar el medio ambiente	un instrumento, un lenguaje para el desarrollo de la inteligencia a través de la construcción de estructuras lógico-matemáticas	un campo de estudio en relación al cual el pensamiento va progresando
Relación entre el proceso de enseñanza-aprendizaje y la realidad	partir de la problemática real del niño y retornar a aplicarse a ella	el proceso de enseñanza-aprendizaje debe promover una adaptación con la realidad a partir de una interacción con ella	"estructura global"
Origen del conocimiento	actividad corporal, manipulación, observación, comparación, análisis, obtención de conclusiones, etc.	la persona va construyendo el conocimiento a partir de su interacción física y social con el medio	manipulación de los modelos geométricos

4.3 PROPUESTA METODOLOGICA APLICADA A LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA EN TERCERO DE PRIMARIA CON BASE EN LA TEORIA PSICOGENETICA Y EN LA TEORIA DE VAN HIELE

En el programa de geometría para 3º de primaria se enfatiza que el aprendizaje de la geometría debe partir de la problemática real del niño. Además, se señala que los temas de geometría deben ser tratados a partir de actividades corporales y manipulatorias.

Todo lo anterior no sólo es compatible con la teoría de Piaget, sino que incluso son puntos que él mismo señala en su teoría como factores fundamentales en el desarrollo cognoscitivo.

Sin embargo, analizando los objetivos y actividades propuestos en el plan de geometría de 3º de primaria, se observa que no hay suficientes sugerencias concretas para llevar lo anterior a la práctica.

En relación a la teoría de Van Hiele, por el mismo hecho de ser tan reciente, no forma parte de las teorías psicológicas que fundamentan el programa de geometría establecido por la SEP.

Aun cuando diversos autores, como Livia P. Denis de la Universidad de Albany (E.U.A), hacen estudios comparativos sobre la aplicación de la teoría de Van Hiele y la teoría de Piaget a la geometría, poco se ha hecho en relación a su combinación. Y, en este sentido, el "Brooklyn College Project" sugiere explorar

el modelo de Van Hiele en un contexto Piagetiano. Además, ambas teorías no se contraponen, pues aunque son distintas en muchos aspectos, coinciden en puntos fundamentales.

Con base en la combinación de las implicaciones educativas de ambas teorías se dan en este capítulo recomendaciones para el plan de estudios de geometría establecido por la SEP.

En algunos casos se modifican los objetivos ampliándolos en cuanto a contenido y profundidad. Además, se añade al plan de estudios un tema: los ángulos, por considerarse útil al aprendizaje global de los contenidos de geometría de este nivel, y por ser un tema accesible a la capacidad del niño de 3º de primaria.

4.3.1 INDICACIONES GENERALES

Aun cuando las actividades de aprendizaje se planean para ser aplicadas a nivel grupal, deben adecuarse a las necesidades y al ritmo particular de cada niño.

Un nuevo contenido solo podrá ser asimilado si el alumno ya cuenta con algún tipo de estructura a la que lo pueda asimilar. El grado de asimilación que se requiera dependerá del grado de desequilibrio provocado por los elementos perturbadores y del nuevo contenido.

Para que exista una auténtica re-equilibración y una mejor adaptación al medio, los nuevos aprendizajes deberán ser generalizados a la realidad circundante del niño.

La construcción de los nuevos conceptos requiere de actividades clasificatorias (clase subclase) que ayudarán a determinar las relaciones entre las diversas figuras dependiendo de sus características.

4.3.2 CUADRO CONCEPTUAL PROPUESTO

CARACTERISTICA	CONCEPTO
Finalidad de la educación	Desarrollo armónico de los aspectos intelectual, social y moral orientados hacia una adaptación a la realidad en la que se vive.
Areas de desarrollo	Intelectual, social, moral y psicomotriz
Formas en que se manifiesta el desarrollo logrado	Creatividad, pensamiento autonomo y critico
Tipo de aprendizaje que se busca	"Construcción" del conocimiento para lograr un mayor equilibrio, es decir, una mejor adaptación. Esto implica la capacidad de pensar explícitamente en un nivel.
Efecto a largo plazo del proceso de enseñanza-aprendizaje	Desarrollo de actitudes intelectuales y afectivas positivas que promuevan el aprendizaje.
Campos que se benefician del aprendizaje de las matemáticas	Ciencia y tecnología
¿Qué son las matemáticas?	Un campo de estudio que promueve el desarrollo armónico de la persona y le permite dominar el medio en el que vive
Relación entre el proceso de enseñanza-aprendizaje y la realidad	La adaptación al medio parte de una interacción con la realidad concreta.
Origen del conocimiento	Actividad física y mental sobre el medio

4.3.3 SUGERENCIAS POR UNIDAD

Unidad 1

Tema: simetría axial

Objetivos:

- Construir la noción de simetría axial.
- Aplicar la noción de simetría axial a figuras de la vida real del niño.
- Generalizar dicha noción a figuras no vistas en clase.

Actividades:

INFORMACION:

- El profesor dialoga con los alumnos acerca de las características físicas (en especial de la forma) de los objetos que conocen. Los interroga sobre sus conocimientos de simetría en términos de "figuras que al ser partidas por la mitad forman dos mitades iguales (congruentes)".
- Analizar la simetría del rostro humano.
 - Observarse frente a un espejo u observar de frente a un compañero.
 - Señalar y describir en términos cuantitativos el rostro que se tiene en frente (dos ojos, una nariz, dos orejas, etc.)
 - Cubrir con una tabla de madera la mitad derecha (o izquierda) del rostro y decir si la mitad descubierta es igual o no a la otra mitad. Discutir esto en grupos pequeños y acordar

porque una mitad es igual a la otra, y caso contrario, qué faltaría poner o quitar para que fuesen iguales.

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Crear figuras teniendo una línea de simetría.
 - Doblar papel y cortar figuras.
 - Usar papel cuadriculado para copiar un dibujo de un lado de una línea en el otro lado.
- Analizar la simetría de los objetos que rodean al niño.
 - Observar y manipular juguetes y diversos objetos simétricos y no simétricos con los que se pueda contar en el salón de clases.
 - Clasificar los objetos de acuerdo a si tienen una línea de simetría.
 - Trazar una línea imaginaria que los divida en dos y cubrir con una tabla de madera una de las mitades.

EXPLICITACION:

- Discutir en grupos pequeños si la mitad cubierta y la descubierta son iguales, y explicar por qué.
- Discutir a nivel grupal las características observadas en los objetos estudiados, aquí el profesor contribuirá con la aportación de algunos conceptos geométricos (eje de simetría, figuras simétricas, etc.).

(NOTA: EXPLICITACION.- Las actividades de explicitación no tienen un lugar cronológico fijo entre las fases. Más bien se trata de un diálogo presente a lo largo de las otras cuatro

fases, que tiene como fin la adquisición de símbolos lingüísticos y la reflexión en voz alta.)

ORIENTACION LIBRE:

- Aplicar la noción de simetría a objetos de la vida cotidiana.
 - Recolectar objetos que sean simétricos.
 - Discutir por qué son simétricos.
 - Seleccionar aquellos de los objetos que puedan ser transformados (tales como frutas, dibujos, modelos de plastilina) y modificar una de sus mitades. Posteriormente, otro niño debe modificar la otra mitad de tal manera que vuelvan a ser simétricos.
- Hacer recortes de papel que resulten geométricos. Aun cuando Van Hiele no aconseja el recortar, no lo hace en relación al aprendizaje de la simetría.
 - Doblar hojas de papel en dos y recortarlas formando figuras en torno al eje que es el doblez.
 - Desdoblar las hojas y observar su simetría.
 - Dibujar cada mitas de tal modo que sigan siendo simétricas.

INTEGRACION:

Resumen por parte del profesor: En qué consiste la simetría. Cómo se compueba la simetría, cómo se hacen figuras simétricas.

Unidad 2

Tema: la simetría axial

Objetivos:

- Clasificar las figuras en simétricas y no simétricas con respecto a un eje.

Actividades:

INFORMACION:

- Identificar a los compañeros cuyo vestuario es simétrico y aquellos cuyo vestuario no lo es.

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Dividir una serie de objetos en simétricos y no simétricos.
 - Observar y manipular diversos objetos simétricos y no simétricos.
 - Trabajar en equipos dividiendo dichos objetos en simétricos y no simétricos, acordando a través del diálogo cuales pertenecen a unos o a otros.

ORIENTACION LIBRE:

- Realizar juegos en los que los niños tomen posiciones que resulten geométricas o no geométricas.
 - Mientras que se oye una música, el niño puede bailar o tomar distintas posiciones según quiera. Cuando la música para el niño queda inmóvil. Otros niños dicen si la posición en la que quedó es simétrica o no y por qué.

INTEGRACION:

Resumen por parte del profesor: Características que diferencian a

los objetos simétricos de los que no lo son.

(NOTA: INTEGRACION.- Las actividades de integración son dirigidas por el profesor. Sin embargo, esto no implica que se descarte la participación activa del alumno; por el contrario, se sugiere.)

Unidad 3

Temas: perímetro, paralelismo y perpendicularidad

Objetivos:

- Construir el concepto de perímetro.
- Obtener el perímetro de diversas figuras.
- Construir y aplicar los conceptos de paralelismo y perpendicularidad entre rectas.
- Construir la noción de ángulo.
- Asimilar las relaciones entre paralelismo, perpendicularidad y ángulo.

Actividades:

INFORMACION:

- Reconocer cual es el perímetro de diversas áreas.
 - Recorrer con el dedo el contorno de diversas figuras.
 - Caminar a lo largo del perímetro de diversas superficies (el salón de clases, el patio de la escuela, etc.)
 - Recorrer con las manos el perímetro de algunas figuras

presentes en la vida cotidiana del niño (el área de la superficie de su pupitre, el marco de la ventana, etc.)

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Construir figuras con diversos perímetros.
 - Elaborar una tabla en la que se fijen clavos en líneas paralelas verticales y horizontales.
 - Utilizando una liga y fijándola alrededor de los extremos de varios clavos escogidos aleatoriamente ir formando diversas figuras. Durante este proceso se señalará al alumno que la liga siempre está indicando cuál es el perímetro de las figuras.
- Hacer figuras con palitos y calcular sus perímetros con base en la medida de "palitos".
 - Dar a cada niño un número igual de palitos para que con ellos hagan figuras cerradas y preguntarles cuantos palitos de largo tienen sus figuras.

ORIENTACION LIBRE:

- Medir el perímetro de diferentes áreas dentro del salón de clases.
 - Obtener un listón del largo de uno de los brazos de un niño y con él medir cuantos brazos caben en el perímetro del salón, la puerta, las ventanas, el pizarrón, etc.
 - Cambiar la medida de brazo por la de metro y medir con él los mismos y otros perímetros.
 - Medir el perímetro de objetos más pequeños con la medida de centímetro.

INTEGRACION:

Resumen por parte del profesor: Qué es el perímetro. Qué utilidad tiene el conocerlo. Cómo se calcula.

INFORMACION

- Identificar rectas paralelas en el entorno del niño.
- De los diversos objetos formados por líneas rectas que rodean al niño identificar cuáles están constituidos por líneas paralelas (la ventana, la puerta, el pizarrón). Durante esta actividad el profesor introducirá el vocabulario relativo al paralelismo).
- El niño mostrará en qué posición debe mantener un brazo con respecto al otro para que sean paralelos.

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Los niños se formarán en líneas paralelas con variaciones en:
 - .. la longitud de las filas
 - .. el número de filas
 - .. las orientaciones de las filas.

EXPLICITACION:

- Discutir la distancia que existe entre una y otra línea en varios puntos a lo largo de las mismas. Observar que la distancia es continua y señalar que tal característica las hace denominarse "paralelas".

ORIENTACION DIRIGIDA

- Mostrar al alumno láminas que representen figuras conocidas en las que existan paralelas (vías del tren, orillas de una

calle, columnas de un edificio, barras de gimnasia, cables de luz). Las figuras deberán tener diversas orientaciones (inclinadas, verticales, horizontales); diferente longitud (líneas largas paralelas a líneas cortas), y diferente número de líneas paralelas a una misma línea.

- Discutir en grupos pequeños qué líneas son paralelas y qué líneas no lo son y por qué.

ORIENTACION LIBRE:

- Aplicar la noción de paralelismo a la creación de figuras con rectas paralelas.

INTEGRACION:

Resumen por parte del profesor: Qué son líneas paralelas. Cómo se forman e identifican.

INFORMACION:

- Identificar las líneas perpendiculares que existen en el medio.

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Reconocer líneas perpendiculares en su entorno.
 - A partir de la observación y manipulación de lo que rodea al niño se le pide que analice los puntos de unión de las superficies y que las describa (el pizarrón, las mesas, las bancas, etc.).
 - El niño representa a través de palitos esos puntos de unión creando diversas figuras.
 - El niño representa con su cuerpo figuras similares y otros niños dialogan sobre si son o no perpendiculares esas figuras

y por qué.

- Dibuja las figuras que ha creado.
- Analiza cual es la similitud entre sus dibujos y los signos: L, T y +. Discute sobre ello con sus compañeros.
- Se le explica que a esa posición de una línea con respecto a otra se le denomina paralela.

ORIENTACION LIBRE:

- Descubrir otras líneas paralelas en su alrededor.
- Crear otras líneas paralelas a través de su construcción con palitos o similares, y dibujos.

INTEGRACION:

Resumen por parte del profesor: Qué son líneas perpendiculares, cómo se forman e identifican.

INFORMACION:

- Descubrir y hacer ángulos.
 - Con base en lo anterior, llevar la atención hacia la apertura que forman dos líneas unidas en un punto.

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Formar con el cuerpo diferentes aperturas (el cuerpo se dobla por la cintura, se dobla la rodilla o el codo formando distintos ángulos).

ORIENTACION LIBRE:

- Utilizando dos barras perforadas en uno de sus extremos, un tornillo y una tuerca, se elabora un instrumento para hacer ángulos. El niño juega con él produciendo diversas

aperturas.

EXPLICITACION:

- El niño elabora su propia definición de ángulo.
- Haciendo referencia a los ángulos de las líneas perpendiculares se explicará la diferencia entre los ángulos rectos, los agudos y los obtusos.

INGEGRACION:

Resumen por parte del profesor: Qué es un ángulo, cómo se forma.

INFORMACION:

- Relacionar los conceptos de paralelismo y perpendicularidad, y de perpendicularidad y ángulo.
- Se muestran a los niños telas y dibujos de figuras cuadriculadas. Por ejemplo, el dibujo de los mosaicos de un baño.

EXPLICITACION:

- Se analizan las líneas paralelas y verticales que existen en los dibujos.

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Se muestra al niño una rejilla formada a partir de varillas largas perforadas por ambos extremos, tornillos y tuercas.
- Utilizando el mismo tipo de material, los niños forman sus propias rejillas. Esta figura es móvil, pues si se manipula hacia uno u otro lado, los cuadrados que se forman entre las líneas se convierten en rombos. Esto implica que sus ángulos rectángulos se convierten en ángulos agudos con sus

complementarios obtusos.

- El niño imita corporalmente (de preferencia con sus dedos y manos) la transformación de dichos ángulos.
- Se observa que con un enrejado de líneas paralelas y líneas perpendiculares se vuelven oblicuas (al manipular la rejilla), los ángulos se vuelven agudos y obtusos.

EXPLICITACION:

- Los niños discuten sobre cuando existen ángulos agudos y obtusos.

ORIENTACION LIBRE:

- El niño manipula la rejilla para hacer los ángulos complementarios que se proponga y hace un registro de cada ángulo formado y de su complementario correspondiente.

INTEGRACION:

Resumen por parte del profesor: Relación entre paralelismo y perpendicularidad, y entre perpendicularidad y ángulo.

Unidad 4

Temas: rectángulo, triángulo rectángulo, perímetro

Objetivos:

- Conocer y reproducir triángulos rectángulos.
- Comprender la relación entre rectángulos y triángulos rectángulos.
- Aplicar los conceptos de paralelismo y perpendicularidad a la

definición de rectángulo y de triángulo rectángulo.

- Resolver problemas que impliquen el cálculo del perímetro de algunas figuras de lados congruentes.

Actividades:

INFORMACION:

- Se manipulan rectángulos y triángulos rectángulos de las mismas dimensiones sobreponiéndolos y formando con ellos figuras.

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Reproducir triángulos.
 - Se muestran a los alumnos rejillas similares a las estudiadas anteriormente, pero esta vez las barras verticales están más separadas que las horizontales, de manera tal que se obtengan rectángulos con base diferente a su altura, y no rectángulos cuadrados. Las barras utilizadas son de un mismo color.
 - Se forman triángulos a partir de los rectángulos colocando diagonalmente otras barras perforadas, de manera que corten a los rectángulos en sus vértices. Estas nuevas barras deberán distinguir los rectángulos de los triángulos. La construcción de estos triángulos inmoviliza a la rejilla, pues cuando sólo existían rectángulos, la rejilla era móvil y los rectángulos podían convertirse en trapecios.

EXPLICITACION:

- Se analiza la relación existente entre los rectángulos y los triángulos. Por ejemplo, la base y la altura siguen siendo las mismas.

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Se proporciona a los niños triángulos rectángulos y se les pide que con ellos formen rectángulos. Con esto estarán reproduciendo lo que vieron en la rejilla.

EXPLICITACION:

- Nuevamente se analizan las relaciones entre el triángulo y el rectángulo. Por ejemplo, la relación entre el perímetro del rectángulo y el del triángulo.
- Los niños discutirán sobre las líneas paralelas y perpendiculares que observan.
- Elaborarán sus propias definiciones de rectángulo y de triángulo usando la terminología de líneas paralelas y perpendiculares.

ORIENTACION LIBRE:

- Elaborar, a partir de triángulos rectángulos y de rectángulos, figuras que representen objetos de la vida cotidiana.

INTEGRACION:

- Resumen por parte del profesor: Características de los rectángulos y de los triángulos rectángulos, así como de sus relaciones.

INFORMACION:

- Deducir las fórmulas para obtener el perímetro de figuras cuyos lados tengan igual longitud.
- Observar y manipular diversas figuras cuyos lados tengan igual longitud.

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Medir cada uno de los lados comprobando si su medida es la misma.
- Sumar las medidas de cada lado y obtener los perímetros de las figuras.

EXPLICITACION:

- Discutir sobre la posibilidad de utilizar la multiplicación como opción para facilitar obtener el perímetro de figuras cuyos lados tienen la misma medida.
- El alumno enunciará la lógica para obtener el perímetro de figuras cuyos lados son congruentes.

ORIENTACION LIBRE:

- Obtener el perímetro de áreas rectangulares significativas en la vida del alumno.

INTEGRACION:

- Resumen por parte del profesor: Como se obtiene el perímetro de un área rectangular, y la utilidad que esto representa.

Unidad 5

Tema: cuadrado, el cuadrado dentro de los cuadriláteros, ángulo

Objetivos:

- Construir el concepto de cuadrado y asimilar sus propiedades.
- Comprender la relación de inclusión entre cuadrado y

rectángulo.

- Aplicar los conocimientos de ángulo a estas figuras.

Actividades:

INFORMACION:

- Identificar los cuadrados que se encuentren en el medio.
- Dibujar figuras de objetos cuadrados que el niño conozca.

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Reproducir cuadrados.
 - Elaborar una rejilla en la que la distancia entre las líneas verticales sea la misma que entre las líneas horizontales.

EXPLICITACION:

- Manipularla y comentar las figuras obtenidas (cuadrados y rombos). El profesor introducirá el vocabulario relativo a "cuadrado" y "rombo". Esta actividad sugiere que el cuadrado es un tipo de rombo.
- Discutir sobre los elementos que cambian (ángulos) y los que no cambian (perímetro).
- Elaborar el concepto de cuadrado con base en los conocimientos de: perpendicularidad, paralelismo y ángulos.

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Comparar cuadrados y rectángulos.
 - Con ayuda de los dedos índice y pulgar de ambas manos, y utilizando una liga, formar cuadrados y rectángulos jugando con las longitudes variando unas y manteniendo otras constantes.

- Utilizando un material resistente, elaborar un cuadrado.
 - Elaborar un rectángulo en el que dos de sus lados midan lo mismo que cada lado del cuadrado, pero en el que la longitud de los otros dos lados sea mayor.
 - Colocar el cuadrado sobre diferentes partes de la superficie del rectángulo comparando sus medidas así como sus ángulos.
 - Discutir sobre las diferencias y similitudes entre las características de una y otra figura.
 - Determinar qué propiedades son comunes a ambas figuras y cuáles no lo son (en términos de paralelismo, perpendicularidad, ángulos y longitudes).
- Relacionar el cuadrado con el rectángulo y el rombo.
- Elaborar un diagrama de Venn que muestre las relaciones de inclusión entre las tres figuras. El resultado sería el siguiente:



ORIENTACION LIBRE:

- Identificar las características de los cuadriláteros estudiados en objetos existentes en el medio del niño.

INTEGRACION:

Resumen por parte del profesor: Qué es un cuadrado.Cuál es su

relación con el rectángulo y el rombo.

Unidad 6

Tema: Área del rectángulo

Objetivos:

- Construir y aplicar el concepto de área en superficies rectangulares.

Actividades:

INFORMACION:

- Identificar áreas rectangulares cuya superficie interese medir.
- Comparar unos salones con otros salones o diversos cuartos analizando cuál es más grande, en cuál caben más bancas o personas.
- Determinar en términos aproximados cuántas bancas caben en un salón.
- Dará al estudiante el plano de una ciudad para que compare unas cuadras con otras. Utilizar medidas cuadradas que simbolicen casas para determinar cuántas casas caben en cada cuadra.

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Determinar en centímetros cuadrados el área de algunas superficies rectangulares.
 - Utilizando un metro cuadrado determinar cuántos metros cuadrados cabenen el salón. Realizar lo mismo aplicando centímetros cuadrados a superficies más pequeñas.

EXPLICITACION:

- Discutir sobre la relación entre el área y la cantidad de columnas e hileras de centímetros cuadrados que tiene la figura.
- Elaborar la fórmula para obtener el área de superficies rectangulares.

ORIENTACION LIBRE:

- Aplicar la fórmula para obtener el área de un rectángulo.
- Discutir sobre las razones por las que se necesitaría obtener el área de una superficie y en particular de un rectángulo.
- Proponer un problema real que exista en la clase y resolverlo a nivel grupal.
- Resolver individualmente diversos problemas significativos para los alumnos.

INTEGRACION:

Resumen por parte del profesor: Cuál es la superficie de un rectángulo. Importancia de la obtención de su área y procedimiento para obtenerla.

Unidad 7

Tema: perímetro y área

Objetivos:

- Comprender la diferencia entre "perímetro" y "área".

Actividades:

INFORMACION:

- Identificar en diversas figuras su perímetro y su área.
- Determinar cuándo se necesita obtener el área y cuando el perímetro.

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Elaborar un instrumento en el que observe la correlación entre "perímetro" y "área".
 - Utilizando un cordón, el niño forma un rectángulo. Para ello sujeta el cordón entre el índice y el pulgar de cada mano, teniendo como base de rectángulo la distancia entre las manos y por altura la distancia entre los dedos de la misma mano.
 - Juega con esta figura juntando y separando dedos y manos: si junta los dedos y separa las manos, la altura disminuye y la base aumenta, con lo cual el área disminuye mientras el perímetro se mantiene constante. Con base en la manipulación del cordón se observará que, por un lado, el perímetro siempre es el mismo, y por el otro, el área va cambiando, obteniéndose el área máxima cuando el rectángulo es un cuadrado, y área nula cuando la altura es igual a cero.

- Dibujar algunas de las figuras obtenidas con el cordón y obtener para cada una su área y su perímetro.

ORIENTACION LIBRE:

- Identificar superficies de igual área pero diferente perímetro determinando en cada caso cuál es el perímetro.
- Identificar superficies rectangulares de igual perímetro pero diferente área, determinando en cada caso cuál es el área.

INTEGRACION:

Resumen por parte del profesor: Diferencia entre perímetro y área. Condiciones bajo las cuales el perímetro de una figura aumenta o disminuye, manteniendo el área constante. Condiciones bajo las cuales el área de una figura aumenta o disminuye manteniendo el perímetro constante.

Unidad 8

Tema: Área de triángulos rectángulos

Objetivos:

- Construir y aplicar la fórmula para obtener el área de los triángulos rectángulos a partir de los conocimientos sobre el área del rectángulo.

Actividades:

INFORMACION:

- Manipular rectángulos y triángulos rectángulos de iguales

dimensiones comparando sus áreas respectivas.

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Analizar las relaciones entre los rectángulos y los triángulos rectángulos.
- Formar rectángulos a partir de dos triángulos rectángulos de iguales dimensiones.
- Comprobar la congruencia de ambos triángulos superponiéndolos.

EXPLICITACION:

- Con base en esta experiencia, discutir sobre la relación entre el área del triángulo y la del rectángulo.

ORIENTACION DIRIGIDA:

- Obtener el área de los triángulos conociendo la de los rectángulos.
- Retomando los triángulos utilizados para formar cuadrados y rectángulos en la unidad 5, y dada el área de estos dos últimos, determinar el área de los triángulos.
- Deducir una fórmula con base en el análisis anterior.

ORIENTACION LIBRE

- Aplicar la fórmula para obtener el área del triángulo rectángulo.

EXPLICITACION

- Discutir sobre casos reales en relación al tema que interesa a los alumnos.

ORIENTACION LIBRE

- Solucionar esos problemas grupal e individualmente.

INTEGRACION:

Resumen del profesor: Relación entre el área del rectángulo y el área del triángulo rectángulo. Implicaciones en la obtención de cada una de estas áreas rectangulares.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

1. No obstante que Piaget y Van Hiele estudian problemáticas diferentes, convergen en su interés por comprender los mecanismos en la adquisición de conocimientos.
2. Para ambos autores, el contenido debe tener una secuencia que parta de lo concreto hasta llegar a un sistema abstracto y organizado del conocimiento.
3. Tanto Piaget como Van Hiele reconocen que la actividad fundamenta el conocimiento.
4. A través de una enseñanza tradicional basada en la transmisión verbal y en la exposición escrita de los conocimientos, el educando sólo está memorizando y mecanizando, pero no es capaz de aplicar los nuevos contenidos de manera creativa en la solución de problemas.
5. En las operaciones concretas, entender las causas de un fenómeno requiere de una experimentación a nivel concreto. Por lo tanto, el niño no comprenderá por qué una figura se puede convertir en otra (y por lo tanto existen relaciones de clase) si no experimenta con el material mismo.
6. El verdadero aprendizaje en el niño parte de la realidad concreta para volverse a aplicar a ella a través de la

solución de problemas. Este aprendizaje conlleva la adaptación del niño a su medio y, colateralmente, su desarrollo cognitivo y afectivo-social.

7. El conocimiento no se adquiere con base en explicaciones verbales, más bien se "construye" a partir de la actividad externa e interna del sujeto en una búsqueda por lograr un equilibrio con su medio.
8. En la etapa de operaciones concretas, la incapacidad de aislar las variables de una situación implica que el niño no puede combinar lógicamente y a un nivel abstracto las propiedades de las figuras para clasificarlas (aspectos del nivel 2 de pensamiento). Sin embargo, dado que ya entiende las nociones de clase y subclase en relación a objetos concretos, es capaz de clasificar las figuras con las que interactúa de acuerdo a sus propiedades definitorias.
9. Al comprender mejor las clases y las relaciones (de acuerdo a la teoría psicogenética), el niño de nueve años está desarrollando su capacidad de analizar las figuras en términos de sus componentes y relaciones entre componentes, así como de descubrir las propiedades de las figuras (de acuerdo al nivel 1 de pensamiento de Van Hiele).
10. Aún cuando Van Hiele establece que el progreso en los niveles de pensamiento depende esencialmente de las experiencias de

aprendizaje, el grado de desarrollo cognitivo limita el nivel de pensamiento al que se puede llegar en un momento determinado. Es decir, un niño en el período preoperacional, por más experiencias didácticamente organizadas que tenga, no podrá alcanzar el nivel de pensamiento 4 (deducción), pues ello requiere la capacidad de aislar variables y operar con ellas a un nivel abstracto.

11. No importa cuantas veces un profesor de matemáticas explique un concepto, pues si el niño no posee el nivel de pensamiento adecuado, no asimilará los contenidos.
12. En el período de operaciones concretas, el niño va desarrollando la capacidad de considerar los puntos de vista de otros (en virtud de una descentración del pensamiento) lo cual le permite discutir con ellos sobre las propiedades de las figuras y, en consecuencia, lograr una mejor acomodación de sus estructuras. Por ello, es conveniente que se promueva el diálogo y la discusión organizada en el salón de clases.
13. Como el niño de esta etapa ya es capaz de cooperar con sus compañeros con base en reglas compartidas, la actividad grupal se ve favorecida. Esto repercute en una mayor capacidad para intercambiar ideas y en consecuencia cuestionar los diversos puntos de vista, lo cual implica mayor acomodación y mejor adaptación.
14. El niño necesita dialogar con sus compañeros para cuestionar

sus propios puntos de vista y así poder reestructurar su conocimiento. Por lo tanto, no se debe impedir que el niño dialogue y argumente en el salón de clases.

15. Sin el lenguaje, la comprensión de las figuras en términos de sus propiedades clasificatorias sería incipiente. No se lograrían comprender las clasificaciones más complejas entre las figuras geométricas.

16. Los objetivos educativos en geometría deben ir más allá de los aspectos cognitivos del aprendizaje. Han de abarcar también las dimensiones valorativas y sociales. En consecuencia, el proceso de enseñanza-aprendizaje debe promover, además del dominio de contenidos, actitudes y valores. Todo esto, a través de una interacción física y social.

17. Aun cuando el programa de la SEP para 3º de primaria no hable explícitamente de un desarrollo intelectual, moral y social, sí hace referencia a un desenvolvimiento armónico y a la importancia de la socialización, así como de la adquisición de conocimientos y valores. Sin embargo, no explica cómo se logrará la integración de lo social, los conocimientos y los valores para promover el desarrollo armónico.

18. El auténtico equilibrio y su consecuente adaptación al medio se reflejan en una capacidad innovadora, creativa y crítica

del educando. Estos son los resultados que se obtienen de una metodología que efectivamente promueve los aprendizajes significativos.

19. Dado que el niño de 9 años necesita de un contacto con la realidad para conocer las propiedades de las figuras, sería inadecuada una metodología axiomática que parta de la definición de los conceptos para luego aplicarlos a casos concretos (procedimiento deductivo).
20. El niño en el periodo de operaciones concretas requiere de una metodología basada en la acción con casos particulares para después generalizar el conocimiento resultante (procedimiento inductivo).
21. A los nueve años, el niño va dominando las nociones topológicas y puede incursionar en la geometría Euclidiana (que es la que se presenta en los libros de texto). No obstante, esto no debe representar un salto súbito en el tipo de contenidos.
22. La adquisición de nuevos conocimientos en geometría no sólo depende del periodo de desarrollo cognitivo en el que se encuentra el alumno, sino también de las experiencias de aprendizaje previas (las cuales determinan el nivel de pensamiento en geometría).
23. Para que un contenido geométrico pueda ser comprendido, asimilado y utilizable en la solución de nuevos problemas,

debe ser presentado con base en una secuencia que:

- a) parta de las experiencias previas (fase: información);
- b) se fundamente en una exploración directa del campo a investigar a través del material suministrado (fase: orientación dirigida). En el caso de los niños en el período de operaciones concretas, que deben pasar del nivel de pensamiento 1 al 2, los materiales deben ser concretos, y de preferencia móviles o transformables por continuidad;
- c) en todo momento promueva el diálogo y el debate entre los estudiantes (fase: explicitación). Esto permite al alumno reestructurar su pensamiento y consolidar su vocabulario. La labor del profesor es aquí de tipo orientadora.
- d) promueva la aplicación de los conocimientos a situaciones nuevas (fase: orientación libre). La solución de problemas reales exige de creatividad y de pensamiento autónomo;
- e) incorpore los nuevos aprendizajes a las experiencias previas (fase: integración); lo cual exige una reestructuración del pensamiento, es decir, acomodación y asimilación.

24. La matemática debe ser un instrumento que contribuya a la formación de estructuras lógico-matemáticas que ordenen el pensamiento, así como un conocimiento que permita a la persona transformar su mundo.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA BASICA

1. ARAUJO, João B., y CHADWICK, Clifton B., Tecnología educacional., Paidós Educador, España, 1988., p. 65-80, 104-105, 115, 155-156, 175-177, 192-193, 203-204
2. CASTELNUOVO, Emma., Didáctica de la matemática moderna., México, D.F. Ed. Trillas., 1790, 210 p.
3. COPELAND, Richard W., How children learn mathematics. Teaching implications of Piaget's research., The MacMillan Company, U.S.A., 1971., 310 pp.
4. DEVRIES, Rheta., La integración educacional de la teoría de Piaget: consideraciones afectivas, sociomorales y cognitivas en la práctica., Proyecto Especial de Educación Especial., Universidad de Houston.
5. FUYS, David, GEDDES, Dorothy, TISCHLER, Rosamond., An investigation of the Van Hiele Model of thinking in geometry among adolescents., A JRME Monograph Series of the National Council of Teachers of Mathematics, nº3 de la serie J.R.M.R. Ed. Panel. City University of New York: Brookly, N.York., 1988.
6. GAGO HUGUET, Antonio., Modelos de sistematización del proceso de enseñanza-aprendizaje., Trillas, México, 1989., 80 pp.
7. GINSBURG, Herbert y OPPER, Sylvia., Piaget's theory of intellectual development. An introduction., Orentice-Hall. New Jersey, 1969., 237 pp.
8. GUTIERREZ, A. et Jaime, A., 1989, El modelo de Razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros Departamento de Didáctica de Matemática, Universidad de Valencia. Educación Matemática, Grupo editorial Iberoamericano, México, agosto 1991, vol. 3 No. 2., pp. 49-65.

9. GUTIERREZ, A. et Jaime, A., 1989. Selecciones bibliográficas temáticas. Bibliografía sobre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. Departamento de Didáctica de Matemática. Universidad de Valencia. Enseñanza de las ciencias, España, 1989. 7(1).. pp. 89-95.
10. HILL, WINFRED F., Teorías contemporáneas del aprendizaje.. Paidós, España, 1989.. p. 17-194
11. ORTON, A., Didáctica de las matemáticas.. Madrid, Morata, 1990., 222 p.
12. PIAGET, Jean., Introducción a la epistemología genética. 1.- El pensamiento matemático.. Paidós, Argentina, 1975, 315 p.
13. PIAGET, J., La enseñanza de las matemáticas modernas.. Madrid, España, Alianza Editorial. 1878, 401 p.
14. PIAGET, J., Psicología y epistemología.. Argentina. Emecé., 5ª ed., 1986., 141 p.
15. PIAGET, J., Psicología y pedagogía.. México, Ariel, 1991., 7ª ed., 207 p.
16. RICHMOND, P.G., Introducción a Piaget.. España, Fundamentos, 1970., 11ª ed., 158 p.
17. SEP., Libro para el maestro 3º.. México, D.F., 1982, 250 p.
18. TEPPON, Anne., Van Hiele levels of geometric thought revisited.. U.S.A., Mathematics Teacher, March 1991.. pp. 210-221.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

1. AEBLI, Hans.. Una didáctica fundamentada en la psicología de Jean Piaget.. Kapelusz, Argentina., 1958., 208 p.
2. BIEHLER, Robert F., Psicología aplicada a la enseñanza.. México, Limusa, 1990., p. 69-104
3. BIGGE, M.L. Y HUNT, M.P., Bases psicológicas de la educación.. Trillas, México, 1985., p. 17-116
4. DIAZ BARRIGA, Angel., Didáctica y Curriculum.. Nuevomar, México, 1989., 150 p.
5. EVES, Howard. Estudio de las Geometrias.. Uteha, España, 1985., p. 433-436
6. FLORES, Alfinio, ¿Qué es la educación matemática?.. Educación Matemática, Grupo editorial Iberoamericano, México, Abril 1991., vol. 3-No1., p. 67-76
7. GARCIA HOZ, Victor., Principios de pedagogía Sistemática.. Rialp, Madrid, 1978., 670 p.
8. "GEOMETRY".. Encyclopedic Dictionary of Mathematics.. Mathematical Society of Japan. The MIT Press, England, 1968, t. I., p. 591-592
9. HOWARD F. Fehr., Enseñanza de la matemática.. Librería del Colegio, Argentina, 1970., 48 p.
10. INHELDER, Barbel et PIAGET, Jean., The early growth of logic in the child. Classification and seriation.. Routledge & Kegan Paul, London, 1970. p. 2-5
11. "MATHEMATICS".. Encyclopaedia of mathematics.. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1990., vol. 6., p. 148-151

12. MATTOS, Luiz A. de.. Compendio de didáctica General.. Kapalusz, Argentina., 2ª ed. 1974., 252 p.
13. NERICI, Imideo., Hacia una didáctica general dinámica.. Kapalusz, México, 1980., 641 p.
14. PIAGET, Jean.. A dónde va la educación.. México, Teide, 1972., 110 p.
15. POZO, Juan Ignacio. Teorías cognitivas del aprendizaje. Madrid, Morata, 1989., pp. 177-186
16. Proceedings. Fourteenth PME Conference. International Group for the Psychology of Mathematics Education. México 1990. Vol. II., p. 251-258, 297-303
17. Programa para la Modernización Educativa 1989-1994. Poder Ejecutivo Federal. Secretaría de Educación Pública.
18. Planes de estudio de la educación Básica. Modernización Educativa 1989-1994. Poder Ejecutivo Federal. Secretaría de Educación Pública.
19. RUSSELL, Bertrand., Los principios de la matemática.. Espasa-Calpe, Madrid, 1983
20. TABA, Hilda., Elaboración del currículo.. Troquel, Argentina, 1987.
21. VEGA, Manuel de., Introducción a la psicología cognitiva.. México, Alianza Psicología, 1986., 1986., p. 24, 34, 39, 40, 389, 391, 416, 440, 470, 480, 484.
22. VERNEAUX, Roger., Filosofía del hombre.. Ed. Herder, Barcelona, 1967., 234 pp.