

5  
2ej



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS  
PROFESIONAL Y DEL POSGRADO DEL CCH

INSTITUTO DE GEOFISICA

## PROPAGACION DE ONDAS SISMICAS EN CONFIGURACIONES GEOLOGICAS COMPLEJAS

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### T E S I S

Que para obtener el Grado de:

Maestro en Sismología y  
Física del Interior de la Tierra

Presenta :

José Luis Rodríguez Zúñiga



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN DE LA TESIS: PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS EN CONFIGURACIONES  
GEOLÓGICAS COMPLEJAS.

Los principales capítulos de la tesis son:

	RESUMEN
	ABSTRACT
I	INTRODUCCIÓN
II	ELASTICIDAD DINÁMICA
III	SOLUCIONES ANALÍTICAS
IV	SOLUCIONES NUMÉRICAS
V	MODELOS SIMPLIFICADOS
VI	CONCLUSIONES
VII	RECONOCIMIENTOS
VIII	REFERENCIAS

En este trabajo se presentan métodos analíticos, numéricos y simplificados para estudiar la propagación de ondas elásticas en inclusiones arbitrarias bidimensionales, valles aluviales e irregularidades topográficas ante la incidencia de ondas elásticas o ante un movimiento prescrito de la base de algunos modelos simplificados. Los métodos se estudian con el detalle suficiente para presentar resultados originales.

Dentro de los métodos analíticos se consideran las soluciones exactas para la difracción por cilindros de sección circular mediante el desarrollo en serie de los potenciales de desplazamiento en funciones de onda ortogonales. Asimismo se resuelve de manera exacta la ecuación de onda bidimensional para un sistema formado por un estrato blando de base rígida limitado lateralmente por una pared vertical o inclinada también rígida. Los resultados obtenidos con estos modelos conducen a caracterizar las ondas superficiales generadas localmente en estas geometrías.

En las soluciones numéricas presentadas se incluye la técnica de superposición de haces gaussianos. Los resultados obtenidos con esta técnica para el estudio de la generación de modos superiores de ondas superficiales en depósitos aluviales, y las hipótesis necesarias para considerar la incidencia de un frente de onda vectorial, conducen a establecer los alcances y las limitaciones de esta técnica. Por otro lado, se presentan las bases teóricas de los métodos pseudoespectral y de ecuaciones integrales de frontera (BIEM).

Los modelos simplificados estudiados en este trabajo están basados

en los resultados obtenidos con las soluciones analíticas para el movimiento prescrito de la base de los sistemas estrato pared y estrato cuña, los cuales conducen a proponer una solución simplificada para depósitos aluviales bidimensionales mediante fórmulas sencillas que consideren, por un lado, la respuesta unidimensional, y por el otro las contribuciones de los extremos del depósito en términos de modos de ondas superficiales. La extensión de estos modelos simplificados a depósitos tridimensionales someros de geometría arbitraria es directa. Es posible usar modelos bidimensionales, interpretando las velocidades de ondas  $P$  y  $S$  como velocidades de ondas superficiales de Love y de Rayleigh y un adecuado tratamiento de la partición de la energía para cada modo superior. Los resultados que aquí se presentan no corresponden a un análisis exhaustivo, son, en cambio, los primeros resultados de esta formulación. Será en estudios posteriores que se explorarán las extensiones y se determinarán alcances y limitaciones.

Lejos de agotar el tema tratado en este trabajo se ha pretendido una revisión y comparación de métodos comunmente usados para el tratamiento del fenómeno de difracción de ondas elásticas. Se han estudiado e implementado soluciones clásicas y métodos de desarrollo reciente.

Vo. Bo.



Dr. FRANCISCO J. SÁNCHEZ-SESMA.

## RESUMEN

Se presentan métodos analíticos, numéricos y simplificados para estudiar la propagación de ondas elásticas en inclusiones arbitrarias bidimensionales, valles aluviales e irregularidades topográficas ante la incidencia de ondas elásticas o ante un movimiento prescrito de la base de algunos modelos simplificados.

Dentro de los métodos analíticos se consideran las soluciones exactas para la difracción por cilindros de sección circular mediante el desarrollo en serie de los potenciales de desplazamiento en funciones de onda ortogonales. Asimismo se resuelve de manera exacta la ecuación de onda bidimensional para un sistema formado por un estrato blando de base rígida limitado lateralmente por una pared vertical o inclinada también rígida. Los resultados obtenidos con estos modelos conducen a caracterizar las ondas superficiales generadas localmente en estas geometrías, y son tomadas como punto de partida para la construcción de soluciones híbridas con modelos simplificados en 2 y 3 dimensiones.

En las soluciones numéricas presentadas se incluye la técnica de superposición de haces gaussianos. Esta técnica emplea un sistema de rayos para representar la cinemática de la energía en la inclusión o valle considerado. Sobre este sistema de rayos se resuelve localmente la ecuación de onda en coordenadas rayo-centradas. Con la superposición de todas las soluciones particulares y considerando adecuadamente la fase, se construye la solución total del sistema analizado. Los resultados obtenidos para el estudio de la generación de modos superiores de ondas superficiales en depósitos aluviales, y las hipótesis necesarias para considerar la incidencia de un frente de onda vectorial, conducen a establecer los alcances y las limitaciones de esta técnica. Por otro lado, se presentan las bases teóricas de los métodos pseudoespectral y de ecuaciones integrales de frontera (BIEM).

Los modelos simplificados estudiados en este trabajo están inspirados en los resultados obtenidos con las soluciones analíticas para el movimiento prescrito de la base de los sistemas estrato pared y estrato cuña. Es posible demostrar que las ondas superficiales generadas local-

mente son relativamente insensibles a la forma de la interfaz lateral en este tipo de depósitos someros. Para valores de  $Q$  realistas la contribución del modo fundamental es la más significativa. Además, la marca espectral de estas ondas superficiales es explícita.

Lo anterior conduce a proponer una solución simplificada para depósitos aluviales bidimensionales mediante fórmulas sencillas que consideren, por un lado, la respuesta unidimensional, y por el otro las contribuciones de los extremos del depósito en términos de modos de ondas superficiales. La extensión de estos modelos simplificados a depósitos tridimensionales someros de geometría arbitraria es directa. Es posible usar modelos bidimensionales, interpretando las velocidades de ondas  $P$  y  $S$  como velocidades de ondas superficiales de Love y de Rayleigh y un haciendo un adecuado tratamiento de la partición de la energía para cada modo superior.

Lejos de agotar el tema tratado en este trabajo: "propagación de ondas sísmicas en configuraciones geológicas complejas", se ha pretendido una revisión y comparación de métodos comúnmente usados para el tratamiento del fenómeno de difracción de ondas elásticas. Se han estudiado e implementado soluciones clásicas y métodos de desarrollo reciente. Los numerosos resultados obtenidos con los distintos métodos estudiados, y las limitadas descripciones detalladas de rasgos geológicos reales, nos llevan a proponer soluciones híbridas simplificadas que describen las principales características de la respuesta sísmica de valles aluviales tridimensionales irregulares.

## ABSTRACT

Various analytical, numerical and simplified methods are presented. They are useful for the study of elastic waves in two-dimensional arbitrarily shaped inclusions, alluvial valleys and irregular topographies under incidence of elastic waves, and for prescribed motion of the base of simplified models.

Among analytical methods the exact solutions for the diffraction by cylinders of circular cross-section are considered by means of expansion of the displacement potentials in series of cylindrical orthogonal wave functions. On the other hand, the two-dimensional reduced wave equation is solved in an exact way for the system formed by a soft layer on a rigid base with lateral confinement by a vertical or inclined rigid wall. The results obtained with these methods help to characterize the surface waves locally generated at these geometries. They are taken into account for the construction of hybrid solutions with simplified models in both two- and three-dimensional cases.

The Gaussian beam summation method is presented as an example of numerical solutions. It makes use of a system of rays to represent the kinematics of energy inside the inclusion or valley studied. The system of rays is taken as a framework to solve locally the wave equation in ray-centered coordinates. The solution for the model considered is constructed by the superposition of the particular solutions. Results obtained for the generation of higher modes of surface waves in alluvial deposits and the needed assumptions to consider the incidence of vectorial wave fronts, lead to establish the advantages and limitations of this method.

On the other hand, the theoretical basis for the pseudospectral and boundary integral equation method (BIEM) are presented as well.

The simplified methods studied in this work are inspired in the results obtained with the analytical solutions for the prescribed motion of the base in the layer-wall and layer-edge systems. We showed that, for certain distances, the shape of the lateral irregularity in this

kind of shallow deposits has little effect on the generated surface waves. Besides, the spectral signature of these surface waves is explicit.

These results lead us to propose a simplified solution for alluvial two-dimensional deposits by means of simple formulas that account for 1D response and lateral effects in terms of surface waves modes. Extension of these simplified models to three-dimensional shallow deposits of arbitrary shape becomes direct by using equivalent 2D models and interpreting the *P* and *S* waves velocities as *Love* and *Rayleigh* waves velocities, and by an adequate partition of the energy for each higher mode.

Far away to exhaust the subject of this work: "propagation of seismic waves in complex geological configurations", our aim has been to review and compare some commonly used methods for diffraction of elastic waves. Some classical solutions and methods of recent development have been studied and implemented. Results obtained with these methods, and the limitations in the detailed description of real geological features lead us to propose simplified solutions which describe the main characteristics of the seismic response of shallow three-dimensional irregularly shaped alluvial valleys.



## INDICE

RESUMEN		
ABSTRACT		
I	INTRODUCCIÓN	2
II	ELASTICIDAD DINÁMICA	8
	- DIFRACCIÓN	8
	- REFRACTACIÓN	12
	- ATENUACIÓN	13
III	SOLUCIONES ANALÍTICAS	17
	- DIFRACCIÓN POR CILINDROS	17
	- RESPUESTA ESTRATO-PARED	26
	- RESPUESTA ESTRATO-CUÑA	28
IV	SOLUCIONES NUMÉRICAS	32
	- TÉCNICA DE SUPERPOSICIÓN DE HACES GAUSSIANOS	32
	- MÉTODO PSEUDOSPECTRAL	39
	- MÉTODO DE ECUACIONES INTEGRALES DE FRONTERA (BIEM)	41
V	MODELOS SIMPLIFICADOS	47
	- APLICACIONES 2-D	49
	- APLICACIONES 3-D	51
VI	CONCLUSIONES	54
VII	RECONOCIMIENTOS	56
VIII	REFERENCIAS	57

## 1. INTRODUCCIÓN

Los movimientos del terreno durante temblores son producidos generalmente por la ruptura de una falla una vez que los esfuerzos inducidos por la tectónica superan la resistencia de las rocas. El fenómeno desencadenado por la ruptura es de una enorme complejidad. Los movimientos del terreno dependerán de las características del mecanismo focal, de las trayectorias de las ondas y de las condiciones locales. El mecanismo focal controla la distribución en espacio y tiempo de la energía liberada en la zona sísmogénica. Esta energía es irradiada en forma de ondas, las que se ven afectadas por las propiedades mecánicas del medio por el que viajan, provocando variaciones en las amplitudes del movimiento. De la misma manera, cuando en su trayectoria cerca de la superficie, una perturbación sísmica se encuentra con discontinuidades o irregularidades de dimensiones comparables a su longitud de onda predominante pueden producirse amplificaciones considerables.

Cuando se tienen formaciones estratificadas extensas los efectos de sitio pueden estimarse haciendo uso de modelos unidimensionales. Sin embargo, la presencia de irregularidad lateral produce ondas superficiales que pueden modificar drásticamente la respuesta.

Los métodos que se usan en la práctica para tratar el problema en ocasiones son tan simplistas que suscitan dudas sobre su confiabilidad. Desafortunadamente, los métodos más fidedignos son tan complicados que no pueden usarse. Esta situación se debe a las enormes dificultades que presenta el tratamiento de situaciones más realistas. Si bien esto ha estimulado poderosamente el uso de métodos empíricos basados en el análisis estadístico de las observaciones, creemos que es posible construir modelos simplificados basados en consideraciones físicas que sean aplicables en la práctica, aun si los datos instrumentales son escasos.

La evaluación de los efectos de las condiciones locales del terreno en la amplificación dinámica es relevante en la definición del riesgo sísmico y para explicar las observaciones de campo durante temblores. Para una revisión del tema pueden consultarse los textos de Aki (1988) y de Sánchez-Sesma (1987).

Durante los terremotos de septiembre de 1985, en la Ciudad de México, ubicada sobre un valle lacustre a una distancia aproximada de 400 km de la zona epicentral, se observaron amplificaciones espectrales de 10 a 50 veces con respecto a lo observado en sitios de terreno firme como Ciudad Universitaria (Singh et al., 1988), mientras que en lugares ubicados a distancias menores de 100 km el movimiento pasó prácticamente inadvertido. Es indudable que las condiciones locales influyeron en la ocurrencia y distribución de daños. Además se han encontrado significativos efectos de fuente y trayecto no completamente esclarecidos (ver p.ej. Ordaz y Singh, 1992). Por otra parte, Singh y Ordaz (1992), a partir del análisis de registros de un sismógrafo de banda ancha (VBB) colocado en zona firme de la ciudad de México, sugirieron que las largas duraciones observadas en los registros no son el producto de efectos locales y siempre han estado presentes en la excitación. Al parecer las aceleraciones no poseen el nivel suficiente para mantener funcionando los acelerómetros digitales estándar en la zona firme. Por el contrario, los sedimentos suaves son un amplificador natural que permiten el registro de la larga coda. Proponen que estas largas excitaciones son debidas a multitrayectos de las ondas sísmicas entre la costa y el Valle de México y/o dentro de la cuenca misma.

No es de extrañar que el estudio de la propagación de ondas en medios estratificados haya sido objeto de numerosas investigaciones. En su obra pionera Ewing, et al. (1957) presentan una amplia revisión de la literatura sobre el tema hasta entonces. Para tratamientos más recientes puede consultarse el texto de Aki y Richards (1980). De particular interés es el método de Haskell (1953) quien formuló la solución sistemática para la propagación de ondas en medios con estratos planos horizontales. Este modelo ha sido ampliamente usado en diversos estudios sobre la respuesta sísmica del valle de México.

Otros estudios se han dirigido hacia la propagación de ondas en presencia de irregularidades. Cuando la geometría de la inhomogeneidad lo permite, resulta posible obtener soluciones analíticas usando el método de separación de variables para problemas simples bidimensionales de difracción de ondas elásticas  $SH$  sin incluir otras ondas de cuerpo (Mow y Pao, 1971). De esta manera se han obtenido soluciones para la difracción de ondas elásticas por cañones y valles aluviales de sección

semicircular (Trifunac, 1971) y semielíptica (Wong y Trifunac, 1974). Sin embargo, en configuraciones irregulares o ante incidencia vectorial,  $P$  y  $SV$ , las funciones de onda ortogonales de la física clásica, no son separables en la superficie del semiespacio, debido a que no se satisfacen las condiciones de frontera. Haciendo hipótesis simplificadoras ha sido posible desarrollar varios métodos, entre ellos métodos numéricos de frontera, de dominio y algunas soluciones geométricas.

Una de las aproximaciones numéricas aplicadas al problema de la difracción de ondas elásticas es el método del número de onda discreto, debido a Aki y Larner (1970). Este método se fundamenta en la hipótesis de Rayleigh y se limita al estudio de irregularidades de pendiente suave y a frecuencias no muy altas; consiste en la representación de los campos de desplazamientos mediante una superposición de ondas planas de amplitudes complejas desconocidas, las cuales son integradas sobre el número de onda horizontal; bajo algunas suposiciones la integral es reemplazada por una suma finita. Con la disponibilidad de computadoras de gran capacidad y alta velocidad, es posible llevar a cabo de manera eficiente una gran cantidad de cálculos que han permitido formular soluciones cada vez más realistas de tal manera que se ha extendido el planteamiento original de ondas  $SH$  al estudio de los efectos de topografías bidimensionales irregulares (Bouchon, 1973), valles aluviales (Bard y Bouchon, 1980) y promontorios (Bard, 1982) ante incidencia de ondas elásticas  $SH$ ,  $P$  y  $SV$ .

Para geometrías irregulares los métodos de diferencias finitas y elementos finitos se han usado para estudiar la propagación de ondas elásticas. Estos métodos requieren de gran poder de cómputo. Sin embargo, son bastante generales. Kelly y Marfurt (1990) presentan una compilación reciente sobre el modelado numérico de la propagación de ondas sísmicas mediante los llamados métodos de dominio. De más reciente desarrollo han sido los métodos de frontera (ver p.ej. Sánchez-Sesma y Esquivel, 1979; Dravinski, 1982; Campillo y Bouchon, 1985; Bravo et al., 1988 y Kawase y Aki, 1989). En estas técnicas se tiene la ventaja de una significativa reducción de la dimensión del problema. Ello se debe a que la discretización sólo debe hacerse en las fronteras. Además, por su versatilidad pueden acoplarse de manera simple con métodos de dominio. Los métodos de frontera como el de ecuaciones integrales de frontera

(BIE) y su discretización en el método de elementos de frontera (BEM) han generado soluciones en diversos problemas de elasticidad dinámica. Una discusión más amplia puede encontrarse en Manolis y Beskos (1988). Recientemente se ha desarrollado un método de ecuaciones integrales de frontera aplicado a la difracción de ondas sísmicas en topografías irregulares en un semiespacio elástico (Sánchez-Sesma y Campillo, 1991) con excelentes resultados.

Si bien es cierto que la flexibilidad y versatilidad de estos métodos se incrementan con el desarrollo de los sistemas de cómputo, también es deseable contar con métodos aproximados que permitan cálculos para altas frecuencias. Tal es el caso de los métodos geométricos basados en la teoría de rayos. Estos tienen la ventaja de presentar una clara visualización de la física del problema y de ser confiables en alta frecuencia.

El uso de métodos asintóticos basados en la teoría de rayos ha recibido recientemente mucha atención. El cálculo de los campos de ondas sísmicas de alta frecuencia en estratos con variaciones laterales en sus propiedades ha sido objeto de varios estudios (Červený, 1985-a), los cuales proporcionan soluciones con un reducido esfuerzo computacional. Con el uso de estos métodos se obtienen resultados confiables en alta frecuencia aún cuando se desprecia la difracción. No obstante existen algunas restricciones en el empleo del método de rayos (Červený, 1985-b), ya que puede solamente aplicarse bajo la suposición de fronteras suaves, en las cuales las dimensiones de las inhomogeneidades son considerablemente más grandes que la longitud de onda predominante de la onda incidente. Además el método es inexacto en la vecindad de algunas superficies, líneas o puntos, en los cuales el campo de rayos no es regular (regiones singulares). La restricción de suavidad no puede ser eliminada. Otra limitación de esta teoría geométrica es que las amplitudes de las ondas sísmicas de alta frecuencia son muy sensibles a las aproximaciones del medio y a algunos detalles del modelo (como interfaces artificiales). De esta manera la estructura de algunas regiones puede ser bastante complicada, por lo que la aplicación del método mencionado resulta complicado o inclusive algunas veces imposible.

El método de los haces gaussianos es una combinación del método

asintótico de rayos con una aproximación parabólica de la ecuación de onda (Nowack y Aki, 1984). Este método ha sido recientemente descrito en la literatura por Babich y Popov (1981), Popov (1982) y Červený *et al.* (1983). En este método se necesita contar con un sistema de rayos trazados a partir de la fuente a través de los cuales fluye la energía. Este sistema sirve de soporte para la construcción del campo de ondas debido a que la ecuación de onda es resuelta en coordenadas de rayo en las cuales la aproximación parabólica se satisface localmente en la vecindad de cada rayo. Esa solución local puede expresarse precisamente en términos de haces gaussianos y la solución final es el resultado de la superposición de soluciones individuales a lo largo de cada uno de los rayos. Varias aplicaciones y extensiones de este método han sido presentadas (*e.g.* Červený *et al.*, 1983, Madariaga y Papadimitriou, 1985, George *et al.*, 1987, Yomogida, 1985, Benites y Aki, 1989, y Rodríguez-Zúñiga *et al.* 1989).

Hay muchas ventajas en el uso del método de los haces gaussianos con respecto al método asintótico de rayos. Los haces gaussianos son siempre finitos en caústicas, por lo tanto no se necesita un conocimiento previo de la localización de estas singularidades; además es comparable en costo o inclusive más rápido que el método tradicional de rayos (Nowack y Aki, 1984). Sin embargo su aplicación está limitada a incidencia de ondas sísmicas de alta frecuencia y a configuraciones con pendientes muy suaves.

En el capítulo III de este trabajo se revisan y aplican las soluciones analíticas clásicas para modelar los campos difractado y refractado producidos por inclusiones cilíndricas blandas de sección circular ante la incidencia de ondas sísmicas del tipo *SH*, *P* y *SV*, que se propagan como un frente plano o cilíndrico; obteniéndose resultados en los dominios de la frecuencia y del tiempo. Se construyen algunas soluciones analíticas para modelos de irregularidades simples, y se estudia la generación local de ondas superficiales y su contribución al campo de desplazamientos en algunos puntos sobre la superficie libre de la irregularidad.

Por otra parte (capítulo IV), se emplea el método de superposición de haces gaussianos para modelar la refracción de ondas *SH* en una inclu-

sión suave de sección circular o irregular dentro de un espacio elástico, y en la superficie libre de valles aluviales, cuyo análisis en el dominio Frecuencia-Número de Onda ( $f-k$ ) permite visualizar la bondad de este método para representar el modo fundamental e inclusive, para algunos modelos, los 2 o 3 modos superiores siguientes. Se presentan también algunas de las principales restricciones en el uso del método y en su extensión a casos de incidencia del tipo  $P$  y  $SV$ . Los resultados sintéticos se comparan con aquellos que se obtienen con la solución exacta para una geometría cilíndrica circular. Lo anterior permite afirmar que la suma de haces gaussianos proporciona un método rápido y suficientemente aproximado para el modelado de los campos de onda de alta frecuencia en configuraciones geológicas complejas.

En el mismo capítulo IV de Soluciones Numéricas, se presentan los fundamentos del método pseudo-espectral y la comparación entre algunos resultados con este método y las soluciones analíticas consideradas. Se presenta también, una formulación *indirecta* del método de ecuaciones integrales de frontera, para la solución de los campos de desplazamientos en el interior y exterior de inclusiones irregulares embebidas en un espacio elástico. Estos resultados y algunas conclusiones de los del capítulo III, son usados para construir soluciones *híbridas* en el capítulo V, mediante modelos simplificados. Estas soluciones se aplican a modelos en 2 y 3 dimensiones. Los resultados sintéticos se comparan con los obtenidos por varios autores utilizando soluciones más rigurosas.

## 2. ELASTICIDAD DINÁMICA

### DIFRACCIÓN

La Difracción de ondas elásticas tiene su origen en las primeras investigaciones sobre la verdadera naturaleza de la luz. Hoy la difracción se aplica al fenómeno de propagación de ondas en el cual los rayos que representan las ondas se desvían de una trayectoria rectilínea y esta desviación no puede ser interpretada como reflexión o refracción.

La siguiente revisión histórica del desarrollo del concepto de difracción y de la teoría de la elasticidad lineal tiene sus orígenes en las primeras explicaciones de la naturaleza de la luz, y esta basada en el texto de Mow y Pao (1971): A principios del siglo XIX, la luz se interpretaba como la propagación de una perturbación en un ether elástico, cuya dinámica era descrita por lo que hoy llamamos teoría de la elasticidad. Así la teoría de la propagación de ondas elásticas fue desarrollada mucho antes de la aplicación de la teoría de la elasticidad. Después del desarrollo de las teorías electromagnética y cuántica para la luz, nadie aceptaba explicarla con la teoría de los sólidos elásticos. Sin embargo a través de la historia, se descubre como la teoría de las ondas elásticas se desarrolla y traza los lineamientos que son ahora comunes para todas las ondas en la naturaleza, incluyendo las ondas acústicas, electromagnéticas y elásticas.

Francesco Maria Grimaldi describió un experimento en el cual dejaba pasar un haz de luz a través de dos aperturas angostas, una detrás de la otra y llegaba hasta una superficie oscura. Encontró que la banda de luz sobre la superficie era tres veces más ancha de lo que era cuando entró en la primera apertura y creyó que el haz de luz había sido expandido hacia afuera en las orillas de la apertura, esto era diferente de los fenómenos de reflexión y refracción observados y lo llamó DIFRACCIÓN. Más tarde Robert Hooke y Christian Huygens observaron el mismo fenómeno que en aquel entonces no pudieron explicar. En 1801 Thomas Young descubrió la ley de interferencias de ondas de luz lo que posteriormente serviría a Augustin Jean Fresnel para descubrir la causa real de la difracción. La interferencia se describe simplemente como dos ondas que al mezclarse se destruyen o refuerzan una a otra ya sea total ó parcialmente.



te. Fresnel explicaba que la difracción de la luz es la interferencia mutua de las ondas secundarias emitidas desde una apertura. Si se concibe que la onda incidente es "rota" al llegar a la apertura de una pantalla, cada elemento de la apertura es entonces considerado como el centro de un disturbio secundario, lo que coincide con el principio de Huygens. Poco después Fresnel experimentó que dos rayos de luz polarizados en planos con ángulos rectos no interferían uno con otro, esto hizo creer a Young que la luz era una onda transversa en un ether y que el movimiento de las partículas en la onda era en una cierta dirección constante formando un ángulo recto con la dirección de propagación de la onda. A este fenómeno lo llamó polarización.

Basado en el concepto de las ondas transversas, Fresnel razonaba sobre la doble refracción en cristales que la luz propagandose en cualquier dirección a través de un cristal podía ser descompuesta en dos componentes polarizadas en planos, cada una con distinta velocidad. A falta de una teoría para el movimiento de ondas transversas en ether, encontró a partir de argumentos geométricos que las dos velocidades deberian ser las raíces de una ecuación cuadrática, y derivó la ecuación considerando los desplazamientos relativos resultantes del movimiento de ondas en ether. Con lo anterior todas las antiguas cuestiones sobre la naturaleza de la luz fueron respondidas estableciendo que la luz era un movimiento transverso de ondas en un ether elástico.

Sin embargo, aunque la ecuación para las ondas longitudinales en aire y ether habia sido ya desarrollada, no habia un método general para investigar el movimiento en un ether elástico que tuviera tanto resistencia al cambio volumétrico como a la distorsión. En ese mismo año de 1821 Claud Louis-Marie-Henri Navier presentó una teoría molecular para un cuerpo elástico, dando una ecuación de movimiento para el desplazamiento de una partícula en un sólido elástico, en los años siguientes Augustin-Louis Cauchy, a partir de un punto de vista completamente diferente desarrolló lo que hoy es conocido como la "Teoría Matemática de la Elasticidad", no solo introdujo las nociones de esfuerzo, deformación y las relaciones esfuerzo-deformación, sino que también estableció correctamente el número de constantes elásticas, 2 para un sólido isótropo y 21 para un cristal. La ecuación de movimiento en la teoría de Cauchy concordaba con la de Navier si el módulo volumétrico era  $\frac{5}{3}$  del módulo

de rigidez en el sólido. En el mismo año de 1828, Simeon Denise Poisson resolvió la ecuación diferencial del movimiento para un sólido elástico descomponiendo el desplazamiento en una parte irrotacional y una parte equivolumétrica, siendo cada una solución de la ecuación de onda.

Los trabajos de Poisson se han seguido hasta los presentes estudios de movimiento en sólidos. Pero su descubrimiento de dos tipos de ondas en sólidos, creó una nueva dificultad en la teoría ondulatoria de la luz: Si el ether iluminado se comporta como un sólido elástico, su análisis muestra que deben ser visibles dos ondas y no solo una ...

Después de desarrollada una teoría elástica para la luz, parecía natural emplearla para estudiar la difracción. En 1849 siguiendo la aproximación de Poisson para los valores iniciales asociados con la ecuación de onda, George Gabriel Stokes derivó la solución general de la ecuación dinámica para la propagación de un disturbio en un medio elástico, supuso que aquel era producido por una perturbación inicial confinada en una porción del medio: Cuando la luz es difractada por una apertura en una pantalla, cada elemento de la apertura actúa como una fuente generadora de ondas secundarias. Stokes aplicó su solución para determinar el disturbio correspondiente a las ondas secundarias y fue capaz de mostrar la polarización y magnitud de la luz difractada en puntos alejados de la pantalla difractora.

El trabajo de Stokes y el experimento de Tyndall que en 1868 observó que cuando un haz de luz condensado pasaba por una mezcla de aire y ácido clorhídrico, se formaba una nube que pasaba de un color violeta intenso al azul, llevaron a Rayleigh a investigar la difracción de la luz y dar una respuesta a porqué el cielo es azul. En varios trabajos Rayleigh discutió la dispersión de la luz por pequeñas partículas al mismo tiempo que la teoría de ondas electromagnéticas para la luz comenzaba a ser aceptada, y las diferencias o semejanzas entre ondas de sonido, ondas elásticas y ondas de luz comenzaban a ser entendidas.

Así, en cuanto al análisis matemático concierne la luz podía ser tratada ya sea como una onda electromagnética o como una onda elástica. Con la ayuda de la teoría de sólidos elástico, Rayleigh formuló la importante ley de dispersión en 1871:

"La luz es dispersa por partículas que son muy pequeñas comparadas con cualquier longitud de onda, el radio de las amplitudes de las vibraciones de la luz incidente y dispersa varia inversamente como el cuadrado de la longitud de onda y la intensidad de la luz misma como el inverso de la cuarta potencia".

Esta ley fue descubierta a partir de un simple análisis dimensional de la longitud de onda, la amplitud y el tamaño de las partículas. Como el color azul tiene la longitud de onda más pequeña en el espectro visible de luz, cuando los rayos de luz del sol son difractados por partículas finas (moléculas de aire) en el cielo, el color azul con su intensidad dominante prevalece.

Los primeros tratamientos de Stokes y Rayleigh del fenómeno de dispersión visto como ondas secundaria generadas por fuentes localizadas (fuerzas de cuerpo), es ahora clasificado como dispersión de volumen o de cuerpo. Al tratamiento posterior de Rayleigh de la dispersión como causada por un cuerpo "extraño" con una superficie como frontera que absorbe, refleja o difracta la onda incidente, es llamada dispersión de superficie. Es conveniente en este momento hacer notar que la definición original de dispersión de ondas "scattering of waves" no es clara. Según el uso de Rayleigh, la onda dispersa es la diferencia del campo de onda total observado en presencia de un obstáculo y la onda incidente. Entonces una onda dispersa está comprendida de una parte reflejada por el obstáculo en la zona iluminada y una parte refractada y difractada en la zona de sombra. En este sentido, las ondas dispersas tienen una implicación más general que el significado original de difracción, sin embargo, en el estudio de la difracción de ondas la reflexión y la difracción son partes integrales y son generalmente incluidas de forma muy fácil. Así fuera de la física molecular dispersión "scattering" y difracción "diffraction" se usan con frecuencia para describir el mismo fenómeno de ondas. En los casos en que la parte difractada de la onda dispersa es importante especialmente en conexión con el paso de las ondas cuya geometría incluya formas muy abruptas, prevalece el uso de difracción de ondas. Cuando la parte difractada tiene un papel poco importante, especialmente en el caso de obstáculos de formas muy suaves, se prefiere usar el título de dispersión de ondas.

## REFRACCIÓN

Para definir las leyes de la refracción y reflexión y poder estudiar lo que sucede cuando un frente de ondas plano propagándose en un medio elástico entra en contacto con una interfaz, hacemos uso del principio de Huygens, el cual esencialmente establece que cada punto localizado sobre un frente de onda puede ser considerado como un nuevo emisor de ondas. Así, dada la localización de un frente de onda en un instante cualquiera, las posiciones sucesivas de este frente pueden localizarse al considerar cada punto sobre los puntos que conformaban el frente de onda anterior. La física del fenómeno establece que al contacto de la onda con la interfaz, una parte de la energía contenida en el frente de onda es reflejada y otra parte es transmitida al nuevo medio. Las proporciones de esta partición estarán dadas por las propiedades mecánicas de ambos medios mediante un coeficiente de reflexión y uno de refracción

## ATENUACIÓN

La experiencia común muestra que la amplitud de una onda propagándose a través de una material se atenúa como resultado de una variedad de procesos que macroscópicamente podemos llamar fricción interna o atenuación intrínseca  $Q$  (Aki y Richards, 1980).

Si un material es sometido a esfuerzos cíclicos a una frecuencia  $\omega$ , podemos estimar una medida adimensional de la fricción interna como:

$$\frac{1}{Q(\omega)} = - \frac{\Delta E}{2\pi E} \quad (II.1)$$

donde  $E$  es el pico de la energía de deformación en el material considerado y  $-\Delta E$  es la pérdida de energía en cada ciclo debido a imperfecciones en la elasticidad del material. Esta definición no es de uso directo debido a que solamente en experimentos muy controlados puede llevarse a cabo.

Comunmente uno puede observar ya sea el decaimiento temporal de la amplitud de una onda en un número de onda fijo, o bien el decaimiento espacial de una onda propagándose a una frecuencia fija. En sismología se trata la atenuación de una señal compuesta de un cierto rango de frecuencias. Con la suposición de que la atenuación es un fenómeno lineal, una onda puede ser representada en sus componentes de Fourier, cada uno de los cuales puede ser estudiado en términos de decaimiento temporal con número de onda fijo o decaimiento espacial de una onda propagante a una frecuencia fija, así la subsecuente síntesis de Fourier contiene los efectos correctos de la atenuación en la señal sísmica.

En ambos tipos de atenuación, observada para un medio con relaciones esfuerzo-deformación lineales, la amplitud de la onda ( $A$ ) es proporcional a  $\sqrt{E}$ , entonces:

$$\frac{1}{Q(\omega)} = - \frac{1}{\pi} \frac{\Delta A}{A} \quad (II.2)$$

de donde se pueden obtener las fluctuaciones de amplitud debidas a la atenuación. Así en la atenuación temporal es necesario encontrar  $A =$

$A(t)$  dado que inicialmente  $A=A_0$  y  $A$  decrece una fracción  $\pi/D$  en tiempos sucesivos  $2\pi/\omega$ ,  $4\pi/\omega$ , ...,  $2n\pi/\omega$ , ... . Podemos escribir

$$A(t) = A_0(1 - \pi/D)^n \quad (II.3)$$

para  $t = 2n\pi/\omega$ . Entonces para tiempos largos,  $n$  grande:

$$A(t) = A_0 \left[ 1 - \frac{\omega t}{2\pi n} \right]^n \approx A_0 \exp \left[ - \frac{\omega t}{2D} \right] \quad (II.4)$$

A partir de observaciones del decaimiento exponencial de  $A(t)$  se puede usar II.4 para definir el valor de  $D$  temporal. Para el caso de atenuación espacial encontramos la derivación de  $A = A(x)$  suponiendo que la dirección de máxima atenuación es a lo largo del eje  $x$  y siguiendo un pico particular de la onda a lo largo de una distancia  $dx$ , se puede observar el decaimiento exponencial gradual de  $A$ :  $\Delta A = (dA/dx) \lambda$ , donde  $\lambda = 2\pi c/\omega$  es la longitud de onda. Entonces  $dA/dx = -(\omega x/2cD)A$ , cuya solución con decaimiento exponencial es:

$$A(x) = A_0 \exp \left[ - \frac{\omega x}{2cD} \right] \quad (II.5)$$

Nuevamente, de observaciones del decaimiento exponencial de  $A(x)$ , se puede usar II.5 para definir un valor de  $D$  espacial. Es claro que cualquier decaimiento espacial debido a efectos geométricos debe ser también estudiado.

Para considerar los efectos de la atenuación en una onda de la forma  $\exp i(kx - \omega t)$ , es posible reemplazar  $\omega$  por un valor complejo de frecuencia para la  $D$  temporal y reemplazar  $k$  por un valor complejo de número de onda:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega \left( 1 - i \frac{|\omega|}{2\omega t_{\text{exp}}} \right) \\ k &= k \left( 1 + i \frac{|k|}{2k l_{\text{espa}}} \right) \end{aligned} \quad (II.6)$$

lo que garantiza el decrecimiento de la solución exponencial en distancias grandes y a tiempos largos.

Así se tendría, respectivamente que

$$\exp \left( - \frac{|\omega|t}{2\sigma} \right) \exp i(kx - \omega t)$$

$$\exp \left( i(kx - \omega t) \right) \quad (II.7)$$

$$\exp \left( - \frac{|k|x}{2\sigma} \right) \exp i(kx - \omega t)$$

En medios con atenuación específica moderada o pequeña esta forma de considerar el problema puede ser satisfactoria. Sin embargo, debe notarse que causalmente no es válida:

Supóngase que se ha generado un pulso de la forma

$$p = \delta(t - x/c) \quad (II.8)$$

donde  $\delta()$  = función delta de Dirac. La transformada de Fourier está dada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - x/c) \exp(i\omega t) dt = \exp(i\omega x/c) \quad (II.9)$$

si a cada componente de Fourier se le aplica la atenuación espacial se tiene que cada uno es de la forma

$$\exp \left( - \frac{|\omega|x}{2c\sigma} \right) \exp \left( i \frac{\omega x}{c} \right) \quad (II.10)$$

Así, la transformada inversa de Fourier queda

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( - \frac{|\omega|x}{2c\sigma} \right) \exp [i\omega (x/c - t)] d\omega \quad (II.11)$$

que puede calcularse y escribirse como

$$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{x/2c\sigma}{(x/2c\sigma)^2 + (x/c - t)^2} \right] \quad (II.12)$$

Al graficar la forma del pulso con atenuación dada por  $Q=\text{cte}$ . Puede verse que el máximo se atenúa espacialmente como  $(\pi x/2cQ)^{-1}$ . El principal problema de esta representación es que da valores distintos de cero en  $t < x/c$ , es decir, antes del arribo de la excitación, por lo que se viola la causalidad.

El asunto ha sido ampliamente estudiado y se han propuesto diversas formas de atenuación. Mediante la introducción de velocidad de fase variable con la frecuencia, esto es, haciendo que el medio sea dispersivo, se han logrado satisfacer aproximadamente requerimientos de causalidad. Si  $Q$  se toma constante se tiene que

$$c \longrightarrow c_1 \left[ 1 + \frac{1}{\pi Q} \ln (\omega/2\pi) - 1/2Q \right] \quad (11.13)$$

donde  $c_1$  es la velocidad de fase a la frecuencia de 1 Hz.

Una discusión extensa sobre el asunto puede encontrarse en el texto de Aki y Richards (1980).



### 3. SOLUCIONES ANALÍTICAS

#### DIFRACCIÓN POR CILINDROS

Sea un medio elástico, isótropo y homogéneo que contiene embebida una inclusión bidimensional de geometría arbitraria, fig 3.1a. Denotemos la región que ocupa la inclusión con  $R$  y el medio exterior con  $E$ .

La expresión vectorial de la ecuación de equilibrio de la elasticidad lineal (ecuación de Navier) es

$$\mu \nabla^2 \bar{U} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{U}) + \bar{F} = \rho \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} \quad (III.1)$$

donde  $\bar{U} = \bar{U}(u, v, w)$  = vector de desplazamientos,  $\bar{F}$  = vector de fuerzas de cuerpo y  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  = operador gradiente en coordenadas rectangulares,  $\rho$  = densidad de masa,  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé.

Sea también el teorema de Helmholtz:

$$\nabla^2 \bar{U} = \nabla (\nabla \cdot \bar{U}) + \nabla \times (\nabla \times \bar{U}) \quad (III.2)$$

La ecuación III.1 considerando III.2 y despreciando fuerzas de cuerpo es

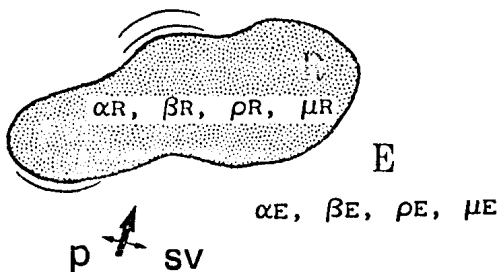
$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{U}) + \mu \nabla \times (\nabla \times \bar{U}) = \rho \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} \quad (III.3)$$

Si  $\bar{U}$  es un cierto movimiento que se verifica por el cambio de forma y sin cambio de volumen, es decir  $\nabla \cdot \bar{U} = 0$ ; la ecuación III.3 queda:

$$\nabla^2 \bar{U} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2}, \quad \nabla \cdot \bar{U} = 0 \quad (III.4)$$

donde  $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$  = velocidad de propagación de ondas de cortante. La ecuación III.4 gobierna la propagación de ondas equivolúmetricas o de cortante.

a



b

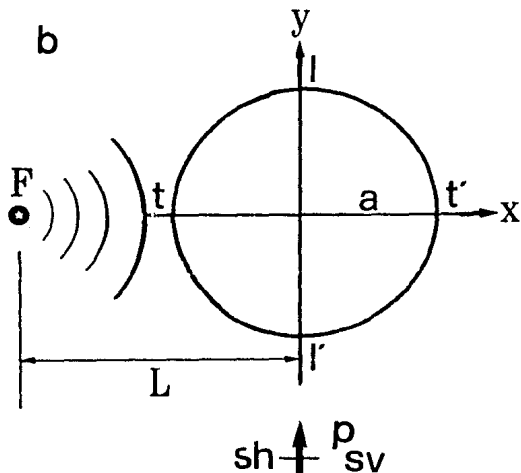


Fig 3.1 Espacio elástico homogéneo con una inclusión bidimensional  
 a) geometría arbitraria. b) sección cilíndrica circular de  
 radio  $a$ . Incidencia de ondas tipo SH, P y SV. Fuente puntual  
 F y secciones transversal  $t-t'$  y longitudinal  $l-l'$ .

Si ahora suponemos que  $\bar{U}$  es un movimiento que ocurre sin rotación de las partículas, es decir  $\nabla \times \bar{U} = 0$ , la ecuación III.3 puede escribirse

$$\nabla^2 \bar{U} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2}, \quad \nabla \times \bar{U} = 0 \quad (\text{III.5})$$

donde  $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  = velocidad de propagación de las ondas compresionales o  $P$ ; esta ecuación describe la propagación con movimiento irrotacional.

Con base en lo anterior, estudiemos la física de las ondas difractadas y refractadas por inclusiones bidimensionales de sección circular en la vecindad de una irregularidad geológica producidas por la incidencia de un frente plano o cilíndrico de ondas del tipo  $SH$ , fig 3.1b.

Debido a las condiciones de la geometría, resulta más sencillo el análisis en coordenadas polares ( $r, \theta, z = \text{cte.}$ ). Para determinar los campos de desplazamientos en función de la posición y la frecuencia es necesario resolver la ecuación de onda bidimensional, III.4, para ambos medios. Para ondas  $SH$  se tiene:

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

por lo que se considera solamente el valor escalar  $w$ .

Los campos de desplazamientos dentro y fuera de la inclusión se designarán como  $w_1$  y  $w_2$  respectivamente.  $w_1$  estará formado por el campo refractado hacia dentro de la inclusión  $w_r$ , producto de la energía que al llegar a la frontera del sistema se propaga como ondas refractadas.  $w_2$  será el resultado de la superposición de los campos incidente  $w_i$  y difractado  $w_d$  provocado por la existencia misma de la inclusión.

Los campos incidente, refractado y difractado, pueden ser representados mediante potenciales de desplazamiento. Consideremos primero el campo incidente con frente de onda plano.

$$\left. \begin{aligned} w_l &= w_0 \exp[-i(\omega t - kx)] \\ w_d &= R_1 \phi_1 \exp[-i\omega t] \\ w_r &= R_2 \phi_2 \exp[-i\omega t] \end{aligned} \right\} \quad (III.7)$$

con  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega = 2\pi f =$  frecuencia angular,  $k = \omega/\beta =$  número de onda para las ondas SH.  $R_1(r)$ ,  $\phi_1(\phi)$ ,  $R_2(r)$  y  $\phi_2(\phi)$  son funciones que serán las incógnitas a resolver por el método de separación de variables y con la aplicación de las condiciones de continuidad en la frontera.

Sustituyendo  $w_d$  en la ecuación de onda:

$$\phi_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \phi_1 \frac{\partial R_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} R_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \phi^2} = -k^2 R_1 \phi_1 \quad (III.8)$$

por factorización

$$\phi_1 \left[ \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} R_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \phi^2} = -k^2 R_1 \phi_1 \quad (III.9)$$

$$\phi_1 \left[ R_1'' + \frac{1}{r} R_1' + k^2 R_1 \right] = -\frac{R_1}{r^2} \phi_1'' \quad (III.10)$$

$$\frac{r^2}{R_1} \left[ R_1'' + \frac{1}{r} R_1' + k^2 R_1 \right] = -\frac{\phi_1''}{\phi_1} \quad (III.11)$$

si  $-\phi_1''/\phi_1 = \lambda^2$ , se obtiene:

$$R_1'' + \frac{1}{r} R_1' + \left[ k^2 - \frac{\lambda^2}{r^2} \right] R_1 = 0 \quad (III.12)$$

$$\phi_1'' + \lambda^2 \phi_1 = 0 \quad (III.13)$$

La solución de la ecuación III.13 es de la forma

$$\phi_1 = C_1 \cos(\lambda\phi) + C_2 \sin(\lambda\phi) \quad (III.14)$$

mientras que para la ecuación III.12 la solución es

$$R_1 = C_1 J_\lambda(kr) + C_2 Y_\lambda(kr) = C_3 H_\lambda^{(1)}(kr) + C_4 H_\lambda^{(2)}(kr) \quad (III.15)$$

donde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  son constantes desconocidas,  $J_\lambda(\cdot)$  y  $Y_\lambda(\cdot)$  son las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden  $\lambda$ ,  $H_\lambda^{(1)}$  y  $H_\lambda^{(2)}$  son las funciones de Hankel de primera y segunda especie de orden  $\lambda$ . Debido a la periodicidad del problema con respecto a  $\theta$  es posible hacer  $\lambda = n$ , siendo  $n$  un entero.

El segundo sumando de la solución III.14 es cero, lo cual es únicamente válido para cilindros simétricos e incidencia de ondas siguiendo la línea de simetría. Además el campo difractado indica que se trata de ondas que parten de la frontera hacia el infinito por lo que se emplea la función  $H_n^{(1)}$  para garantizar el cumplimiento de la condición de irradiación al infinito.

Finalmente el campo de desplazamientos se construye como una combinación lineal de soluciones de la ecuación:

$$w_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr) \cos(n\theta) \quad (III.16)$$

De manera análoga al sustituir  $w_r$  en la ecuación diferencial se tiene que los desplazamientos estarán dados en términos de funciones de Bessel de primera especie para eliminar la singularidad en el centro del cilindro que provocarían las de segunda especie.

$$\phi_2 = C_1 \cos(n\theta) \quad (III.17)$$

$$R_2 = C_2 J_n(kr) \quad (III.18)$$

$$w_r = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_n(kr) \cos(n\theta) \quad (III.19)$$

Además, es posible demostrar que la onda incidente  $w_1 = w_0 \exp[-i(\omega t - kx)]$  puede ser representada por:

$$w_1 = w_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (i)^n J_n(kr) \cos(n\theta) \quad (III.20)$$

donde  $c_n$  es el factor de Neumann;  $c_n = 2$  ( $n = 0$ ),  $c_n = 1$  ( $n \neq 0$ ). Final-

mente las expresiones para los campos de desplazamientos dentro y fuera del cilindro son construidas como combinaciones lineales de soluciones de las ecuaciones siguientes:

$$w_1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_n(kr) \cos(n\theta) \quad (III.21)$$

$$w_2 = w_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (1)^n J_n(kr) \cos(n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr) \cos(n\theta) \quad (III.22)$$

El valor de las constantes  $A_n$  y  $B_n$  se determinan empleando las siguientes condiciones de frontera

$$w_1 = w_2 \quad \text{en } r = a \quad (III.23)$$

$$\mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial r} = \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial r} \quad \text{en } r = a \quad (III.24)$$

Al sustituir  $w_1$  y  $w_2$  de las ecuaciones III.21 y III.22 en las condiciones de frontera y evaluar para  $r = a$ , se obtendrá un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas  $A_n$  y  $B_n$ . Una vez conocidos los valores de estas constantes las soluciones finales para los campos de desplazamientos serán

$$w_1 = w_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left( c_n (1)^n \rho \epsilon \beta \epsilon \frac{-J_n'(ka) H_n^{(1)}(ka) + J_n(ka) H_n^{(1)'}(ka)}{-H_n^{(1)}(ka) J_n'(ka) \rho \beta \beta \epsilon + H_n^{(1)'}(ka) \rho \epsilon \beta \epsilon} \right) \times \\ \times J_n(kr) \cos(n\theta) \quad (III.25)$$

$$w_2 = w_0 \left( \exp\{-i\lambda \epsilon r \cos(\theta)\} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( c_n (1)^n \frac{J_n(ka) J_n'(ka) \rho \beta \beta \epsilon - J_n'(ka) J_n(ka) \rho \epsilon \beta \epsilon}{-H_n^{(1)}(ka) J_n'(ka) \rho \beta \beta \epsilon + H_n^{(1)'}(ka) J_n(ka) \rho \epsilon \beta \epsilon} \right) \times \right. \\ \left. \times H_n^{(1)}(kr) \cos(n\theta) \right) \quad (III.26)$$

Mediante un procedimiento análogo en el cual los campos incidente y difractado se expresan como expansiones de funciones de Hankel de segunda especie  $H_n^{(2)}$ , es posible considerar la onda incidente como producida por una fuente lineal desde un punto  $F$ , situado a una distancia  $L$  del

centro de la sección fig 3.1b. Para este caso las expresiones finales para los campos de desplazamiento en el interior de la sección están dadas respectivamente por

$$w_1 = w_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (1)^n H_n^{(2)}(kl) b_n J_n(k'r) \cos(n\theta) \quad (\text{III.27})$$

$$w_2 = w_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (1)^n H_n^{(2)}(kl) \left( J_n(kr) - a_n H_n^{(2)}(kr) \right) \cos(n\theta) \quad (\text{III.28})$$

en donde los coeficientes  $b_n$  y  $a_n$  se obtienen también mediante el sistema de ecuaciones que surge al aplicar las condiciones de frontera en  $r=a$ .

Si ahora consideramos que el sistema de la fig 3.1b es afectado por la incidencia de un campo de ondas plano del tipo  $P$  o  $SV$ , los potenciales de desplazamiento tanto de la parte interna como de la externa a la inclusión estarán formados por potenciales para las ondas  $P$  y  $SV$ , es decir  $\phi$  y  $\psi$  respectivamente; de tal manera que si suponemos incidencia de ondas  $P$  propagándose en el sentido positivo del eje  $x$ , el campo incidente puede representarse por:

$$\phi^i = \phi_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(qr) \exp[in(\theta - \pi/2)] \quad (\text{III.29})$$

donde  $q = \omega/\alpha =$  número de onda para las ondas  $P$ . En el interior del cilindro (región  $R$ ), los potenciales de desplazamiento para los campos de onda  $P$  y  $SV$ , serán respectivamente:

$$\phi_R = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_n(qr) \exp[in(\theta - \pi/2)] \quad (\text{III.30})$$

$$\psi_R = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n J_n(kr) \exp[in(\theta - \pi/2)] \quad (\text{III.31})$$

mientras que para el exterior a la inclusión (región  $E$ ) estos potenciales serán

$$\phi_E = \phi^i + \phi^d = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\phi_0 J_n(qr) + A_n H_n^1(qr)] \exp[in(\theta - \pi/2)] \quad (\text{III.32})$$

$$\Psi_E = \Psi^i + \Psi^d = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n J_n(kr) + B_n H_n^1(kr)] \exp(i n(\theta - \pi/2)) \quad (III.32)$$

Tomando en cuenta que la onda incidente es del tipo P,  $\Psi^i = 0$ , si por el contrario la onda que incide fuera SV se tendría que  $\phi^i = 0$ .

Los campos de desplazamientos y las tracciones en coordenadas polares están dados por

$$U_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (III.34)$$

$$U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (III.35)$$

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (III.36)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \quad (III.37)$$

Al sustituir las expresiones para los potenciales difractados  $\phi^d$  y  $\psi^d$  de las ecuaciones III.32 y III.33 en las expresiones anteriores para los campos radial y tangencial y para las tracciones  $\sigma_{rr}$  y  $\sigma_{r\theta}$ ; y después de aplicar las siguientes condiciones de frontera:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^E &= \sigma_{rr}^R & \sigma_{r\theta}^E &= \sigma_{r\theta}^R \\ U_r^E &= U_r^R & U_\theta^E &= U_\theta^R \end{aligned} \right\} \quad \text{en } r = a. \quad (III.38)$$

se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  y  $D_n$ , el cual se resuelve numéricamente para obtener valores de estas constantes. De esta manera pueden entonces evaluarse  $\phi_E$  y  $\psi_E$  y los campos de desplazamientos  $w_r$  y  $w_\theta$ .

Las expresiones que representan las soluciones para los campos de desplazamiento dentro y fuera de la sección cilíndrica circular fueron evaluadas para incidencia de un frente plano de ondas SH, P y SV, y frente cilíndrico de ondas SH.

La historia de los desplazamientos  $v(t)$ , en varios detectores colocados en y cerca de la inclusión considerada, producidos por la inciden-



cia de una señal de tiempo  $f(t)$ , puede obtenerse convolucionando esta señal incidente con la función de transferencia del sistema  $h(t)$ . Esto puede llevarse a cabo mediante el uso del teorema de la convolución empleando la transformada de Fourier. El teorema establece que la convolución de dos señales en el dominio del tiempo es igual a la transformada inversa de Fourier de la multiplicación de ambas señales en el dominio de la frecuencia

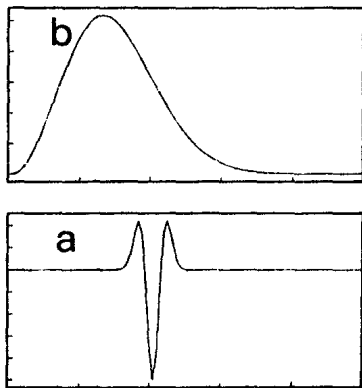
$$v(t) = f(t) * h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) H(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (III.39)$$

donde  $F(\omega)$  es la Transformada de Fourier de la señal incidente y  $H(\omega)$  es la de la función de transferencia del sistema dada en función de la frecuencia y la posición, el símbolo (\*) implica la operación de convolución en el dominio del tiempo.

Se calcularon los sismogramas sintéticos producidos ante la incidencia de una ondicula del tipo Ricker como un frente plano de ondas SH. La expresión en tiempo de esta ondicula esta dada por  $f(t) = (A^2 - 0.5) \exp(-A^2)$ , siendo  $A = \pi(t-t_0)/t_p$ , donde  $t_0$  = tiempo de retraso del pulso y  $t_p$  = periodo característico. En las figs 3.2a y 3.2b el pulso está graficado en los dominios del tiempo y la frecuencia, respectivamente.

Las figs 3.3 y 3.4 muestran 120 sintéticos correspondientes a las secciones transversal T-T' y longitudinal L-L' respectivamente (ver fig 3.1b), de una inclusión con radio  $a=500$  m. La velocidades de ondas SH para medio(t) e inclusión(r) fueron de  $\beta t=400$  m/s y  $\beta r=150$  m/s, las densidades empleadas:  $\rho t=2.0$  y  $\rho r=1.0$  Ton/m<sup>3</sup>. La factor de atenuación Q considerado fue de 50. En este ejemplo los parámetros del pulso usado son  $t_p=1.5$  seg y  $t_0=3$  seg.

Para la sección T-T' es posible observar la perturbación que sufre el frente plano de onda al llegar a la irregularidad estudiada, además de la amplificación que allí experimenta. Lo anterior es debido al contraste en las propiedades mecánicas (densidad y velocidades de ondas de corte) entre la irregularidad y el medio exterior. Para tiempos posteriores se observa la energía atrapada en la inclusión como pulsos refle-



**Fig 3.2** función Pulso de Ricker a) en el dominio del tiempo  
b) en el dominio de la frecuencia.

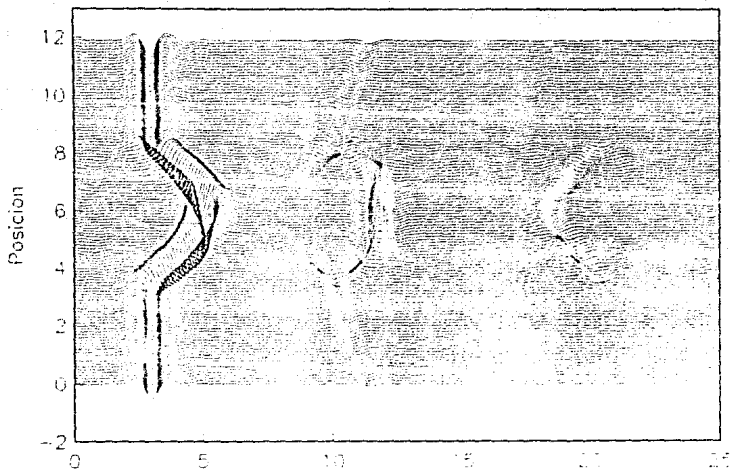
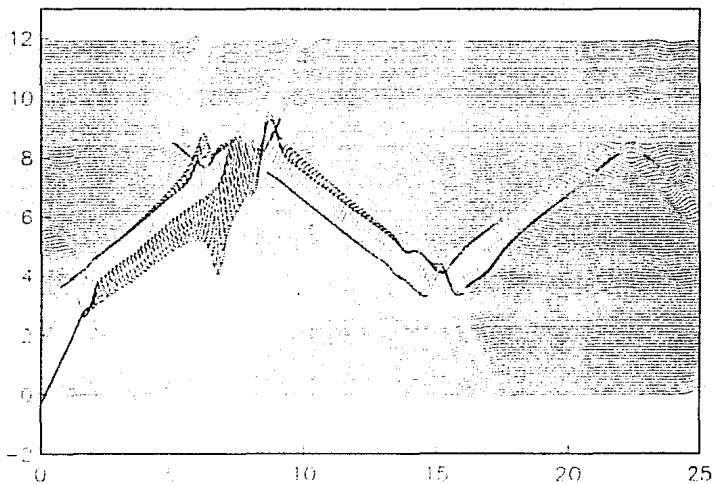


Fig 3.3 Sismogramas sintéticos obtenidos con la solución analítica para el perfil transversal T-T' de la fig 3.1b. Incide un frente plano de ondas SH. Los parámetros del pulso de Ricker son  $t_0=3$  y  $t_p=1.5$  seg.



**Fig 3.4** Sismogramas sinteticos obtenidos con la solución analítica para el perfil longitudinal L-L' de la fig 3.1b con los mismos parámetros de la fig 3.3.

Jados varias veces dentro de la misma y una mínima emisión al exterior de energía en forma de ondas difractadas.

En la sección L-L' donde los detectores están colocados en la dirección de propagación de la onda observamos líneas sucesivas de pulsos cuya pendiente es la velocidad de propagación dentro de la inclusión. Estas tendencias representan la llegada retardada del pulso a cada detector y de las subsecuentes reflexiones. Es posible notar grandes amplificaciones alrededor de los diez segundos debidas al enfocamiento geométrico de la energía en esos puntos, así como la que se transmite al medio exterior en cada llegada del pulso a la frontera de la inclusión. Por otro lado, obsérvese también la pérdida de energía de los pulsos con cada reflexión en las extremos de la inclusión.

Las figs 3.5 y 3.6 representan los sismogramas sintéticos para las secciones transversal y longitudinal respectivamente de una inclusión con radio  $a=8000$  m,  $\beta_R=500$  y  $\beta_E=1000$  m/s,  $\rho_R=\rho_E$ . Ahora la onda incidente proviene de una fuente lineal situada en un punto  $F$  a una distancia  $L$  (ver fig 3.1b) del centro de la inclusión y por lo tanto posee un frente cilíndrico (ecs III.27 y III.28). El comportamiento general de los campos de desplazamientos permanece semejante al de las figs 3.3 y 3.4., sin embargo en los detectores localizados fuera de la inclusión se distingue el frente cilíndrico de la onda propagante. Los parámetros del pulso de Ricker empleado en esta ocasión son  $t_s=30$  y  $t_p=10$  seg, cada perfil contiene 66 sismogramas.

Para ilustrar la influencia en los campos de desplazamientos para incidencia de un frente plano de ondas tipo  $P$ , en la fig 3.7 se muestran los sismogramas correspondientes al perfil transversal de la fig 3.1b. Los parámetros utilizados son  $a=400$  m;  $\alpha_E=180$ ,  $\beta_E=90$ ,  $\alpha_R=120$  y  $\beta_R=80$  m/s. La dirección de evaluación del campo de desplazamientos coincide con la dirección de propagación de la onda y, por ser onda  $P$ , con la dirección de movimiento de las partículas. Es posible observar dos tendencias del pulso viajando a distintas velocidades, cuyas pendientes representan la propagación de ondas  $P$  y la de ondas convertidas  $S$  en el interior de la inclusión. Los detectores localizados en el exterior presentan el paso del frente plano de ondas  $P$  y ondas difractadas.

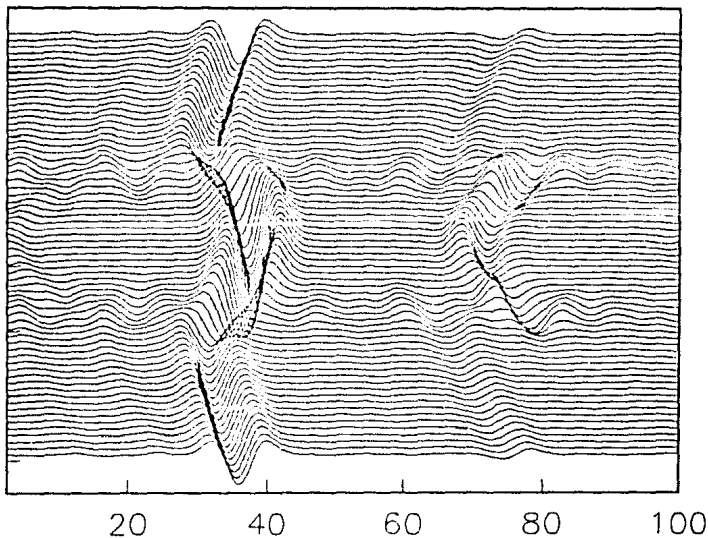
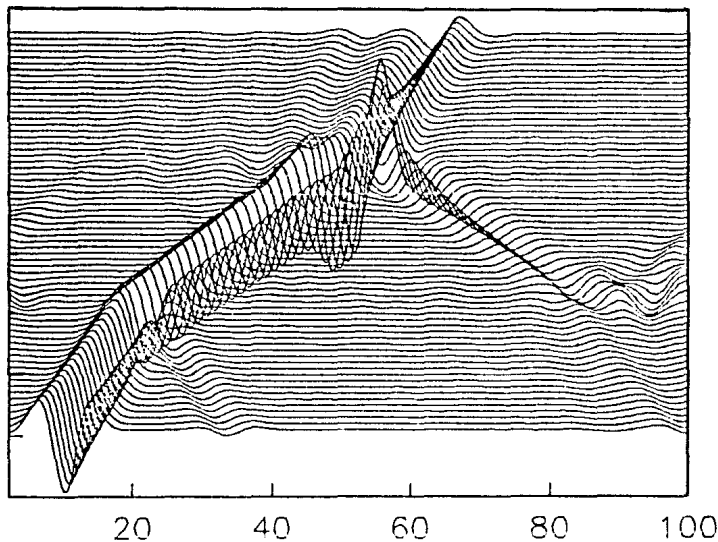
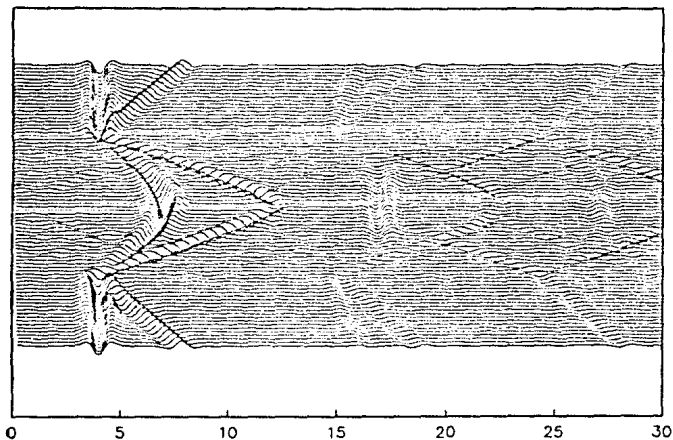


Fig 3.5 Sismogramas sintéticos obtenidos con la solución analítica para el perfil transversal T-T' debidos a una fuente puntual  $F$  localizada a una distancia  $L$  del centro de la inclusión, (ver fig 3.1b). Los parámetros del pulso de Ricker son  $t_s=30$   $t_p=10$  seg.



**Fig 3.6** Sismogramas sintéticos obtenidos con la solución analítica para el perfil Longitudinal L-L' de la fig 3.1b con los mismos parámetros de la fig 3.5.



**Fig 3.7** Sismogramas sintéticos para la incidencia de un frente plano de ondas  $P$  en la sección T-T' de la fig 3.1b. Para el pulso utilizado  $t_s=4$  y  $t_p=1.5$  seg.



## RESPUESTA ESTRATO-PARED

Una de las configuraciones simples que admiten solución analítica y cuyos resultados ejemplifican de manera clara las ondas superficiales generadas localmente y la difracción producida en un vértice, es el modelo teórico de un estrato elástico con base rígida móvil limitado lateralmente por una pared vertical. La solución para movimiento armónico antipiano (SH), se obtiene mediante la aplicación de series de Fourier (Rodríguez-Zúñiga et al. 1990).

Considérese un sistema formado por un estrato blando horizontal de espesor uniforme  $H$  y base rígida, con extensión infinita hacia un lado y limitado por una pared vertical (fig 3.8). Considérese también un movimiento simultáneo de la base y la pared perpendicular al plano, con dependencia armónica en el tiempo, dado por  $v = v_0 \exp(i\omega t)$ , donde  $v_0 =$  amplitud de la excitación inicial. Se puede demostrar que bajo estas condiciones el campo de desplazamientos ( $v$ ) del sistema, satisface la ecuación reducida de onda, o ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 v + (\omega/\beta)^2 v = 0, \quad (\text{III.40})$$

donde:  $v = v(x, z, \omega)$ . La condición de tracciones nulas en las fronteras libres, está dada por:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (\text{III.41})$$

Empleando series de Fourier es posible obtener la solución analítica de la ec III.40 mediante el método de separación de variables, como la superposición de la respuesta unidimensional (cuando no existe irregularidad lateral) más los efectos de difracción y ondas superficiales producidos por la irregularidad.

$$v = v_0 \frac{\cos kz}{\cos kH} + v_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{sen}[k_n (H-z)] \exp(-\lambda_n x), \quad (\text{III.42})$$

donde  $A_n$  es un coeficiente complejo desconocido,  $k_n = \frac{2n+1}{2H} \pi$

y  $\lambda_n = \sqrt{k^2 - k_n^2}$  ( $\text{Im}[\lambda_n] < 0$ ).

La forma de la serie en la ec III.42 fue escogida de manera que se satisficieran las condiciones de frontera en la base ( $z=H$ ) y en la superficie libre ( $z=0$ ). Puede verificarse que el primer sumando corresponde a la solución unidimensional mientras que la segunda parte corresponde a la difracción del vértice y las ondas superficiales generadas en la pared. Nótese que el argumento del exponencial representa ondas que viajan en el sentido positivo del eje  $x$ .

Aplicando la condición de frontera en  $x = 0$ ,

$$v_0 = v_0 \frac{\cos kz}{\cos kH} + v_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\{k_n(H-z)\} \quad (\text{III.43})$$

Si ahora multiplicamos la ec III.43 por  $\operatorname{sen}\{k_m(H-z)\}$  e integramos de 0 a  $H$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^H \operatorname{sen}\{k_n(H-z)\} \operatorname{sen}\{k_m(H-z)\} dz = \int_0^H \left(1 - \frac{\cos kz}{\cos kH}\right) \operatorname{sen}\{k_m(H-z)\} dz \quad (\text{III.44})$$

Aplicando la propiedad de las funciones ortogonales:

$$\int_0^H \operatorname{sen}\{k_n(H-z)\} \operatorname{sen}\{k_m(H-z)\} dz = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ H/2 & n = m \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

de la expresión anterior se obtiene

$$A_n = \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n+1)} \frac{k^2}{k^2 - k_n^2} \quad (\text{III.46})$$

Finalmente la solución formal del problema evaluada en la superficie libre ( $z=H$ ) es:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{\cos kH} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \frac{k^2}{k^2 - k_n^2} \exp(-i\lambda_n x) \quad (\text{III.47})$$

## RESPUESTA ESTRATO-CUÑA

En el caso en que la irregularidad lateral del estrato, sea una pared inclinada formando un ángulo  $\theta$ , respecto de la horizontal, las expresiones para los campos de desplazamientos en  $x > L$  y en  $x \leq L$  (fig 3.9) están dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 \frac{\cos kz}{\cos kH} + v_0 \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(knz) \exp[-i\lambda_n(x-L)], \quad x > L \\ v_0 \sum_{j=0}^N (-1)^j c_{N-j} \cos \eta_j z \exp(-i\gamma_j x) + v_0 \sum_{m=0}^{\infty} C_m J_{N(2m+1)}(kr) \cos[N(2m+1)\theta], \quad x \leq L \end{array} \right. \quad (III.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 \frac{\cos kz}{\cos kH} + v_0 \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(knz) \exp[-i\lambda_n(x-L)], \quad x > L \\ v_0 \sum_{j=0}^N (-1)^j c_{N-j} \cos \eta_j z \exp(-i\gamma_j x) + v_0 \sum_{m=0}^{\infty} C_m J_{N(2m+1)}(kr) \cos[N(2m+1)\theta], \quad x \leq L \end{array} \right. \quad (III.49)$$

donde  $c_{N-j}$  = factor de Newman antes mencionado,  $\theta$  = ángulo de inclinación de la pared, cuya forma es  $\pi/2N$ , ( $N=2,5,7,\dots$ ),  $L = H/\tan \theta$ ,  $M = (N-1)/2$ ,  $\eta_j = k \sin \theta_j$ ,  $\gamma_j = k \cos \theta_j$ ,  $\theta_j = \frac{N-[2j-1]}{2N} \pi$ ,  $J_N(\cdot)$  son las funciones de Bessel ya mencionadas. En los sucesivos se usará solamente  $J$  y  $J'$  para denotar las funciones de orden  $N(2m+1)$  con argumento  $(kx)$  y su primera derivada.

La serie de la ec III.48 representa la difracción del vértice con un término de propagación en el sentido positivo del eje  $x$ , a partir de  $L$ , dado por el argumento del exponencial. El primer sumando de la ec III.49 es la solución geométrica de la cuña correspondiente (ver Sánchez-Sesma y Velázquez, 1987) mientras que la segunda serie representa la contribución hacia la cuña de la difracción proveniente del estrato.

Empleando la siguiente aproximación en  $x = 0$ :

$$kr \approx kx \quad \theta \approx \frac{z}{L} = \frac{z}{H}, \quad \text{y} \quad \tan\left(-\frac{\pi}{2N}\right) \approx \frac{z}{H} \frac{\pi}{2N} \quad (III.50)$$

podemos escribir  $\cos[N(2m+1)\theta] \approx \cos kz$ .

Tomando en cuenta la aproximación anterior, el procedimiento para determinar los valores de los coeficientes  $B_n$  y  $C_n$  es muy similar al empleado para la pared vertical, obteniéndose así la solución final para el sistema de pared inclinada, que evaluada en la superficie libre para  $x > L$  y para  $x \leq L$  es respectivamente:

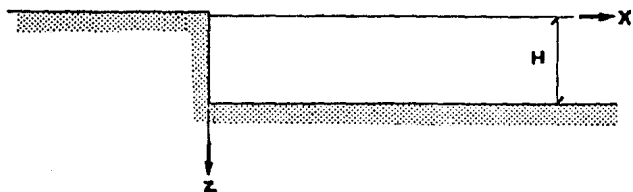


Fig 3.8 Estrato blando horizontal de espesor uniforme y base rígida móvil. Extensión infinita hacia un lado y limitado por una pared vertical hacia el otro.

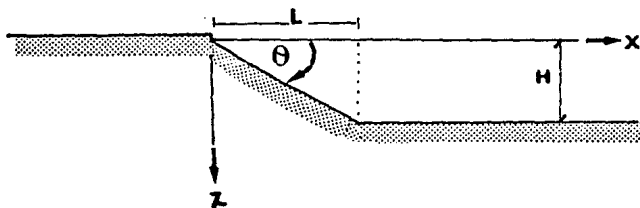


Fig 3.9 Estrato blando horizontal de espesor uniforme y base rígida móvil. Extensión infinita hacia un lado y limitado por una pared inclinada un ángulo  $\theta$  hacia el otro.

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{\cos kH} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n v_0 \frac{2}{H} \left\{ \frac{1}{1 + i(\lambda n J)} \frac{k_n}{\lambda_n^2} - \sum_{x=0}^M \Psi(\omega, J, x) \right\} \exp[-i\lambda_n(x-L)] \quad (III.51)$$

$$\frac{v}{v_0} = \sum_{x=0}^M (-1)^J c_{M-J} \exp(-i\gamma_j x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{v_0}{k J^2 + i\lambda n J} \frac{2i}{H} \left\{ \frac{k_n}{\lambda_n} + k_n \sum_{j=0}^M \Phi(\omega, j) \right\} J \quad (III.52)$$

$$\text{donde } \Psi(\omega, J, x) = (-1)^J c_{M-J} \left( \frac{1 + i(\gamma_j J / k J^2)}{1 + i(\lambda n J / k J^2)} \right) \frac{k_n}{\eta_j^2 - k_n^2} \cos \eta_j H \exp[-i\gamma_j L] \quad (III.53)$$

$$\Phi(\omega, j) = (-1)^J c_{M-J} \left( \frac{\gamma_j - \lambda_n}{\eta_j^2 - k_n^2} \right) \cos \eta_j H \exp(-i\gamma_j L) \quad (III.54)$$

Las ecs III.47, III.51 y III.52 representan las funciones de transferencia para los sistemas estrato-pared y estrato-cuña respectivamente.

A continuación se presentan algunos resultados a partir de las soluciones obtenidas para el sistema de estrato con pared vertical e inclinada. Con el objeto de estudiar la contribución de la irregularidad lateral en el cálculo de espectros de respuesta, se usaron las expresiones III.47, III.51 y III.52 para obtener funciones de transferencia en distintas posiciones sobre la superficie de ambos sistemas. Para la estimación de los espectros de respuesta, se usaron los resultados de la teoría de las vibraciones casuales (Reinoso et al., 1990).

Se calcularon funciones de transferencia para las posiciones  $x/H = 1, 2$  y  $5$  y para un factor de amortiguamiento  $Q = 50$ . En las fig 3.10 y 3.11 se pueden observar respectivamente las funciones correspondientes a los sistemas de pared vertical y pared inclinada  $30^\circ (N=3)$  con respecto de la vertical. En cada caso, se superpone a las respuestas total (izquierda) y debida a la difracción (derecha), la respuesta unidimensional del modelo con línea discontinua.

La manera en que las respuestas unidimensional y de difracción se combinan para formar la respuesta total es muy compleja. Sin embargo, es posible observar que para el modelo estrato-pared (fig 3.8) en la posi-

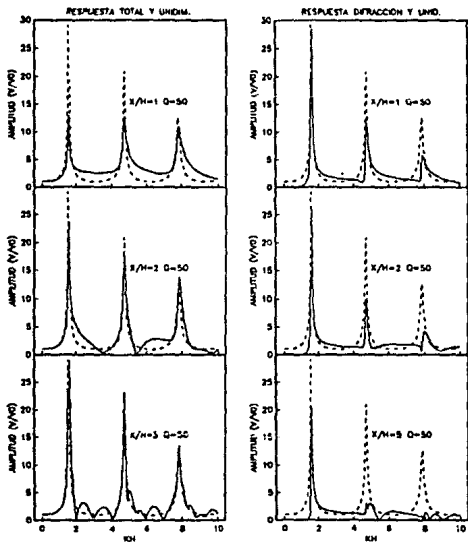


Fig 3.10 Funciones de transferencia correspondientes a la superficie del sistema estrato con pared vertical para las posiciones  $x/H = 1, 3$  y  $5$ . Izquierda respuesta total, derecha respuesta debida a la irregularidad. En ambos casos se superpone la respuesta unidimensional con linea discontinua.

ción  $x/H = 1$ , si bien los picos de la respuesta total están subestimados con respecto de la unidimensional, el nivel general de energía es mayor, en  $x/H = 2$  la difracción está construida con la aportación del vértice de la cuña más la generada en el vértice formado por la base del estrato y la parte inferior de la pared, lo que explica que ésta sea mayor con respecto de la observada en  $x/H = 1$ . Por otro lado, para  $x/H = 5$  la respuesta total se asemeja mucho a la unidimensional en cuanto a la altura alcanzada por los picos y el ancho de éstos, pero además se pueden distinguir oscilaciones explicables únicamente por la interacción con la difracción generada, la cual se ve reducida debido a que se trata de una posición relativamente lejana de la irregularidad. Para el estrato con pared inclinada (fig 3.9), puede ser observada la misma tendencia. Además, para  $x/H = 1$ , aun estamos en el dominio de la cuña ( $x < L$ ), por lo que no se tiene la contribución unidimensional del estrato, sino esencialmente la contribución del campo geométrico en la cuña. Para  $x/H$  de 2 y 5, estamos ya en  $x > L$  y la respuesta total la conforman ambas.

La fig 3.12 muestra 70 sismogramas sintéticos con aproximadamente 80 seg de duración, calculados sobre la superficie del sistema estrato-pared para un pulso con  $t_s = 10$  seg y  $t_p = 4$  seg, con una separación entre sismogramas de 100 m. El espesor del estrato es de 1200 m con una velocidad  $\beta = 1700$  m/seg. Nótese la llegada simultánea a todos los detectores de los pulsos ocasionados por la respuesta unidimensional y sus reflexiones en la superficie libre y en la base rígida, que es donde su polaridad se invierte, estos pulsos van disminuyendo en amplitud conforme el tiempo transcurre. Los pulsos que se ven atravesando las tendencias unidimensionales son los generados como ondas superficiales en la pared. Es posible distinguir también la difracción del vértice hacia la parte cercana a la pared de las reflexiones unidimensionales.

Las figs 3.13a y 3.13b muestran los correspondientes sismogramas sintéticos para el estrato con pared inclinada  $30^\circ$  y  $19^\circ$  respectivamente, las características del pulso y el espesor y velocidad del estrato son los mismos que para los cálculos con pared vertical (fig 3.12). Para estos casos, podemos observar que las reflexiones unidimensionales se registran únicamente para posiciones  $x > L$ , mientras que las ondas superficiales generadas en los vértices de las cuñas viajan a través de éstas y se propagan sobre toda la superficie, interfiriendo ya sea de manera

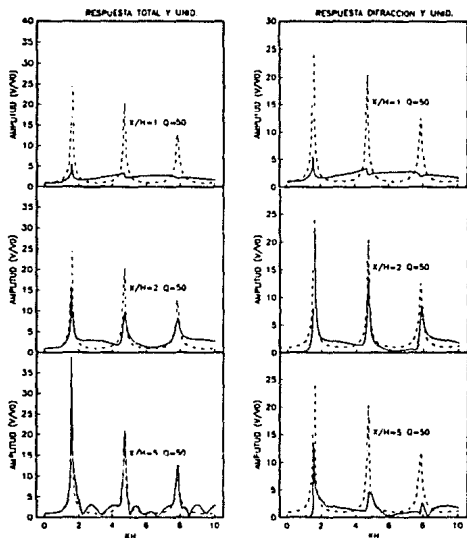


Fig 3.11 Funciones de transferencia correspondientes a la superficie del sistema estrato con pared inclinada 30 grados para las mismas posiciones de la fig 3.10



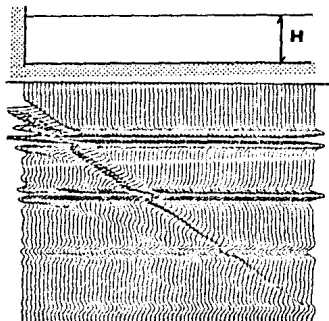


Fig 3.12 Sismogramas sintéticos para la superficie del sistema estrato con pared vertical.  $t_s=10$  y  $t_p=4$  seg.

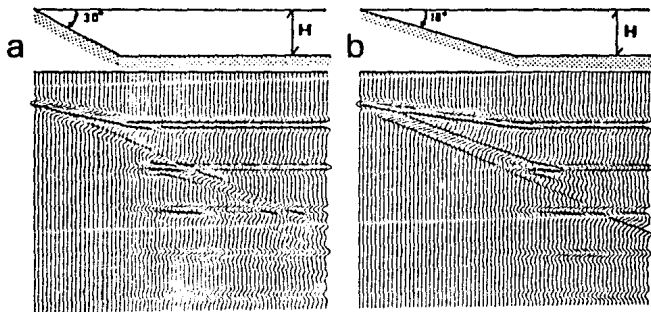


Fig 3.13 Sismogramas sintéticos para la superficie del sistema estrato con pared inclinad. a) 30 y b) 18 grados.  $t_s=10$  y  $t_p=4$  seg.

constructiva o destructiva, con las reflexiones unidimensionales. La difracción producida hacia la cuña y hacia el estrato, interviene suavizando la discontinuidad entre las dos partes.

La contribución a los espectros de respuesta de las ondas superficiales y la difracción generadas por la irregularidad lateral, pueden ser apreciadas en las fig 3.14 y 3.15. Para los casos del estrato con pared y estrato con cuña se usaron las funciones de transferencia generadas con  $H = 1200$  m y  $\beta = 180$  m/seg, los espectros de respuesta para los sistemas totales fueron calculados para periodos ( $\Omega$ ) de hasta 4 seg en las posiciones  $x = 1000, 3000, 5000, 7000$  y  $10000$  m y se grafican en línea continua, mientras que con línea discontinua se superponen los espectros de respuesta calculados para las mismas posiciones pero en ausencia de irregularidad lateral. Se usó como espectro base el espectro de amplitudes de Fourier del acelerograma registrado en CU durante el temblor del 25 de abril de 1989 ocurrido en las costas del pacifico.

Para las posiciones  $x = 1000$  m, en el caso de pared vertical, y  $x = 1000$  y  $3000$  m, en el caso de pared inclinada, el espectro de respuesta del sistema total está subestimado con respecto del unidimensional, debido a que para esas posiciones, el sistema total está comprendido solamente por la contribución de la pared (onda superficial y difracción). Por otro lado, para las posiciones  $x=3000$  y  $5000$  m, en el caso de pared vertical, y  $x=5000$  y  $7000$  m en el de pared inclinada, los espectros de respuesta totales son sistemáticamente más grandes que los correspondientes unidimensionales, sin embargo son muy semejantes entre ellos, lo que ejemplifica claramente, por un lado la importancia de la irregularidad lateral en la estimación de los espectros de respuesta, y por el otro la poca importancia que tiene la forma de esta irregularidad en su contribución al movimiento total en posiciones alejadas. Nótese también que para posiciones muy alejadas de la irregularidad, p ej  $x = 7000$  y  $10000$  m en el estrato-pared y  $x = 10000$  m en el estrato cuña, los espectros de respuesta totales y unidimensionales son casi idénticos, debido a que a estas distancias la contribución de la irregularidad es esencialmente la misma.

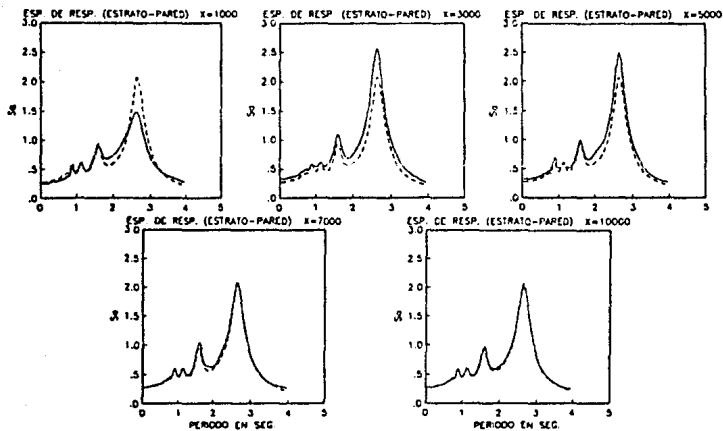


Fig 3.14 Espectros de respuesta calculados con la teoría de vibraciones aleatorias para las posiciones indicadas sobre la superficie del sistema estrato pared. En todos los casos se superpone la solución unidimensional con línea discontinua. El espectro base es el registrado en CU el 25 de abril de 1989.

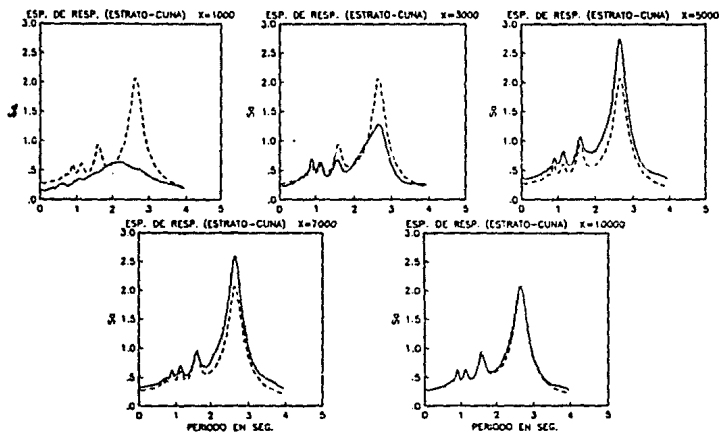


Fig 3.15 Espectros de respuesta calculados con la teoría de vibraciones aleatorias con los mismos parámetros de la fig 3.14, sobre el sistema estrato con pared inclinada 30 grados.

#### 4. SOLUCIONES NUMÉRICAS

##### SUPERPOSICIÓN DE HACES GAUSSIANOS

En la evaluación de la respuesta sísmica de depósitos de suelo blando y de inclusiones bidimensionales es deseable contar con métodos aproximados que permitan cálculos para altas frecuencias. Tal es el caso de los métodos geométricos basados en la teoría de rayos. Estos tienen la ventaja de presentar una clara visualización de la física del problema y de ser confiables en alta frecuencia.

La teoría de rayos es una aproximación de alta frecuencia. Los rayos son líneas que representan las trayectorias de propagación con el mínimo tiempo. En medios homogéneos se trata de líneas rectas. En problemas de propagación de ondas en configuraciones irregulares el uso de rayos permite obtener aproximaciones razonables de la parte geométrica del campo de ondas. Sin embargo, deben tenerse precauciones especiales para tratar regiones de singularidad tales como las caústicas o las zonas de transición entre rayos y sombra geométrica pues se desprecia la difracción. Además, generalmente los métodos de rayos tradicionales requieren un trazado de rayos emisor-receptor (e.g. Červený et al., 1977; Moczo et al., 1987).

Recientemente se ha desarrollado una técnica de superposición de haces gaussianos que elimina muchas de las desventajas de la teoría de rayos tradicional (e.g. Červený, 1985; Nowack y Aki, 1984; Alvarez, 1989; Benites y Aki, 1989; Rodríguez-Zúñiga et al., 1989). En la solución se combina el método asintótico de rayos (Červený et al., 1977) con una aproximación parabólica de la ecuación de onda (Tappert, 1976). Los cálculos con esta técnica son satisfactorios, aun en sitios en la vecindad de caústicas. Ello se debe al efecto de suavizado que proporcionan los haces gaussianos, lo que simula la difracción.

La técnica de superposición de haces gaussianos permite estudiar aproximadamente el comportamiento sísmico de diversas estructuras geológicas. Aquí se presenta una aplicación de esta técnica, propuesta

por Babich (Babich y Popov, 1981), al estudio de depósitos irregulares de suelo blando en la superficie de un semiespacio elástico y al comportamiento de la propagación de ondas elásticas dentro y fuera de una inclusión bidimensional ante incidencia de ondas de corte *SH* planas.

El método se basa en la solución aproximada, en coordenadas centradas, de la ecuación de onda. Para ello se construye el diagrama de rayos que indica la propagación de las ondas sísmicas. A diferencia de otros métodos de rayos no se requiere el trazado emisor-receptor y su costo es comparable. Debido a los efectos intrínsecos de suavidad y de disipación de energía, puede decirse que se considera en parte la difracción, en especial para geometrías suaves.

Para obtener una representación confiable del movimiento, se requiere de una adecuada densidad de rayos. La superposición de las contribuciones relevantes de los haces gaussianos proporcionará una descripción de los desplazamientos para el sitio de interés.

Considérense una configuración bidimensional e incidencia de ondas de corte polarizadas horizontalmente o *SH*. En estas condiciones, la ecuación reducida de onda, que gobierna el movimiento armónico en medios elástico-lineales, homogéneos e isotropos, en coordenadas centradas *s-r*, se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + k^2 u = 0 \quad (IV.1)$$

Si se acepta que la dirección preferencial de propagación coincide con el eje *s*, el campo antiplano de desplazamiento,  $u(s, r, \omega)$ , se expresará como:

$$u(s, r, \omega) = f(s, r, \omega) e^{-i(\omega t - ks)} \quad (IV.2)$$

Por otra parte, aceptando que la variación de *f* con respecto a *s* es suave; es decir, que la segunda derivada de *f* con respecto a *s* es despreciable, entonces las ecs IV.1 y IV.2 conducen a la expresión

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2ik \frac{\partial f}{\partial s} = 0 \quad (\text{IV.3})$$

Esta ecuación parabólica se puede resolver en términos de polinomios de Hermite (Nowack y Aki, 1984). La solución más simple, correspondiente al polinomio de orden cero, se denominará aquí haz gaussiano básico y se representa por:

$$u_c = \frac{C}{[1+i(s/s_c)]^{1/2}} \exp \left\{ iks - \frac{r^2}{L_M^2 [1+i(s/s_c)]} \right\} e^{-i\omega t} \quad \text{IV.4}$$

donde  $s_c = 1/2 kL_M^2$  es la distancia crítica,  $L_M$  es el semiancho inicial del haz en  $s=0$ ; y  $C$  es una constante. En la fig 4.1 se muestran la variación del haz gaussiano en amplitud y ancho para distintos valores de  $s/s_c$ . Estas definiciones se basan en la nomenclatura utilizada por Červený (Červený, 1985; Nowack y Aki, 1984). Puede decirse que para  $s < s_c$  la propagación corresponde a la de una onda plana; para  $s > s_c$  se tiene propagación cilíndrica aproximadamente. Es claro que es en la primera región en la que las hipótesis se cumplen más fielmente. De hecho, la extensión de esta zona crece con la frecuencia. El nombre se debe al hecho de que la amplitud del haz decrece exponencialmente con el cuadrado de la distancia desde el centro del rayo, generando la forma de la distribución de Gauss. La superposición de estos haces permite representar una onda plana de manera exacta (e.g. Rodríguez-Zúñiga *et al.*, 1989). Sin embargo, como en las aplicaciones se usa un número finito de términos, a grandes distancias (relativas a  $s_c$ ) el esparcimiento de los haces ya no reproduce una representación confiable de la onda plana.

En la formulación que aquí se presenta se parte de la representación exacta de una onda plana en términos de la suma de haces gaussianos. Se acepta que ésta es válida para representar las ondas emitidas por refracción dentro de un depósito y una inclusión. La condición inicial es entonces la dada por la onda incidente y el respectivo coeficiente de transmisión, calculado este último bajo la hipótesis de onda plana localmente.

Cualquier función  $F(r)$  se puede escribir como:

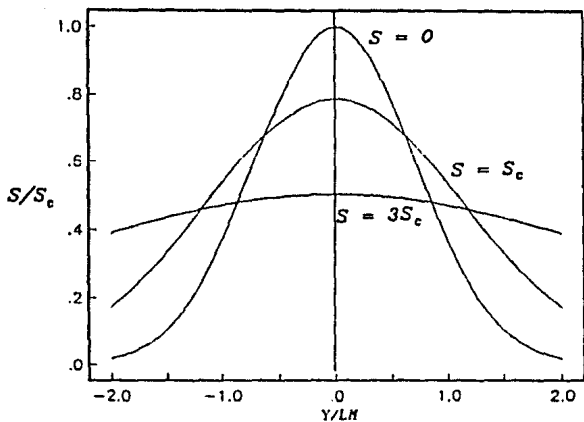


Fig 4.1 Amplitud de un haz gaussiano básico para distintas distancias  $S/S_c$



$$F(r) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \delta(r-\xi) d\xi \quad (IV.5)$$

donde  $\delta(\ )$  = delta de Dirac que puede representarse mediante

$$\delta(r-\xi) = \lim_{L_H \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi} L_H} e^{-[(r-\xi)/L_H]^2} \quad (IV.6)$$

Nótese que la ec IV.4, evaluada en  $s=0$  y con  $C=1/(\sqrt{\pi}L_H)$  coincide precisamente con la distribución gaussiana mostrada en la ec IV.6. Es posible, considerando ambas expresiones, obtener una expresión aproximada del campo de desplazamiento  $u$ , a partir de sus valores *iniciales* en la línea  $s = 0$  mediante

$$u(s,r,\omega) = \Delta\xi \sum_{j=-\infty}^{\infty} u(0, j\Delta\xi, \omega) g(s, r-j\Delta\xi, \omega) \quad (IV.7)$$

donde se ha discretizado la integral,  $g(s,r,\omega)=u_c$  y  $C=1/(\sqrt{\pi}L_H)$ . De hecho, esta expresión es la discretización de la representación *exacta* para una onda plana que se propaga en la dirección  $s$ . Aun si la propagación no ocurre en esta dirección la aproximación es excelente.

A partir de la ec IV.7 es posible obtener una expresión aproximada de los desplazamientos *emitidos* dentro del depósito por la incidencia desde el semiespacio. Por supuesto, en tal expresión los haces deben afectarse por los correspondientes coeficientes de transmisión y reflexión. Con base en esto, se escribe

$$u(x,z,\omega) = \sum_{j=1}^{NR} \Delta\xi u_j \sum_{l=1}^{REF+1} \left[ \prod_{k=1}^l A_k \right] g(s,r,\omega) \quad (IV.8)$$

donde NR = número de rayos, REF = número de reflexiones (para cada rayo),  $A_1$  es el coeficiente de transmisión,  $A_k$  ( $k=2,3,4,\dots$ ) son los coeficientes de reflexión y  $u_j$  es la fase en el punto de contacto de cada uno de los rayos incidentes con la frontera del depósito. En la ec IV.8 implícitamente se acepta que las coordenadas  $s,r$  son funciones diferentes de  $x,z$  para cada segmento del haz.

Con el objeto de ilustrar los alcances y limitaciones del método

anteriormente descrito, se presentan una serie de aplicaciones para estimar la respuesta sísmica de distintos modelos de depósitos o valles aluviales e inclusiones bidimensionales. Algunos modelos estudiados han sido ya reportados en la literatura, sus respectivos resultados se usan para calibrar los aquí obtenidos.

Un depósito que ha recibido una amplia atención en la literatura especializada corresponde a un estrato de espesor variable en forma cosenoidal. El ancho es de 50 km con profundidades mínima y máxima de 1 y 6 km respectivamente, como se muestra en la fig 4.2. La respuesta sísmica de este depósito se ha obtenido con diversos métodos: el del número de onda discreto, el de óptica geométrica, el de elementos finitos y el de haces gaussianos.

En la fig 4.2 se muestran los cálculos para un Ricker con parámetros  $t_a = 20$  seg y  $t_p = 17.14$  seg. Los sismogramas calculados por Nowack y Aki (1984) se identifican por GB y los generados en este trabajo por HG. Puede apreciarse que los resultados de los distintos métodos son muy similares.

Otro depósito de interés es aquel con profundidad variable como el mostrado en la fig 4.3, el cual tiene una longitud de 10 km y una profundidad de 1 Km hacia las orillas y 0.5 Km en la parte central, los correspondientes sismogramas sintéticos en la superficie del depósito se muestran en la misma fig para la excitación de un pulso de Ricker con  $t_a = 5$  seg y  $t_p = 1$  seg, y para incidencias de  $0^\circ$  y  $30^\circ$ . En estas gráficas se puede observar el efecto causado por los cambios laterales de profundidad como son la generación y propagación local de modos fundamentales de ondas superficiales, así como su interacción constructiva y destructiva con aquellas generadas por los bordes del depósito y con las reflexiones unidimensionales.

Cuando un depósito como el de la fig 4.3 presenta un cambio lineal en su espesor como se muestra en la fig 4.4, es posible observar en los resultados sintéticos, calculados para incidencias de  $0^\circ$  y  $30^\circ$  y un pulso con los mismos parámetros del usado en la fig 4.3, un comportamiento predominantemente de cuña, dado por la concentración hacia uno de los vértices de la energía propagada en forma de ondas superficiales. Pueden

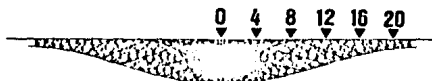
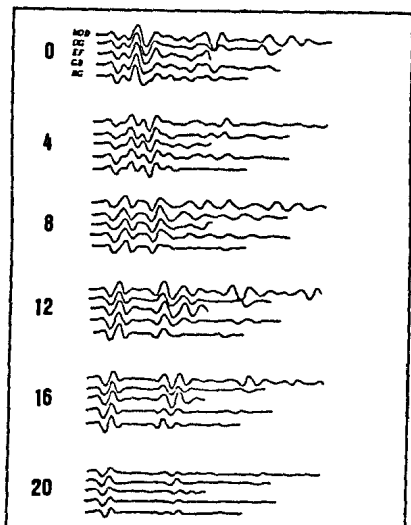


Fig 4.2 Sismogramas sintéticos calculados con diferentes métodos  
 NOD - Número de Onda Discreto; OG - Óptica Geométrica  
 GB - Haces Gaussianos y HG Haces Gaussianos obtenidos  
 en este trabajo.

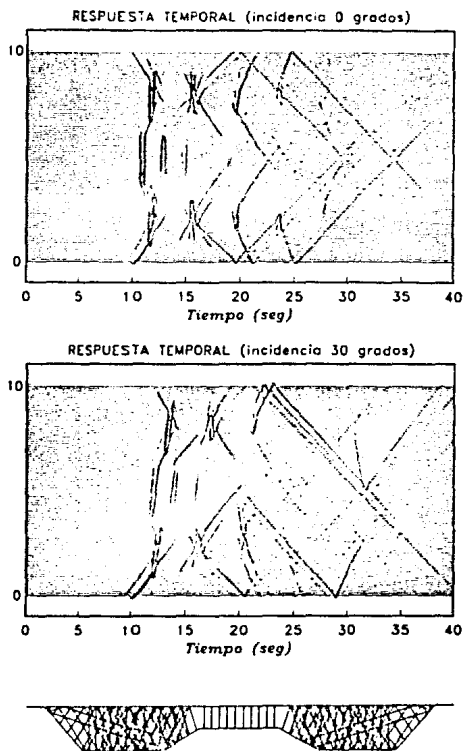


Fig 4.3 Sismogramas sintéticos para incidencias de 0 y 30 grados en el depósito trapecial con profundidad variable mostrado.

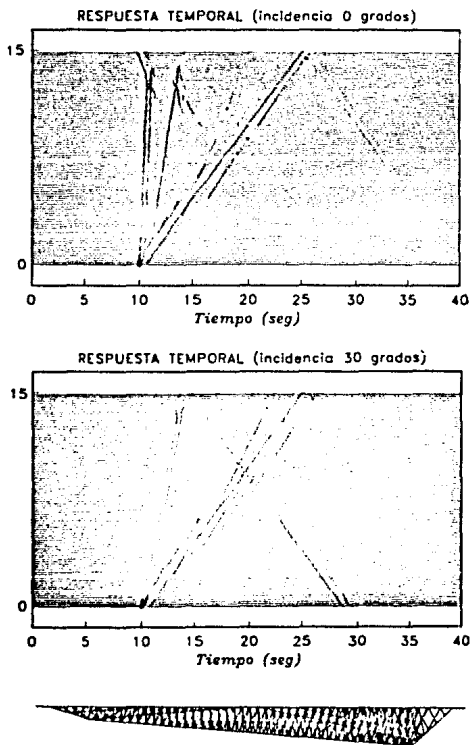


Fig 4.4 Sismogramas sintéticos para incidencia de 0 y 30 grados para el depósito de profundidad variable mostrado.

también distinguirse las pendientes variables de las reflexiones unidimensionales en la superficie libre y la base del depósito. En las posiciones cercanas al vértice más bajo del depósito, puede apreciarse, aunque muy débil, la difracción allí generada, lo que conduce a establecer que no obstante el carácter de alta frecuencia de la técnica, permite representar la difracción de manera aproximada en algunos casos.

La fig 4.5 muestra los resultados sintéticos correspondientes a la sección transversal de dos inclusiones bidimensionales regulares muy sencillas, cilíndrica circular y rectangular. Los parámetros para el pulso de Ricker empleado son  $t_s=3$  seg,  $t_p=1$  seg. Los correspondientes diagramas de rayos muestran el campo de ondas planas  $SH$  incidente, descompuesto en 60 rayos y considerando 3 reflexiones de cada uno en el interior de las inclusiones. Las propiedades de los medios son  $\beta_r=150$ ,  $\beta_t=400$  m/seg,  $\rho_r=1.0$  y  $\rho_t=2.0$  Ton/m<sup>3</sup>. La longitud de los perfiles mostrados es de 800 m.

En ambos grupos de sintéticos se observa la forma de la onda refractada al interior de la inclusión, la cual concuerda correctamente con la forma cóncava o plana de la interfaz, esta concordancia permanece en las siguientes reflexiones de la energía atrapada en el interior.

La extensión del método de rayos y haces gaussianos para los casos de incidencia vectorial e inclusiones irregulares requiere un manejo cuidadoso de las incidencias y reflexiones de ondas sísmicas con ángulos críticos y supercríticos. Por otro lado, las zonas de sombra geométrica pueden ser tratadas simulando la difracción mediante nuevas emisiones de haces, con sus correspondientes coeficientes y fases. Lo anterior implica sin embargo, el conocimiento a priori de estas zonas de sombra y de la ocurrencia de incidencias con ángulos iguales y mayores que los ángulos críticos.

Otro tipo de resultados obtenidos con esta aproximación son los diagramas en el dominio de la Frecuencia - Número de onda ( $F-K$ ). Se obtienen aplicando la transformada rápida de Fourier en el dominio del tiempo para pasar al de la frecuencia y posteriormente en el del espacio para pasar al del número de onda, sobre la respuesta sísmica calculada con el método de haces gaussianos en cada uno de las estaciones conside-

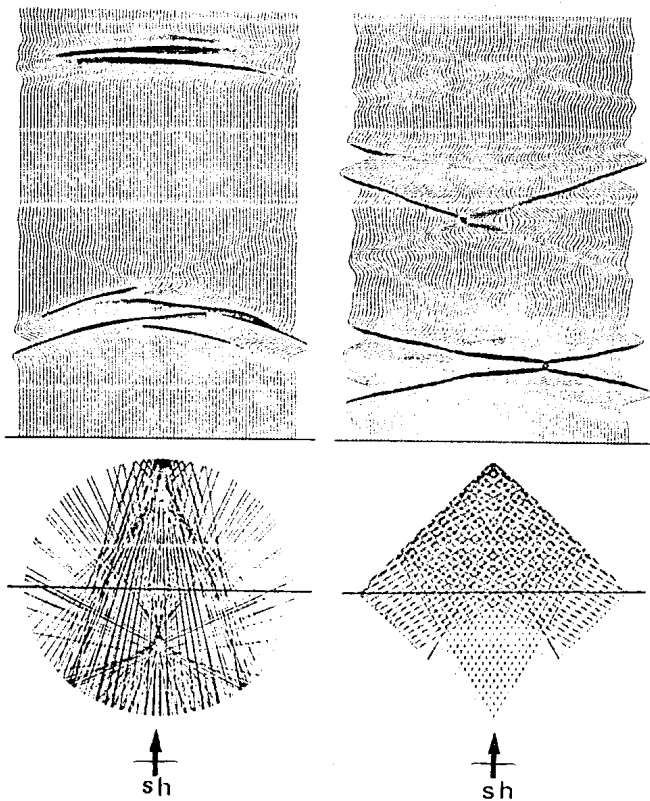


Fig 4.5 Diagramas de rayos (60 rayos y 3 reflexiones) y sismogramas sintéticos para las secciones transversales de las inclusiones bidimensionales mostradas.

radas. La información que de estos diagramas se puede obtener es la identificación de la velocidad de fase y las características modales de la propagación.

El modelo usado para la presentación de estos resultados es el propuesto por Kawase y Aki, (1989) que consiste de un depósito trapecial de 10 km de longitud por 1 km de profundidad y ángulos de talud de  $26.6^\circ$  las propiedades empleadas fueron  $\beta=1000$  m/s,  $\beta_r=2500$  m/s y  $\rho = \rho_r$ .

En la fig 4.6 se muestran los diagrama *F-K*, como curvas de nivel y superficie tridimensional, para incidencia vertical de ondas *SH* en la base del depósito. El rango de frecuencia calculado es de 0 a 3.5 Hz. y el número de onda máximo es 3.5 Ciclos/Km. Es posible identificar la respuesta unidimensional dada por los contornos de máxima amplitud localizados hacia el centro del diagrama. Los valores de velocidad de fase obtenido al analizar las ramas laterales representan el modo fundamental y el primer modo superior de ondas de Love. Estos coinciden perfectamente con las curvas de dispersión de ondas de Love que, para este modelo, se calculan con el algoritmo propuesto por Schwab y Knopoff (1972) y se muestran en los mismos dominios y a la misma escala en la fig 4.7.

Para el caso de incidencias a 30 y 60 grados, figs 4.8 y 4.9, respectivamente, los diagramas *F-K* permiten identificar el modo fundamental y hasta 5 modos superiores de ondas de Love. La anterior aserción se verifica al superponer las curvas de dispersión de la fig 4.7 en los diagramas bidimensionales.

Los resultados anteriores muestran la importancia del ángulo de incidencia en la conversión de ondas de cuerpo a modos superiores de propagación de ondas superficiales, (Ramos-Martínez y Sánchez-Sesma, 1991). Sin embargo, el resultado más relevante de este análisis, es la verificación de que con una teoría simple de rayos y haces gaussianos, basada en fuertes hipótesis, es posible representar la física del fenómeno de propagación de ondas sísmicas incluyendo además las principales características de las contribuciones de los modos fundamental y superiores de las ondas superficiales.



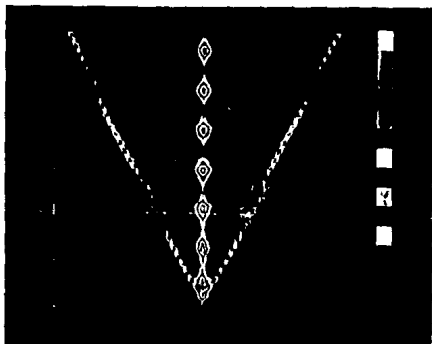


DIAGRAMA EN EL DOMINIO FRECUENCIA-NÚMERO DE ONDA

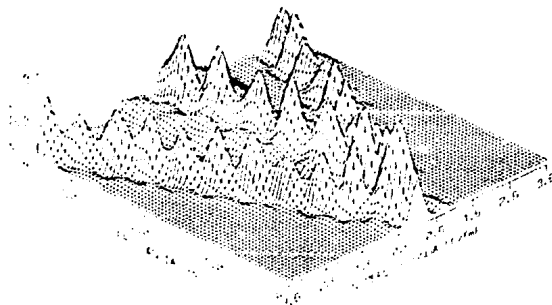
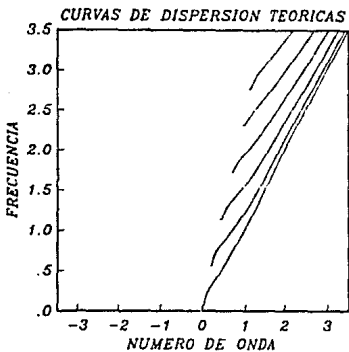


Fig 4.6 Diagramas en el dominio frecuencia-número de onda ( $F-K$ ) para la incidencia vertical de ondas SH en un depósito trapecial. arriba curvas de nivel; abajo diagrama tridimensional.



**Fig 4.7** Curvas de dispersión teóricas para el modo fundamental y varios modos superiores de ondas de Love (Schwab y Knopoff, 1972) Para el mismo modelo con que se calcularon los diagramas F-K.

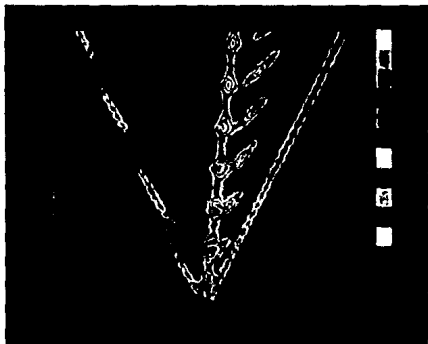


DIAGRAMA F-K VALLE TRAPEZIAL 30 GRADOS

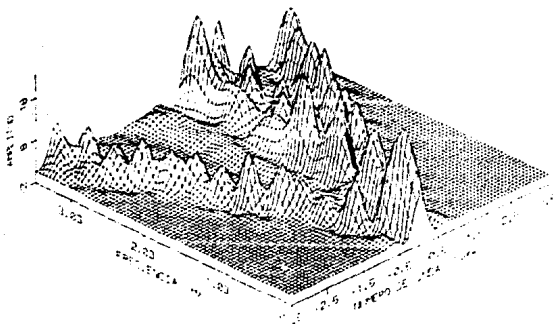


Fig 4.8 Diagramas F-K para el mismo modelo de la fig 4.6 y para incidencia de ondas SH a 30 grados.



FIG. 4.9. F-K DIAGRAM FOR  $\theta = 60^\circ$

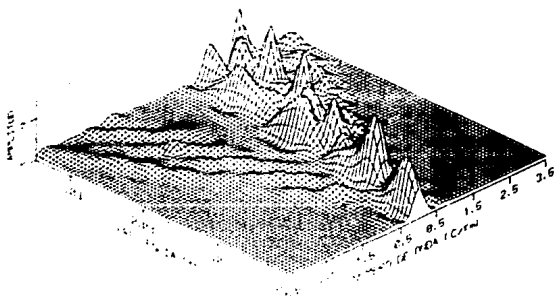


Fig 4.9 Diagramas F-K para el mismo modelo de la fig 4.6 y para incidencia de ondas SH a 60 grados.

## METODO PSEUDOESPECTRAL

Este método fue introducido a principios de los años 70's (Kreiss y Oligen, 1972; Orzag, 1972; Foriberg, 1975). Desde entonces ha sido ampliamente utilizado en estudios de predicción de metereológica. Solo diez años después es aplicado a la propagación de ondas sísmicas (Kosloff y Baysal, 1982).

El método forma parte de los llamados métodos directos como los de diferencias finitas o elementos finitos y se basa en la ecuación de propagación, la que se aproxima en todos los medios. Para la ecuación de propagación de ondas sísmicas la idea del método es efectuar la derivación temporal por un método de diferencias finitas y la derivación espacial por un método de Fourier.

Debe entonces operarse sobre una discretización en el tiempo y el espacio; el medio se representa por una malla de dimensiones finitas de resolución  $\Delta x$ , el tiempo se divide en intervalos  $\Delta t$ . Estos parámetros no son independientes y deben ser cuidadosamente escogidos para evitar efectos de dispersión numérica.

La derivación en el dominio delo tiempo se efectua con un esquema tradicional de diferencias finitas, para el cual con una aproximación de segundo orden podemos escribir

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \approx \frac{U^{t+1} - 2U + U^{t-1}}{2 \Delta t^2} \quad (\text{IV.9})$$

donde  $U^{t+1}$  es el valor calculado de la función  $U$  al tiempo  $t+1$  y  $\Delta t$  es el intervalo de tiempo empleado en la discretización.

Para la obtención de las derivadas en el dominio espacial, se hace uso de la transformada de Fourier directa e inversa, lo que conduce del dominio espacial( $x$ ) al dominio del número de onda( $k$ ) y viceversa.

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{+ikx} dk$$

La importante propiedad de la transformada de Fourier que implica a la transformada directa de la derivada enésima de una función ( $f^n(x)$ ), es de fundamental importancia en este contexto:  $TDF [f^n(x)] = (ik)^n F(k)$ . Así para efectuar la segunda derivada de una función  $f$ ,  $\partial^2 f / \partial x^2$  obtenemos primero la  $TDF$  de la función  $f(x)$  y al resultado en el dominio del número de onda  $F(k)$  se multiplica por  $(ik)^2$ , posteriormente al nuevo resultado se le aplica transformada inversa,  $TDFI [-k^2 F(k)]$ , para así obtener de regreso al dominio espacial la segunda derivada de la función,

$$f(x) \xrightarrow{TDF} F(k) \xrightarrow{(ik)^2} (-k^2) F(k) \xrightarrow{TDFI} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (IV.11)$$

En la realidad esta derivación espacial posee algunos problemas ligados con la discretización de la señal. Con el uso de un marco adecuado de discretización y con el poder de cómputo suficiente este método puede aplicarse de manera satisfactoria en el modelado de la propagación de ondas sísmicas.

La implantación de este método la llevaron a cabo Francisco J. Sánchez-Sesma y Raúl Madariaga (comunicación personal), obtuvieron resultados para la propagación de una onda producida por una fuente puntual. El problema es esencialmente el mismo que se planteó en el capítulo 3 de soluciones analíticas, fig 3.1b. En la fig 4.10 se presentan los resultados obtenidos con este método para las secciones transversal y longitudinal de una inclusión con los mismos parámetros usados para los resultados obtenidos con la solución analítica, estos últimos se muestran en las fig 3.5 y 3.6 de capítulo 3.

El procedimiento en ambos métodos es muy distinto, sin embargo la comparación es excelente, lo que permite establecer el alto grado de confiabilidad en los métodos estudiados.

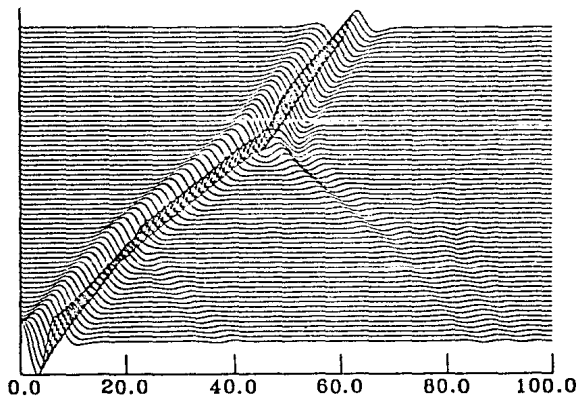
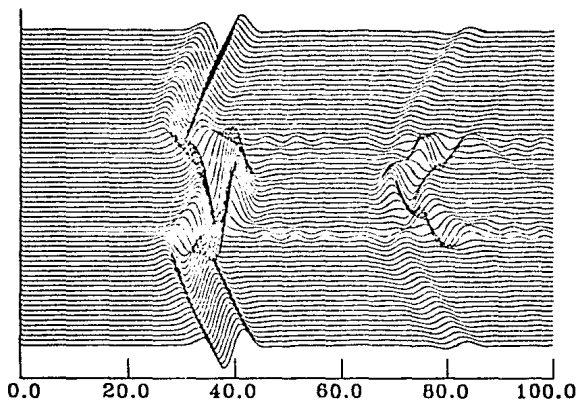


Fig 4.10 Sismogramas sintéticos calculados con el método pseudo - espectral para las secciones transversal y longitudinal de la fig 3.1b y para una fuente puntual  $F$  situada a una distancia  $L$  del centro de la sección.

## METODO DE ECUACIONES INTEGRALES DE FRONTERA (BIEN)

Dentro de las técnicas de frontera reportadas en la literatura, se encuentra el método de las Ecuaciones Integrales. La aplicabilidad de este método radica en el conocimiento de la función de Green o solución fundamental para las ecuaciones diferenciales que rigen el fenómeno. Esta solución es empleada para formular el problema de valores en la frontera como un sistema de ecuaciones integrales.

La representación de las ondas difractadas puede hacerse empleando ecuaciones integrales de frontera de capa simple. La diferencia con otros métodos similares, (e.g. Sánchez-Sesma y Esquivel, 1979; Bravo *et al.*, 1988), radica en que las fuentes se localizan sobre las fronteras de dominio del problema. De la discretización de dicha frontera se genera un sistema lineal de ecuaciones que se resuelve directamente. Así, la incertidumbre acerca de la localización de las fuentes deja de ser un problema. Este enfoque fue motivado por la combinación de las formulaciones integrales de frontera y el método del número de onda discreto (e.g. Bouchon, 1985; Kawase, 1988, Kawase y Aki, 1989). Tal combinación es especialmente atractiva ya que las singularidades de las funciones de Green no se presentan en cada uno de los términos de la expansión del número de onda discreto. Sin embargo, se requiere de grandes recursos de cómputo.

En este procedimiento alternativo se considera que, cuando las funciones de Green son explícitas, las singularidades son integrables (e.g. Brebbia, 1978; Banerjee y Butterfield, 1981). El campo difractado se representa con la superposición de la irradiación proveniente de las fuentes en la frontera empleando las expresiones exactas de las funciones de Green en dos dimensiones para un medio elástico sin fronteras. Dicha superposición coincide precisamente con la interpretación física del principio de Huygens.

Considérese un dominio  $V$  con su frontera  $S$ , el campo de desplazamientos, bajo excitación armónica, puede escribirse en términos del teorema de representación de Somigliana para un problema interior, (e.g. Aki y Richards, 1980), como:



$$\begin{aligned}
 cu_m(\xi) = & \int_S [G_{im}(x, \xi)t_i(x) - T_{im}(x, \xi)u_i(x)] dS_x + \\
 & + \int_V f_i(y)G_{im}(y, \xi)dV_y
 \end{aligned} \tag{IV.12}$$

donde  $u_m$  es el  $m$ -ésimo componente de desplazamiento,  $t_i$  es el  $i$ -ésimo componente de la tracción en la frontera,  $G_{im}(x, \xi)$  es la función de Green que indica el desplazamiento en la dirección  $i$  en el punto  $x$  debido a la aplicación de una carga unitaria en la dirección  $m$  en el punto  $\xi$ .  $T_{im}(x, \xi)$  es la tracción de la función de Green, ésto es, la tracción en la dirección  $i$  en el punto  $x$  sobre la frontera con normal  $n$ , debida a la aplicación de una carga unitaria en la dirección  $m$  aplicada en  $\xi$ , y  $f_i$  son los componentes de la distribución de fuerzas de cuerpo. La constante  $c$  será 1 si el punto  $\xi$  está dentro de  $V$ , 0 si está fuera y  $1/2$  si  $\xi$  se encuentra en una frontera suave. Los subíndices en las diferenciales indican sobre que variable espacial se efectúa la integración. En las ecuaciones se emplea notación indicial.

Si suponemos ahora que  $u'_i(x)$  es solución del problema exterior con tracciones en la frontera  $t'_i(x)$ , suponiendo también que el material que ocupa la región exterior es el mismo, entonces ambas regiones compartirán la misma función de Green, despreciando las fuerzas de cuerpo se tiene

$$c'u'_m(\xi) = - \int [G_{im}(x, \xi)t'_i(x) - T_{im}(x, \xi)u'_i(x)] dS_x \tag{IV.13}$$

Considerando las ecs. V.12 y V.13, imponiendo la condición de frontera  $u_i = u'_i$ , haciendo  $t_i - t'_i = \phi_i$ , y observando que  $G_{im}(x, \xi) = G_{mi}(\xi, x) = G_{im}(\xi, x)$ , es posible escribir. (Sánchez- Sesma y Campillo, 1991):

$$u_i(x) = \int_S \phi_j(\xi)G_{ij}(x, \xi)dS_\xi + \int_V f_j(\xi)G_{ij}(x, \xi)dV_\xi \tag{IV.14}$$

donde  $\phi_j dS$  es la distribución de fuerzas en la frontera. Esta represen-

tación integral de capa simple ha sido estudiada por Kupradze (1963). El demostró que si  $\phi_j(\xi)$  es continuo a lo largo de  $S$ , entonces el campo de desplazamientos será continuo a través de  $S$ .

La representación integral presentada permite el cálculo de esfuerzos y tracciones con la aplicación directa de la Ley de Hooke. Sin embargo, cuando  $\mathbf{x}=\xi$  sobre la frontera, se puede llegar a escribir que para  $\mathbf{x}$  en  $S$

$$t_1(\mathbf{x}) = k \phi_1(\xi) + \int_S \phi_j(\xi) T_{1j}(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi + \int_V f_j(\xi) T_{1j}(\mathbf{x}, \xi) dV_\xi \quad (IV.15)$$

el coeficiente  $k$  será  $1/2$ , si  $\mathbf{x}$  tiende a  $S$  desde adentro;  $0$ , si  $\mathbf{x}$  está fuera de  $S$ ; ó  $-1/2$ , si  $\mathbf{x}$  tiende a  $S$  desde afuera. Las ecs IV.14 y IV.15 permiten la interpretación de todas las cantidades físicas involucradas.

Con base en la teoría anterior, es posible estudiar la difracción de ondas elásticas en un espacio  $E$  con una inclusión elástica  $R$ , como se muestra en la fig 4.11. La frontera que delimita la inclusión es llamada  $S$ ,  $\mathbf{n}$  es la normal a dicha frontera en cualquier punto.  $FI$  representa una fuente puntual contenida en la inclusión  $R$ .

El movimiento en esta configuración irregular es producido por las interferencias de las ondas incidentes con las reflejadas, refractadas y difractadas, mas la contribución de la fuente interna  $FI$ , mientras que el movimiento total en el espacio  $E$  es la superposición de las ondas difractadas y el campo incidente.

$$u_1^E(\mathbf{x}) = u_1^i(\mathbf{x}) + u_1^r(\mathbf{x}) \quad (IV.16)$$

$$u_1^R(\mathbf{x}) = u_1^r(\mathbf{x}) + u_1^{FI}(\mathbf{x}) \quad (IV.17)$$

$u_1^i(\mathbf{x})$  es el campo de onda incidente, en ausencia de irregularidad. De acuerdo con la discusión previa podemos escribir, con los superíndices adecuados, las expresiones para los campos de desplazamientos en  $R$  y  $E$  y para las correspondientes tracciones como:

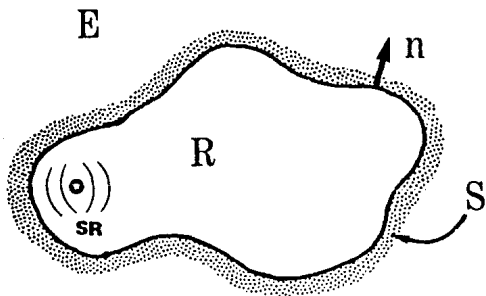


Fig 4.11 Espacio elástico  $E$  con una inclusión también elástica  $R$  y frontera  $S$ . La normal en cualquier punto de  $S$  es  $\eta$ .

$$u_1^E(x) = u_1^I(x) + \int_S \phi_j^E(\xi) G_{1j}^E(x, \xi) dS_\xi \quad x \in E \cup S \quad (IV.18)$$

$$u_1^R(x) = u_1^{F1}(x) + \int_S \phi_j^R(\xi) G_{1j}^R(x, \xi) dS_\xi \quad x \in R \cup S \quad (IV.19)$$

$$t_1^E(x) = t_1^I(x) - 0.5\phi_1^E(\xi) + \int_S \phi_j^E(\xi) T_{1j}^E(x, \xi) dS_\xi \quad (IV.20)$$

$$t_1^R(x) = t_1^{F1}(x) + 0.5\phi_1^R(\xi) + \int_S \phi_j^R(\xi) T_{1j}^R(x, \xi) dS_\xi \quad (IV.21)$$

Aplicando las condiciones de continuidad de desplazamientos y tracciones en la frontera del sistema se tiene:

$$u_1^E = u_1^R \quad y \quad t_1^E = t_1^R \quad (IV.22)$$

Las ecs IV.22, tomando en cuenta las expresiones IV.18, IV.19, IV.20 y IV.21 constituyen un sistema de ecuaciones integrales para las fuentes en la frontera, es decir aquellas que producen los campos difractado y refractado. Las ecuaciones resultantes se discretizan a lo largo de la frontera del sistema de acuerdo con la definición de cada integral.

Con el objeto de lograr una mejor visualización de la técnica se presenta, a manera de ilustración, las versiones discretizadas de las ecs IV.14 y IV.15 sin considerar fuerzas de cuerpo. Al discretizar a lo largo de la frontera S se obtendrán 2N ecuaciones de la forma:

$$u_1(x_n) = \sum_{i=1}^N \phi_j(\xi_i) g_{1j}(x_n, \xi_i) \quad n = 1, N \quad (IV.23)$$

$$t_1(x_n) = \sum_{i=1}^N \phi_j(\xi_i) t_{1j}(x_n, \xi_i) \quad n = 1, N \quad (IV.24)$$

donde,

$$g_{ij}(x_n, \xi_1) = \int_{\xi_1 - \Delta S/2}^{\xi_1 + \Delta S/2} G_{ij}(x_n, \xi) dS_\xi \quad (IV.25)$$

$$t_{ij}(x_n, \xi_1) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{n1} + \int_{\xi - \Delta S/2}^{\xi + \Delta S/2} T_{ij}(x_n, \xi) dS_\xi \quad (IV.26)$$

cuando  $n = 1$ , la expresión para las tracciones se reduce a:

$$t_{ij}(x_n, \xi_n) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (IV.27)$$

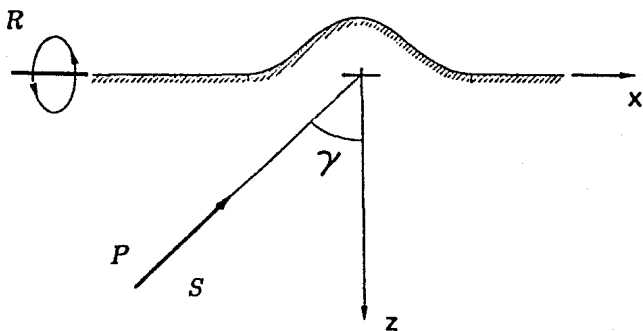
debido a que el integrando de la ec 9 es una función singular impar en el intervalo y su valor principal de Cauchy es cero.

El cálculo de las integrales se hace numéricamente, empleando integración Gaussiana, excepto en el caso en que  $x$  se encuentra en la vecindad de  $\xi_1$  para la cual se obtienen expresiones analíticas a partir de series ascendentes de funciones de Bessel, (Abramowitz y Stegun, 1972).

El método anteriormente descrito ha sido aplicado con resultados satisfactorios para el estudio de la difracción de ondas de cuerpo y superficiales por topografías (Sánchez-Sesma y Campillo, 1991); para la respuesta sísmica de valles aluviales (Ramos-Martínez y Sánchez-Sesma, 1991) y para la respuesta sísmica de presas considerando la interacción hidrodinámica (Álvarez y Sánchez-Sesma 1991).

Se consideran aquí los resultados obtenidos mediante la aplicación de este método para un semiespacio con superficie libre irregular, es decir, una topografía de promontorio o una depresión. En la fig 4.12 se ilustra un semiespacio irregular y la incidencia de ondas planas del tipo  $P$ ,  $S$  y de Rayleigh.

La fig 4.13a muestra el rasgo topográfico estudiado de semiancho  $a$  y altura  $h=1.5a$ . Para incidencia de una onda plana  $SV$  a 30 grados en la



**Fig 4.12** Semiespacio irregular ante la incidencia de ondas planas del tipo  $P$ ,  $S$  y de *Rayleigh*.

fig 4.13b se grafican los perfiles de frecuencia para las posiciones de  $-2a$  a  $2a$  a una frecuencia determinada  $f_p$ ; la línea continua indica la componente horizontal y la discontinua la componente vertical. Es posible notar la distribución de la energía con las amplitudes máximas que para esa frecuencia se observan. La máxima amplificación que se observa para la componente horizontal no es mayor de 4 veces la amplitud de la onda incidente. Las fig 4.13c y 4.13d muestran sismogramas sintéticos para 120 detectores equiespaciados sobre las mismas posiciones de los perfiles de frecuencia en las componentes horizontal y vertical respectivamente. El periodo característico del pulso de Ricker utilizado coincide también con la frecuencia usada para el perfil (fig 4.13b). El movimiento total en esta configuración esta formado por la interferencia del campo libre con las ondas difractadas por la irregularidad.

Los resultados para una depresión de ancho  $a$  y profundidad  $h=2a$ , ante la incidencia de un frente plano de ondas  $P$ , se muestran en la fig 4.14. Nuevamente 4.14a indica la geometría, 4.14b el perfil de frecuencia para una frecuencia  $f_p$ ; 4.14c y 4.14d muestran los correspondientes sismogramas sintéticos en las direcciones horizontal y vertical respectivamente. En la componente horizontal pueden distinguirse ondas  $P$  reflejadas y difracción de ondas superficiales de *Rayleigh* hacia ambos lados de la irregularidad. El primer arribo cercano a la parte plana de la depresión muestra un retraso y una disminución en la amplitud, lo que indica una zona de sombra y por lo tanto difracción.

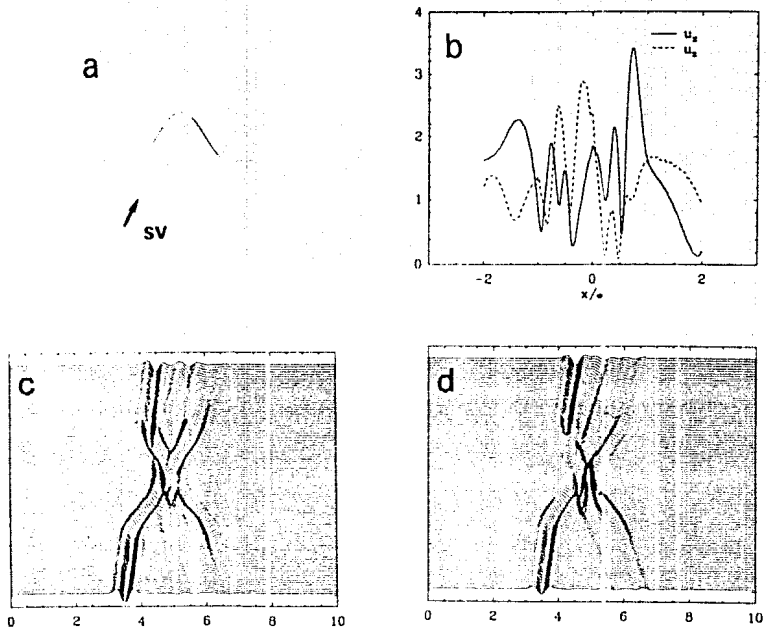


Fig 4.13 a) perfil topográfico de senaicho  $a$  y altura  $h=1.5a$  ante incidencia de ondas SV a 30 grados. b) perfiles de frecuencia para una frecuencia  $f_p$  en las direcciones horizontal  $U_x$  y vertical  $U_z$ . c) y d) muestran los sismogramas sintéticos para las mismas direcciones respectivamente.



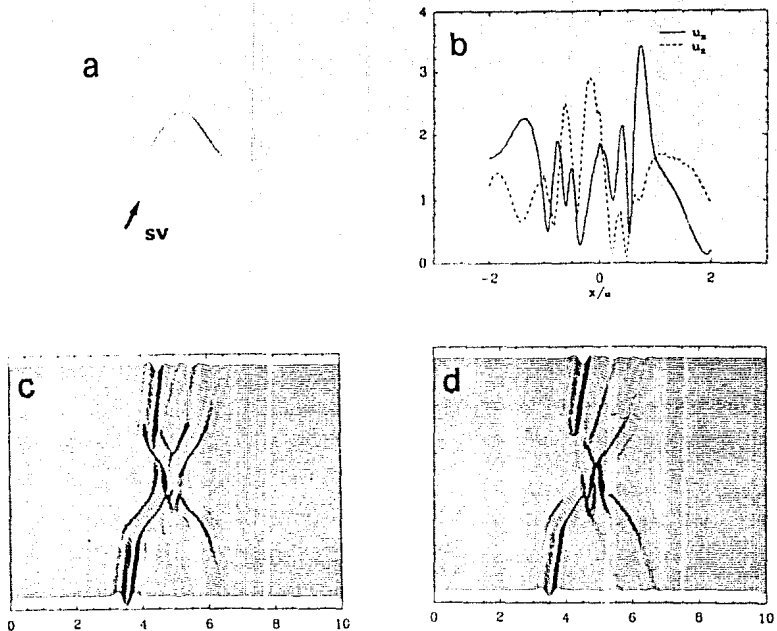


Fig 4.13 a) perfil topográfico de serlancho  $a$  y altura  $h=1.5a$  ante incidencia de ondas SV a 30 grados. b) perfiles de frecuencia para una frecuencia  $f_0$  en las direcciones horizontal  $u_x$  y vertical  $u_z$ . c) y d) muestran los sismogramas sintéticos para las mismas direcciones respectivamente.

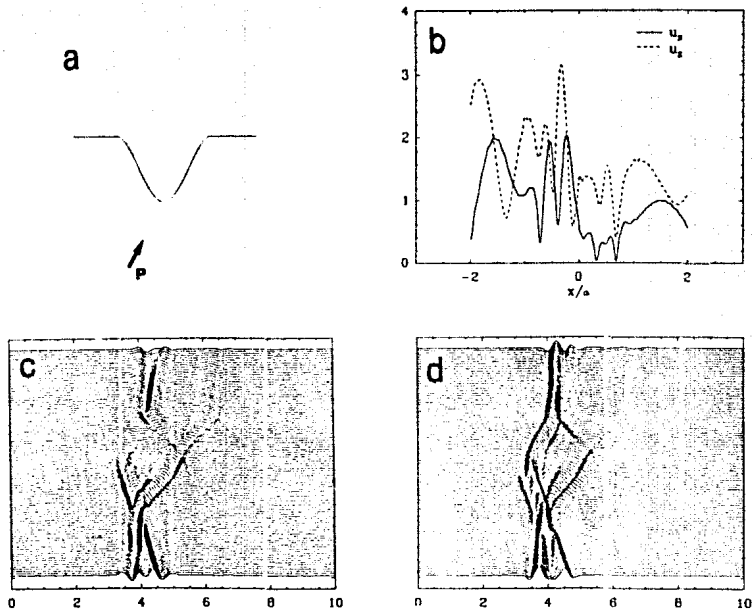


Fig 4.14 a) depresión topográfica de semiancho  $a$  y profundidad  $h=2a$  ante incidencia de ondas  $P$  a 30 grados. b) perfiles de frecuencia para una frecuencia  $f_0$  en las direcciones horizontal  $U_x$  y vertical  $U_z$ . c) y d) muestran los sismogramas sintéticos para las mismas direcciones respectivamente.

## 5. MODELOS SIMPLIFICADOS

En este capítulo se hace uso de un modelo simplificado para simular aproximadamente las principales características de la respuesta sísmica de valles aluviales someros en 2 y 3 dimensiones. Esta solución se construye tomando como marco de referencia la solución exacta para la respuesta sísmica de un depósito rectangular con base rígida móvil. En esta solución la firma espectral de las ondas superficiales generadas localmente es explícita, lo que sugiere la construcción de expresiones aproximadas que consideren por un lado la respuesta unidimensional y por otro los efectos laterales en términos de ondas superficiales.

En la literatura se han reportado algunos cálculos rigurosos (Horike et al., 1990) y otros aproximados (Graves and Clayton, 1992) para depósitos elásticos y acústicos. Sin embargo las simulaciones realistas resultan muy difíciles, aun con el uso de supercomputadoras. Además el conocimiento de la estructura detallada de los rasgos geológicos es limitado debido a su enorme costo. Las principales descripciones geológicas permanecen esencialmente cualitativas, con grandes incertidumbres. Lo que nos permite aceptar algunas simplificaciones.

Consideremos un depósito rectangular elástico de ancho  $2a$  y profundidad  $h$  sobre una base rígida mostrado en la fig 5.1. Para un movimiento armónico antiplano de la base dado por  $v_0 \exp(i\omega t)$ , con  $v_0 = v_0(\omega)$ . El campo de desplazamientos en el estrato debe satisfacer la ecuación reducida de onda

$$\nabla^2 v + (\omega/\beta)^2 v = 0, \quad (V.1)$$

y satisfacer la condición de frontera de superficie libre

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (V.2)$$

Usando separación de variables y series de Fourier (capítulo 3) se puede escribir la solución del problema para  $z=0$  como

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{\cos \omega h/\beta} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_n^2} \frac{\cos knx}{\cos kna} \quad (V.3)$$

donde  $\omega_n = (2n+1)\omega_0$ ,  $\omega_0 = 2\pi\beta/4h$  y  $k_n^2 = (\omega^2 - \omega_n^2)/\beta^2$ . El factor de dependencia del tiempo ha sido omitido. En esta expresión identificamos el primer término como la respuesta 1D. La suma puede ser interpretada como la contribución de ondas superficiales. Cada término en la serie representa un modo normal. Sus factores de peso y firma espectral son explícitos; el primer término puede ser escrito como

$$\frac{1}{\cos \omega h/\beta} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (V.4)$$

Entonces de las ecuaciones V.3 y V.4 se tiene

$$\frac{v}{v_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \left[ \omega_n^2 - \omega^2 \frac{\cos k_n x}{\cos k_n a} \right] \quad (V.5)$$

Esta solución exacta tiene una estructura simple. En los extremos es claramente uno. Se observa que la respuesta pico de cada modo normal parte de los picos de la respuesta unidimensional. Dado un modo  $n$ ,  $\omega_n$  es una frecuencia de corte, y para frecuencias menores que  $\omega_n$  los términos coseno resultan hiperbólicos aportando contribuciones de decaimiento desde los extremos. Para frecuencias más grandes se muestra claramente la propagación lateral. Note que esos modos normales corresponden a los de un estrato sin limitación lateral y no concuerdan con la estructura modal escogida por Bard y Bouchon (1985) para estudiar el comportamiento resonante de valles aluviales. La solución aquí presentada no permite contar explícitamente con las frecuencias naturales del valle para valles profundos. Sin embargo proporciona la respuesta total sin importar la relación de aspecto, discutida en Bard y Bouchon (1985). Se ha supuesto excitación simétrica, sin embargo puede construirse una aproximación similar para casos más generales.

Un aspecto importante que conviene señalar es el hecho de que las formas de las interfaces en los extremos de valles aluviales planos tienen un efecto mínimo en la generación local de ondas superficiales (Rodríguez-Zúñiga y Sánchez-Sesma, 1991). Para atenuación realista  $Q \leq 50$  se encuentra que el modo fundamental es el más importante y es prácticamente independiente de la forma de la interfaz.

## APLICACIONES 2D.

Para usar la solución exacta V.5 como marco de referencia en la construcción del modelo bidimensional, deben asignarseles diferentes significados a algunas variables, basados únicamente en consideraciones heurísticas, estas asignaciones deben validarse mediante la comparación de los resultados con los de soluciones más rigurosas.

En lo siguiente se supondrá que (1) Las frecuencias son menores que dos veces la frecuencia de resonancia  $f_0$ ; (2) la incidencia es vertical, así se preserva la simetría de la solución exacta. La incidencia oblicua puede ser obtenida de manera similar; (3) el contraste de impedancias entre el estrato y la roca del basamento debe ser alto. La solución analítica se tiene para contraste infinito. Además, en este caso las formas modales del modo fundamental de ondas de Love y Rayleigh serán similares; (4) se suponen iguales las formas modales para las componentes horizontales; (5) el número de onda del modo fundamental que en la solución exacta puede ser imaginario para bajas frecuencias, se asumirá como real y dado por  $\omega/c$  con  $c=c_l$  para ondas de Love y  $c=c_r$  para ondas de Rayleigh. La firma espectral para las ondas superficiales que es explícita en la solución exacta, permanece sin cambio.

Para simular la respuesta 1D con pérdida de energía hacia la roca del basamento  $\omega_0^2$  será compleja y tendrá la forma  $\omega_0^2 (1 + i\eta(\omega))$  donde  $\eta(\omega)$  es un amortiguamiento equivalente. Considerando un factor de superficie libre de 2 se tiene una expresión aproximada para la respuesta del depósito en términos del modo fundamental

$$\frac{v}{v_0} = 2v_0 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \left[ \omega_0^2 - \omega^2 \frac{\cos \omega x/c}{\cos \omega d/c} \right] \quad (V.6)$$

Por razones obvias, el factor  $4/\pi$  ha sido omitido. Nótese que para  $x=0$  a el movimiento es  $2v_0$ , como es de esperarse. Usando una teoría de rayos simplificada en los extremos es posible simular la radiación de energía. Es suficiente sustituir en el denominador

$$\frac{\cos \omega x/c}{\cos \omega d/c} \text{ por } \frac{\cos \omega x/c}{\cos \omega d/c + i(\mu \eta \beta E / \mu \epsilon c) \operatorname{sen} \omega d/c} \quad (\text{V.7})$$

Una construcción similar de modos superiores para frecuencias más altas resulta en este momento muy difícil debido al poco conocimiento del comportamiento modal para frecuencias menores a las frecuencias de corte.

APLICACIONES 3D.

Para poder aplicar las ideas arriba mencionadas a depósitos tridimensionales se asume simetría axial. Esta suposición no es una restricción, obedece al hecho de que se cuenta con resultados rigurosos para ese tipo de geometrías. Si se prescribe el movimiento de la base en la dirección  $x$  para el modelo axisimétrico de la fig 5.2, el desplazamiento horizontal en términos de las funciones vectoriales ortogonales  $\bar{v}$  y  $\bar{s}$ , (Aki and Richards 1980)

$$u = \xi_1 \bar{v} + r_1 \bar{s} \quad (V.8)$$

donde,

$$\bar{v} = \frac{1}{kr} \frac{\partial Y^m}{\partial \phi} \bar{r} - \frac{1}{k} \frac{\partial Y^m}{\partial r} \bar{\phi} \quad (V.9)$$

$$\bar{s} = \frac{1}{k} \frac{\partial Y^m}{\partial r} \bar{r} + \frac{1}{kr} \frac{\partial Y^m}{\partial \phi} \bar{\phi} \quad (V.10)$$

$$Y^m = J_m(kr) \exp(im\phi) \quad (V.11)$$

Considerando la simetría del problema podemos escribir para las componentes radial y azimutal del campo de desplazamientos horizontal,

$$u_r^m = \left[ \xi_1 A \frac{J_1(k_L r)}{k_L r} + r_1 B J_1(kr) \right] \cos \phi \quad (1) \quad (V.12)$$

$$u_\phi^m = - \left[ \xi_1 A J_1'(k_L r) + r_1 B \frac{J_1'(kr)}{kr} \right] \sin \phi \quad (2) \quad (V.13)$$

para los componentes unidimensionales se tiene,

$$u_r^{1D} = u_x^{1D} \cos \phi \quad (V.14)$$

$$u_\phi^{1D} = -u_x^{1D} \sin \phi \quad (V.15)$$

En estas expresiones los coeficientes A y B se obtienen mediante la imposición de condiciones de frontera.  $V.12=1$  y  $V.13=1$  en  $r=a$ .  $k_L = \omega/c_L$  y  $kr = \omega/c_R$  corresponden a los números de onda para los modos fundamentales de ondas de Love y Rayleigh.  $\xi_1$  y  $r_1$  son los componentes del despla-

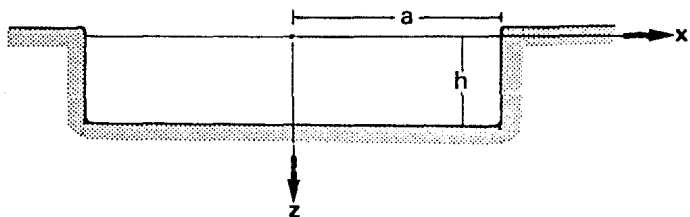


Fig 5.1 Depósito rectangular elástico de ancho  $2a$  y profundidad  $h$  sobre una base rígida con movimiento armónico antiplano.

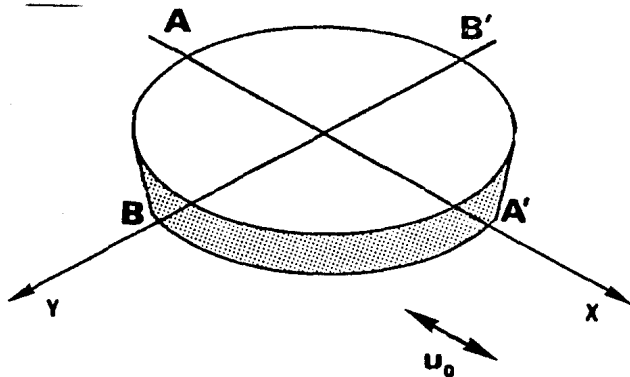


Fig 5.2 Depósito tridimensional axisimétrico con movimiento prescrito de la base en la dirección  $x$ . Perfiles  $A-A'$  y  $B-B'$  sobre la superficie libre.



miento horizontal del vector desplazamiento esfuerzo en la superficie para ondas de Love y de Rayleigh, respectivamente. Son cantidades unitarias, sin embargo se consideran en estas expresiones para dejar claro el significado físico de cada término.

La solución final para el desplazamiento horizontal en la superficie del depósito tridimensional considerando las expresiones anteriores, se escribe como,

$$u_r = u_0 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \left[ \omega_0^2 - \omega^2 \left( 1 \right) \right] \cos \phi \quad (V.16)$$

$$u_\phi = - u_0 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \left[ \omega_0^2 - \omega^2 \left( 2 \right) \right] \sin \phi \quad (V.17)$$

Para comparar los resultados aquí obtenidos con los de cálculos rigurosos, consideremos el modelo estudiado por Kawase (comunicación personal) con el método Integral de frontera de número de onda discreto (Kawase y Aki, 1989). Este modelo consiste de un estrato plano suave con basamento rectangular (con referencia a la fig 5.1  $h = 1\text{Km}$  y  $\alpha = 4\text{Km}$ ). Las velocidades de ondas de corte son de 1 y 2.5 Km/seg para el estrato y el basamento, respectivamente. Se usa una relación de Poisson de 1/3 y una densidad uniforme en todo el modelo.

En la fig 5.3 se muestran las curvas de dispersión para los modos fundamentales de ondas de Love y Rayleigh, calculadas para este modelo. En la fig 5.4 se ilustran los resultados de Kawase y los aquí obtenidos para incidencia vertical de ondas SH. La señal incidente es un pulso de Ricker con periodo característico de 4 seg, que corresponde también a la frecuencia fundamental del estrato. Es notable la gran similitud entre ambos grupos de sintéticos, no obstante existen algunas diferencias menores que, sin duda, están relacionadas con las aproximaciones empleadas. El hecho de que esta excelente correlación pueda ser obtenida con una fórmula simple sugiere que se están comenzando a entender los mecanismos de la respuesta sísmica de valles aluviales someros.

Para un valle axisimétrico tridimensional con las mismas propiedades que en el ejemplo de Kawase, se aplicaron las expresiones V.16 y

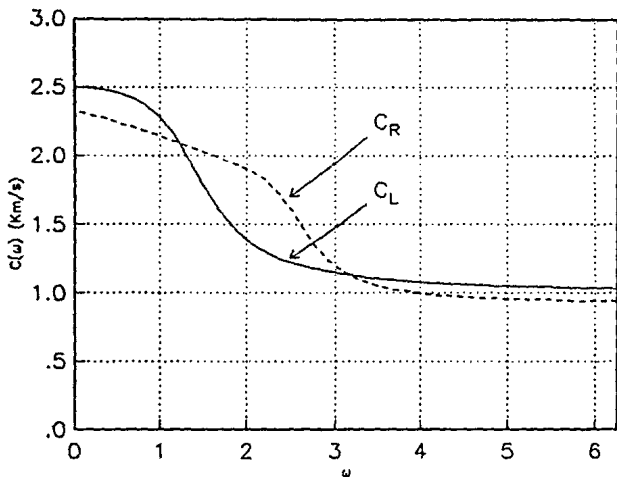


Fig 5.3 Curvas de dispersión del modo fundamental de ondas de Love y de Rayleigh usadas para la construcción de la solución de los modelos 2D y 3D (figs 5.1 y 5.2).

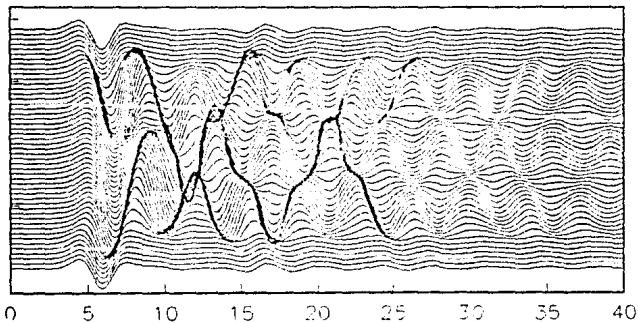
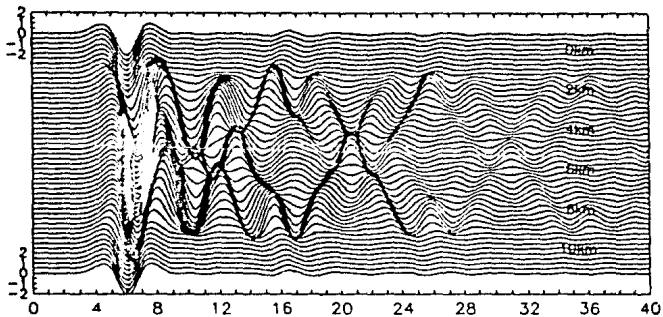


Fig 5.4 Sismogramas sintéticos para la superficie del depósito rectangular de la fig 5.1. Arriba los calculados por Kawase, abajo los obtenidos con los modelos simplificados.

V.17. Se obtienen sismogramas sintéticos que representan el movimiento en cualquier punto de la superficie. Es suficiente conocer la respuesta para dos secciones del modelo. Las fig 5.5 y 5.6 muestran el movimiento horizontal a lo largo de las secciones B-B' y A-A' respectivamente por razones de simetría el movimiento tiene lugar en la dirección x, siendo radial en la sección A-A' y azimutal en la sección B-B'. El primer grupo de sintéticos en la fig 5.5 corresponde al modelo estudiado por Pérez-Rocha et al. (1991), mientras que el segundo son los resultados aquí calculados. Hay bastantes diferencias en los modelos usados, lo que restringe las comparaciones a detalle. Sin embargo los sintéticos de ambos modelos son muy similares. La fig 5.6 muestra claramente el carácter tridimensional de la sección longitudinal, la cual está básicamente controlada por la velocidad de la onda de Rayleigh.

Si este modelo es alternativamente considerado como bidimensional para ambas secciones, entonces se tendrían respuestas en el plano (P-SV-Rayleigh) y antiplano (SH-Love), respectivamente. Para hacer comparaciones entre los modelos bi y tridimensionales aquí estudiados, La fig 5.7 muestra sismogramas sintéticos para 3 puntos sobre la sección B-B' del modelo 3D y los correspondientes para el modelo 2D, los parámetros del pulso de Ricker son  $t_s=6$  y  $t_p=4$  seg.

Los anteriores resultados permiten establecer que la respuesta en valles aluviales someros esta claramente compuesta de la respuesta unidimensional fuertemente modificada por las ondas superficiales. Esto es claro en los resultados para la sección B-B' debido a la baja velocidad de los modos de Love, aunque también están modificados por la contribución de otras ondas desde los extremos del depósito.

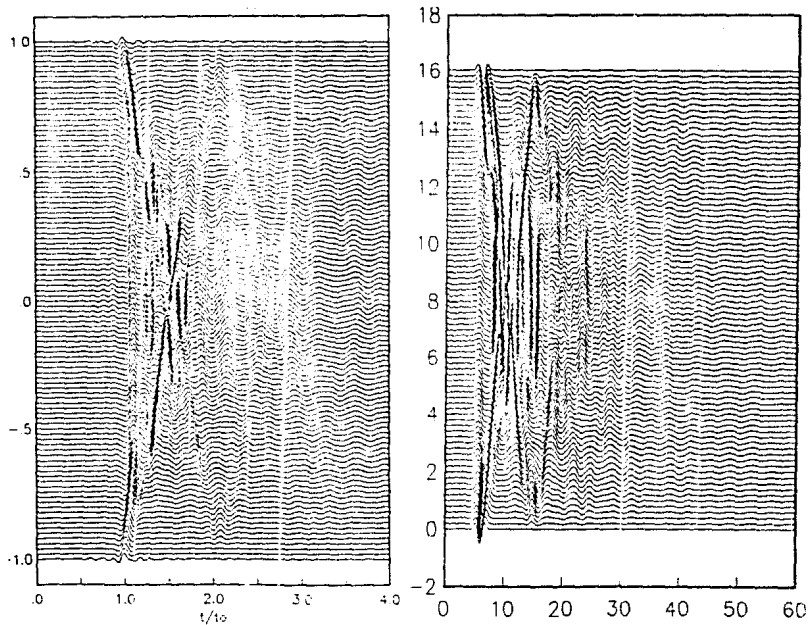


Fig 5.5 Sismogramas sintéticos para la sección B-B' sobre la superficie del modelo 3D.  $t_s=6$  y  $t_p=2$  seg. Izquierda los calculados por Pérez-Rocha et al. 1991, derecha los obtenidos con los modelos simplificados aquí propuestos.

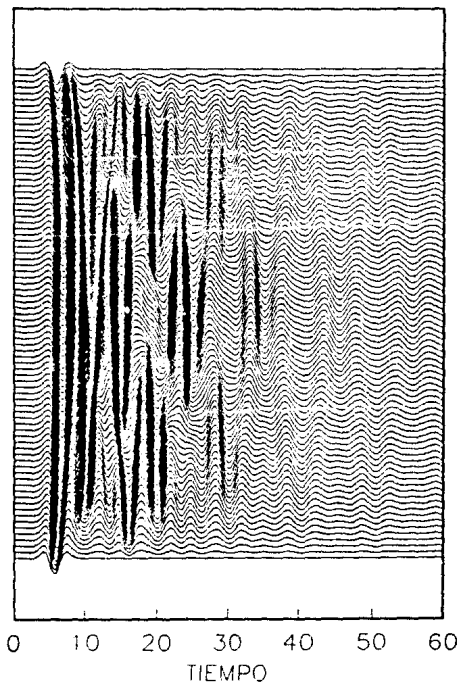


Fig 5.6 Sismogramas sintéticos para la sección A-A' del modelo 3D.  $t_s=6$  y  $t_p=4$  seg.

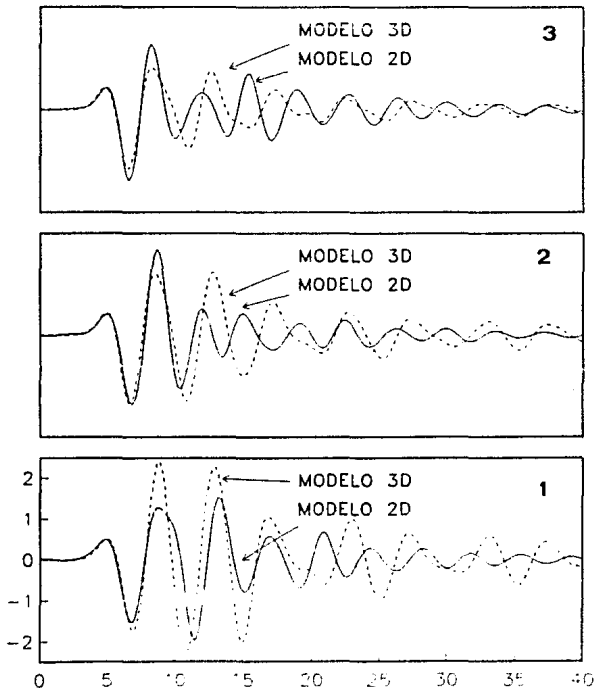
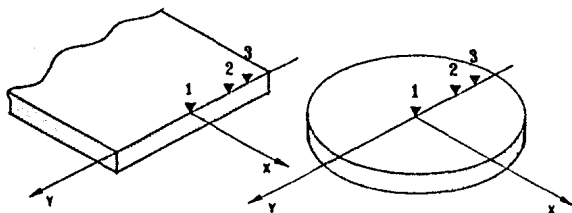


Fig 5.7 Sismogramas sintéticos para 3 puntos localizados sobre la sección B-B' del modelo 3D y los correspondientes sintéticos bidimensionales.  $t_s=6$  y  $t_p=4$  seg.

## 6. CONCLUSIONES

Se ha presentado una revisión de varios métodos propuestos para el estudio de la propagación de ondas sísmicas en irregularidades geológicas o topográficas. El interés en esta investigación radica en la aplicación de las distintas metodologías propuestas para una mejor comprensión de los factores físicos que controlan la respuesta sísmica en la vecindad y dentro de inclusiones elásticas blandas, y depósitos y valles aluviales ante la incidencia de campos de onda vectoriales y escalares.

Se ha tratado el análisis de la partición de la energía de ondas sísmicas como un problema general de difracción, en el que se ha considerado un comportamiento elástico lineal del medio que toma en cuenta de manera aproximada el amortiguamiento interno del material.

Se han clasificado los métodos aquí presentados como soluciones analíticas, soluciones numéricas y modelos simplificados. Las soluciones analíticas que se consideraron son las exactas para la difracción por cilindros bidimensionales de sección regular mediante la expansión de los potenciales de desplazamiento en términos de funciones circulares ortogonales, y las soluciones exactas, mediante series de Fourier, para los desplazamientos en la superficie de sistemas formados por estratos blandos de base rígida con irregularidad lateral. Las soluciones numéricas presentadas son la superposición de haces gaussianos, el método pseudoespectral y el método de ecuaciones integrales de frontera (BIEM). Se investigaron las limitaciones y alcances para el método de haces gaussianos con el estudio de la generación de modos superiores de ondas superficiales en un depósito trapecial. Los resultados obtenidos con el método de ecuaciones integrales de frontera permiten establecer que se cuenta con un método estable bastante confiable para la difracción en cualquier geometría.

Se presentaron los resultados obtenidos con los distintos métodos como funciones de transferencia, historia del desplazamiento en varios puntos, o sismogramas sintéticos, y diagramas en los dominios de la frecuencia-número de onda  $f-k$ . En algunos casos se presentaron comparacio-



nes con soluciones rigurosas de los resultados obtenidos con los métodos aquí presentados. Estas comparaciones sirvieron para calibrar los parámetros que intervienen en estos métodos.

Especial interés se tuvo en el estudio de las ondas superficiales generadas localmente simuladas con los modelos bidimensionales simples de un estrato blando de base rígida con limitación lateral en forma de pared vertical o inclinada. Para estos modelos se resolvió analíticamente la ecuación de onda escalar para el movimiento armónico prescrito de la base y la pared simultáneamente. Los resultados obtenidos con estos modelos permitieron establecer que en el caso de depósitos aluviales someros, para ciertas distancias, la forma de la irregularidad lateral influye poco en la definición de las ondas superficiales generadas localmente. Para estas soluciones se encontró que la marca espectral para las ondas superficiales es explícita.

Las anteriores conclusiones dieron la pauta para considerar la solución de modelos simplificados en 2 y 3 dimensiones mediante fórmulas sencillas que consideran la superposición de, por un lado, la respuesta unidimensional, y por el otro las contribuciones de los extremos del depósito como la suma de modos de ondas superficiales generadas localmente. No obstante la simplicidad de estos modelos, las comparaciones con modelos rigurosos bidimensionales y axisimétricos tridimensionales mostraron la factibilidad de su empleo en la descripción de las principales características de depósitos y valles aluviales someros de geometría irregular. Se observó que la respuesta sísmica en estas geometrías está claramente compuesta de la respuesta unidimensional fuertemente modificada por las ondas superficiales generadas *in situ*.

Los resultados que aquí se presentan no corresponden a un análisis exhaustivo, son, en cambio, los primeros resultados de esta formulación. Será en estudios posteriores que se explorarán las extensiones y se determinarán alcances y limitaciones.

## 7. RECONOCIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi maestro y amigo Francisco J. Sánchez Sesma por la dirección y supervisión de esta tesis, así como a Shri Krishna Singh, Gerardo Suárez Reynoso, Hiroshi Kawase y David Revele Casanova por sus valiosas observaciones y atinadas sugerencias. Un reconocimiento a mis compañeros David Álvarez Cuevas, Jaime Ramos Martínez y Martha Suarez López por su colaboración en algunos resultados de esta tesis.

Este trabajo forma parte de algunos proyectos de investigación en el Instituto de Ingeniería de la UNAM, parcialmente patrocinados por CONACYT. A estas instituciones un reconocimiento especial por todo el apoyo brindado durante la elaboración de esta tesis.

## 8. REFERENCIAS

- Abramowitz, M y Stegun I A (1972). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, U S National Bureau of Standards, Washington.
- Aki, K (1988). Local site effects on strong ground motion, in *Earthquake Engineering and Soil Dynamics II - Recent advances in ground motion evaluation*, J L Von Thun (ed), Geot. Sp. Pub. No. 20,103-155, Am. Soc. Civil Engr., New York.
- Aki, K y Larner, L (1970). Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves, *J. Geophys. Res.*, 75, 933-954.
- Aki, K y P Richards (1980). Quantitative Seismologie. Theory and methods, W H Freeman, San Francisco.
- Álvarez, D y Sánchez-Sesma F J (1991). Respuesta sísmica de presas considerando interacción Hidrodinámica, *Memorias del IX Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica y VIII Congreso Nacional de Ingeniería Estructural* 1 3-44 a 3-50.
- Álvarez, D (1989). Aplicación de la teoría de rayos a la simulación de la respuesta sísmica de valles aluviales, *Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, UNAM.*
- Babich, V M y Popov M M (1981). Propagation of concentrated sound beams in a three-dimensional inhomogeneous medium, *Soc. Phys. Acoust.*, 27, 459-462.
- Banerjee, P K y Butterfield, R (1981). *Boundary element methods in engineering science*, McGraw Hill, Londres.
- Bard, P Y (1982). Diffracted waves and displacement field over two-dimensional elevated topographies., *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 71, 731-760.
- Bard, P Y y Bouchon, M (1980). The seismic response of sediment-filled valleys, part II. The case of incident P and SV waves, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 75, 1921-1941.
- Benites, R y Aki, K (1989). Boundary integral-Gaussian beams method for seismic wave scattering: SH waves in 2-D media., *J. Acoust. Soc. Am.*, 86, No. 1, 375-386.
- Bouchon, M (1973). Effects of topography on surface motion., *Bull. Seism. Soc. Am.*, 63, 615-632.
- Bouchon, M (1985). A simple, complete numerical solution to the problem of diffraction of SH waves by an irregular surface, *J. Acoust. Soc. Am.* 77, 1-5.
- Bravo, M A, Sánchez-Sesma, F J y Chávez-García, F J (1988). Ground motion on stratified alluvial deposits for incident SH waves., *Bull. Seism. Soc. Am.*, 78, 436-450.

-Brebba, C A (1978). *The boundary element method for engineers*, Pentech Press, Londres.

-Campillo, M y Bouchon, M (1985). Synthetic SH-seismograms in a laterally varying medium by the discrete wavenumber method., *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 83.

-Cerveny, V (1985). Gaussian beam synthetic seismograms, *J. Geophys. Res.* 58, 44-72.

-Cerveny, V (1985-a). Ray synthetic seismograms for complex two-dimensional and three-dimensional structures., *J. Geophys. Res.*, 58, 2-26.

-Cerveny, V (1985-b). Gaussian beams synthetic seismograms., *J. Geophys. Res.*, 58, 44-72.

-Cerveny, V, Molotkov, I A y Psencik, I (1977). Ray method in seismology., *Karlova Univerzita, Prague*.

-Cerveny, V y Psencik, I (1983). Gaussian beams in two-dimensional elastic inhomogeneous media., *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 72, 417-433.

-Dravinski, M (1982). Influence of interface depth upon strong ground motion, *Bull Seism Soc Am*, Vol 72, pp 597-614.

-Ewing, M, Jardestsky, W y Press, F (1957). *Elastic waves in layered media*, Mc Craw-Hill New York.

-Fornberg, B (1975). On a Fourier method for the integration of hyperbolic equations, *SIAM J. Num. Anal.*, 12, 509-528.

-George, T, Virieux, J y Madariaga, R (1987). Seismic waves synthesis by Gaussian beams summation: A comparison with finite differences., *Geophys.*, 52, 1065-1073.

-Graves, R y Clayton, R (1992). Modeling path effects in three dimensional basin structures. *Bull. Seism. Soc. Am.* 82, 81-103.

-Haskell, N A (1953). The dispersion of surface waves in multilayered media, *Bull. Seism. Soc. Am.* 43, 17-34.

-Horike, M, Uebayashi H y Takeuchi Y (1990). Seismic response in three-dimensional sedimentary basin due to plan S wave incidence, *J. Phys. Earth.* 38, 261-284.

-Kawase, H (1988). Time-domain response of a semicircular canyon for incident SV, P, and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method, *Bull. Seism. Soc. Am.* 78, 1415-1437.

-Kawase, H y Aki, K (1990). Topography effects at the critical SV wave incidence: explanation of damage pattern by the Whittier narrows, California earthquake of october 1, 1987., *Bull. Seism. Soc. Am.*, 80, 1-22.

-Kelly, K R y Marfurt, K J (1990). *Numerical Modeling of Seismic Wave Propagation*, Geophysics Reprint Series, No. 13, Soc. of Exploration Geophysics, Tulsa.

-Kosloff, D y Baysal, E (1982). Forward modeling by a Fourier method, *Geophysics*, 47, 1402-1412.

-Kreiss, H O y Olinger, J (1972). Comparison of accurate methods for the integration of Hyperbolic equations, *Tellus*, 24, 199-215.

-Kupradze, V D (1963). *Dynamical problems in elasticity*, in *Progress in solid mechanics*, Vol. III, I.N. Sneddon and R. Hill (Eds.), North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

-Madariaga, R y Papadimitriou, P (1985). Gaussian beams modelling of upper mantle phases., *Annal. Geophys.*, 3, 799-812.

-Manolis, G D, y Beekes, D E (1984) *Boundary Element Methods in Elastodynamics*, Unwin Hyman Ltd, Londres.

-Moczo, P, Bard P Y y Pšenčík, I (1987). Seismic response of two-dimensional absorbing structures by the ray method, *J. Geophys. Res.*, 62, 38-49.

-Mow, C C y Pao, Y H (1971). The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations., *Report R-482-PR, The Rand Corp.*, Santa Mónica, California.

-Nowack, R y Aki, K (1984). The two-dimensional Gaussian beams synthetic method: testing and application., *J. Geophys. Res.*, 89, 7797-7819.

-Orzag, S A (1972) Comparison of pseudospectral and spectral approximations, *Stud. Appl. Math.*, 51, 253-259.

-Pérez-Rocha, L E, Sánchez-Sesma, F J y Reinoso, E (1991). Three-dimensional site effects in Mexico City: evidences from accelerometric network observations and theoretical results, *Proc. 4th Intl. Conf. on Seismic Zonation*, Stanford, California, August 25-29, Vol II, 327-334.

-Popov, M M (1982). A new method of computations of wave fields using Gaussian beams., *Wave Motion*, 4, 85-97.

-Ramos-Martínez J y Sánchez-Sesma F J (1991). Respuesta sísmica de valles aluviales usando ecuaciones integrales. *Memorias del IX Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica y VIII Congreso Nacional de Ingeniería Estructural 1 2-89 a 2-98.*

-Reinoso, E, Ordaz, M y Sanchez-Sesma, F J (1990). A note on the fast computation of response spectra estimates, *Earth. Eng. and Struc. Dyn.* 19, 971-976.

-Rodríguez-Zúñiga, J L y Sánchez-Sesma, F J (1991). Espectros de respuesta en un medio estratificado con irregularidades laterales, *Memorias del IX Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica y VIII Congreso Nacional de Ingeniería Estructural 1 2-109 a 2-118.*

- Rodríguez-Zúñiga, J L, Sánchez-Sesma, F J, Santoyo, M A y Bravo, M A (1989). Use of gaussian beams to model refraction of elastic waves by two dimensional inclusions of arbitrary shape *Proceedings of the 4th. Int. Conf. Soil Dyn. Earthquake eng. Eng. Seism. and Site Resp.* 101-111.
- Rodríguez-Zúñiga J L, Ramos, J y Macedo, G (1990). Respuesta sísmica de un estrato limitado por una pared vertical, *Sismodinámica*, 1, 119-127.
- Sánchez-Sesma, F J (1987). Site effects on strong ground motion., *Soil Dyn. and Earthquake Eng.*, 6, 124-132.
- Sánchez-Sesma, F J y Campillo, M (1991). Diffraction of P,SV and Rayleigh waves by topographical features: a boundary integral formulation, *Bull. Seism. Soc. Am.* 81, 2234-2253.
- Sánchez-Sesma, F J y Esquivel, J A (1979). Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol 69, pp 1107-1120.
- Sánchez-Sesma, F J y Velázquez, S A (1987). On the seismic response of a dipping layer, *Wave Motion* 9, 387-391.
- Schwab, F A y Knopoff, L (1972). Fast surface waves and free modes computations, en *Methods Computational Physics*, 11, editor B A Bolt, Academic Press, Nueva York.
- Singh, S K, Mena, E y Castro, R (1988). Some effects of source characteristics on the 19 September, 1985, Michoacan earthquake and ground motion amplification in and near Mexico, City from strong motion data, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 78, 451-477.
- Singh, S K y Ordaz, M (1992). On the origin of long coda observed in the lake-bed strong-motion records of Mexico City, Submitted to *Bull. Seism. Soc. Am.*
- Tappert, F D (1976). The parabolic approximation method, wave propagation and underwater acoustics, *Lect. Notes Phys.*, 70, 224-287.
- Trifunac, M D (1971). Surface motion on a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves., *Bull. Seism. Soc. Am.*, 61, 1755-1770.
- Wong, H L y Trifunac, M D (1974). Scattering of plane SH wave by a semi-elliptical canyon., *Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 3, 157-169.
- Yomoglda, K (1985). Gaussian beams for surface waves in laterally slowly-varying media., *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 82, 511- 533.