

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Química

DISEÑO DE TUBERIAS PARA FLUIDOS
NO NEWTONIANOS

207

T E S I S

Que para obtener el título de

INGENIERO QUIMICO

p r e s e n t a

LUIS ANGEL LOPEZ LATORRE

México, D. F.,

1975



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CLAS. TESIS

AÑO 1975

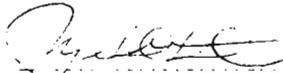
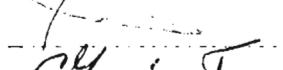
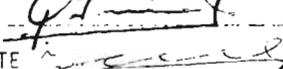
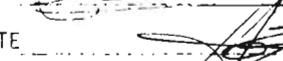
FECHA

PROC. Química 197



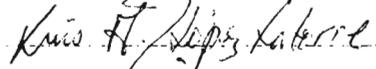
QUÍMICA

Jurado asinado originalmente
según el tema

PRRESIDENTE 
V O C A L 
SECRETARIO 
1er. SUPLENTE 
2do. SUPLENTE 

Sitio donde se desarrolló el tema: BIBLIOTECA Y LABORATORIO DE
INGENIERIA QUIMICA DE LA FACULTAD DE QUIMICA

Nombre completo y firma del sustentante: LUIS ANGEL

LOPEZ LATORRE 

Nombre completo y firma del asesor del tema: CESAR ALBERTO

GARCIA FRANCO

Nombre completo y firma del supervisor técnico (si lo hay)

JURADO ASIGNADO

PRESIDENTE : M. en C. JORGE LUDLOW LANDERO
VOCAL : M. en C. ALEJANDRO LOZADA CAÑIBE
SECRETARIO : DR. RAFAEL MORONES ESCOBAR
1er. SUPLENTE : DR. MARTIN HERNANDEZ LUNA
2o. SUPLENTE : M. en C. ANTONIO VALIENTE BARDERAS

A LA MEMORIA DE MI PADRE:
EL HOMBRE MAS BONDADOSO E INTELIGENTE
QUE HE CONOCIDO

A MI MADRE:
POR TODO LO QUE ME HA DADO Y ME HA DEJADO
LLEGAR A SER, Y TAN POCO QUE HA RECIBIDO

EN RECUERDO A MI ABUELA:
POR SU FUERTE PERSONALIDAD QUE TANTO BIEN
ME HIZO

A MIS HERMANOS, MIMI Y PEPE, CON CARÍÑO

A ALE: LA MAS FUERTE DE MIS
ILUSIONES

EN AGRADECIMIENTO AL DR. JAVIER GARFIAS
POR SU DESINTERESADA AYUDA

A CESAR A. GARCIA FRANCO POR HABERME ENSEÑADO
CUANTO VALE E INTERESANTE ES EL CONOCIMIENTO
HUMANO

I N D I C E

	Página
Introducción	IX
Notación	XI
Capítulos .-	
1. Ideas Preliminares	1
2. Fluídos Newtonianos	
2.1 Viscosidad	19
2.2 Conceptos Básicos del Flujo	22
2.3 Formas de Flujo	32
3. Fluídos No Newtonianos	
3.1 Ecuaciones Constitutivas	49
3.2 Las Ecuaciones de Cambio para Flujo No Newtoniano Incompresible	65
3.3 Elaboración de la Curva de Flujo	68
4. Flujo de Fluídos Newtonianos Incompresibles en Tuberías	
4.1 Bases del Método de Diseño	87
4.2 Fluídos Newtonianos en Régimen Laminar	89
4.3 Fluídos Newtonianos en Régimen Turbulento	96

I N D I C E

(continuación)

	Página
5. Flujo de Fluidos No Newtonianos In compresibles en Tuberías	
5.1 Desarrollo de las Ecuaciones para la Zona Laminar	104
5.2 Transición entre la Zona Laminar y la Zona Turbulenta	128
5.3 Ecuaciones de Diseño para la Zona Turbulenta	132
6. Descripción y Operación del Equipo Experimental	145
7. Resultados Experimentales	180
8. Conclusiones	298
Bibliografía	305
Apéndice 1	314
Apéndice 2	327
Apéndice 3	335
Apéndice 4	338
Apéndice 5	357
Fé de Erratas	360

INTRODUCCION

En la moderna industria de hoy, se requiere disponer de métodos y técnicas de cálculo para el dimensionamiento de líneas de tuberías que sean lo más sencillo posible y tan aproximados como ésta condición lo permita, para aquellos tipos de fluidos cuyo comportamiento sale fuera del bien conocido fluido newtoniano y que se conocen con el nombre de fluidos no newtonianos.

Este requerimiento está determinado principalmente por dos factores: uno es que ellos forman la gran mayoría de los fluidos que se manejan en la industria, y el otro es que dicho manejo se hace, casi totalmente, por medio de tuberías.

La elaboración de cualquier método es una consecuencia directa de lo anterior y debido a la heterogeneidad con que éstos materiales se comportan, su diversificación en el tratamiento matemático es tan amplia, que hace difícil resolver los modelos teóricos que se obtienen al plantearse y, aún más difícil, tratar de establecer criterios generales para su tratamiento.)

Por lo anterior y más que nada por la necesidad en la práctica industrial a nivel ingenieril, éste trabajo pretende establecer una metodología para la obtención de la caída de presión de un fluido no newtoniano, específicamente los clasificados como puramente viscosos, que se maneja por una tubería a ciertas condiciones de flujo; tratando al mismo tiempo, de que la simplicidad de los modelos matemáticos escogidos produzcan los resultados teóricos que sean los que en la realidad se están obteniendo.

NOTACION

A lo largo del texto se encontrarán definidas y muy bien explicadas todas las variables, parámetros y constantes involucradas; considerando que son una cantidad bastante grande de ellas, y para evitar repeticiones que no aportan beneficio alguno, porque el presente trabajo no pretende en ningún momento tener características de libro, no se enlistarán ninguna de las variables, parámetros ó constantes mencionadas con anterioridad.

CAPITULO: 1

IDEAS PRELIMINARES

(Antes de empezar el tratamiento teórico y experimental del presente trabajo, me parece que es útil fijar algunas ideas y conceptos referentes al campo propio de su desarrollo.

Si se tiene alguna noción acerca de lo que el título de esta tesis sugiere, se le situará inmediatamente, dentro del campo de la Reología. Reología es la ciencia de la deformación y el flujo de materia. Un cuerpo (colección de materia) se dice que está deformado, cuando la aplicación de un sistema de fuerzas apropiado altera la forma ó el tamaño del cuerpo. Esta definición fué establecida por el Prof. E. C. Bingham del Lafayette College, Easton (Pa.), U. S. A., siendo aceptada cuando la American Society of Rheology fué fundada en 1929. De aquél entonces, hasta nuestros días, se han incluido muchos temas que ya inclusive fueron excluidos de esta definición y otros de reciente formación, tales como la Bioreología. Sin embargo, el Prof. Reiner de Haifa, ha hecho notar que puesto que el flujo es un tipo de deformación, la definición es una tautología; esto ha motivado que por el año de 1967 se modificara la definición para leerse como: " el estudio de la deformación de materiales, incluyendo el flujo " (1).

Un cuerpo, se dice que fluye, si su grado de deformación cambia continua-

mente con el tiempo. El objetivo de la Reología, es la predicción del sistema de fuerzas necesario que producen una deformación, ó un flujo dado en un cuerpo, ó contrariamente, la predicción de la deformación ó flujo resultante de la aplicación de un sistema de fuerzas dado a un cuerpo. Es decir, estudia el comportamiento mecánico de cuerpos deformables.

Si el cuerpo bajo consideración es un fluido, la aplicación de cualquier sistema de fuerzas anisotrópico (distintos en diferentes direcciones) y no homogéneo (distinto en diferentes posiciones), por pequeño que sea, resultará en flujo (2). Más aún, el quitar el sistema de fuerzas que se está aplicando no nos devolverá la forma original del cuerpo. Por otro lado, si el cuerpo es un sólido elástico, la aplicación de cualquier sistema de fuerzas no homogéneo, isotrópico ó anisotrópico, resultará en la deformación pero no en el flujo; una vez que el sistema de fuerzas se ha liberado el cuerpo volverá a su forma original indeformada siempre y cuando no se haya pasado su límite elástico. Si el cuerpo con que tratamos es plástico, fluirá como un fluido, si las fuerzas aplicadas, exceden algún valor crítico; de otra manera, el cuerpo se deformará como un sólido elástico.

La fluidez, solidez y plasticidad, son conceptos idealizados, los cuáles describen el comportamiento de materiales reales en ciertos casos limitantes. En general, el comportamiento de los materiales reales enmarcan todos los tipos anteriormente mencionados así como también comportamientos intermedios. De una manera simplificada, si tratáramos de escalar el comportamiento de los materiales tendríamos el diagrama presentado en la fig. 1.1.

Además de la importancia teórica de la Reología, puesto que ella es la ma-

dre de disciplinas como la hidráulica, la mecánica de fluidos, resistencia de materiales e ingeniería estructural, ésta ciencia es muy interesante desde el punto de vista práctico. En casi todas las ramas de la industria, uno se enfrenta al problema de diseño de aparatos para transportar ó procesar sustancias las cuáles no encajan en ninguno de los comportamientos clásicos de los materiales. Ejemplos de ellos son las suspensiones de pulpa de papel que exhiben extraños efectos dependientes del tiempo; plásticos fundidos que muestran efectos viscoelásticos pronunciados; suspensiones que suelen ser de comportamiento dilatante, solamente por señalar unos pocos de los muchos existentes en la industria de hoy.

Ahora bien, cualquier estudio acerca del movimiento de fluidos en un sistema dado, y las fuerzas que lo producen, involucra el estudio de la transferencia de momentum (ó cantidad de movimiento). De la segunda ley de Newton, es sabido que la fuerza está relacionada directamente a la rapidez de cambio del momentum del sistema (3). Excluyendo fuerzas de campo tales como la gravedad, se puede demostrar experimentalmente que fuerzas como aquellas resultantes de la presión y el esfuerzo cortante, corresponden a mecanismos de transferencia microoscópica del momentum (por conducción y molecular respectivamente).

Habiendo entendido que un fluido es aquella sustancia que se deforma continuamente (ó irreversiblemente) bajo la acción de un esfuerzo cortante, no nos es difícil comprender que los líquidos y gases son fluidos. Algunas sustancias como el vidrio, están clasificadas técnicamente como fluidos; sin embargo, la rapidez de deformación en el vidrio a temperaturas normales es tan pequeña ,

que su consideración como fluido es impráctica.

Aquí es necesario hacer la aclaración que el sistema de fuerzas que produce este tipo de comportamiento en el fluido, son como se mencionó, los esfuerzos cortantes, es decir, aquella fuerza que se aplica tangencialmente al área donde se dejan sentir sus efectos; lo cual es completamente distinto al concepto de presión, ya que aquí la fuerza se aplica normalmente (perpendicularmente) al área.

Los fluidos, como toda la materia, están compuestos de moléculas cuyo número sobrepasa la imaginación. Cualquier teoría que predijera los movimientos individuales de estas moléculas, debería ser extremadamente compleja, lejos de nuestras actuales posibilidades; es por esto que la teoría cinética de los gases y la mecánica estadística (4) tratan el movimiento de las moléculas en términos de grupos estadísticos, más bien que en términos de moléculas individuales.

(Así, la mayor parte del trabajo en ingeniería se concierne con el comportamiento macroscópico ó del grueso del fluido en lugar de usar el comportamiento microscópico; por lo tanto, en la mayoría de los casos es conveniente pensar en un fluido como una distribución continua de materia ó lo que se ha dado en llamar un CONTINUUM.)

El concepto de continuum se deriva de las matemáticas. Decimos que el sistema numérico real es un continuum. Entre dos números reales distintos hay otro número real diferente de aquellos, y por lo tanto, infinidad de números reales entre dos números reales distintos. Si se extiende este concepto a la materia, como una primera aproximación, hablamos de una distribución

continua de materia en el espacio. Esto se entiende mejor considerando el concepto de densidad.

Dejemos que la cantidad de materia sea medida por su masa y supongamos que ocupa un cierto espacio V_0 , como en la fig. 1.2. Consideremos un punto P en V_0 y una secuencia de subespacios V_0, V_1, V_2, \dots , que convergen a P :

$$V_n \subset V_{n-1} \quad P \in V_n \quad (n=1, 2, \dots) \quad 1.1$$

El volumen V_n es V_n y la masa de la materia contenida en V_n es M_n . Establecemos el cociente M_n/V_n y tomamos su límite a medida que n tiende a infinito y V_n tiende a cero. Si éste límite existe, éste valor limitante se define como la densidad de la distribución de masa en el punto P y se denota por

$\rho(P)$:

$$\rho(P) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ V_n \rightarrow 0}} \frac{M_n}{V_n} \quad 1.2$$

Si la densidad está perfectamente definida en cualquier lugar de V_0 , la masa está entonces continuamente distribuida (5).

Una consideración similar puede ser usada para definir la densidad del momentum, la densidad de energía, etc. Por lo tanto, un continuum de materia es un material para el cual las densidades de masa, momentum y energía existen en el sentido matemático. (6)

Hay, desde luego, circunstancias en las cuáles éste concepto no es válido, así, si nos trasladamos al campo de la estructura de partículas elementales, podemos encontrar que si V_n y V_{n+1} difieren por un neutrón, el cociente M_n/V_n tendrá una diferencia finita de M_{n+1}/V_{n+1} . Es fácil observar que ha medida que las partículas se mueven, el límite M_n/V_n ya sea que no existe ó

fluctúa con el tiempo y el espacio. Es decir, la validez del continuum depende del tipo de información deseada más que de la naturaleza del fluido. Para salvar esta situación, consideraremos un V_n lo más pequeño posible, de tal suerte que contenga un número suficiente de moléculas para hacer que sus promedios estadísticos sean representativos. Si el cociente M_n/V_n tiende a un límite definido con esta restricción agregada, entonces $\rho(P)$ está definida como la densidad de la materia. En otras palabras, de acuerdo con el material real, definimos un continuum matemático el cual tiene la misma densidad en el sentido estricto de la ec. 1.2. Es así como las propiedades macroscópicas de un continuum, se consideran que varían continuamente de punto a punto, en el fluido (2, 6).

En resumen, puesto que un continuum es una abstracción aplicada a una colección grande de partículas materiales, el propósito de la mecánica del continuum es describir el movimiento (ó en caso especial el equilibrio) de estas partículas en el espacio, en respuesta a las fuerzas que están influenciando este movimiento (ó equilibrio); y además, tener en cuenta que la suposición del continuum es una aproximación y no debe esperarse que se siga cumpliendo cuando el tamaño de las partículas que componen el medio bajo consideración se aproximen al tamaño de la región ocupada por ese medio (2, 6).

El estado cinemático en un tiempo t está determinado si conocemos la velocidad, aceleración, etc., de cada punto del cuerpo en ese tiempo. Hemos supuesto que el cuerpo es un continuum, así que las variables cinemáticas asociadas con un punto fijo en el espacio pueden ser consideradas como funciones continuas de las coordenadas espaciales del punto. Por lo tanto, el estado cinemático también está determinado si conocemos la velocidad, aceleración, etc., de ca-

da punto fijo del cuerpo en el tiempo t .

El estado dinámico de un cuerpo, está determinado si conocemos las fuerzas que actúan en un elemento de superficie arbitrariamente colocado y orientado en el cuerpo.

Para describir cuantitativamente un continuum en movimiento, es necesario tener una relación entre el estado cinemático de un sistema en un instante y el estado dinámico de éste sistema en el mismo instante, y quizás el estado cinemático del cuerpo en todos los instantes anteriores. Las ecuaciones que expresan la relación entre las variables cinemáticas y dinámicas se llaman ECUACIONES CONSTITUTIVAS (2).

Y las cantidades que dan esa descripción cuantitativa de la cinemática y dinámica de la deformación y del flujo, son el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación.

Consideremos el sistema de dos placas paralelas separadas por el fluido de interés y que se están moviendo, como en la fig. 1.3. En la figura, x y z son, respectivamente, las coordenadas cartesianas en la dirección del flujo y perpendicular a las placas. El esfuerzo cortante impuesto al fluido es $F/A = \tau_{zx}$, ó simplemente τ . El fluido está sujeto a deformación a la rapidez du_x/dz , el cuál es el gradiente de velocidad ó la rapidez de deformación (ó de corte), a cuyo valor absoluto le asignamos el símbolo $\dot{\gamma}$. Como ya se estableció, se debe esperar una relación entre éstas cantidades, y la experiencia lo confirma; aunque diferentemente para fluidos distintos y también de forma distinta para el mismo fluido bajo condiciones de presión y/o temperatura. De acuerdo con esto, podríamos esperar una relación del tipo:

$$\tau = f(\dot{\gamma})$$

como una representación de la ecuación constitutiva del fluido, la cuál es característica del fluido ó del sistema dado a una presión y temperatura fijas. La representación gráfica de la ecuación 1.3, es conocida como la curva de flujo ó reograma para el fluido.)

En el caso completamente general, la relación funcional entre el gradiente de velocidad y el esfuerzo cortante impuesto, no es tan simple. Esto es particularmente evidente con mezclas múltiples en sus fases dispersas ó soluciones, ó aún líquidos puros conteniendo moléculas extremadamente grandes. Aquí el gradiente de velocidad generado por un esfuerzo cortante, está influenciado por cambios en la estructura física interna la cuál, a su vez, está influenciada por la acción de corte. En algunos sistemas, éstos cambios en estructura solamente involucran cambios en orientación y alineamiento de las partículas ó moléculas en la dirección del esfuerzo cortante. En otros sistemas, las interacciones físicas y químicas entre las partículas dispersadas, producen aglomeración de partículas ó una estructura que es frágil y sensitiva al corte. Aún en los casos más complejos, las partículas ó moléculas de cadena grande pueden poseer propiedades elásticas, y esto puede influenciar la respuesta del fluido al esfuerzo cortante.

En términos generales, debemos esperar que el esfuerzo cortante aplicado a un fluido, esté relacionado no solamente con la rapidez de corte sino también con otros factores que determinen la concentración y resistencia de macromoléculas, partículas ó conglomerados de partículas (7). Esto puede ser expresado como:

$$\tau = f(\dot{\gamma}, C_p, V_p, O_p, \phi_p, K_{pf}, K_{pd}, K_{pa}, K_{pm}, \Theta, E) \quad 1.4$$

donde:

C_p , V_p , O_p , ϕ_p . - son, respectivamente, concentración, volumen promedio, orientación y la forma de las macromoléculas, partículas ó sus conglomerados al tiempo Θ despues de comenzar a aplicar el esfuerzo cortante.

K_{pf} , K_{pd} , - son coeficientes descriptivos de la velocidad de formación ó destrucción de macromoléculas, partículas ó conglomerados.

K_{pa} , K_{pm} . - son coeficientes descriptivos de la rapidez de alineación ó desalineación de las macromoléculas, partículas ó conglomerados en la dirección del esfuerzo cortante.

E . - es una medida de las propiedades elásticas del sistema mixto.

Considerable es el empeño en la búsqueda para las relaciones exactas entre las variables que caracterizan el comportamiento reológico de los flúidos y sistemas flúidos mixtos, pero solamente se han desarrollado ecuaciones constitutivas satisfactorias en forma total para el caso más simple, el llamado fluido newtoniano. Uno de los mayores problemas es la dificultad en determinar, ya sea teórica ó experimentalmente, el efecto independiente de cada uno de los muchos factores que intervienen. Por otro lado, es posible, a través de la ec. 1.4, explicar cualitativamente, ciertas formas limitantes de comportamiento reológico, lo que sirve también como base de clasificación.

La división más grande es entre flúidos que son descritos como puramente viscosos y aquellos que exhiben propiedades elásticas y viscosas a la vez. Los flúidos puramente viscosos, son aquellos en los que al quitar el esfuerzo cortante, no se recobran de la deformación producida bajo ésta acción. Los coefi

cientes de cualquier término involucrando E de la ec. 1.4 son cero. Los fluidos viscoelásticos, son aquellos que al quitarles la fuerza de corte, se recuperan parcialmente de la deformación producida bajo esta acción de corte. Los coeficientes de términos que involucran E en la ec. 1.4 no son todos cero.

Los fluidos puramente viscosos, pueden dividirse primero en las categorías de independientes del tiempo y dependientes del tiempo. La primera categoría, incluye aquellos fluidos los cuáles, si exhiben desarrollo de estructura u orientación de partículas, tienen velocidades K_{pf} , K_{pd} , K_{pm} lo suficientemente altas, para todos los propósitos, que los fluidos llegan a una condición de equilibrio inmediatamente. Estos valores tan altos de las constantes de velocidad son equivalentes a la situación donde los coeficientes de todos los términos que involucran Θ en la ec. 1.4 son cero. La categoría dependientes del tiempo incluye aquellos otros fluidos que tienen bajas velocidades de desarrollo o el decaimiento de la estructura u orientación toma un tiempo apreciable para llegar a sus condiciones de equilibrio, y cuyo comportamiento por lo tanto, depende de las constantes de velocidad y de la duración del corte medido desde un tiempo de condición conocida. Los coeficientes de los términos que involucran Θ en la ec. 1.4 no son todos cero.

Los independientes del tiempo del grupo de fluidos puramente viscosos, pueden ser subdivididos en diferentes tipos. La primera categoría es aquella para la cuál el comportamiento reológico es tal, que su curva de flujo pasa por el origen de coordenadas τ vs. $\dot{\gamma}$, como en la fig. 1.4. Esto significa que el fluido responde al más pequeño esfuerzo cortante o que no hay esfuerzo mínimo requerido para que el flujo comience. En el lenguaje de la ec. 1.4 esto sig

nifica, que las constantes de velocidad son todas altas, de tal forma que los coeficientes de los términos que involucran E y Θ son todos cero, y que $C_p = 0$, b si $C_p \neq 0$, V_p , ϕ_p , O_p son tal, que las macromoléculas, partículas b conglomerados, no ofrecen resistencia al inicio del movimiento del fluido. En ésta categoría están los fluidos newtonianos, pseudoplásticos y dilatantes.

La segunda categoría de fluidos puramente viscosos es aquella para los cuáles se requiere de un esfuerzo cortante finito antes de que el flujo comience. El reograma para éstos fluidos, no pasa a través del origen de coordenadas pero intercepta al eje en un valor finito conocido como el esfuerzo mínimo y es característico del fluido (fig. 1.4). En términos de la ec. 1.4 esto significa que las constantes de velocidad son todas altas, es decir, que los coeficientes de todos los términos que involucran E y Θ son cero, pero que $C_p \neq 0$ y V_p , ϕ_p , O_p son tal que las macromoléculas partículas b conglomerados ofrecen una resistencia finita a la iniciación del movimiento del fluido. En ésta categoría están los fluidos de Bingham y los pseudoplásticos que requieren de un esfuerzo mínimo.

El grupo de fluidos puramente viscosos dependientes del tiempo, incluye los fluidos tixotrópicos y reopécticos que son similares en su comportamiento a los pseudoplasticos y dilatantes, excepto que éste es dependiente de la duración del corte, según Wilkinson (8). Con el punto de vista de Brodkey (9), cuando un material se prueba a rapidez de corte constante y el esfuerzo medido decrece a medida que el experimento progresa, decimos que el material se adelgaza con el tiempo. Si la estructura rota, después de un tiempo de estar en esfuerzo cero, puede volver a formarse y recobrar su esfuerzo medido inicial

mente, entonces el material es tixotrópico; es decir, el fenómeno es reversible. Otros materiales son antitixotrópicos, los cuáles muestran un incremento en el esfuerzo cortante, bajo ciertas condiciones de corte, y un rompimiento hacia la estructura original cuando están en reposo y dice: "desafortunadamente la mayoría de los autores usan el término impropio de reopexia para describir éstos últimos materiales". Reopexia también se refiere a la formación de una estructura, pero sólo puede ocurrir en materiales que son tixotrópicos. A menudo después del rompimiento estructural, cuando está ocurriendo una reconstrucción lenta, la formación de la estructura puede ser acelerada por una agitación suave. O sea, reopexia es una formación de estructura en el tiempo inducida por una agitación suave irreversible; mientras que antitixotropía (es una formación seguida de un rompimiento) es lo opuesto de tixotropía y también reversible, y en consecuencia un material reopéctico es también tixotrópico. En la ec. 1.4 las constantes de velocidad, ó alguna de ellas, no son altas; y los coeficientes de todos los términos que involucran E son cero, pero los de Θ no lo son y, C_p , V_p , ϕ_p , O_p , ó uno ó más de ellos cambian con el tiempo.

Los menos comprendidos flúidos viscoelásticos, exhiben una mezcla compleja de comportamiento viscoso y elástico. No se les clasifica en distintos tipos e incluyen muchas combinaciones de la influencia del fenómeno de corte, orientación y rigidez estructural. En general, ninguna de las constantes de velocidad, ó de los coeficientes que involucran Θ , C_p , ϕ_p , V_p , O_p , necesariamente son cero, mientras que los coeficientes de los términos que involucran E no son cero.

De acuerdo a todo lo mencionado con anterioridad, nuestro diagrama de la fig. 1.1 se transforma en el diagrama de la fig. 1.5.

Aunque en este capítulo se ha dado una ligera clasificación de los fluidos, en capítulos posteriores, profundizaremos en sus características y sobre todo, en sus ecuaciones constitutivas.



fig. 1.1

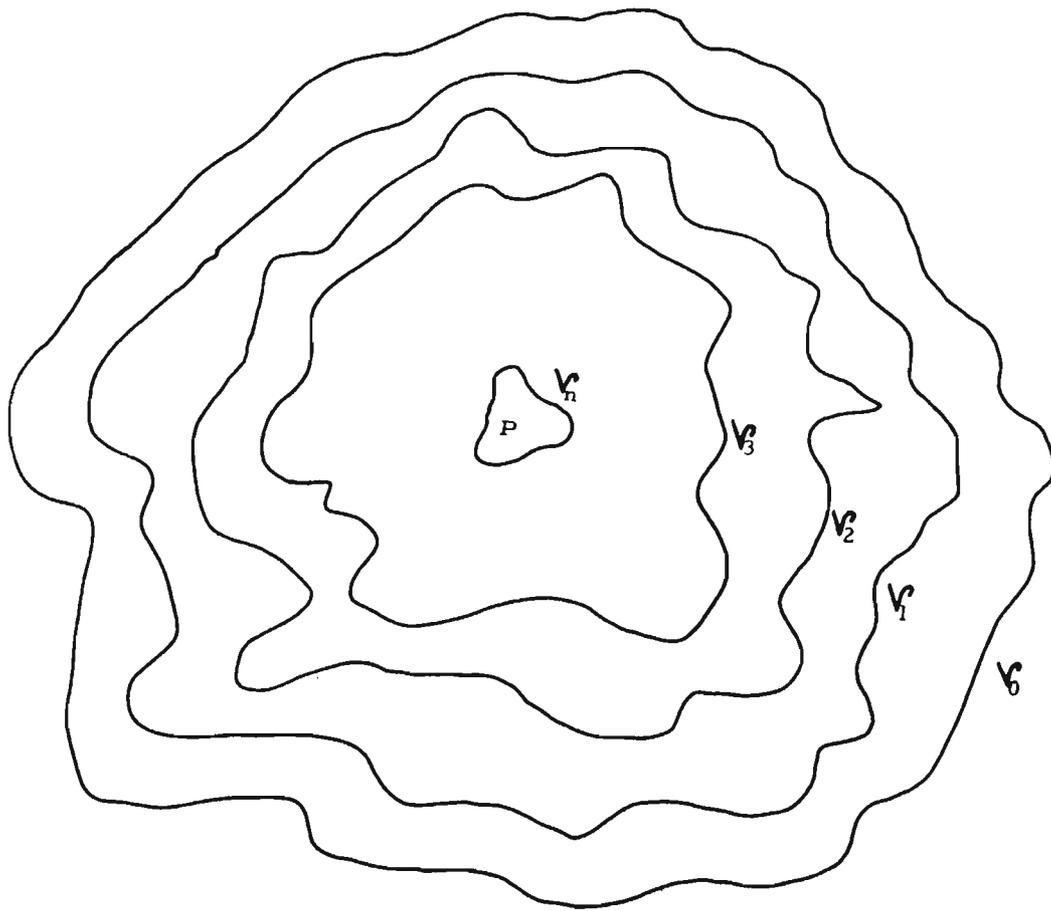


fig. 1.2

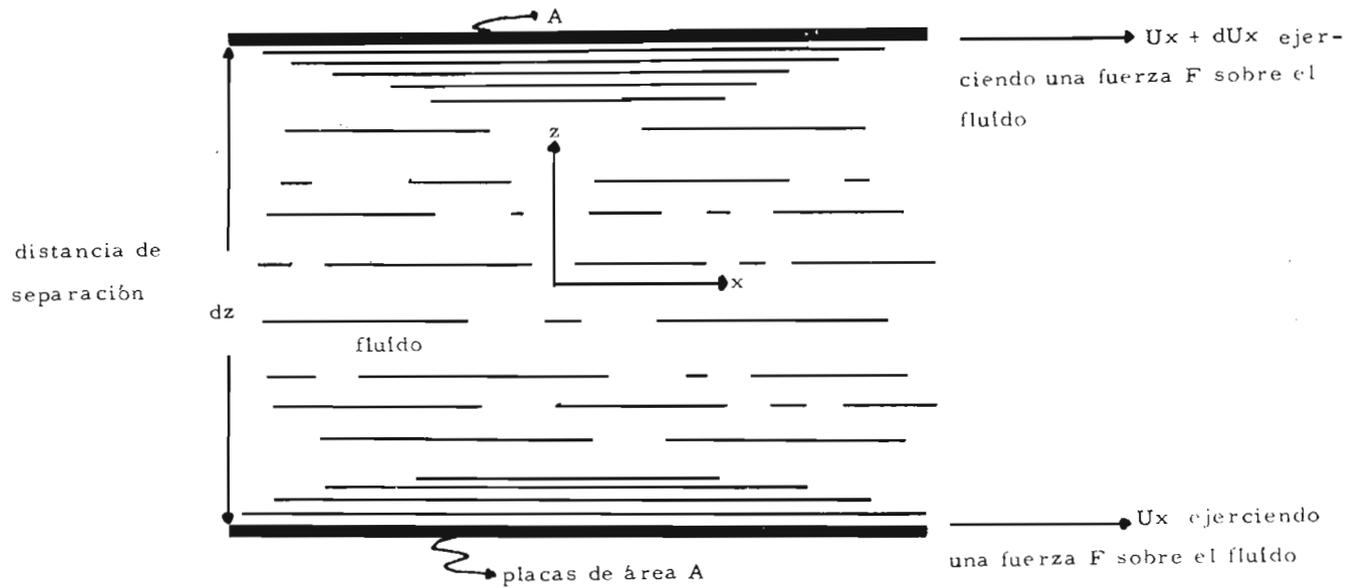


fig. 1.3

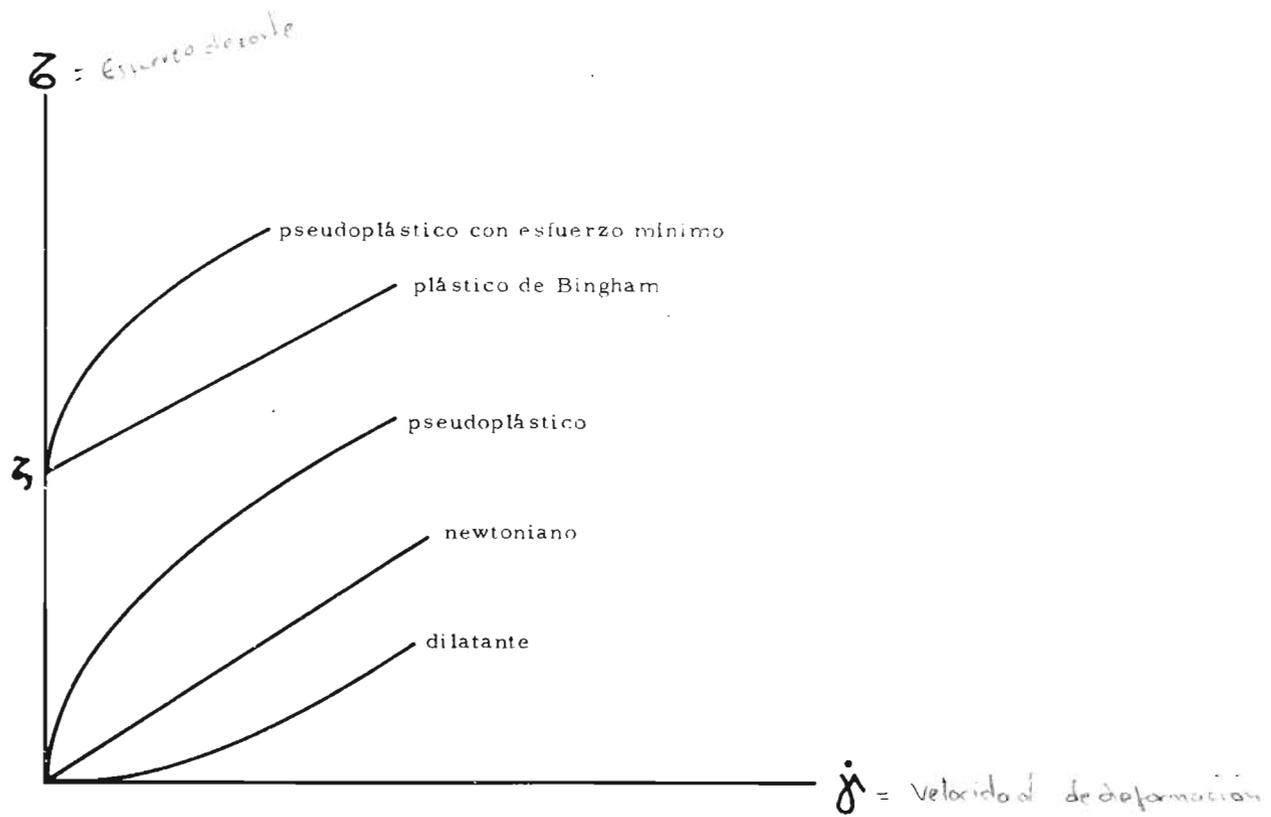


fig. 1.4

FASE		MULTI - FASE	
		UNICA	
VERDADERAMENTE HOMOGENEOS		PSEUDO - HOMOGENEOS	
		LAMINAR TURBULENTO	
PURAMENTE VISCOSOS	DEPENDIENTES INDEPENDIENTES DEL TIEMPO	NEWTONIANO	
		PSEUDOPLASTICO	
		DILATANTE	
	DEPENDIENTES DEL TIEMPO	BINGHAM	
		PSEUDOPLASTICO Y DILATANTE CON ESFUERZO MINIMO	
		TIXOTROPICO	
VISCOELASTICOS	ANTITIXOTROPICO		
	MUCHAS FORMAS		
			NO - NEWTONIANOS

fig. 1.5

CAPITULO: 2

FLUIDOS NEWTONIANOS

1. VISCOSIDAD

A Isaac Newton se le debe la derivación de la ley correspondiente al flujo de fluidos que llevan su nombre, publicada por primera vez en su obra "Principia" en 1687, en donde se lee:

" Hipótesis: la resistencia que proviene de la carencia de movilidad entre las partes de un líquido, siendo éstas iguales, es proporcional a la velocidad con la cuál las partes del líquido son separadas unas de las otras" (1).

Para entender esto, consideremos una capa delgada de fluido entre dos placas paralelas de área A , separadas una distancia h , como en la fig. 2.1.1 (10).

Inicialmente, el sistema está en reposo, pero al cabo del tiempo $t=0$, una fuerza F suficiente se aplica a la placa superior en $z=h$ para mantenerla con velocidad $v_y = Vh$, lo que nos asegura que el flujo sea en la dirección del eje y . Una vez que esta placa se ha puesto en movimiento con una velocidad constante Vh y a medida que el tiempo transcurre, el fluido gana momentum y , siempre y cuando la densidad del fluido sea constante y el flujo en cualquier punto sea isotérmico (a temperatura constante) y laminar (en capas), se establece finalmente un perfil de velocidades ó gradiente lineal en régimen permanente, como se ilustra en la fig. 2.1.2 (11).

Una vez que se ha obtenido el régimen permanente, la fuerza F quedará necesariamente balanceada por una fuerza interna en el fluido. Esto puede representarse como:

$$F/A \propto V_h/h \quad 2.1.1$$

o en forma más general:

$$F/A \propto \Delta v_y / \Delta z \quad 2.1.2$$

Si la ec. 2.1.2 se aplica a un elemento diferencial de fluido, entonces:

$$F/A \propto dv_y / dz \quad 2.1.3$$

En la ec. 2.1.3 el signo de proporcionalidad puede quitarse reemplazándose con una constante de proporcionalidad. Si ésta constante la llamamos μ y además como ya sabemos que $F/A = \tau$, entonces:

$$\tau = \mu (dv_y / dz) \quad 2.1.4$$

Y ésta constante de proporcionalidad μ es precisamente la que representa ésa fuerza interna que balancea a la fuerza F . Es decir, μ es la fuerza tangencial por unidad de área ejercida en capas de fluido separadas una distancia unitaria y teniendo una diferencia de velocidad, también unitaria, entre ellas (8). Esta constante de proporcionalidad μ es la que representa ésa propiedad que todo fluido posee y que conocemos con el nombre de viscosidad; y es también el término que identifica a lo que Newton llamó carencia de movilidad.

Esta viscosidad newtoniana μ depende de la temperatura y la presión solamente, y es independiente de la rapidez de corte. Su curva de flujo será, por lo tanto, una línea recta de pendiente μ , como en la fig. 2.1.3 puede observarse. Más aún, la constante μ , por sí sola, caracteriza completamente al fluido.

Pero nuestra ec. 2.1.4 debe escribirse realmente como:

$$\tau_{zy} = -\mu (dv_y / dz) \quad 2.1.5$$

por lo siguiente: la fuerza aplicada en $z=h$ dió como resultado la velocidad V_h . El fluido en éste punto, posee momentum debido a ésta velocidad. A medida que z decrece, momentum, que pertenece al fluido, decrece puesto que la velocidad decrece. Parte del momentum impartido al fluido en $z=h$ se transmite a la capa adyacente inferior, a la rapidez de momentum especificada; que no es más que la fuerza aplicada en $z=h$. Este momentum mantiene la velocidad del fluido en ese punto, y éste, a su vez, lo transporta a la capa de fluido que está inmediatamente debajo del él, y así sucesivamente. Se vé, entonces, que la fuerza aplicada en la dirección positiva del eje y , ha resultado en la transferencia de momentum en la dirección negativa del eje z . Es por ésto el índice z en τ_{zy} ; y el índice y , es para indicar la dirección del movimiento. El signo negativo se introduce puesto que la transferencia del momentum es en la dirección negativa del eje z , debido a un gradiente positivo de velocidad (10, 11). Este mecanismo de transferencia de momentum, debido a la presencia de gradientes positivos de velocidad, se llama difusión molecular y, es por ésto, que el régimen de flujo es laminar. El gradiente de velocidad puede interpretarse, por consiguiente, como una fuerza impulsora del transporte de momentum.

El comportamiento newtoniano, lo presentan fluidos en los cuáles la disipación de energía viscosa se debe a la colisión de especies moleculares comparativamente pequeñas, como lo predice la ecuación 1.4. Todos los gases, líquidos y soluciones de bajo peso molecular, caen dentro de ésta categoría. Excepciones notables, son las suspensiones coloidales y soluciones poliméricas donde las especies moleculares son grandes. Estos fluidos, muestran marcadas desviacio -

nes del comportamiento newtoniano.

2. CONCEPTOS BASICOS DEL FLUJO

Existen tres leyes físicas fundamentales las cuáles, con excepción de los fenómenos relativísticos y nucleares, se aplican a cada problema de flujo independientemente de la naturaleza del fluido bajo consideración. Y ellas son:

La ley de la conservación de la masa ó la ecuación de continuidad	2. 2. 1
La segunda ley del movimiento de Newton ó la ecuación de movimiento	2. 2. 2
La primera ley de la termodinámica ó la ecuación de energía	2. 2. 3

Anexas a éstas leyes, se necesitan unas relaciones auxiliares para describir al fluido, que son:

La ecuación de estado del fluido, dando la dependencia de la densidad del fluido de la presión y temperatura del mismo	2. 2. 4
La ecuación constitutiva del fluido, caracterizando su comportamiento cuando se le somete a un esfuerzo cortante que resulta en flujo laminar	2. 2. 5

Las ecuaciones 2. 2. 4 y 2. 2. 5 no son leyes, puesto que dependen completamente del material bajo consideración. Por lo tanto, la solución del problema consiste en las funciones que satisfacen éstas ecuaciones y, también, las condiciones a la frontera que se hayan especificado en el problema.

Aunque éstas cinco ecuaciones teóricamente bastan para la solución de los problemas aún más complejos del flujo de flúidos, en la práctica actual las aplicaciones de las ecuaciones de movimiento y energía poseen dificultades insuperables. Por ésto, conjuntamente a la aplicación de éstas ecuaciones, tenemos la:

Ecuación de energía mecánica, que introduce un término de degradación de energía o fricción 2. 2. 6

Las ecuaciones 2. 2. 1, 2. 2. 4 y 2. 2. 5 son esenciales en la solución de todos los problemas de flujo; la ec. 2. 2. 2 es útil en muchos problemas de flujo laminar; la ec. 2. 2. 3, en forma simplificada, es de valor en problemas de flujo no isotérmico; y la ec. 2. 2. 6 es útil en multitud de problemas que involucran ya sea flujo laminar ó flujo turbulento (7).

En lo que sigue, se ha omitido la deducción de las diferentes ecuaciones, puesto que sus tratamientos son largos y salen fuera del objetivo de ésta tesis. Para una información detallada de ellas puede hacerse uso de las referencias 9, 10 y 11.

La ecuación de continuidad, que se obtiene aplicando un balance de materia a un elemento de volumen, describe la variación de la densidad con la posición y el tiempo, en un flúido que se mueve ó está en reposo. Esta ecuación se usa repetidamente para simplificar las ecuaciones de movimiento y energía. Puede ser escrita en dos formas; si la variación de la densidad es con respecto a un punto fijo, tenemos:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = - (\nabla \cdot \rho \vec{v}) \quad . \quad 2. 2. 7$$

y si se describe la rapidez de variación de la densidad tal como la vé un observador que flota con el flúido, entonces:

$$(D\rho/Dt) = -\rho(\nabla \cdot \vec{v}) \quad 2. 2. 8$$

donde:

$(D\rho/Dt) = (\partial\rho/\partial t) + v_x(\partial\rho/\partial x) + v_y(\partial\rho/\partial y) + v_z(\partial\rho/\partial z)$ es la derivada sustancial con respecto al tiempo.

Una simplificación muy importante de la ecuación anterior es la correspondiente a un fluido de densidad constante, ya sea que el sistema esté ó nó en régimen permanente, para el cuál la ec. 2.2.8 se reduce a:

$$(\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \quad 2.2.9$$

Es necesario hacer notar, que la densidad constante es más restrictiva que la condición de incompresibilidad. Un fluido incompresible, está definido simplemente por:

$$(\partial\rho/\partial P) = 0$$

Aunque en realidad ningún fluido es totalmente incompresible, en la práctica se puede admitir con mucha frecuencia que la densidad es constante, con lo que se obtiene una considerable simplificación, sin cometer errores significativos. Hay que observar que la ec. 2.2.9 es válida sólo en el caso en que la densidad permanezca constante para un elemento de fluido que se mueve a lo largo de una línea de corriente, es decir, que $(D\rho/Dt)=0$.

Como las coordenadas más comunes son las rectangulares, cilíndricas y esféricas, la expansión de la ecuación 2.2.9 se da en la tabla 2.2.1

La ecuación de movimiento describe la distribución de la velocidad y la caída presión para un fluido en movimiento. Se deduce aplicando el siguiente balance de momentum a un elemento de volumen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rapidez de entrada} \\ \text{de momentum} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{rapidez de salida} \\ \text{de momentum} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{suma de fuerzas que} \\ \text{actúan sobre el fluido} \end{array} \right\} = \\ (\text{rapidez de acumulación de momentum}) \quad 2.2.10$$

La cantidad de movimiento entra y sale del elemento de volumen en virtud de dos mecanismos: por convección, es decir, debido al flujo global del fluido y por transporte molecular, o sea, a causa de los gradientes de velocidad. En la mayor parte de los casos, las únicas fuerzas importantes serán las procedentes de la presión P que está definida por la ecuación de estado $P = P(\rho, T)$ del fluido, y la fuerza gravitacional por unidad de masa \vec{g} . Por lo tanto, matemáticamente¹, la ec. 2.2.10 puede expresarse como:

$$\rho(D\vec{v}/Dt) = -\nabla P - [\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}] + \rho \vec{g} \quad 2.2.11$$

La ecuación de movimiento expresada en esta forma, establece que un pequeño elemento de volumen que se mueve con el fluido es acelerado por las fuerzas que actúan sobre él. En otras palabras, es una expresión de la segunda ley de Newton, según la cual, la masa por la aceleración es igual a la suma de fuerzas.

Con el fin de utilizar la ec. 2.2.11 para determinar las distribuciones de velocidad, es necesario expresar los esfuerzos cortantes, en función de los gradientes de velocidad y de las propiedades del fluido.

Aquí, es necesario hacer notar que la ec. 2.1.5 es un caso especial, que se aplica al corte de un fluido en placas paralelas, de la ecuación reológica general para un fluido newtoniano (12):

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \Delta_{ij} + (k - 2/3 \mu) (\nabla \cdot \vec{v}) \delta_{ij} \quad 2.2.12$$

donde:

k . - coeficiente de viscosidad de volumen (ó viscosidad de conjunto).

¹ En el apéndice 1 se encuentra un sumario de la notación tensorial.

μ . - coeficiente de viscosidad newtoniana.

Δ_{ij} . - componentes del tensor rapidez de deformación $\bar{\Delta}$.

$$\Delta_{ij} = \left[(\partial v_i / \partial x_j) + (\partial v_j / \partial x_i) \right]$$

δ_{ij} . - componentes del tensor unitario $\bar{\delta}$.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

donde las relaciones entre los ejes coordenados x , y , z y el sistema notacional 1, 2, 3 es:

$$x_1 = x \quad ; \quad x_2 = y \quad ; \quad x_3 = z \quad \quad v_1 = v_x \quad ; \quad v_2 = v_y \quad ; \quad v_3 = v_z$$

Ahora bien, la viscosidad de conjunto es cero para los gases monoatómicos a baja densidad y probablemente no es demasiado importante para los gases densos y líquidos (13), por lo tanto, de la ec. 2.2.12 suprimimos a k . Para cuando el fluido es de densidad constante, aprovechando la ecuación de continuidad, la ec. 2.2.12 se reduce a:

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \Delta_{ij} \quad \text{o} \quad \bar{\tau} = \mu \bar{\Delta} \quad 2.2.13$$

La ec. 2.2.13 que representa la generalización de la ec. 2.1.5, es necesaria establecerla ya que un fluido en movimiento posee tres componentes de velocidad con sus tres gradientes de velocidad respectivos; y cuando esto sucede, existen nueve términos del esfuerzo cortante en cada punto del sistema. Cuando el sistema está descrito por coordenadas rectangulares, los nueve componentes se representan por un tensor de segundo orden simétrico llamado el tensor esfuerzo cortante, denotado por:

$$\bar{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

En función de lo anterior y de acuerdo a la ec. 2.2.13 los componentes del esfuerzo cortante para un fluido newtoniano se encuentran en la tabla 2.2.2.

La ecuación de movimiento, puede aún escribirse en otra forma si el fluido que estamos considerando es newtoniano. Bajo la substitución de los componentes del tensor esfuerzo cortante dados en la tabla 2.2.2 y, además, suponiendo que la densidad y viscosidad del fluido son constantes, se tiene:

$$\rho (D\vec{v} / Dt) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \quad 2.2.14$$

que es la llamada ecuación de Navier - Stokes.

La expansión en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas de las ec. 2.2.11 y 2.2.14 se dan en las tablas 2.2.3 y 2.2.4, respectivamente.

La primera ley de la termodinámica, un enunciado del principio de la conservación de la energía, aplicada a un sistema abierto no permanente, se obtiene mediante el siguiente balance de energía sobre un elemento de fluido:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rapidez de acumulación de energía interna y cinética} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{rapidez neta de transmisión de energía interna y cinética por convección al sistema} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{rapidez neta de transmisión de energía térmica por conducción al sistema} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{rapidez de transmisión de energía en forma de trabajo de los alrededores efectuándose sobre el sistema} \end{array} \right\} \quad 2.2.15$$

La ec. 2.2.15 matemáticamente puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \partial \rho (\hat{U} + 1/2 v^2) / \partial t = & -(\nabla \cdot \rho \vec{v} (\hat{U} + 1/2 v^2)) - (\nabla \cdot \vec{q}) + \rho (\vec{v} \cdot \vec{g}) \\ & - (\nabla \cdot P \vec{v}) - (\nabla \cdot [\vec{c} \cdot \vec{v}]) \end{aligned} \quad 2.2.16$$

Después de ciertas manipulaciones matemáticas, la ec. 2.2.16 se transforma en:

$$\rho \hat{C}_v (DT/Dt) = -(\nabla \cdot \vec{q}) - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\hat{v}} (\nabla \cdot \vec{v}) - (\underline{\underline{\tau}} : \nabla \vec{v}) \quad 2.2.17$$

que es tan general como la ec. 2.2.16 pero es más útil en el cálculo de los perfiles de temperatura.

Si el fluido es newtoniano con una conductividad térmica constante (K) y \vec{q} , el vector flux de conducción de calor, se expresa en términos de gradiente de temperatura (Ley de Fourier) y $\underline{\underline{\tau}}$ en términos de gradientes de velocidad (Ley de Newton) (ec. 2.2.13), la ec. 2.2.17 se convierte en:

$$\rho \hat{C}_v (DT/Dt) = K \nabla^2 T - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\hat{p}} (\nabla \cdot \vec{v}) + \mu \phi_v \quad 2.2.18$$

donde ϕ_v es la llamada función de disipación. El producto $\mu \phi_v$ representa la degradación de la energía de movimiento en energía térmica por efectos viscosos en el fluido. Este término es usualmente despreciable en los cálculos del flujo en tuberías.

ϕ_v está definida en coordenadas rectangulares como:

$$\begin{aligned} \phi_v = & 2 \left[(\partial v_x / \partial x)^2 + (\partial v_y / \partial y)^2 + (\partial v_z / \partial z)^2 \right] + \\ & \left[(\partial v_y / \partial x) + (\partial v_x / \partial y) \right]^2 + \left[(\partial v_z / \partial y) + (\partial v_y / \partial z) \right]^2 + \\ & \left[(\partial v_x / \partial z) + (\partial v_z / \partial x) \right]^2 - \\ & (2/3) \left[(\partial v_x / \partial x) + (\partial v_y / \partial y) + (\partial v_z / \partial z) \right]^2 \quad 2.2.19 \end{aligned}$$

Aún la ec. 2.2.18 es difícil de aplicar en los casos simples por lo cuál es necesario hacer suposiciones adicionales que incluyen:

- gases ideales $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\hat{v}} = P/T$
- fluidos a presión constante
- fluidos incompresibles $\hat{C}_p = \hat{C}_v$ y $(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$
- sólidos $\rho = \text{cte.}$ y $\vec{v} = \vec{0}$

Como el tratamiento posterior se considera el caso de un sistema isotér-

mico, la expansión de éstas ecuaciones en las diferentes coordenadas, queda solamente referida a la literatura (9, 10, 11).

La ecuación de energía mecánica se obtiene formando el producto escalar de \vec{v} con la ecuación de movimiento, obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho (\vec{v} \cdot \vec{v} / 2) &= - (\nabla \cdot \rho (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} / 2) - (\nabla \cdot P \vec{v}) - P (\nabla \cdot \vec{v}) - \\ &\quad (1) \qquad \qquad \qquad (2) \qquad \qquad \qquad (3) \qquad \qquad \qquad (4) \\ (\nabla \cdot [\bar{\bar{\zeta}} \cdot \vec{v}]) &- (-\bar{\bar{\zeta}} : \nabla \vec{v}) + \rho (\vec{v} \cdot \vec{g}) \qquad \qquad \qquad 2.2.20 \\ &\quad (5) \qquad \qquad \qquad (6) \qquad \qquad \qquad (7) \end{aligned}$$

donde los términos representan lo siguiente:

- (1) rapidez de incremento de energía cinética por unidad de volumen.
- (2) rapidez neta de entrada de energía cinética por el flujo global.
- (3) rapidez neta de trabajo, hecho por la presión de los alrededores so
bre el elemento de volumen
- (4) rapidez de conversión reversible a energía interna.
- (5) rapidez de trabajo hecho por las fuerzas viscosas, sobre el elemen
to de volumen.
- (6) rapidez de conversión irreversible a energía interna.
- (7) rapidez de trabajo hecha por la fuerza de gravedad sobre el elemen
to de volumen.

Ahora bien, las ec. 2.2.20 y 2.2.16 pueden modificarse respectivamente a:

$$\begin{aligned} \rho (D(1/2 v^2)/Dt) &= P (\nabla \cdot \vec{v}) - (\nabla \cdot P \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{g}) \rho - \\ &\quad (\nabla \cdot [\bar{\bar{\zeta}} \cdot \vec{v}]) + (\bar{\bar{\zeta}} : \nabla \vec{v}) \qquad \qquad \qquad 2.2.21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho (D(\hat{U} + 1/2 v^2)/Dt) &= - (\nabla \cdot \vec{q}) + (\vec{v} \cdot \vec{g}) \rho - (\nabla \cdot P \vec{v}) - \\ &\quad (\nabla \cdot [\bar{\bar{\zeta}} \cdot \vec{v}]) \qquad \qquad \qquad 2.2.22 \end{aligned}$$

Ahora restando la ec. 2. 2. 21 de la ec. 2. 2. 22 se obtiene:

$$\rho (D\hat{U}/Dt) = - (\nabla \cdot \vec{q}) - P (\nabla \cdot \vec{v}) - (\bar{\bar{c}} : \nabla \vec{v}) \quad 2. 2. 23$$

que es la llamada ecuación de energía térmica.

Es de interés comparar las ecuaciones de energía mecánica (2. 2. 21) y la de energía térmica (2. 2. 23). Observamos que solamente los términos $P (\nabla \cdot \vec{v})$ y $(\bar{\bar{c}} : \nabla \vec{v})$ son comunes a ambas ecuaciones y aparecen con signos opuestos en las dos ecuaciones. Por lo tanto, éstos términos describen la interconversión de energía mecánica y térmica. El término $P (\nabla \cdot \vec{v})$ puede ser ya sea negativo ó positivo, dependiendo si el fluido se expande ó se comprime, de aquí que represente un modo de interconversión de una forma de energía a la otra. De otro modo, el término $(\bar{\bar{c}} : \nabla \vec{v})$ siempre es positivo, y por lo tanto, representa una degradación irreversible de energía mecánica a térmica, lo que se ve más claramente para fluidos newtonianos:

$$(- \bar{\bar{c}} : \nabla \vec{v}) = \mu \phi_v = (1/2) \mu \sum_i \sum_j \left[(\partial v_i / \partial x_j) + (\partial v_j / \partial x_i) - (2/3) (\nabla \cdot \vec{v}) \delta_{ij} \right]^2 \quad 2. 2. 24$$

Por lo tanto, decimos que un sistema es isotérmico cuando hablamos de uno en el cuál la transferencia de energía térmica se lleva a cabo bajo un gradiente muy pequeño de temperatura.

La ecuación de estado se puede escribir en general como:

$$\rho = G(P, T, \text{ fluido}) \quad 2. 2. 25$$

Es necesario contar con una relación del tipo de la ecuación 2. 2. 25 ya que directamente ó implícitamente cada problema de flujo involucra una relación entre la densidad y la presión.

Para los cálculos en ingeniería de flujo de gases, podemos considerar como

adecuada la ley de los gases ideales corregida por el factor de compresibilidad, o sea:

$$p = P / (z R T) \quad 2.2.26$$

donde:

z. - factor de compresibilidad.

R. - constante de los gases.

Por otra parte, la suposición hecha anteriormente de incompresibilidad se satisface en el caso de los líquidos.

La ecuación constitutiva para fluidos newtonianos, es:

$$\tau_{ij} = \mu \Delta_{ij} \quad \text{ó} \quad \tau = \mu \dot{\gamma} \quad \begin{matrix} 2.2.27 \\ (2.2.13) \end{matrix}$$

donde:

τ . - esfuerzo cortante.

$\dot{\gamma}$. - valor absoluto de la rapidez de corte.

μ . - viscosidad newtoniana.

Para gases, la viscosidad se puede calcular con ecuaciones como las propuestas por Bromley y Wilke, Arnold, Stiel y Thodos, etc., y en función de presión y temperatura reducidas (11).

Para líquidos, la viscosidad es altamente sensitiva a la temperatura y a la estructura molecular, pero relativamente insensitiva a la presión, ó lo que para propósitos ingenieriles la ecuación de Andrade:

$$\mu = A e^{B/T} \quad 2.2.28$$

donde:

A y B. - constantes propias del material.

T. - temperatura absoluta.

permite una buena interpolación de datos entre dos ó más temperaturas (7).

3. FORMAS DE FLUJO

Muy a parte de las relaciones teóricas que han sido descritas, existe una for-
mación extensiva de conocimiento empírico del flujo de flúidos. Lo más impor-
tante de las relaciones discutidas, es que nos permiten predecir si los flúidos
pueden fluir bien sea en régimen laminar ó turbulento (7).

El primero en hacer la observación fué Osborne Reynolds en 1883. Sus expe-
rimentos demostraron que a velocidades suficientemente bajas, el flúido fluía
por láminas (ó capas) sin formación de remolinos, mientras que a grandes velo-
cidades se desarrollaban éstos remolinos y el flujo estaba caracterizado por un
movimiento aparentemente cáótico. Reynolds también demostró que el criterio
para determinar el rompimiento del movimiento laminar y la transición al flujo
turbulento, estaba dado por una cantidad adimensional, que lleva su nombre, el
número de Reynolds:

$$Re = (X v \rho) / \mu \quad 2.3.1$$

donde X es alguna dimensión lineal apropiada que caracteriza la frontera del flu-
jo.

El número de Reynolds es una medida de la razón de las fuerzas inerciales
(masa por aceleración) a las fuerzas viscosas que se han desarrollado en el flu-
do en movimiento. De la ecuación de Navier - Stokes usando coordenadas carte-
sianas y la componente x solamente, tenemos que:

$$\rho \left[(\partial v_x / \partial t) + v_x (\partial v_x / \partial x) + v_y (\partial v_y / \partial y) + v_z (\partial v_z / \partial z) \right] =$$

$$- (\partial P / \partial x) + \mu \left[(\partial^2 v_x / \partial x^2) + (\partial^2 v_y / \partial y^2) + (\partial^2 v_z / \partial z^2) \right] + \rho g_x \quad 2.3.2$$

Aplicando un análisis dimensional a la ecuación 2.3.2:

$$\begin{array}{cccccc}
 (\rho v/t) + (\rho v^2/t) = (\Delta P/L) + (\mu v/L^2) + (\rho g) & & & & & 2.3.3 \\
 \text{(I)} & \text{(II)} & \text{(III)} & \text{(IV)} & \text{(V)} &
 \end{array}$$

podremos observar que:

$$(II / IV) = (\rho v^2 L^{-1}) / (\mu v L^{-2}) = (\rho v L / \mu) = Re \quad 2.3.4$$

Conjuntamente con las dos formas de flujo existentes, se encuentra la llamada capa límite que aparece cuando un fluido fluye sobre una superficie sólida (b o una fase gaseosa relativa a una fase líquida). Se predice de consideraciones teóricas y se ha observado que se produce un gradiente de velocidad pronunciado adyacente a la interfase, o sea, en la capa límite. Para valores bajos del Reynolds el flujo en la capa límite es laminar; a valores altos la capa límite se divide en una subcapa laminar, una región de transición y una región turbulenta. Esta capa límite es muy importante cuando los perfiles de velocidad del flujo, no están completamente desarrollados.

El flujo laminar ideal en un ducto de sección transversal constante, no tiene componentes de velocidad normales a la dirección del flujo. Esto también es cierto en la práctica, una vez que se ha probado que la viscosidad del fluido permanece constante, como en el caso de los fluidos newtonianos. Existen ciertos casos de fluidos no newtonianos en que su consistencia puede cambiar con la distancia viajada y esto da lugar a pequeños componentes transversales de velocidad; aún así, el flujo es considerado laminar.

En el caso de fluidos newtonianos donde el flujo es totalmente laminar y donde la geometría del flujo es simple (como en tuberías), la solución analítica de la ecuación de movimiento nos permite predecir el crecimiento de la capa lí-

mite, el perfil de velocidades y la disipación de energía.

Mediante la ec. 2.3.1 Reynolds demostró que cuándo ésta era menor de 1900 el flujo era laminar, pero cuando el valor del grupo era mayor de 2000, el flujo era turbulento.

El flujo turbulento, se caracteriza por la fluctuación de los componentes de la velocidad en todas direcciones, transversal y paralelamente a la dirección de flujo, es decir, existe un mezclado considerable de fluido durante el flujo. Un elemento de fluido tiene una velocidad promedio paralela al eje del ducto, pero su movimiento es caótico. Normalmente, la intensidad de la turbulencia es mayor en la dirección del flujo, que transversalmente a él. Lejos de una frontera, la turbulencia tiende a ser verdaderamente aleatoria, pero cerca de ella (una pared, por ejemplo) se suprime.

Los esfuerzos cortantes en el fluido, los cuáles son debidos a la viscosidad, tienden a estabilizar el movimiento unidireccional del elemento de fluido en flujo, mientras que las fuerzas inerciales, las cuáles son debidas al peso y velocidad del fluido, tienden a perturbar el flujo unidireccional. Es por lo tanto, de acuerdo a la ec. 2.3.4, que éstas fuerzas determinan la existencia del flujo turbulento ó laminar en un sistema.

Cuando el flujo es turbulento, existen complicaciones casi insuperables que hacen que la solución de las ecuaciones fundamentales sea imposible. Las primeras teorías, ó empíricas, trataron de describir la turbulencia en base de las cantidades temporales promedio de flujo, cuyo mecanismo no es muy real (14). A ésta categoría pertenece la teoría de la longitud de mezcla de Prandtl, de 1900 a 1915, quién pensó que la alta pérdida de presión que ocurría durante flu

jo turbulento, se debía al intercambio de momentum entre elementos de fluido de capas diferentes. Y esa longitud de mezclado es la distancia de un elemento de fluido (que contiene muchas moléculas) se movió transversalmente al flujo principal antes de perder su identidad y mezclarse completamente con otros elementos. La segunda teoría o teoría estadística de la turbulencia, considera un mecanismo más real de flujo turbulento, y está basado en el conocimiento de las fluctuciones de las diversas variables de flujo y tuvo como fundamento los trabajos de Taylor en 1921 (14), quién introdujo la idea de que la velocidad de l fluido en el movimiento turbulento era una función contínua aleatoria de la posición y el tiempo.

El hecho de que la ecuación de Navier - Stokes no se aplique en flujo turbulento se circunscribe a su solución y no a su aplicabilidad, ya que la descripción completa de las velocidades fluctuantes requieren un número enorme de componentes y además, de que las velocidades del fluido referidas en dicha ecuación son las fluctuaciones instantáneas de los valores puntuales y no las promedio.

Es obvio, por lo tanto, que el momentum puede transferirse por el movimiento molecular como por el movimiento de los remolinos, y que si el segundo existe, no implica que el transporte esté ausente en forma molecular, mientras existan gradientes de velocidad.

Ahora bien, la transición de régimen laminar a turbulento está en la vecindad del número de Reynolds de 2100. Pero como el mecanismo de transición de laminar a turbulento no está bien conocido, éste criterio no es general; depende de muchos factores y entre los más importantes es el de la naturaleza del fluido (newtoniano, no newtoniano, etc.), del tipo de geometría usada y del tipo

de superficie por donde fluye (lisa, rugosa, etc.).

Por lo tanto, existen dos cuestiones importantes que deben de considerarse en el flujo de fluidos en cualquier tipo de sistema (7):

- a) Las condiciones bajo las cuáles, suficientemente lejos de cualquier clase de entrada e indiferente del tipo de flujo aguas arriba de la entrada, el flujo será laminar ó turbulento.
- b) La distancia desde la entrada requerida para el desarrollo completo del flujo laminar ó turbulento.

TABLA 2.2.1

Ecuación de Continuidad para Fluidos Incompresibles

Coordenadas rectangulares (x, y, z):

$$(\partial v_x / \partial x) + (\partial v_y / \partial y) + (\partial v_z / \partial z) = 0 \quad (1)$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ , z):

$$(1/r) \partial (r v_r) / \partial r + (1/r) (\partial v_\theta / \partial \theta) + (\partial v_z / \partial z) = 0 \quad (2)$$

Coordenadas esféricas (r, θ , ϕ):

$$(1/r^2) \partial (r^2 v_r) / \partial r + (1/r \sin \theta) \partial (v_\theta \sin \theta) / \partial \theta + (1/r \sin \theta) (\partial v_\phi / \partial \phi) = 0 \quad (3)$$

TABLA 2.2.2

Componentes del Tensor Esfuerzo Cortante para Fluidos
Newtonianos

Coordenadas rectangulares:

$$\tau_{xx} = -\mu \left[2 \left(\partial v_x / \partial x \right) - (2/3) (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$$

$$\tau_{yy} = -\mu \left[2 \left(\partial v_y / \partial y \right) - (2/3) (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[2 \left(\partial v_z / \partial z \right) - (2/3) (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left[\left(\partial v_x / \partial y \right) + \left(\partial v_y / \partial x \right) \right]$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left[\left(\partial v_y / \partial z \right) + \left(\partial v_z / \partial y \right) \right]$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left[\left(\partial v_z / \partial x \right) + \left(\partial v_x / \partial z \right) \right]$$

donde:

$(\nabla \cdot \vec{v})$ está definida por la ec. (1) de la Tabla 2.2.1.

Coordenadas cilíndricas:

$$\tau_{rr} = -\mu \left[2 \left(\partial v_r / \partial r \right) - (2/3) (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \left((1/r) \left(\partial v_\theta / \partial \theta \right) + (v_r/r) \right) - (2/3) (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[2 \left(\partial v_z / \partial z \right) - (2/3) (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \partial(v_{\theta}/r) / \partial r + (1/r) (\partial v_r / \partial \theta) \right]$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left[(\partial v_{\theta} / \partial z) + (1/r) (\partial v_z / \partial \theta) \right]$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu \left[(\partial v_z / \partial r) + (\partial v_r / \partial z) \right]$$

donde:

$(\nabla \cdot \vec{v})$ está definido por la ec. (2) de la tabla 2.2.1.

Coordenadas esféricas:

$$\tau_{rr} = -\mu \left[(\partial v_r / \partial r) - (2/3) (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \left((1/r) (\partial v_{\theta} / \partial \theta) + (v_r / r) \right) - (2/3) (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$$

$$\tau_{\phi\phi} = -\mu \left[2 \left((1/r \sin \theta) (\partial v_{\phi} / \partial \phi) + (v_r / r) + (v_{\theta} \cot \theta / r) \right) - (2/3) (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \partial(v_{\theta}/r) / \partial r + (1/r) (\partial v_r / \partial \theta) \right]$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu \left[(\sin \theta / r) \partial(v_{\phi} / \sin \theta) / \partial \theta + (1/r \sin \theta) (\partial v_{\theta} / \partial \phi) \right]$$

$$\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} = -\mu \left[(1/r \sin \theta) (\partial v_r / \partial \phi) + r \partial(v_{\phi}/r) / \partial r \right]$$

donde:

$(\nabla \cdot \vec{v})$ está definida por la ec. (3) de la tabla 2.2.1.

TABLA 2. 2. 3

Ecuación de Movimiento en Función del Tensor Esfuerzo Cortante

Coordenadas rectangulares:

componente x

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \quad (1)$$

componente y

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y \quad (2)$$

componente z

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (3)$$

T A B L A 2.2.3 (continuación)

Coordenadas cilíndricas:

componente r

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$- \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) + \rho g_r \quad (1)$$

componente θ

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$- \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right) + \rho g_\theta \quad (2)$$

componente z

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$- \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (3)$$

Coordenadas esféricas:

componente r

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$- \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} \right.$$

$$\left. - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right) + \rho g_r \quad (1)$$

T A B L A 2.2.3 (continuación)

componente θ

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} \right. \\ & \left. + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot \theta}{r} \tau_{\phi\phi} \right) + \rho g_\theta \end{aligned} \quad (2)$$

componente ϕ

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \right. \\ & \left. + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} \right. \\ & \left. + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2 \cot \theta}{r} \tau_{\theta\phi} \right) + \rho g_\phi \end{aligned} \quad (3)$$

TABLA 2.2.4

Ecuación de Navier - Stokes

Coordenadas rectangulares:

componente x

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \quad (1)$$

componente y

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \quad (2)$$

componente z

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (3)$$

Coordenadas cilíndricas:

componente r

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) + \rho g_r \quad (1)$$

T A B L A 2.2.4

(continuación)

componente θ

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ & + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{z}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \\ & + \rho g_\theta \end{aligned} \quad (2)$$

componente z

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} \\ & + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \end{aligned} \quad (3)$$

Coordenadas esféricas:

componente r

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + (v_\phi / r \sin \theta) \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = \\ & -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{z}{r^2} v_r - \frac{z}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{z}{r^2} v_\theta \cot \theta - \right. \\ & \left. - \frac{z}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho g_r \end{aligned} \quad (1)$$

componente θ

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = \\ & -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{z}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{z \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \\ & + \rho g_\theta \end{aligned} \quad (2)$$

T A B L A 2.2.4

(continuación)

componente ϕ

$$\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) =$$

$$-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \right.$$

$$\left. + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) + \rho g_\phi$$

(3)

En estas ecuaciones:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

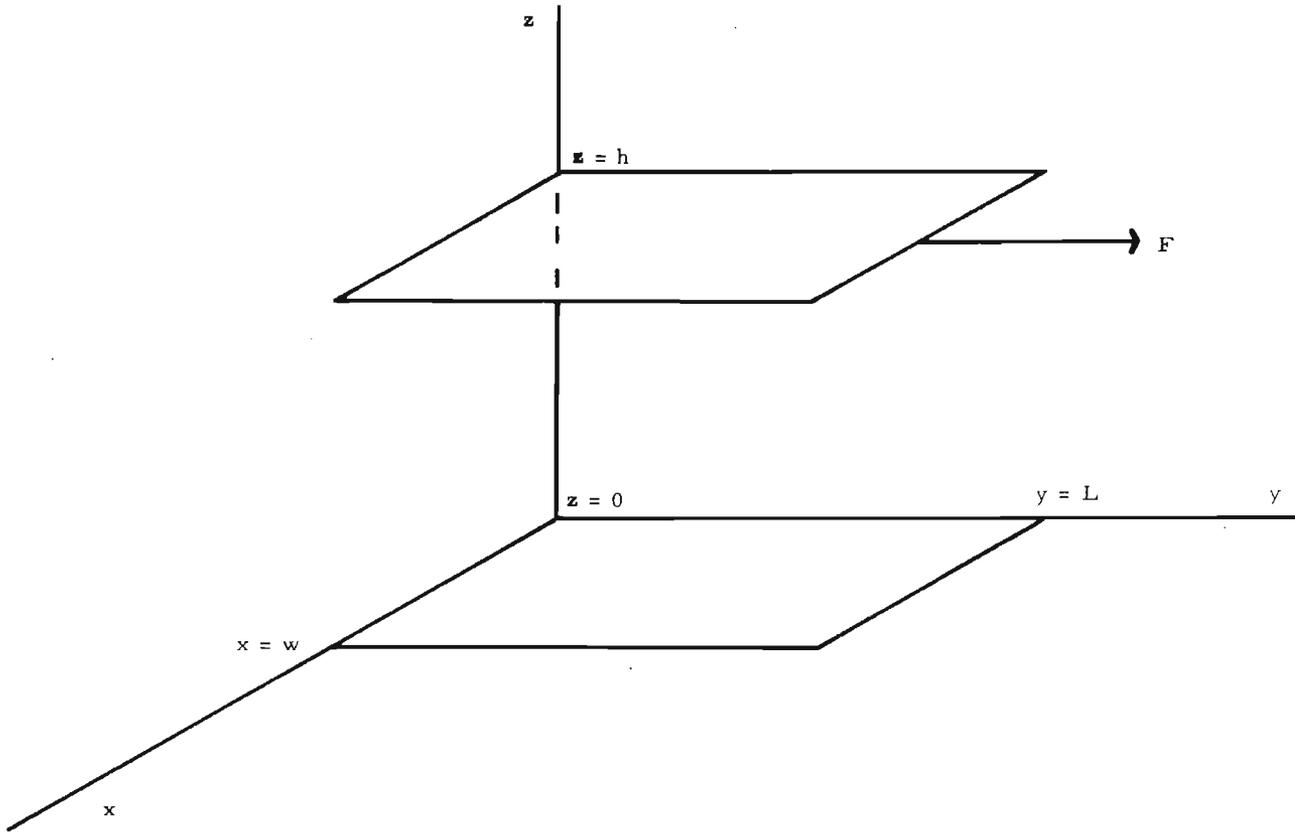


fig. 2.1.1

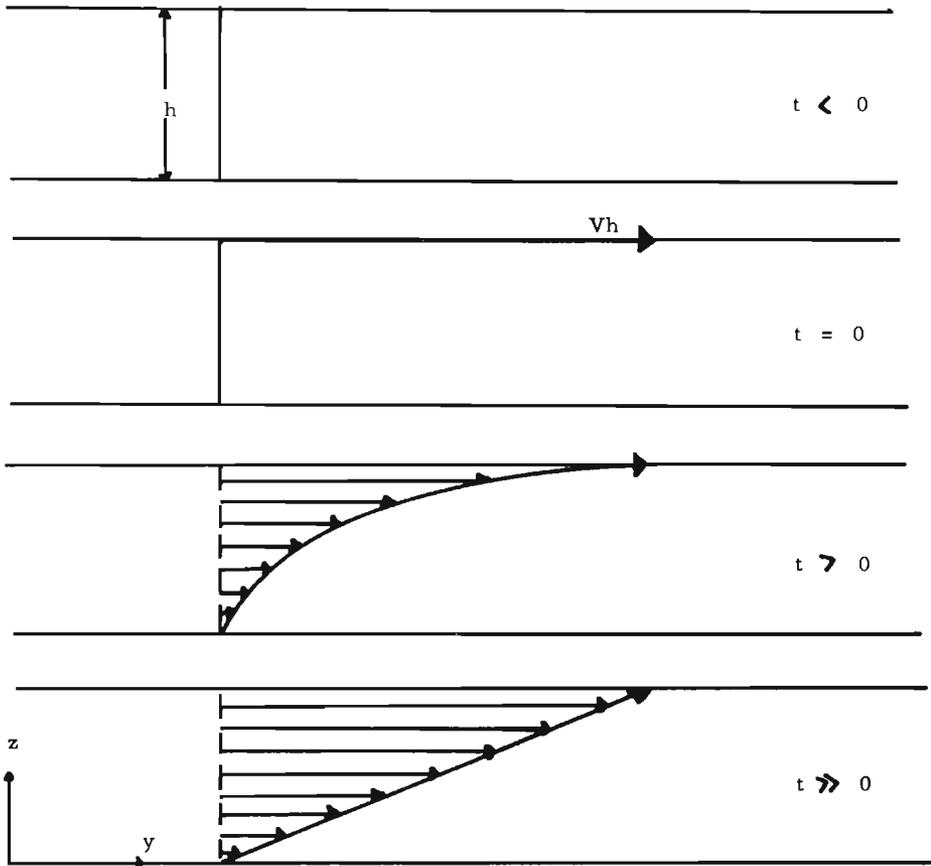


fig. 2.1.2

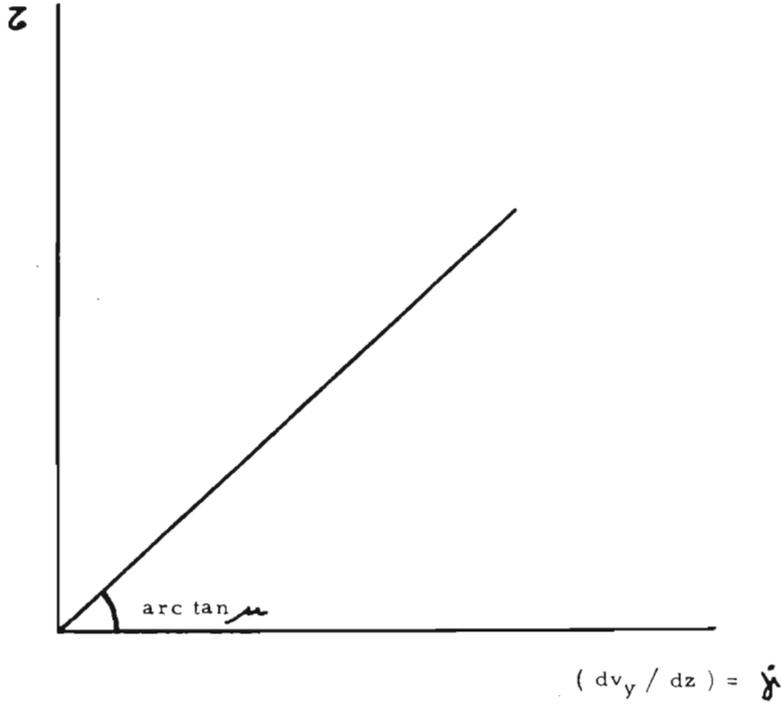


fig. 2.1.3

CAPITULO: 3

FLUIDOS NO NEWTONIANOS

1. ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Aunque la ec. 1.4 representa teóricamente el comportamiento de un fluido en general, en la práctica, la inclusión de todos los parámetros propuestos hace imposible el análisis de ese comportamiento, por su complejidad matemática. Por otra parte, la relación lineal propuesta para los fluidos newtonianos en la ec. 2.2.13 resulta insuficiente en el análisis del comportamiento de una gran cantidad de materiales de interés para el ingeniero químico. Para resumir la distinción establecida con anterioridad, son materiales no newtonianos aquellos para los cuales la curva de flujo no es lineal, como la que se muestra en la fig. 2.1.3. Es decir, la viscosidad de un fluido no newtoniano no es constante a diferentes presiones y temperaturas, pero además, depende también de otros factores tales como la rapidez de deformación, el aparato en el cual el fluido se encuentra y aún en la historia previa del fluido.

La clasificación hecha en el capítulo 1 para los fluidos no newtonianos, puede resumirse en tres tipos:

- 1) Fluidos para los cuales la rapidez de corte es alguna función del esfuerzo cortante en un punto solamente.

- 2) Fluidos para los que la relación entre el esfuerzo cortante y la rapidez de corte, depende del tiempo en el que el fluido ha sido cortado ó en su historia previa.
- 3) Sistemas que tienen características de sólidos y fluidos y exhiben una recuperación parcial elástica después de la deformación.

Estos tres tipos los trataremos en orden.

1. 1 Fluidos no newtonianos independientes del tiempo.

Los fluidos del primer tipo pueden ser descritos por una ecuación de la forma (7, 8):

$$\dot{\gamma} = f(\tau) \quad 3.1.1$$

Estos son los llamados fluidos no newtonianos puramente viscosos. Dependiendo de la naturaleza de la función en la ec. 3.1.1, éstos pueden ser subdivididos en:

- A) Plásticos de Bingham
- B) Fluidos Pseudoplásticos
- C) Fluidos Dilatantes

A) Plásticos de Bingham

Estos fluidos exhiben un esfuerzo mínimo requerido, por abajo del cual, no hay flujo. Al aplicar esfuerzos superiores al mínimo, el fluido fluye como un fluido newtoniano. Su ecuación constitutiva puede ser escrita como:

$$\tau - \tau_y = \mu_p \dot{\gamma} \quad ; \quad \tau > \tau_y \quad 3.1.2$$

donde:

μ_p - viscosidad plástica ó coeficiente de rigidez; de la fig. 3.1.1 se puede observar que μ_p es la pendiente de la curva de flujo.

El fluido en reposo contiene una estructura tridimensional de rigidez suficiente para resistir cualquier esfuerzo, menor que el esfuerzo mínimo τ_y . Si este valor se excede, la estructura se desintegra completamente y el sistema se comporta como newtoniano bajo el esfuerzo $\tau = \tau_y$. Si el esfuerzo cae por debajo de τ_y la estructura se vuelve a formar.

Materiales de este tipo son pinturas de aceite, algunas suspensiones, emulsiones y ciertos asfaltos; lodos de perforación, aguas de albañal y pastas de dientes.

B) Pseudoplásticos

De acuerdo a la fig. 3.1.1 observamos que la razón del esfuerzo cortante a la rapidez de corte, la cual se llama viscosidad aparente, se hace menor progresivamente al aumentar la rapidez de corte; a valores muy altos de la rapidez de corte, la curva de flujo es lineal y la pendiente de este caso límite se conoce como viscosidad a corte infinito y se le designa por μ_∞ .

No existe una forma simple general de una ecuación constitutiva para estos fluidos que describa adecuadamente su comportamiento. Aún el modelo más simple, contiene dos parámetros que caracterizan el fluido, en comparación con la única constante que se necesita en el fluido newtoniano. Entre estos modelos empíricos y semiempíricos, se pueden citar los siguientes (7):

B. 1) Ley de la Potencia

Esta ecuación es el resultado de una función empírica como consecuencia de graficar en escala logarítmica el esfuerzo cortante contra la rapidez de corte, dando lugar a una línea recta con pendiente entre cero y la unidad. Esta es:

$$\tau = K (\dot{\gamma})^n$$

3.1.3

donde K y n son constantes para el fluido en particular; K es una medida de la consistencia del fluido, a valores de K más altos entonces más viscoso es el fluido; n es una medida del grado de comportamiento no newtoniano y, cuánto más se aleja de la unidad más pronunciado es el comportamiento no newtoniano. Es importante hacer notar que aunque n es casi constante, en muchos casos en el rango de la rapidez de corte de las condiciones de operación, no es una constante verdadera para todos los fluidos sobre todos los rangos posibles.

Se le han hecho objeciones a éste modelo debido a las unidades de K que dependen de n , pero en las aplicaciones de ingeniería esto no es un problema serio. La viscosidad aparente se puede poner en función de las constantes ya que:

$$\mu_a = \tau / \dot{\gamma} \quad 3.1.4$$

entonces:

$$\mu_a = K (\dot{\gamma})^{n-1} \quad 3.1.5$$

Sin embargo, éste modelo aunque se ajusta muy bien a los datos experimentales, falla para valores muy bajos y muy altos del gradiente de velocidad, ya que en esas zonas el comportamiento de la solución tiende a ser newtoniano.

B.2) Modelo de Eyring

Esta ecuación basada en la teoría cinética de los líquidos de Eyring (11) es:

$$\tau = A \operatorname{arc} \operatorname{senh} (\dot{\gamma} / B) \quad 3.1.6$$

donde:

A y B . - coeficientes reológicos que caracterizan al material.

Su viscosidad aparente está dada por:

$$\mu_a = A \operatorname{arc} \operatorname{senh} (\dot{\gamma} / B) / \dot{\gamma} \quad 3.1.7$$

Como la ley de la potencia, éste modelo reproduce datos experimentales so
bre rangos limitados de gradientes de velocidad. Pero contrariamente a ella,

se reduce asintóticamente a la ley de Newton, con $\mu = A / B$, a gradientes de velocidad bajos.

Existe una modificación de la ec. 3.1.6 mediante la adición del término lineal del gradiente de velocidad, llamada la ecuación de Powell - Eyring:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} + A \operatorname{arc} \sinh (\dot{\gamma} / B) \quad 3.1.8$$

B.3) Modelo de Ellis

Este modelo es más flexible pero enteramente empírico y que se puede escribir como :

$$\dot{\gamma} = (\phi_0 + \phi_1 (\tau)^{\alpha-1}) \tau \quad 3.1.9$$

donde:

ϕ_0 , ϕ_1 y α .- son tres parámetros que caracterizan al fluido.

La viscosidad aparente es:

$$\mu_a = 1 / (\phi_0 + \phi_1 (\tau)^{\alpha-1}) \quad 3.1.10$$

Si $\phi_1 = 0$, la ecuación se reduce a la ley de Newton con $\phi_0 = 1 / \mu$; si $\phi_0 = 0$, se reduce a la ley de la potencia con $\alpha = 1 / n$ y $\phi_1 = (1/K)^{(1/n)}$.

Cuando $\alpha > 1$ la ecuación se aproxima a la de Newton para valores bajos del esfuerzo cortante, mientras que para $\alpha < 1$ tiende a la ecuación de Newton para valores altos del esfuerzo cortante.

B.4) Modelo de Reiner - Philippoff

Este modelo consta también de tres parámetros :

$$\dot{\gamma} = \tau / (\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty / (1 + (\tau/\tau_s)^2))) \quad 3.1.11$$

donde:

μ_0 , μ_∞ y τ_s .- son constantes que caracterizan al fluido.

Esta ecuación se reduce a la ley de Newton para valores bajos de la rapidez

de corte con $\mu = \mu_0$ y a valores altos con $\mu = \mu_\infty$. La viscosidad aparente está dada por:

$$\mu_a = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty / (1 + (\tau / \tau_s)^2)) \quad 3.1.12$$

B. 5) Ecuación de Sisko

Está basada en el concepto rudimentario de sumar los esfuerzos newtonianos y los no newtonianos:

$$\tau = a \dot{\gamma} + b (\dot{\gamma})^c \quad 3.1.13$$

donde:

a, b y c. - constantes que caracterizan al fluido.

La viscosidad aparente está dada por:

$$\mu_a = a + b (\dot{\gamma})^{c-1} \quad 3.1.14$$

Sisko encontró que su ecuación se ajusta en un rango amplio, a una serie de grasas de hidrocarburos de composición y propiedades variadas.

B. 6) Ecuación de Cross

Ha sido desarrollada de consideraciones mecánicas y contiene tres parámetros (7):

$$\dot{\gamma} = \tau / (\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty / (1 + \alpha (\dot{\gamma})^{2/3}))) \quad 3.1.15$$

donde:

μ_0 y μ_∞ .- viscosidades aparentes a cero e infinita rapidez de corte.

α .- coeficiente que se relaciona a la estabilidad de corte de la estructura.

Reduce los datos extremadamente bien siendo superior a otras de simplicidad comparable. La viscosidad aparente está dada por:

$$\mu_a = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty / (1 + \alpha (\dot{\gamma})^{(2/3)})) \quad 3.1.16$$

B. 7) Ecuación de Meter

Esta ecuación desarrollada por Meter y Bird (7) contiene cuatro parámetros:

$$\tau / \dot{\gamma} = \mu_a = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty / (1 + (\tau / \tau_m)^{\alpha - 1})) \quad 3.1.17$$

donde:

μ_0, μ_∞ - viscosidades aparentes a cero e infinita rapidez de corte.

τ_m - esfuerzo cortante al cuál $\mu_a = (\mu_0 + \mu_\infty) / 2$. Cuando

$\mu_\infty \ll \mu_0$, como es generalmente el caso, τ_m es el esfuerzo cortante cuando $\mu_a \doteq (1/2) \mu_0$ y se designa por $\tau_{1/2}$.

El tipo de comportamiento pseudoplástico, es característico de suspensiones de partículas asimétricas ó soluciones de polímeros con moléculas grandes tales como los derivados de la celulosa. Esto sugiere que la interpretación física del fenómeno, es probablemente que incrementando la rapidez de corte las partículas asimétricas ó moléculas se alinean progresivamente. El entremezclado aleatorio existente cuando el fluido está en reposo, se convierte en un alineamiento con la dirección del flujo al empezar el movimiento. La viscosidad aparente continúa bajando al ir aumentando la rapidez de corte hasta que el alineamiento a lo largo de las líneas de flujo ya no es posible porque llega al máximo y la curva de flujo se vuelve lineal.

Para los fluidos pseudoplásticos con un esfuerzo mínimo, se puede usar cualquiera de los modelos anteriores, excepto que existe flujo hasta la aplicación de un esfuerzo cortante mayor al mínimo. Si se aplica a la ley de la potencia, entonces:

$$\tau - \tau_y = K (\dot{\gamma})^n \quad 3.1.18$$

C) Fluidos Dilatantes

Para éstos fluidos, la viscosidad aparente, aumenta al ir aumentando la rapidez de corte. Matemáticamente son similares a los pseudoplásticos y, además, las ecuaciones empíricas de los pseudoplásticos se aplican a los dilatantes con diferentes valores apropiados de los parámetros reológicos. Por ejemplo, haciendo referencia a la ley de la potencia, n es mayor que la unidad para los fluidos dilatantes.

Estos fluidos son mucho menos comunes que los abundantes pseudoplásticos y la dilatancia se observa sólo en ciertos rangos de concentración en suspensiones de sólidos de forma irregular en líquidos(15). Cuando éstas suspensiones concentradas están en reposo, el espacio vacío es mínimo y el líquido es solo suficiente para llenar éstos vacíos. Cuando estos materiales son cortados a velocidades bajas, el líquido lubrica el movimiento de una partícula que pasa sobre otra y los esfuerzos, consecuentemente, son pequeños. A velocidades altas de corte el empaquetamiento denso de las partículas se rompe y el material se expande ligeramente y los espacios vacíos aumentan; en éste momento, hay insuficiente líquido en la nueva estructura para lubricar el flujo de las partículas que pasan unas sobre otras y los esfuerzos aplicados tienen que ser mucho más grandes. La formación de ésta estructura causa que la viscosidad aparente aumente rápidamente al aumentar la rapidez de corte.

Algunos ejemplos de fluidos dilatantes, son suspensiones de almidón en agua, suspensiones de mica en agua, arena movediza y arena de playa.

1.2 Fluidos No-Newtonianos Dependientes del Tiempo

De la segunda categoría, en éstos fluidos la viscosidad aparente depende no

solo de la rapidez de corte sino también del tiempo en el que el fluido ha sido de formado. Se pueden, como ya vimos, subdividir en dos clases:

A) Tixotrópicos

B) Antitixotrópicos

A) Fluidos Tixotrópicos

Si un material tixotrópico se deforma a rapidez de corte constante después de un período de reposo, la estructura se irá destruyendo progresivamente y el esfuerzo cortante (ó la viscosidad aparente) irá bajando a medida que el tiempo pasa. Como la tixotropía es un proceso reversible, después que se deja reposar, la estructura del material se reconstruye gradualmente. Muchos investigadores, se han preocupado en formular relaciones cuantitativas entre el comportamiento reológico y el tiempo, pero a pesar de todo, éstas siguen siendo muy complicadas; y un ejemplo de esto es la propuesta por Hahn, Ree y Eyring basada en la ecuación de Powell-Eyring para pseudoplásticos con multiplicadores dependientes del tiempo (7) en los coeficientes de los términos del lado derecho de dicha ecuación. Su ecuación involucra siete constantes para un material dado, las que deben ser obtenidas de datos reológicos; Moore (7) propuso una relación más simple que involucra cinco constantes para describir el comportamiento tixotrópico de un fluido que no posee un valor de esfuerzo mínimo. Estas relaciones son:

$$\tau = (\mu_0 + c \lambda) \dot{\gamma} \quad 3.1.19$$

$$(d\lambda / d\theta) = a - (a + b \dot{\gamma}) \lambda \quad 3.1.20$$

donde:

μ_0, a, b, c . - son constantes de material

λ . - es un parámetro estructural con valores de 0 y 1 respec-

tivamente en los límites donde la estructura está completamente destruída y completamente desarrollada.

Para determinar si el fluido que se maneja es tixotrópico, es necesario graficar el esfuerzo cortante contra el tiempo (Θ) y como parámetro la rapidez de corte, como se observa en la fig. 3.1.2 (a) para el caso de un fluido tixotrópico y, en la fig. 3.1.2 (b) para otro que no lo es.

Antes de empezar cada experiencia a una rapidez de corte determinada y constante, es necesario dejar reposar el material un período de tiempo suficiente para que recobre su estructura original.

Un modelo interesante, es el propuesto por Ritter y Govier (7) que supone que la formación de estructura ó conglomerado de partículas es análoga a una reacción química de segundo orden y que el rompimiento de la estructura, es equivalente a una serie de reacciones consecutivas de primer orden. Su ecuación es:

$$\log \left(\frac{\tau_s - \tau_\infty}{\left(\frac{\tau_{s0}}{\tau_{s\infty}} - \tau_s \right)} \right) = -Kd \left(\frac{\tau_{s0} + \tau_{s\infty}}{\tau_{s0} - \tau_{s\infty}} \right) \log \Theta - \log Kdr \quad 3.1.21$$

donde:

$$\tau_s = \tau - \tau_\mu$$

τ_s .- esfuerzo estructural

τ .- esfuerzo cortante del fluido

τ_μ .- esfuerzo cortante causado por el comportamiento newtoniano del fluido

$\tau_{s0}, \tau_{s\infty}$.- esfuerzos estructurales a rapidez de corte después de cero e

infinita duración de corte; éstos están dados por $\tau_0 - \mu j$

y $\tau_\infty - \mu j$, siendo μ la viscosidad newtoniana bajo con-

diciones donde toda la estructura se supone destruida (independiente de la duración y de la rapidez de corte).

K_d . - constatanete independiente de la rapidez de corte y relacionada al proceso de decaimiento de primer orden.

K_{dr} . - es una medida adimensional de la interacción entre el decaimiento de la estructura y el proceso de reestablecimiento.

Puede evaluarse como:

$$K_{dr} = (\tau_{s0}^2 - \tau_{s1} \tau_{s\infty}) / (\tau_{s1} \tau_{s\infty} - \tau_{s0}^2)$$

donde: τ_{s1} . -esfuerzo estructural al primer minuto.

La velocidad de rompimiento de la estructura durante el corte a una rapidez dada dependerá del número de enlaces disponibles para el rompimiento y por lo tanto debe decaer con el tiempo.

Materiales de éste tipo son grasas, pinturas, tintas y productos alimenticios como la catsup.

B) Antitixotrópicos

Este comportamiento es muy poco común y cuando se observa, ocurre usualmente en rangos estrechos de la rapidez de corte (15).

Para éstos fluidos, existe un aumento con el tiempo del esfuerzo requerido para mantener una rapidez de corte constante. Para éstos fluidos se trazan graficas semejantes a la fig. 3.1.2 (a) para saber si es o no antitixotrópico; las curvas para éstos fluidos son como la de la fig. 3.1.3.

Usualmente se asocia al desarrollo de algún tipo de estructura en el fluido.

Un ejemplo de éstos materiales es el poliéster con peso molecular de 2000.

1.3 Fluidos Viscoelásticos

Este tipo de flúidos son los más generales, y son aquellos que muestran el efecto de una recuperación elástica parcial y cuyas propiedades viscosas son - no-newtonianas y dependientes del tiempo. Algunos reologistas dicen que todos los materiales, aún los gases, son viscoelásticos bajo ciertas condiciones.

Los efectos viscoelásticos son importantes (15) en cambios repentinos de gasto, en flujos oscilatorios rápidos, en flujos a altos esfuerzos cortantes como en los procesos de extrusión, en los flujos donde existe cambio del área transversal y, el flujo turbulento de flúidos viscoelásticos, que tienen gran influencia en el gradiente de presión.

Aunque un número grande de ecuaciones constitutivas muy complejas han sido desarrolladas para los materiales viscoelásticos, no existen ecuaciones prácticas capaces de describir cuantitativamente el comportamiento de los materiales viscoelásticos reales sobre el rango de condiciones de flujo de importancia práctica.

Por lo anterior, y porque además está fuera del objeto de esta tesis, nos limitaremos a describir las analogías mecánicas de éstos flúidos que permiten entender un poco su comportamiento. Estas analogías son:

- a) Modelo de Maxwell
- b) Modelo de Voight

a) Modelo de Maxwell

Consiste en un elemento elástico y otro viscoso colocados en serie, como se ve en la fig. 3.1.4 (8).

donde:

G - es el módulo de rigidez, o sea, la constante del elemento elástico (hookiano).

μ . - es la viscosidad que es la constante del elemento viscoso (ó newtoniano).

Es evidente que la deformación total de todo el elemento estará dado por la suma de las deformaciones del resorte y del elemento viscoso, ó sea:

$$\gamma_T = \gamma_R + \gamma_V \quad 3.1.22$$

Para el resorte tenemos que :

$$\tau_R = G \gamma_R \quad 3.1.23$$

y para el elemento viscoso:

$$\tau_V = \mu \dot{\gamma}_V \quad 3.1.24$$

De tal forma que derivando la ecuación 3.1.22 respecto al tiempo se tiene:

$$\dot{\gamma}_T = \dot{\gamma}_R + \dot{\gamma}_V \quad 3.1.25$$

Derivando la ecuación 3.1.23 respecto al tiempo:

$$\dot{\tau} = G \dot{\gamma}_R \quad 3.1.26$$

Por lo tanto substituyendo en la ecuación 3.1.25 los valores correspondientes de $\dot{\gamma}_R$ y $\dot{\gamma}_V$ de las ecuaciones 3.1.24 y 3.1.26 se tiene:

tes de $\dot{\gamma}_R$ y $\dot{\gamma}_V$ de las ecuaciones 3.1.24 y 3.1.26 se tiene:

$$\dot{\gamma}_T = (\dot{\tau} / G) + (\tau / \mu) \quad 3.1.27$$

Que es la ecuación representativa del modelo de Maxwell.

b) Modelo de Voight

Si se consideran los mismos elementos que en el caso anterior, pero colocados en paralelo como se muestra en la fig. 3.1.5 (8), se tendrá un elemento

del llamado modelo de Voight.

En éste elemento la fuerza total estará dada por la suma de la fuerza del resorte y la del elemento viscoso, es decir:

$$F_r = F_R + F_V \quad 3.1.28$$

Considerando la fuerza por unidad de área:

$$\tau_T = \tau_R + \tau_V \quad 3.1.29$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.1.23 y 3.1.24 en la 3.1.29, se tiene:

$$\tau_T = G \dot{\gamma} + \mu \ddot{\gamma} \quad 3.1.30$$

que es la ecuación que representa el modelo de Voight.

Ahora si se propone que un polímero lineal amorfo puede ser representado en su comportamiento como el modelo de la fig. 3.1.6 (12), veremos que su cede.

La deformación total del modelo se debe a: la deformación elástica instan tanea, el flujo viscoso irrecuperable y la deformación elástica retardada.

La deformación elástica instantánea se debe al doblamiento y estiramiento de enlaces de valencia primarios y tiene un módulo de rigidez asociado de G_1 . El flujo irrecuperable viscoso se debe al deslizamiento de cadenas de polímero pasando una sobre la otra y tiene una viscosidad asociada de μ_1 . La deforma ción elástica retardada se debe a la transformación de una configuración molecular en equilibrio, a una configuración parcial en la cuál hay estructuras orien tadas y extendidas que se ven favorecidas. La fuerza directora para éste proceso es el esfuerzo cortante. La velocidad a la cuál ocurre está determinada por la razón (μ / G) llamada el tiempo de retardación. La deformación en equi

librio del estado parcial, determina el módulo G_2 .

De esta forma, si γ es la deformación total, entonces:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \quad 3.1.31$$

donde obviamente γ_1 es la deformación del modelo de Voight, ó sea:

$$\tau = \mu_2 \left(d\gamma_1 / dt \right) + G_2 \gamma_1 \quad 3.1.32$$

y γ_2 la del modelo de Maxwell:

$$\left(d\gamma_2 / dt \right) = (1 / G_1) \left(d\tau / dt \right) + (\tau / \mu_1) \quad 3.1.33$$

Las ecuaciones 3.1.31, 3.1.32 y 3.1.33 forman un sistema que contiene - como variables dependientes γ_1 , γ_2 , γ y τ . Combinándolas es posible eliminar dos de las cuatro variables dependientes (12). Eliminando γ_1 y γ_2 se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden:

$$\left(d^2 \tau / dt^2 \right) + \left(\left(G_1 / \mu_1 \right) + \left(G_1 / \mu_2 \right) + \left(G_2 / \mu_2 \right) \right) \left(d\tau / dt \right) + \left(G_1 G_2 / \mu_1 \mu_2 \right) \tau = G_1 \left(d^2 \gamma / dt^2 \right) + \left(G_1 G_2 / \mu_2 \right) \left(d\gamma / dt \right) \quad 3.1.34$$

Para un esfuerzo aplicado constante S , la ec. 3.1.34 se reduce a:

$$\left(d^2 \gamma / dt^2 \right) + \left(G_2 / \mu_2 \right) \left(d\gamma / dt \right) = \left(G_2 / \mu_1 \mu_2 \right) S \quad 3.1.35$$

Si el esfuerzo se aplica repentinamente a tiempo 0, el modelo se deformará instantáneamente una cantidad S/G_1 y luego se deformará elásticamente de manera retardada e irá en flujo a régimen permanente. La velocidad inicial (a $t=0$) de deformación se obtiene sumando las velocidades de éstos procesos para obtener $(S/\mu_1) + (S/\mu_2)$. Por lo tanto las condiciones iniciales son:

$$y(0) = S / G_1$$

$$\dot{y}(0) = (S / \mu_1) + (S / \mu_2)$$

Y la solución de la ec. 3.1.35 sujeta a éstas condiciones iniciales es (16):

$$y = (S / G_1) + (S / \mu_1) t + (S / G_2) (1 - e^{-t/\lambda}) \quad 3.1.36$$

donde:

$$\lambda \text{ - es el tiempo de retardación dado por } \lambda = \mu_2 / G_2.$$

Este tipo de solución tiene la ventaja de que se puede graficar la deformación contra el tiempo para un esfuerzo cortante dado constante, como puede observarse en la fig. 3.1.7.

A partir de ésta, se pueden encontrar experimentalmente los valores de las constantes. G_1 puede calcularse de la deformación inicial $y(0)$; el valor de μ_1 puede calcularse de $\dot{y}(\infty)$; el valor de μ_2 de $\dot{y}(0)$ y G_2 de $\ddot{y}(0)$.

A partir del tiempo t_1 es obvio que el esfuerzo aplicado inicialmente se ha eliminado, es decir, $S = 0$ y la ecuación 3.1.35 se reduce a:

$$(d^2 y / dt^2) + (G_2 / \mu_2) (d y / dt) = 0 \quad 3.1.37$$

cuya solución general (16) dá:

$$y = C_1 + C_2 e^{-t/\lambda} \quad 3.1.38$$

donde:

C_1 y C_2 - constantes de integración.

Si y_0 representa la deformación cuando $S = 0$ y y_∞ la deformación después de un recuperación total, entonces:

$$y_\infty = C_1 \quad ; \quad y_0 = C_1 + C_2$$

Si se toma el cociente de $(y_0 - y)$ entre $(y_0 - y_\infty)$ se estará midiendo el porcentaje de la deformación elástica retardada para que ésta sea re

cuperada, ó sea :

$$\begin{aligned} f &= (\gamma_0 - \gamma) / (\gamma_0 - \gamma_\infty) \\ &= 1 - \exp(-t/\lambda) \end{aligned}$$

y cuando $t = \lambda$:

$$f = 1 - (1/e) = 0.63$$

es decir, λ representa el tiempo para que el 63% de la deformaci3n elástica re-
tardada sea recuperada.

Este ejemplo muestra, a pesar de ser relativamente sencillo, cuán complica-
do es tratar un fluido viscoelástico y sobre todo , el proponer una ecuaci3n cons-
titutiva que lo represente adecuadamente.)

2. LAS ECUACIONES DE CAMBIO PARA FLUJO NO NEWTONIANO INCOM- PRESIBLE

Las ecuaciones de movimiento (tabla 2. 2. 3) requieren, como ya se discutí ,
de relaciones entre los componentes del tensor de esfuerzos cortantes $\bar{\bar{\tau}}$ y el
tensor de rapidez de deformaci3n $\bar{\bar{\Delta}}$, independientemente del tipo de material
en consideraci3n.

Para los fluidos no newtonianos no existe una relaci3n directa entre $\bar{\bar{\tau}}$ y $\bar{\bar{\Delta}}$
como la correspondiente para los fluidos newtonianos (ec. 2. 2. 13), puesto que
la viscosidad para éstos tipos de fluidos adem3s de depender de la presi3n y la
temperatura, dependen de $\bar{\bar{\tau}}$ ó de $\bar{\bar{\Delta}}$. Sin embargo, para algunos tipos senci-
llos de fluidos no newtonianos, podemos escribir (11, 14):

$$\bar{\bar{\tau}} = -\eta \bar{\bar{\Delta}} \quad 3. 2. 1$$

en la que la viscosidad no newtoniana η es un escalar y adem3s es funci3n de
 $\bar{\bar{\Delta}}$ (ó de $\bar{\bar{\tau}}$). La suposici3n de diferentes funciones empíricas para describir la

variación de η con $\bar{\bar{\Delta}}$, corresponde a los modelos expuestos en la sección 3.1.1; para los tipos de fluidos descritos en las secciones 3.1.2 y 3.1.3, esta relación (ec. 3.2.1) no es tan simple y no se puede aplicar para generalizar sus ecuaciones constitutivas si se considera el tipo de tensores tan complicado que describen a éstos fluidos.

Debido a que η es un escalar, debe ser función solamente de los invariantes de $\bar{\bar{\Delta}}^1$. Los tres invariantes escalares del tensor de rapidez de deformación están definidos por (11):

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_i \Delta_{ii} = 2(\nabla \cdot \vec{v}) \\ I_2 &= \sum_i \sum_j (\Delta_{ij})^2 = (\bar{\bar{\Delta}} : \bar{\bar{\Delta}}) \\ I_3 &= \sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} \Delta_{1i} \Delta_{2j} \Delta_{3k} = \det \bar{\bar{\Delta}} \end{aligned} \quad 3.2.2$$

Para fluidos incompresibles el primer invariante vale cero. De aquí que para fluidos no newtonianos incompresibles, independientes del tiempo, la viscosidad depende solamente del segundo y tercer invariante. En flujo rectilíneo y bidimensional, el tercer invariante es cero y se considera poco importante para otros tipos de flujo (11, 12). Por lo tanto, la viscosidad η es solamente una función del segundo invariante de $\bar{\bar{\Delta}}$, ó sea:

$$\eta = \phi(I_2) \quad 3.2.3$$

De ésta forma, los modelos no newtonianos de la sección 3.1.1 pueden expresarse en una forma que permita describir el flujo en geometrías complejas. La generalización se lleva a cabo reemplazando $\dot{\gamma}$ por $((1/2)(\bar{\bar{\Delta}} : \bar{\bar{\Delta}}))^{(1/2)}$ ó

¹
Apéndice 1.

$\bar{\bar{\tau}}$ por $((1/2) (\bar{\bar{\tau}} : \bar{\bar{\tau}}))^{(1/2)}$ (14). Así por ejemplo, para la ley de la potencia (ec. 3.1.5):

$$\mu_a = K ((\bar{\bar{\Delta}} : \bar{\bar{\Delta}}) / 2)^{((n-1)/2)} \quad 3.2.4$$

De hecho, $(1/2) (\bar{\bar{\Delta}} : \bar{\bar{\Delta}})$ resulta ser exactamente la función ϕ_v que se definió en la ec. 2.2.19 en la que el término $(-2/3) (\nabla \cdot \vec{v})^2$ se ha suprimido. Por lo tanto, si consideramos corte simple, como el de la fig. 2.11 en coordenadas rectangulares, el único componente de velocidad que no es cero es v_y y la única derivada no cero de v_y es $\partial v_y / \partial z$, así que la expresión para $(\bar{\bar{\Delta}} : \bar{\bar{\Delta}})$ se reduce a:

$$(\bar{\bar{\Delta}} : \bar{\bar{\Delta}}) = 2 (\partial v_y / \partial z)^2$$

y la ecuación 3.2.4 se transforma en:

$$\mu_a = K (\partial v_y / \partial z)^{n-1} = K (\dot{\gamma})^{n-1}$$

lo que demuestra que la ley de la potencia dada por la ecuación 3.1.5 es un caso especial de la ecuación 3.2.4.

La utilidad de las ecuaciones así formadas consiste en que se pueden expresar los componentes de $\bar{\bar{\tau}}$ para los materiales no newtonianos en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas mediante el siguiente procedimiento:

- a) Se busca en la tabla 2.2.1 las correspondientes relaciones newtonianas.
- b) Se substituye a μ en la expresión newtoniana por la magnitud del modelo deseado.

- c) Se introduce la relación $(\bar{\bar{\Delta}} : \bar{\bar{\Delta}})$ ó $(\bar{\bar{\tau}} : \bar{\bar{\tau}})$ en las coordenadas adecuadas.

En este momento, es necesario observar que no se ha dado, en toda la literatura (11), ecuaciones tensoriales completamente generales para todos los flúidos que pudieran reducirse a casos especiales; es por esto que aún la ecuación 3.2.1

es limitada en generalización y las expresiones tales como la ecuación 3.2.4 son expresiones empíricas propuestas para representar en forma aproximada el comportamiento real de los distintos materiales y, lo único que hemos hecho es permitir que los modelos de la sección 3.1.1 se puedan escribir de tal forma que se transformen adecuadamente al pasar de un sistema coordinado a otro. Sin embargo, no se puede asegurar que los parámetros (K y n de la ley de la potencia, por ejemplo) serán los mismos si se determinan en distintos dispositivos geométricos (11).

3. ELABORACION DE LA CURVA DE FLUJO.

Para poder obtener ecuaciones prácticas de diseño que son útiles en la determinación de la dinámica de fluidos de materiales no newtonianos y también para saber qué tipo de fluido se maneja, debe determinarse en primer lugar experimentalmente la curva de flujo del material. Y posteriormente, a partir de ella, deben calcularse los diferentes parámetros que caracterizan a cada modelo para que éste pueda ser usado.

La medida exacta de las propiedades del fluido es, por lo tanto, un requisito esencial; y para ello se han desarrollado un número muy grande de viscosímetros de propósitos especiales (17). Aquí solo discutiremos, brevemente, los dos tipos básicos: el capilar y los rotacionales.

a) Viscosímetro Capilar

El modelo más común, consta de un recipiente a presión el cuál tiene en su parte superior una conexión a una fuente de nitrógeno de presión constante y, en la parte inferior un aditamento para colocar tubos capilares de acero que son

intercambiables, como se muestra en la fig. 3.3.1.

El material contenido en el recipiente se hace pasar a través del capilar, el cual tiene una relación conocida de longitud a diámetro, debido a la presión del nitrógeno que está actuando sobre él. El gasto se determina pesando el líquido recolectado en otro recipiente, durante un período dado de tiempo. La fuerza directora es, entonces, medida de la diferencia de presión.

Para poder establecer una relación única entre el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación deben hacerse las siguientes suposiciones (15, 17) :

- a. 1) El régimen es permanente.
- a. 2) Las propiedades del fluido son independientes del tiempo.
- a. 3) El flujo desarrollado es laminar.
- a. 4) El flujo es isotérmico.
- a. 5) No existe deslizamiento en la pared.
- a. 6) El fluido es incompresible.
- a. 7) La viscosidad no depende de la presión.

En éste tipo de viscosímetros han de hacerse correcciones (18) por:

1. - La altura del líquido sobre el tubo capilar.
2. - Los efectos de energía cinética.
3. - Las pérdidas de presión debido a la entrada.

Y una vez hechas las correcciones anteriores, se obtienen los siguientes datos:

Q = gasto

D = diámetro interno del capilar

L = Longitud efectiva del capilar

ΔP = Caída de presión debida al flujo laminar

Ahora bién, de las ecuaciones de movimiento para geometría cilíndrica obtenemos:

$$\tau_w = D \Delta P / 4 L \quad 3.3.1$$

donde τ_w es el esfuerzo cortante en la pared del capilar.

La rapidez de corte en la pared del capilar puede determinarse de la ecuación general de Rabinowitsch - Mooney (7, 8, 9), la cuál es:

$$\dot{\gamma}_w = ((1 + 3 n') / n') (8 \langle v \rangle / D) \quad 3.3.2$$

donde:

$$n' = d \ln (D \Delta P / 4 L) / d \ln (8 \langle v \rangle / D) \quad 3.3.3$$

es la pendiente de la gráfica logarítmica de $D \Delta P / 4 L$ contra $8 \langle v \rangle / D$ y:

$$\langle v \rangle = 4 Q / \pi D^2$$

es la velocidad promedio.

El parámetro n' puede variar y por lo tanto el valor a usar debe de calcularse para cada valor de $8 \langle v \rangle / D$.

El procedimiento a seguir para elaborar la curva de flujo es :

1. - Se calcula τ_w con la ecuación 3.3.1 después de las correcciones apropiadas.
2. - Se grafica τ_w vs. $8 \langle v \rangle / D$ en coordenadas logarítmicas y se determina n' como una función de $8 \langle v \rangle / D$.
3. - Se calcula $\dot{\gamma}_w$ de la ec. 3.3.2.
4. - Por último, graficamos τ_w vs. $\dot{\gamma}_w$ en coordenadas logarítmicas ó aritméticas según convenga.

b) Viscosímetros Rotacionales

Este tipo consiste en dos cilindros concéntricos, uno exterior y otro inte -

rior, como se observa en la fig. 3. 3↓2.

Hay dos tipos básicos:

1. - De cilindro interno que gira y cilindro externo fijo; a éste tipo, corresponde el Brookfield y el Stormer (17).
2. - De cilindro externo que gira y cilindro interno fijo; en éste tipo, se encuentran el de Mac-Michael y el Precision-Interchemical (17).

El material queda confinado entre el anulo formado por los cilindros y el funcionamiento del aparato, se basa en la medida del torque producido al sujetar al fluido al corte cuando gira alguno de los dos cilindros a varias velocidades, de tal forma que la variación del torque con la velocidad, se puede interpretar como la relación entre el esfuerzo cortante y la rapidez de corte, sujetos a temperatura constante.

Este tipo de instrumento está sujeto a un efecto en el fondo de los cilindros donde no hay superficie libre; mediante un diseño apropiado éste puede hacerse pequeño pero no puede eliminarse completamente.

No son útiles en la evaluación de las propiedades de flujo de suspensiones que se pueden asentar rápidamente ó que permitan que las partículas en suspensión se alejen del cilindro que gira debido a las fuerzas centrífugas. Por otra parte, como se pueden hacer mediciones continuas y éstas se pueden extender por periodos de tiempo variables, el uso de éstos aparatos permite el estudio de los fluidos dependientes del tiempo.

Existen muchos tipos (17), pero el más usado es el Brookfield Synchronic, aunque no es tan versátil como el Haake Rotovisco (17), por su pequeño costo.

Me referiré brevemente,¹ a dos modelos, uno de cada tipo básico, con el fin de ejemplificar la elaboración de la curva de flujo a partir de ésta clase de viscosímetros.

El Brookfield Synchro-lectric consta de un rotor que gira sumergido en el material y cuyo radio es lo suficientemente pequeño comparado con el del material que se encuentra en un recipiente, de tal forma que el líquido puede considerarse como una frontera infinita de materia, como puede observarse en la fig.

3.3.3.

El rotor gira y por medio de un resorte calibrado que está conectado a él, se puede observar visualmente su deflexión. Las lecturas que se obtienen son la velocidad angular en rpm (revoluciones por minuto) y la viscosidad aparente que el material posee a cada velocidad, con los efectos corregidos mediante factores que el fabricante proporciona.

La viscosidad aparente así obtenida, puede ser transformada a datos de torque mediante la siguiente fórmula (19):

$$T = 4 \mu_a \pi h r_w^2 \Omega / gc \quad 3.3.4$$

donde: T. - torque

μ_a . - lectura de viscosidad en centipoises

h. - Altura del rotor cubierta por el material

r_w . - radio del rotor

Ω . - velocidad angular

gc. - factor de conversión

¹Para un tratamiento completo de éstos dos viscosímetros puede consultarse la referencia número 17.

El esfuerzo cortante en la pared del rotor, está dado por:

$$\tau_w = T / (2 \pi h r_w^2) \quad 3.3.5$$

Substituyendo la ec. 3.3.4 en la ec. 3.3.5 se obtiene para el esfuerzo cortante:

$$\tau_w = (2 \mu a \Omega) / g_c \quad 3.3.6$$

A partir de la ecuación general para viscosímetros de cilindros concéntricos¹ se obtiene la siguiente relación para la rapidez de corte:

$$\dot{\gamma}_w = F(\tau_w) = -2 (d\Omega / d \ln \tau_w) \quad 3.3.7$$

El desarrollo de éstas ecuaciones, permite dar el procedimiento a seguir para elaborar la curva de flujo:

1. - Se obtienen del viscosímetro los datos de viscosidad aparente que se convierte a valores de esfuerzos cortantes, usando también los datos de velocidad angular, para la que la viscosidad fué obtenida, mediante la aplicación de la ec. 3.3.6.
2. - Se grafica la velocidad angular contra el logaritmo de τ_w ($\ln \tau_w$), y se obtienen las pendientes aplicando la ec. 3.3.7 que no son más que los valores de $\dot{\gamma}_w$ (ó $F(\tau_w)$) para cada valor de τ_w .
3. - Por último se grafica τ_w vs. $\dot{\gamma}_w$ en coordenadas logarítmicas ó aritméticas según convenga.

El Fann V-G Meter consta esencialmente de los mismos elementos que el Brookfield, a excepción de que el rotor interior está separado del fluido por otro cilindro estacionario, de modo que el líquido se confina en una pequeña abertu

¹ La deducción de la ecuación general para viscosímetros de cilindros concéntricos y su aplicación a los dos modelos tratados se dá en el apéndice 2.

tura; es decir, el líquido ya no es más una frontera infinita, como puede apreciarse en la fig. 3.3.4.

Del mismo modo que en el Brookfield, se mide la deflexión del resorte que está unido al rotor interno, mediante la cuál se puede obtener datos de esfuerzos cortantes mediante la aplicación de la siguiente fórmula (17):

$$\tau_b = (Ks \beta / 2 \pi R_b^2) (h_{cy} + h_{co} / 3 \cos \alpha)^{-1} \quad 3.3.8$$

donde:

Ks . - 387 dinas cm / grado (constante del resorte).

β . - lectura del dial (ó escala).

α . - ángulo del cono a partir del eje de rotación.

R_b . - radio del cilindro interno (1.725 cm).

R_c . - radio del cilindro externo (1.842 cm).

h_{cy} . - altura del cilindro (3.80 cm).

h_{co} . - altura del cono (0.7 cm).

Mediante la aplicación de la ecuación general para viscosímetros de cilindros coaxiales¹ a este modelo, se tiene para la rapidez de corte:

$$\dot{\gamma}_b = F(\tau_b) = (\Omega / \ln \epsilon) \left[1 + \ln \epsilon (d \ln \Omega / d \ln \tau_b) + \right. \\ \left. (\ln^2 \epsilon / 3 \Omega) (d^2 \Omega / d(\ln \tau_b)^2) - \right. \\ \left. (\ln^4 \epsilon / 45 \Omega) (d^4 \Omega / d(\ln \tau_b)^4) + \dots \right] \quad 3.3.9$$

donde:

ϵ . - es la relación del esfuerzo cortante en el cilindro interior al esfuerzo cortante del cilindro exterior (τ_b / τ_c).

1

Apéndice 2.

Por lo tanto, mediante las ec. 3.3.8 y 3.3.9 podemos construir la curva de flujo de la siguiente forma:

1. - Se obtienen lecturas de β y se convierten a datos de esfuerzo cortante (τ_b). Se registran los correspondientes valores de velocidad angular (Ω).

2. - Se grafica el logaritmo de Ω vs. el logaritmo de τ_b ($\ln \Omega$ vs. $\ln \tau_b$).

Si el resultado es una línea recta, entonces el modelo a aplicar es la ley de la potencia. Si el resultado es una curva, entonces:

$$m = d \ln \Omega / d \ln \tau_b$$

3. - Si $m \ln \epsilon < 0.2$, entonces la ec. 3.3.9 se reduce a:

$$F(\tau_b) = (\Omega / \ln \epsilon) (1 + m \ln \epsilon)$$

con un error menor del 1% (17).

4. - Si $0.2 < m \ln \epsilon < 1.0$, entonces la ec. 3.3.9 se reduce a:

$$F(\tau_b) = (\Omega / \ln \epsilon) \left[1 + m \ln \epsilon + (m \ln \epsilon)^2 / 3 + ((\ln \epsilon)^2 / 3) (dm / d \ln \tau_b) \right]$$

donde el término $(dm / d \ln \tau_b)$ se obtiene de una gráfica de m vs. $\ln \tau_b$.

5. - Por último se grafica τ_b contra $\dot{\gamma}_b$ en coordenadas logarítmicas b aritméticas, según convenga.

Una vez obtenida la curva de flujo por cualquiera de los métodos viscosimétricos descritos, estamos en posición de calcular los parámetros de cada modelo y tener la relación entre el esfuerzo cortante y la rapidez de corte que nos permite usar las ecuaciones de cambio para los fluidos no newtonianos, en cualquier sistema de flujo que se esté manejando (tuberías, ánuos, etc.).

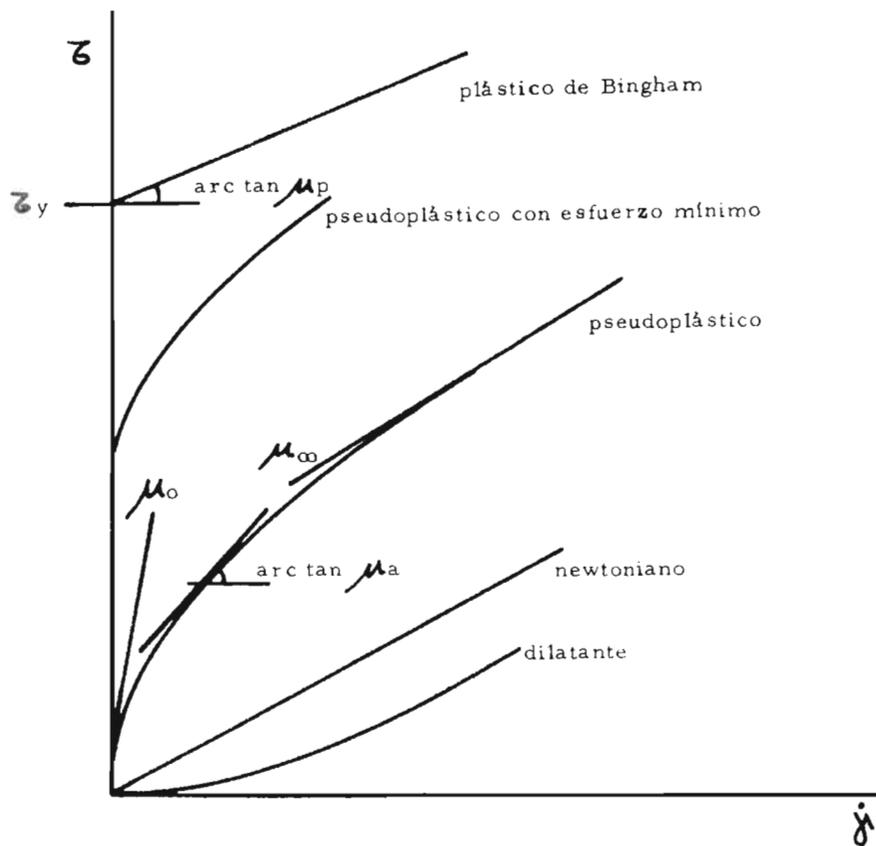
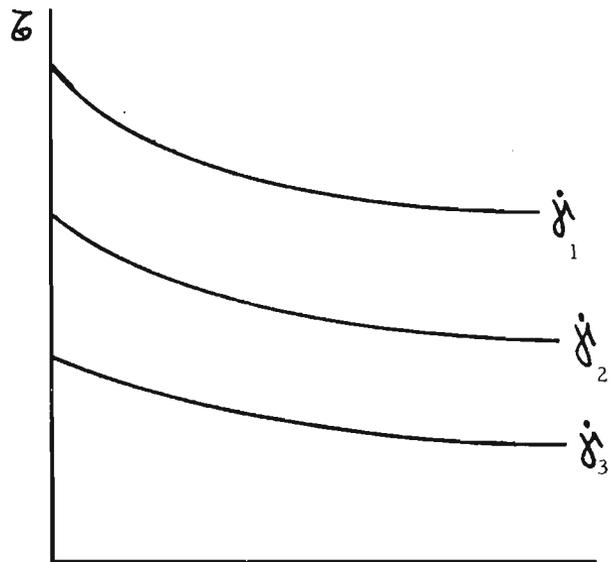
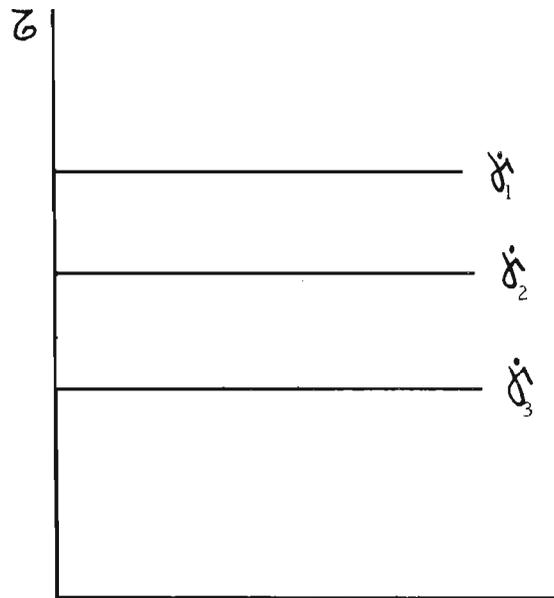


fig. 3.1.1



(a)



(b)

fig. 3.1.2

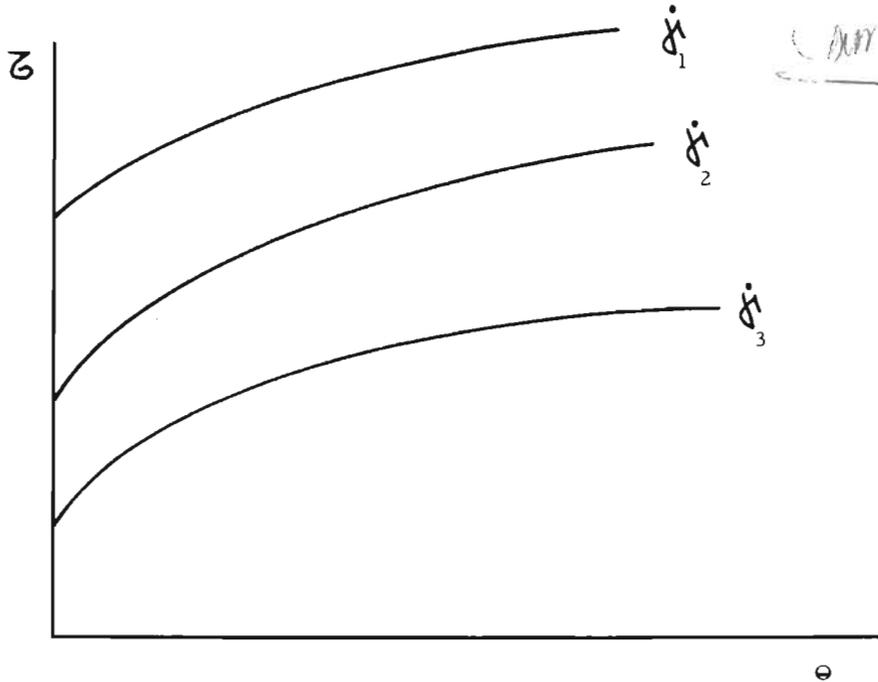


fig. 3.1.3

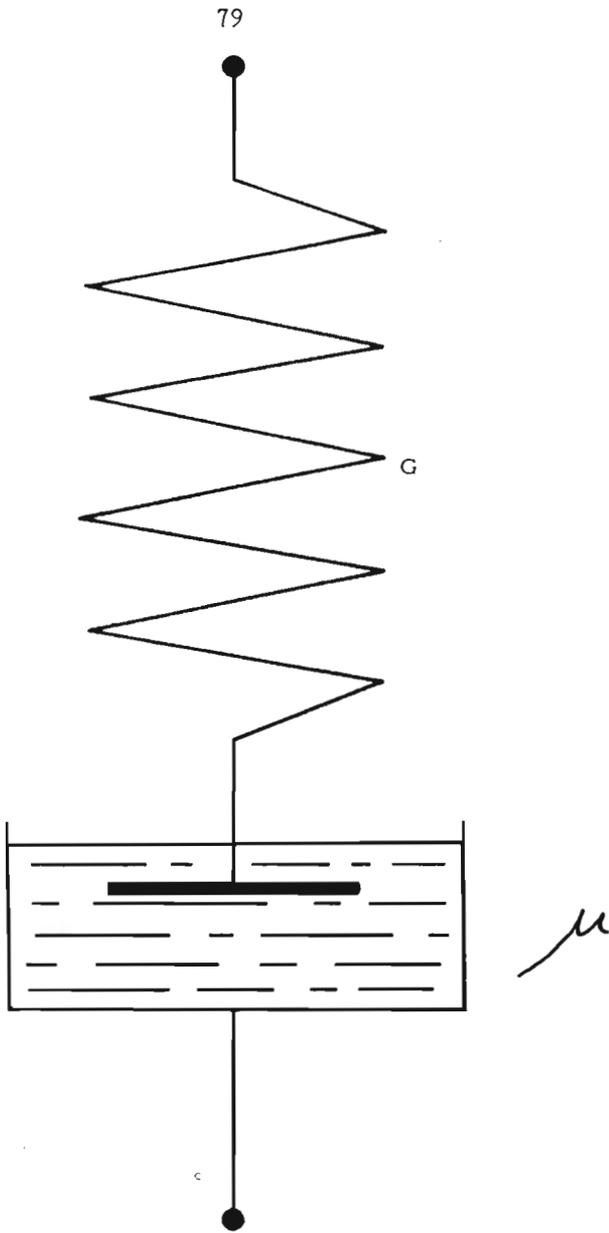


fig. 3. 1. 4.



QUIMICA

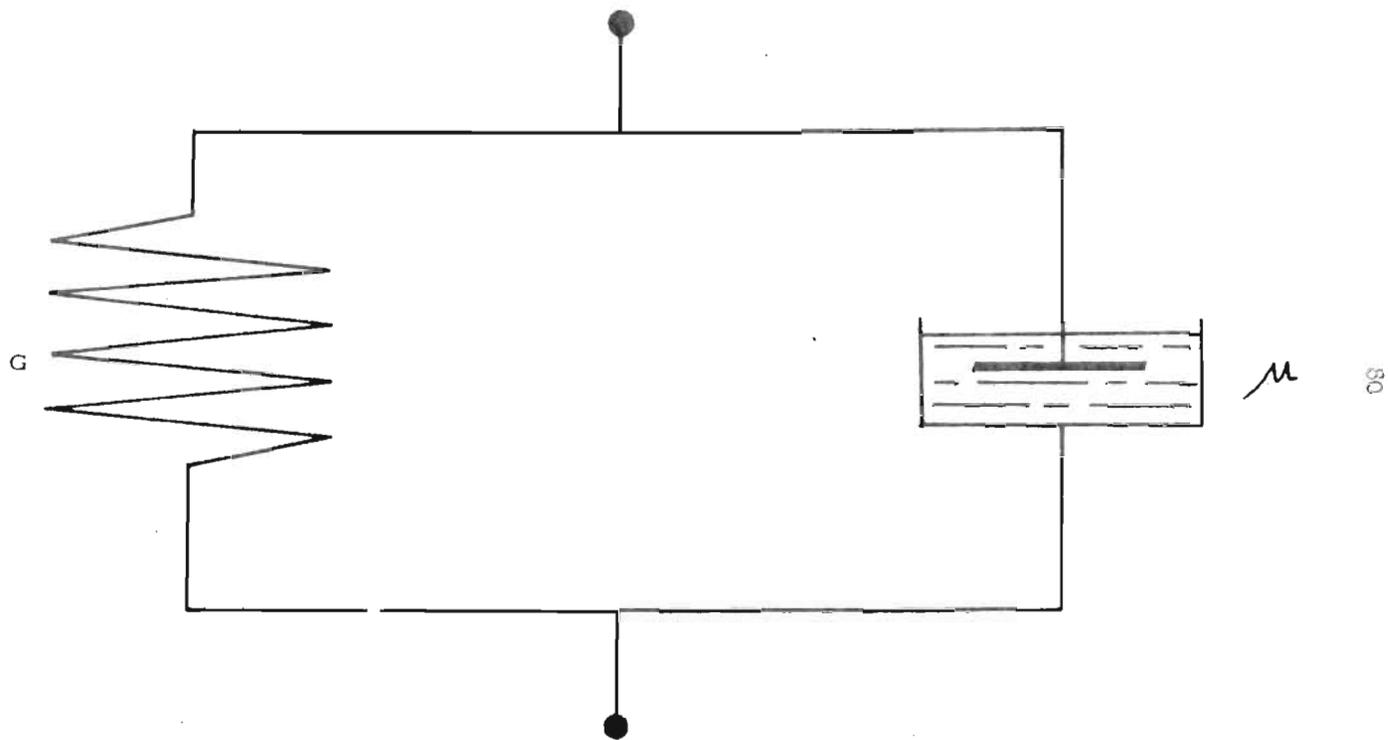


fig. 3. 1. 5

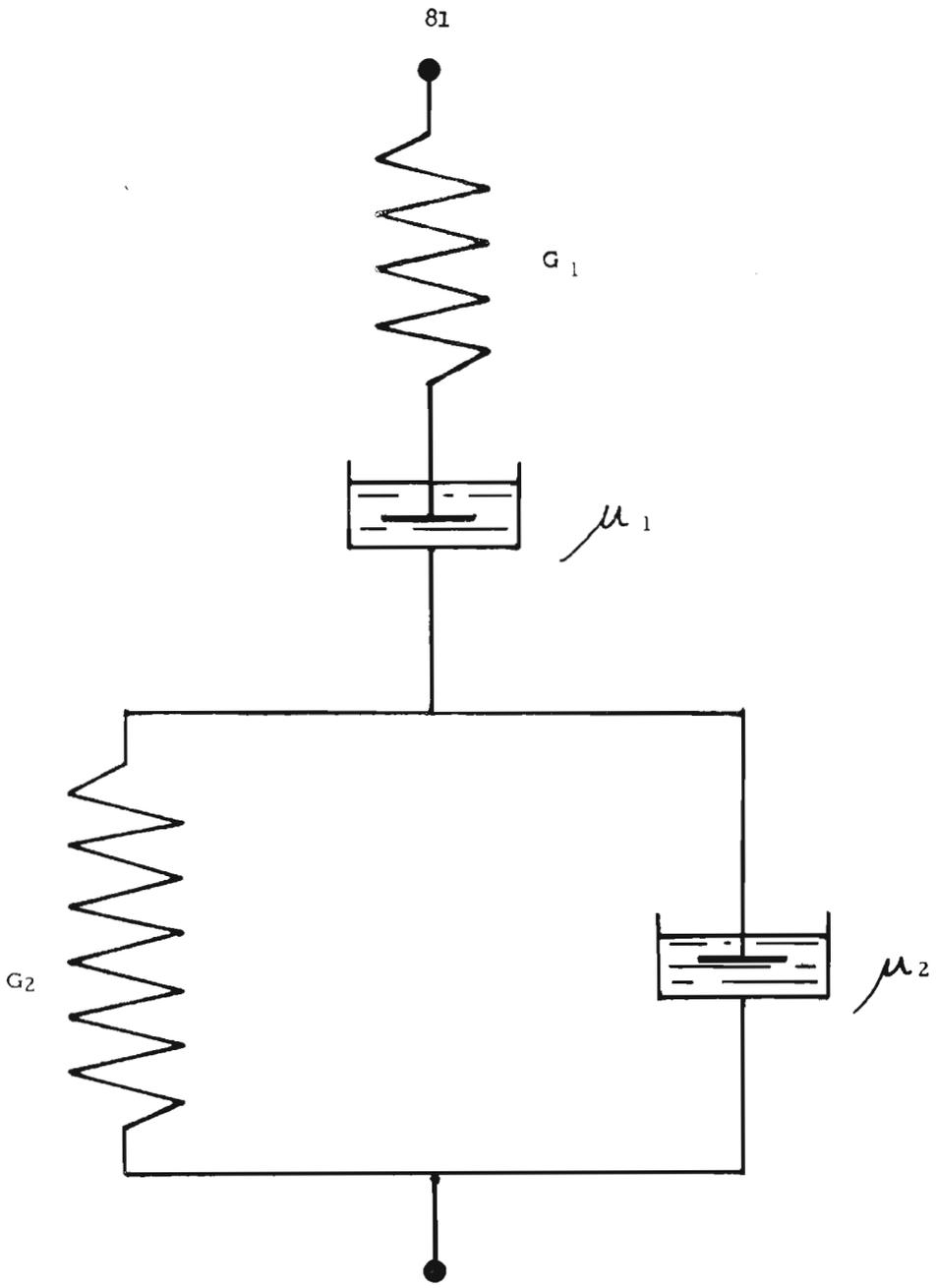


fig. 3.1.6.

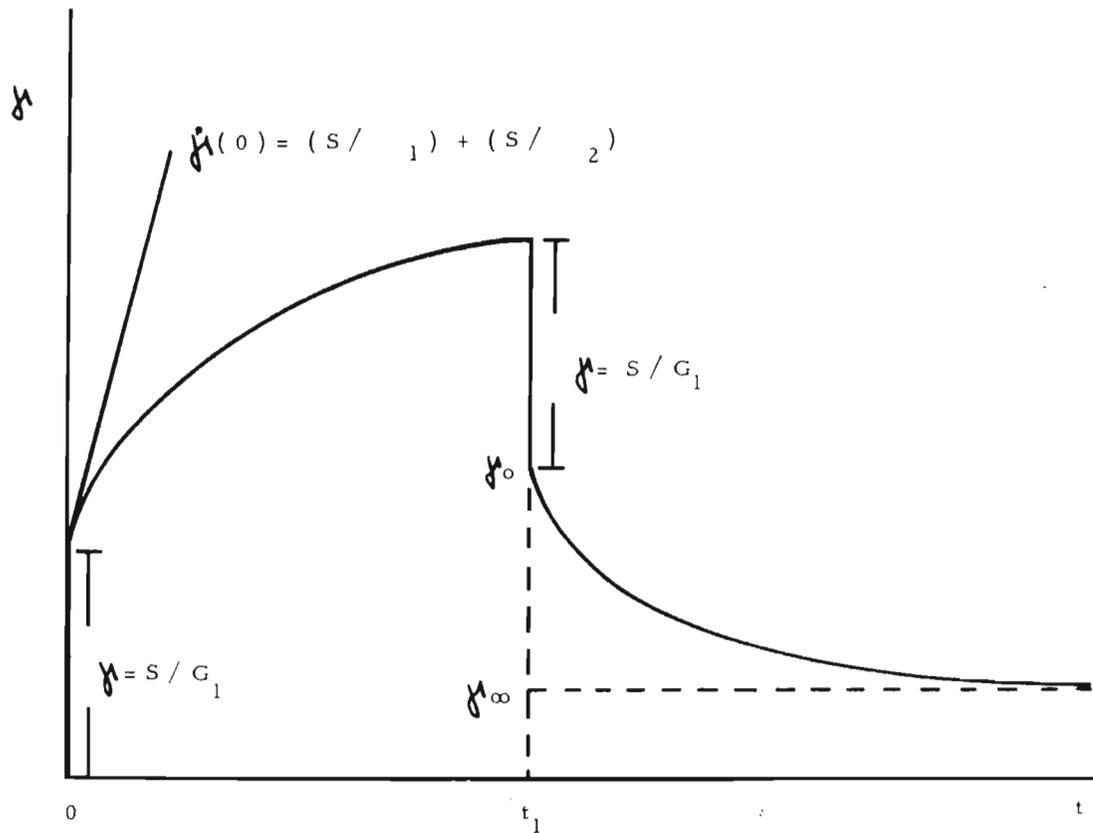


fig. 3.1.7

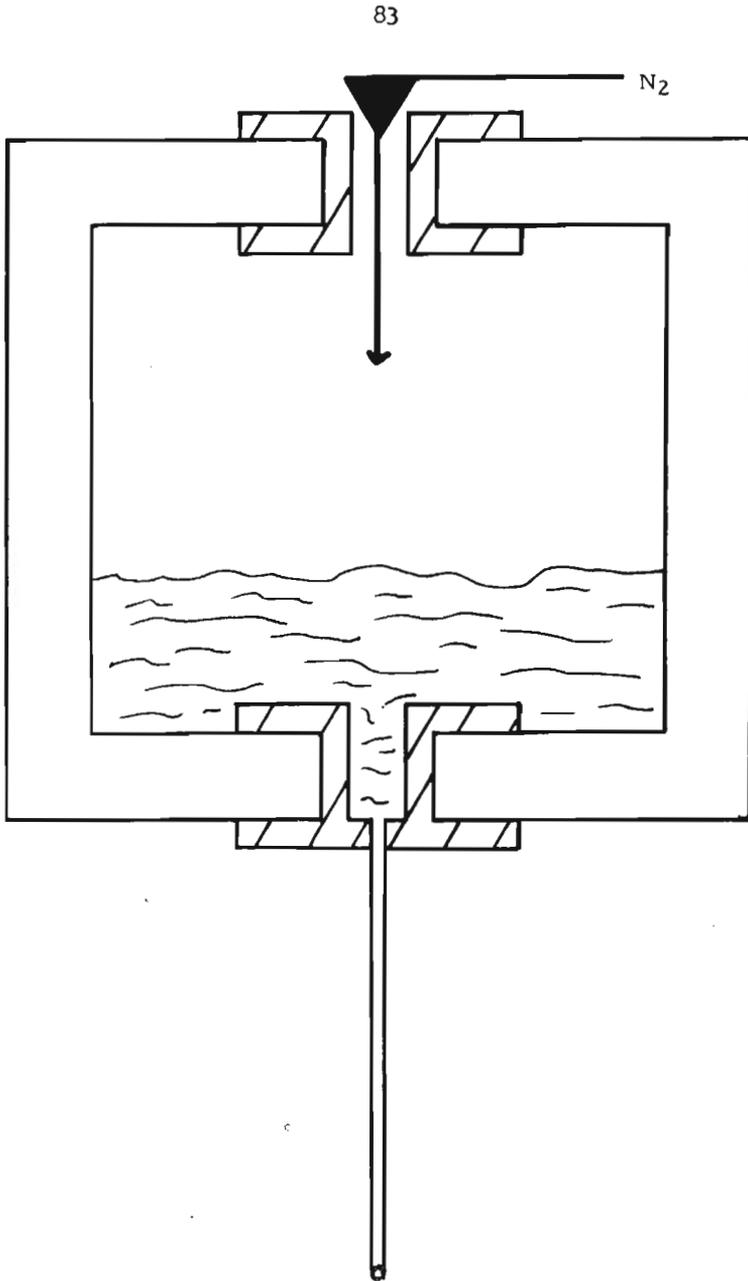


fig. 3. 3. 1

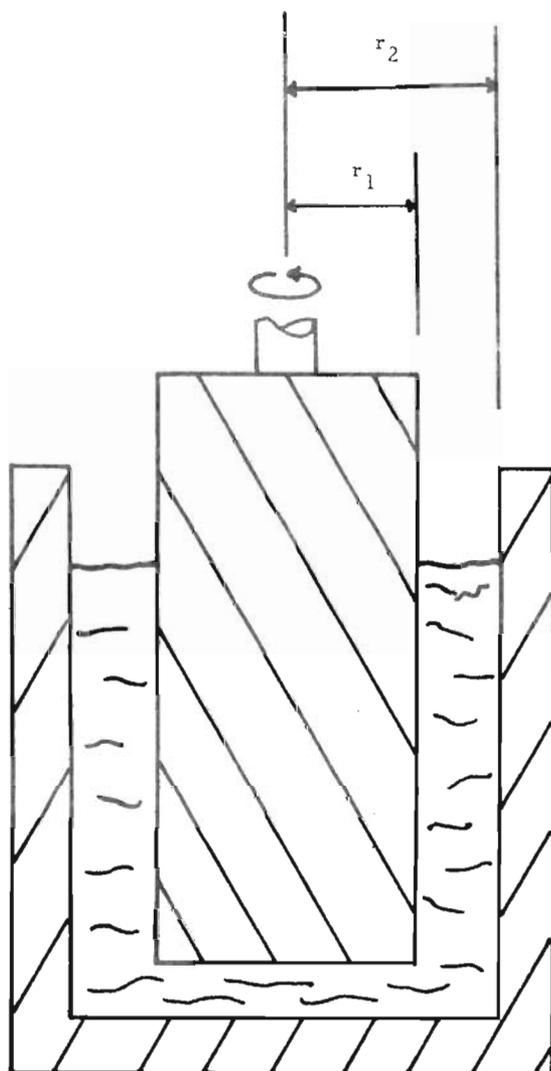


fig. 3.3.2

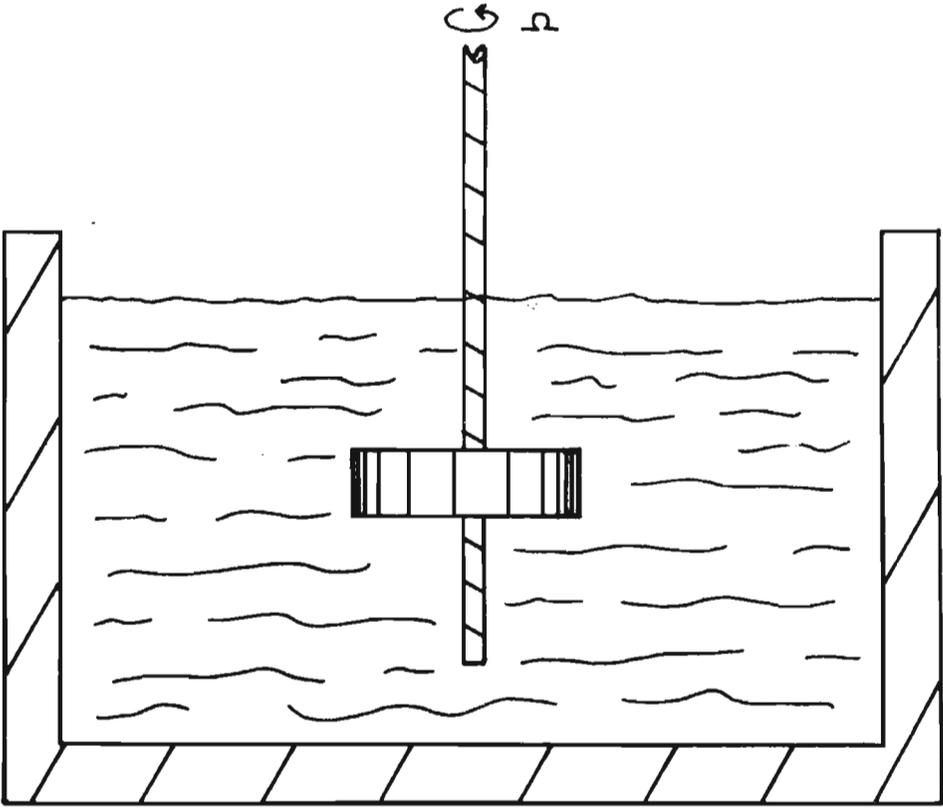


fig. 3. 3. 3.

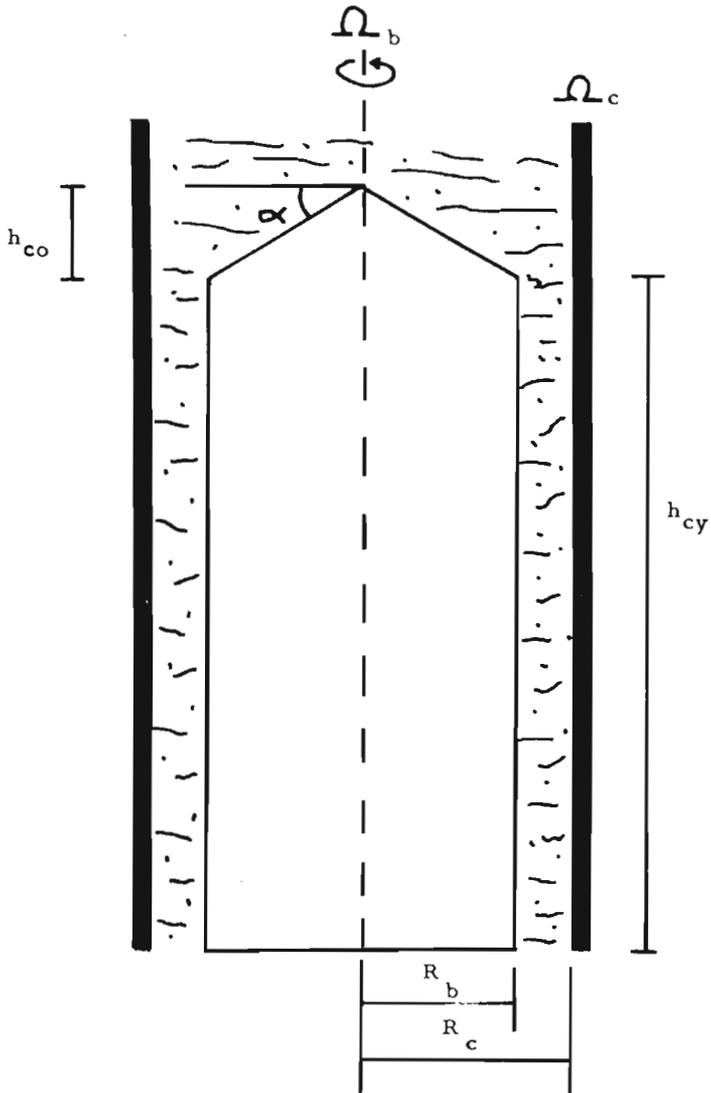


fig. 3.3.4

CAPITULO : 4

FLUJO DE FLUIDOS NEWTONIANOS
INCOMPRESIBLES EN TUBERIAS

1. BASES DEL METODO DE DISEÑO.

El objeto fundamental de análisis del presente trabajo son los materiales no newtonianos puramente viscosos y, como en los Capítulos 1 y 3 se ha demostrado la imposibilidad, hasta ahora, de establecer una ecuación constitutiva general de carácter tensorial que permita su desarrollo, seguiremos una metodología que en la práctica, conjuntamente con los modelos particulares de cálculo para cada tipo de fluido proporcione resultados bastante aceptables en los problemas de ingeniería.

Este método consiste en hacer extensivo el tratamiento aplicado a los fluidos newtonianos para los no newtonianos puramente viscosos, estableciendo las correcciones pertinentes; y es por esto que este capítulo tratará solamente el primer tipo para dejar establecida toda la metodología para poder posteriormente aplicarla a nuestros fluidos de interés en el siguiente capítulo.

Las condiciones a las que el flujo estará sujeto para todo el desarrollo teórico posterior serán:

- a. - régimen permanente
- b. - el sistema será isotérmico

- c. - flujo incompresible
- d. - sin deslizamiento en la pared de la frontera física
- e. - flujo completamente desarrollado

Las tres primeras han sido mencionadas con anterioridad; la cuarta es válida para todos los fluidos a excepción de los gases rarificados y líquidos que no mojan la pared (14); y la quinta condición nos asegura que los efectos de entrada en la zona de prueba son despreciables, ya que no existe desarrollo de la capa límite y también, como consecuencia de ésta misma condición, la questión planteada en la sección 3 del capítulo 2, no será tratada aquí, quedando solo referida a la bibliografía (7). Esto último se puede lograr mediante un buen ajuste del equipo experimental (Capítulo 6).

Nuestra frontera física será un ducto circular regular cerrado o mejor conocida como tubería. Es importante especificar la geometría que se usará por dos motivos:

1. - Ella indica el tipo de coordenadas en que el estudio debe llevarse a cabo.

Las apropiadas en nuestro caso serán las coordenadas cilíndricas.

2. - Mediante la información de los lugares especificados en la frontera, junto con las condiciones iniciales, se hace la evaluación de las constantes de integración que resultan como consecuencia de resolver las ecuaciones diferenciales establecidas en los capítulos 2 y 3.

Este análisis está restringido a una tubería horizontal debido a la disposición del equipo experimental (Capítulo 6).

En el diseño de líneas de tuberías lo que se quiere generalmente conocer es la caída de presión debido a la fricción (o sea, a los esfuerzos cortantes) de

un líquido que fluye por una tubería de sección y longitud conocida y que maneja un gasto también conocido, de tal forma que la selección de la bomba que lo vá a impulsar por ahí, sea la correcta. También podría suceder que lo que se quisiera conocer fuera el gasto necesario para una cierta caída de presión, longitud y diámetro de la tubería conocidos, aunque esto suele ser mucho menos frecuente. Por éste motivo, nos referiremos siempre al primer caso.

El problema consiste en obtener una ecuación que permita calcular la caída de presión y que debe estar en función de nuestras variables de diseño: el gasto, longitud y diámetro de la tubería usada y los parámetros de las ecuaciones constitutivas que caracterizan al material en cuestión.

Antes de entrar en materia, es preciso dejar aclarada la cuestión a de la sección 3, capítulo 2, ya que ella requiere las condiciones bajo las cuáles el régimen es laminar y cuáles donde se comporta como turbulento. Para esto, estableceremos la definición del factor de fricción y , aprovechando la ecuación de Fanning y los modelos no newtonianos considerados, se dará una relación para éste factor de fricción a partir del cuál podremos calcular el número de Reynolds. Veremos, también, que sólo en casos especiales el número de Reynolds se puede dejar en forma explícita y no como una función ó dependiente del factor de fricción.

2. FLUIDOS NEWTONIANOS EN REGIMEN LAMINAR .

Consideramos un líquido newtoniano de viscosidad y densidad constantes que fluye a través de una tubería larga horizontal (fig. 4. 2. 1) de radio a bajo las condiciones establecidas en 1. Tendremos que calcular el perfil de velocidades como una función de la caída de presión y de aquí, obtener la ecuación que relaciona -

esta caída de presión con el gasto.

Mediante el uso de coordenadas cilíndricas (tabla 2.2.3) y como el flujo es en una dimensión ya que sino, no sería laminar, tenemos que:

$$v_r = 0 \quad ; \quad v_\theta = 0 \quad ; \quad v_z \neq 0$$

Los términos v_r , v_θ y todas sus derivadas deben ser cero; de la ecuación de continuidad (tabla 2.2.1, ec. 2) concluimos que :

$$\partial v_z / \partial z = 0$$

Debido a la simetría cilíndrica se tiene que:

$$\partial v_z / \partial \theta = 0$$

De la condición 1. a : $\partial v_z / \partial t = 0$

y por lo tanto, es razonable concluir que $v_z = v_z(r)$

lo que significa: $\partial v_z / \partial r \neq 0$ ó que $\partial^2 v_z / \partial r^2 \neq 0$

De la ecuación de Navier-Stokes (tabla 2.2.3), observando que los efectos de la gravedad en la tubería horizontal son nulos, vemos que :

$$\begin{aligned} \partial P / \partial r = 0 \quad ; \quad \partial P / \partial \theta = 0 \quad y \\ (\partial P / \partial z) = \mu \left[(1/r) \partial (r (\partial v_z / \partial r)) / \partial r \right] \end{aligned} \quad 4.2.1$$

La ec. 4.2.1 puede ser escrita como:

$$(dP / dz) = \mu \left[(1/r) d (r (dv_z / dr)) / dr \right] \quad 4.2.2$$

El lado izquierdo de la ecuación 4.2.2 es ó una constante ó una función de z ; el lado derecho es ó una constante ó una función de r . De ésto se deduce que ambos miembros deben ser iguales a una constante; y puesto que bajo condiciones de régimen permanente dP / dz es una constante, tenemos que:

$$(dP / dz) = (\Delta P / \Delta z) = (-\Delta P / \Delta z) = (-\Delta P / L)$$

El signo negativo en la ec. 4.2.3 se debe a que la presión decrece al aumentar z .

Incorporando la ecuación 4.2.3 en la ecuación 4.2.2 :

$$(-\Delta P / L) = \mu \left[(1/r) d (r (d v_z / d r)) / d r \right] \quad 4.2.4$$

Integrando la ec. 4.2.4 una vez :

$$r (d v_z / d r) = (- \Delta P / 2 \mu L) r^2 + A \quad 4.2.5$$

Integrando la ec. 4.2.5 :

$$v_z = (- \Delta P / 4 \mu L) r^2 + A \ln r + B \quad 4.2.6$$

donde A y B son constantes de integración que se resuelven con las condiciones frontera (C. F.) siguientes:

$$C. F. (1) \quad v_z (a) = 0$$

$$C. F. (2) \quad v_z (0) = \text{finita} \quad \text{b} \quad (d v_z / d r)_{r=0} = 0$$

La substitución de la C. F. (2) en la ec. 4.2.5 dá como resultado que: A =

0 ;

y la substitución de la C. F. (1) en la ec. 4.2.6 hace que:

$$B = (\Delta P / 4 \mu L) a^2$$

Substituyendo los valores de A y B en la ec. 4.2.6 tenemos que :

$$v_z = (\Delta P / 4 \mu L) (a^2 - r^2) \quad 4.2.7$$

La ec. 4.2.7 describe el perfil de velocidades en función de caído de presión.

El gasto está dado por (10) :

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a v_z r dr d\theta \quad 4.2.8$$

Por lo tanto, substituyendo la ec. 4.2.7 en la ec. 4.2.8 se tiene que:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a (\Delta P / 4 \mu L) (a^2 - r^2) r \, dr \, d\Theta \quad 4.2.9$$

Integrando la ec. 4.2.9 dos veces obtenemos que:

$$Q = (\pi \Delta P a^4) / (8 \mu L) \quad 4.2.10$$

de donde:

$$(\Delta P / L) = (8 \mu Q) / (\pi a^4) \quad 4.2.11$$

ó bien:

$$(\Delta P / L) = (32 \mu \langle v \rangle) / D^2 \quad 4.2.12$$

donde:

$$Q = \pi a^2 \langle v \rangle = (\pi / 4) D^2 \langle v \rangle \quad \text{en la que } D = 2 a.$$

$\langle v \rangle$. - velocidad promedio definida por (10):

$$\langle v \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^a v_z r \, dr \, d\Theta \quad / \quad \int_0^{2\pi} \int_0^a r \, dr \, d\Theta \quad 4.2.13$$

La ec. 4.2.12 es la conocida ecuación de Hagen - Poiseuille para el cálculo de la pérdida de presión en tuberías a régimen laminar.

Substituyendo la ec. 4.2.11 en la ec. 4.2.7 tenemos que:

$$v_z = (2 Q / \pi a^2) (1 - (r/a)^2) \quad 4.2.14$$

y como la velocidad máxima se localiza en $r = 0$, se obtiene:

$$v_{z \text{ máx}} = 2 Q / \pi a^2 \quad 4.2.15$$

con lo que la ec. 4.2.14 se convierte en:

$$v_z = v_{z \text{ máx}} (1 - (r/a)^2) \quad 4.2.16$$

La ecuación 4.2.16 muestra claramente que el perfil de velocidades es parabólico y simétrico con respecto al eje de simetría del tubo, como puede apreciarse en la fig. 4.2.2.

La parábola debe tener su máximo en $v_z / \langle v \rangle = 2$, ya que:

$$(\langle v \rangle / v_{z \text{ máx}}) = (\Omega / \pi a^2) / (2 \Omega / \pi a^2) = 1/2 \quad 4.2.17$$

Para poder usar la ec. 4.2.11 ó la ec. 4.2.12 necesitamos conocer, respectivamente, el gasto ó la velocidad promedio, el radio ó el diámetro del tubo, y en ambos casos la viscosidad newtoniana que se obtiene de la curva de flujo del material (sección 3, capítulo 3).

Este método directo de cálculo entre la caída de presión y el gasto, no se puede aplicar siempre para muchos sistemas que presentan gran interés en ingeniería, y entonces hay que recurrir a otros métodos para hallar la caída de presión en función del gasto y la fuerza resistente en función de la velocidad. Para ello, se utilizan datos experimentales de estas variables con el fin de construir gráficas ó correlaciones que permitan estimar el comportamiento de flujo de sistemas geoméricamente semejantes; para lo cuál, resulta lógico usar variables adimensionales (14).

Para comprender mejor lo anterior, consideremos la fuerza que el fluido ejercerá sobre la superficie sólida de la tubería. Esta fuerza puede desdoblarse en dos: F_s , la fuerza que ejercería el fluido aunque estuviera en reposo, y F_k , la fuerza adicional relacionada con el comportamiento cinético del fluido.

El valor de la fuerza F_k puede expresarse arbitrariamente (11) como el producto de un área característica A , una energía cinética característica por unidad de volumen K y un número adimensional f , denominado factor de fricción:

$$F_k = A K f \quad 4.2.18$$

Observemos que la ec. 4.2.18 no es una ley de la mecánica de fluidos sino una definición del factor de fricción. Esta definición resulta útil porque el nú -

mero adimensional f puede expresarse mediante una función relativamente sencilla del número de Reynolds y la forma del sistema.

Para el flujo en tuberías, generalmente se toma para A la superficie mojada:

$$A = 2 \pi a L \quad 4.2.19$$

y para K :

$$K = (1/2) \rho \langle v \rangle^2 \quad 4.2.20$$

Por lo tanto, la ec. 4.2.18 para tuberías de radio a y longitud L se convierte en:

$$F_k = (2 \pi a L) \left((1/2) \rho \langle v \rangle^2 \right) \quad 4.2.21$$

Generalmente, la magnitud que se mide no es F_k sino la caída de presión $P_0 - P_1$ y la diferencia de altura $h_0 - h_1$. Aplicando un balance de fuerzas al fluido entre 0 y L en la dirección del flujo, cuando éste está totalmente desarrollado, se obtiene:

$$\begin{aligned} F_k &= ((P_0 - P_1) + \rho g (h_0 - h_1)) \pi a^2 \\ &= (P_0^* - P_1^*) \pi a^2 \end{aligned} \quad 4.2.22$$

Eliminando F_k entre las ecuaciones 4.2.21 y 4.2.22 (para $D = 2a$), tenemos que:

$$f = (1/4) (D / L) \left((P_0^* - P_1^*) / (1/2) \rho \langle v \rangle^2 \right) \quad 4.2.23$$

Esta última ecuación muestra como se calcula explícitamente f a partir de datos experimentales. Si despejamos la caída de presión de la ec. 4.2.23 (escrita como ΔP , aunque ya sabemos que los asteriscos en los términos de presión indican que la altura se agrupó como tal) tenemos:

$$\left(\Delta P / L \right) = (2 f \rho \langle v \rangle^2) / D \quad 4.2.24$$

que es la ecuación de Fanning.

Para obtener la relación entre f y el número de Reynolds, despejemos una de las velocidades promedio de la ec. 4.2.24 y substituyámosla en la ec. 4.2.12; de la ec. 4.2.24:

$$\langle v \rangle = (D/L) (\Delta P / 2 f \langle v \rangle) \quad 4.2.25$$

Substituyendo la ec. 4.2.25 en la ec. 4.2.12:

$$(\Delta P / L) = (32 \mu / D^2) (D/L) (\Delta P / 2 f \langle v \rangle) \quad 4.2.26$$

Reagrupando y simplificando la ec. 4.2.26 obtenemos:

$$f = 16 (\mu / D \langle v \rangle) \quad 4.2.27$$

y como el número de Reynolds para tuberías está definido por:

$$Re = D \langle v \rangle / \mu \quad 4.2.28$$

entonces, substituyendo la ec. 4.2.28 en la ec. 4.2.27 se obtiene:

$$f = 16 / Re \quad 4.2.29$$

que es la relación adimensional esperada entre nuestras variables de diseño: diámetro, densidad, viscosidad, velocidad promedio ó gasto.

La ec. 4.2.29 graficada en coordenadas logarítmicas corresponde a una línea recta con pendiente negativa, como puede observarse en la fig. 4.2.3.

La ec. 4.2.29 es la relación matemática equivalente a las ecuaciones 4.2.11 ó 4.2.12. Es decir, la curva laminar de la gráfica del factor de fricción no es más que una representación gráfica de la ecuación de Hagen - Poiseuille.

Este método tiene la ventaja de que sólo hay que representar una única curva de f contra el Reynolds, lo cuál, es mucho mas sencillo que representar separadamente la caída de presión contra el gasto para diferentes valores

de diámetros, densidades y viscosidades.

En resumen, se calcula el número de Reynolds con las variables de diseño obtenidas experimentalmente y mediante la gráfica 4.2.3 se obtiene f ; y luego mediante la ec. 4.2.24 se calcula la caída de presión por unidad de longitud.

Esta curva refleja el comportamiento laminar para el flujo de fluidos newtonianos en tubos circulares, largos, lisos y rugosos.

3. FLUIDOS NEWTONIANOS EN REGIMEN TURBULENTO

Debido al movimiento de naturaleza caótica que identifica a esta forma de flujo, no se ha dado una descripción exacta del mismo; para la obtención de ecuaciones en flujo turbulento, análogas a la ec. 4.2.16 para flujo laminar, que describen la distribución de velocidad, no se dispone de métodos directos y no son tan simples, además, existen muchas de ellas de acuerdo a la teoría propuesta.

Es por esto que nuestra intención no es presentar todos los modelos que nos permitan discutirlo formalmente (19) sino tratar de delinear una técnica que facilite el cálculo de la caída de presión por unidad de longitud, que es lo que nos interesa conocer para poder dimensionar nuestra línea de tubería, más que conocer el perfil de velocidades del fluido en la tubería.

Los modelos que permiten calcular la distribución de velocidad son necesarios porque a partir de ellos se pueden elaborar la curva del factor de fricción contra el Reynolds; como ejemplo, consideremos la distribución turbulenta de velocidad más sencilla, es decir, la ley de la potencia $1/7$ (11):

$$\left(\frac{\bar{v}_z}{v^*} \right) = 8.56 \left(s \frac{\rho}{\mu} \right)^{1/7} \quad 4.3.1$$

donde:

\bar{v}_z . - velocidad de tiempo ajustado.

v^* . - velocidad de referencia.

$$v^* = (\tau_w / \rho)^{1/2} = (\Delta P a / 2 L f)^{1/2}$$

s . - está definido como $s = a - r$

La velocidad promedio es:

$$(\langle \bar{v}_z \rangle / v^*) = 0.817 \times 8.56 (a v^* f / \mu)^{1/7} \quad 4.3.2$$

Forzando a que la ec. 4.3.2 adquiera la forma de la ec. 4.2.23, se obtiene para el flujo turbulento en un tubo de un fluido newtoniano que:

$$f = 2 (v^* / \langle \bar{v}_z \rangle)^2; \quad f = 0.0791 / Re^{1/4} \quad 4.3.3$$

La ec. 4.3.3 es la fórmula conocida como la ecuación de Blasius y es satisfactoria para valores del número de Reynolds de 2.1×10^3 hasta 10^5 , y resulta útil para estimaciones. Utilizando expresiones más exactas para la distribución de velocidad, pueden obtenerse relaciones algo más exactas entre el factor de fricción y el número de Reynolds.

Sin embargo, para la mayor parte de los cálculos ingenieriles en los que interviene el flujo turbulento de fluidos newtonianos, se deberá utilizar la gráfica del factor de fricción contra el Reynolds (20) que se obtiene de datos experimentales en tubos, en la cuál se cubrieron casi todas las posibilidades de flujo de fluidos newtonianos. Esta curva es el resultado de un análisis dimensional aplicado al fluido en movimiento.

Los procesos físicos pueden ser descritos por una ecuación que relaciona las variables que influyen en el sistema. A través del análisis dimensional, estas variables pueden ser arregladas en grupos adimensionales, lo cuál requie

re que todas las variables que afectan el proceso sean conocidas. Los grupos adimensionales no dan información acerca del mecanismo del proceso, pero sí correlacionan los datos experimentales y desarrollan relaciones funcionales entre las variables dimensionadas. También, una vez que la relación funcional entre los grupos adimensionales se obtiene experimentalmente, el efecto de cualquier factor dimensional puede determinarse. Esto es particularmente útil cuando es difícil, experimentalmente, cambiar alguna variable.

Por esto, al aplicar el análisis dimensional a nuestro flujo turbulento, debemos fijar todas las variables que intervienen en el proceso, es decir:

1. - velocidad promedio ($\langle v \rangle$).
2. - densidad (ρ).
3. viscosidad (μ).
4. - diámetro (D).
5. - longitud (L).
6. - un factor de conversión que haga dimensionalmente homogénea la ecuación (g_c).

Aplicando el método de Rayleigh¹ (14) se obtiene la siguiente relación:

$$\left(\Delta P / L \right) \left(g_c D / \langle v \rangle^2 \rho \right) = \phi (Re) \quad 4.3.4$$

Por experimentación se encontró que:

$$\phi (Re) = 2 f \quad 4.3.5$$

Por lo tanto, para el flujo turbulento de fluidos newtonianos en tubos lisos

1

La deducción de la ecuación 4.3.4 por el método referido, se encuentra en el Apéndice 3.

se tiene que:

$$(\Delta P / L) = (2 f \langle v \rangle^2 \rho) / (g_c D) \quad 4.3.6$$

Si los tubos circulares son rugosos, se necesita en la región turbulenta solamente, una caída de presión más elevada, para una determinada velocidad de flujo, que la que indica la ec. 4.3.6.

Si se representa por ϵ la altura de las protuberancias, es de esperar que en la correlación intervenga la rugosidad relativa ϵ / D , como podrá observarse de la gráfica experimental de la página A-24 de la referencia 20. Podrá observarse también de la misma gráfica que para un valor determinado de ϵ / D el factor de fricción tiende a hacerse constante a elevados números de Reynolds.

También es necesario hacer notar que la gráfica antes mencionada, corresponde a la ecuación de Darcy, la cuál, es igual a la ec. 4.3.6 con la única diferencia de que:

$$f_{\text{Darcy}} = 4 f_{\text{Fanning}} \quad ; \quad f' = 4 f \quad 4.3.7$$

Por lo tanto:

$$(\Delta P / L) = (f' \langle v \rangle^2 \rho) / (2 g_c D) \quad 4.3.8$$

Así, la metodología para calcular la pérdida de presión por unidad de longitud para flujo turbulento de flúidos newtonianos, se resume de la siguiente forma:

1. - Se calcula el número de Reynolds a partir de las variables de diseño.
2. - Si el tubo es rugoso, de la gráfica en la página A-23 de la referencia 20, se busca el parámetro ϵ / D a partir del diámetro y material usados.
3. - Con éste valor de ϵ / D y el Reynolds se determina f' de la gráfica en la página A-24.

4. - Mediante la ec. 4.3.8, por último, se calcula la caída de presión por unidad de longitud.

Si el tubo en cuestión fuera liso, con el número de Reynolds calculado obtendríamos de la misma gráfica A - 24 el factor f' de la curva para tubos lisos que allí aparece y, posteriormente, procederíamos a ejecutar el paso número 4 de la secuencia anterior.

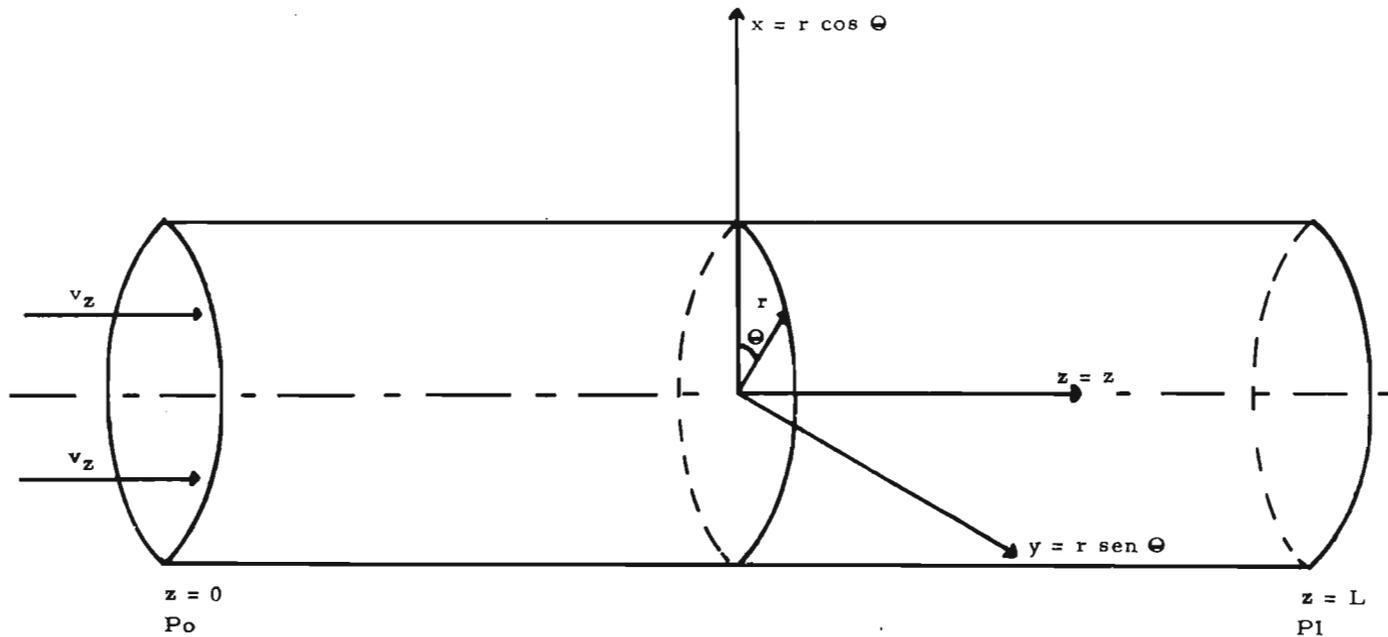
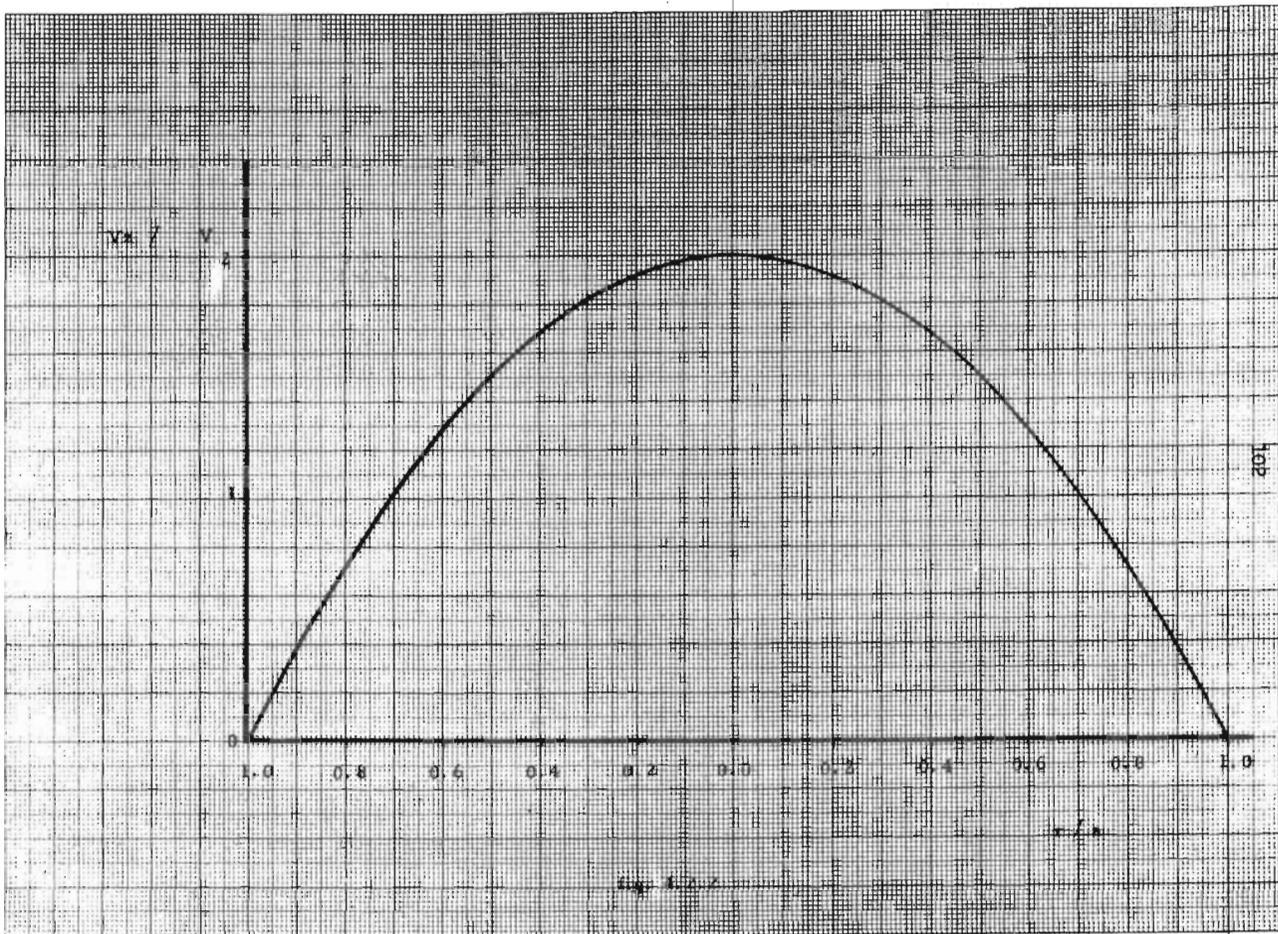


fig. 4.2.1



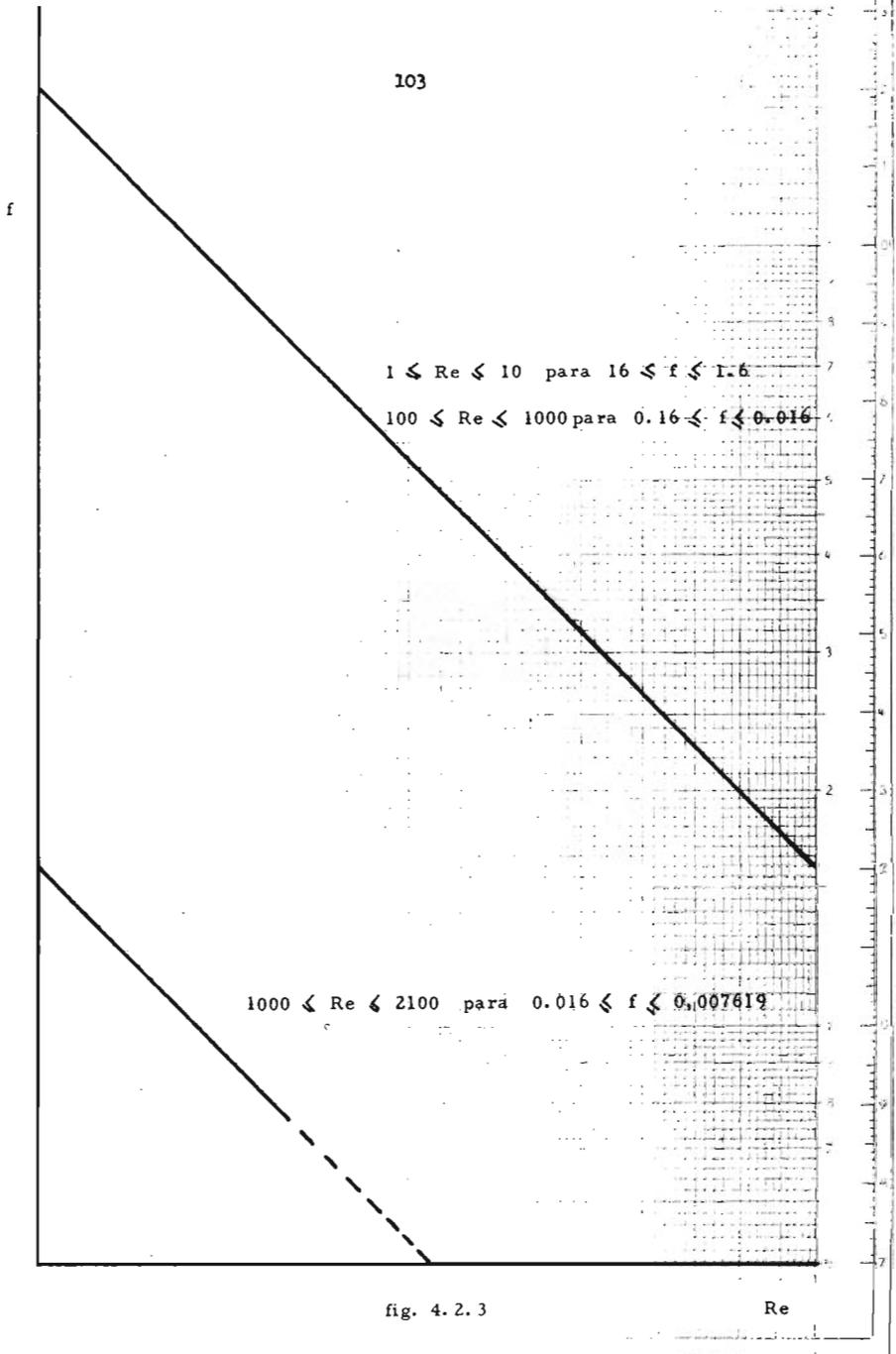


fig. 4.2.3

CAPITULO: 5

FLUJO DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS
INCOMPRESIBLES EN TUBERIAS1. DESARROLLO DE LAS ECUACIONES DE DISEÑO PARA LA ZONA
LAMINAR

Quando se diseñan sistemas para el flujo de fluidos newtonianos, los ingenieros cuentan con mucha información, incluyendo un gran número de buenas correlaciones, para poder delinearlos (21). Sin embargo, cuando se vá a diseñar sistemas de tuberías para manejar fluidos no newtonianos, el ingeniero debe volverse un reologista nato, para poder ser capaz de discernir, de todas las correlaciones disponibles, cuál es la mejor. Debe ser capaz de reconocer un material pseudoplástico ó uno de Bingham, y ajustarle una ecuación a una serie de datos viscosimétricos, ó determinar constantes en valores puntuales para materiales que no siguen ninguno de éstos materiales clásicos.

En capítulos anteriores hemos revisado los principios de la Reología y las técnicas para la evaluación de los parámetros de las ecuaciones constitutivas. En ésta sección usaremos éstas ecuaciones para derivar, a su vez, ecuaciones de diseño para varios modelos reológicos para el flujo a régimen permanente, isotérmico y laminar a través de tuberías.

Como estaremos utilizando materiales no newtonianos independientes del tiempo (puramente viscosos) y sistemas de flujo en los cuáles se cumplen las suposiciones establecidas en la sección 1 del capítulo 4, pueden obtenerse ecuaciones generales que relacionan el gasto y los esfuerzos cortantes. A partir de éstas, se pueden derivar expresiones para el gasto y el perfil de velocidades substituyendo las ecuaciones constitutivas apropiadas que relacionan el esfuerzo cortante y la rapidez de corte.

La forma general de una ecuación constitutiva puede escribirse como:

$$(d\gamma / dt) = f(\mathcal{Z}) \quad 5.1.1$$

Para el flujo en tubos, la ec. 5.1.1 se transforma en:

$$-(dv_z / dr) = f(\mathcal{Z}_{rz}) \quad 5.1.2$$

Esta transformación se hace puesto que, al igual que en la sección 2 del capítulo 4, se tiene:

$$v_z = v_z(r) \quad ; \quad v_r = v_\theta = 0$$

De la ecuación de movimiento (tabla 2.2.2) y puesto que estamos trabajando con el mismo sistema cilíndrico que el de la sección 2 del capítulo 4, a excepción de que ahora la viscosidad no newtoniana varía, tenemos que:

$$\begin{aligned} (\partial P / \partial r) &= 0 \quad ; \quad (\partial P / \partial \theta) = 0 \quad ; \\ (\partial P / \partial z) &= -(1/r) \partial(r \mathcal{Z}_{rz}) / \partial r \end{aligned} \quad 5.1.3$$

El hecho de que la viscosidad ya no es más una constante se explica por la aparición de \mathcal{Z}_{rz} en la ecuación 5.1.3.

La ec. 5.1.3 se puede escribir como:

$$(dP / dz) = -(1/r) d(r \mathcal{Z}_{rz}) / dr \quad 5.1.4$$

y por un razonamiento análogo al de la sección 2 del capítulo 4, la ec. 5.1.4 puede reescribirse como:

$$-(\Delta P / L) \doteq -(1/r) d(r \tau_{rz}) / dr \quad 5.1.5$$

Integrando la ec. 5.1.5 se tiene que:

$$r \tau_{rz} = (\Delta P / 2L) r^2 + C_1 \quad 5.1.6$$

donde C_1 es una constante de integración que se calcula con una condición frontera:

$$\text{C. F. (1)} \quad \tau_{rz}(0) = 0$$

La substitución de la C. F. (1) en la ec. 5.1.6 dá como resultado que $C_1=0$; por lo tanto, la ec. 5.1.6 se transforma en:

$$\tau_{rz} = (\Delta P / 2L) r \quad 5.1.7$$

Así, cuando el esfuerzo cortante se evalúa en la pared (τ_w) se tiene que:

$$\tau_w = \Delta P a / 2L \quad 5.1.8$$

y por lo tanto:

$$\tau_{rz} = \tau_w (r/a) \quad 5.1.9$$

Substituyendo la ec. 5.1.9 en la ec. 5.1.2 obtenemos:

$$-(dv_z / dr) = f(\tau_w (r/a)) \quad 5.1.10$$

La ec. 5.1.10 puede integrarse para obtener la expresión general del perfil de velocidad en el tubo (15):

$$\int_{v_z}^0 -dv_z = v_z = \int_r^a f(\tau_w (r/a)) dr \quad 5.1.11$$

Ahora, consideremos el gasto de un elemento diferencial de cilindro (fig. 5.1.1) entre r y $r + dr$:

$$dQ = v_z^2 \pi r dr \quad 5.1.12$$

Integrando la ec. 5.1.12 se obtiene:

$$\int_0^Q dQ = Q = \pi \int_0^a v_z^2 r dr = \pi \int_0^a v_z^2 d(r^2) \quad 5.1.13$$

La ec. 5.1.13 puede integrarse por partes para dar:

$$Q = \pi \left(v_z r^2 - \int r^2 dv_z \right) \Big|_0^a \quad 5.1.14$$

Puesto que $v_z(a) = 0$, el primer término en la ec. 5.1.14 desaparece.

Por substitución de la ec. 5.1.10, podemos reducir la ec. 5.1.14 a:

$$Q = \pi \int_0^a r^2 f(\tau_w(r/a)) dr \quad 5.1.15$$

Haciendo la substitución $r = a(\tau_{rz} / \tau_w)$ que proviene de la ec. 5.1.9

obtenemos la ecuación general para el gasto en el tubo (15):

$$(Q / \pi a^3) = (1 / \tau_w^3) \int_0^{\tau_w} (\tau_{rz})^2 f(\tau_{rz}) d\tau_{rz} \quad 5.1.16$$

Substituyendo las ecuaciones constitutivas en las ecuaciones 5.1.11 y

5.1.16, obtendremos las ecuaciones de diseño para flujo en tubos.

Ahora apliquemos éstas ecuaciones para los modelos planteados en el capítulo 3, para fluidos puramente viscosos independientes del tiempo.

1. a . - Ley de la Potencia

De los varios modelos discutidos en dicho capítulo, la ley de la potencia es el más simple y el más comúnmente usado. La ecuación constitutiva es:

$$\tau_{rz} = K (dv_z / dr)^n$$

por lo tanto:

$$f(\tau_{rz}) = (\tau_{rz} / K)^{1/n} \quad 5.1.17$$

Substituyendo la ec. 5.1.17 en la ec. 5.1.11 obtenemos:

$$v_z = \int_r^a \left((a \Delta P / 2 L K) (r/a) \right)^{1/n} dr \quad 5.1.18$$

Efectuando las operaciones necesarias en la integral, la ec. 5.1.18 se reduce a:

$$v_z = (an / n+1) (a \Delta P / 2 L K)^{1/n} (1 - (r/a)^{n+1/n}) \quad 5.1.19$$

La ec. 5.1.19 puede expresarse en términos de la velocidad máxima (en $r = 0$, $v_z = v_z \text{ máx}$); así:

$$v_z \text{ máx} = (an / n+1) (a \Delta P / 2 L K)^{1/n} \quad 5.1.20$$

Por lo tanto, la ec. 5.1.19 se transforma, substituyendo la ec. 5.1.20, a:

$$v_z = v_z \text{ máx} (1 - (r/a)^{n+1/n}) \quad 5.1.21$$

Ahora, substituyendo la ec. 5.1.17 en la 5.1.16 tenemos:

$$(Q / \pi a^3) = (1 / 6 w^3) \int_0^w (\tau_{rz})^2 (\tau_{rz} / K)^{1/n} d\tau_{rz} \quad 5.1.22$$

Integrando la ec. 5.1.22:

$$(Q / \pi a^3) = (n / 3n+1) (a \Delta P / 2 L K)^{1/n} \quad 5.1.23$$

Calculando la velocidad promedio (gasto / área) tenemos que:

$$\langle v_z \rangle = (an / 3n+1) (a \Delta P / 2 L K)^{1/n} \quad 5.1.24$$

La ec. 5.1.24 hubiera dado el mismo resultado si se utilizara la ec. 4.2.13.

Las ecuaciones anteriores bastarían para diseñar la línea de tubería, pero al igual que en la sección 2 del capítulo 4, el interés fundamental radica en tener nuestras ecuaciones de cálculo en función de factores adimensionales (el factor de fricción y el número de Reynolds) por razones que anteriormente se establecieron; por lo que despejando la caída de presión de la ec. 5.1.24 tendremos:

$$\Delta P = (2 L K / a) ((3n+1 / an) \langle v_z \rangle)^n \quad 5.1.25$$

que substituída en la ecuación del factor de fricción de Fanning (ec. 4.2.23) da:

$$f = (3n+1 / n)^n 2^{n+1} (K / \rho \langle v_z \rangle^{2-n} D^n) \quad 5.1.26$$

Pero como para régimen laminar $f = 16 / Re$, entonces para la ley de la potencia tendremos:

$$(16 / Re') = (3n+1 / n)^n 2^{n+1} (K / \rho \langle v_z \rangle^{2-n} D^n) \quad 5.1.27$$

Rearreglando la ec. 5.1.27 obtenemos:

$$Re' = (2^{3-n} \rho (4Q / n D^2)^{2-n} D^n) / ((3+1/n)^n K) \quad 5.1.28$$

que es el número de Reynolds para el modelo de la ley de la potencia calculado a partir de las variables de diseño y de los parámetros del modelo. Por lo tanto, podremos hacer una gráfica similar a la de los fluidos newtonianos del factor de fricción contra el número de Reynolds para la ley de la potencia y, resumir la metodología de cálculo en la siguiente manera:

1. - Se obtiene la curva de flujo del material en consideración determinada mediante un aparato Brookfield Synchro-lectric u otro similar, tratando de abarcar el mayor rango de experimentación para evitar las extrapolaciones, ya que éstas son muy peligrosas; esto se debe a que los parámetros n y K pudieran variar fuera de nuestro rango de operación, aunque dentro de él se hayan mantenido constantes. (7, 11, 15)
2. - Se obtienen los parámetros n y K del modelo a partir de la curva de flujo.
3. - Se hace la gráfica de f vs. Re' para diferentes valores experimentales del gasto y del diámetro.
4. - Se calcula el Re' para los valores del diámetro y gasto usados.
5. - Se obtiene f de la gráfica realizada en 3.
6. - Este valor de f se substituye en la ecuación de Fanning y se calcula la caída de presión para una longitud dada.

El proceso es repetitivo para diferentes valores del gasto y del diámetro a partir del punto 4.

1. b. - Funciones Polinomiales

Aunque éstos tipos de ecuaciones constitutivas que a continuación propon-dremos no aparecen en la literatura, tienen el mismo fundamento que la ley de la potencia.

Son ajustes de curvas experimentales polinomiales de grados dos y tres de esfuerzo cortante contra la rapidez de corte.

La ecuación polinomial propuesta tiene la siguiente forma:

$$-(dv_z / dr) = C_1 + C_2 \tau r z + C_3 \tau r z^2 + \dots + C_n \tau r z^{n-1} \quad 5.1.29$$

donde C_1, C_2, \dots, C_n son ahora los parámetros del modelo.

La ec. 5.1.29 se aplicará solamente cuando los grados del polinomio son dos y tres por el siguiente motivo: revisando la literatura referida (15, 22, 23, 24, 27) observaremos que los fluidos no newtonianos puramente viscosos independientes del tiempo, cuándo se les hace su curva de flujo, y con excepción de los plásticos de Bingham que nosotros no estaremos manejando, siempre tiene la forma de una curva continúa que se aproxima a ser parábola, acostada si hablamos de pseudoplásticos y levantada si se trata de dilatantes; por ésta razón, eliminamos completamente la posibilidad de un ajuste polinomial cuando el grado es uno (lineal) y, polinomios superiores al tercer grado resultan imprácticos ya que éstos podrían pasar por los puntos elegidos para hacer la regresión polinomial, pero seguramente estarían lejanos de los valores entre los puntos intermedios; ésto se ejemplifica mediante la fig. 5.1.2.

1. b. 1) Polinomio de grado dos

Para éste grado la ec. 5.1.29 se reduce a:

$$-(dv_z/dr) = C_1 + C_2 \zeta_{rz} + C_3 (\zeta_{rz})^2 \quad 5.1.30$$

Aplicando la ec. 5.1.9 en la ec. 5.1.30 y substituyendo el resultado en la ec. 5.1.11, tenemos que:

$$v_z = \int_r^a (C_1 + C_2 \zeta_w(r/a) + C_3 \zeta_w^2(r/a)^2) dr \quad 5.1.31$$

Integrando la ec. 5.1.31 y substituyendo a ζ_w por su valor (ec. 5.1.8) se obtiene:

$$v_z = C_1 (a - r) + C_2 (\Delta P / 4 L) (a^2 - r^2) + (C_3 / 3) (\Delta P / 2 L)^2 (a^3 - r^3) \quad 5.1.32$$

Ahora, substituyendo la ec. 5.1.30 en la ec. 5.1.16 tenemos:

$$(Q / \pi a^3) = (1 / \zeta_w^3) \int_0^{\zeta_w} \zeta_{rz}^2 (C_1 + C_2 \zeta_{rz} + C_3 \zeta_{rz}^2) d\zeta_{rz} \quad 5.1.33$$

Integrando la ec. 5.1.33 y substituyendo el valor de ζ_w obtenemos:

$$Q = (C_1 \pi a^3 / 3) + (C_2 \pi a^4 / 4) (\Delta P / 2 L) + (C_3 \pi a^5 / 5) (\Delta P / 2 L)^2 \quad 5.1.34$$

La velocidad promedio será:

$$\langle v_z \rangle = (C_1 a / 3) + (C_2 a^2 / 4) (\Delta P / 2 L) + (C_3 a^3 / 5) (\Delta P / 2 L)^2 \quad 5.1.35$$

Como lo que nos interesa son los factores adimensionales, despejemos la caída de presión de la ec. 5.1.35 y substituyámosla en la ecuación de Fanning para hallar f . De la ec. 5.1.35 y como la caída de presión es una ecuación de segundo grado, tenemos que:

$$(\Delta P / 2 L) = \left[(-C_2 a^2 / 4) + \sqrt{(C_2 a^2 / 4)^2 - 4(C_3 a^3 / 5)((C_1 a / 3) - \langle v_z \rangle)} \right] / (2C_3 a^3 / 5) \quad 5.1.36$$

En la ec. 5.1.36 se ha eliminado la posibilidad de tener una raíz negativa para la caída de presión.

Rearreglando la ecuación de Fanning:

$$f = (D / \rho \langle v_z \rangle^2) (\Delta P / 2L) \quad 5.1.37$$

Substituyendo la ec. 5.1.36 en la ec. 5.1.37 tenemos que :

$$f = (D / \rho \langle v_z \rangle^2) \left\{ \frac{\left[(-C_2 a^2/4) + \sqrt{(C_2 a^2/4)^2 - 4((C_3 a^3/5)((C_1 a/3) - \langle v_z \rangle))} \right]}{(2 C_3 a^3/5)} \right\} \quad 5.1.38$$

Y para el Reynolds:

$$Re' = 16 / (D / \rho \langle v_z \rangle^2) \left\{ \frac{\left[(-C_2 a^2/4) + \sqrt{(C_2 a^2/4)^2 - 4((C_3 a^3/5)((C_1 a/3) - \langle v_z \rangle))} \right]}{(2 C_3 a^3/5)} \right\} \quad 5.139$$

Las ecuaciones 5.1.38 y 5.1.39 aún se pueden dejar en función del gasto Q , ya que $\langle v_z \rangle = 4Q / \pi D^2$.

De ésta forma, la metodología propuesta en 1.a se puede volver a usar.

1. b. 2) Polinomio de grado tres

Para éste, la ec. 5.1.29 queda:

$$-(dv_z / dr) = C_1 + C_2 \mathcal{C} r z + C_3 \mathcal{C} r^2 z + C_4 \mathcal{C} r^3 z \quad 5.1.40$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en 1. b. 1, tendremos para el perfil de velocidades la siguiente ecuación:

$$v_z = C_1 (a - r) + C_2 (a^2 - r^2) (\mathcal{C} w / 2a) + C_3 (a^3 - r^3) (\mathcal{C} w^2 / 3a^2) + C_4 (a^4 - r^4) (\mathcal{C} w^3 / 4a^3) \quad 5.1.41$$

y para el gasto:

$$Q = (C_1 \pi a^3 / 3) + (C_2 \pi a^3 \mathcal{C} w / 4) + (C_3 \pi a^3 \mathcal{C} w^2 / 5) + (C_4 \pi a^3 \mathcal{C} w^3 / 6) \quad 5.1.42$$

Substituyendo a $\mathcal{C} w$ por su valor y despejando la caída de presión tenemos:

$$\begin{aligned}
 & (a \Delta P / 2 L)^3 + (6 C_3 / 5 C_4) (a \Delta P / 2 L)^2 + \\
 & \quad (3 C_2 / 2 C_4) (a \Delta P / 2 L) + \\
 & \quad ((2 C_1 / C_4) - (6 Q / C_4 \pi a^3)) = 0
 \end{aligned} \tag{5.1.43}$$

La ec. 5.1.43 es de tercer grado en la caída de presión y su resolución analítica es difícil, por lo que optaremos por un método numérico para su solución.

Aplicando el método iterativo de Newton - Raphson (28), tendremos:

$$\Delta P_{k+1} = \Delta P_k - (f(\Delta P_k) / f'(\Delta P_k)) \tag{5.1.44}$$

donde $f'(\Delta P_k)$ es la primera derivada de $f(\Delta P_k)$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 f(\Delta P_k) = & (a / 2 L)^3 \Delta P^3 + (6 C_3 / 5 C_4) (a / 2 L)^2 \Delta P^2 + \\
 & (3 C_2 / 2 C_4) (a / 2 L) \Delta P + \\
 & ((2 C_1 / C_4) - (6 Q / C_4 \pi a^3))
 \end{aligned} \tag{5.1.45}$$

y:

$$\begin{aligned}
 f'(\Delta P_k) = & 3 (a / 2 L)^3 \Delta P^2 + (12 C_3 / 5 C_4) (a / 2 L)^2 \Delta P + \\
 & (3 C_2 / 2 C_4) (a / 2 L)
 \end{aligned} \tag{5.1.46}$$

El principal problema con la ec. 5.1.44 es que puede ó no llegar a converger para un valor inicial dado de ΔP_k a uno de ΔP_{k+1} . Por éste motivo, tomaremos el valor de la caída de presión calculado en la ley de la potencia para poder iniciar la iteración, lo que nos asegura una convergencia para éste modo, ya que el valor de la ley de la potencia, siempre y cuando estemos manejando el mismo sistema y sus variables, no puede diferir mucho del valor de la caída de presión calculada con el polinomio de grado tres.

De lo anterior, podremos inferir que los factores adimensionales para éste

modelo tendrán que quedar en función, además de las variables de diseño y los parámetros, de la caída de presión. Así, para calcular el factor de fricción a aplicaremos la ecuación de Fanning:

$$f = (1/4) (D/L) (\Delta P / (1/2) \int \langle v_z \rangle^2) \quad 5.1.47$$

donde v_z puede calcularse reorganizando la ec. 5.1.42 de ésta forma:

$$\langle v_z \rangle = (a C_4 / 6) (a \Delta P / 2 L)^3 + (a C_3 / 5) (a \Delta P / 2 L)^2 + (a C_2 / 4) (a \Delta P / 2 L) + (a C_1 / 3) \quad 5.1.48$$

y usando el valor de la caída de presión calculado en la ec. 5.1.44 podremos obtener f .

Para calcular el Re' , como existe el mismo problema con la caída de presión, simplemente haremos que el factor de fricción calculado con la ecuación 5.1.47 se introduzca en la fórmula:

$$Re' = 16 / f \quad 5.1.49$$

y calcular el Reynolds.

Aunque éste método tiene el inconveniente de que f y Re' quedan en función de la caída de presión, la aproximación entre ΔP_{k+1} y ΔP_k puede hacerse tan cercana como se quiera, digamos

$$| \Delta P_{k+1} - \Delta P_k | < 10^{-6}$$

que para los fines de ingeniería es más que suficiente y sobre todo, nos permite seguir la metodología usada en 1.a para calcular los valores de la caída de presión.

1. c . - Modelo de Ellis

Su ecuación constitutiva es:

$$-(dv_z/dr) = (\phi_0 + \phi_1 r^{\alpha-1}) r^{\alpha-1} \quad 5.1.50$$

Por analogía con los procedimientos anteriores, tendremos que a partir de la ec. 5.1.11 se obtiene el perfil de velocidades, que está dado por la ecuación:

$$v_z = \phi_0 (a^2 - r^2) (\Delta P/4L) + (\phi_1/\alpha+1) (\Delta P/2L) r^{\alpha} (a^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}) \quad 5.1.51$$

Y mediante la ec. 5.1.16 obtener el gasto:

$$\begin{aligned} (Q/\pi a^3) &= (a \phi_0 \Delta P/8L) + (\phi_1/\alpha+3) (a \Delta P/2L) r^{\alpha} = \\ &= (\phi_0/4) (a \Delta P/2L) + (\phi_1/\alpha+3) (a \Delta P/2L) r^{\alpha} \end{aligned} \quad 5.1.52$$

La velocidad promedio es:

$$\langle v_z \rangle = (a \phi_0/4) (a \Delta P/2L) + (a \phi_1/\alpha+3) (a \Delta P/2L) r^{\alpha} \quad 5.1.53$$

Para los factores adimensionales se necesita despejar de la ec. 5.1.52 la caída de presión para sustituirla en la ecuación de Fanning, pero como no se puede dejar explícita, volvemos a aplicar el método de Newton - Raphson para calcularla; así:

$$f(\Delta P_k) = (\phi_1/\alpha+3) (a \Delta P/2L) r^{\alpha} + (\phi_0/4) (a \Delta P/2L) - (Q/\pi a^3) \quad 5.1.54$$

y:

$$f'(\Delta P_k) = (\phi_1 a \alpha/2(\alpha+3)L) (a \Delta P/2L)^{\alpha-1} + (\phi_0 a/8L) \quad 5.1.55$$

Por lo tanto, el valor de la caída de presión podrá obtenerse mediante la ec. 5.1.44 aplicando las ecuaciones 5.1.54 y 5.1.55 y, tomando como valor inicial para la iteración el obtenido en la ley de la potencia.

El factor de fricción, aplicando la ecuación de Fanning, quedará:

$$f = (1/4)(D/L) \left\{ \Delta P/(1/2) \rho \left[(\phi_0 a/4)(a \Delta P/2L) + (a \phi_1/\alpha+3)(a \Delta P/2L) r^{\alpha} \right]^2 \right\} \quad 5.1.56$$

Y el número de Reynolds se calcula, por lo tanto, aplicando nuevamente la ec. 5.1.49.

Este procedimiento vuelve a permitirnos el uso de la metodología estipulada en 1.a .

1. d . - Modelo de Eyring

La ecuación constitutiva para éste modelo es:

$$-(dv_z / dr) = B \sinh(\zeta_{rz} / A) \quad 5.1.57$$

Aplicando la ec. 5.1.11 tenemos:

$$v_z = (2ABL/\Delta P) (\cosh(a \Delta P/2AL) - \cosh(r \Delta P/2AL)) \quad 5.1.58$$

Para aplicar la ec. 5.1.16 nos enfrentamos al problema de que dentro de la integral aparece la función hiperbólica y su inversa (ζ_{rz} y $i(\zeta_{rz})$); para evitarlo, ya que la solución analítica se volvería aún más compleja, partiremos de la ec. 4.2.8, mediante la substitución de la ec. 5.1.58, quedando:

$$Q = \int_0^{2R} \int_0^a (2ABL/\Delta P) (\cosh(a \Delta P/2AL) - \cosh(r \Delta P/2AL)) r dr d\Theta \quad 5.1.59$$

Integrando la ec. 5.1.59 dos veces, obtenemos que:

$$Q = (4\pi ABL/\Delta P) \left[(a^2/2) \cosh(a \Delta P/2AL) - (2aAL/\Delta P) \sinh(a \Delta P/2AL) + (2AL/\Delta P)^2 \cosh(a \Delta P/2AL) - (2AL/\Delta P)^2 \right] \quad 5.1.60$$

La velocidad promedio es:

$$\langle v_z \rangle = (4ABL/\Delta P a^2) \left[\cosh(a \Delta P/2AL) ((a^2/2) + (2AL/\Delta P)^2) - (2AL/\Delta P) (a \sinh(a \Delta P/2AL) + (2AL/\Delta P)) \right] \quad 5.1.61$$

Como la ec. 5.1.60 es la que proporciona la caída de presión para poder calcular los factores adimensionales, tendremos que volver a aplicar el método

do de Newton - Raphson para evaluarla; de ésta forma:

$$f(\Delta P_k) = (4\pi ABL/\Delta P) \left[\cosh(a\Delta P/2AL) \left((a^2/2) + (2AL/\Delta P)^2 \right) - (2AL/\Delta P) (a \sinh(a\Delta P/2AL) + (2AL/\Delta P)) \right] - Q \quad 5.1.62$$

y:

$$f'(\Delta P_k) = (4\pi ABL) \left\{ \sinh(a\Delta P/2AL) \left((a^3/4AL) + (4aAL/\Delta P^2) \right) - \cosh(a\Delta P/2AL) \left((a^2/\Delta P) + (8A^2L^2/\Delta P^3) \right) + (8A^2L^2/\Delta P^3) \right\} - Q \quad 5.1.63$$

Por lo tanto, la caída de presión se calcula con la ec. 5.1.44; el factor de fricción con la ec. 5.1.47, donde $\langle v_z \rangle$ se calcula, ahora, con la ecuación 5.1.61; y por último, el Reynolds a partir de la ec. 5.1.49, una vez obtenido el factor de fricción.

Con lo anterior, nuevamente aplicamos la metodología que se delineó en la parte 1.a.

1.e. - Modelo de Reiner - Philippoff

La ecuación constitutiva que lo define es:

$$-(dv_z/dr) = \tau_{rz} / (\mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty} / (1 + (\tau_{rz}/\tau_s)^2))) \quad 5.1.64$$

Mediante la aplicación de la ec. 5.1.11 se tiene que:

$$v_z = (\mu_{\infty} C_1 y / 2x) (a^2 - r^2) + C_1 \left\{ \ln \left[\cos \left(\arctan \sqrt{\mu_{\infty}(1+ya^2)/x} \right) \right] - \ln \left[\cos \left(\arctan \sqrt{\mu_{\infty}(1+yr^2)/x} \right) \right] \right\} \quad 5.1.65$$

donde:

$$C_1 = (z/yx) (x/\mu_{\infty})^2 \quad z = \tau_w / a$$

$$x = \mu_0 - \mu_{\infty}$$

$$y = (\tau_w / a \tau_s)^2$$

Aplicando la ec. 5.1.16 tenemos, para el gasto:

$$\langle Q / \pi a^3 \rangle = (1 / \zeta_w^3) \left[(\zeta_w^4 / 4 \mu_\infty) + (\zeta_s^2 (\mu_\infty - \mu_0) / 2 \mu_\infty^2) \zeta_w^2 - \right. \\ \left. (\mu_0 \zeta_s^4 (\mu_\infty - \mu_0) / 2 \mu_\infty^3) \cdot \ln \left((\mu_\infty \zeta_w^2 + \mu_0 \zeta_s^2) / \mu_0 \zeta_s^2 \right) \right] \quad 5.1.66$$

La velocidad promedio es:

$$\langle v_z \rangle = (a / \zeta_w^3) \left[(\zeta_w^4 / 4 \mu_\infty) + (\zeta_s^2 (\mu_\infty - \mu_0) / 2 \mu_\infty^2) \zeta_w^2 - \right. \\ \left. (\mu_0 \zeta_s^4 (\mu_\infty - \mu_0) / 2 \mu_\infty^3) \cdot \ln \left((\mu_\infty \zeta_w^2 + \mu_0 \zeta_s^2) / \mu_0 \zeta_s^2 \right) \right] \quad 5.1.67$$

Como la ec. 5.1.66 no es explícita en la caída de presión (recordar que $\Delta P = 2 \zeta_w L / a$), entonces resuelvo numéricamente para la caída de presión y:

$$f(\Delta P_k) = (a^4 / 64 \mu_\infty L^4) \Delta P^4 + \\ (2 \zeta_s^2 a^2 (\mu_\infty - \mu_0) / 8 \mu_\infty^2 L^2) \Delta P^2 - \\ (\mu_0 \zeta_s^4 (\mu_\infty - \mu_0) / 2 \mu_\infty^3) \cdot \ln \left((a^2 \mu_\infty / 4 L^2) \Delta P^2 + \mu_0 \zeta_s^2 / \mu_0 \zeta_s^2 \right) \\ - (Q / 8 \pi L^3) \Delta P^3 \quad 5.1.68$$

y:

$$f'(\Delta P_k) = (4 a^4 / 64 \mu_\infty L^4) \Delta P^3 + \\ (2 \zeta_s^2 a^2 (\mu_\infty - \mu_0) / 8 \mu_\infty^2 L^2) \Delta P - \\ (a^2 \mu_0 \mu_\infty \zeta_s^4 (\mu_\infty - \mu_0) / 4 \mu_\infty^3 L^2) (1 / ((a^2 \mu_\infty \Delta P^2 / 4 L^2) + \mu_0 \zeta_s^2)) \Delta P \\ - (3 Q / 8 \pi L^3) \Delta P^2 \quad 5.1.69$$

Por lo tanto, se calcula la caída de presión aplicando la ec. 5.1.44 mediante el uso de las ecuaciones 5.1.68 y 5.1.69; el factor de fricción se calcula usando la ecuación 5.1.47 donde el valor de $\langle v_z \rangle$ es, para éste modelo, la ec. 5.1.67; y finalmente, el número de Reynolds se obtiene mediante la ecua-

ción 5.1.49, una vez que se haya calculado el factor de fricción en el paso anterior.

Como consecuencia de esto, podremos usar en la misma forma la metodología de la sección 1.1.a.

Con estos cinco modelos de fluidos no newtonianos independientes del tiempo nos damos cuenta de la dificultad analítica de su manejo y, del tipo de ecuaciones tan complejas que resultan al obtenerse las soluciones correspondientes. Tanto es así, que para la evaluación cuantitativa de dichas ecuaciones, a partir del modelo 1.b.2 hasta el modelo 1.e, se requiere forzosamente el uso de una computadora, si se desean datos precisos. Esto lógicamente a nivel práctico en la industria es imposible, porque en nuestro medio son muy pocas las que cuentan con estas máquinas y sobre todo, porque siempre se prefiere la simplicidad con una aproximación razonable, que una aproximación extremadamente buena con un modelo sumamente complicado. Lo ideal sería una aproximación realmente buena con un modelo simple. Por lo tanto optaremos por modelos simples, específicamente el 1.a, el 1.b.1 y 1.b.2, los cuáles han sido programados para correrlos en computadora y se encuentran en el Apéndice 4. Estos modelos se han elegido, de entre todos los citados, también por otras razones.

Con excepción de los modelos de Eyring y de Reiner - Philippoff que solamente son aplicables a fluidos pseudoplásticos, lo que ya en primera instancia reduce la generalidad del método puesto que el objetivo del trabajo son todos los fluidos no newtonianos puramente viscosos independientemente de que sean de un tipo o de otro (independientes del tiempo), al menos que se manejen

pseudoplásticos, en cuyo caso si tienen aplicabilidad, y del modelo de Ellis que presenta una gran flexibilidad (capítulo 3), los otros modelos presentan problemas en cuanto a las unidades de los parámetros que los caracterizan; pero , si los resultados obtenidos experimentalmente y los que la teoría pre dice están bastante próximos, entonces en los términos de ingeniería los mo delos son buenos y deben usarse aún a pesar de lo anterior.

Otra razón es que los cálculos de los parámetros a partir de la curva de flujo se dificultan cuando el número empieza a ser mayor de 2; y aunque los modelos 1. b. 1 y 1. b. 2 tienen más de dos, éstos si se pueden calcular fácilmente mediante una regresión polinomial a base del método de mínimos cuadrados (Apendice 4) . Los parámetros del modelo de Reiner - Philippoff , por ejemplo dependen mucho de la realización de una buena curva de flujo ya que , μ_{∞} y μ_0 , las viscosidades a infinita y cero rapidez de corte, dependen del valor(es) que se tomen para calcularlas, y como nuestro viscosímetro proporciona entre cinco y ocho datos máximo, no existe mucha confiabilidad en su cál culo.

Y es básicamente por lo anterior , que usaremos los modelos elegidos para hacer las determinaciones cuantitativas en el proceso de calculo que requiere nuestra metodología.

Sin embargo, cuando existen objeciones serias como le sucede al modelo de la ley de la potencia, el cuál predice una viscosidad infinita para un valor de la $\dot{\gamma}$ de cero, aunque todos los materiales reales tienden a alcanzar algún valor finito de viscosidad newtoniana a medida que la rapidez de corte decrece, por ésto, se prefiere establecer una correlación generalizada que permita sol ventar éste problema.

Rabinowitsch y Mooney (7, 8) han desarrollado una expresión para la rapidez de corte en la pared de la tubería, la cuál es independiente de las propiedades del fluido una vez que se ha probado que no depende del tiempo.

Multiplicando la ecuación 5.1.16 por cuatro obtenemos:

$$(4Q / \pi a^3) = (4 / \zeta_w^3) \int_0^{\zeta_w} \zeta^2 f(\zeta) d\zeta = D(\zeta_w) \quad 5.1.70$$

Derivando la ecuación 5.1.70¹ con respecto a w , se tiene:

$$(dD(\zeta_w) / d\zeta_w) = (4/\zeta_w) f(\zeta_w) - (3/\zeta_w) D(\zeta_w) \quad 5.1.71$$

rearrreglando la ec. 5.1.71 y haciendo las substituciones pertinentes ésta se transforma en:

$$-(dv_z / dr)_w = 3(Q / \pi a^3) + (a \Delta P / 2L) (d(Q / \pi a^3) / d(a \Delta P / 2L)) \quad 5.1.72$$

Introduciendo la velocidad promedio y poniendo $D=2a$, la ec. 5.1.72 puede ser modificada para dar:

$$-(dv_z / dr)_w = (3/4) (8 \langle v_z \rangle / D) + (1/4) (8 \langle v_z \rangle / D) (d \ln(8 \langle v_z \rangle / D) / d \ln(D \Delta P / 4L)) \quad 5.1.73$$

Si denotamos la derivada de la ec. 5.1.73 por $1/n'$ podemos escribir esta ecuación como:

$$-(dv_z / dr)_w = (3n' + 1 / 4n') (8 \langle v_z \rangle / D) \quad 5.1.74$$

De la definición de n' , llamada:

$$n' = d \ln(D \Delta P / 4L) / d \ln(8 \langle v_z \rangle / D) \quad 5.1.75$$

se observa fácilmente que podemos escribir:

¹ Se deriva aplicando la regla de Leibnitz; véase Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas, Murray R. Spiegel, pág. 95, Ed. Schaum McGraw Hill, 1970.

$$\zeta_w = D \Delta P / 4 L = m' (8 \langle v_z \rangle / D)^{n'} \quad 5.1.76$$

Y a partir de las ecuaciones 5.1.74 y 5.1.76 obtenemos:

$$\zeta_w = m' (4 n' / 3 n' + 1)^{n'} (- dv_z / dr)_w^{n'} \quad 5.1.77$$

Con todo lo cuál hemos obtenido relaciones para calcular los parámetros m' y n' , usando indistintamente un viscosímetro capilar ó uno rotacional. (30) Usando el viscosímetro capilar, necesitamos aplicar la ecuación 5.1.76 para obtener los parámetros m' y n' . Si usamos uno del tipo rotacional, aplicando la ec. 5.1.77 también los obtenemos. Hay que notar, sin embargo, que n y K , son diferentes de m' y n' , por lo que las constantes verdaderas para la ec. 3.1.3 pueden determinarse a partir de datos de viscosímetros capilares por medio de las siguientes ecuaciones(8):

$$n = n' / (1 - (1 / 3 n' + 1) (d(n') / d(\ln \zeta_w))) \quad 5.1.78$$

$$K = m' / ((3 n' + 1) / 4 n)^n \quad 5.1.79$$

Esta técnica es rigurosamente válida para todos los fluidos cuyas propiedades reológicas son independientes del tiempo. Usando el índice de consistencia m' y el índice de comportamiento de flujo n' , podemos definir el factor de fricción y un número de Reynolds generalizado Re' . Esto es muy conveniente porque nos permitirá usar la gráfica del factor de fricción contra número de Reynolds que se tiene construída para los fluidos newtonianos para la zona laminar (23, 30):

$$f = (a \Delta P / 2 L) / (\rho \langle v_z \rangle^2 / 2) \quad 5.1.80$$

$$Re' = (D^{n'} \langle v_z \rangle^{2-n'} \rho) / (8^{n'-1} m') \quad 5.1.81$$

Las expresiones 5.1.80 y 5.1.81 están relacionadas por la expresión:

$$f = 16 / Re' \quad 5.1.82$$

La ec. 5.1.82 es válida cuando el Re' es menor de 2100 y los parámetros m' y n' son evaluados en el valor deseado de $(8 \langle v_z \rangle / D)$.

De la ec. 5.1.76 podemos derivar una forma generalizada de la ecuación de Hagen - Poiseuille:

$$P = (32 m' 8^{n'-1} L \langle v_z \rangle^{n'}) / D^{n'+1} \quad 5.1.83$$

La ec. 5.1.83 es válida para todos los flúidos independientes del tiempo. La comparación de ésta ecuación con la ec. 4.2.12 nos hace notar una propiedad peculiar de los materiales altamente pseudoplásticos (n' cercano a cero), que hace que la caída de presión sea mucho menos sensitiva a los cambios, ya sea del gasto ó del tamaño de la tubería, que lo es para los flúidos newtonianos. Lo contrario se cumple para los flúidos dilatantes.

En resumen, tenemos:

1. - Se obtienen los parámetros m' y n' . También la densidad del flúido.
 - a) m' y n' se obtienen de un viscosímetro capilar ó uno rotacional.
 - b) Comprobar la ausencia de tixotropía y antitixotropía y de comportamiento de flujo anormal de la pared, en caso del viscosímetro capilar.
2. - Se calcula el número de Reynolds generalizado mediante la ec. 5.1.81.
3. - Con éste valor del Re' , se obtiene el factor de fricción de la gráfica usual del factor de fricción contra número de Reynolds para flúidos newtonianos.
4. - Y mediante la ecuación de Fanning (ó de Darcy) se obtiene la caída de presión.

Sin embargo, muy aparte de todos los métodos teóricos que hemos descrito, existe un método mucho más empírico propuesto por Metzner (27). Sus motivos principales para desarrollarlo, es que dice que aunque hay métodos bue-

nos teóricamente, éstos son poco exactos cuando se aplica a tuberías de diámetros prácticos y también porque usan viscosímetros de una geometría ideal y no se aplica a los que tienen rotores con geometría complicada. Específicamente puede verse esto en la referencia 22.

Su método puede ser usado para predecir, a partir de datos de laboratorio, el efecto de cambiar variables de operación tales como el gasto, temperatura, contenido de sólidos en el fluido y diámetro de la tubería. Aquí, el método se aplica solamente a los fluidos independientes del tiempo y exclusivamente en régimen laminar, puesto que cuando se manejan suspensiones extremadamente viscosas, se encuentran frecuentemente gradientes de presión no permitidos si las razones de flujo se aumentan hasta llegar a la región turbulenta. Además indica que los fluidos industrialmente importantes exhiben propiedades pseudoplásticas y, que muchas veces las variaciones en las propiedades reológicas que dependen del tiempo, son solamente debidas a cambios en la temperatura del fluido y no a propiedades inherentes a tixotropía o antitixotropía. Por lo tanto, su ocurrencia industrial es menos frecuente de lo que se supone.

Para flujo laminar se tiene, para un fluido newtoniano, la ley de Hagen - Poiseuille:

$$\Delta P_{\text{calc}} = (32 \mu_1 \langle v_z \rangle L) / D^2 \quad 5.1.84$$

Esta ecuación se puede aplicar para un fluido no newtoniano en flujo laminar si se substituye la μ_1 por una viscosidad aparente μ_a , escogida cuidadosamente.

El comportamiento del fluido en un viscosímetro rotacional indica que el

grueso del fluido está siendo cortado a una rapidez muy baja. En otros viscosímetros, aunque la rapidez de corte pueda ser más alta, no será aún idéntica con la $\dot{\gamma}$ en la pared de la tubería excepto en circunstancias especiales. En cualquier caso, por lo tanto, la μ_a determinada en el laboratorio no es directamente aplicable al problema práctico de un flujo en tubería.

Sus suposiciones básicas son:

1. - La rapidez de corte en una tubería se supone como una función del cociente V/D (donde ahora $\langle v_z \rangle = V$).
2. - La rapidez de corte en un viscosímetro rotacional se supone como una función única de n , la velocidad rotacional.
3. - Las dos formas funcionales de las dos relaciones anteriores son idénticas, por lo tanto la proporción de la rapidez de corte en una tubería a la de un viscosímetro es una función única de la razón V/nD , sin dimensión.

La conversión de μ_1 a μ_a (laboratorio a aparente) que es particularmente correcta para el diseño de una tubería y una razón de flujo dada, por medio de la proporción de la rapidez de corte V/nD permitirá el cálculo de la caída de presión real en la tubería. μ_1 se puede usar directamente en la ec. 5.1.84 para obtener una caída de presión calculada (ΔP_{calc}).

Esta caída de presión calculada puede ser convertida a la real en la tubería por medio de la rapidez de corte en la tubería a ésa en el viscosímetro expresada por V/nD .

Pero en la práctica una segunda alternativa es más directa. La relación funcional entre $\Delta P_{\text{calc}} / \Delta P_{\text{actual}}$ y V/nD se determina en forma muy conveniente gráficamente.

Esta técnica utiliza datos limitados obtenidos en un modelo de tamaño conveniente para predecir la caída de presión del mismo (o de un fluido reológicamente similar bajo nuevas condiciones), frecuentemente a condiciones en las cuáles hacer una medición de la caída de presión no es posible o económica. El proceso de cálculo se realiza de la siguiente forma:

1. - Del fluido en cuestión, se toman datos de viscosidad en un viscosímetro rotacional y, mediciones de caída de presión a varias velocidades (todas en flujo laminar) en una línea de tubería de tamaño conveniente. Si las condiciones de temperatura son importantes para las variaciones de las propiedades del fluido, ambos conjuntos de mediciones deben estar a idénticas temperaturas.
2. - Se calcula, mediante el uso de la ec. 5.1.84 y el valor medido experimentalmente de la viscosidad del fluido, el valor de la caída de presión calculada.
3. - Se trazan gráficas logarítmicas de $\Delta P_{\text{calc}} / \Delta P_{\text{actual}}$ contra V/nD y de la viscosidad μ_1 contra el valor de la velocidad rotacional a la que fue hecha la determinación de esa viscosidad, n .

Si los valores numéricos de las pendientes de ambas figuras son idénticos, entonces subsecuentes mediciones de la viscosidad pueden ser hechas a cualquier valor conveniente de n .

Si éstos valores numéricos de las pendientes de ambas figuras no son idénticos, entonces la gráfica de $\Delta P_{\text{calc}} / \Delta P_{\text{actual}}$ contra V/nD debe proporcionar valores que necesitan estar basados en cualquier valor fijo de n , escogido arbitrariamente.

4. - Si el problema es predecir la caída de presión del mismo fluido a la misma temperatura en una tubería de diferente diámetro (lo cuál se ajusta a todo el desarrollo y planteamiento de este trabajo) y/b a una razón de flujo diferente a la usada al trazar la gráfica elaborada en 3, entonces la gráfica se usa directamente para obtener la caída de presión actual para los nuevos valores de V/nD y ΔP_{calc} .

Se ha encontrado que las gráficas logarítmicas de μ_1 vs. n dan la clave con la cuál determinar si una extrapolación es permitida ó nó; cuando la pendiente de ésta gráfica para el fluido bajo las nuevas condiciones es idéntica ó casi idéntica a la pendiente de la misma gráfica bajo las condiciones originales de los datos de caída de presión, entonces se encuentra permitida la extrapolación aunque la magnitud de μ_a a una rapidez de corte dada haya cambiado; cuando las pendientes no son idénticas, pero se usan los nuevos datos, de todas maneras, como base de los cálculos de la caída de presión, el porcentaje de error en los valores de la caída de presión se ha encontrado como de la misma magnitud que la diferencia de porcentaje entre las dos pendientes.

Este método tiene todas las ventajas asociadas con la teoría de modelos, y bajo las condiciones convenientes, a partir de los datos del modelo se puede predecir el comportamiento de un prototipo a gran escala. Esto se logra manejando a la misma temperatura ambos sistemas y, manteniendo constante la relación adimensional V/nD que se obtiene operando el modelo con la misma V/D que se usará en el prototipo.

El método presentado es de mayor utilidad en una región de flujo laminar,

particularmente cuando se necesitan hacer extrapolaciones de los valores de la rapidez de corte.

Por último, Metzner también cree que este método es el único general para fluidos no newtonianos en el cuál se combinan mediciones de laboratorio con datos obtenidos en un modelo para prototipo dando una correlación única. Y por los resultados que presenta (30), parece que el método es muy bueno por todas las conclusiones significantes que obtiene, con errores del 15%, que son excelentes para las correlaciones en ingeniería de este tipo.

2. TRANSICION ENTRE LA ZONA LAMINAR Y LA ZONA TURBULENTA

Como hemos visto, cuando el número de Reynolds es menor que un valor crítico cercano a 2100, entonces existe flujo laminar; las perturbaciones de flujo transiente se deshechan. Cuando el valor del número de Reynolds es mayor que el crítico, se encuentra generalmente flujo turbulento. Aunque bajo condiciones especiales se puede producir flujo laminar a valores del Reynolds supercríticos (7), este es metaestable. Una perturbación trnsiente puede inducir flujo turbulento, el cuál no regresará a ser laminar a menos que el número se reduzca por abajo de 2100.

El número de Reynolds se aplica, con excelentes resultados, sólo a fluidos newtonianos cuyo carácter reológico se describe por el coeficiente de viscosidad. Como también se han observado distintos regímenes de flujo laminar y turbulento para otros tipos de fluidos, se puede inferir que el número de Reynolds es una forma especial de un criterio mucho más general.

Ryan y Johnson (25) hicieron un análisis de estabilidad del flujo laminar

basados en la suposición de que pequeñas perturbaciones han sido aplicadas a la ecuación de movimiento. Su parámetro de estabilidad es:

$$Z = (a \rho U / \zeta_w) (\partial U / \partial y) \quad 5.2.1$$

donde:

a . - radio del tubo.

ρ . - densidad del fluido.

U . - velocidad local axial, flujo sin perturbaciones.

ζ_w . - esfuerzo cortante en la pared ($a \Delta P / 2L$).

Analizando la ec. 5.2.1 vemos que Z es cero tanto en la pared de la tubería como en la línea central de la misma y tiene un valor máximo en una posición intermedia. El valor máximo puede obtenerse si se conoce la velocidad a régimen permanente como una función de la posición radial. Para un fluido newtoniano:

$$Z_{\text{máx}} = (4 / 27)^{1/2} (D < \nu \rho / \mu) ; \text{ en } (r/a) = 1/3^{1/2} \quad 5.2.2$$

Así, la función maximizada de estabilidad encuentra la condición necesaria de que el número de Reynolds sea una forma especial de ella.

Como el valor crítico para el número de Reynolds es 2100, se supone que el valor crítico de $Z_{\text{máx}}$ por encima del cuál se espera flujo turbulento, para todos los fluidos independientes del tiempo, es:

$$Z_c = 2100 (4 / 27)^{1/2} = 808 \quad 5.2.3$$

es decir, es un criterio general para la determinación de flujo laminar ó turbulento en tuberías. Aún más, éste análisis indica que la turbulencia se origina a un radio $a / 3^{1/2}$ en lugar de que se origine en el eje.

Aplicando el criterio para nuestros flúidos no newtonianos independientes del tiempo γ , suponiendo que el comportamiento de éstos puede ser descrito por la ley de la potencia (ec. 3.1.3) tendremos que para $Z_{m\acute{a}x}$:

$$Z_{m\acute{a}x} = (a^2 \int \Gamma^2 / \zeta_w) \phi(n) \quad 5.2.4$$

en $(r/a) = (1/n+2)^n / (n+1)$

donde:

$$\phi(n) = ((3n+1)^2/n) (1/n+2)^{(n+2)/(n+1)} \quad 5.2.5$$

y en la que:

Γ - función de flujo, definida por $Q/\pi a^3$.

Si se usa el valor crítico de 808:

$$\zeta_{wc} = (a^2 \int \Gamma_c^2 / 808) \phi(n) \quad 5.2.6$$

donde:

ζ_{wc} - esfuerzo cortante en la pared del tubo a condiciones críticas.

Γ_c - función de flujo a condiciones críticas.

La ecuación 5.2.6 se puede resolver junto con la ecuación análoga de Hagen - Poiseuille (ec. 5.1.23) para la ley de la potencia, obteniendo:

$$\zeta_w = K ((3n+1)/n)^n \Gamma^n \quad 5.2.7$$

la cuál se aplica a flujo laminar, dando el máximo gasto (como Γ) para que el flujo laminar sea estable.

Esta función de flujo crítica se encuentra resolviendo simultáneamente las ecuaciones 5.2.6 y 5.2.7; así:

$$\Gamma_c = \sqrt[n-2]{(a^2 \int \phi(n) / 808 K) (n / (3n+1))^n} \quad 5.2.8$$

La ecuación 5.2.8 permite el cálculo del máximo gasto para el cuál se ten

drá flujo laminar para un determinado diámetro de tubería y, por arriba del mismo, el régimen será turbulento.

De ésta forma, hemos establecido un criterio para la transición de un régimen de flujo a otro con un carácter mucho más general que el número de Reynolds.

Resumiendo tenemos:

De argumentos bastante intuitivos y guiados por la teoría en la estabilidad del flujo laminar, se ha desarrollado un criterio para el tipo de flujo en tubos rectos de sección circular constante:

$$Z = (a \rho U / \zeta_w) (\partial U / \partial r) \text{ en } (dZ/dr) = 0$$

Su aplicación requiere conocimiento del perfil de velocidades laminar, el cuál se puede derivar a partir de la ecuación constitutiva para el fluido de interés. El valor de éste criterio para la transición laminar - turbulento es de 808; el flujo laminar se predice para valores menores que 808, y el flujo turbulento para valores mayores que 808.

Este criterio se puede aplicar para los otros modelos especificados anteriormente, pero debido a la complejidad analítica de sus perfiles de velocidad, el tratamiento algebraico se vuelve laborioso, difícil y muy seguramente, pudiera ser hasta impráctico, por lo que optaremos dejarlo aplicado solamente a la ley de la potencia y establecerlo como válido también para los otros modelos, y para nuestros fluidos no newtonianos independientes del tiempo.

3. ECUACIONES DE DISEÑO PARA LA ZONA TURBULENTA

El fenómeno de flujo turbulento en fluidos no newtonianos no ha recibido tanta atención como el régimen laminar. Sin embargo, el descubrimiento en años recientes del adelgazamiento de soluciones diluidas de polímeros y el interés en el manejo de suspensiones, han provocado la publicación de excelentes artículos en los aspectos teóricos y experimentales (15, 23, 26).

Debido a la definición de un fluido no newtoniano, existe un número infinito de relaciones reológicas posibles para esta clase de fluidos, y no ha sido probada una ecuación única que describa exactamente las relaciones entre el esfuerzo cortante y la rapidez de corte para tales materiales sobre todos los rangos posibles de esfuerzos cortantes. Pero si tal ecuación existiera, muy probablemente debido a su generalidad, sería muy compleja para utilizarla en ingeniería.

El flujo turbulento está caracterizado por el movimiento aleatorio de remolinos que provocan fluctuaciones grandes de los valores instantáneos de la velocidad y la presión en cualquier punto del sistema. Y debido a estas fluctuaciones, no podemos usar las ecuaciones de continuidad y movimiento en la obtención de soluciones simples a los problemas de flujo, aunque ellas se podrían aplicar, como se mencionó con anterioridad. En lugar de esto, debemos usar valores promedio de las funciones de flujo apropiadas a nuestras ecuaciones.

Dodge y Metzner (26) desarrollaron un conjunto de ecuaciones para el perfil de velocidades a través de un análisis teórico del flujo turbulento de fluidos no newtonianos, inelásticos e independientes del tiempo.

Como consecuencia de lo que se mencionaba al principio de esta sección, ellos escogieron el modelo de la ley de la potencia para iniciar el desarrollo de su trabajo, para continuar posteriormente con el análisis de los casos que se apartaban de éste. Y además en su opinión, éste modelo, aunque empírico, parece representar las propiedades reológicas de una gran variedad de fluidos no newtonianos mucho mejor que otros modelos, aún de los que inclusive tienen dos parámetros.

De acuerdo al concepto que ha sido usado con éxito para fluidos newtonianos (14, 19, etc.), el flujo en una tubería lisa puede ser dividido en las siguientes tres zonas:

- a. - Una subcapa laminar adyacente a la pared de la tubería en la cuál los efectos de la turbulencia son despreciables.
- b. - Una zona de transición en la que los efectos de turbulencia y del corte viscoso son del mismo orden de magnitud.
- c. - Un centro turbulento que incluye el grueso de la corriente de fluido. Aquí, la transferencia de momentum que acompaña las fluctuaciones aleatorias de velocidad características del movimiento turbulento, a diferencia del corte viscoso, determina el perfil de velocidades. Si se supone que las fluctuaciones turbulentas son independientes de la viscosidad, se concluye que los efectos de la viscosidad son despreciables en el centro turbulento.

Se supone, por lo tanto, que el mismo tipo de división es aplicable a los fluidos no newtonianos. Cuando se define 'y' como la distancia de un punto en la tubería a la pared del tubo, la cantidad de zonas de flujo pueden designarse como:

subcapa laminar	$0 \leq y \leq \delta$
zona de transición	$\delta \leq y \leq \lambda$
centro turbulento	$\lambda \leq y \leq a$

Para fluidos newtonianos se ha demostrado que la velocidad de tiempo pro medio en un punto de una tubería lisa, depende de cinco variables independientes: a , f , τ_w , μ , y ν . Con fluidos no newtonianos del tipo de la ley de la potencia se requieren los parámetros n y K para reemplazar la constante de proporcionalidad newtoniana μ . Por analogía, se puede suponer razonablemente que:

$$U = f(a, f, \tau_w, K, n, \nu) \quad 5.3.1$$

Al aplicar el análisis dimensional, la ecuación 5.3.1 puede ser escrita como:

$$(U / U^*) = f_1(Z, \xi, n) \quad 5.3.2$$

donde:

$$Z . - \text{ está definido como } Z = a^n \rho U^{*2-n} / K$$

$U . -$ velocidad local en r (b y)

$$U^* . - \text{ velocidad de corte, igual a } (\tau_w / \rho)^{1/2}$$

$\xi . -$ parámetro de posición adimensional igual a y/a .

En la derivación de la ec. 5.3.2 no se han hecho suposiciones sobre la estimación de la posición del punto que corresponde a U , y por lo tanto ésta ecuación es válida para todos los valores de y o ξ .

En la subcapa laminar el radio del tubo no toma parte al determinar U . Por lo tanto, el efecto de a debe suponerse despreciable también a distancias ligeramente mayores de la pared, tan afuera como la parte externa del cen-

tro turbulento. Considerando ésta región de la pared:

$$U = f(\rho, \zeta_w, K, n, y) \quad 5.3.3$$

que de acuerdo al análisis dimensional puede expresarse como:

$$(U / U^*) = f_2(Z \xi^n, n) \quad 5.3.4$$

La ecuación 5.3.4 puede compararse con la ley de velocidad en la pared de Prandtl (14) para fluidos newtonianos, la cuál concuerda con los resultados experimentales. Se supondrá que ésta ecuación es válida en el rango $0 \leq \xi \leq \xi_1$, donde ξ_1 es solamente un poco mayor que λ/a .

La diferencia entre la velocidad al centro de la tubería y la velocidad de tiempo promedio en un punto cualquiera del centro turbulento, se ha dado en llamar la falta de velocidad. De la ec. 5.3.1 se puede observar que ésta depende al menos, de $a, \rho, \zeta_w, K, n, y$. Sin embargo en el centro turbulento $(U_m - U)$ estará determinada por las fluctuaciones aleatorias turbulentas que han sido supuestas independientes de la viscosidad. Esta suposición se ha sostenido para fluidos newtonianos. Para sistemas de la ley de la potencia ésto es equivalente a suponer que ésta velocidad es independiente de K , pero no de n , por lo tanto:

$$U_m - U = f(\zeta_w, \rho, a, y, n)$$

Y aplicando el análisis dimensional, tenemos:

$$(U_m - U / U^*) = f_3(\xi, n) \quad 5.3.5$$

la cuál se reduce al caso newtoniano cuando $n=1$.

Si como una aproximación suponemos que la ec. 5.3.5 se aplica sobre toda la sección, se sigue que:

$$V = (2/a^2) \int_0^a u r dr = (2/a^2) \int_0^a U_m r dr - (2U^*/a^2) \int_0^a f_3(\xi, n) r dr$$

Para cualquier valor específico de n , la ecuación anterior se convierte en:

$$V = U_m - U^* \quad (\text{constante})$$

6:

$$(U_m - V / U^*) = P_n \quad 5.3.6$$

donde:

V . - velocidad lineal media.

P_n . - función adimensional del índice de comportamiento de flujo.

Puesto que la ecuación 5.3.6 fué derivada para cualquier valor fijo de n , debe esperarse, en forma general, que P_n sea una función de n . Los experimentos con fluidos newtonianos han demostrado que las capas en la pared son tan delgadas, que la ec. 5.3.6 puede ser usada sin error apreciable, lo cuál tendremos como cierto para los fluidos no newtonianos. Esta suposición es excelente para los fluidos pseudoplásticos en los que la subcapa laminar se espera aún más pequeña que para los newtonianos; pero se trastorna para los fluidos que tienen un valor suficientemente más grande de la unidad para n , que mantengan un grosor apreciable en la subcapa laminar aún bajo condiciones de flujo completamente turbulento.

Como el factor de fricción está definido por:

$$f = (D \Delta P / 4L) / (\rho V^2 / 2)$$

tendremos que:

$$(V / U^*) = (2 / f)^{1/2} \quad 5.3.7$$

Cuando se escribe la ec. 5.3.2 para la línea central de la tubería se tiene:

$$(U_m / U^*) = f_1(Z, 1, n) = F_1(Z, n) \quad 5.3.8$$

y por la combinación de las ecuaciones 5.3.6, 5.3.7 y 5.3.8:

$$(2 / f)^{1/2} = F_1(Z, n) - P_n \quad 5.3.9$$

De este modo podemos encontrar una expresión para el factor de fricción al momento de evaluar $F_1 (Z, n)$.

Al hacer el desarrollo de la evaluación de esta función, Dodge y Metzner llegaron a que:

$$(1/f)^{1/2} = A_{1n} \log (\text{Re}' (f)^{1-n'/2}) + C_n' \quad 5.3.10$$

donde:

$$C_n' = A_{1n} \log ((1/8) (6n' + 2 / n')^{n'}) + C_n$$

y el número de Reynolds es precisamente el definido por la ec. 5.1.81 (30).

Además:

A_{1n} y C_n - funciones adimensionales del índice de comportamiento de flujo.

La ecuación 5.3.10 es la forma que relaciona el factor de fricción y el número de Reynolds para flujo turbulento usando la ley de la potencia y en tubos lisos. Las funciones A_{1n} y C_n' son desconocidas (ambas siendo función de n') que han de determinarse experimentalmente.

Dodge y Metzner hicieron sus pruebas y encontraron que:

$$(1/f)^{1/2} = (4.0 / n'^{0.75}) \log (\text{Re}' (f)^{1-(n'/2)}) - (0.4 / n'^{1.2}) \quad 5.3.11$$

que al final de cuentas, no es más que una extensión del trabajo de Von Karman para los factores de fricción en flujo turbulento (29), que él aplicó para los fluidos newtonianos.

Los perfiles de velocidad obtenidos por Dodge y Metzner son:

a. - subcapa laminar

$$U^+ = (y^+)^{1/n}$$

donde:

$$y^+ = y^n (U^*)^{2-n} \rho / K$$

b. - centro turbulento

$$U^+ = (5.66 / (n')^{0.75}) \log y^+ - (0.4 / (n')^{1.2}) + \\ (2.458 / (n')^{0.75}) (1.960 + 1.255 n' - \\ 1.628 n' \log (3 + (1 / n')))$$

ó también en las siguientes formas:

$$(U_m - U / U^*) = - 5.66 (n')^{0.25} \log (y / a)$$

y

$$(U_m - V / U^*) = 3.686 (n')^{0.25} = P_n$$

en las que:

U^+ .- parámetro adimensional d l perfil de velocidades (U / U^*).

y^+ .- parámetro adimensional de distancias ($Z \xi^n$).

Para fluidos que no siguen estrictamente el modelo de la ley de la potencia, se pueden usar los índices generalizados de flujo obtenidos a partir del tratamiento de Rabinowitsch y Mooney. Sin embargo, éstos parámetros no son constantes con el esfuerzo cortante, pero Metzner y Dodge demostraron que pueden ser usados para obtener resultados válidos siempre y cuando se evalúen al esfuerzo cortante en la pared requerido.

Puesto que la ecuación 5.3.11 no se puede resolver explícitamente para el factor de fricción, la correlación se representa en forma gráfica como lo muestra la fig. 5.3.1. Las líneas sólidas representan valores de datos experimentales y las líneas punteadas extrapolaciones usando la ec. 5.3.11. Las curvas pueden extrapolarse para valores más altos del número de Reynolds, pero para valores de n' es peligroso.

Puesto que nuestro interés primordial radica en calcular la caída de presión y por lo tanto el esfuerzo cortante en la pared, se requiere necesariamente una solución por medio de prueba y error. Se supone un valor para la caída de presión. Siguiendo el método propuesto por Metzner y Reed (30) descrito en la sección 1 de éste capítulo, se encuentran valores de n' y m' de una gráfica de $\Delta P/2L$ contra $8 \langle v_z \rangle / D$ para el fluido en cuestión en la zona laminar. A partir de éstos parámetros se calcula el Re' mediante la ecuación 5.1.81 y el valor de f se lee de la fig. 5.3.1. Si la caída de presión calculada usando éste f mediante la ecuación de Fanning no es igual al supuesto originalmente, se necesita llevar a cabo otra iteración. El proceso converge rápidamente (15).

Tomita (15) desarrolló un conjunto diferente de correlaciones para ser usadas con plásticos de Bingham y fluidos que se ajustan a la ley de la potencia. Su ecuación general para el factor de fricción es:

$$\left(1 / f_t \right)^{1/2} = 4.0 \log \left(Re_t \left(f_t \right)^{1/2} \right) - 0.4 \quad 5.3.12$$

donde f_t y Re_t están dados para cada tipo de fluido.

Aunque presenta suficientes datos experimentales para probar sus ecuaciones, éstas son mucho más limitadas que las presentadas por Dodge y Metzner, las cuáles parecen ajustarse en un amplio rango de propiedades y parámetros de los fluidos.

Existe aún otro método propuesto por LeBaron Bowen R.(23), pero éste no tiene ningún fundamento teórico y sí mucho de análisis experimental y gráfico. Pero a pesar de esto, es conveniente nombrarlo ya que demuestra en algunos casos errores hasta del 50% por haber seguido los métodos ante-

riores. En resumen, él dice que es muy difícil decir cuando empezaremos a tener régimen turbulento al variar los tamaños de la tubería y que una gran mayoría de fluidos no newtonianos no sigue la ley de la potencia, presentándose errores serios al forzar los datos experimentales a ajustarse a cualquier ley de la potencia. Dentro de tales materiales se cuentan, agrega, muchas dispersiones de materiales sólidos, ciertas soluciones poliméricas, muchos sistemas dilatantes y algunos otros tipos.

Nosotros utilizaremos el primer criterio por considerarlo el de más amplio panorama y versatilidad, debido a su fundamento teórico que le proporciona una secuencia más lógica en el diseño de la tubería y sobre todo, porque permite seguir las bases del método esbozado en la sección 1 del capítulo 4, bajo las cuáles estamos rigiendo todo nuestro trabajo.

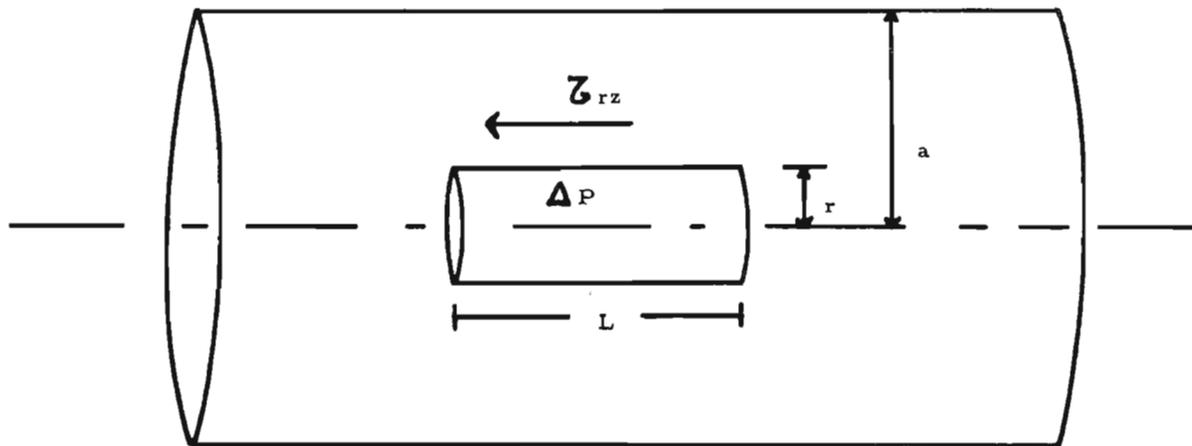


fig. 5.1.1

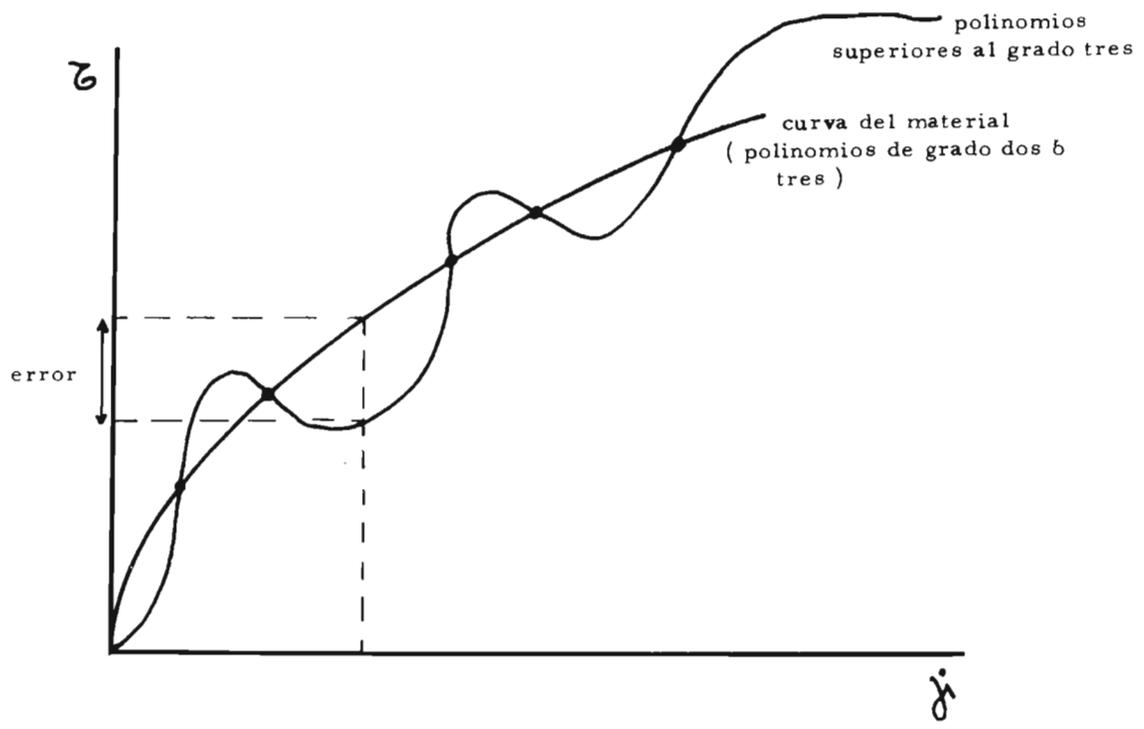


fig. 5.1.2

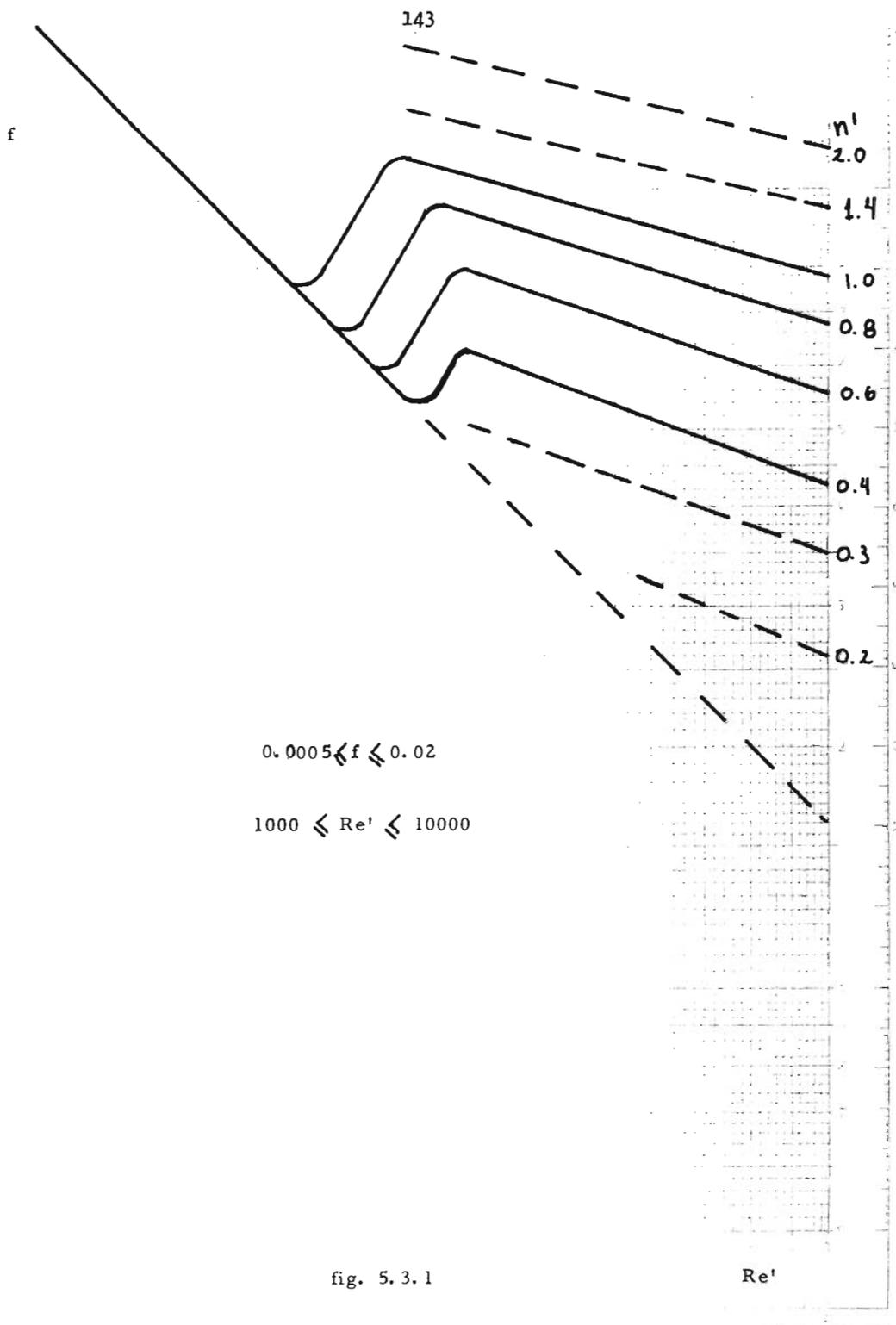
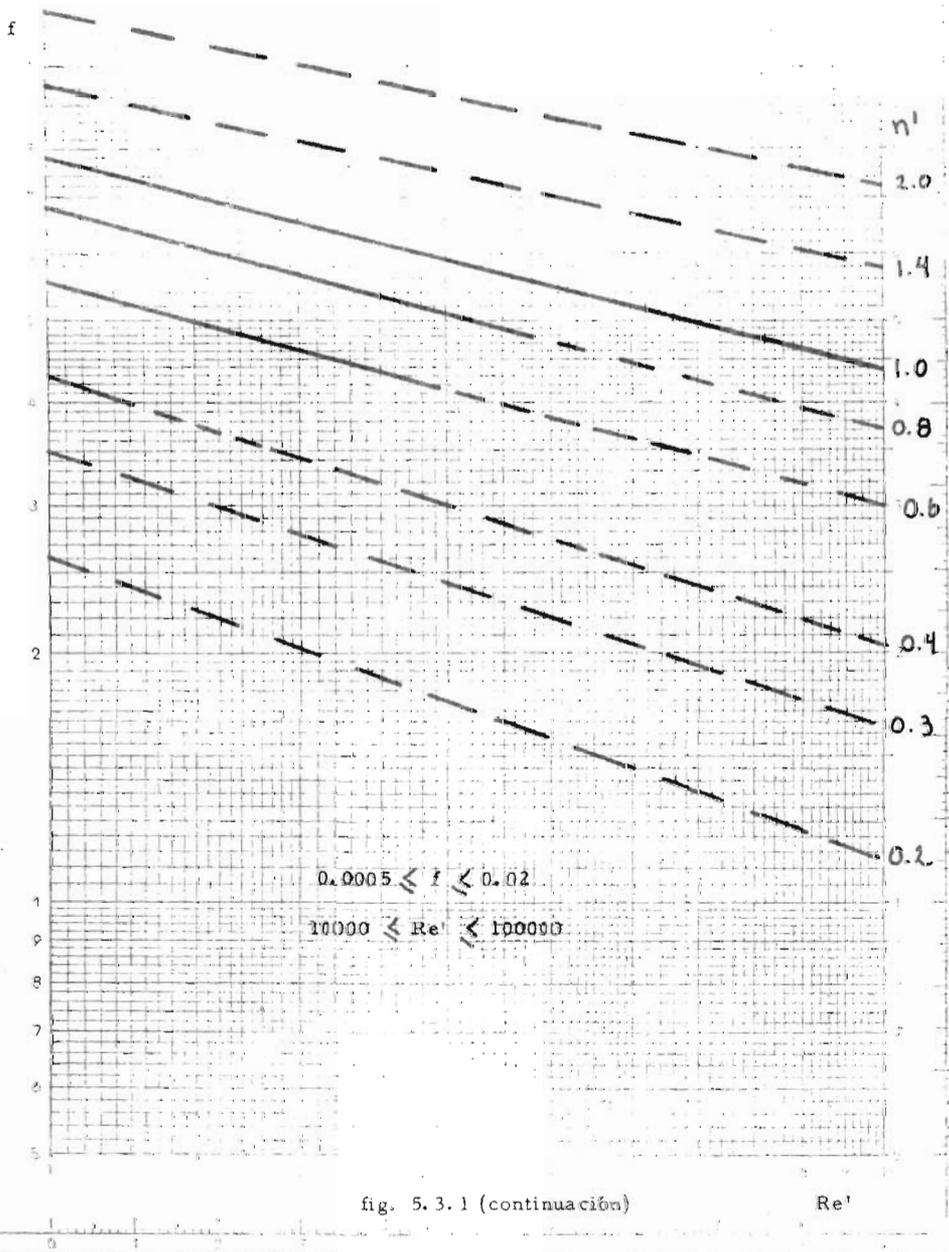


fig. 5.3.1



DIN A4
 N° 8123
 log x log
 Modul 160

CAPITULO: 6

DESCRIPCION Y OPERACION DEL EQUIPO
EXPERIMENTAL

El planteamiento del presente trabajo requiere que su parte experimental quede perfectamente bien definida mediante dos etapas:

1. - Elaboración de la curva de flujo del material.
2. - Comprobación experimental de los valores de la caída de presión calculados con los modelos especificados en el capítulo anterior.

Etapa 1. -

Para poder hacer uso de los modelos matemáticos planteados en el capítulo 5, es indispensable conocer los parámetros que cada uno de ellos involucra, y esto solamente es posible mediante la elaboración de la curva de flujo del material considerado.

Para elaborarla, se utilizó un viscosímetro Brookfield Synchro-lectric, modelo LVT, con las siguientes características:

- a) 110 volts y 50 ciclos por segundo.
- b) Ocho velocidades, todas expresadas en revoluciones por minuto (rpm) y que son: 60, 30, 12, 6, 3, 1.5, 0.6 y 0.3.

c) Cuatro rotores de acero inoxidable enumerados del 1 al 4, dependiendo del rango de viscosidades que pueden medirse con él.

rotor 1 . - 0 a 20 000 centipoises.

rotor 2 . - 0 a 100 000 centipoises.

rotor 3 . - 0 a 400 000 centipoises.

rotor 4 . - 0 a 2 000 000 centipoises.

d) Una escala circular de 0-100, con subdivisiones de 0.5.

e) Un protector para el rotor una vez que se ha instalado en el viscosímetro, y que ayuda a no tener flujos anormales cerca del mismo. Se puede usar sin problema, ya que los factores de escala que se acompañan con cada modelo y para cada rotor y velocidad, están ajustados para poder usarse con él.

f) Una palanca de embrague que permite fijar la lectura sobre la escala cuando las velocidades que se usan son altas y no es posible efectuar la lectura a simple vista.

g) Un dispositivo para nivelar el aparato sobre la superficie donde se coloca.

h) Una perilla que le permite desplazarse verticalmente para poder ajustar la altura a la que el rotor debe colocarse.

i) Soporte para los rotores.

Su operación es muy sencilla:

Una vez que se ha preparado la solución del material que se maneja, se pone éste en un vaso de precipitados de medio litro de capacidad (ú otro similar) y se coloca exactamente debajo del eje que mueve el rotor, centrándolo lo mejor posible para no provocar errores en las lecturas (aún con el protector, podrían tenerse corrientes anormales si ponemos el rotor demasiado

junto de la pared del recipiente). Posteriormente se coloca el protector. Se elige el rotor a usar y se ajusta al eje que lo mueve girándolo a favor de las manecillas del reloj. Hay que tener mucho cuidado al momento de colocarlo, ya que se podrían tener burbujas de aire, lo que afectaría enormemente las determinaciones; por ésto, es mejor primero empapar el rotor con la solución y más tarde ajustarlo en el eje del motor. Una vez colocado, gracias al dispositivo mencionado en h, se sube ó se baja hasta que el nivel del líquido quede en la muesca que para tal efecto lleva cada rotor. Dispuesto de ésta forma, estamos en posibilidad de comenzar a tomar los datos. Como generalmente se utilizan todas las velocidades, se empieza por poner la más alta (ó la más baja) para luego ir decreciendo (ó aumentando); ya elegida la velocidad, se enciende el aparato, con lo cuál, el indicador de la escala empieza a desplazarse hasta que llega a un valor fijo y no se mueve más (solamente si el flujo es independiente del tiempo ó, siendo dependiente del tiempo, llega un momento que alcanza su viscosidad límite y se mantiene constante) y en éste momento, se aplica el ambrague apagando el aparato y observando la lectura obtenida. Con éste valor de la escala se busca en una tabla, que el fabricante proporciona, el factor de escala correspondiente al rotor y velocidad usados. Este factor de escala se multiplica por el valor leído, obteniéndose el valor de la viscosidad en centipoises (abreviado como cp). Una vez hecha ésa lectura, se deja que el indicador llegue al cero de la escala, para poder poner en operación nuevamente el aparato, escogiendo otra velocidad. Por lo tanto, a partir de aquí, el proceso es repetitivo para otras velocidades. Al cambiar de rotor, es necesario lavar el usado con agua destilada para mantenerlo li-

bre de impurezas y perfectamente limpio. Al guardarlo, hay que tener cuidado en no doblar el eje del rotor.

Al momento de colocar ó quitar el rotor, es conveniente levantar el eje del motor un poco y no moverlo, con el fin de no dañar el resorte que mide la deflección del indicador.

Se prepararon seis soluciones de carboximetilcelulosa (de ahora en adelante referida como CMC) del tipo 40 PM. Y tres soluciones de Polyox. Ambas en agua. El CMC es un polímero derivado de celulosa de color blanquecino y sumamente fino. El Polyox es otro polímero, pero derivado del polietileno, de color blanco nieve y de consistencia más gruesa que el CMC. Las concentraciones usadas están en el capítulo 7.

La preparación de las soluciones se lleva a cabo de la siguiente forma: Una vez que se ha pesado el soluto necesario para la concentración requerida, se le adiciona un litro de agua destilada y se le deja reposar por espacio de 30 horas. Este tiempo de reposo es necesario porque al hacer la adición del agua, se forman grumos que no pueden disolverse, ni aún por medio de agitación, hasta que el polímero la absorbe, lo que se consigue en ése lapso de tiempo; posteriormente la disolución completa se logra mediante la agitación por períodos de tiempo que son característicos de la concentración preparada. Estos períodos variaron de 24 a 50 horas de agitación.

Cuando se preparan soluciones muy concentradas, es conveniente hacer una primera agitación al momento de adicionar el agua, con el fin de dispersar el soluto y favorecer más rápidamente la absorción del agua y, después, continuar en forma similar a la anterior.

Teniendo una vez la solución perfectamente homogénea, se procede a elaborar la curva de flujo mediante las técnicas descritas en el capítulo 3, utilizando el viscosímetro Brookfield referido.

Cuando se hace la determinación de la curva de flujo es necesario tener en cuenta dos factores muy importantes para evitar errores considerables:

- a) Tomar la temperatura a la que la determinación fué hecha.
- b) Especificar las fechas de preparación de la solución y la de la curva de flujo.

El primer factor es indispensable ya que la viscosidad de los líquidos es muy sensible a los cambios de temperatura. Obtener los parámetros de los modelos a una temperatura T_1 y tratar de aplicarlos a diseño a otra temperatura T_2 , involucraría cambio en ellos, debido a que la curva de flujo cambiaría debido al cambio en la viscosidad. Como consecuencia de ésto, las caídas de presión experimentales serían diferentes a las propuestas teóricamente, por porcentajes de error que estarían mucho más allá de los aceptables.

El segundo factor podría traer como consecuencia que si la solución se deja por períodos de tiempo suficientemente largos, y aunque se dice que no es muy importante, podríamos tener una merma considerable en la viscosidad, que también traería como consecuencia el razonamiento mencionado anteriormente.

El primer factor se puede controlar haciendo que las temperaturas T_1 y T_2 sean las mismas; el otro factor es más difícil controlar, debido a que se requerirían muchas repeticiones de la misma solución a diferentes tiempos

de preparación, lo cuál no fué posible hacer.

El equipo usado para preparar las soluciones fué:

1. Balanza analítica con capacidad de 160 g.
2. Agua destilada.
3. Equipo de agitación Fisher, con regulador de velocidad y motor de agitación con su hélice correspondiente. Modelo 12 para 115 volts, 1 ampere y 50/60 ciclos. Velocidades de 500 a 5000 rpm.
4. Transformador de corriente para protección del sistema.

Etapa 2. -

Para la finalidad del presente trabajo, con llegar hasta la etapa anterior y obtener las ecuaciones específicas para cada solución planteadas por los modelos escogidos en el capítulo 5, tendríamos suficiente para poder dimensionar una línea de tubería que manejara fluidos no newtonianos independientes del tiempo; pero para probar la validez del procedimiento propuesto, fué necesaria la instalación del equipo que permitiera tal comprobación.

Para ello, se armó un equipo con dimensiones que pudieran representar el uso industrial. Este se representa en la fig. 6.1.

De acuerdo a la misma figura, tenemos los siguientes componentes para el sistema:

- V1, V2, V4, V7 y V8 .- válvulas de bola de acero inoxidable con asientos de teflón, para 2".
- V3, V5 y V6 .- válvulas de globo con asientos de bronce, para 2".
- V9 .- válvula de globo con asiento de hule de fierro negro, para 3/4".
- V10 .- válvula de compuerta de fierro negro, para 3/4".

VC . - válvula check de fierro negro, para 3/4".

R1, R2, R3, R4 y R5 . - reducciones de 3" a 2" de fierro negro, tipo campana.

R6 . - reducción de 3" a 2" de fierro negro, tipo bushing.

T1, T2, T3 y T4 . - tés estándar de fierro negro de 3".

T5 . - té estándar de fierro negro de 2".

T6 y T7 . - tés estándar de fierro negro de 3/4".

TU1, TU2, TU3 y TU4 . - tuercas unión de fierro negro de 2".

TU5 . - tuerca unión de fierro negro de 3".

C1 . - codo estándar de 90° de fierro negro de 3".

C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, C9, C10, C11, C12, C13 y C14 . - codos estándar de 90° de fierro negro de 2".

C15 y C16 . - codos estándar de fierro negro de 90° y 45°, respectivamente, de 3/4".

A . - sistema eléctrico de switch, estación de push - button y arrancador magnético para la protección y funcionamiento del motor de 10 H. P. que mueve a la bomba.

B . - bomba de aspas de canjilones de 200 gpm de capacidad, con válvula de alivio.

MD . - manómetro diferencial de mercurio.

TM . - termómetro con un rango de 0 - 100 °C .

AA . - agitador de aire.

N1 y N2 . - medidores de nivel.

TA1 y TA2 . - tanques de 400 y 200 litros de capacidad, respectivamente.

ZP . - zona de prueba, con una longitud de 19 ft.

ϕ_1 . - corresponde a tubería con diámetro de 3".

ϕ_2 . - corresponde a tubería con diámetro de 2".

Longitud total de la tubería de 3" . - 2.5 metros.

Longitud total de la tubería de 2" . - 29.75 metros.

Como estamos manejando soluciones de polímeros y el tamaño del equipo es considerable, entonces dichas soluciones han de prepararse en el mismo equipo. Su preparación se lleva a cabo de la siguiente forma:

Se pesa la cantidad de soluto necesaria para la concentración que se quiera manejar, considerando ahora que el aforo es de 400 litros, que corresponde al tanque TA1. Una vez limpio y vaciado éste tanque TA1, se cierra la válvula V2 y se procede a llenarlo con los 400 litros de agua que están indicados sobre el mismo tanque y alineados con el medidor N1. Se abre la válvula V10 para provocar la entrada del aire que nos sirve como medio de agitación del agua contenida en TA1; se procura que la agitación no sea con mucho flujo de aire para no causar derramamiento de líquido por la parte superior del tanque. Operando de ésta forma, se vá agregando poco a poco el soluto hasta que se termina la adición; terminada ésta, se cierra la válvula V9, cuyo único objetivo por el momento fué dispersar el soluto dentro del tanque. Se deja reposar por espacio de 24 horas. Al cabo de éste, volvemos a abrir la válvula V9 y se deja agitando por un tiempo de aproximadamente 40 horas; terminado éste lapso, se vuelve a dejar en reposo para permitir que el aire absorvido se libere, aprovechando la diferencia de densidades . De ésta forma, el equipo está listo para comenzar a trabajar.

El manejo del equipo se realiza bajo los siguientes pasos:

1. - Una vez limpio todo el equipo y preparada la solución de la manera indicada anteriormente, se comprueba que las válvulas V1 y V9 estén cerradas. Se abren las válvulas V3, V4, V5, V6, V7 y V8.
2. - Se abre la válvula V2 y se pone a funcionar la bomba, la cuál llevará el líquido hasta el tanque TA2, hasta que llegue a la marca no. 1; y en éste momento se cierra la válvula V8 cuidando que la V7 quede abierta para evitar que la presión creada al cerrar éstas válvulas aumente demasiado y llegue a estropear el manómetro.
3. - A partir de ahora, el equipo queda listo para iniciar las determinaciones de gastos contra caídas de presión. Para elegir un gasto cualquiera, se hace uso de las válvulas V3, V4, V5 y V6, las cuáles fueron calibradas para diferentes aberturas. Una vez colocadas en una posición determinada, se deja que el líquido fluya por la zona de prueba hasta conseguir el régimen permanente establecido con anterioridad.
4. - Después de aproximadamente unos 15 minutos en que se dejó alcanzar el régimen permanente, se abre la válvula V8 y se cierra inmediatamente la V7 tomándose al mismo tiempo con un cronómetro el intervalo que el nivel de líquido en el tanque TA2 tarda en pasar de la marca no. 1 a la marca 2 ó a la no. 3, según se haya escogido el aforo.
5. - Una vez alcanzada ésa marca se para el cronómetro y se abre la válvula V7 cerrándose la V8. Con esto conocemos el gasto, ya que tenemos el tiempo en que se obtiene un determinado volumen de líquido en el tanque TA2. A continuación, abrimos la válvula V1 hasta que el nivel en el tanque TA2 lle-

que otra vez a la marca no. 1. Es decir, hemos recirculado la solución al tanque donde fué preparada originalmente sin tener que tirar líquido.

6. - Se dispone ahora de otra colocación de las válvulas de control de gasto y se repite el procedimiento.

Es obvio que en el transcurso del paso no. 4 al paso no. 5, se requiere tomar la lectura de la caída de presión que provocó el gasto que se está midiendo, mediante el uso del manómetro diferencial. Y también se toma nota de la temperatura a la que éstas determinaciones fueron hechas, utilizando el termómetro TM instalado en la línea.

Al finalizar todos los experimentos con una solución, entonces los pasos a seguir son:

7. - Se para la bomba y se cierran las válvulas V3, V4 y V5; se abre la válvula V1 y se deja que el tanque TA1 vacíe el líquido que contiene en el TA2, hasta que casi se vaya a derramar; entonces se abre la válvula de drenaje V9 cerrando V1, hasta que el líquido se haya ido por ella; de nueva cuenta se abre V1 y se deja vaciar el resto (no toma más de dos veces, porque el tanque TA2 tiene la mitad de capacidad que TA1) de la misma manera.

8. - Se llena de nueva cuenta el tanque TA1 con agua limpia. Se cierra V1 pero se abren todas las demás y se pone a funcionar la bomba con el fin de limpiar la solución que haya quedado en los tanques y en la tubería. Se pone en funcionamiento el agitador AA y se abre la válvula de drenaje con el fin de ir tirando el agua sucia. Esta se reemplaza en el tanque TA1 a la proporción que éste se vacía, hasta que quede perfectamente limpio todo el sistema.

9. - Por último, para cambiar la solución que se maneja en proceso, se em-

pieza a partir del paso no. 1.

Los tanques fueron aforados de la siguiente manera:

Se calibró un tanque de 20 litros y con él se llenó el tanque TA1 veinte veces hasta obtener los 400 litros de capacidad; se hicieron marcas intermedias.

Al tanque TA2 se le calibraron tres marcas sobre el medidor de nivel N2.

Una se tomó como marca de referencia (marca no. 1) y dos más, una de una capacidad de 3.3041332 ft^3 (marca no. 2) y otra de una capacidad de 4.8322993 ft^3 (marca no. 3). Se utilizaron para estas calibraciones, el mismo tanque de 20 litros y una probeta graduada de $1/2$ litro.

El control de las válvulas V3, V4, V5 y V6 se llevó a cabo de la siguiente manera:

Operando el equipo de la forma indicada anteriormente, se llenó con agua el tanque TA1 y se fueron variando las aberturas de estas válvulas para conseguir varios datos de gastos (medidos como volumen de líquido por unidad de tiempo) obtenidos en el tanque TA2. Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 6.1, y éstos mismos graficados de la figura 6.2 a la figura 6.13. El objeto primordial de hacer este control es el de asegurarse que se puede conseguir régimen laminar a pesar de la capacidad tan grande de la bomba. Y también asegurarse de que aunque se maneje régimen turbulento, éste no sea tan grande que se provoquen gradientes de presión no permitidos, los cuáles se encuentren fuera del rango de operación del sistema en general.

Los cálculos del manómetro diferencial de mercurio se encuentran en el Apéndice 5.

Una vez establecidos todos los procedimientos de operación de los equipos

experimentales, estamos en posibilidad de obtener resultados.

TABLA 6.1

Control de las válvulas para el gasto

a) fig. 6.2

tiempo (seg)	abertura de las válvulas *				gasto (ft ³ /seg)
	V3	V4	V5	V6	
1397.8	TA	TA	1/12	1/16	0.002359
525.9	TA	TA	1/12	1/8	0.006282
369.8	TA	TA	1/12	2/8	0.008927
347.4	TA	TA	1/12	3/8	0.0095098
342.3	TA	TA	1/12	4/8	0.00965
341.2	TA	TA	1/12	5/8	0.009684
345.8	TA	TA	1/12	6/8	0.009557
354.3	TA	TA	1/12	7/8	0.009322
362.5	TA	TA	1/12	8/8	0.009114

b) fig. 6.3

tiempo (seg)	abertura de las válvulas				gasto (ft ³ /seg)
	V3	V4	V5	V6	
755.1	TA	TA	2/12	1/16	0.00437
623.2	TA	TA	2/12	1/8	0.005299
274.2	TA	TA	2/12	2/8	0.012047
238.8	TA	TA	2/12	3/8	0.01383

* TA . - significa toda abierta.

TABLA 6.1 (continuación)

198.8	TA	TA	2/12	4/8	0.01662
185.6	TA	TA	2/12	5/8	0.0178
181.6	TA	TA	2/12	6/8	0.0182
179.6	TA	TA	2/12	7/8	0.0184
178.5	TA	TA	2/12	8/8	0.01851
175.8	TA	TA	2/12	9/8	0.0188
175.2	TA	TA	2/12	10/8	0.01886
174.0	TA	TA	2/12	11/8	0.01898
175.0	TA	TA	2/12	16/8	0.01888
176.5	TA	TA	2/12	24/8	0.01872

c) fig. 6.4

tiempo (seg)	abertura de las válvulas				gasto (ft ³ /seg)
	V3	V4	V5	V6	
854.6	TA	TA	3/12	1/16	0.003866
459.5	TA	TA	3/12	1/8	0.0072
230.0	TA	TA	3/12	2/8	0.014365
180.0	TA	TA	3/12	3/8	0.018356
160.6	TA	TA	3/12	4/8	0.02057
142.8	TA	TA	3/12	5/8	0.02313
135.4	TA	TA	3/12	6/8	0.0244
135.2	TA	TA	3/12	7/8	0.02443
133.6	TA	TA	3/12	8/8	0.02472

TABLA 6.1 (continuación)

d) fig. 6.5

tiempo (seg)	abertura de las válvulas				gasto (ft ³ /seg)
	V3	V4	V5	V6	
861.2	TA	TA	4/12	1/16	0.003834
416.0	TA	TA	4/12	1/8	0.007942
201.6	TA	TA	4/12	2/8	0.0164
156.1	TA	TA	4/12	3/8	0.02114
141.5	TA	TA	4/12	4/8	0.02334
115.6	TA	TA	4/12	5/8	0.02858
106.1	TA	TA	4/12	6/8	0.03114
103.4	TA	TA	4/12	7/8	0.03195
101.0	TA	TA	4/12	8/8	0.032711

e) fig. 6.6

tiempo (seg)	abertura de las válvulas				gasto (ft ³ /seg)
	V3	V4	V5	V6	
1204.8	TA	TA	5/12	1/16	0.00274
458.1	TA	TA	5/12	1/8	0.007212
226.6	TA	TA	5/12	2/8	0.01458
151.8	TA	TA	5/12	3/8	0.02176
116.3	TA	TA	5/12	4/8	0.02838
94.3	TA	TA	5/12	5/8	0.035
88.7	TA	TA	5/12	6/8	0.03725

TABLA 6.1 (continuación)

85.0	TA	TA	5/12	7/8	0.03886
81.2	TA	TA	5/12	8/8	0.0407
f) fig. 6.7					
	abertura de las válvulas				
tiempo (seg)	V3	V4	V5	V6	gasto (ft ³ /seg)
1404.6	TA	TA	6/12	1/16	0.00235
442.0	TA	TA	6/12	1/8	0.007475
240.4	TA	TA	6/12	2/8	0.01374
144.2	TA	TA	6/12	3/8	0.023
113.6	TA	TA	6/12	4/8	0.03
93.0	TA	TA	6/12	5/8	0.03552
82.5	TA	TA	6/12	6/8	0.04
77.2	TA	TA	6/12	7/8	0.0428
71.8	TA	TA	6/12	8/8	0.046
66.2	TA	TA	6/12	12/8	0.05
61.4	TA	TA	6/12	TA	0.05381
g) fig. 6.8					
	abertura de las válvulas				
tiempo (seg)	V3	V4	V5	V6	gasto (ft ³ /seg)
1796.7	TA	TA	10/12	1/16	0.001839
566.2	TA	TA	10/12	1/8	0.00583

TABLA 6.1 (continuación)

181.6	TA	TA	10/12	2/8	0.0182
125.6	TA	TA	10/12	3/8	0.0263
102.0	TA	TA	10/12	4/8	0.0324
83.8	TA	TA	10/12	5/8	0.03942
66.8	TA	TA	10/12	6/8	0.04946
61.6	TA	TA	10/12	7/8	0.05356
56.3	TA	TA	10/12	8/8	0.05868
46.0	TA	TA	10/12	TA	0.07182

h) fig. 6.9

tiempo (seg)	abertura de las válvulas				gasto (ft ³ /seg)
	V3	V4	V5	V6	
1008.8	TA	TA	18/12	1/16	0.003275
639.2	TA	TA	18/12	1/8	0.005168
178.3	TA	TA	18/12	2/8	0.01853
116.8	TA	TA	18/12	3/8	0.02828
96.7	TA	TA	18/12	4/8	0.03416
74.7	TA	TA	18/12	5/8	0.04423
62.5	TA	TA	18/12	6/8	0.052866
58.3	TA	TA	18/12	7/8	0.05667
52.8	TA	TA	18/12	8/8	0.062575
41.1	TA	TA	18/12	TA	0.0804

TABLA 6.1 (continuación)

i) fig. 6.10

tiempo (seg)	abertura de las válvulas				gasto (ft ³ /seg)
	V3	V4	V5	V6	
1215.5	TA	TA	30/12	1/16	0.002715
491.1	TA	TA	30/12	1/8	0.00672
170.0	TA	TA	30/12	2/8	0.019358
112.0	TA	TA	30/12	3/8	0.0295
93.2	TA	TA	30/12	4/8	0.03545
77.0	TA	TA	30/12	5/8	0.0429
59.0	TA	TA	30/12	6/8	0.056
55.1	TA	TA	30/12	7/8	0.06
51.3	TA	TA	30/12	8/8	0.0644
38.5	TA	TA	30/12	TA	0.08581

j) fig. 6.11

tiempo (seg)	abertura de las válvulas				gasto (ft ³ /seg)
	V3	V4	V5	V6	
1334.0	TA	TA	TA	1/16	0.002476
436.0	TA	TA	TA	1/8	0.007578
196.4	TA	TA	TA	2/8	0.01682
118.1	TA	TA	TA	3/8	0.02797
92.3	TA	TA	TA	4/8	0.0357
68.7	TA	TA	TA	5/8	0.048

TABLA 6.1 (continuación)

61.2	TA	TA	TA	6/8	0.054
54.7	TA	TA	TA	7/8	0.0604
50.2	TA	TA	TA	8/8	0.06578
36.9	TA	TA	TA	TA	0.08953

k) fig. 6.12

tiempo (seg)	abertura de las válvulas*				gasto (ft ³ /seg)
	V3	V4	V5	V6	
798.6	TC	TA	2/12	1/16	0.0041374
259.1	TC	TA	2/12	1/8	0.0127523
129.1	TC	TA	2/12	2/8	0.02559
113.0	TC	TA	2/12	3/8	0.02924
104.5	TC	TA	2/12	4/8	0.031618
103.4	TC	TA	2/12	5/8	0.031954
99.6	TC	TA	2/12	7/8	0.0331745
97.0	TC	TA	2/12	TA	0.0340632

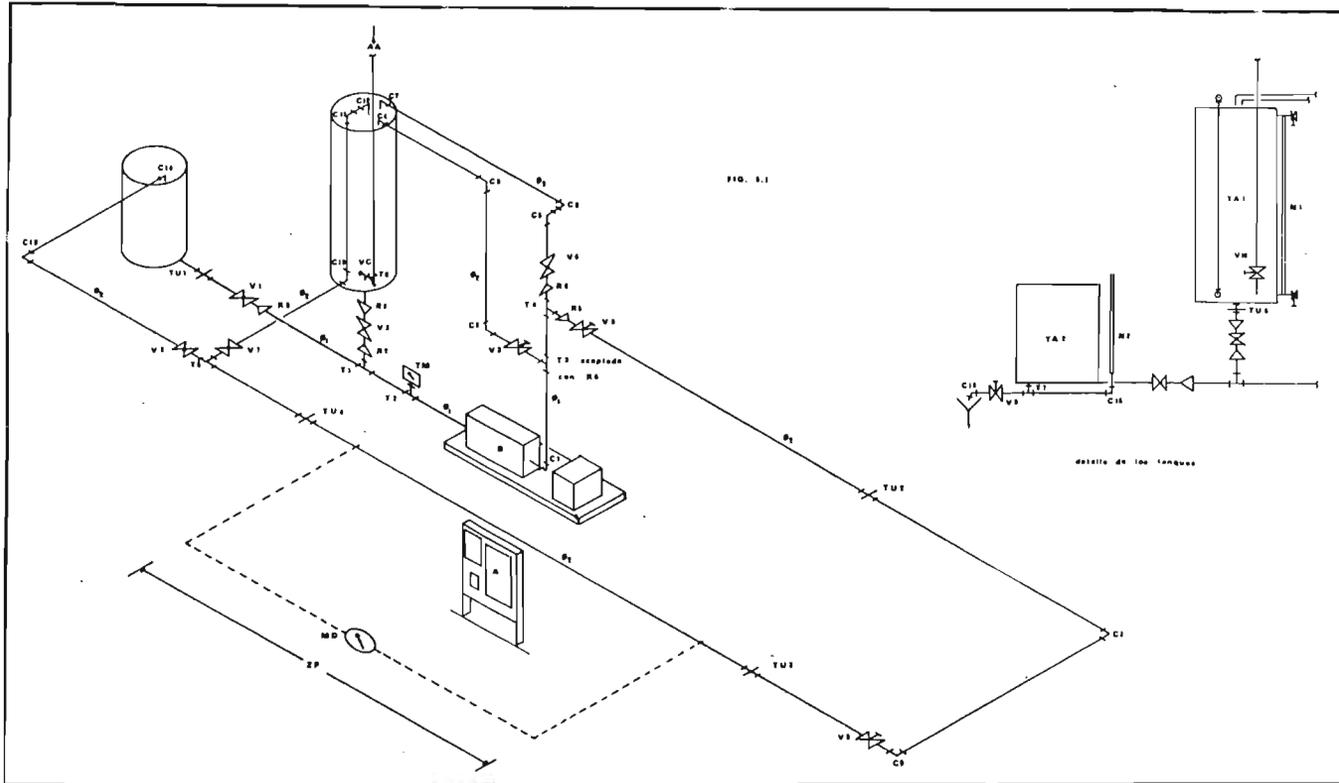
l) fig. 6.13

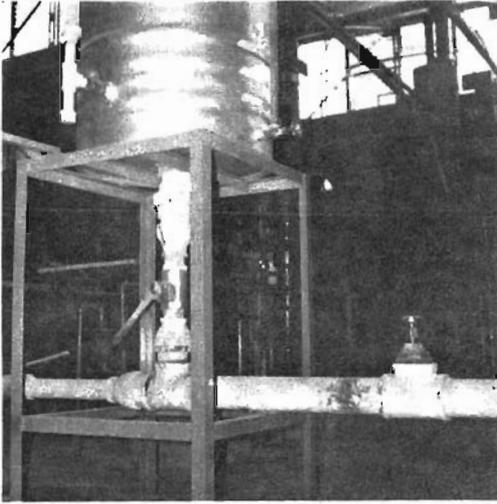
tiempo (seg)	abertura de las válvulas				gasto (ft ³ /seg)
	V3	V4	V5	V6	
461.9	TC	TA	4/12	1/16	0.0071533
227.8	TC	TA	4/12	1/8	0.0145

* TC . - significa toda cerrada.

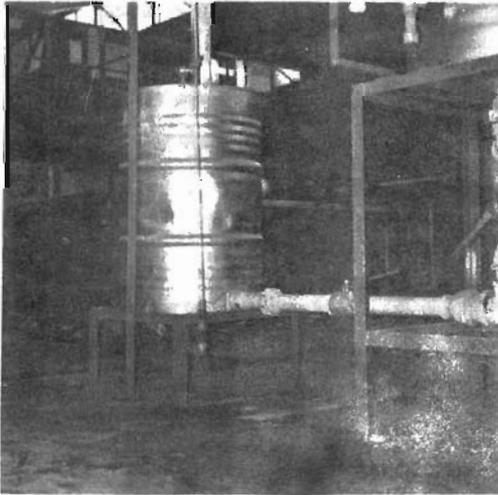
TABLA 6.1 (continuación)

100.7	TC	TA	4/12	2/8	0.0328116
78.5	TC	TA	4/12	3/8	0.04209
67.5	TC	TA	4/12	4/8	0.04895
62.8	TC	TA	4/12	5/8	0.05261
54.8	TC	TA	4/12	8/8	0.0603
51.7	TC	TA	4/12	TA	0.0639

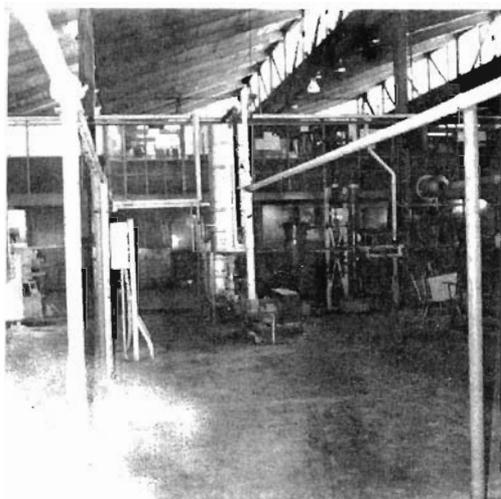




Panorámica de la Base del Tanque TA1



Panorámica del Tanque TA2



Panorámica General del Equipo



Panorámica de los Tanques y de la
Bomba

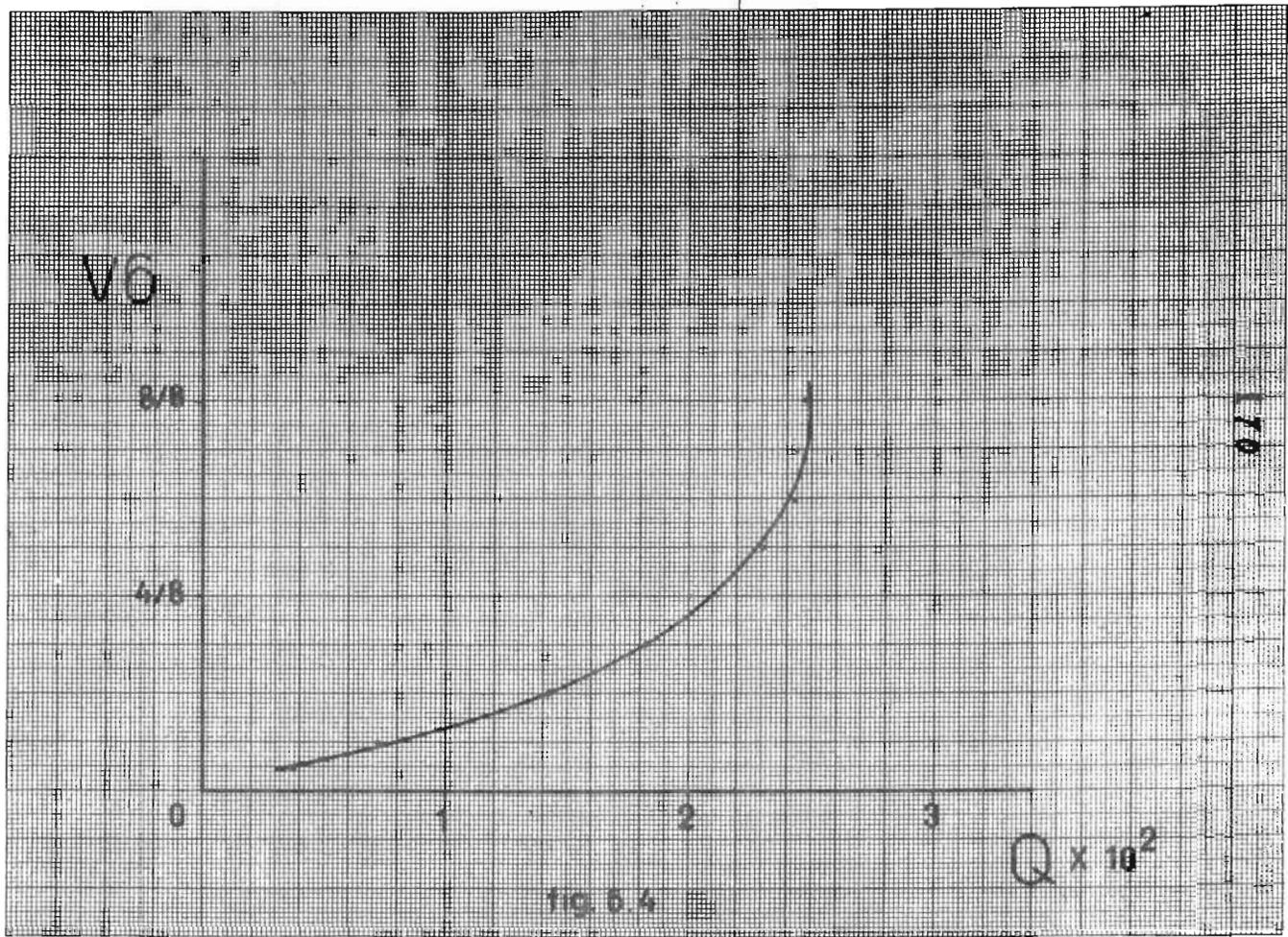


FIG. 6.4

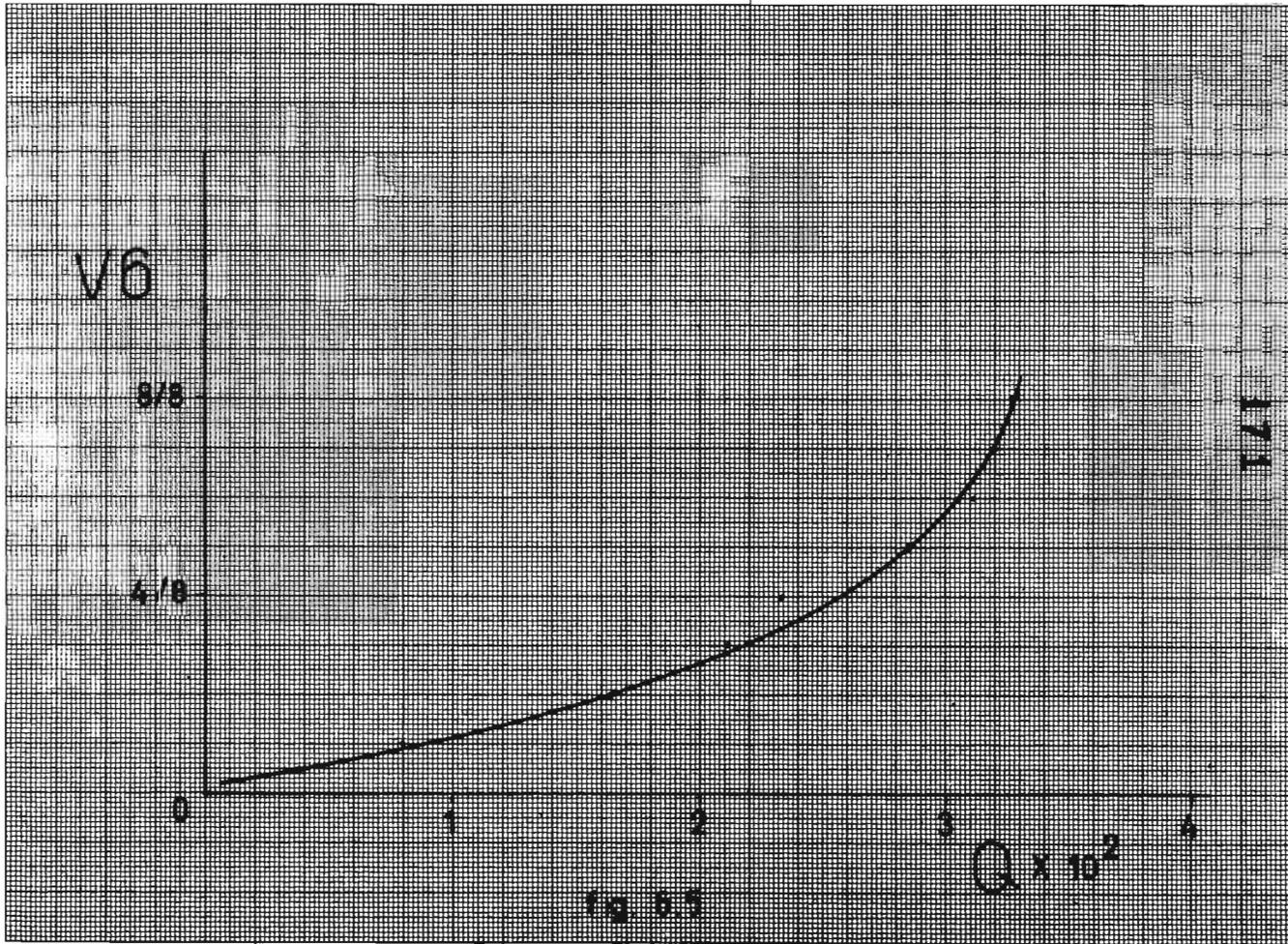


Fig. 8.5

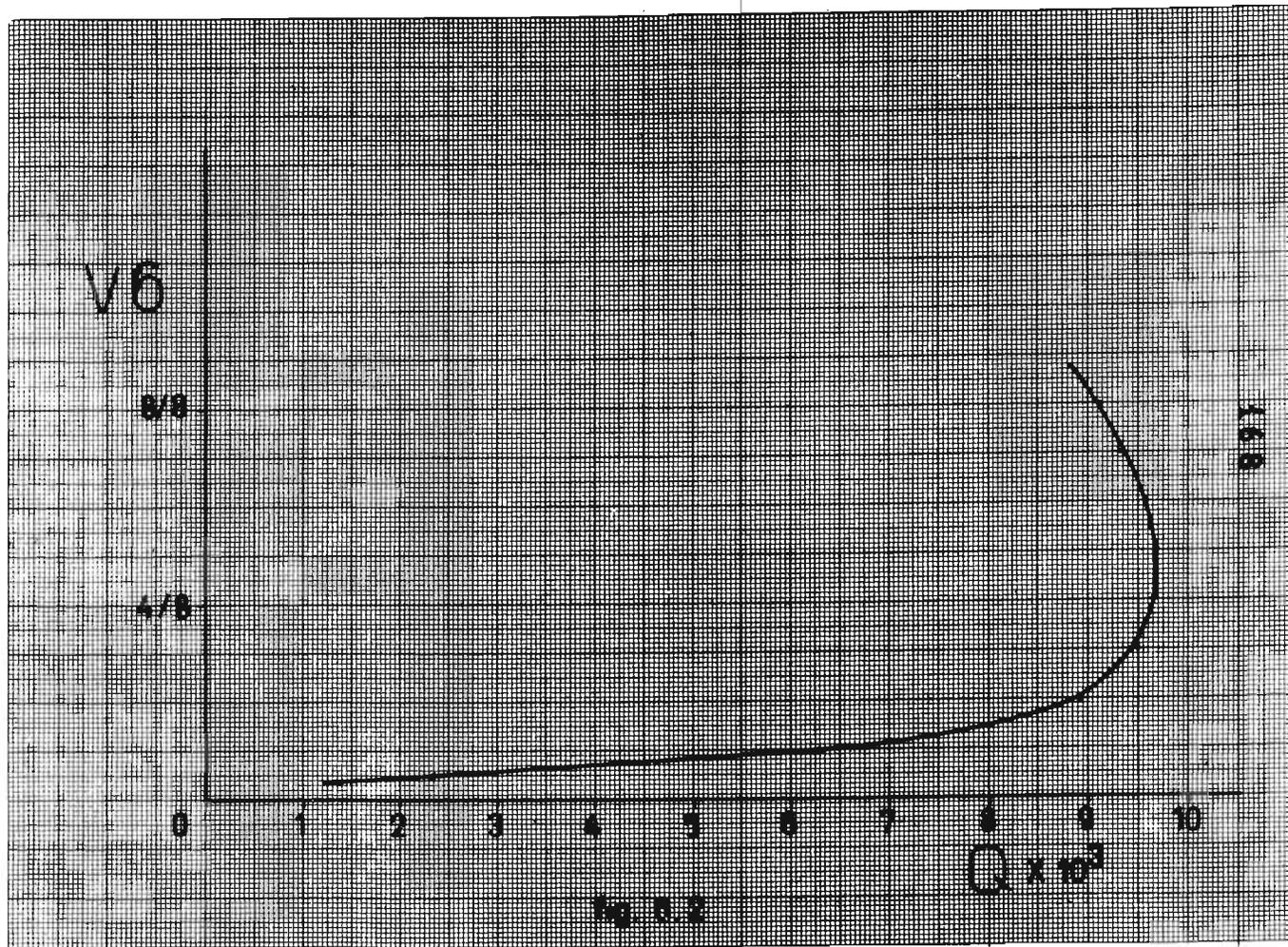


Fig. 5.2

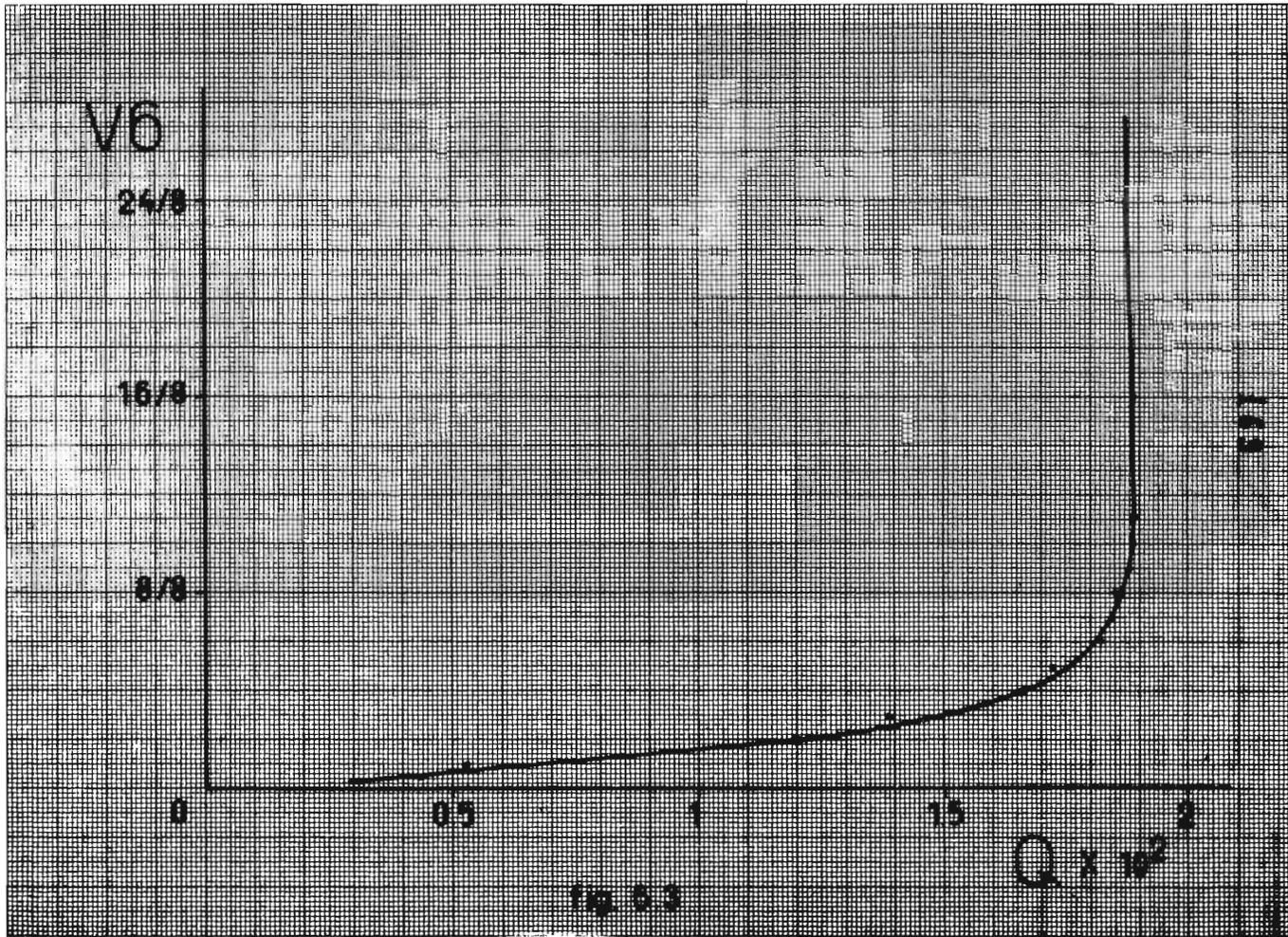


Fig. 8.3

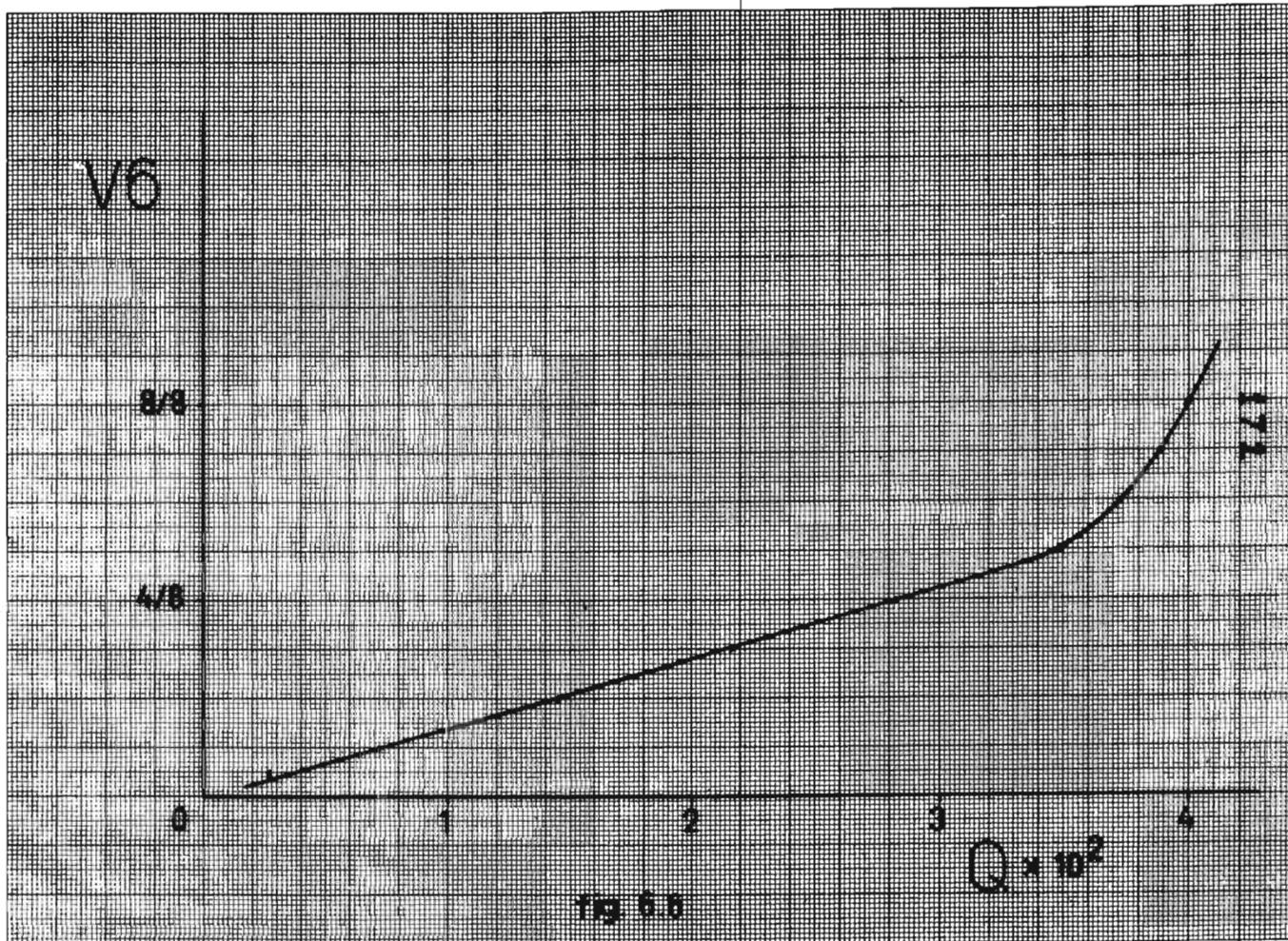


Fig 6.6

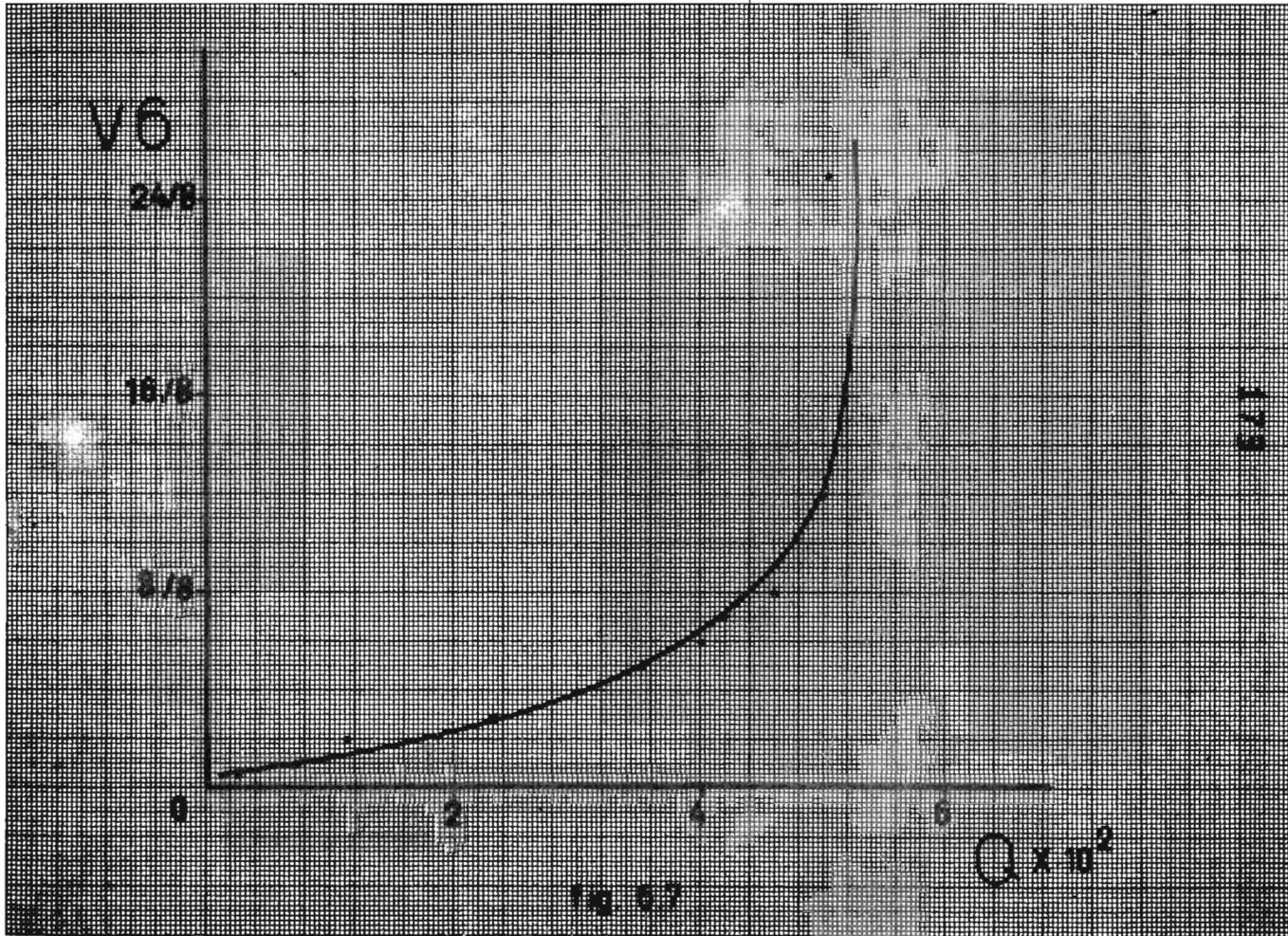


Fig. 6.7

179

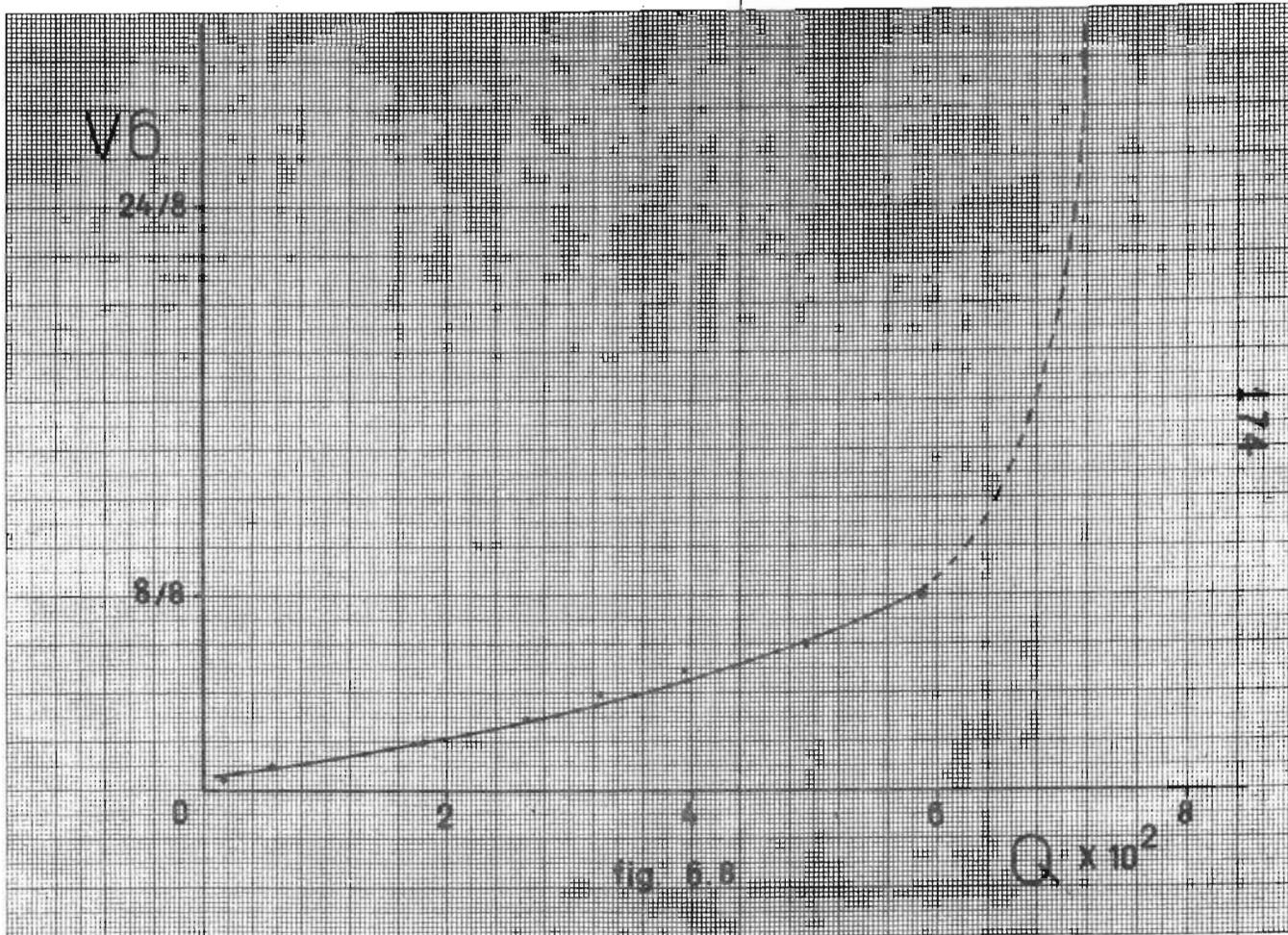


fig 6.8

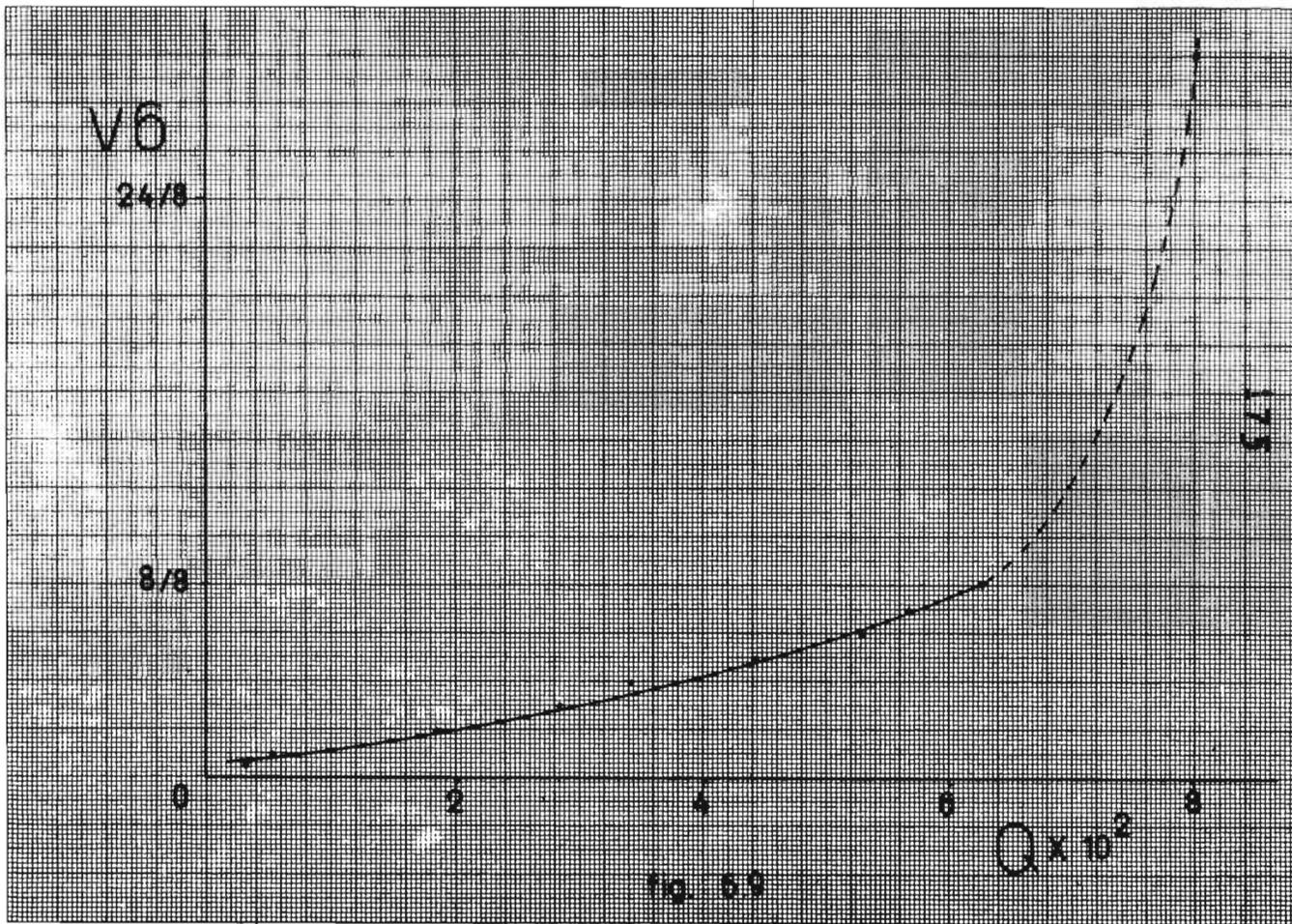
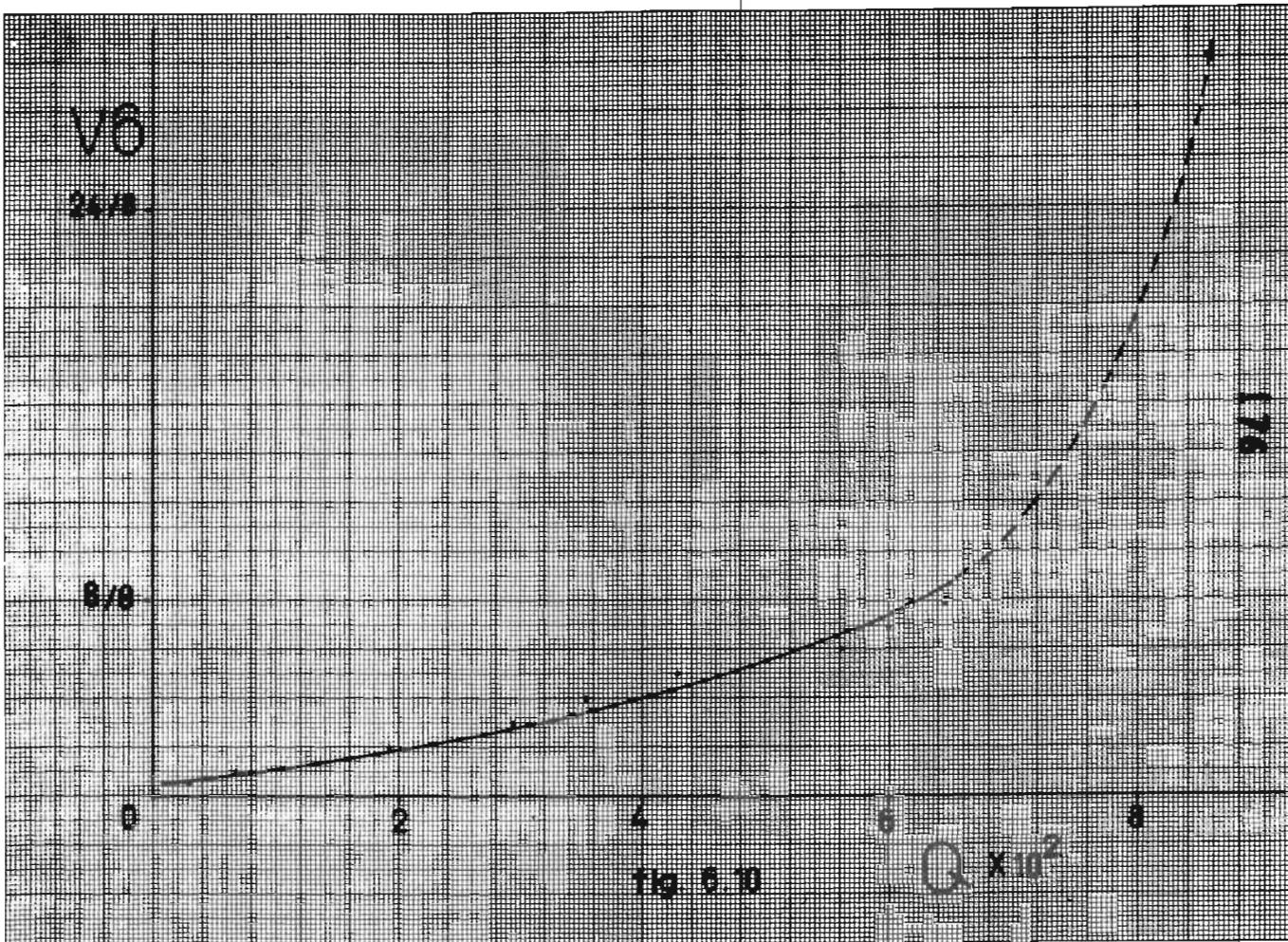


fig. 69



V6

24/8

8/8

177

0

2

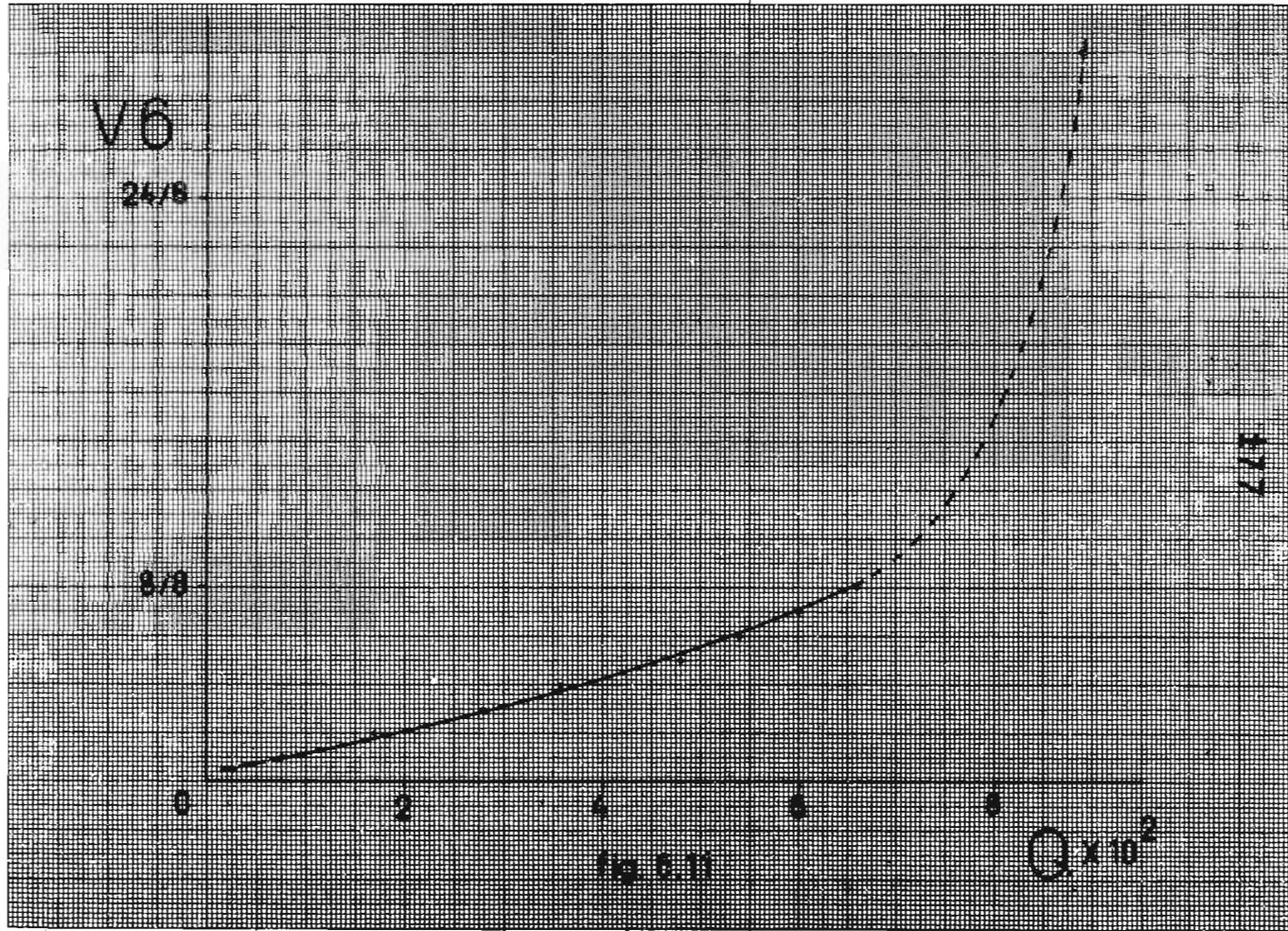
4

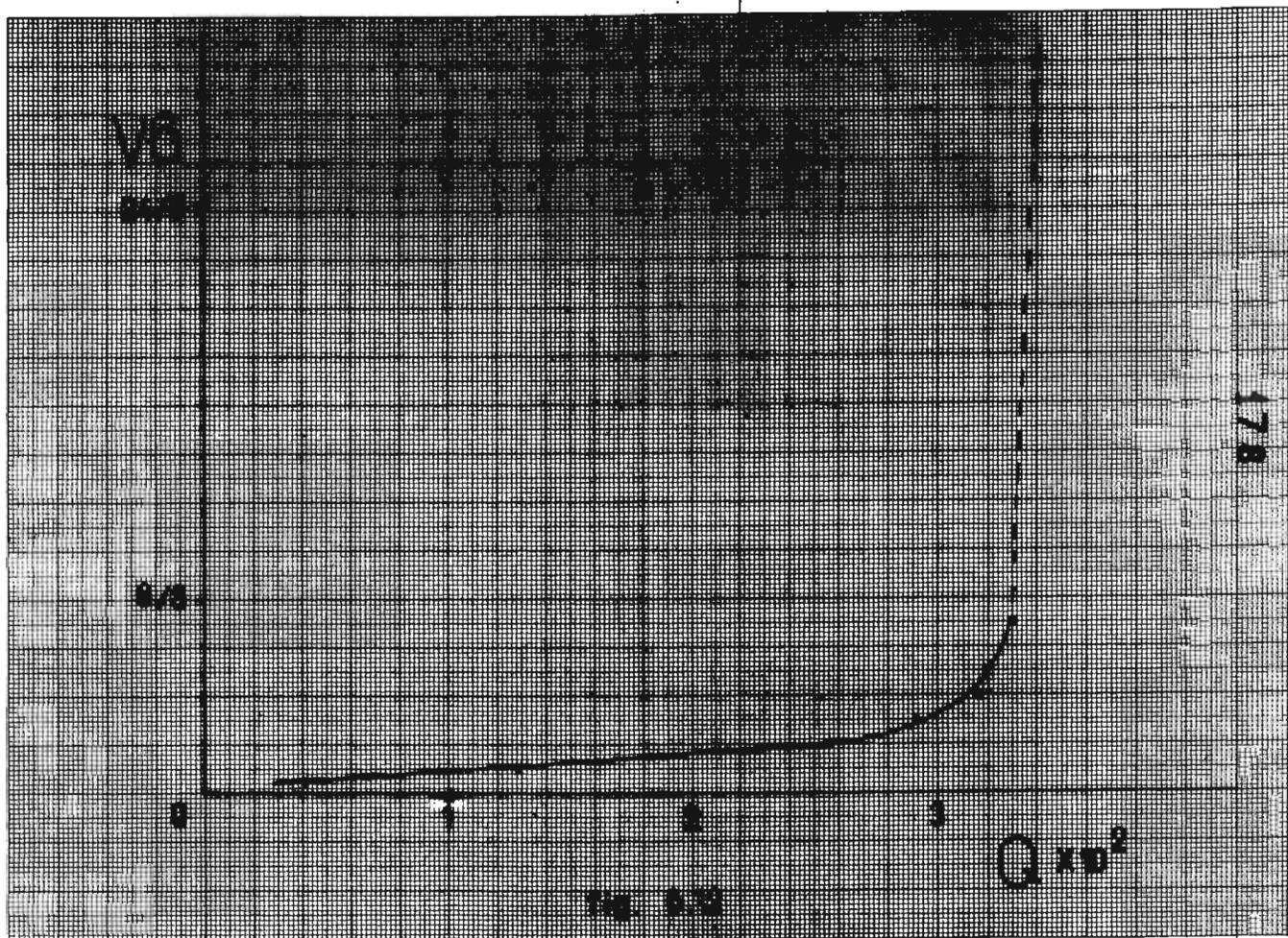
6

8

Fig. 6.11

$Q \times 10^2$





V6

24/8

8/8

0

2

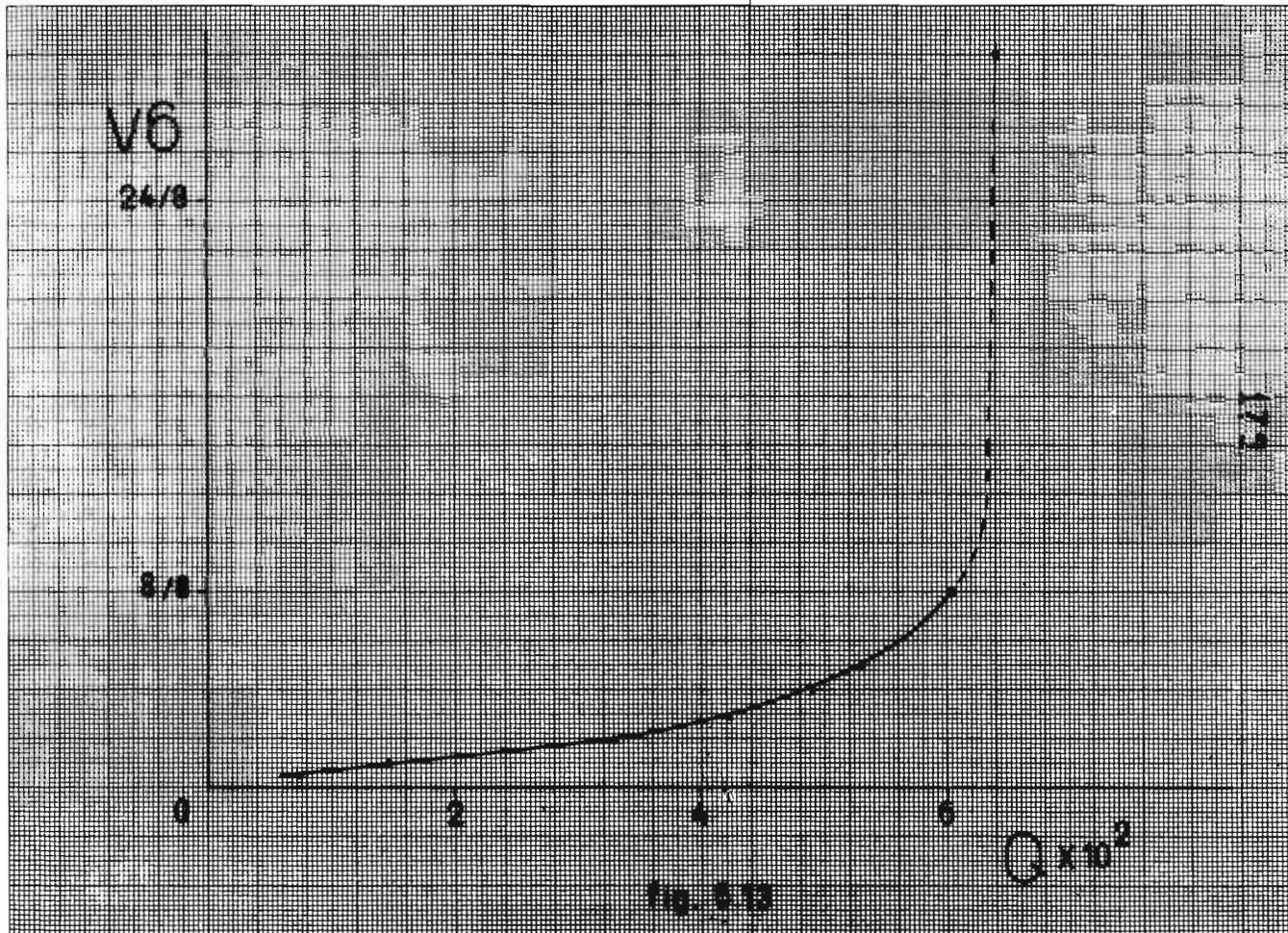
4

6

$Q \times 10^2$

173

FIG. 513



CAPITULO: 7

RESULTADOS EXPERIMENTALES

Como se mencionó en el capítulo 6, se prepararon nueve soluciones con las siguientes concentraciones:

a) Soluciones de Polyox

a. 1. - 1%

a. 2. - 2%

a. 3. - 2.5%

b) Soluciones de CMC

b. 1. - 0.4%

b. 2. - 0.67%

b. 3. - 1%

b. 4. - 1.5%

b. 5. - 2%

b. 6. - 2.5%

Todos los porcentajes son en peso.

Mediante el viscosímetro Brookfield y la técnica descrita en el capítulo 3 se obtuvieron, para cada una de las soluciones, valores de velocidad angular (rpm) y viscosidad aparente (cp) a partir de las cuáles se calcularon

los valores de la velocidad angular (Ω , radianes/seg) y del logaritmo del esfuerzo cortante ($\ln \tau$), aplicando el programa no. 1 (Apéndice 4). Los valores obtenidos se dan en la tabla 7. 1.

Los valores de Ω y $\ln \tau$ se graficaron (figuras 7. 1 a la 7. 9) y de las pendientes en los puntos de interés se calcularon los valores de la rapidez de corte, de acuerdo a la ecuación 3. 3. 7. Los valores de τ_w y $\dot{\gamma}_w$ se dan en la tabla 7. 2.

Hecho ésto, se está en posibilidad de hacer las curvas de flujo de cada solución. A partir de la tabla 7. 2, se hicieron las gráficas correspondientes, de la fig. 7. 10 a la fig. 7. 18, que permiten obtener una idea a que tipo de material no newtoniano pertenecen.

Como los modelos escogidos fueron la Ley de la Potencia (ec. 3. 1. 3) y las funciones polinomiales de segundo y tercer grado (ecs. 5. 1. 30 y 5. 1. 40, respectivamente), ésto nos permitió programar los modelos para calcular sus parámetros mediante dos tipos de regresión: regresión lineal logarítmica para el modelo de la Ley de la Potencia, y regresión polinomial para los otros modelos, ambos aplicando el método de mínimos cuadrados. Con ésto ganamos en precisión y evitamos introducir errores debidos al cálculo gráfico, acarreando solamente los errores experimentales. Véase el Apéndice 4.

A veces es imposible eliminar el tratamiento gráfico cuando el modelo usado así lo requiere, como en el de Reiner - Philippoff.

Los valores de los parámetros de los modelos aplicados en cada solución, se observan en la tabla 7. 3.

Una vez obtenidos éstos parámetros, sólo resta introducirlos en las ecuaciones de diseño para calcular los valores de la caída de presión, el número de Reynolds y el factor de fricción que cada modelo especifica, con el fin de poder dimensionar la línea de tubería. Esta parte también se elabora en el programa no. 2 de computadora enlistado en el Apéndice 4.

Los valores anteriores fueron calculados con los datos experimentales de gastos, longitud y diámetro de tubería que proporcionó el equipo construido en la segunda parte experimental de éste trabajo.

Aunque el programa proporciona los valores de nuestras variables de interés para todas las soluciones preparadas, en la práctica no fué posible experimentar con todas ellas debido a varios motivos.

Uno de ellos fué que en el transcurso de cuando se acabó la instalación del equipo y cuando se habían preparado las soluciones de Polyox (5 meses aproximadamente), éste se agotó en el mercado por ser un producto de importación y no se pudo conseguir más que las muestras que la compañía Monsanto regaló para hacer las determinaciones de la curva de flujo.

Otro de ellos fué que para preparar todas las soluciones de CMC en el tanque de 400 litros de capacidad se requería disponer de una gran cantidad de soluto, y su alto costo no permitió comprar más que una determinada cantidad.

Y si anexamos a lo anterior la falta de un buen equipo de medición, tanto para medir gastos como caídas de presión, nos tuvimos que relegar a escoger solamente dos soluciones de CMC, con porcentajes de 0.67 y 2.5%, para hacer determinaciones experimentales de caída de presión y gastos.

Recordando una vez más que el segundo programa de computadora sólo se aplica en la zona laminar, en la tabla 7.4 se proporcionan los valores teóricos que se obtendrían para los gastos experimentales que fueron medidos, mediante la aplicación de los modelos propuestos y que se aplicaron a cada una de las soluciones preparadas en la primera parte experimental de éste trabajo (la curva de flujo).

En ésta tabla 7.4 se podrán observar los valores de las variables que permiten el diseño de la línea de tubería mediante la técnica descrita en el capítulo 5; es decir, se grafican los valores del número de Reynolds y del factor de fricción para cada una de las soluciones preparadas y con cada uno de los modelos propuestos (en principio se tienen 27 combinaciones posibles de gráficas de Re' vs. f), y posteriormente para diseñar otro sistema, basta con calcular el nuevo número de Reynolds para el gasto, diámetro y modelo matemático que se hayan seleccionado; hecho esto, se obtiene f de la gráfica correspondiente, substituyéndolo posteriormente en la ecuación de Fanning para calcular la pérdida de presión en una longitud dada.

Sin embargo, debido a las restricciones que mencionábamos con anterioridad y sobre todo, de lo que puede deducirse de los datos reportados en la tabla 7.4, el único modelo matemático de los escogidos que proporciona resultados coherentes y que tienen sentido, es el modelo de la Ley de la Potencia; por lo tanto, para la zona laminar:

1. - Solución al 0.67% de CMC

Como hemos establecido que el criterio de transición entre un régimen

y el otro iba a estar determinado por el máximo gasto que el criterio de Ryan & Johnson proponen, y que a nuestro juicio está mejor fundamentado, que el suponer que para un Reynolds de 2100 la zona de régimen laminar acaba y empieza la de transición, podremos observar de la Tabla 7.4 que para ésta solución el máximo gasto permitido es de $0.00041692 \text{ ft}^3/\text{seg}$, lo que en términos del número de Reynolds para flúidos que siguen la Ley de la Potencia tiene un valor de 260, por lo cuál se deduce inmediatamente de dicha tabla 7.4, sección VI. A. 1 que para los gastos corridos experimentalmente (los reportados), no podremos tener nunca régimen laminar; por lo anterior, los datos tabulados de Reynolds y factor de fricción, no tienen validez en la zona laminar y sería absurdo como consecuencia graficarlos. Por éste motivo, la gráfica del Re' vs. f en la zona laminar debe quedar reportada hasta un $Re'=260$, que es la que aparece en las figuras 7.19 (a), 7.19 (b) y 7.19 (c), para que pueda existir congruencia con el desarrollo establecido a lo largo de los capítulos anteriores. Y como una consecuencia directa de lo anterior, el perfil de velocidades reportado en la tabla 7.4, sección VI. A. 4, no corresponde al perfil de velocidades verdadero en la zona laminar; sin embargo, para no repetir cálculos con otros gastos menores, que no serían los experimentales, y que darían un resultado parecido a los datos de dicha tabla, éstos se grafican en la figura 7.20 para dar una idea de como varía la parábola de acuerdo a los valores de n y K comparados con el modelo newtoniano (figura 4.2.2); el máximo de la parábola está en 2.03752, que aunque ligeramente superior a 2, indica que el flúido es dilatante, como lo confirman sus parámetros.

2. - Solución al 2.5% de CMC

Observando nuevamente el máximo gasto permitido según Ryan & Johnson para que aún exista zona laminar, éste tomo un valor de $0.0179247 \text{ ft}^3/\text{seg}$ (tabla 7.4, sección X. A. 1), por lo que los valores reportados teóricamente hasta el gasto Q_{10} pueden tomarse como válidos y poder hacer la gráfica del Re' vs. f , la cuál se encuentra reportada en las figuras 7.21 (a) y 7.21 (b); las líneas punteadas indican extrapolaciones a partir de los datos obtenidos en el rango experimental.

El perfil de velocidades para ésta solución (tabla 7.4, sección X. A. 4) sí corresponde al verdadero que se tiene en la zona laminar, indicando que para ésta solución el fluido se comporta de forma pseudoplástica ya que el máximo de la parábola se encuentra en un valor de v/v promedio de 1.9177 siendo menor que el del modelo newtoniano. Esta por demás indicar que por la forma de reportar éste perfil, es independiente de la variación de los gastos y diámetros, ya que se encuentra en forma adimensional y esto lo hace general. La gráfica se reporta en la figura 7.22.

Los valores teóricos y experimentales para las dos soluciones procesadas se resúmen en la tabla 7.5.

Por último, nos falta hacer el reporte de los resultados para las soluciones corridas experimentalmente en la región turbulenta.

Para la zona turbulenta el capítulo 5 propone el siguiente proceso de cálculo:

1. Suponer un valor para la caída de presión.
2. Calcular los parámetros n' y m' a partir de la ecuación 5.1.76 ó en su

caso con la ecuación 5.1.77, ya que nosotros no utilizamos viscosímetros capilares para hacer la determinación de la curva de flujo; los cuáles pueden obtenerse de una manera simple si los datos reportados en una gráfica en coordenadas logarítmicas proporciona una línea recta de pendiente n' y del valor en la ordenada en el origen se obtiene m' .

3. Con éstos valores de n' y m' se calcula el número de Reynolds mediante la ecuación 5.1.81.

4. Posteriormente de la figura 5.3.1 se lee el valor de f .

5. Y por último se calcula el valor de la pérdida de presión a partir de la ecuación de Fanning; si éste valor no es el mismo que el supuesto originalmente, se lleva a cabo otra iteración, principiando por el punto no. 1.

Como nosotros no contamos con un viscosímetro capilar a partir del cuál sacar una gran cantidad de datos de $(D \Delta P / 4 L)$ vs. $(8 \langle v_z \rangle / D)$ sobre un rango de experimentación tan amplio en la zona laminar (véase la referencia 18), que posteriormente pudieran extrapolarse para un valor deseado de caída de presión en la zona turbulenta ya que a éste fundamento se debe el proceso iterativo de cálculo propuesto, y además, porque debido a que en el momento de hacer la regresión lineal logarítmica a cada solución todos los factores de correlación andan alrededor de 0.999 (casi 1.0), ésto nos indica de una manera muy fuerte que n' y m' son constantes; y como el único modelo que a final de cuentas estamos manejando es el de la Ley de la Potencia, entonces tendremos que la relación entre n' y m' y los parámetros del modelo, n y K , están dados por las ecuaciones (8):

$$n' = n$$

$$m' = K (3 n + 1 / 4 n)^n$$

con lo que la ecuación 5.1.81 se transforma en:

$$Re' = (D^n \langle v_z \rangle^{2-n}) / (K(6n+2 / n)^n / 8)$$

De ésta forma, el proceso de cálculo propuesto para la zona turbulenta se reduce, para nuestros casos, a:

1. Calcular el Re' mediante la modificación hecha a la ecuación 5.1.81, usando el gasto ($\langle v_z \rangle$) y el diámetro experimental usados (0.1722ft).
2. Leer f de la gráfica 5.3.1.
3. Calcular la caída de presión para la longitud experimental de 19 ft, mediante la ecuación de Fanning. Evidentemente, éstos valores calculados serán los que se proponen teóricamente.

Ahora bien, debido a todos los problemas de instalación y operación del equipo experimental, y sobre todo, porque éste trabajo está dirigido principalmente al dimensionamiento de sistemas a régimen laminar, sólo se escogieron cinco gastos (los mayores) para evitar en lo posible, caer en la zona de transición y poder completar el trabajo experimental incluyendo un poco de la zona turbulenta.

Estos gastos fueron:

$$Q_{16} = 0.0407 ; Q_{17} = 0.05381 ; Q_{18} = 0.07182 ; Q_{19} = 0.0804$$

$$Q_{20} = 0.08953$$

todos ellos expresados en $ft^3/seg.$

Los resultados teóricos y experimentales de las dos soluciones procesadas se resúmen en la tabla 7.6.

El análisis general de todos éstos resultados presentados en este capítulo se realiza en las conclusiones de éste trabajo.

TABLA 7. 1

a. 1. - Solución de Polyox al 1% ; T = 19°C ; Horas de agitación: 35 ;

Fecha de elaboración: 25/5/74 ; Tiempo de lectura para cada velocidad: 30'.

Ω (rpm)	μ (cp)	Ω (rad/seg)	ζ (lb/ft ²)	ln ζ
60	213	6.282	0.0559018	-2.88416
30	225	3.141	0.0295256	-3.52249
12	250	1.2564	0.0131225	-4.33343
6	285	0.6282	0.0074798	-4.89555
3	305	0.3141	0.0040023	-5.52087
1.5	320	0.157	0.0020996	-6.166

a. 2. - Solución de Polyox al 2% ; T = 20°C ; Horas de agitación: 40 ;

Fecha de elaboración: 26/5/74 ; Tiempo de lectura para cada velocidad: 40'.

Ω (rpm)	μ (cp)	Ω (rad/seg)	ζ (lb/ft ²)	ln ζ
60	1790	6.282	0.469785	-0.75548
30	1830	3.141	0.240142	-1.42653
12	2420	1.2564	0.127026	-2.06337
6	3080	0.6282	0.080834	-2.51535
3	3780	0.3141	0.049603	-3.0037
1.5	4500	0.157	0.029525	-3.52249
0.6	5050	0.0628	0.013254	-4.32348

TABLA 7.1 (continuación)

a. 3. - Solución de Polyox al 2.5%; T = 20°C ; Horas de agitación: 50 ;

Fecha de elaboración: 27/5/74 ; Tiempo de lectura para cada velocidad: 50'.

Ω (rpm)	μ (cp)	Ω (rad/seg)	ζ (lb/ft ²)	ln ζ
60	2990	6.282	0.784724	-0.24242
30	3600	3.141	0.472409	-0.7499
12	5400	1.2564	0.283445	-1.26073
6	7250	0.6282	0.190276	-1.65928
3	9300	0.3141	0.122039	-2.10341
1.5	11500	0.157	0.075454	-2.58423
0.6	13300	0.0628	0.034906	-3.3551

b. 1. - Solución de CMC al 0.4 % ; T = 17°C ; Horas de agitación: 30 ;

Fecha de elaboración: 6/10/74 ; Tiempo de lectura para cada velocidad: 15'.

Ω (rpm)	μ (cp)	Ω (rad/seg)	ζ (lb/ft ²)	ln ζ
60	16.5	6.282	0.00433042	-5.44209
30	15.8	3.141	0.00207335	-6.17859
12	15	1.2564	0.00078735	-7.14684
6	13.5	0.6282	0.00035431	-7.94534
3	10	0.3141	0.00013122	-8.93859
1.5	6.75	0.157	0.00004429	-10.02479

TABLA 7.1 (continuación)

b. 2. - Solución de CMC al 0.67% ; T = 17°C ; Horas de agitación: 30 ;

Fecha de elaboración: 7/10/74 ; Tiempo de lectura para cada velocidad: 20'.

Ω (rpm)	μ (cp)	Ω (rad/seg)	ζ (lb/ft ²)	ln ζ
60	40.65	6.282	0.0106686	-4.54045
30	38.6	3.141	0.0050653	-5.28534
12	36.5	1.2564	0.0019158	-6.25758
6	30	0.6282	0.0007874	-7.14684
3	22	0.3141	0.0002887	-8.15014
1.5	8.6	0.157	0.0000564	-9.78257

b. 3. - Solución de CMC al 1% ; T = 17°C ; Horas de agitación: 30 ;

Fecha de elaboración: 8/10/74 ; Tiempo de lectura para cada velocidad: 30'.

Ω (rpm)	μ (cp)	Ω (rad/seg)	ζ (lb/ft ²)	ln ζ
30	117.6	3.141	0.015432	-4.17131
12	108.75	1.2564	0.005708	-5.16584
6	103	0.6282	0.002703	-5.91331
3	98	0.3141	0.001286	-6.65622
1.5	48	0.157	0.000315	-8.06313
0.6	23	0.0628	0.0000604	-9.71513

TABLA 7.1 (continuación)

b. 4. - Solución de CMC al 1.5%; T = 18°C ; Horas de agitación: 40 ;

Fecha de elaboración: 7/11/74 ; Tiempo de lectura para cada velocidad: 35'.

Ω (rpm)	μ (cp)	Ω (rad/seg)	ζ (lb/ft ²)	ln ζ
60	270	6.282	0.0708614	-2.64703
30	291	3.141	0.0381864	-3.26527
12	308.5	1.2564	0.0161931	-4.12317
6	330.5	0.6282	0.008674	-4.74743
3	356	0.3141	0.0046716	-5.36625
1.5	372	0.157	0.0024408	-6.01544
0.6	390	0.0628	0.0010235	-6.88447

b. 5. - Solución de CMC al 2% ; T = 18°C ; Horas de agitación: 45 ;

Fecha de elaboración: 8/11/74 ; Tiempo de lectura para cada velocidad: 40'.

Ω (rpm)	μ (cp)	Ω (rad/seg)	ζ (lb/ft ²)	ln ζ
60	744	6.282	0.195263	-1.63341
30	802	3.141	0.105242	-2.25149
12	910	1.2564	0.047766	-3.04144
6	968	0.6282	0.025405	-3.6728
3	1009	0.3141	0.013241	-4.32447
1.5	1060	0.157	0.006955	-4.96831
0.6	1100	0.0628	0.002887	-5.84756

TABLA 7.1 (continuación)

b. 6. - Solución de CMC al 2.5% ; T = 19°C ; Horas de agitación: 50 ;

Fecha de elaboración: 10/11/74 ; Tiempo de lectura para cada velocidad: 60'.

Ω (rpm)	μ (cp)	Ω (rad/seg)	ζ (lb/ft ²)	ln ζ
60	1926	6.282	0.5054782	-0.68225
30	2224	3.141	0.2918441	-1.23154
12	2530	1.2564	0.1327996	-2.01891
6	2690	0.6282	0.0705989	-2.65074
3	2900	0.3141	0.0380552	-3.26872
1.5	3240	0.157	0.0212584	-3.851
0.6	3760	0.0628	0.0098681	-4.61845

TABLA 7. 2

Curvas de Flujo

a. 1. - Solución de Polyox al 1%

ζ_w	$\dot{\gamma}_w$
0.055902	11.3332
0.029526	7.2856
0.013122	2.7776
0.0074798	1.5384
0.0040024	0.6384
0.0020996	0.4516

a. 2. - Solución de Polyox al 2%

ζ_w	$\dot{\gamma}_w$
0.46978	10.7692
0.24014	8.0898
0.12702	4.0114
0.080834	1.7938
0.049603	1.062
0.029525	0.4166
0.013254	0.1666

TABLA 7. 2 (continuación)

a. 3. - Solución de Polyox al 2. 5%

ζ_w	η_w
0. 78472	11. 7142
0. 472409	11. 0
0. 28344	3. 8096
0. 19027	2. 093
0. 12204	1. 111
0. 075454	0. 4286
0. 034906	0. 1538

b. 1. - Solución de CMC al 0. 4%

ζ_w	η_w
0. 00433042	9. 7296
0. 00207335	6. 4286
0. 00078735	2. 243
0. 000354307	0. 9816
0. 000131225	0. 482
0. 000044288	0. 2444

TABLA 7.2 (continuación)

b. 2. - Solución de CMC al 0.67%

ζ_w	j_w
0.0106685	11.6666
0.0050653	5.634
0.0019158	2.2988
0.0007874	0.8988
0.0002887	0.4
0.00005643	0.1

b. 3. - Solución de CMC al 1%

ζ_w	j_w
0.015432	7.347
0.0057083	2.2378
0.0027032	1.2088
0.001286	0.6098
0.000315	0.094
0.00006036	0.06666

TABLA 7. 2 (continuación)

b. 4 . - Solución de CMC al 1. 5%

ζ_w	j_w
0. 0708614	13. 3332
0. 0381864	5. 797
0. 0161931	3. 0076
0. 0086796	2. 2068
0. 0046716	0. 6382
0. 0024408	0. 3352
0. 00102355	0. 1428

b. 5 . - Solución de CMC al 2%

ζ_w	j_w
0. 195262	10. 3704
0. 105242	7. 9246
0. 047765	2. 4508
0. 025405	1. 3924
0. 0132405	0. 7142
0. 0069549	0. 3124
0. 0028869	0. 1324

TABLA 7. 2 (continuación)

b. 6 . - Solución de CMC al 2. 5%

ζ_w	j_w
0. 505478	16. 2964
0. 291844	9. 756
0. 132799	3. 0
0. 0705989	1. 3114
0. 0380552	0. 7058
0. 0212584	0. 3296
0. 0098681	0. 2074

TABLA 7.3
Parámetros de los Modelos

A) Ley de la Potencia

solución	n	$K \frac{\text{lb}}{\text{seg}^n/\text{ft}^2}$
Polyox 1%	0.94675	0.005076
Polyox 2%	0.7888	0.05246
Polyox 2.5%	0.6572	0.120807
CMC 0.4%	1.17635	0.00028568
CMC 0.67%	1.09688	0.00076854
CMC 1%	1.07796	0.00212952
CMC 1.5%	0.92018	0.0062019
CMC 2%	0.92456	0.0191346
CMC 2.5%	0.8479	0.048402

B) funciones Polinomiales

B.1. - De segundo grado

solución	C_1	C_2	C_3
Polyox 1%	-0.48237	298.027	-1530.7299

TABLA 7.3 (continuación)

Polyox 2%	-0.98024	46.474	-45.231
Polyox 2.5%	-1.93380	29.723	-14.843
CMC 0.4%	-0.12799	3740.111	-335687.790
CMC 0.67%	0.06004	1128.325	-3859.796
CMC 1%	0.07105	352.563	7669.816
CMC 1.5%	0.27490	129.701	746.674
CMC 2%	-0.51871	91.318	-177.650
CMC 2.5%	-0.52266	31.537	4.146

B.2.- De tercer grado

solución	C_1	C_2	C_3	C_4
Polyox 1%	0.074785	144.638	6005.802	-89271.534
Polyox 2%	-0.216478	20.090	118.209	-236.733
Polyox 2.5%	0.895084	-17.332	143.051	-131.701
CMC 0.4%	0.165761	2087.139	838872.863	-187249852.000
CMC 0.67%	0.020940	1226.252	-32572.510	1868276.500
CMC 1%	-0.012550	525.906	-34582.188	2035139.870
CMC 1.5%	-0.27299	288.142	-5773.143	62331.389
CMC 2%	0.215483	14.635	974.328	-4008.623
CMC 2.5%	0.194597	5.217	150.707	-193.876

TABLA 7.4

RESULTADOS TEORICOS PARA LA ZONA LAMINAR EN
UNA LONGITUD DE TUBERIA DE 19.00 FT

Para evitar una repetición innecesaria de los valores de los gastos medidos experimentalmente (veáse el Block Data del segundo programa de computadora), se codificarán de la siguiente forma:

$$Q1 = 0.001839 \quad ; \quad Q2 = 0.002359 \quad ; \quad Q3 = 0.003834$$

$$Q4 = 0.00437 \quad ; \quad Q5 = 0.006282 \quad ; \quad Q6 = 0.007475$$

$$Q7 = 0.008927 \quad ; \quad Q8 = 0.009684 \quad ; \quad Q9 = 0.012047$$

$$Q10 = 0.01458 \quad ; \quad Q11 = 0.01853 \quad ; \quad Q12 = 0.02313$$

$$Q13 = 0.05286 \quad ; \quad Q14 = 0.06778 \quad ; \quad Q15 = 0.08953$$

Todos éstos valores de los gastos están expresados en ft^3 / seg .

Las unidades para la caída de presión se reportan en $\text{lb} / \text{ft seg}$, y aunque desde el punto de vista de ingeniería éstas no son prácticas, en realidad lo que sucedió fué que al momento de correr el programa de computadora no se incluyó el factor de conversión g_c , por lo que en realidad los datos reportados de ΔP son: $\Delta P \cdot g_c$; no se quiso corregir porque el programa consume mucho tiempo de máquina y mucho papel, y ésta pequeña omisión no nos pareció tan grave como para llevar a tal efecto dicha corrección. Si cualquier valor de la tabla para la caída de presión se divide por $32.17 \text{ lb ft} / \text{lb seg}^2$, el valor de ΔP quedará expresado en lb / ft^2 .

1) Modelo Newtoniano : Agua ; $\mu = 6.72 \times 10^{-4} \text{ lb/ft seg}$

$$f = 62.33 \text{ lb /ft}^3$$

TABLA 7.4 (continuación)

I. 1. - $D = 0.1722 \text{ ft (2")}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	1.087	1260.84	0.01269
Q2	1.394	1617.36	0.00989
Q3	2.265	2628.64	0.01241
Q4	2.582	2996.13	0.01201
Q5	3.712	4307.02	0.01105
Q6	4.417	5124.96	0.01065
Q7	5.275	6120.46	0.01029
Q8	5.730	6639.48	0.01014
Q9	7.119	8259.58	0.00976
Q10	8.616	9996.24	0.00947
Q11	10.950	12704.41	0.00916
Q12	13.668	15858.23	0.00892
Q13	31.240	36245.62	0.00828
Q14	38.873	45099.63	0.00817
Q15	52.907	61382.94	0.00806

I. 2. - $D = 0.115 \text{ ft (1 1/4")}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	5.470	1888.52	0.008472
Q2	7.016	2422.53	0.013169
Q3	11.404	3937.25	0.011843

TABLA 7.4 (continuación)

Q4	13.000	4487.68	0.01154
Q5	18.685	6451.17	0.01085
Q6	22.233	7676.30	0.01057
Q7	26.552	9167.40	0.01032
Q8	28.804	9944.78	0.01022
Q9	35.832	12371.42	0.00996
Q10	43.366	14972.63	0.00977
Q11	55.115	19028.99	0.00957
Q12	68.797	23752.87	0.00942
Q13	157.242	54289.64	0.00905
Q14	195.653	67551.40	0.00899
Q15	266.293	91940.97	0.00893

I. 3. - $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4")$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	43.050	3163.12	0.01343
Q2	55.220	4057.54	0.01288
Q3	89.750	6594.57	0.01205
Q4	102.300	7516.50	0.01187
Q5	147.050	10805.20	0.01146
Q6	174.976	12857.18	0.01131
Q7	208.965	15354.65	0.01118

TABLA 7.4 (continuación)

Q8	226.685	16656.71	0.01111
Q9	282.000	20721.13	0.01098
Q10	341.291	25077.95	0.01089
Q11	433.754	31872.05	0.01079
Q12	541.432	39784.16	0.01072
Q13	1237.500	90930.80	0.01054
Q14	1539.800	113143.19	0.01052
Q15	2095.737	153993.76	0.01049

I.4. - Perfil de Velocidades

<u>r / a</u>	<u>v / v promedio</u>
0.0	2.0
0.1	1.98
0.2	1.92
0.3	1.82
0.4	1.68
0.5	1.50
0.6	1.28
0.7	1.02
0.8	0.72
0.9	0.38
1.0	0.0

TABLA 7.4 (continuación)

II) Modelo no newtoniano : Solución de Polyox al 1.0%

densidad = 62.33 lb/ft³

II. A. - Ley de la Potencia

II. A. 1. - D = 0.1722 ft (2")

Q máximo (Ryan & Johnson) = 0.002793 ft³/seg

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	7.7625	176.51	0.09064
Q2	9.82628	229.45	0.06973
Q3	15.56255	382.70	0.041809
Q4	17.61505	439.24	0.036426
Q5	24.83744	643.75	0.024855
Q6	29.28186	773.12	0.020695
Q7	34.64077	932.07	0.017166
Q8	37.41574	1015.50	0.015755
Q9	46.0075	1278.07	0.012519
Q10	55.118	1562.60	0.010239
Q11	69.162	2011.45	0.0079545
Q12	85.3177	2540.60	0.0062977
Q13	186.6044	6068.15	0.0026367
Q14	229.501	7638.86	0.0020945
Q15	307.277	10568.97	0.0015138

TABLA 7.4 (continuación)

II. A. 2. - $D = 0.115 \text{ ft } (1 \frac{1}{4}'')$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.00179023 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	36.628	282.02	0.056733
Q2	46.366	366.60	0.043645
Q3	73.434	611.42	0.026168
Q4	83.118	701.77	0.022799
Q5	117.198	1028.50	0.015556
Q6	138.169	1235.21	0.012953
Q7	162.456	1489.16	0.010744
Q8	176.55	1622.46	0.009861
Q9	217.091	2041.96	0.007835
Q10	260.08	2496.54	0.006409
Q11	326.348	3213.67	0.004978
Q12	402.580	4059.11	0.0039417
Q13	880.513	9695.04	0.0016503
Q14	1082.925	12204.55	0.001311
Q15	1449.92	16885.96	0.0009475

T A B L A 7.4 (continuación)

II. A. 3.- $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4")$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.00101452 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	265.464	512.931	0.031193
Q2	336.042	666.752	0.023996
Q3	532.213	1112.042	0.014388
Q4	602.405	1276.370	0.012535
Q5	849.398	1870.626	0.008553
Q6	1001.390	2246.578	0.007122
Q7	1184.656	2708.453	0.005907
Q8	1279.555	2950.890	0.005422
Q9	1573.379	3713.872	0.004308
Q10	1884.945	4540.661	0.0035237
Q11	2365.222	5844.960	0.0027374
Q12	2917.721	7382.613	0.0021672
Q13	6381.557	17633.109	0.0009074
Q14	7848.550	22197.342	0.0007208
Q15	10508.359	30711.778	0.0005209

TABLA 7.4 (continuación)

II. A. 4. - Perfil de velocidades

r / a	$v / v \text{ promedio}$
0.0	1.9726
0.1	1.9553
0.2	1.9006
0.3	1.8067
0.4	1.6728
0.5	1.4983
0.6	1.2826
0.7	1.0252
0.8	0.7258
0.9	0.3842
1.0	0.0

II. B. - Polinomio de Segundo Grado

II. B. 1. - $D = 0.1722 \text{ ft (2")}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	6.810404	201.190	0.079525
Q2	8.60189	262.112	0.061042
Q3	14.12242	421.716	0.03794
Q4	16.33	473.806	0.03377

TABLA 7.4 (continuación)

Q5	25.583	624.966	0.025601
Q6	33.393	677.940	0.0236

De aquí en adelante para los otros gastos faltantes y los otros diámetros programados, el discriminante en la ecuación de segundo grado dib valores imaginarios, por lo que ni caso tiene anotarlos.

Inclusive, el perfil de velocidades fuè variando conforme el gasto lo iba haciendo, lo que no puede suceder; aquí se dan algunos valores de ésta irregularidad.

<u>r/a</u>	<u>v / v pro. (Q1)</u>	<u>v / v pro. (Q2)</u>	<u>v / v pro. (Q3)</u>
0.0	1.851	1.896	1.970
0.1	1.878	1.912	1.971
0.2	1.856	1.880	1.923
0.3	1.786	1.801	1.828
0.4	1.668	1.675	1.689
0.5	1.503	1.504	1.506
0.6	1.291	1.288	1.282
0.7	1.035	1.028	1.017
0.8	0.733	0.727	0.714
0.9	0.388	0.383	0.374
1.0	0.0	0.0	0.0

TABLA 7.4 (continuación)

II. C. - Polinomio de Tercer Grado

II. C. 1. - D = 0.1722 ft

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	43.746	31.32	0.51082
Q2	43.028	52.40	0.30534
Q3	40.672	146.43	0.1093
Q4	39.647	195.15	0.082
Q5	34.056	469.49	0.03408
Q6	no converge		
Q7	no converge		
Q8	no converge		
Q9	no converge		
Q10	no converge		
Q11	-31.8052	-4373.996	-0.003657
Q12	no converge		
Q13	no converge		
Q14	no converge		
Q15	-55.733	-58270.73	-0.0002746

II. C. 2. - D = 0.115 ft (1 1/4")

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	51.7304	199.68	0.080125
Q2	-35.781	-475.04	-0.03368

TABLA 7.4 (continuación)

Q3	no converge		
Q4	-43.966	-1326.7	-0.01206
Q5	no converge		
Q6	no converge		
Q7	no converge		
Q8	-58.0681	-4932.92	-0.003243
Q9	-62.765	-7062.73	-0.002265
Q10	no converge		
Q11	-73.2434	-14319.06	-0.0011174
Q12	-79.33	-20598.94	-0.0007767
Q13	no converge		
Q14	no converge		
Q15	-129.158	-189559.5	-0.0000844

II. C. 3 . - $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4")$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	-93.408	-1457.75	-0.01097
Q2	-102.05	-2195.6	-0.007287
Q3	no converge		
Q4	-127.3	-6040.3	-0.00265
Q5	no converge		
Q6	-154.47	-14563.84	-0.0010986
Q7	-164.68	-19483.3	-0.0008212

TABLA 7.4 (continuación)

Q8	-169.58	-22264.74	-0.0007186
Q9	no converge		
Q10	-196.5	-43555.5	-0.0003673
Q11	-214.17	-64547.64	-0.0002478
Q12	no converge		
Q13	-311.32	-361442.3	-0.00004426
Q14	-336.37	-517921.8	-0.0000309
Q15	no converge		

II. C. 4 . - Perfil de velocidades

Después de observar los datos presentados para el polinomio de tercer grado, es de suponerse que los perfiles de velocidad para éste modelo estarán todos diferentes y por lo tanto completamente mal, así que ni siquiera se hará notar la variación en los valores como se hizo para el polinomio de segundo grado.

TABLA 7.4 (continuación)

III) Modelo no newtoniano : Solución de Polyox al 2.0%

III. A. - Ley de la Potencia

III. A. 1. - $D = 0.1722 \text{ ft (2")}$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.0165333 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	67.8665	20.189	0.79247
Q2	82.598	27.296	0.58615
Q3	121.161	49.154	0.325503
Q4	134.337	57.596	0.277797
Q5	178.869	89.389	0.17899
Q6	205.167	110.341	0.145
Q7	236.00	136.807	0.11695
Q8	251.659	150.981	0.10597
Q9	298.963	196.682	0.081349
Q10	347.535	247.822	0.064562
Q11	419.890	331.314	0.048292
Q12	500.156	433.382	0.036918
Q13	960.096	1179.407	0.013566
Q14	1140.757	1536.808	0.010411
Q15	1454.805	2232.327	0.007167

T A B L A 7.4 (continuación)

III. A. 2. - $D = 0.115 \text{ ft } (1 \frac{1}{4}'')$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.00958795 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	264.467	39.059	0.409633
Q2	321.874	52.808	0.302983
Q3	472.150	95.094	0.168253
Q4	523.495	111.425	0.143594
Q5	697.033	172.932	0.092522
Q6	799.510	213.466	0.074953
Q7	919.693	264.667	0.060453
Q8	980.684	292.087	0.054778
Q9	1165.022	380.500	0.042049
Q10	1354.302	479.437	0.033372
Q11	1636.260	640.96	0.024962
Q12	1949.045	838.420	0.019083
Q13	3741.375	2281.677	0.007012
Q14	4445.390	2973.105	0.005381
Q15	5669.193	4318.654	0.003705

TABLA 7.4 (continuación)

III. A. 3. - $D = 0.06866\text{ft}$ ($3/4''$)Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.004782335\text{ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	1501.345	90.69	0.176414
Q2	1827.238	122.62	0.130484
Q3	2680.337	220.80	0.072461
Q4	2971.811	258.73	0.061841
Q5	3956.963	401.55	0.039846
Q6	4538.717	495.670	0.032280
Q7	5220.973	614.56	0.026035
Q8	5567.213	678.23	0.023591
Q9	6613.676	883.52	0.018109
Q10	7688.195	1113.252	0.014372
Q11	9288.832	1488.306	0.01075
Q12	11064.471	1946.808	0.008218
Q13	21239.290	5298.044	0.003020
Q14	25235.891	6903.539	0.0023176
Q15	32183.260	10027.896	0.0015955

TABLA 7.4 (continuación)

III. A. 4 . - Perfil de velocidades

r / a	v / v_{promedio}
0.0	1.882
0.1	1.872
0.2	1.833
0.3	1.7593
0.4	1.6463
0.5	1.4911
0.6	1.291
0.7	1.04376
0.8	0.74734
0.9	0.39996
1.0	0.0

TABLA 7.4 (continuación)

III. B. - Polinomio de Segundo Grado

III. B. 1. - $D = 0.1722 \text{ ft (2")}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	51.973	26.363	0.60689
Q2	64.354	35.035	0.45668
Q3	104.067	57.228	0.27958
Q4	120.886	64.004	0.24998
Q5	206.60	77.391	0.20674

De aquí en adelante se obtienen valores imaginarios (discriminante en la ecuación de segundo grado es negativo) para la caída de presión, utilizando los gastos y diámetros faltantes.

III. B. 2. - Perfil de velocidades

Sucede una cosa similar con la de la solución anterior; existe una variación de cada perfil con el gasto, cosa que no puede suceder. Por lo tanto no tiene objeto reportar valores que carecen de sentido.

III. C. - Polinomio de Tercer Grado

III. C. 1. - $D = 0.1722 \text{ ft (2")}$

TABLA 7.4 (continuación)

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	320.724	4.272	3.745
Q2	315.629	7.143	2.239
Q3	298.981	19.919	0.8032
Q4	291.785	26.517	0.6033
Q5	253.785	63.002	0.2539
Q6	no converge		
Q7	valores negativos		
Q8	no converge		
Q9	no converge		
Q10	no converge		
Q11	no converge		
Q12	no converge		
Q13	no converge		
Q14	no converge		
Q15	valores negativos		
III. C. 2. - $D = 0.115 \text{ ft } (1 \frac{1}{4}'')$			
Gasto	ΔP	Re	f
Q1	384.77	26.85	0.5959
Q2	no converge		
Q3	valores negativos		

TABLA 7.4 (continuación)

Q4	valores negativos
Q5	no converge
Q6	valores negativos
Q7	no converge
Q8	no converge
Q9	valores negativos
Q10	valores negativos
Q11	no converge
Q12	valores negativos
Q13	no converge
Q14	no converge
Q15	valores negativos

III. C. 3. - $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4")$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	valores negativos		
Q2	valores negativos		
Q3	valores negativos		
Q4	valores negativos		
Q5	valores negativos		
Q6	no converge		
Q7	valores negativos		

TABLA 7.4 (continuación)

Q8	valores negativos
Q9	valores negativos
Q10	no converge
Q11	no converge
Q12	valores negativos
Q13	valores negativos
Q14	valores negativos
Q15	no converge

III. C. 4. - Perfil de velocidades

Como consecuencia de los resultados anteriores, éste perfil no existe.

IV) Modelo no newtoniano : Solución de Polyox al 2.5%

densidad = 62.33 lb/ft³

IV. A. - Ley de la Potencia

IV. A. 1. - D = 0.1722 ft (2")

Q máximo (Ryan & Johnson) = 0.022983625 ft³/seg

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	135.661	10.100	1.5841
Q2	159.783	14.110	1.1338
Q3	219.861	27.088	0.59066
Q4	239.605	32.291	0.49548

TABLA 7.4 (continuación)

Q5	304.145	52.57	0.30435
Q6	340.964	66.40	0.24097
Q7	383.155	84.27	0.18987
Q8	404.209	94.00	0.17021
Q9	466.577	126.03	0.12695
Q10	528.921	162.84	0.09826
Q11	619.180	224.67	0.07121
Q12	716.317	302.60	0.05288
Q13	1233.214	918.20	0.01743
Q14	1423.698	1231.389	0.01299
Q15	1743.410	1862.79	0.00859

IV. A. 2. - $D = 0.115 \text{ ft } (1 \frac{1}{4} \text{ in})$

Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.012484465 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	450.667	22.92	0.69804
Q2	530.798	32.02	0.49964
Q3	730.377	61.47	0.26027
Q4	795.967	73.28	0.21833
Q5	1010.369	119.30	0.13411
Q6	1132.680	150.68	0.10619
Q7	1272.837	191.24	0.08366
Q8	1342.778	213.32	0.07500

T A B L A 7 . 4 (continua ción)

Q9	1549.966	286.00	0.055944
Q10	1757.072	369.54	0.043297
Q11	2056.910	509.88	0.031379
Q12	2379.597	686.72	0.023299
Q13	4096.725	2083.76	0.007678
Q14	4729.510	2794.50	0.005726
Q15	5791.590	4227.38	0.003784

IV. A. 3. - $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4")$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.005728077 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	2086.763	65.25	0.245204
Q2	2457.799	91.16	0.175512
Q3	3381.930	175.00	0.091428
Q4	3685.636	208.62	0.076695
Q5	4678.399	339.63	0.047111
Q6	5244.742	428.94	0.0373
Q7	5893.729	544.407	0.029389
Q8	6217.581	607.28	0.026347
Q9	7176.942	814.18	0.019652
Q10	8135.923	1051.99	0.015210
Q11	9524.289	1451.51	0.011023
Q12	11018.452	1954.94	0.008184

TABLA 7.4 (continuación)

Q13	18969.419	5932.00	0.0026972
Q14	21899.453	7955.31	0.0020112
Q15	26817.299	12034.41	0.0013295

IV. A. 4. - Perfil de velocidades

r / a	$v / v \text{ promedio}$
0.0	1.7931
0.1	1.7877
0.2	1.7622
0.3	1.7071
0.4	1.6152
0.5	1.4809
0.6	1.2986
0.7	1.0636
0.8	0.7716
0.9	0.4183
1.0	0.0

TABLA 7.4 (continuación)

IV. B. - Polinomio de Segundo Grado

IV. B. 1. - D = 0.1722 ft (2")

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	102.126	13.42	1.19253
Q2	121.415	18.57	0.86162
Q3	181.552	32.80	0.48774
Q4	205.982	37.56	0.42595
Q5	312.632	51.14	0.31284
Q6	416.510	54.35	0.29437

Para los otros gastos y diámetros sucede lo mismo que en los casos anteriores. Y por lo tanto tampoco existe un perfil de velocidades que pudiera reportarse.

IV. C. - Polinomio de tercer Grado

IV. C. 1. - D = 0.1722 ft (2")

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	485.728	2.82	5.6718
Q2	480.178	4.70	3.4075
Q3	462.520	12.88	1.2425
Q4	455.177	17.00	0.9413
Q5	421.602	37.92	0.4219
Q6	384.356	58.90	0.2716

TABLA 7.4 (continuación)

Q7	no converge
Q8	valores negativos
Q9	no converge
Q10	no converge
Q11	no converge
Q12	no converge
Q13	no converge
Q14	valores negativos
Q15	valores negativos

IV. C. 2. - $D = 0.115 \text{ ft } (1 \frac{1}{4}'')$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	634.871	16.27	0.9833

Para Q2, Q5, Q7, Q8, Q13 no hay convergencia; y para Q3, Q4, Q6, Q9, Q10, Q11, Q12, Q14 y Q15 los valores obtenidos son negativos.

IV. C. 3. - $D = 0.06866 \text{ ft } (\frac{3}{4}'')$

Para Q2, Q3, Q4, Q6, Q8, Q15 no existe convergencia.

Para Q1, Q5, Q7, Q9, Q10, Q11, Q12, Q13, Q14 se obtienen valores negativos.

IV. C. 4. - Perfil de velocidades

Por lo anterior tampoco puede existir.

TABLA 7.4 (continuación)

V.) Modelo no newtoniano : Solución de CMC al 0.4%

densidad = 62.33 lb/ft³

V. A. - Ley de la Potencia

V. A. 1. - D = 0.1722 ft (2")

Q máximo (Ryan & Johnson) = 0.00011636 ft³/seg

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	0.5554	2467.11	0.006485
Q2	0.7444	3028.75	0.005283
Q3	1.3180	4518.47	0.003541
Q4	1.5374	5032.67	0.003179
Q5	2.3561	6786.09	0.002358
Q6	2.8909	7830.98	0.002043
Q7	3.5622	9063.90	0.001765
Q8	3.9202	9692.38	0.001651
Q9	5.0682	11601.99	0.001379
Q10	6.3437	13576.74	0.001178
Q11	8.4105	16540.64	0.0009673
Q12	10.9171	19855.01	0.0008058
Q13	28.8680	39224.86	0.0004079
Q14	37.3313	46961.31	0.0003407
Q15	53.6484	60534.96	0.0002643

TABLA 7.4 (continuación)

V. A. 2. - $D = 0.115 \text{ ft } (1 \frac{1}{4} \text{''})$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.00009236 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	3.4616	2984.16	0.005362
Q2	4.6397	3663.51	0.004367
Q3	8.2150	5465.44	0.002927
Q4	9.5821	6087.41	0.002628
Q5	14.6850	8208.31	0.001949
Q6	18.0180	9472.20	0.001689
Q7	22.2021	10963.50	0.001459
Q8	24.4330	11723.70	0.001364
Q9	31.5881	14033.52	0.001140
Q10	39.5382	16422.13	0.0009743
Q11	52.4199	20007.20	0.0007997
Q12	68.0424	24016.19	0.0006662
Q13	179.9244	47445.54	0.0003372
Q14	232.6730	56803.40	0.0002817
Q15	334.3716	73221.77	0.0002185

TABLA 7.4 (continuación)

V. A. 3. - $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4")$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.000068772 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	35.789	3804.64	0.004205
Q2	47.970	4670.76	0.003425
Q3	84.936	6968.12	0.002296
Q4	99.070	7761.10	0.002061
Q5	151.829	10465.12	0.001529
Q6	186.288	12076.50	0.001325
Q7	229.548	13977.83	0.001145
Q8	252.614	14947.04	0.001070
Q9	326.590	17891.92	0.0008942
Q10	408.787	20937.27	0.0007642
Q11	541.971	25508.02	0.0006272
Q12	703.492	30619.25	0.0005225
Q13	1860.243	60490.32	0.0002645
Q14	2405.613	72421.03	0.0002209
Q15	3457.077	93353.53	0.0001714

TABLA 7.4 (continuación)

V. A. 4. - Perfil de Velocidades

r / a	v / v_{promedio}
0.0	2.08103
0.1	2.05164
0.2	1.9750
0.3	1.8567
0.4	1.6990
0.5	1.5038
0.6	1.2722
0.7	1.00532
0.8	0.70386
0.9	0.36856
1.0	0.0

TABLA 7.4 (continuación)

V. B. - Polinomio de Segundo Grado

V. B. 1. - $D = 0.1722 \text{ ft (2")}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	0.4919	2785.57	0.005744
Q2	0.6418	3512.90	0.004555
Q3	1.1290	5275.00	0.003033
Q4	1.3397	5775.42	0.002770
Q5	2.5825	6191.11	0.002584

De aquí en adelante sucede lo mismo que en las soluciones anteriores para este polinomio.

V. C. - Polinomio de Tercer Grado

V. C. 1. - $D = 0.1722 \text{ ft (2")}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	3.164	433.10	0.03694
Q2	3.1	727.08	0.022
Q3	2.887	2063.07	0.007755
Q4	2.787	2775.22	0.005765

Para los gastos Q9 y Q12 los valores son negativos y para los gastos restantes el proceso de convergencia no se llega a obtener.

Por lo tanto, también hay carencia de un perfil de velocidades, ya que también para los otros diámetros b no existe convergencia, ó no se pueden obtener valores positivos de las variables.

TABLA 7.4 (continuación)

VI) Modelo no newtoniano : Solución de CMC al 0.67%

densidad = 62.33 lb/ft³

VI. A. - Ley de la Potencia

VI. A. 1. - D = 0.1722 ft (2")

Q máximo (Ryan & Johnson) = 0.000416922 ft³/seg

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	1.375	996.20	0.01606
Q2	1.807	1247.43	0.01282
Q3	3.079	1934.21	0.008272
Q4	3.554	2176.84	0.00735
Q5	5.292	3021.15	0.005296
Q6	6.404	3534.84	0.004526
Q7	7.781	4149.50	0.003856
Q8	8.508	4466.01	0.003583
Q9	10.810	5439.47	0.002941
Q10	13.327	6462.60	0.002475
Q11	17.335	8024.84	0.001994
Q12	22.109	9804.07	0.001632
Q13	54.746	20683.60	0.0007736
Q14	69.577	25196.90	0.0006350
Q15	97.568	33285.21	0.0004807

TABLA 7.4 (continuación)

VI. A. 2. - $D = 0.115 \text{ ft } (1 \frac{1}{4} \text{''})$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.00030355 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	7.785	1326.81	0.01206
Q2	10.230	1661.41	0.009630
Q3	17.429	2576.12	0.006211
Q4	20.119	2899.28	0.005519
Q5	29.956	4023.80	0.003976
Q6	36.251	4707.96	0.003398
Q7	44.043	5526.60	0.002895
Q8	48.157	5948.16	0.002690
Q9	61.189	7244.69	0.002209
Q10	75.436	8607.33	0.001860
Q11	98.126	10688.07	0.001497
Q12	125.145	13057.80	0.001225
Q13	309.882	27547.90	0.0005808
Q14	393.831	33559.07	0.0004767
Q15	552.275	44331.68	0.0003609

TABLA 7.4

(continuación)

VI. A. 3. - $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4")$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.000202444 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	71.181	1912.93	0.008364
Q2	93.539	2395.34	0.006680
Q3	159.350	3714.12	0.004308
Q4	183.944	4180.03	0.003827
Q5	273.888	5801.30	0.002758
Q6	331.438	6787.70	0.002357
Q7	402.686	7967.96	0.002008
Q8	440.291	8575.75	0.001865
Q9	559.437	10445.01	0.001532
Q10	689.699	12409.60	0.001289
Q11	897.150	15409.50	0.001038
Q12	1144.182	18826.02	0.0008498
Q13	2833.203	39717.12	0.0004028
Q14	3600.735	48383.70	0.0003307
Q15	5049.360	63915.10	0.0002503

TABLA 7.4 (continuación)

VI. A. 4. - Perfil de velocidades

r / a	$v / v \text{ promedio}$
0.0	2.0462
0.1	2.0211
0.2	1.9518
0.3	1.8413
0.4	1.6912
0.5	1.5024
0.6	1.2756
0.7	1.0115
0.8	0.7106
0.9	0.3732
1.0	0.0

TABLA 7.4 (continuación)

VI. B. - Polinomio de Segundo Grado

Nuevamente existe la aparición de valores imaginarios para la caída de presión, por lo que no se reportan .

VI. C. - Polinomio de Tercer grado

VI. C. 1. - $D = 0,1722 \text{ ft } (2'')$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	1.387	987.51	0.0162
Q2	1.808	1246.84	0.01283
Q3	3.037	1960.66	0.00816
Q4	3.488	2218.00	0.007214
Q5	5.051	3165.27	0.005055
Q6	5.960	3800.55	0.004210
Q7	6.965	4635.53	0.003451
Q8	7.450	5099.88	0.003137
Q9	8.802	6680.06	0.002395
Q10	10.027	8589.00	0.001863
Q11	11.607	11984.90	0.001335
Q12	13.105	16539.76	0.0009674
Q13	19.103	59274.20	0.0002699
Q14	20.843	84111.50	0.0001902
Q15	23.443	138531.90	0.0001155

TABLA 7.4 (continuación)

VI. C. 2. - $D = 0.115 \text{ ft } (1 \frac{1}{4}'')$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	7.445	1387.42	0.01153
Q2	9.409	1806.50	0.008856
Q3	13.824	3247.80	0.004926
Q4	15.089	3865.64	0.004139
Q5	18.698	6446.54	0.002482
Q6	20.478	8334.16	0.001919
Q7	22.335	10898.20	0.001468
Q8	23.201	12345.90	0.001296
Q9	25.580	17329.27	0.0009233
Q10	27.733	23412.03	0.0006834
Q11	30.553	34325.91	0.0004661
Q12	33.292	49083.35	0.0003259
Q13	44.917	190050.23	0.00008418
Q14	48.446	272808.74	0.00005865
Q15	53.815	454954.20	0.00003517

VI. C. 3. - $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4'')$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	36.833	3696.77	0.004328
Q2	41.309	5423.92	0.002950
Q3	50.607	11694.83	0.001368

TABLA 7.4 (continuación)

Q4	53.270	14433.63	0.001108
Q5	61.087	26010.30	0.0006151
Q6	65.084	34565.86	0.0004629
Q7	69.354	46263.71	0.0003458
Q8	71.380	52897.30	0.0003024
Q9	77.043	75845.05	0.0002109
Q10	82.283	104016.94	0.0001538
Q11	89.288	154831.22	0.0001033
Q12	96.221	223861.12	0.00007147
Q13	126.619	888697.64	0.000018
Q14	136.056	1280477.84	0.0000125
Q15	150.531	2143937.37	0.000007463

VI. C. 4. - Perfil de velocidades

No se reportan datos debido a que el perfil varía con el gasto utilizado y esto no es posible, como podrá haberse deducido del modelo de la Ley de la Potencia y también del usado para el agua.

TABLA 7.4

(continuación)

VII) Modelo no newtoniano : Solución de CMC al 1.0%

densidad = 62.33 lb/ft³

VII. A. - Ley de la Potencia

VII. A. 1. - D = 0.1722 ft (2")

Q máximo (Ryan & Johnson) = 0.001279333 ft³/seg

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	3.736	366.70	0.04363
Q2	4.887	461.35	0.03468
Q3	8.249	721.95	0.02216
Q4	9.499	814.53	0.01964
Q5	14.047	1138.25	0.01406
Q6	16.943	1336.17	0.01197
Q7	20.516	1573.79	0.01016
Q8	22.397	1696.44	0.009431
Q9	28.340	2074.77	0.007711
Q10	34.814	2473.94	0.006467
Q11	45.080	3086.00	0.005185
Q12	57.252	3786.02	0.004226
Q13	139.567	8113.26	0.001972
Q14	176.644	9924.60	0.001612
Q15	246.270	13187.16	0.001213

TABLA 7.4 (continuación)

VII. A. 2. - $D = 0.115 \text{ ft } (1 \frac{1}{4} \text{''})$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.00091452 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	20.670	499.73	0.03202
Q2	27.035	628.71	0.02545
Q3	45.64	983.86	0.01626
Q4	52.549	1110.02	0.01441
Q5	77.708	1551.20	0.01031
Q6	93.727	1820.90	0.008787
Q7	113.493	2144.72	0.007460
Q8	123.901	2311.87	0.006920
Q9	156.781	2827.46	0.005659
Q10	192.600	3371.42	0.004746
Q11	249.384	4205.47	0.003805
Q12	316.721	5159.50	0.003101
Q13	772.085	11056.56	0.001447
Q14	977.198	13525.02	0.001183
Q15	1362.366	17971.14	0.0008903

T A B L A 7 . 4 (continuaçión)

VII. A. 3. - $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4 \text{ "})$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.00059577 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	183.536	741.90	0.02156
Q2	240.048	933.40	0.01714
Q3	405.198	1460.63	0.01095
Q4	466.581	1648.00	0.009709
Q5	689.972	2302.86	0.006948
Q6	832.208	2703.30	0.005919
Q7	1007.712	3184.03	0.005025
Q8	1100.123	3432.19	0.004661
Q9	1392.060	4197.61	0.003812
Q10	1710.007	5005.20	0.003196
Q11	2214.281	6243.40	0.002563
Q12	2812.164	7659.73	0.002089
Q13	6855.341	16414.46	0.0009748
Q14	8676.534	20079.10	0.0007968
Q15	12096.448	26679.76	0.0005997

TABLA 7.4 (continuación)

VII. A. 4. - Perfil de Velocidades

r / a	$v / v \text{ promedio}$
0.0	2.03752
0.1	2.01345
0.2	1.94596
0.3	1.83746
0.4	1.68918
0.5	1.50195
0.6	1.27641
0.7	1.01305
0.8	0.71229
0.9	0.37451
1.0	0.0

TABLA 7.4 (continuación)

VII. B. - Polinomio de Segundo Grado

VII. B. 1. - $D = 0.1722 \text{ ft } (2'')$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	3.875	353.53	0.04526
Q2	4.841	465.74	0.03435
Q3	7.327	812.84	0.01968
Q4	8.157	948.55	0.01686
Q5	10.880	1469.50	0.01088
Q6	12.430	1821.16	0.008785
Q7	14.197	2274.22	0.007035
Q8	15.073	2520.70	0.006347
Q9	17.646	3332.13	0.004802
Q10	20.181	4267.60	0.003749
Q11	23.785	5848.90	0.002735
Q12	27.576	7860.20	0.002035
Q13	46.490	24356.62	0.0006569
Q14	53.029	33059.30	0.0004839
Q15	63.607	51057.40	0.0003133

TABLA 7.4 (continuación)

VII. B. 2. - $D = 0.115 \text{ ft } (1 \frac{1}{4} \text{''})$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	16.09	641.97	0.02492
Q2	19.46	873.35	0.01832
Q3	27.72	1619.74	0.009878
Q4	30.38	1920.06	0.008333
Q5	38.88	3100.32	0.005160
Q6	43.60	3914.32	0.004087
Q7	48.90	4977.14	0.003215
Q8	51.51	5560.56	0.002877
Q9	59.09	7501.30	0.002133
Q10	66.48	9767.08	0.001638
Q11	76.86	13644.55	0.001173
Q12	87.69	18634.80	0.0008586
Q13	140.87	60596.64	0.0002640
Q14	159.09	83074.70	0.00019259
Q15	188.46	129911.70	0.0001231

TABLA 7.4 (continuación)

VII. B. 3. - $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4")$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	80.22	1697.40	0.009426
Q2	93.96	2384.56	0.006710
Q3	126.58	4675.60	0.003422
Q4	136.88	5617.30	0.002848
Q5	169.36	9381.50	0.001705
Q6	187.21	12017.12	0.001331
Q7	207.13	15490.50	0.001033
Q8	216.90	17409.10	0.0009190
Q9	245.14	23836.90	0.0006712
Q10	272.52	31406.24	0.0005094
Q11	310.89	44468.52	0.0003598
Q12	350.74	61413.53	0.0002605
Q13	545.43	206306.70	0.00007755
Q14	611.90	284714.56	0.0000562
Q15	718.93	448904.34	0.00003564

VII. B. 4. - Perfil de Velocidades

No se puede reportar por que este vá variando junto con la variación del gasto, cuestión que ya establecimos que no puede suceder.

TABLA 7.4 (continuación)

VII. C. - Polinomio de Tercer Grado

VII. C. 1. - $D = 0.1722 \text{ ft (2")}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	4.215	325.09	0.04922
Q2	5.340	422.17	0.0379
Q3	7.528	791.12	0.02022
Q4	8.100	955.14	0.01675
Q5	9.676	1652.45	0.009682
Q6	10.436	2169.26	0.007375
Q7	11.223	2876.74	0.005562
Q8	11.590	3278.25	0.004881
Q9	12.594	4668.66	0.003427
Q10	13.503	6378.12	0.002508
Q11	14.694	9467.16	0.001690
Q12	15.853	13672.70	0.001170
Q13	20.795	54451.33	0.0002938
Q14	22.302	78607.08	0.0002035
Q15	24.599	132019.70	0.0001212

TABLA 7.4 (continuación)

VII. C. 2. - $D = 0.115 \text{ ft } (1 \frac{1}{4} \text{ in})$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	14.385	718.05	0.02228
Q2	16.019	1061.07	0.01508
Q3	19.338	2321.80	0.006891
Q4	20.278	2876.55	0.005562
Q5	23.019	5236.41	0.003056
Q6	24.414	6990.40	0.002289
Q7	25.902	9397.30	0.001703
Q8	26.607	10765.60	0.001486
Q9	28.575	15512.84	0.001031
Q10	30.395	21362.00	0.000749
Q11	32.824	31950.74	0.0005
Q12	35.228	46386.74	0.000345
Q13	45.755	186569.42	0.00008576
Q14	49.022	269601.91	0.00005935
Q15	54.034	453107.80	0.00003531

TABLA 7.4

(continuación)

VII. C. 3. - D = 0.06866 ft (3/4")

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	42.919	3172.60	0.005043
Q2	46.581	4809.90	0.003326
Q3	54.485	10862.35	0.001472
Q4	56.810	13534.44	0.001182
Q5	63.749	24924.12	0.0006419
Q6	67.354	33400.83	0.000479
Q7	71.239	45039.30	0.0003552
Q8	73.093	51657.18	0.0003097
Q9	78.308	74619.88	0.0002144
Q10	83.168	102909.90	0.0001554
Q11	89.709	154105.30	0.0001038
Q12	96.222	223861.14	0.00007147
Q13	125.076	899662.53	0.00001784
Q14	134.099	1299165.90	0.00001232
Q15	147.977	2180941.95	0.000007336

VII. C. 4. - Perfil de Velocidades

No se reporta uno fijo e invariable porque sigue variando conforme lo hace el gasto. Pasa lo mismo que en las otras soluciones.

TABLA 7.4 (continuación)

VIII) Modelo no newtoniano : Solución de CMC al 1.5%

densidad = 62.33 lb/ft³

VIII. A. - Ley de la Potencia

VIII. A. 1. - D = 0.1722 ft (2")

Q máximo (Ryan & Johnson) = 0.0032695 ft³/seg

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	9.222	148.58	0.1077
Q2	11.596	194.42	0.08229
Q3	18.131	328.47	0.04871
Q4	20.451	378.32	0.04229
Q5	28.560	559.83	0.02857
Q6	33.515	675.50	0.02368
Q7	39.462	818.18	0.01955
Q8	42.532	893.34	0.01791
Q9	51.996	1130.87	0.01415
Q10	61.977	1389.65	0.01151
Q11	77.275	1800.26	0.008887
Q12	94.766	2287.30	0.006995
Q13	202.768	5584.42	0.002865
Q14	247.937	7070.85	0.002262
Q15	329.253	9863.53	0.001622

TABLA 7.4 (continuación)

VIII. A. 2. - $D = 0.115 \text{ ft (1 1/4")}$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.002056275 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	42.137	245.15	0.06526
Q2	52.987	320.78	0.04987
Q3	82.844	541.97	0.02952
Q4	93.444	624.22	0.02563
Q5	130.494	923.71	0.01732
Q6	153.136	1114.50	0.01435
Q7	180.309	1349.98	0.01185
Q8	194.332	1473.99	0.01085
Q9	237.575	1865.90	0.008575
Q10	283.180	2292.90	0.006978
Q11	353.078	2970.40	0.005386
Q12	432.996	3773.98	0.004239
Q13	926.466	9214.16	0.001736
Q14	1132.845	11666.74	0.001371
Q15	1504.386	16274.60	0.0009831

TABLA 7.4 (continuación)

VIII. A. 3. - $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4")$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.00113755 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	293.088	464.59	0.03444
Q2	368.563	607.92	0.02631
Q3	576.237	1027.08	0.01557
Q4	649.971	1182.96	0.01352
Q5	907.673	1750.53	0.009140
Q6	1065.161	2112.08	0.007575
Q7	1254.168	2558.33	0.006254
Q8	1351.710	2793.40	0.005727
Q9	1652.489	3536.076	0.004524
Q10	1969.708	4345.26	0.003682
Q11	2455.891	5629.17	0.002842
Q12	3011.780	7152.06	0.002237
Q13	6444.184	17461.75	0.0009163
Q14	7879.687	22109.63	0.0007236
Q15	10464.000	30841.97	0.0005187

TABLA 7.4 (continuación)

VIII. A. 4. - Perfil de Velocidades

r / a	v / v_{promedio}
0.0	1.95843
0.1	1.94239
0.2	1.89030
0.3	1.79965
0.4	1.66902
0.5	1.49739
0.6	1.28395
0.7	1.02804
0.8	0.72906
0.9	0.38653
1.0	0.0

T A B L A 7 . 4 (continuaci3n)

VIII. B. - Polinomio de Segundo Grado

VIII. B. 1. - $D = 0.1722 \text{ ft} (2'')$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	10.15	135.03	0.1184
Q2	12.99	173.61	0.09215
Q3	20.40	291.90	0.05481
Q4	22.90	337.80	0.04736
Q5	31.20	512.62	0.03121
Q6	35.95	629.78	0.02540
Q7	41.40	780.00	0.02051
Q8	44.10	861.50	0.01857
Q9	52.10	1128.62	0.01417
Q10	60.00	1435.14	0.01115
Q11	71.31	1950.87	0.008201
Q12	83.24	2603.90	0.006145
Q13	143.20	7908.25	0.002023
Q14	164.00	10689.78	0.001496
Q15	197.72	16425.40	0.0009741

TABLA 7.4 (continuación)

VIII. B. 2. - $D = 0.115 \text{ ft } (1 \frac{1}{4} \text{''})$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	46.09	224.14	0.07138
Q2	56.44	301.17	0.05312
Q3	82.05	547.20	0.02924
Q4	90.36	645.53	0.02478
Q5	117.04	1029.87	0.01553
Q6	131.92	1293.65	0.01237
Q7	148.70	1637.02	0.009773
Q8	156.95	1825.12	0.008766
Q9	180.98	2449.38	0.006532
Q10	204.43	3176.11	0.005037
Q11	237.47	4416.38	0.003623
Q12	271.97	6008.39	0.002663
Q13	441.82	19321.25	0.0008281
Q14	500.09	26428.64	0.0006054
Q15	594.06	41213.73	0.0003882

TABLA 7.4 (continuación)

VIII. B. 3. - $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4")$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	243.69	558.77	0.02863
Q2	287.20	780.12	0.02051
Q3	390.87	1514.15	0.01057
Q4	423.67	1814.82	0.008816
Q5	527.27	3013.44	0.005310
Q6	584.24	3850.67	0.004155
Q7	647.89	4952.38	0.003230
Q8	679.06	5560.34	0.002877
Q9	769.38	7594.83	0.002107
Q10	856.97	9987.37	0.001602
Q11	979.73	14110.70	0.001134
Q12	1107.30	19452.99	0.0008225
Q13	1730.81	65014.02	0.0002461
Q14	1943.73	89630.09	0.0001785
Q15	2286.64	141137.50	0.0001134

VIII. B. 4. - Perfil de Velocidades

Sucede lo mismo que en los casos anteriores.

TABLA 7.4 (continuación)

VIII. C. - Polinomio de Tercer Grado

VIII. C. 1. - $D = 0.1722 \text{ ft (2")}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	8.207	166.95	0.09583
Q2	11.357	198.52	0.08059
Q3	21.901	271.93	0.05883
Q4	25.042	308.97	0.05178
Q5	32.672	489.38	0.03269
Q6	35.911	630.39	0.02538
Q7	39.073	826.34	0.01936
Q8	40.492	938.33	0.01705
Q9	44.259	1328.55	0.01204
Q10	47.549	1811.33	0.008833
Q11	51.743	2688.54	0.005951
Q12	55.735	3889.02	0.004114
Q13	72.235	15675.78	0.001020
Q14	77.174	22716.42	0.0007043
Q15	84.660	38360.40	0.0004171

TABLA 7.4 (continuación)

VIII. C. 2. - $D = 0.115 \text{ ft } (1 \frac{1}{4}'')$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	48.46	213.15	0.07506
Q2	55.37	306.96	0.05212
Q3	68.02	660.06	0.02424
Q4	71.41	816.88	0.01959
Q5	80.99	1488.25	0.01075
Q6	85.76	1990.04	0.00804
Q7	90.79	2681.17	0.005967
Q8	93.15	3075.10	0.005203
Q9	99.70	4446.00	0.003599
Q10	105.72	6141.82	0.002605
Q11	113.70	9224.43	0.001734
Q12	121.54	13444.75	0.001190
Q13	155.63	54851.18	0.0002917
Q14	166.16	79543.02	0.0002011
Q15	182.27	134321.74	0.0001191

T A B L A 7.4 (continuación)

VIII. C. 3. - $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4'')$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	150.49	904.79	0.01768
Q2	162.75	1376.72	0.01162
Q3	188.82	3134.50	0.005104
Q4	196.42	3914.58	0.004087
Q5	219.00	7255.16	0.002205
Q6	230.69	9752.17	0.001641
Q7	243.25	13190.39	0.001213
Q8	249.24	15149.33	0.001056
Q9	266.06	21962.69	0.0007285
Q10	281.71	30381.92	0.0005266
Q11	302.74	45664.67	0.0003504
Q12	323.66	66551.91	0.0002404
Q13	416.17	270383.70	0.00005917
Q14	445.07	391439.23	0.00004087
Q15	489.49	659314.27	0.00002427

VIII. C. 4. - Perfil de Velocidades

Sucede lo mismo que en los casos anteriores.

T A B L A 7. 4 (continuación)

IX) Modelo no newtoniano : Solución de CMC a 1 2.0%

densidad = 62.33 lb/ft³

IX. A. - Ley de la Potencia

IX. A. 1. - D = 0.1722 ft (2")

Q máximo (Ryan & Johnson) = 0.0093704 ft³/seg

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	28.58	47.94	0.3337
Q2	35.98	62.66	0.2554
Q3	56.38	105.63	0.1515
Q4	63.63	121.60	0.1316
Q5	89.00	179.65	0.08906
Q6	104.52	216.60	0.07387
Q7	123.17	262.14	0.06104
Q8	132.80	286.12	0.05592
Q9	162.50	361.85	0.04422
Q10	193.86	444.28	0.03601
Q11	241.96	574.96	0.02783
Q12	297.01	729.80	0.02192
Q13	637.82	1775.34	0.009012
Q14	780.65	2245.74	0.007125
Q15	1038.08	3128.47	0.005114

TABLA 7.4 (continuación)

IX. A. 2. - $D = 0.115 \text{ ft (1 1/4")}$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.00591125 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	131.30	78.67	0.20337
Q2	165.30	102.83	0.1556
Q3	258.98	173.40	0.09229
Q4	292.29	199.60	0.08017
Q5	408.83	294.84	0.05426
Q6	480.13	355.50	0.04501
Q7	565.76	430.24	0.03719
Q8	609.98	469.60	0.03407
Q9	746.43	593.90	0.02694
Q10	890.46	729.18	0.02194
Q11	1111.42	943.64	0.01696
Q12	1364.32	1197.76	0.01336
Q13	2929.78	2913.74	0.005491
Q14	3585.85	3685.77	0.004341
Q15	4768.34	5134.55	0.003116

T A B L A 7.4 (continuación)

IX. A. 3. - $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4")$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.00328293 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	919.50	148.08	0.1080
Q2	1157.56	193.56	0.08266
Q3	1813.66	326.33	0.04903
Q4	2046.91	375.64	0.04259
Q5	2863.02	554.98	0.02883
Q6	3362.34	669.09	0.02391
Q7	3962.05	809.83	0.01975
Q8	4271.72	883.91	0.01810
Q9	5227.26	1117.86	0.01431
Q10	6235.92	1372.52	0.01165
Q11	7783.30	1776.19	0.00901
Q12	9554.32	2254.52	0.007097
Q13	20517.25	5484.50	0.002917
Q14	25111.71	6937.68	0.002306
Q15	33392.74	9664.69	0.001655

IX. A. 4. - Perfil de Velocidades

r / a	$v / v \text{ promedio}$
0.0	1.9608
0.1	1.9445
0.2	1.8920
0.3	1.8008
0.4	1.6697
0.5	1.4976
0.6	1.2837
0.7	1.0276
0.8	0.7285
0.9	0.38615
1.0	0.0

IX. B. - Polinomio de Segundo Grado

No se reportan datos debido a la aparición de valores imaginarios de la caída de presión cuándo se aplica éste modelo a la solución.

IX. C. - Polinomio de Tercer Grado

No se reportan datos debido a que si bién el modelo b no converge cuándo se le aplica el método de Newton Raphson, ó los valores que se obtienen cuando converge son negativos.

X) Modelo no newtoniano : Solución de CMC al 2.5%

densidad = 62.33 lb/ft³

X. A. - Ley de la Potencia

X. A. 1. - D = 0.1722 ft (2")

Q máximo (Ryan & Johnson) = 0.0179247 ft³/seg

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	66.68	20.55	0.7786
Q2	82.35	27.38	0.5844
Q3	124.31	47.90	0.3339
Q4	138.90	55.70	0.2872
Q5	188.95	84.62	0.1890

TABLA 7.4

(continuación)

Q6	218.96	103.38	0.1547
Q7	254.53	126.85	0.1261
Q8	272.72	139.32	0.1148
Q9	328.19	179.17	0.0893
Q10	385.83	223.23	0.07167
Q11	472.80	294.24	0.05438
Q12	570.60	379.90	0.04212
Q13	1150.08	984.60	0.01625
Q14	1384.24	1266.50	0.01263
Q15	1797.72	1806.50	0.008857

X. A. 2. - $D = 0.115 \text{ ft } (1 \frac{1}{4}'')$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.0107563 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	279.10	37.01	0.4323
Q2	344.71	49.31	0.3245
Q3	520.40	86.28	0.1854
Q4	581.42	100.32	0.1595
Q5	790.93	152.40	0.1050
Q6	916.56	186.20	0.08593
Q7	1065.44	228.46	0.07003
Q8	1141.57	250.92	0.06376
Q9	1373.74	322.70	0.04958

TABLA 7.4

(continuación)

Q10	1615.03	402.04	0.0398
Q11	1979.07	529.93	0.0302
Q12	2388.45	684.20	0.0234
Q13	4814.10	1773.25	0.009023
Q14	5794.24	2281.00	0.007015
Q15	7525.05	3253.60	0.004918

X. A. 3. - $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4")$ Q máximo (Ryan & Johnson) = $0.0056044 \text{ ft}^3/\text{seg}$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	1735.94	78.44	0.20398
Q2	2144.04	104.50	0.1531
Q3	3236.50	182.86	0.08749
Q4	3616.28	212.62	0.07525
Q5	4919.34	322.99	0.04954
Q6	5700.80	394.63	0.04054
Q7	6626.80	484.20	0.03304
Q8	7100.30	531.80	0.03009
Q9	8544.35	683.9	0.02339
Q10	10045.05	852.05	0.01877
Q11	12309.34	1123.10	0.01425
Q12	14855.54	1450.00	0.01103
Q13	29942.50	3758.10	0.004257

T A B L A 7 . 4

(continuación)

Q14	36038.70	4834.16	0.00331
Q15	46804.00	6895.40	0.00232

X. A. 4. - Perfil de Velocidades

<u>r / a</u>	<u>v / v promedio</u>
0.0	1.91769
0.1	1.905
0.2	1.86022
0.3	1.77862
0.4	1.65737
0.5	1.49432
0.6	1.28777
0.7	1.03626
0.8	0.73852
0.9	0.39344
1.0	0.0

TABLA 7.4 (continuación)

X. B. - Polinomio de Segundo Grado

X. B. 1. - $D = 0.1722 \text{ ft } (2'')$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	60.17	22.77	0.70255
Q2	74.22	30.38	0.52666
Q3	113.60	52.43	0.3051
Q4	127.72	60.58	0.2641
Q5	177.42	90.12	0.1775
Q6	207.88	108.90	0.1469
Q7	244.43	132.10	0.1211
Q8	263.26	144.33	0.11086
Q9	321.10	183.12	0.08737
Q10	381.60	225.70	0.0709
Q11	473.10	294.05	0.05441
Q12	575.71	376.50	0.04250
Q13	1162.03	974.5	0.01642
Q14	1386.06	1264.82	0.01265
Q15	1764.30	1840.73	0.008692

TABLA 7.4 (continuación)

X. B. 2. - $D = 0.115 \text{ ft } (1 \frac{1}{4}'')$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	261.80	39.46	0.4055
Q2	328.50	51.74	0.3092
Q3	511.12	87.84	0.1821
Q4	575.26	101.40	0.1578
Q5	795.55	151.51	0.1056
Q6	926.96	184.11	0.08690
Q7	1081.40	225.10	0.07108
Q8	1159.71	247.00	0.06477
Q9	1395.50	317.66	0.05036
Q10	1635.31	397.05	0.0403
Q11	1986.98	527.82	0.03031
Q12	2368.30	689.99	0.02318
Q13	4380.57	1948.74	0.00821
Q14	5103.00	2590.01	0.006177
Q15	6288.00	3893.65	0.004109

TABLA 7.4 (continuación)

X. B. 3. - $D = 0.06866 \text{ ft } (3/4")$

Gasto	ΔP	Re	f
Q1	1761.05	77.32	0.2069
Q2	2179.00	102.83	0.1556
Q3	3252.54	181.90	0.08795
Q4	3611.86	212.88	0.07516
Q5	4786.50	331.95	0.0482
Q6	5454.36	412.46	0.03879
Q7	6215.00	516.30	0.031
Q8	6592.12	572.78	0.02793
Q9	7699.10	758.96	0.02108
Q10	8789.20	973.80	0.01643
Q11	10337.86	1337.30	0.01196
Q12	11966.80	1800.00	0.00888
Q13	20086.00	5602.24	0.002856
Q14	22892.10	7610.40	0.002102
Q15	27429.82	11765.71	0.00136

X. B. 4. - Perfil de Velocidades

Sucede lo mismo que en los casos anteriores; sigue variando conforme varía el gasto.

TABLA 7.4 (continuación)

X. C. - Polinomio de Tercer Grado

No se reportan resultados teóricos, ya que vuelve a suceder lo que en los casos anteriores; ó no converge, ó cuándo lo hace proporciona valores negativos de nuestras variables.

TABLA 7.5

RESULTADOS TEORICOS Y EXPERIMENTALES EN LA
ZONA LAMINAR PARA UNA TUBERIA DE 19.00 FT
DE LONGITUD Y 0.1722 FT DE DIAMETRO (2")

Los gastos siguen codificados como en la tabla 7.4.

Los valores de la caída de presión están reportados en lb / ft^2 .

Y aún a pesar de seguir el criterio de Ryan & Johnson, se reportan valores de la caída de presión hasta números de Reynolds cercano al 2100.

I) Solución al 0.67% de CMC

Gasto	ΔP teórico	ΔP experimental
Q1	0.04274	0.03826
Q2	0.05617	0.04975
Q3	0.09571	0.0831
Q4	0.11047	0.0954

II) Solución al 2.5% de CMC

Gasto	ΔP teórico	ΔP experimental
Q1	2.07274	1.51
Q2	2.560	1.90
Q3	3.864	2.84
Q4	4.318	3.18

TABLA 7.5

(continuación)

Q5	5.8734	4.32
Q6	6.80	5.30
Q7	7.912	6.2
Q8	8.4775	6.8
Q9	10.2017	7.63
Q10	11.9934	9.00
Q11	14.6969	11.20
Q12	17.7370	13.50
Q13	35.750	27.80
Q14	43.029	33.60
Q15	55.882	44.20

TABLA 7.6

RESULTADOS TEORICOS Y EXPERIMENTALES EN LA ZONA
TURBULENTA PARA UNA TUBERIA DE 19.0 FT DE LON -
GITUD Y 0.1722 FT DE DIAMETRO (2")

Los gastos están codificados como se indica en este capítulo; y los va-
lores de la caída de presión se expresan en $\frac{\text{lb}}{\text{ft}^2}$.

I) Solución al 0.67% de CMC

Gasto	ΔP teórica	ΔP experimental
Q16	9.143	9.30
Q17	15.07	15.40
Q18	24.80	26.60
Q19	30.07	33.10
Q20	36.65	40.80

II) Solución al 2.5% de CMC

Gasto	ΔP teórica	ΔP experimental
Q16	27.43	21.00
Q17	36.53	28.00
Q18	46.76	35.40
Q19	50.96	39.00
Q20	55.61	44.20

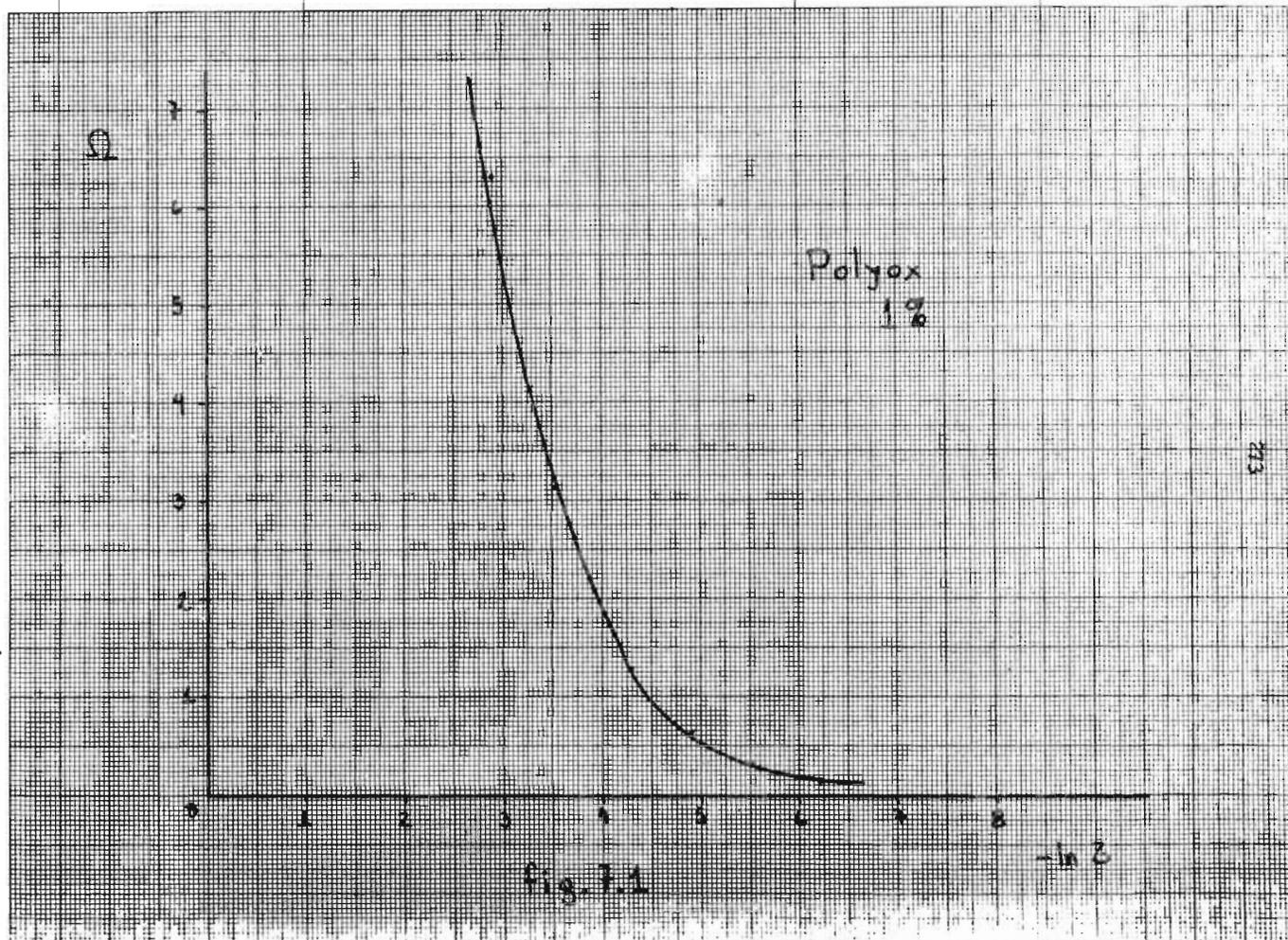
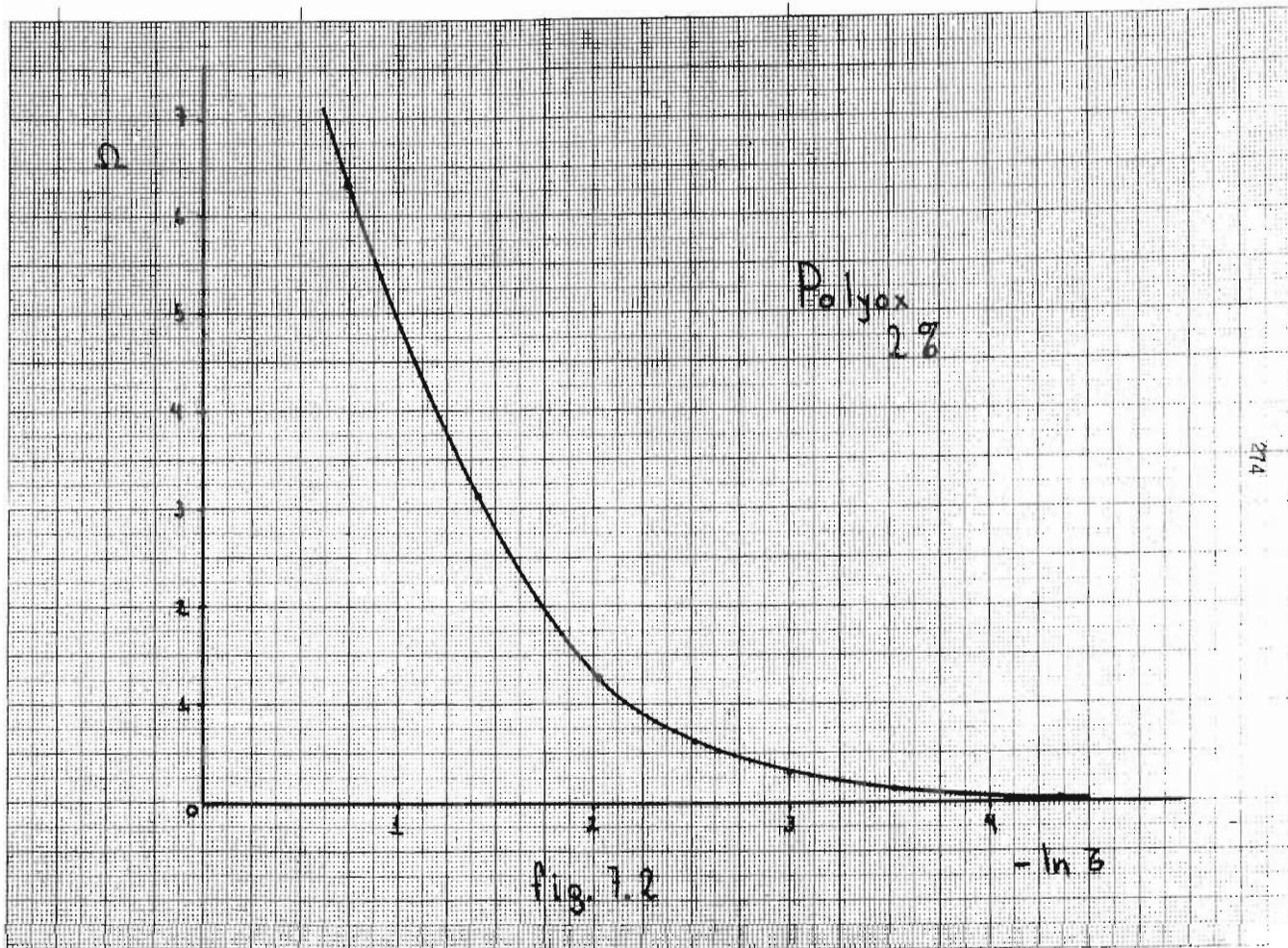
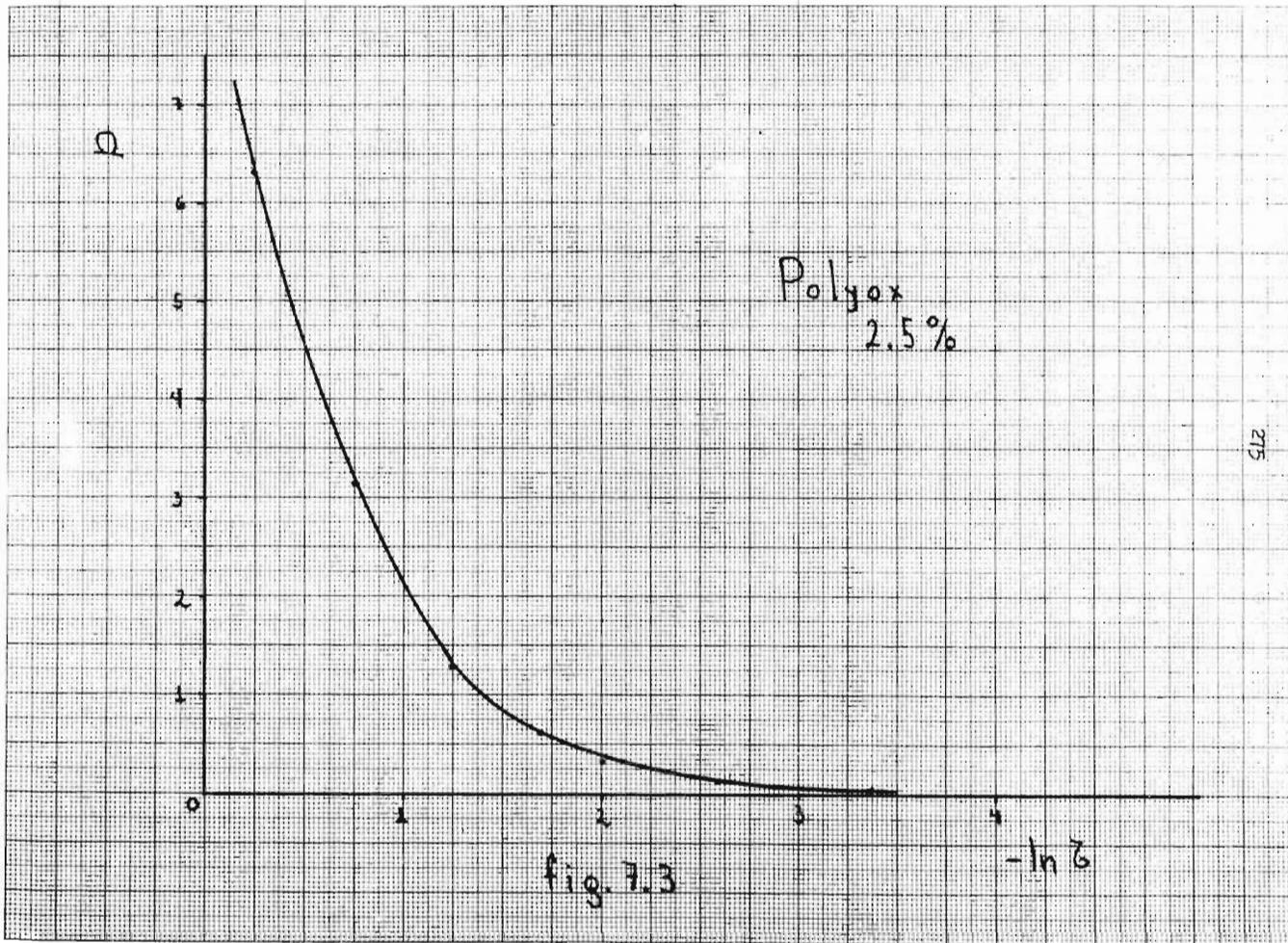
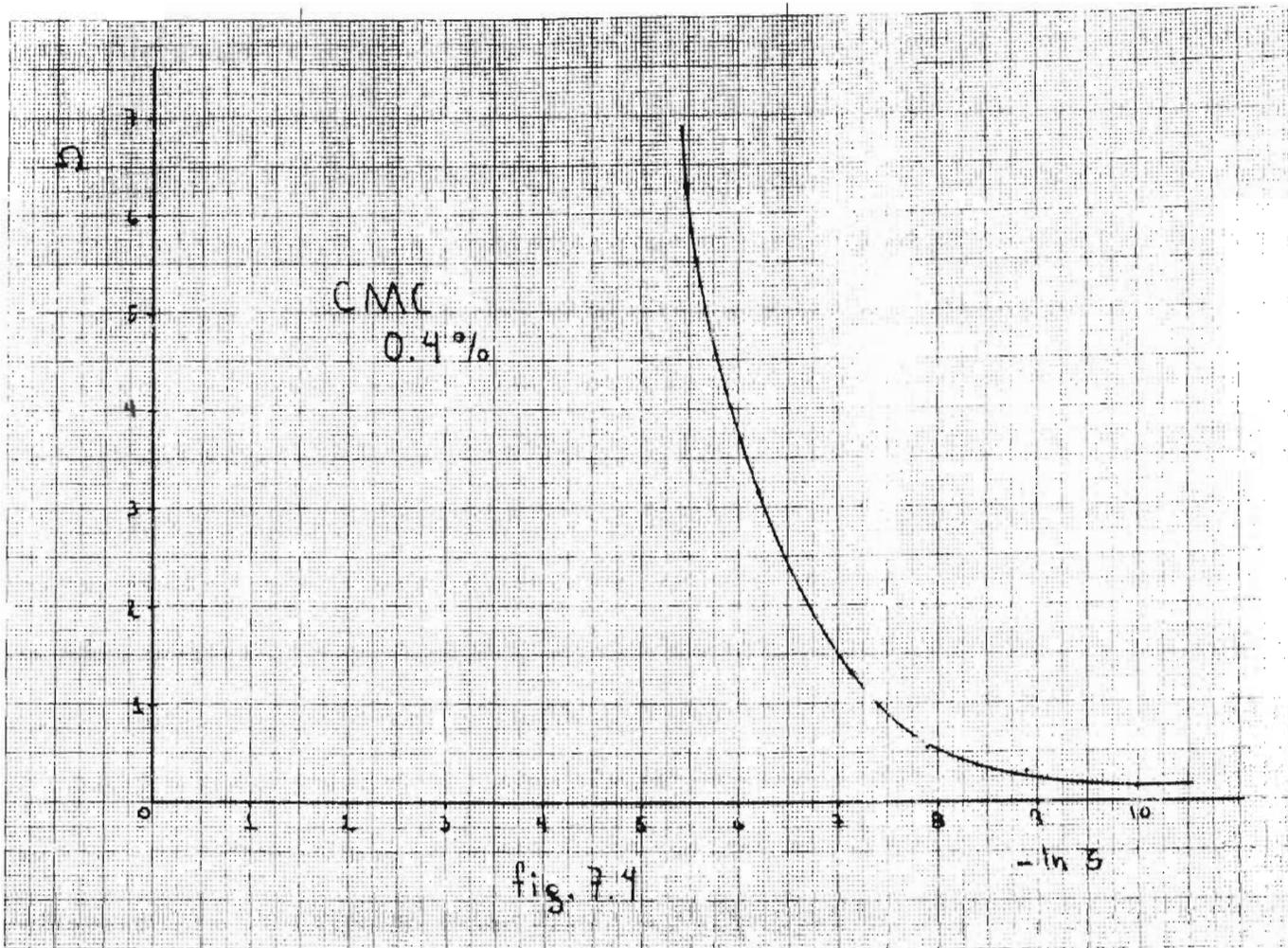
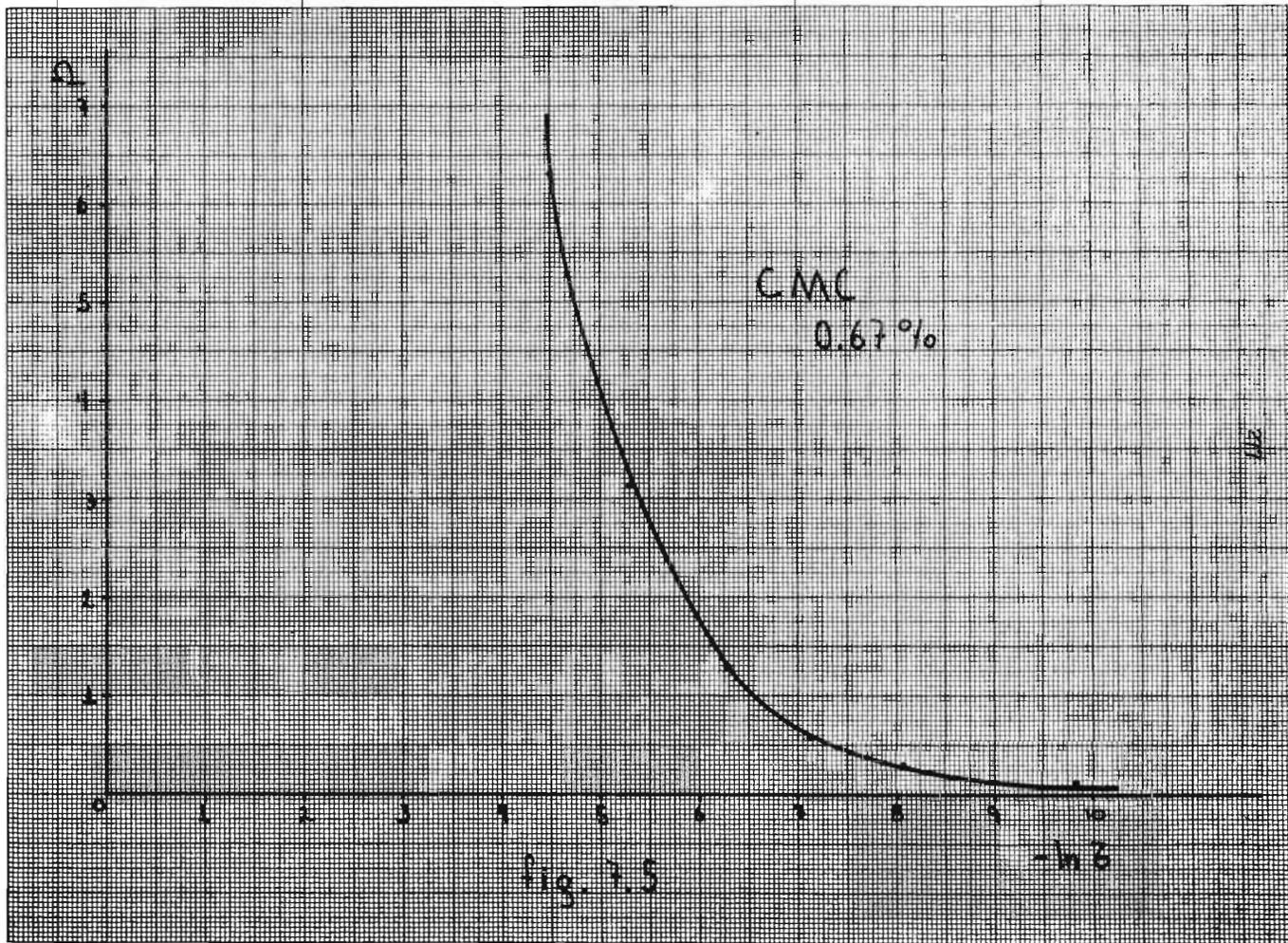


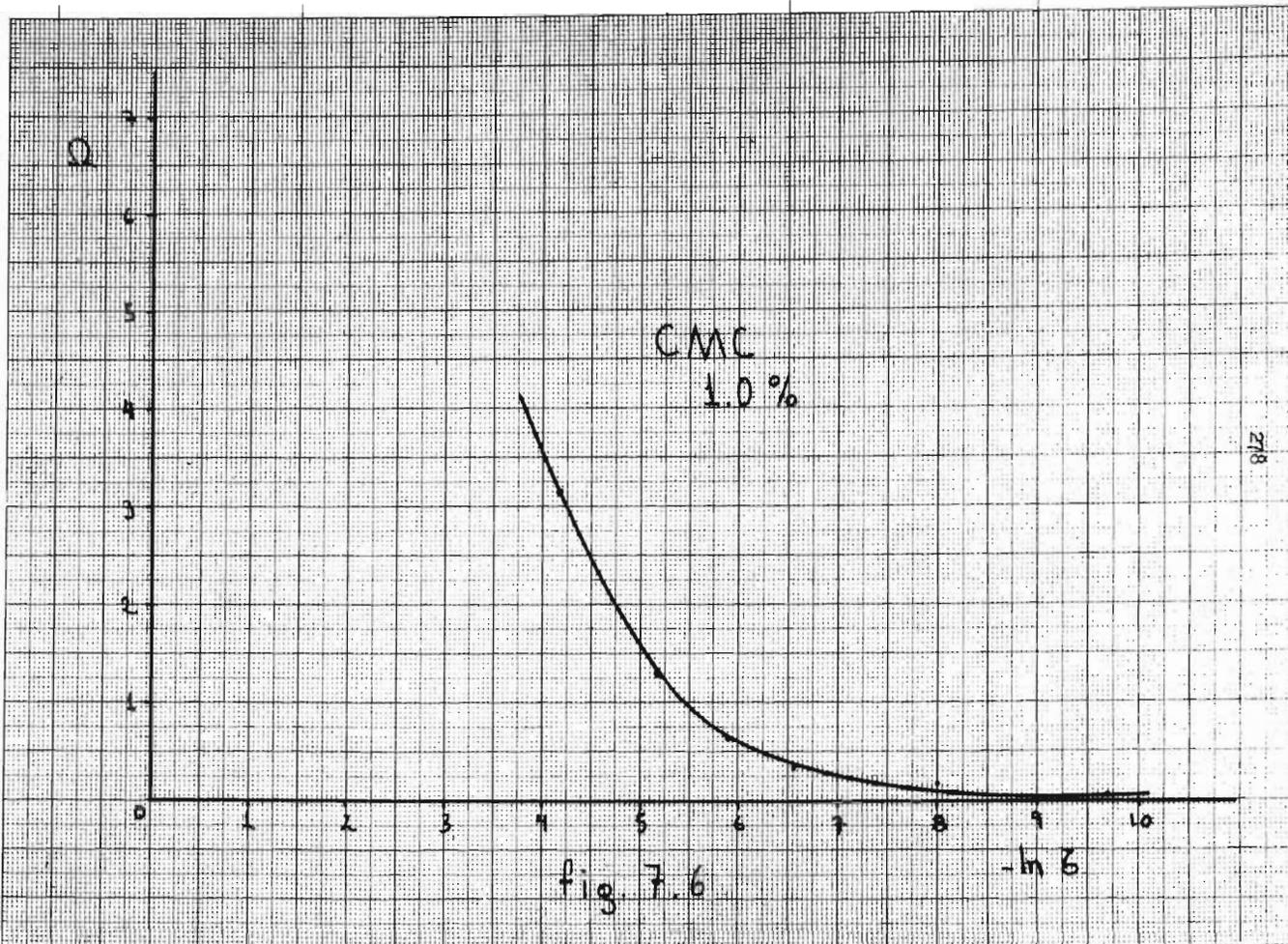
Fig. 7.1

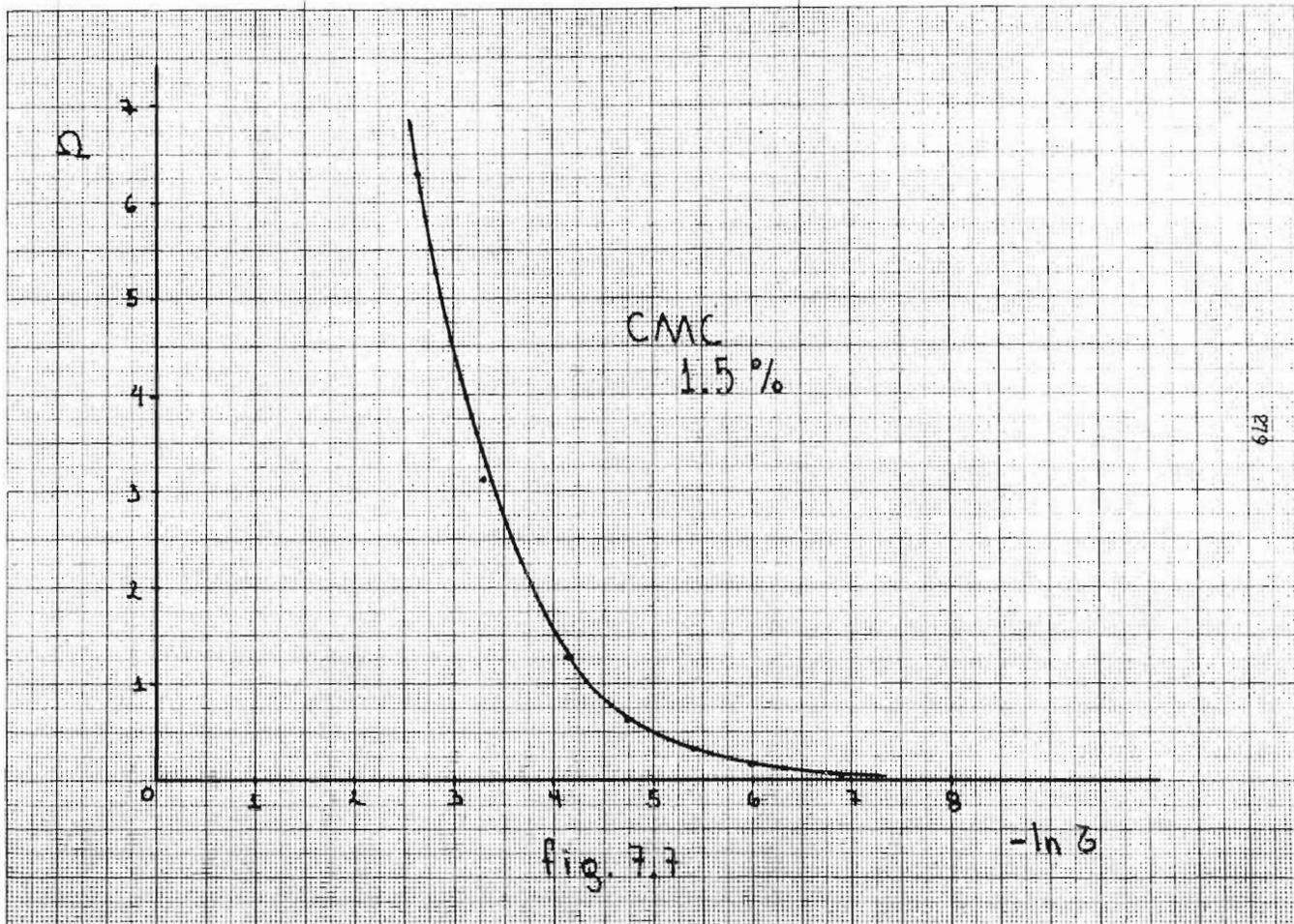


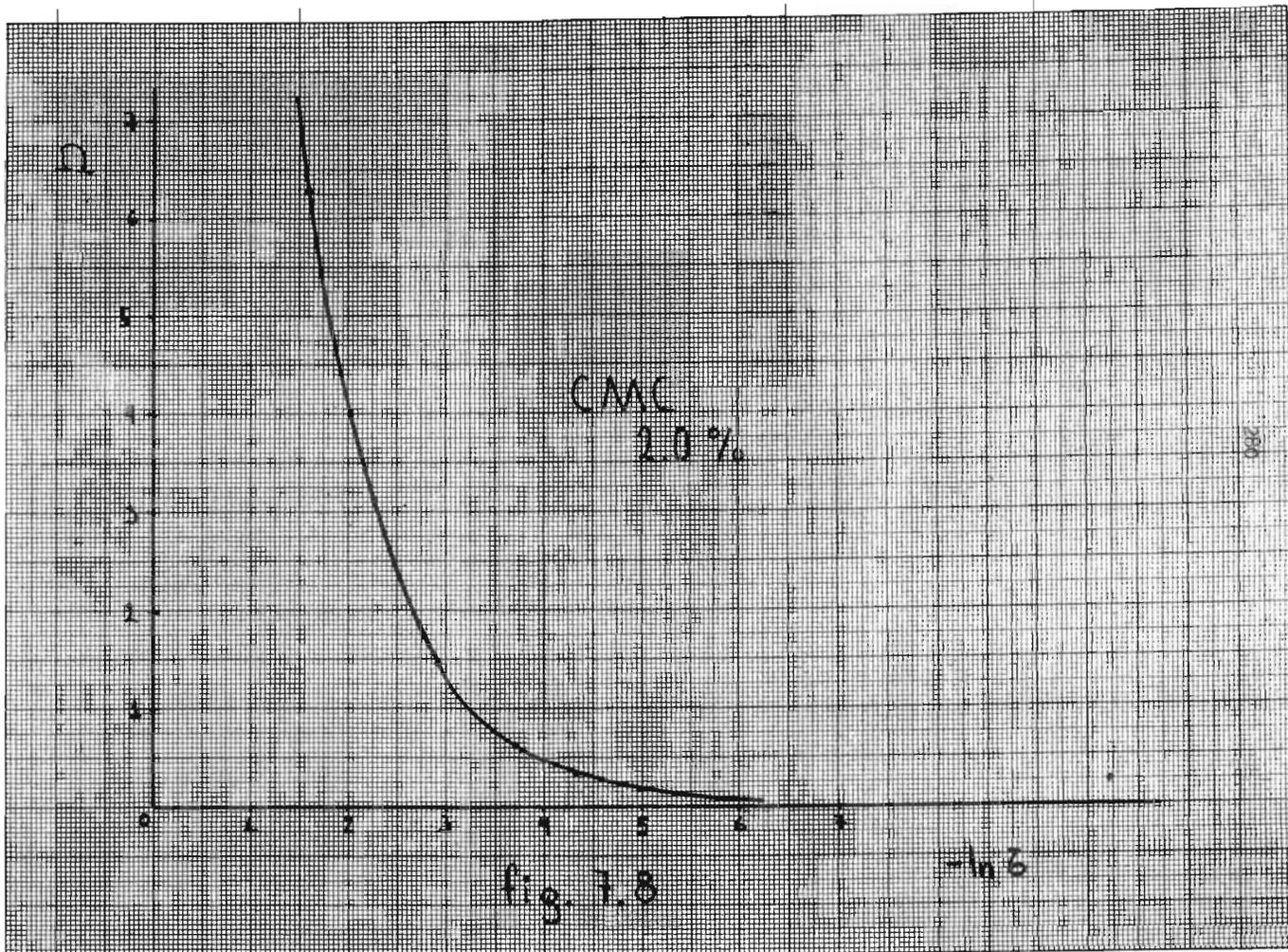


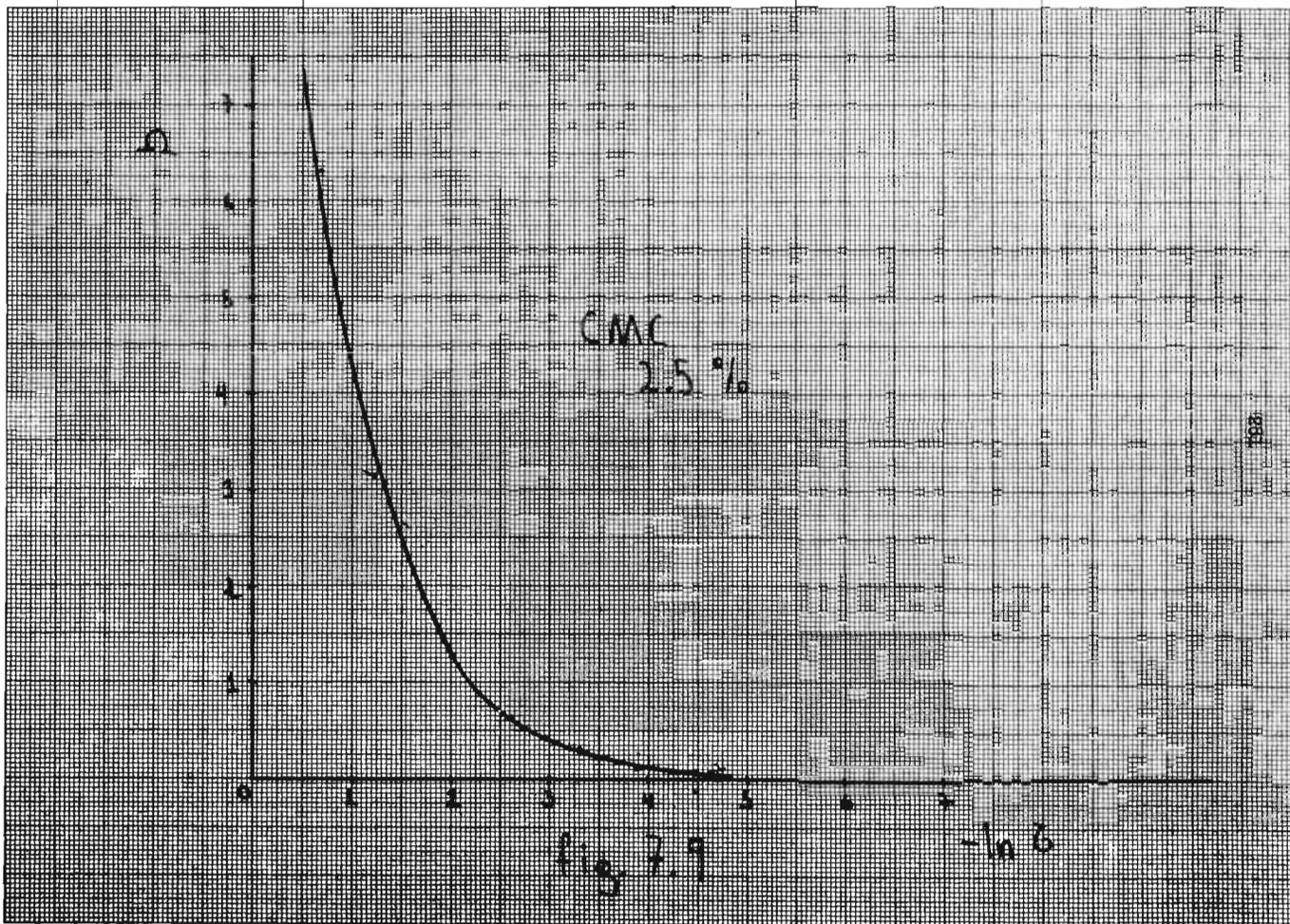


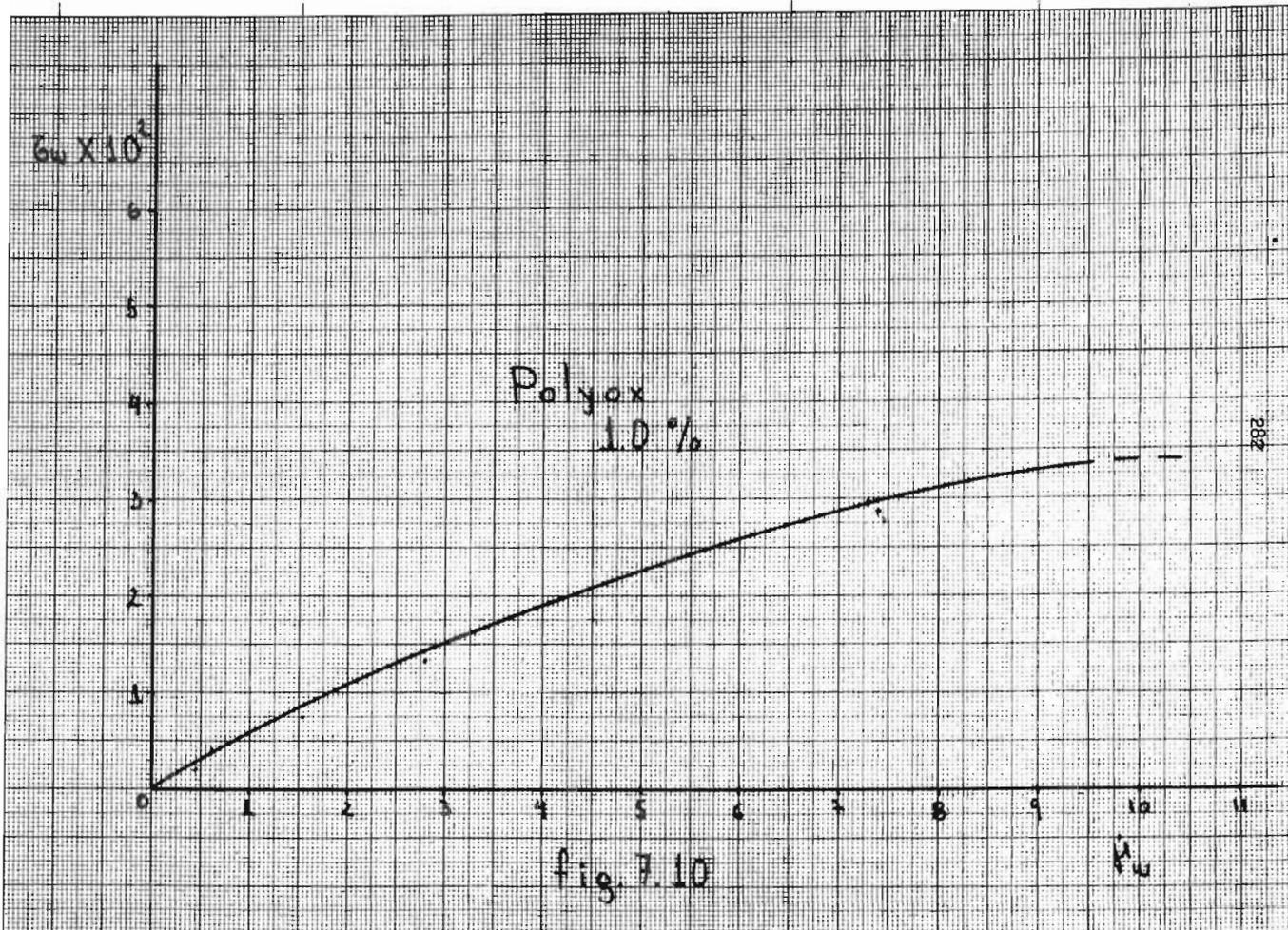












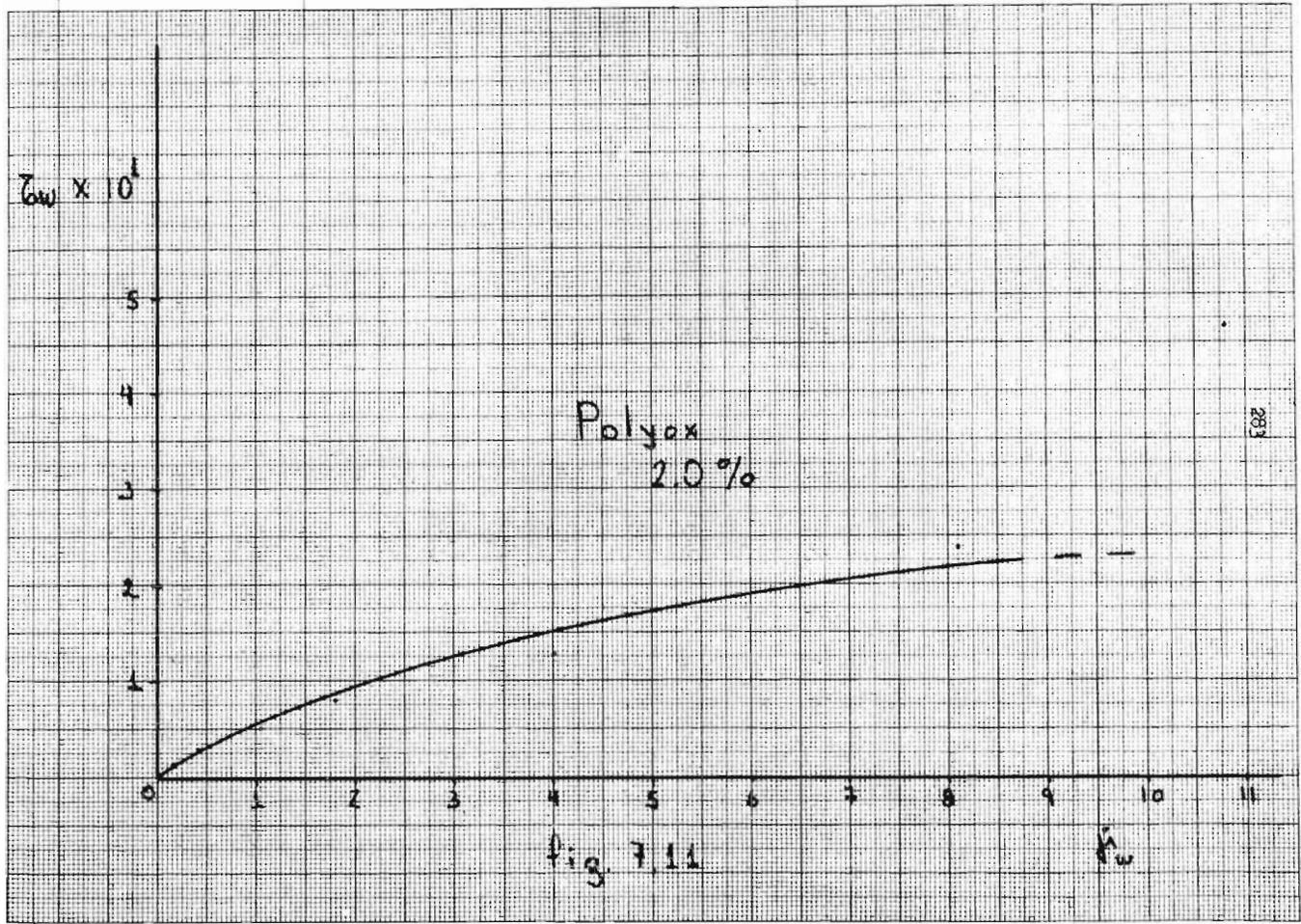


Fig. 7.11

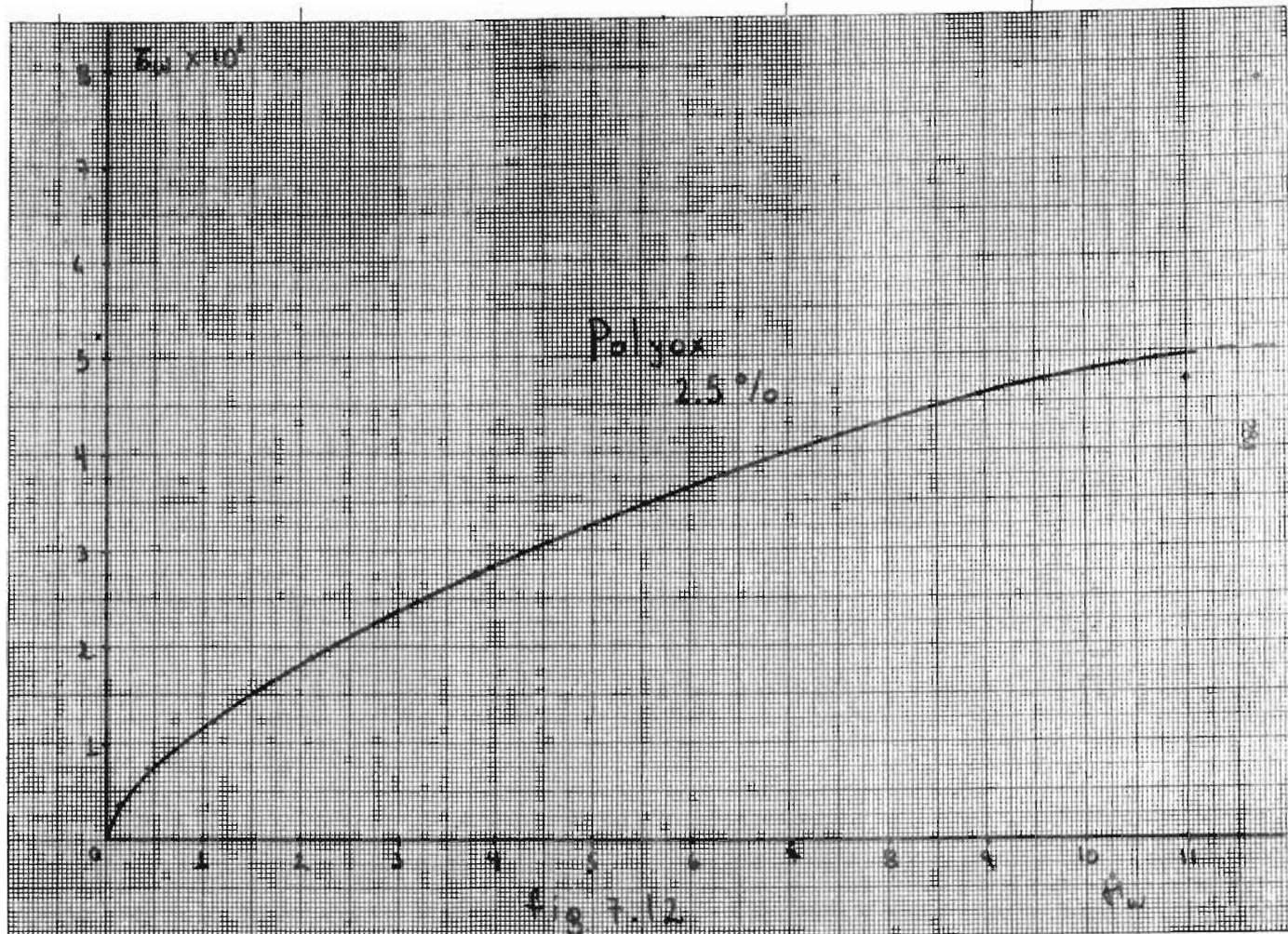


Fig 7.12

PL

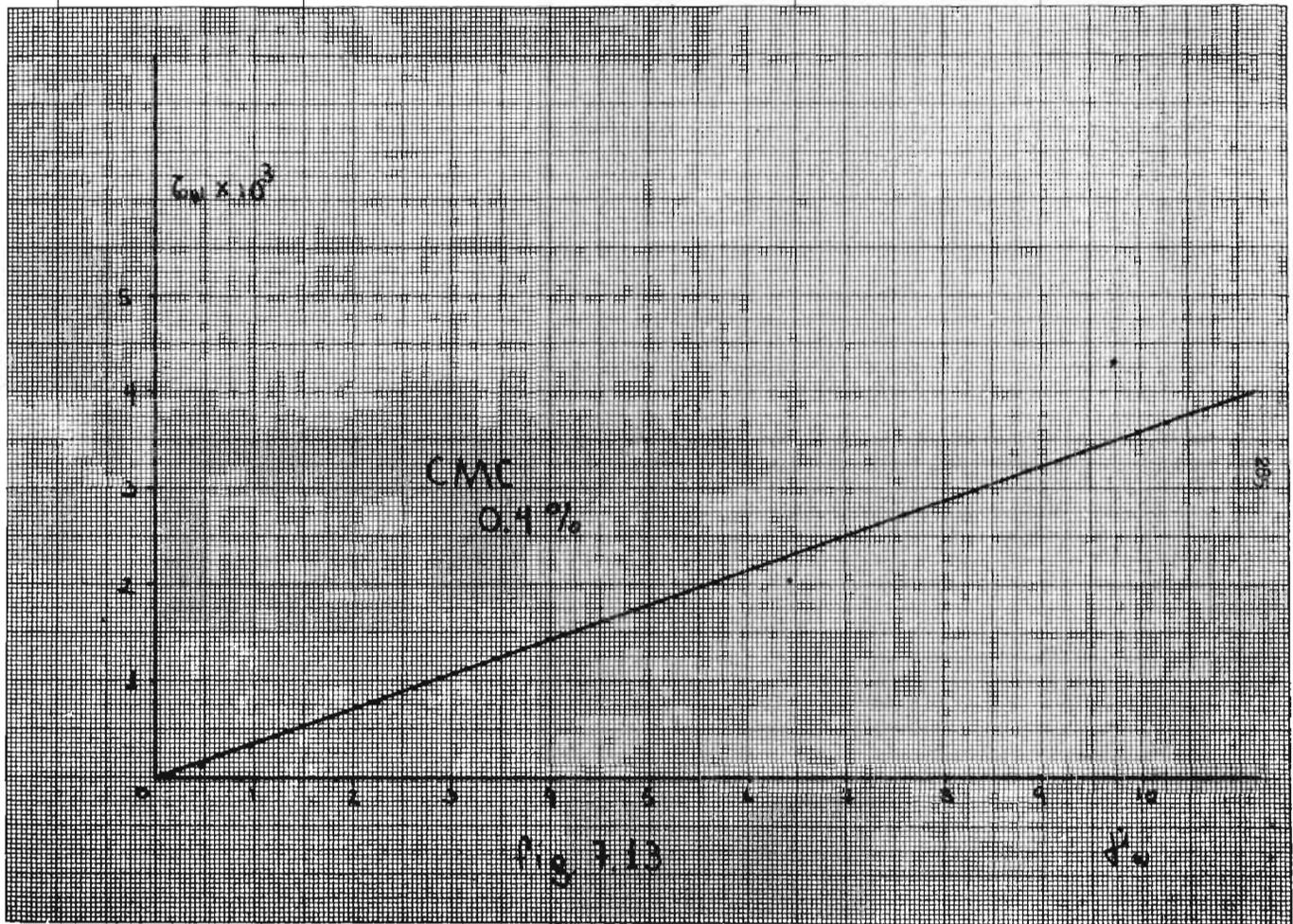
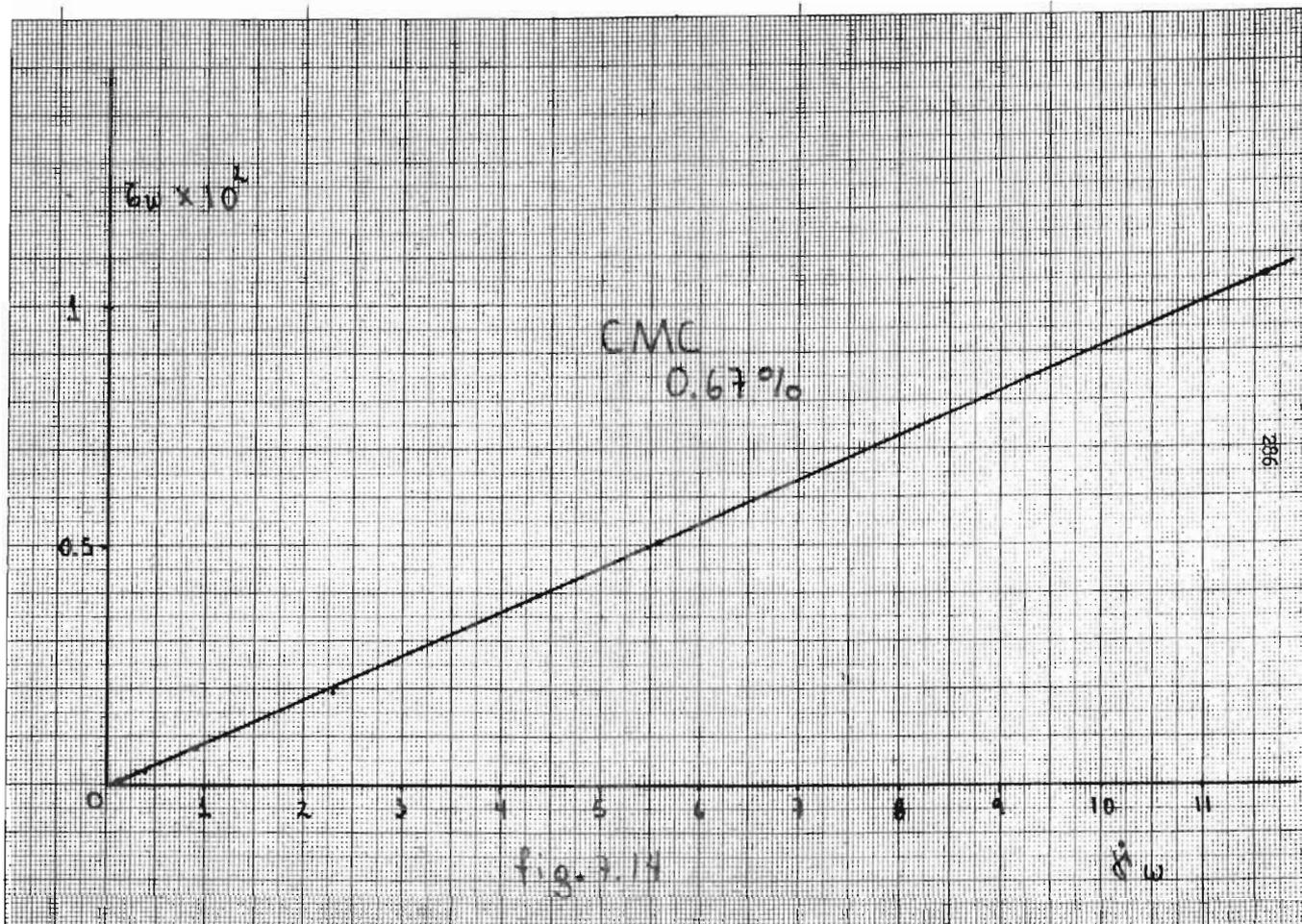


Fig 7.13

80



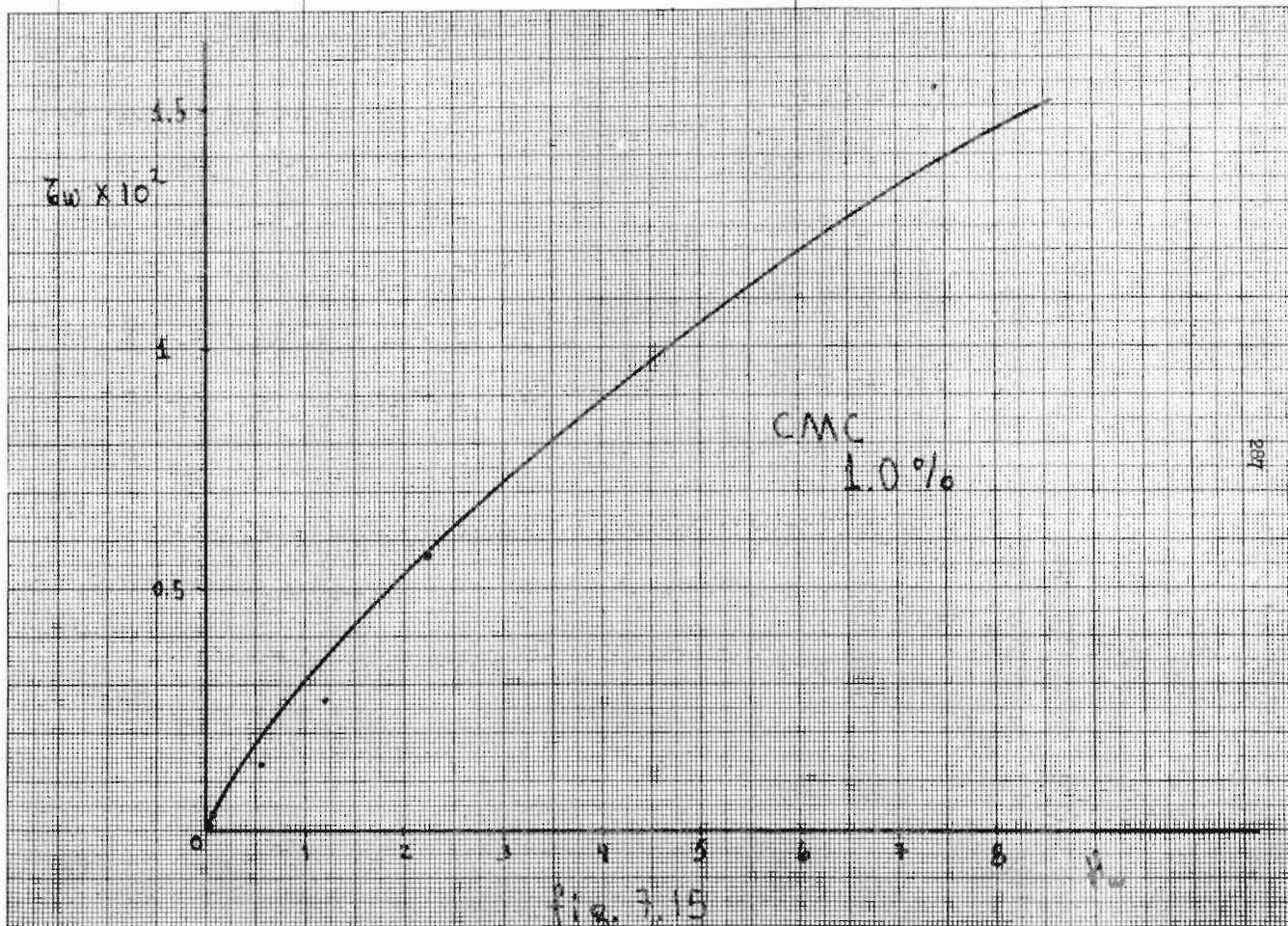


fig. 3.15

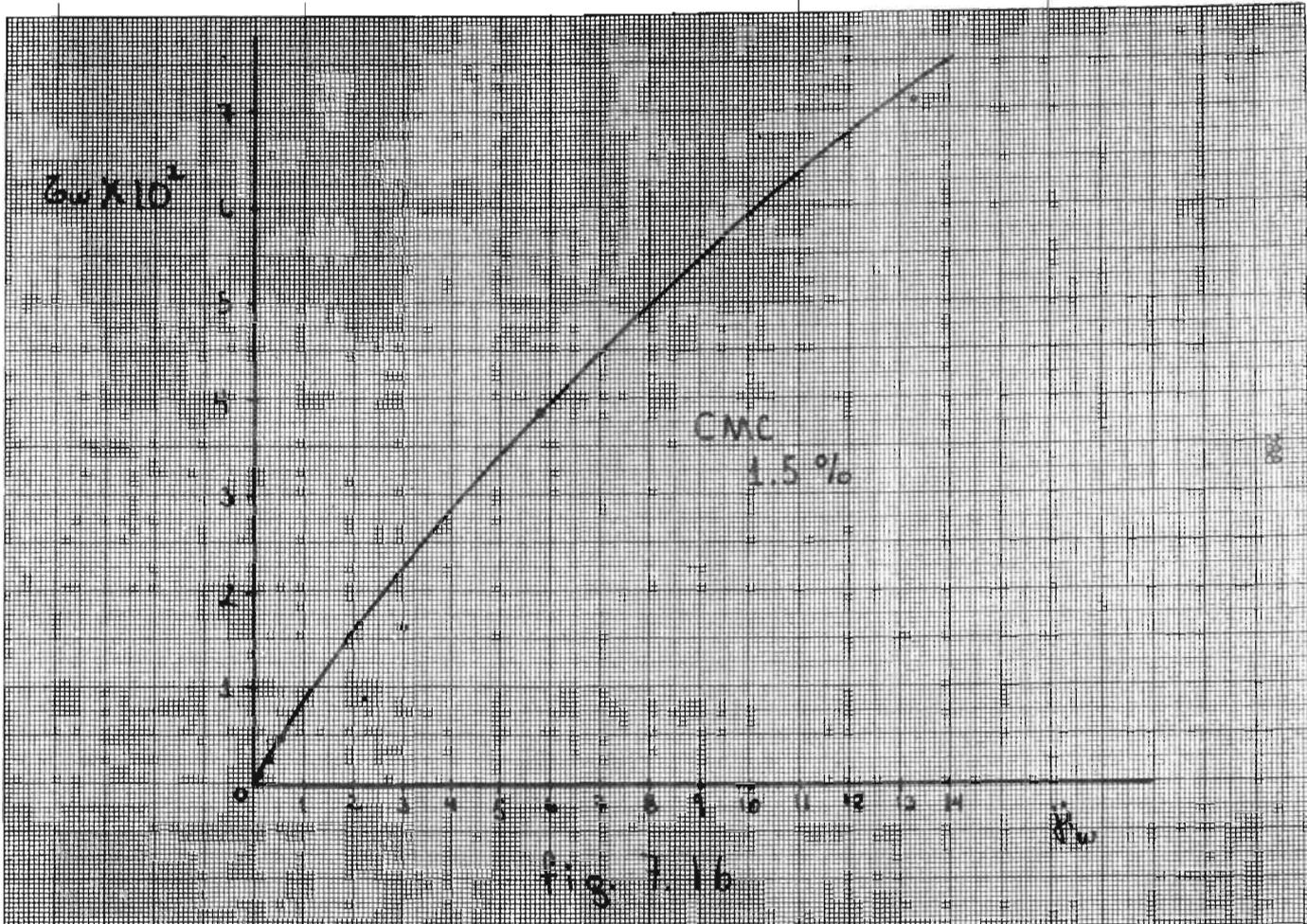
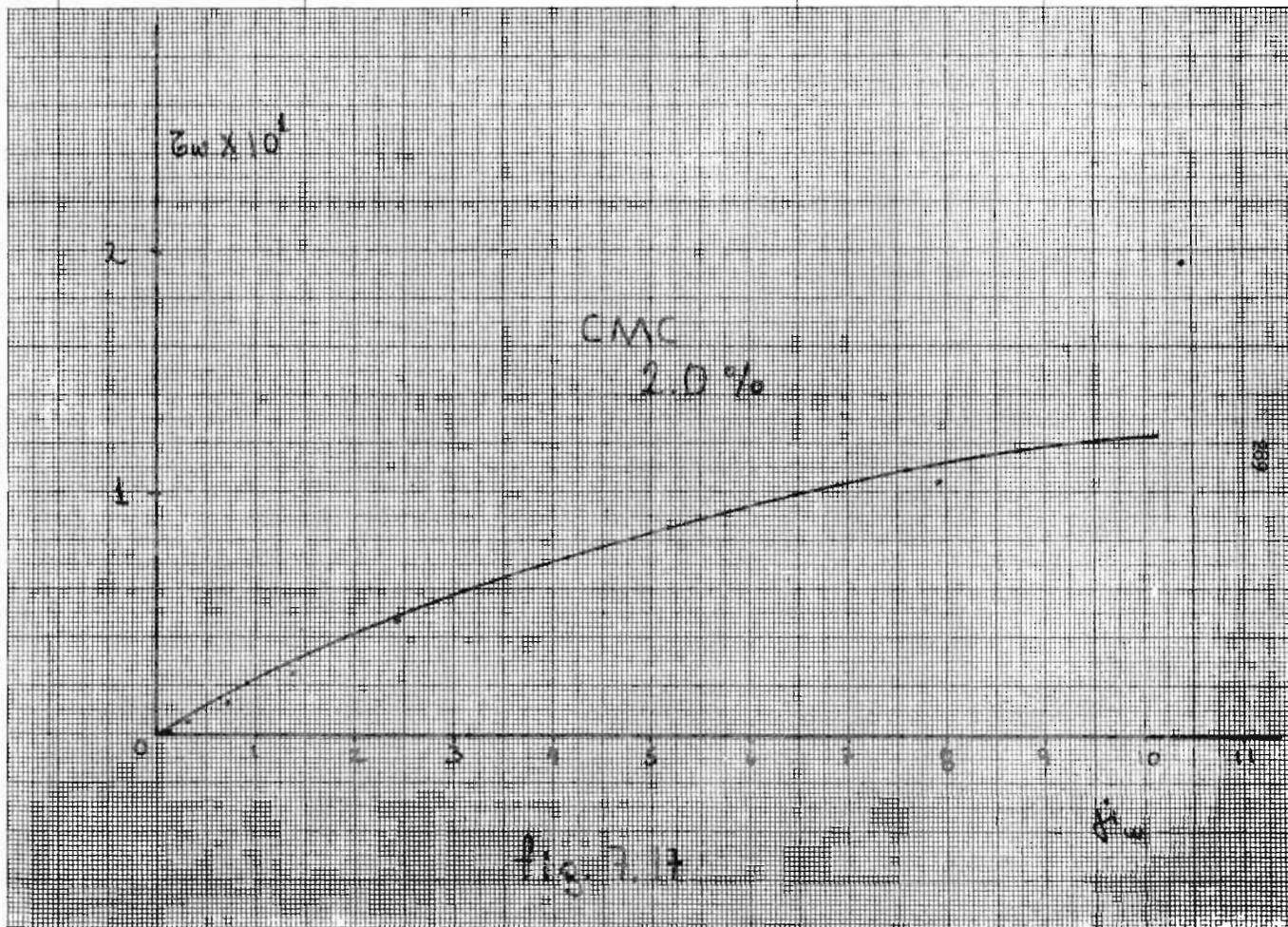


fig 7.16



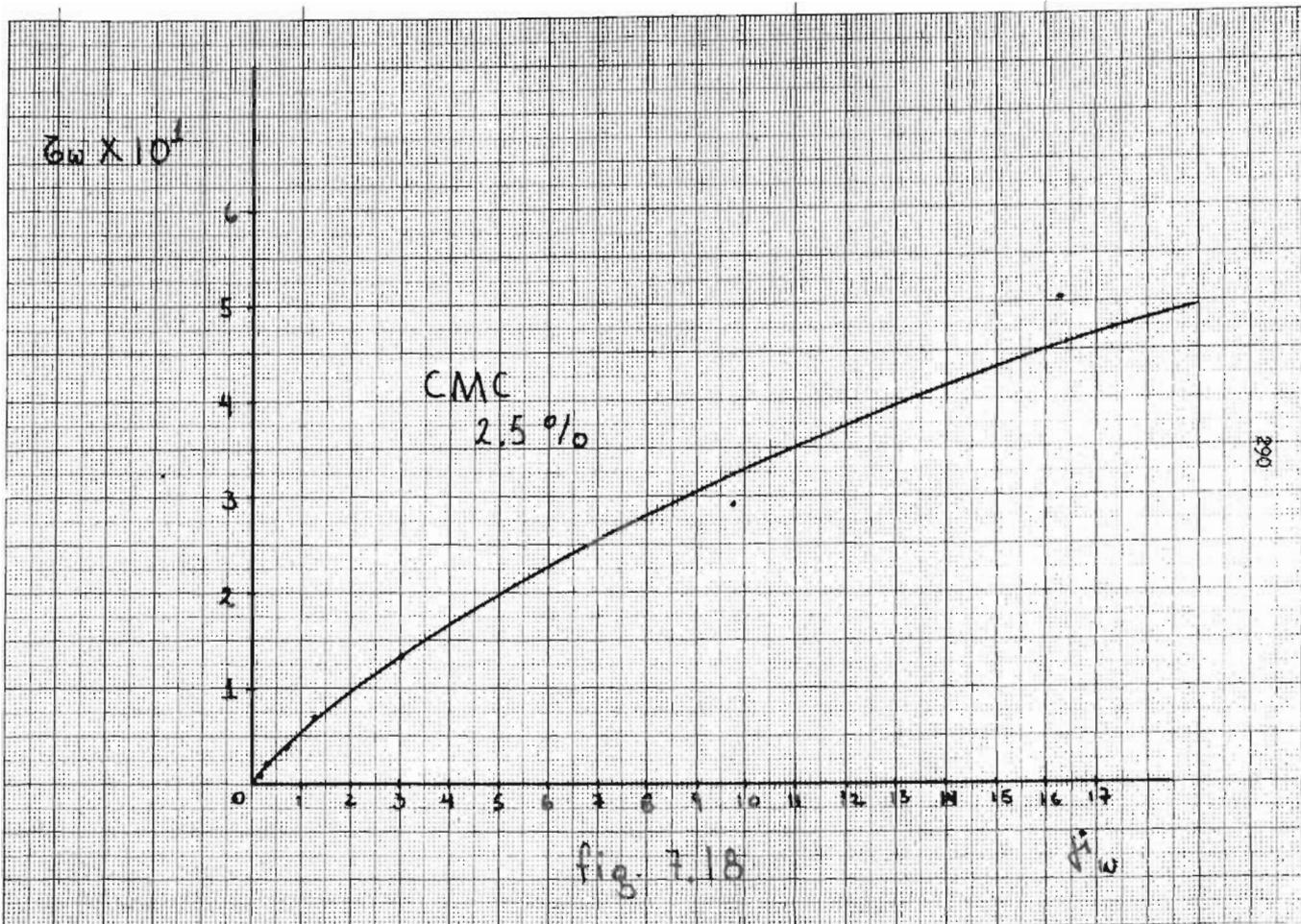
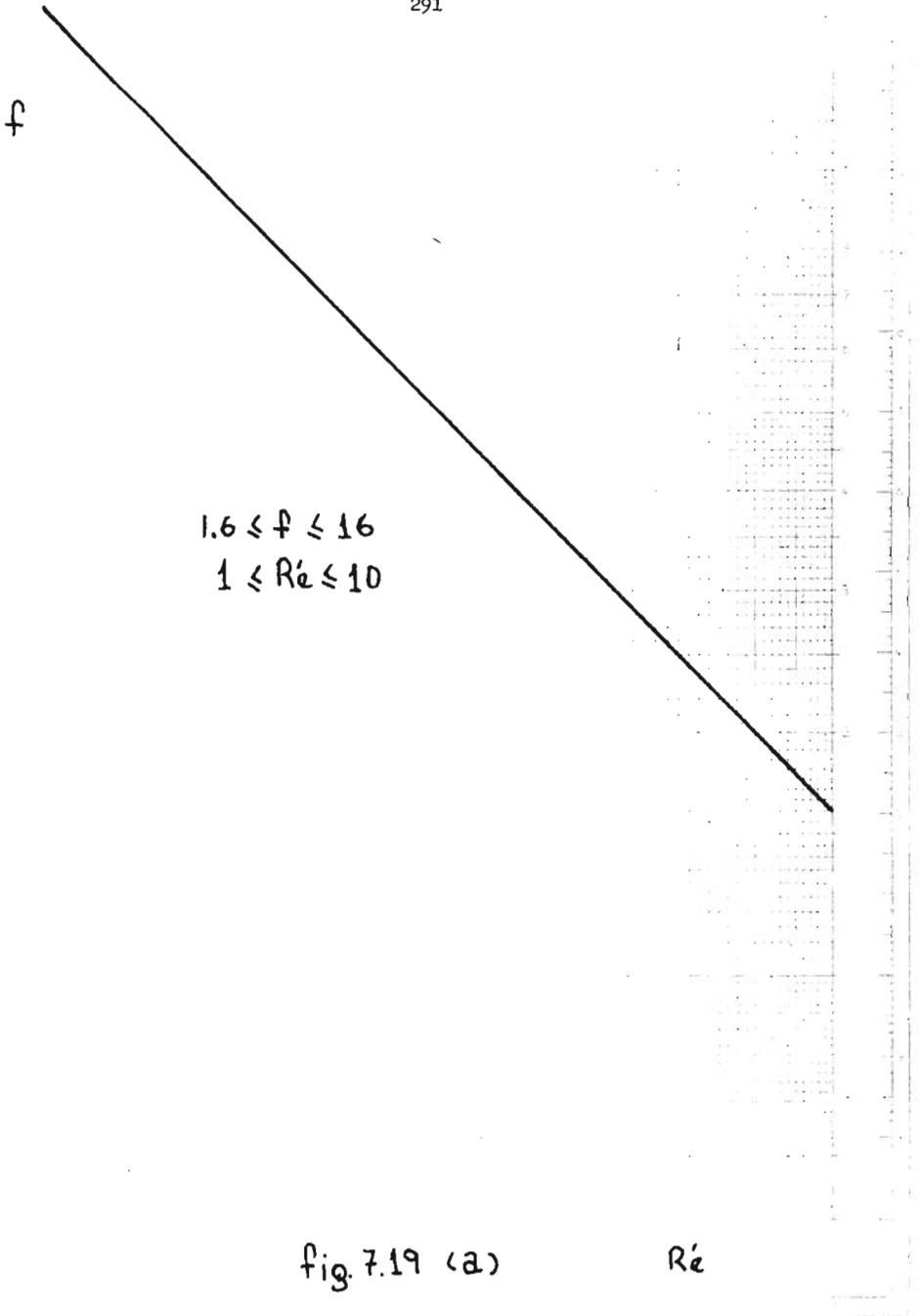
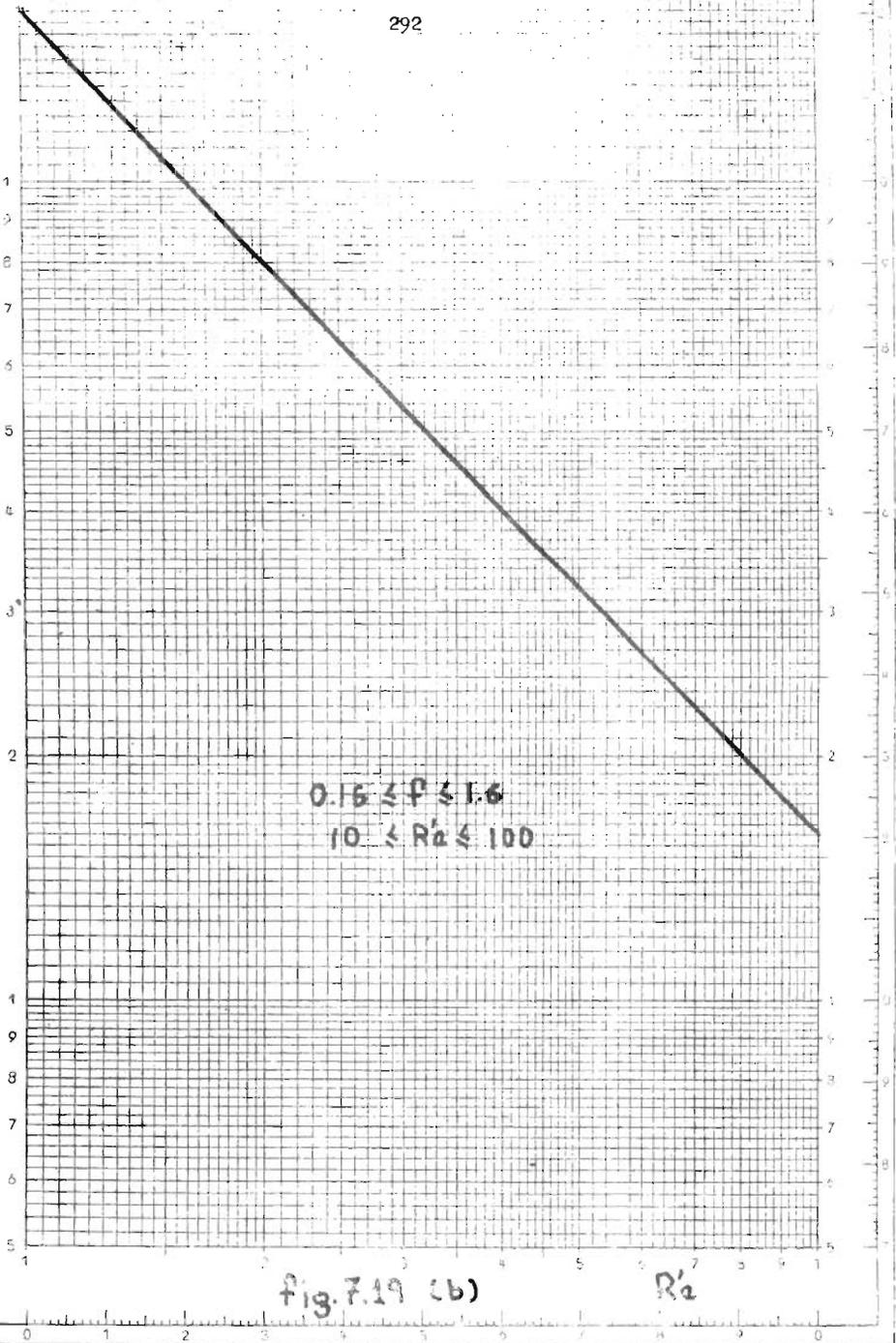


fig. 7.18

C_w



f

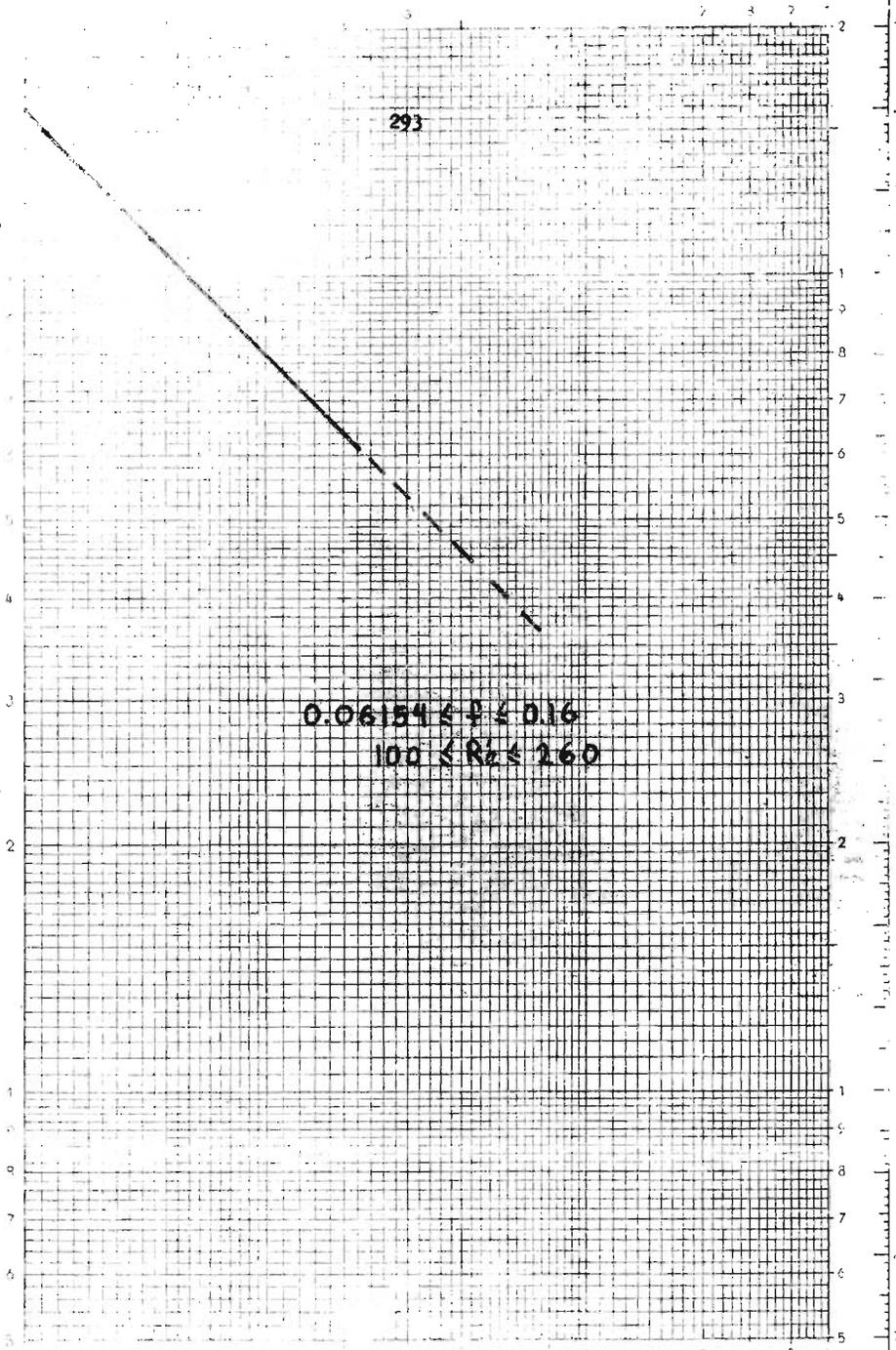


DINA 4
 Nr. 8123
 log x log
 Modul 160

fig. 7.19 (b)

 Re

σ



DIN A4
Nr. 8123
log x log
Modul 160

Fig. 7.19 (c)

R_z

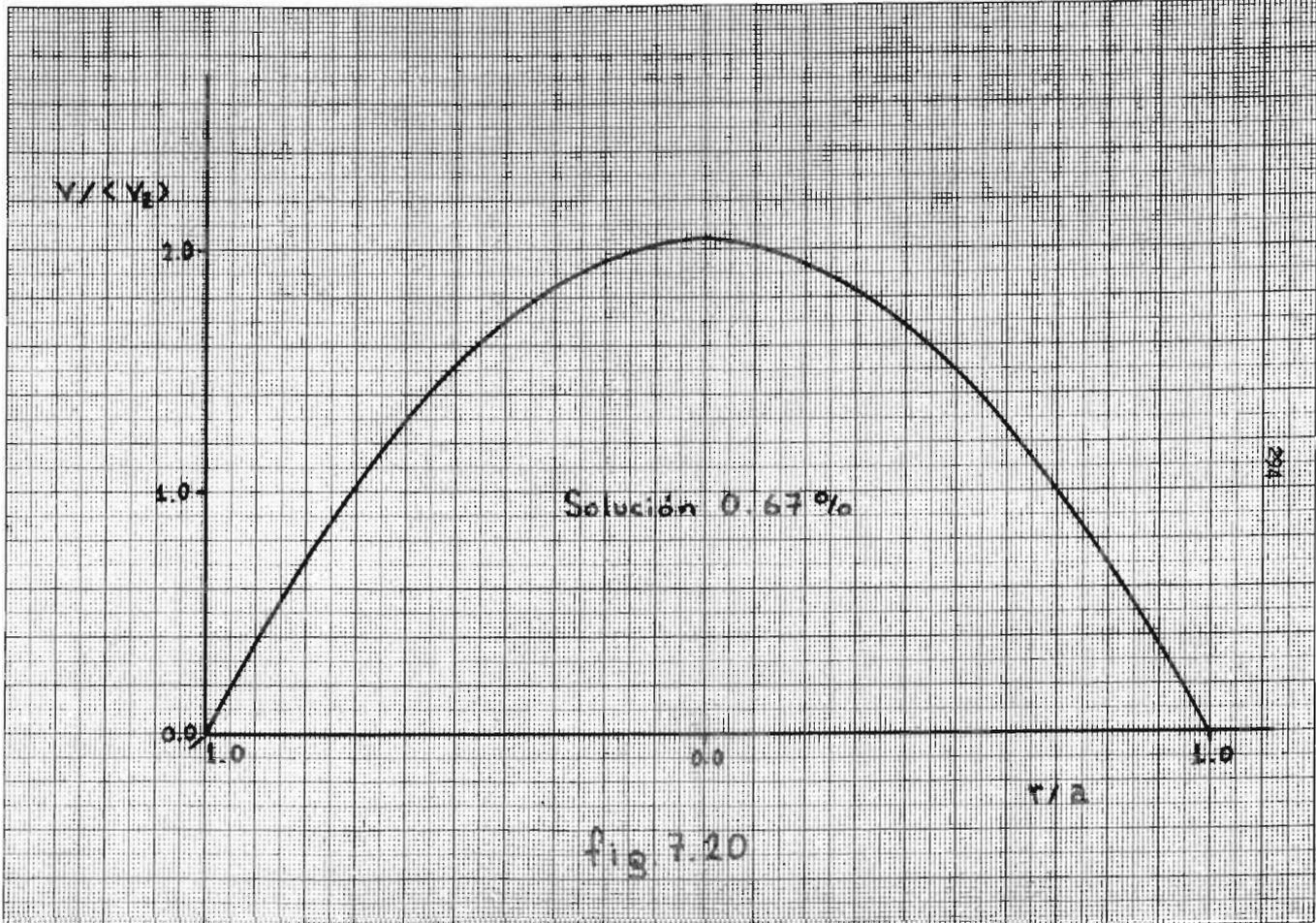


fig 7.20

f

extrapolación

rango experimental

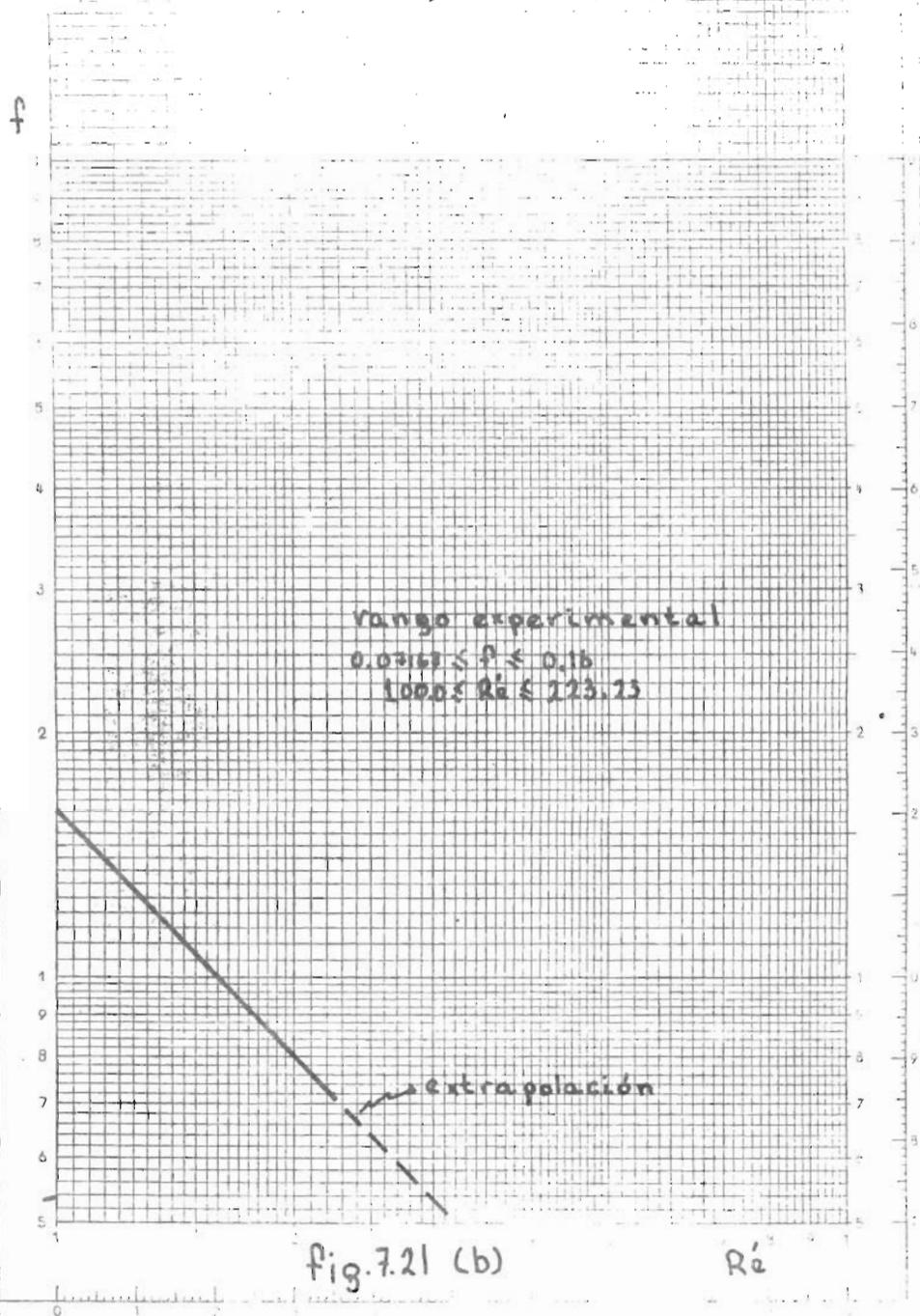
$$0.16 \leq f \leq 0.7786$$

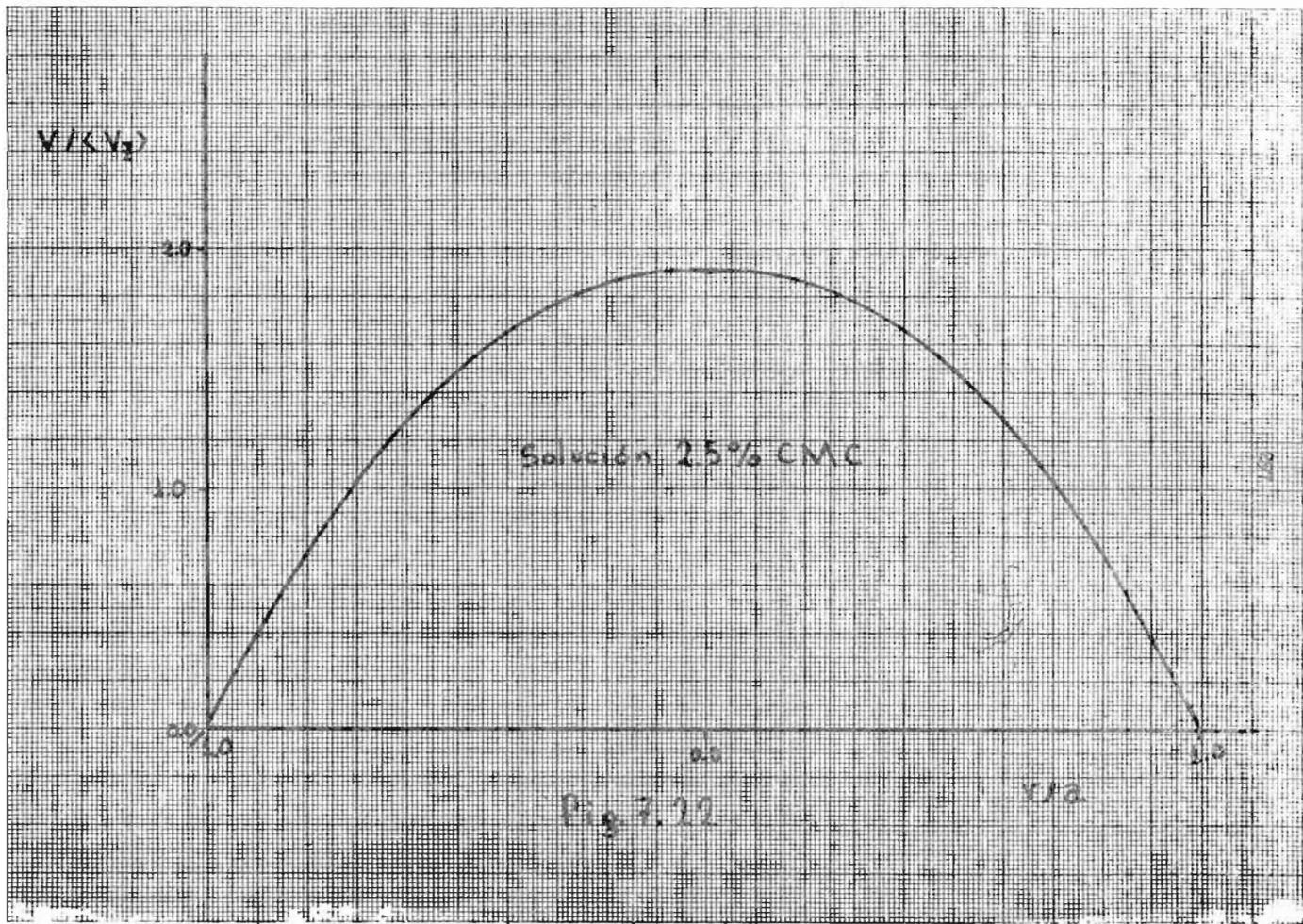
$$20.55 \leq Re \leq 100.0$$

Solución 2.5 % CMC

fig. 7.21 (a)

Re





C A P I T U L O : 8

CONCLUSIONES

Como se habrá podido observar a lo largo de todo el desarrollo del presente trabajo, se estableció una metodología teórica de cálculo perfectamente bien definida y tan fundamentada como la validez de cada una de las suposiciones hechas así lo permitió.

El estudio de los fluidos no newtonianos, como cualquier otra teoría, debe partir de una base y ciertos fundamentos; éstos últimos se detallaron a través de los primeros cinco capítulos, y la primera, aunque se encuentra explicada en el capítulo 3, necesita de un elemento indispensable si queremos que los resultados que dicha teoría proporciona sean buenos.

Hablamos de la curva de flujo del material bajo consideración, y éste elemento indispensable es el viscosímetro.

No cabe la menor duda que debido a la falta de un viscosímetro que permitiera obtener un rango amplio de datos de esfuerzo cortante contra rapidez de corte, en primer lugar, pone en duda si con solamente siete datos máximo es posible hacer una buena regresión (de cualquier tipo) que estadísticamente sea representativa del comportamiento de aquella solución; y en segundo lugar, automáticamente reduce el número de modelos matemáticos que pueden aplicarse. Esto se debe a que para poder determinar una viscosidad a corte infinito ó corte cero,

como así lo requiere el modelo de Reiner - Philippoff, por citar un sólo ejemplo, no se puede eliminar el tratamiento gráfico para calcular los parámetros del modelo, cosa que nosotros nos vimos obligados a hacer, ante la imposibilidad práctica de obtener una curva de flujo, que tuviera, como mínimo, unos 20 ó 25 datos; éste fué el motivo de porqué al final de cuentas sólo trabajamos con el modelo de la Ley de la Potencia, y se nos ocurrió ajustar dos polinomios (de segundo y tercer grado), aunque ésta ocurrencia carecía completamente de un fundamento teórico lógico.

Y los resultados teóricos presentados en la tabla 7.4 inmediatamente desechan la idea de que se puedan ajustar cualquier polinomio de cualquier grado, aunque para alguna de las soluciones procesadas sí hallan funcionado; sin embargo es muy notoria la diferencia entre los valores que se obtienen con ellos y los reportados por la Ley de la Potencia ; bastaría para descartarlos el hecho de que cada perfil de velocidades que calcula para diferentes gastos y diámetros, es variable, lo que no es posible debido a la manera adimensional como se reportó, lo que claramente no sucede cuando se hace para el agua ó se aplica la Ley de la Potencia.

Y aún más, el viscosímetro debía tener un sistema de baño térmico que le permitiera hacer determinaciones isotérmicas para diferentes temperaturas y poder saber como afecta el cambio de temperatura a la solución preparada. Esto tampoco se pudo contar con ello.

Es obvia, entonces, la razón del porqué cuando se trabajó al final con los experimentos, sólo se aplicó el modelo de la Ley de la Potencia

cia.

La construcción del equipo para la comprobación de los valores de la caída de presión fué difícil y se utilizó mucho tiempo en ella: un poco más de un año; su gran tamaño hizo complicada la instalación y la operación del sistema, y sobre todo, el control de los gastos experimentales para trabajar con plena seguridad en la zona laminar ó en la zona turbulenta evitando caer en la zona de transición; pero como no se pudo lograr por más que se le buscó (y tampoco económicamente era posible por la falta de más dinero), nos tuvimos que conformar con los gastos reportados en el capítulo 7, y aunque el segundo programa de computadora corre para más de un diámetro, por las mismas causas sólo pudimos utilizar el diámetro con que originalmente se diseñó el sistema, que fué el de 2" nominal.

Lo anterior hubiera sido un problema serio, de no haber escogido , aparte de las razones enumeradas en el capítulo 7, las soluciones de 0.67% y 2.5% de CMC. La razón por la que se hizo ésto fué que debido a los parámetros reportados en la tabla 7.3, para la solución de 0.67% era probable suponerse que al tener un valor de n cercano al 1, el cuál solamente es válido para los flúidos newtonianos de los cuáles se escogió al agua para hacer comparaciones entre los valores (tabla 7.4, secon I), aún en la zona de transición los datos de ésta solución se parecieran mucho a los que proporciona el agua, y así poder tener una base más ó menos aceptable para analizar los resultados teóricos y experimentales; y por lo que respecta a la solución de 2.5%, como el

valor de n estaba lejano a 1, se podía esperar que solamente ésta solución se comportara en la zona laminar para los gastos experimentales que se tenían.

De ésta forma, el análisis de la tabla 7.5 inmediatamente pone de manifiesto lo siguiente:

1. - Solución al 0.67%

Debido al valor de n tan cercano a 1 y considerando los errores experimentales de medición, la diferencia entre las caídas de presión teórica y experimental no es tan grande como lo que se esperaba, teniéndose un porcentaje promedio de error basado en la parte teórica de 12.2% de todos los datos procesados.

2. - Solución al 2.5%

Para ésta solución, la diferencia entre los valores de la caída de presión teóricos y experimentales sí es notoria, teniéndose un porcentaje promedio de error, también sobre la base teórica, de todos los datos de 24%.

Para la solución de 0.67% se puede concluir sin temor a equivocarse que el modelo de la Ley de la Potencia proporciona los resultados de diseño que deben ser utilizados en la zona laminar.

Para la solución de 2.5% pudiera pensarse que el modelo de la Ley de la Potencia no proporcionaría los resultados adecuados para un buen dimensionamiento de la tubería, pero nosotros pensamos todo lo contrario, por varios motivos:

Uno de ellos es que debe ser considerado el error introducido debido a

las manipulaciones experimentales en ambas partes de éste trabajo; una mala lectura ó una mala preparación de la solución, tanto al hacer la determinación de la curva de flujo, como cuándo se prepara en el tanque TAl que la disolución se hace por medio de agitación de aire, que es diferente a hacer la disolución por medio de agitación mecánica (que es mas uniforme) pudiera acarrear errores involuntarios, pero que de todas maneras cuentan en los resultados finales. Y ésto se menciona porque al hacer la limpieza del tanque al acabar las experiencias, se encontraron pequeños grumos de material pegados a las paredes del recipiente lo que automáticamente provoca que la solución preparada para la determinación de la curva de flujo fuera en realidad de 2.5%, pero la hecha en el tanque TAl fuera un poco ó bastante menor que la de 2.5%. Este hecho implica que los modelos matemáticos calcularían caídas de presión más elevadas que las obtenidas experimentalmente, por la diferencia de porcentajes. Y por los datos proporcionados en la tabla 7.5, sección II, podríamos también concluir sin temor a equivocarse que el modelo de la Ley de la Potencia también proporciona los resultados de diseño esperados.

Y aún es necesario tener en cuenta que la variación de temperatura entre la que la determinación de la curva de flujo fué hecha y en la que se corrió experimentalmente hubiera podido provocar errores significativos; pero por pura casualidad, las temperaturas reportadas en la tabla 7.1 para las soluciones procesadas coincidieron con las del equipo experimental, medidas con el termómetro instalado con tal fin.

Por último, nos basta analizar los resultados reportados en la tabla 7.6 para régimen turbulento.

Los valores teóricos de la caída de presión calculados mediante el proceso establecido en el capítulo 7 dieron como consecuencia lo siguiente:

1. - Solución al 0.67%

Como podrá observarse de dicha tabla los valores de la caída de presión teórico y experimental no difieren mucho debido nuevamente a que ésta solución se parece mucho al agua, teniéndose un porcentaje promedio de error de -6.51% (sobre la teórica). El signo negativo es importante ya que el indica que los valores experimentales fueron siempre más grandes que los teóricos, lo que se explica de una manera muy lógica, ya que la figura 5.3.1 está hecha para tubos lisos y nuestra tubería real tiene una cierta rugosidad, que indudablemente le tiene que aumentar un poco el valor a la caída de presión, por todo lo que ya se explicó. Aún así, parece que la correlación propuesta por Dodge y Metzner es buena, sin olvidar que ésta solución casi pudiera considerarse como agua en régimen turbulento.

2. - Solución al 2.5%

Para ésta, se tiene un porcentaje de error promedio de 23%, lo cuál era indudable que pasara, debido a que el mayor gasto utilizado para régimen turbulento (y el del equipo) era Q20, que era el mismo que Q15, por lo que las lecturas de la caída de presión experimental para ambos gastos al coincidir, y observando que el Reynolds para éste gas-

to anda del orden de 1880, que la figura 5.3.1 empieza a tener la zona de transición a partir del Reynolds 2000 más ó menos, es obvio que nunca se pudo tener régimen turbulento con éstos gastos para ésta solución. Y el hecho de que el porcentaje de error sea una cantidad positiva, nos lleva a pensar las mismas cosas que las establecidas para la zona laminar, ya que si hubiéramos tenido régimen turbulento, necesariamente y por el simple hecho de estar manejando un tubo rugoso y tener una figura diseñada para tubos lisos, los valores de la caída de presión experimentales hubieran tenido que ser aún mucho más grandes que los propuestos teóricamente.

Resumiendo todo lo que hemos discutido anteriormente, creemos firmemente que el modelo de la Ley de la Potencia, siendo un modelo matemático sencillo y que a pesar de tener sus restricciones, proporciona, al menos para las soluciones procesadas, los resultados esperados para dimensionar un sistema de tubería en la zona laminar. Y para la zona turbulenta no nos atrevemos a afirmar nada con seguridad, ya que es muy importante tener bastante datos experimentales para corroborar el método estipulado.

Y con lo que respecta a la proposición de un ajuste polinomial a las curvas de flujo, y la posterior inclusión de los coeficientes resultantes al desarrollo teórico, queda completamente descartado.

BIBLIOGRAFIA

- (1) Scott Blair, G. W.
"Elementary Rheology"
Capítulos 1, 2 y 3
Academic Press
1969
- (2) Frederickson, A. G.
"Principles and Applications of Rheology"
Capítulos 1 y 2
Prentice Hall, Inc.
1964
- (3) Sears, F. W.
"Mecánica, Calor y Sonido"
Página 163
Aguilar
1965
- (4) Lee, Sears and Turcotte
"Statistical Thermodynamics"
Capítulos 1, 2 y 3
Addison Wesley Pub. Co., Inc.
1963

- (5) Welty, Wilson and Wicks

"Fundamentals of Momentum, Heat and
Mass Transfer"

Wiley

1969

- (6) Fung, Y. C.

"A First Course in Continuum Mechanics"

Capítulo 1

Prentice Hall, Inc.

1969

- (7) Govier and Aziz

"The Flow of Complex Mixtures in Pipes"

Capítulos 1, 2, 3, 4, 5 y 6

Van Nostrand Reinhold Co.

1972

- (8) Wilkinson, W. L.

"Non - Newtonian Fluids"

Capítulos 1, 2, 3 y 6

Pergamon Press

1960

- (9) Brodkey, R. S.
"The Phenomena of Fluid Motion"
Addison Wesley
1967
- (10) Theodore, L.
"Transport Phenomena for Engineers"
Capítulos 2, 3, 4 y 7
International Textbook Co.
1971
- (11) Bird, Stewart and Lightfoot
* "Transport Phenomena"
Capítulos 1, 2, 3, 5, 6 y 7
Wiley
1964
- (12) McKelvey, J. M.
"Polymer Processing"
Capítulos 1, 2 y 3, y apéndices
Wiley
1962

~~X~~ (13) Hirschfelder, Curtiss and Bird

"The Molecular Theory of Gases and
Liquids"

Páginas 503 y 647

Wiley

1954

~~X~~ (14) Knudsen and Katz

"Fluid Dynamics and Heat Transfer"

Capítulos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
y 11

McGraw Hill

1958

(15) Wohl, M. H.

"Designing for Non - Newtonian Fluids"

Secciones: 1(Enero 15), 2(Febrero 12),

3(Marzo 25), 4(Abril 8) y 6(Junio 3)

Chemical Engineering

1968

- (16) Ross, S. L.
"Diferential Equations"
Ginn - Blaisdell Co.
1964
- (17) Van Wazer, Lyons, Kim and Calwell
"Viscosity and Flow Measurements"
Interscience Publishers
1963
- (18) García Rejón, A.
"Teoría, Diseño y Determinación de
Factores de Corrección de un Viscosímetro
Capilar"
Tesis Profesional
Facultad de Química
U. N. A. M., 1974
- *
(19) Foust, Wenzel, Clump, Maus y Andersen
"Principios de Operaciones Unitarias"
Segunda Parte
C. E. C. S. A.
1970

- (20) Technical Paper No. 410
"Flow of Fluids Through Valves,
Fittings and Pipes"
Crane Co., Engineering Division
1970
- (21) Ludwig, E. E.
"Applied Process Design for Chemical
and Petrochemical Plants"
Volumen 1
Gulf Publishing Co.
1964
- (22) Alves, Boucher and Pigford
"Pipe Line Design"
Chemical Engineering Progress
Volumen 48, No. 8, página 385
1952
- (23) LeBaron Bowen, R. Jr.
"Scaleup for Non - Newtonian Fluid Flow"
Siete secciones: Junio 12, Junio 26,
Julio 10, Julio 24, Agosto 7, Agosto 21,
Septiembre 4
Chemical Engineering
1961

- (24) Thomas, D. G.
"Non - Newtonian Suspensions"
Parte 1a.
Industrial and Engineering Chemistry
Volumen 55, No. 11
1963
- (25) Ryan and Johnson
"Transition from Laminar to
Turbulent Flow in Pipes"
A. I. Ch. E. Journal
Volumen 5, No. 4
1959
- (26) Dodge and Metzner
"Turbulent Flow of Non - Newtonian,
Systems"
A. I. Ch. E. Journal
Volumen 5, No. 2
1959
- (27) Metzner, A. B.
"Pipe Line Design for Non - Newtonian
Fluids"
Chemical Engineering Progress
Volumen 50, No. 1, página 27

- (28) Carnahan, Luther and Wilkes
"Applied Numerical Methods"
Wiley
1969
- (29) von Kármán, A.
"Mechanische Ähnlichkeit und
Turbulenz"
Nachr. Ges. Wiss. Gottingen. Math.
Physik. Kl., 58
1930
- (30) Metzner and Reed
"Flow of Non - Newtonian Fluids —
Correlation of the Laminar, Transition,
and Turbulent - flow Regions"
A. I. Ch. E. Journal
Volúmen 1, No. 4
1955
- (31) Hwei P. Hsu
"Vector Analysis"
Simon and Schuster, N. Y.
1969

(32) Aris, R.

"Vectors, Tensors, and the Basic
Equations of Fluid Mechanics"

Prentice Hall, Inc.

1962

(33) Mc Connell, A. J.

"Applications of Tensor Analysis"

Dover Publications, Inc., N. Y.

1957

(34) McCabe and Smith

"Operaciones Básicas de Ingeniería

Química"

Reverté, S. A.

1968

APENDICE 1

RESUMEN DE LA NOTACION TENSORIAL Y
VECTORIAL

Al analizar problemas de flujo, debemos usualmente seleccionar un sistema de coordenadas que depende, básicamente, de la geometría de las fronteras del fluido. Cuando hay un cambio en el sistema de coordenadas, los componentes deben seguir ciertas leyes de transformación. Si un arreglo obedece éstas leyes de transformación, entonces lo podemos manipular por medio del álgebra tensorial, la cuál es, en forma simple, un método de realizar un número de operaciones comprobadas en los símbolos usados para representar el arreglo; cualquier operación en el símbolo, debe llevarse a cabo exactamente como se realiza en la operación análoga del arreglo (9).

Y es precisamente la forma tensorial en que las ecuaciones deben escribirse para que tengan el carácter de concisas e independientes del sistema coordinado.

Además, ésta notación es necesaria porque todas las magnitudes que intervienen en la teoría de Fenómenos de Transporte pertenecen a una de las siguientes categorías:

1. - Escalares, como la temperatura (T).

2. - Vectores, como la velocidad (\bar{v}).

3. - Tensores de segundo orden, como el tensor de esfuerzos cortantes ($\bar{\sigma}$).

En realidad, los escalares pueden considerarse como tensores de orden cero, y los vectores como tensores de primer orden.

La multiplicación de vectores y tensores puede ser de diversos tipos, utilizándose distintos tipos de signos de multiplicación para representar estas operaciones: el punto simple \cdot , el doble punto $:$, y la cruz ó aspa \times . Los paréntesis que encierran estas operaciones especiales indican el tipo de magnitud que se produce mediante la operación:

$$(\quad) = \text{escalar}$$

$$[\quad] = \text{vector}$$

$$\{ \quad \} = \text{tensor}$$

El tipo de paréntesis no tiene un significado especial si la operación que comprende es una adición ó una substracción.

Los signos de multiplicación pueden interpretarse en esta forma (11):

<u>signo de multiplicación</u>	<u>orden del resultado</u>
ninguno	Σ
\times	$\Sigma - 1$
\cdot	$\Sigma - 2$
$:$	$\Sigma - 4$

El tratamiento que sigue está restringido al sistema coordenado rectangular, en el cuál, la posición de un punto en el espacio está especificado por tres números x_1, x_2, x_3 (ó x, y, z). La aplicación a otros sistemas coordenados no es difícil si se conocen las relaciones entre éstos y el rectangular.

Por ejemplo, la relación entre el sistema coordenado rectangular y el sistema coordenado cilíndrico (r, Θ, z) es:

$$x_1 = x = r \cos \Theta ; \quad x_2 = y = r \operatorname{sen} \Theta ; \quad x_3 = z = z$$

Relaciones a partir de las cuáles pueden obtenerse las operaciones deseadas haciéndolas de la manera indicada en el sistema coordenado rectangular.

Una línea que une el origen del sistema coordenado con cualquier punto en el espacio representa un vector \bar{A} , cuya dirección es aquella de la línea y cuya magnitud es proporcional a la longitud de la línea. Los componentes de \bar{A} en los ejes coordenados se designan por A_1, A_2, A_3 y se muestran en la fig. A. 1. 1.

Los segmentos de línea que empiezan en el origen y están dirigidos a lo largo de los ejes coordenados teniendo longitud unitaria, se llaman vectores unitarios, designados por $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3$; a partir de ellos se genera el espacio del sistema coordenado.

Utilizando éstos vectores unitarios, cualquier vector puede ser expresado como una combinación lineal (31) de sus componentes:

$$\bar{A} = A_1 \bar{\delta}_1 + A_2 \bar{\delta}_2 + A_3 \bar{\delta}_3 = \sum_i A_i \bar{\delta}_i$$

A. 1. 1

El producto escalar de dos vectores cualesquiera \bar{A} y \bar{B} es un escalar y se designa por $(\bar{A} \cdot \bar{B})$; está definido por:

$$(\bar{A} \cdot \bar{B}) = |\bar{A}| |\bar{B}| \cos \Theta$$

A. 1. 2

donde $|\bar{A}|$ y $|\bar{B}|$ son las magnitudes de \bar{A} y \bar{B} ; la magnitud de un vector \bar{A} está dado por:

$$|\bar{A}| = \left(\sum_i A_i^2 \right)^{1/2}$$

Como los vectores unitarios forman la base del sistema coordenado rectangular y ésta base es ortonormal, el producto escalar de ellos puede expresarse como:

$$(\bar{\delta}_i \cdot \bar{\delta}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad \text{A. 1. 3}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Por lo tanto, el producto escalar de dos vectores puede ser escrito como:

$$(\bar{A} \cdot \bar{B}) = \sum_i A_i B_i \quad \text{A. 1. 4}$$

El producto vectorial de dos vectores \bar{A} y \bar{B} es un vector perpendicular al plano de \bar{A} y \bar{B} , y dirigido de tal forma que \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} forman un sistema de mano derecha. Su magnitud es igual al área del paralelogramo que tiene como lados a \bar{A} y \bar{B} .

El producto vectorial de dos vectores unitarios es siempre el tercer vector unitario; por lo tanto, en forma compacta, los nueve productos vectoriales que involucran vectores unitarios pueden ser escritos como:

$$[\bar{\delta}_i \times \bar{\delta}_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} \bar{\delta}_k \quad \text{A. 1. 5}$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo de permutación y se define así:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk = 123, 231, 312 \\ 0 & \text{si dos índices son iguales} \\ -1 & \text{si } ijk = 321, 132, 213 \end{cases} \quad \text{A. 1. 6}$$

Por lo tanto, el producto vectorial de dos vectores \bar{A} y \bar{B} está dado por la ecuación:

$$[\bar{A} \times \bar{B}] = \sum_i \sum_j \sum_k A_i B_j \epsilon_{ijk} \bar{\delta}_k \quad \text{A. 1. 7}$$

y también por el determinante:

$$[\bar{A} \times \bar{B}] = \begin{vmatrix} \bar{\delta}_1 & \bar{\delta}_2 & \bar{\delta}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad \text{A. 1. 8}$$

Las operaciones con vectores pueden resumirse de la siguiente forma:

1. - Adición y substracción de vectores

$$\bar{A} + \bar{B} = \sum_i \bar{\delta}_i (A_i + B_i) \quad \text{A. 1. 9}$$

2. - Multiplicación de un vector por un escalar s

$$s \bar{A} = s \left\{ \sum_i \bar{\delta}_i A_i \right\} = \sum_i \bar{\delta}_i \{s A_i\} \quad \text{A. 1. 10}$$

3. - Producto escalar

4. - Producto vectorial

5. - Productos vectoriales múltiples

Pueden obtenerse a partir de las expresiones analíticas de los productos escalar y vectorial. Por ejemplo, el triple producto escalar $(\bar{A} \cdot [\bar{B} \times \bar{C}])$ puede expresarse así:

$$(\bar{A} \cdot [\bar{B} \times \bar{C}]) = \sum_i A_i [\bar{B} \times \bar{C}]_i = \sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k$$

y después mediante las ecuaciones A. 1. 7 y A. 1. 8 transformarse en:

$$(\bar{A} \cdot [\bar{B} \times \bar{C}]) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

6. - Operaciones diferenciales con vectores

a) Gradiente de un campo escalar

$$\begin{aligned} \nabla_s &= \bar{\delta}_1 (\partial_s / \partial x_1) + \bar{\delta}_2 (\partial_s / \partial x_2) + \bar{\delta}_3 (\partial_s / \partial x_3) \\ &= \sum_i \bar{\delta}_i (\partial_s / \partial x_i) \end{aligned} \quad \text{A. 1. 11}$$

b) Divergencia de un campo vectorial

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \bar{v}) &= \left(\left\{ \sum_i \bar{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j \bar{\delta}_j v_j \right\} \right) \\ &= \sum_i \sum_j (\bar{\delta}_i \cdot \bar{\delta}_j) \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = \sum_i \sum_j \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad \text{A. 1. 12}$$

c) Rotacional de un campo vectorial

$$\begin{aligned}
 [\nabla \times \vec{v}] &= \left[\left\{ \sum_j \bar{\delta}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} \times \left\{ \sum_k \bar{\delta}_k v_k \right\} \right] = \sum_j \sum_k [\bar{\delta}_j \times \bar{\delta}_k] \frac{\partial}{\partial x_j} v_k \\
 &= \begin{vmatrix} \bar{\delta}_1 & \bar{\delta}_2 & \bar{\delta}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{A. 1.13}$$

d) Laplaciano de un campo escalar

$$\begin{aligned}
 (\nabla \cdot \nabla s) &= \left(\left\{ \sum_i \bar{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j \bar{\delta}_j \frac{\partial s}{\partial x_j} \right\} \right) \\
 &= \sum_i \sum_j \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial s}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial^2 s}{\partial x_i^2}
 \end{aligned}
 \tag{A. 1.14}$$

e) Laplaciano de un campo vectorial

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \vec{v} &= \nabla^2 \left\{ \sum_i \bar{\delta}_i v_i \right\} \\
 &= \bar{\delta}_1 \nabla^2 v_1 + \bar{\delta}_2 \nabla^2 v_2 + \bar{\delta}_3 \nabla^2 v_3
 \end{aligned}
 \tag{A. 1.15}$$

Para coordenadas curvilíneas ésta ecuación no se cumple y es preferible tomar para el Laplaciano el siguiente valor:

$$\nabla^2 \vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - [\nabla \times [\nabla \times \vec{v}]]
 \tag{A. 1.16}$$

con lo que se reduce a operaciones de gradiente, divergencia y rotacional.

f) Derivada substancial de un campo escalar

$$\begin{aligned}
 \frac{Ds}{Dt} &= \frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla s) \\
 &= \frac{\partial s}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial s}{\partial x_i}
 \end{aligned}
 \tag{A. 1.17}$$

g) Derivada substancial de un campo vectorial

$$\begin{aligned}
 \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \\
 &= \sum_i \bar{\delta}_i \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_i \right\}
 \end{aligned}
 \tag{A. 1.18}$$

Como la ecuación A. 1. 18 no es aplicable a coordenadas curvilíneas, es preferible definir la operación $(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v}$ de ésta forma:

$$(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v} = \frac{1}{2} \nabla(\bar{v} \cdot \bar{v}) - [\bar{v} \times [\nabla \times \bar{v}]] \quad \text{A. 1. 19}$$

con lo que se reduce a operaciones de gradiente y rotacional.

h) Diferenciación de productos

Mediante las definiciones de las operaciones anteriores, se pueden comprobar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \nabla r s &= r \nabla s + s \nabla r \\ (\nabla \cdot s \bar{v}) &= (\nabla s \cdot \bar{v}) + s (\nabla \cdot \bar{v}) \\ (\bar{v} \cdot [\nabla \times \bar{w}]) &= (\bar{w} \cdot [\nabla \times \bar{v}]) - (\bar{v} \cdot [\nabla \times \bar{w}]) \\ [\nabla \times s \bar{v}] &= [\nabla s \times \bar{v}] + s [\nabla \times \bar{v}] \end{aligned}$$

Un tensor de segundo orden tiene nueve componentes y se representa usualmente por una matriz. Si $\bar{\bar{\epsilon}}$ es un tensor de segundo orden, entonces:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \text{A. 1. 20}$$

Si los componentes ϵ_{ij} del tensor $\bar{\bar{\epsilon}}$ obedecen la relación:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$$

entonces $\bar{\bar{\epsilon}}$ se dice que es un tensor simétrico; de otro modo, si:

$$\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$$

se dice que el tensor es antisimétrico.

Cualquier tensor de segundo orden $\bar{\bar{\epsilon}}$ se puede expresar como la suma

de un tensor simétrico y otro antisimétrico, sumando y restando las mitades del tensor $\bar{\bar{\epsilon}}$ y el tensor transpuesto $\bar{\bar{\epsilon}}^*$:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{\bar{\bar{\epsilon}} + \bar{\bar{\epsilon}}^*}{2} + \frac{\bar{\bar{\epsilon}} - \bar{\bar{\epsilon}}^*}{2} \quad \text{A. 1. 21}$$

donde $\bar{\bar{\epsilon}}^*$, el transpuesto de $\bar{\bar{\epsilon}}$, se obtiene intercambiando filas por columnas, ó sea:

$$\bar{\bar{\epsilon}}^* = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{21} & \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \text{A. 1. 22}$$

y se puede demostrar fácilmente que $(1/2) (\bar{\bar{\epsilon}} + \bar{\bar{\epsilon}}^*)$ es un tensor simétrico y que $(1/2) (\bar{\bar{\epsilon}} - \bar{\bar{\epsilon}}^*)$ es un tensor antisimétrico.

Los elementos que poseen los mismos subíndices se denominan elementos de la diagonal.

Cualesquiera funciones de los componentes de un tensor que sean independientes del sistema de referencia escogido en el cuál se han dado las componentes, se llaman invariantes de ése tensor; es decir, no cambian bajo una rotación de los ejes coordenados. Los invariantes del tensor $\bar{\bar{\epsilon}}$ designados por I_1, I_2, I_3 , están definidos por las siguientes ecuaciones:

$$I_1 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \quad \text{A. 1. 23}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{vmatrix} \quad \text{A. 1. 24}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} \quad \text{A. 1. 25}$$

El producto diádico de dos vectores \bar{A} y \bar{B} es un tensor de segundo orden:

Las operaciones con tensores puede resumirse así:

1. - Adición y substracción de tensores y productos diádicos

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} + \bar{\tau} &= \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \sigma_{ij} + \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \tau_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j (\sigma_{ij} + \tau_{ij})\end{aligned}\quad \text{A. 1. 29}$$

2. - Multiplicación de un tensor por un escalar

$$\begin{aligned}s \bar{\tau} &= s \left\{ \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \tau_{ij} \right\} \\ &= \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \{s \tau_{ij}\}\end{aligned}\quad \text{A. 1. 30}$$

Lo mismo ocurre en el caso de productos diádicos.

3. - Producto escalar de tensores

$$\begin{aligned}(\bar{\sigma} : \bar{\tau}) &= \left(\left\{ \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \sigma_{ij} \right\} : \left\{ \sum_k \sum_l \bar{\delta}_k \bar{\delta}_l \tau_{kl} \right\} \right) \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l (\bar{\delta}_i \bar{\delta}_j : \bar{\delta}_k \bar{\delta}_l) \sigma_{ij} \tau_{kl} \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta_{ik} \delta_{jl} \sigma_{ij} \tau_{kl} \\ &= \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \tau_{ji}\end{aligned}\quad \text{A. 1. 31}$$

De igual forma:

$$(\bar{\tau} : \bar{v} \bar{w}) = \sum_i \sum_j \tau_{ij} v_j w_i$$

$$(\bar{\delta} : \bar{\tau}) = \sum_i \tau_{ii} \quad ; \text{ etc.} \quad \text{A. 1. 32}$$

4. - Producto tensorial de dos tensores

$$\begin{aligned}\{\bar{\sigma} \cdot \bar{\tau}\} &= \left\{ \left(\sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \sigma_{ij} \right) \cdot \left(\sum_k \sum_l \bar{\delta}_k \bar{\delta}_l \tau_{kl} \right) \right\} \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \{ \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \cdot \bar{\delta}_k \bar{\delta}_l \} \sigma_{ij} \tau_{kl}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta_{jk} \bar{\delta}_i \bar{\delta}_l \sigma_{ij} z_{kl} \\
 &= \sum_i \sum_l \bar{\delta}_i \bar{\delta}_l \left(\sum_j \sigma_{ij} z_{jl} \right)
 \end{aligned}$$

A. 1. 33

5. - Producto vectorial de un tensor por un vector

$$\begin{aligned}
 [\bar{\bar{C}} \cdot \bar{v}] &= \left[\left\{ \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j z_{ij} \right\} \cdot \left\{ \sum_k \bar{\delta}_k v_k \right\} \right] \\
 &= \sum_i \sum_j \sum_k \left[\bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \cdot \bar{\delta}_k \right] z_{ij} v_k \\
 &= \sum_i \sum_j \sum_k \bar{\delta}_i \delta_{jk} z_{ij} v_k \\
 &= \sum_i \bar{\delta}_i \left(\sum_j z_{ij} v_j \right)
 \end{aligned}$$

A. 1. 34

6. - Operaciones diferenciales en las que intervienen tensores y diadas

$$\begin{aligned}
 \text{a) } [\nabla \cdot \bar{\bar{C}}] &= \left[\left\{ \sum_i \bar{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j \sum_k \bar{\delta}_j \bar{\delta}_k z_{jk} \right\} \right] \\
 &= \sum_i \sum_j \sum_k \left[\bar{\delta}_i \cdot \bar{\delta}_j \bar{\delta}_k \right] \frac{\partial}{\partial x_i} z_{jk} \\
 &= \sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ij} \bar{\delta}_k \frac{\partial}{\partial x_i} z_{jk} \\
 &= \sum_k \bar{\delta}_k \left\{ \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} z_{ik} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } (\bar{\bar{C}} : \nabla \bar{v}) &= \left(\left\{ \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j z_{ij} \right\} : \left\{ \sum_k \sum_l \bar{\delta}_k \bar{\delta}_l \frac{\partial}{\partial x_k} v_l \right\} \right) \\
 &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l (\bar{\delta}_i \bar{\delta}_j : \bar{\delta}_k \bar{\delta}_l) z_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} v_l \\
 &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta_{ik} \delta_{jl} z_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} v_l \\
 &= \sum_i \sum_j z_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i
 \end{aligned}$$

y así para otros tipos de productos en los que el operador ∇ interviene.

Para un estudio completo y detallado del análisis tensorial puede consultarse las referencias 32 y 33.

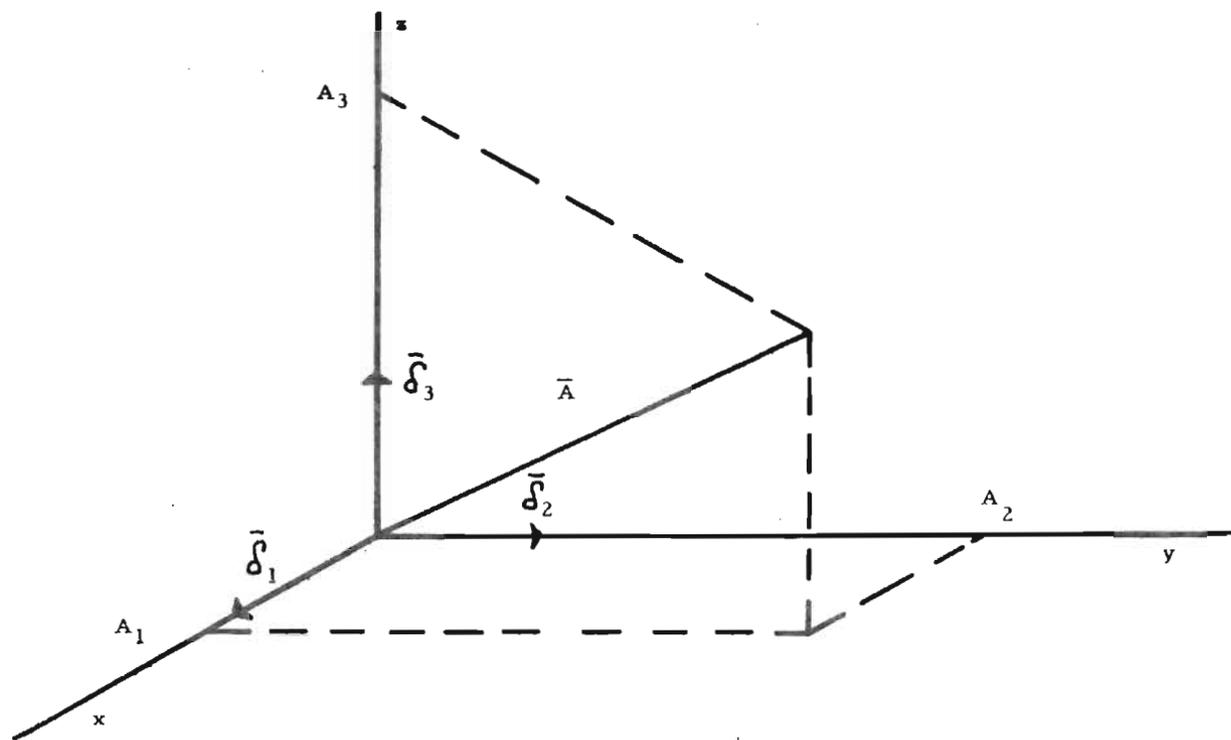


fig. A.1.1

APENDICE 2

DERIVACION DE LAS ECUACIONES BASICAS PARA VISCOSIMETROS DE CILINDROS COAXIALES

Las suposiciones que han de hacerse para el desarrollo de éstas son:

1. - El líquido es incompresible.
2. - El movimiento del líquido es laminar.
3. - Las corrientes de flujo son círculos en el plano horizontal perpendicular a su eje de rotación. Es decir:

$$v = v(r)$$

Los flujos axiales y radiales se desprecian haciéndose cero.

4. - El flujo es a régimen permanente; todas las derivadas con respecto al tiempo en la ecuación de continuidad y movimiento son cero.
5. - No existe movimiento relativo entre las superficies de los cilindros y el fluido que está en contacto inmediato con ellos; ó sea, no hay deslizamiento.
6. - El movimiento es bidimensional; ó sea, no existen efectos finales entre el rotor del equipo y el fondo del recipiente en que la solución se encuentra contenida.
7. - El sistema es isotérmico.

Como es de suponerse, las coordenadas apropiadas al sistema son las

coordenadas cilíndricas.

De la ecuación de continuidad (capítulo 2, sección 2):

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) + (1/r) \left(\frac{\partial (\rho r v_r)}{\partial r}\right) + (1/r) \left(\frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

haciendo las suposiciones hechas anteriormente, tenemos que:

$$\left(\rho / r\right) \left(dv_\theta / d\theta\right) = 0 \quad \therefore \quad v_\theta = \text{cte.} \quad \text{A. 2. 1}$$

De la ecuación de movimiento (capítulo 2, sección 2) y aplicando nuevamente las consideraciones establecidas, se tiene:

$$(1/r^2) d(r^2 \zeta_r) / dr = 0 \quad \therefore \quad r^2 \zeta = C_1 \quad \text{A. 2. 2}$$

donde C_1 es una constante de integración que se evalúa de la siguiente forma:

El torque producido al haber girado algún cilindro a lo largo del radio será

$$\text{Torque} = \text{área} \times \text{radio} \times \text{esfuerzo cortante}$$

ó sea,

$$M = 2 \pi r h r \zeta \quad \text{en } r = r \quad \text{A. 2. 3}$$

Despejando ζ de la ecuación A. 2. 3 tenemos:

$$= M / (2 \pi r^2 h) \quad \text{A. 2. 4}$$

Substituyendo la ecuación A. 2. 4 en la ecuación A. 2. 2 se tiene:

$$C_1 = M / 2 \pi h \quad \text{A. 2. 5}$$

De la condición número 4 se deduce que el momento observado es constante. Los momentos en el fluido a dos radios cualesquiera en el ánulo que queda entre los cilindros (fig. A. 2. 1) deben ser iguales, por lo tanto:

$$M = \zeta_b 2 \pi R b^2 h = \zeta_c 2 \pi R c^2 h \quad \text{A. 2. 6}$$

Así, de la ecuación A. 2. 6 concluimos que:

$$\left(\zeta_b / \zeta_c\right) = \left(R c^2 / R b^2\right) = \epsilon^2 \quad \text{A. 2. 7}$$

Ahora, supondremos por simplicidad que el cilindro interno está rotando con una velocidad angular Ω_b . La velocidad lineal a un radio r a partir del eje es rw . La velocidad a una distancia dr de r está dada por:

$$(r + dr)(w + dw) = rw + w dr + r dw + dr dw \quad \text{A. 2. 8}$$

De la ecuación A. 2. 8 el término $dr dw$ se desprecia por ser de segundo orden.

El incremento de velocidad al pasar de r a $r + dr$ es:

$$dv = w dr + r dw \quad \text{A. 2. 9}$$

y el gradiente es:

$$(dv / dr) = w + (dw / dr) r \quad \text{A. 2. 10}$$

donde w es la velocidad angular de todo el aparato, lo que implica que los esfuerzos internos se derivan del segundo término $(r dw/dr)$ (17). De la ecuación A. 2. 10 teniendo en cuenta lo anterior, de la ecuación A. 2. 4 y sabiendo que:

$$-(dv / dr) = f(\zeta) \quad \text{A. 2. 11}$$

tenemos que:

$$-r (dw / dr) = f(\zeta) = f(M / 2 \pi r^2 h) \quad \text{A. 2. 12}$$

Si derivamos la ecuación A. 2. 4 sabiendo además que el momento es constante:

$$r^2 (d\zeta / dr) + 2r\zeta = 0 \text{ ó sea, } (dr / r) = -(d\zeta / 2\zeta) \quad \text{A. 2. 13}$$

Y por lo tanto:

$$dw = (1/2) f(\zeta) (d\zeta / \zeta) \quad \text{A. 2. 14}$$

Integrando la ecuación A. 2. 14 se obtiene:

$$\int_0^{\Omega} dw = \Omega = (1/2) \int_{\zeta_b}^{\zeta_c} f(\zeta) (d\zeta / \zeta)$$

A. 2. 15

La ecuación A. 2. 15 es la ecuación general para viscosímetros de cilindros coaxiales.

Resolviendo la ecuación A. 2. 15 para el caso de tener el rotor del viscosímetro sumergido en una frontera infinita de fluido (modelo Brookfield Synchro-lectric) se tiene:

El valor de ζ_c es igual a cero y la ecuación A. 2. 15 se transforma en:

$$\Omega = (1/2) \int_{\zeta_b}^0 f(\zeta) (d\zeta / \zeta) \quad \text{A. 2. 16}$$

Diferenciando la ecuación A. 2. 16 con respecto a ζ_b tenemos:

$$f(\zeta_b) = -2 (d\Omega / d \ln \zeta_b) \quad \text{A. 2. 17}$$

que es el valor requerido de la rapidez de corte necesario para poder, junto con el valor del esfuerzo cortante (ζ_b), hacer la curva de flujo del material.

La única observación importante es que la ecuación A. 2. 17 no es válida cuando existe un valor crítico del esfuerzo cortante.

Si resolvemos la ecuación A. 2. 15 para el caso de viscosímetros en que existe un cilindro que gira y otro que está fijo, y para los cuáles la diferencia de radios es pequeña (modelo Fann V-G Meter) se tiene que:

La ecuación A. 2. 15 se puede diferenciar con respecto a ζ_b para dar:

$$(d\Omega / d\zeta_b) = (1/2) (1/\zeta_b) (f(\zeta_b) - f(\zeta_c)) \quad \text{A. 2. 18}$$

La ecuación A. 2. 18 presenta serias dificultades en cuánto se quiere despejar un valor de la rapidez de corte y para que éste, junto con el valor del esfuerzo cortante correspondiente, se puede usar para hacer la curva de flujo.

Por éste motivo y mediante una serie de manipulaciones matemáticas comple

jas que no tiene ningún objeto presentar aquí (consúltese la referencia 17), la ecuación A. 2. 18 se convirtió a:

$$f(\zeta_b) = \left(\frac{\Omega}{\ln \epsilon} \right) \left[1 + \ln \epsilon \left(\frac{d \ln \Omega}{d \ln \zeta_b} \right) + \left(\frac{\ln^2 \epsilon}{3 \Omega} \right) \left(\frac{d^2 \Omega}{d (\ln \zeta_b)^2} \right) + \left(\frac{\ln^4 \epsilon}{45 \Omega} \right) \left(\frac{d^4 \Omega}{d (\ln \zeta_b)^4} \right) + \dots \right] \quad \text{A. 2. 19}$$

La ecuación A. 2. 19 es precisamente la usada en el capítulo 3, sección 3.

Para ejemplificar el uso de la ecuación A. 2. 15 la aplicaremos a dos modelos específicos:

a) Ley de la potencia.

b) Modelo de Eyring.

a) Ley de la potencia

La ecuación que representa a éste modelo es:

$$\zeta = K \left| -\left(\frac{dv}{dr} \right) \right|^n \quad \text{A. 2. 20}$$

Haciendo un balance de fuerzas se tiene que:

$$M = \zeta \, 2 \pi r^2 h = K \left| -\left(\frac{dv}{dr} \right) \right|^n \, 2 \pi r^2 h \quad \text{A. 2. 21}$$

Rearreglando la ecuación A. 2. 21 obtenemos:

$$\left| -dw \right|^n = \left(\frac{M}{2 \pi K h} \right) \left(\frac{dr^n}{r^{n+2}} \right) \quad \text{A. 2. 22}$$

es decir:

$$-dw = \left(\frac{M}{2 \pi K h} \right)^{1/n} \left(\frac{dr}{r^{(n+2)/n}} \right) \quad \text{A. 2. 23}$$

Aplicando la ecuación A. 2. 15 e integrando la ecuación A. 2. 23 para $w=0$ a $w=\Omega$ y de $r=R_c$ a $r=R_b$, obtenemos:

$$\Omega = \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{M}{2 \pi K h} \right)^{1/n} \left[\left(\frac{1}{R_b} \right)^{2/n} - \left(\frac{1}{R_c} \right)^{2/n} \right] \quad \text{A. 2. 24}$$

pero como $\zeta_b = \frac{M}{2 \pi R_b^2 h}$, entonces la ecuación A. 2. 24 se transforma en:

$$\Omega = (n/2) (\zeta_b / K)^{1/n} \left[1 - (R_b / R_c)^{2/n} \right] \quad \text{A. 2. 25}$$

Tomando logaritmos en la ecuación A. 2. 25 se tiene:

$$\ln \Omega = (1/n) \ln \zeta_b + \ln \left[(n/2) (1/K)^{1/n} (1 - (R_b/R_c)^{2/n}) \right] \quad \text{A. 2. 26}$$

Si graficamos $\ln \Omega$ contra $\ln \zeta_b$, de la ecuación A. 2. 26 se calcula n , que es el inverso de la pendiente de esta línea recta; y con el valor de la ordenada en el origen se calcula luego el valor de K .

Habiendo obtenido las constantes de la ley de la potencia en el rango de experimentación, entonces se puede hacer la curva de flujo mediante la ecuación A. 2. 20.

b) Modelo de Eyring

Se representa por la siguiente ecuación:

$$\zeta = (1/\mu) \operatorname{arc} \sinh \left[- (1/\xi) r (dw/dr) \right] \quad \text{A. 2. 27}$$

Rearreglando la ecuación A. 2. 27 obtenemos:

$$- dw = \xi (\sinh \mu \zeta) (dr/r) \quad \text{A. 2. 28}$$

Integrando la ecuación A. 2. 28 entre $w=0$ y $w=\Omega$, y $r=R_b$ a $r=R_c$, y como además $\zeta = M / 2 \pi r^2 h$, entonces se tiene que:

$$\Omega = (\xi/2) \sum_{n=0}^{\infty} \left[(c/R_b^2)^{2n+1} - (c/R_c^2)^{2n+1} / (2n+1)(2n+1)! \right]$$

A. 2. 29

donde $c = M \mu / 2 \pi h$

Expandiendo la ecuación A. 2. 29 tenemos:

$$\Omega = (\xi/2) \left[c b + (1/3 \cdot 3!) (c b)^3 + (1/5 \cdot 5!) (c b)^5 + \dots \right]$$

A. 2. 30

donde $b = (1/Rb^2) - (1/Rc^2)$.

Los términos que contienen el producto cb en la ecuación A. 2. 30 son pequeños debido a los valores de M y de b , y elevados a potencias grandes son aún más pequeños, de tal forma que consideraremos como una buena aproximación tomando hasta el valor del tercer término de la expansión de la serie, mismo que aparece en dicha ecuación.

Por lo tanto, tendremos que evaluar las constantes del modelo de Eyring que son ξ y μ .

Si tomamos logaritmos en la ecuación A. 2. 30 obtenemos:

$$\ln \Omega = \ln \left[cb + (cb)^3/3 \cdot 3! + (cb)^5/5 \cdot 5! \right] + \ln (\xi / 2) \quad \text{A. 2. 31}$$

Graficando $\ln \Omega$ contra $\ln \left[cb + (cb)^3/3 \cdot 3! + (cb)^5/5 \cdot 5! \right]$ dará una línea recta de pendiente 1; tomando el valor de la ordenada en el origen obtendremos el valor de ξ y luego calcularemos el valor de la otra constante μ partiendo de la ecuación A. 2. 30, aplicando un método numérico para la solución de raíces de ecuaciones, que pudiera ser el método de Newton Raphson (28).

Una vez obtenidas las constantes ξ y μ la substitución de éstas en la ecuación A. 2. 27 permitirá el cálculo de la curva de flujo del material.

Como podrá observarse con éstos dos ejemplos, a medida que el modelo se vuelve más complicado, la solución analítica del mismo se vuelve más difícil y tiende a hacerse siempre aproximada.

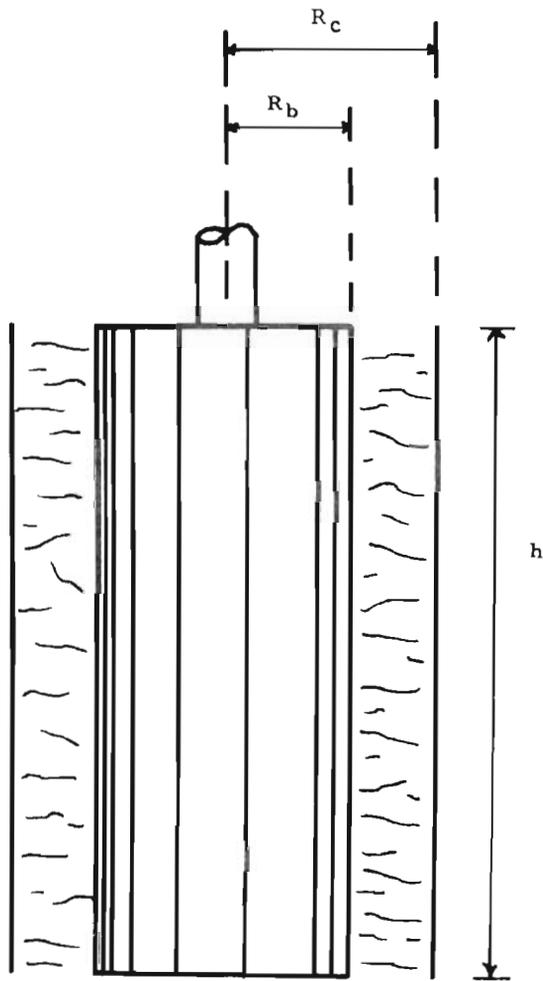


fig. A. 2. 1

A P E N D I C E 3

DERIVACION DE LA ECUACION DE LA CAIDA DE PRESION
DE UN FLUIDO NEWTONIANO PARA LA ZONA TURBULEN
TA APLICANDO EL ANALISIS DIMENSIONAL POR EL ME
TODO DE RAYLEIGH

Una vez fijadas las variables de diseno, el método de Rayleigh (14) establece que:

$$\Delta P \propto \langle v \rangle^a \rho^b \mu^c L^d D^e g_c^f \quad \text{A. 3. 1}$$

Por lo tanto, hay que especificar las dimensiones de las diferentes variables:

variables	dimensiones
ΔP	$F L^{-2}$
$\langle v \rangle$	$L t^{-1}$
ρ	$m L^{-3}$
μ	$m L^{-1} t^{-1}$
L	L
D	L
g_c	$m L F^{-1} t^{-2}$

De tal forma que la ecuación A. 3. 1 se transforma en:

$$F L^{-2} \propto (L t^{-1})^a (m L^{-3})^b (m L^{-1} t^{-1})^c (L)^d (L)^e (m L F^{-1} t^{-2})^f$$

A. 3. 2

Y estableciendo la relación entre las dimensiones fundamentales y los exponentes considerados tenemos que:

$$\text{Fuerza : } 1 = -f$$

$$\text{Longitud : } -2 = a - 3b - c + d + e + f$$

$$\text{Masa : } 0 = b + c + f$$

$$\text{Tiempo : } 0 = -a - c - 2f$$

A. 3. 3

Resolviendo para los exponentes el sistema de ecuaciones planteado en la ecuación A. 3. 3, se tiene que:

$$f = -1$$

$$0 = b + c - 1 ; b = 1 - c$$

$$0 = -a - c + 2 ; -a = c - 2 ; a = 2 - c$$

$$-2 = 2 - c - 3(1 - c) - c + d + e - 1$$

$$-2 = 2 - c - 3 + 3c - c + d + e - 1$$

$$-2 - 2 + 3 + 1 = c + d + e$$

$$d + e = -c ; e = -c - d$$

Quedando las siguientes ecuaciones:

$$f = -1 \quad \text{A. 3. 4}$$

$$b = 1 - c \quad \text{A. 3. 5}$$

$$a = 2 - c \quad \text{A. 3. 6}$$

$$d + e = -c \quad \text{A. 3. 7}$$

$$e = -c - d \quad \text{A. 3. 8}$$

Como se tienen cuatro ecuaciones (A. 3. 5, A. 3. 6, A. 3. 7 y A. 3. 8) y cinco incógnitas (a, b, c, d, e) necesito suponer una de ellas para poder resolver el sistema, quedando la solución en función de una de ellas.

Si $d = 1$, entonces $e = -c - 1$, con lo que la ecuación A. 3. 1 se transforma en:

$$\Delta P \propto \langle v \rangle^{2-c} \rho^{1-c} \mu^c L D^{-c-1} g_c^{-1} \quad \text{A. 3. 9}$$

Reagrupando:

$$(\Delta P / L) \propto (\langle v \rangle^2 / \langle v \rangle^c) (\rho / \rho^c) \mu^c (1 / D^c) (1 / g_c D)$$

$$(\Delta P / L) \propto (\langle v \rangle^2 \rho / g_c D) (\mu / \langle v \rangle \rho D)^c$$

$$(\Delta P / L) \propto (\langle v \rangle^2 \rho / g_c D) (1 / Re)^c$$

Por lo tanto:

$$(\Delta P / L) (g_c D / \langle v \rangle^2 \rho) = \phi(Re) \quad \text{A. 3. 10}$$

que es la ecuación usada en el capítulo 4, sección 3.

APENDICE 4

PROGRAMAS DE COMPUTADORA PARA LA CUANTIFICACION DE LOS MODELOS

Se hicieron dos programas:

a) Programa no. 1

La única finalidad de este programa fué el calcular los valores de la velocidad angular (radianes por segundo) y el logaritmo del esfuerzo cortante ($\ln \tau$), a partir de cuya gráfica se pueden obtener los valores de la rapidez de corte.

El programa aunque es simple, proporciona los valores con mucha más precisión que si se obtuvieran manualmente, cuya consecuencia directa es una determinación más exacta de los valores de la rapidez de corte.

El programa no. 1 se adjunta como originalmente fué corrido.

b) Programa no. 2

El programa no. 2 aunque agrupa varios procesos de cálculo, está básicamente dividido en dos etapas: la primera, que le permite calcular los parámetros de los modelos escogidos, mediante las siguientes subrutinas:

LEAST . - calcula los parámetros n y K del modelo de la Ley de la Potencia.

MULEST . - obtiene los coeficientes de las funciones polinomiales de segundo

y tercer grado, que son los parámetros para dichos modelos.

Estas dos subrutines utilizan el método de mínimos cuadrados para elaborar las regresiones.

Es obvio, que éstos parámetros se obtienen a partir de los datos de la curva de flujo de esfuerzo cortante contra rapidez de corte, obtenida con ayuda del programa no. 1.

La segunda etapa, permite la obtención de las caídas de presión, número de Reynolds y del factor de fricción, que cada modelo propone, una vez que se han obtenido los parámetros de éstos, mediante la aplicación de las siguientes subrutines:

DPPL . - para el modelo de la Ley de la Potencia.

DPRP2 . - para la función polinomial de segundo grado.

DPRP3 . - para la función polinomial de tercer grado.

Y como los datos fueron comparados contra el flujo de agua bajo las mismas condiciones, se elaboró otra subroutine que proporcionara el equivalente newtoniano, dada por:

NEW . - para el flujo de agua, a las mismas condiciones experimentales que nuestros fluidos de interés.

Y por último, una subroutine que permite graficar tanto las curvas de flujo de cada solución, como los diferentes perfiles de velocidad; aunque dichas gráficas no son muy precisas, dan una idea bastante aproximada de lo que está sucediendo. Esta subroutine se llama PLOT.

El programa no. 2 se adjunta tal como se corrió originalmente.

```
FILE S=ALF.UNIT=READER
```

```
C
```

```
C..... PROGRAMA NO. 1 .....
```

```
C
```

```
C CON LOS DATOS OBTENIDOS DE UN VISCOSIMETRO BROOKFIELD DE VISCOSIDADES  
C APARENTES CONTRA VELOCIDADES ANGULARES, ESTE PROGRAMA CALCULA LOS VA-  
C LORES DE VELOCIDAD ANGULAR Y LOGARITMO NATURAL DEL ESFUERZO CORTANTE  
C QUE SE NECESITAN PARA OBTENER LOS VALORES DE LA RAPIDEZ DE CORTE, SE-  
C GUN EL PROCEDIMIENTO ESTABLECIDO EN EL CAPITULO 3 PARA ELABORAR LA  
C CURVA DE FLUIDO.
```

```
C
```

```
      DIMENSION OMEGA(15),VISCO(15),TAU(15),LNTAU(15),N(15)
```

```
      REAL LNTAU
```

```
      READ(5,1) N00A
```

```
      DO 100 I=1,N00A
```

```
      READ(5,7) A,B,C,D,E,F
```

```
      READ(5,1) N
```

```
      READ(5,2) (OMEGA(IP),IP=1,N)
```

```
      READ(5,2) (VISC0(IL),IL=1,N)
```

```
      WRITE(6,8) A,B,C,D,E,F
```

```
      WRITE(6,3)
```

```
      DO 101 K=1,N
```

```
      WRITE(6,4) OMEGA(K),VISCO(K)
```

```
101 CONTINUE
```

```
      DO 102 J=1,N
```

```
      W(J)=OMEGA(J)*0.1047
```

```
      TAU(J)=2.0*0.000672*VISCO(J)*W(J)/32.17
```

```
      LNTAU(J)=ALOG(TAU(J))
```

```
102 CONTINUE
```

```
      WRITE(6,10)
```

```
      WRITE(6,5)
```

```
      DO 103 I=1,N
```

```
      WRITE(6,6) W(I),TAU(I),LNTAU(I)
```

```
103 CONTINUE
```

```
C
```

```
C..... FORMATS .....
```

```
C
```

```
1  FORMAT(I3)
```

```
2  FORMAT(15F10.2)
```

```
3  FORMAT(2X,'VELOCIDAD ANGULAR (RPM)',10X,'VISCOSIDAD APARENTE (CP)',  
1 //)
```

```
4  FORMAT(9X,2(F12.4,21X))
```

```
5  FORMAT(14,2X,'OMEGA (RAD/SEG)',2X,'TAU (LBF/FT**2)',6X,'LN (TAU)',  
1 //)
```

```
6  FORMAT(2X,3(1PE15.9,2X))
```

```
7  FORMAT(5A5)
```

```
8  FORMAT(14,2X,'SOLUCION DE ',A6,' AL ',A6,'//',2X,'T = ',A6,4X,'AGI-  
TACION ',A6,AX,'FECHA ',A6, //)
```

```
10 FORMAT(///)
```

```
100 CONTINUE
```

```
      CALL EXIT
```

```
      END
```



```
21 MGG=MG6+1
GO TO 23
22 WRITE(6,33)
```

342

```
C
C ... IMPRESION DE TODAS LAS CAIDAS DE PRESION ...
C
```

```
WRITE(6,32)
DO 299 K=1,LL
PEX(K) = KM(K) * ( 845,33 - 62,300 ) * 0,005261
299 CONTINUE
DO 16 J=1,LL
P1(J)=P1(J)*0,0004882
P2(J)=P2(J)*0,0004882
P3(J)=P3(J)*0,0004882
P4(J)=P4(J)*0,0004882
PEX(J)=PEX(J)*0,0004882
16 CONTINUE
DO 17 K=1,LL
WRITE(6,18) Q(K), P4(K), P1(K), P2(K), P3(K)
17 CONTINUE
DO 300 J=1,LL
WRITE(6,301) PEX(J)
300 CONTINUE
```

```
C
C ... FORMATS
C
```

```
1 FORMAT(I3)
3 FORMAT(6A6)
5 FORMAT(8F10,6)
6 FORMAT(8F10,4)
7 FORMAT(1H1,2X,7SOLUCION DE ?,A6,? AL ?,A6,/,2X,?T= ?,A6,4X,?AGITAC
ION ?,A6,4X, ? FECHA ?, 2A6,/)
8 FORMAT(2X,7RAPIDEZ DE CORTE ?,4X,?ESFUERZO CORTANTE?,/)
10 FORMAT(2X,2(IPE15,8,7X))
11 FORMAT(14X,? GASTO VOLUMETRICO ?,/)
13 FORMAT(16X,1PE15,8)
18 FORMAT(5E15,8)
32 FORMAT(1H1,2X,? GASTO Q ?,3X,?P=NEWTONIANO (AGUA)?,5X,?P=LEY DE LA
1 POTENCIA?,5X,?P=POLINOMIAL GRADO 2?,5X,?P=POLINOMIAL GRADO 3?,/)
33 FORMAT(//,?*****?,,/)
1*****?,,/)
301 FORMAT( 10X, 1PE15,8)
2 CONTINUE
CALL EXIT
END
```

```
FORMAT S
FORMAT S
SEGM
```

```
BLUCK DATA  
COMMON /M1/U/U2/LL  
DIMENSION G(15)  
DATA (U(I),I=1,15)/0.001839,0.002359,0.003834,0.00437,0.006282,0.0  
107475,0.008927,0.009684,0.012047,0.01458,0.01853,0.02313,0.052866,  
20.06578,0.08953/  
DATA LL/15/  
END
```

C
C
C
C
C
C
C

```

SUBROUTINE LEAST(MN,YR,XR,BETA,ALFA)
DIMENSION YR(30),XR(30),YC(30),SIG(30),
1AA(60),EMAX(30)
DATA TST/4,303/
DO 106 J=1,NN
XR(J)=ALOG(XR(J))
YR(J)=ALOG(YR(J))
106 CONTINUE
MMN=NN
XN=FLOAT(MMN)
P1=0,0
P2=0,0
P3=0,0
P4=0,0
P8=0,0
P9=0,0
DO 1 I=1,NN
P1=P1+(XR(I)*YR(I))
P2=P2+XR(I)
P3=P3+YR(I)
P4=P4+(XR(I)**2)
1 CONTINUE
P5=P2**2
P6=P3/XN
P7=P2/XN
DO 2 I=1,NN
P8=P8+((XR(I)-P7)**2)
P9=P9+((YR(I)-P6)**2)
2 CONTINUE
BETA=(P1-(P2*P3/XN))/(P4-(P5/XN))
ALFA=P6-(BETA*P7)
RHO=BETA*SQRT(P8/P9)
SIGE12=(1,0/(XN-2,0))*(P9-(BETA*P6))
SIGE12=ABS(SIGE12)
DO 3 I=1,NN
SIG(I)=SQRT(SIGE12*((1,0/XN)+((XR(I)-P7)**2/P8)))
YC(I)=ALFA+(BETA*XR(I))
EMAX(I)=YC(I)+(TST*SIG(I))
EMIN(I)=YC(I)-(TST*SIG(I))
ERROR(I)=YR(I)-YC(I)
3 CONTINUE
SUE=0,0
DO 20 J=1,NN
SUE=SUE+(ERROR(J)**2)
20 CONTINUE
DIFE=0,0
IP=NN-1
DO 4 I=1,IP
DIFE=DIFE+((ERROR(I+1)-ERROR(I))**2)
4 CONTINUE
D=DIFE/SUE
RHO=1,0-(D/2,0)
ALFA=EXP(ALFA)
WRITE(6,5)
WRITE(6,6) ALFA,BETA
WRITE(6,7)
DO 8 I=1,NN
WRITE(6,9) XR(I),YR(I),YC(I)
8 CONTINUE
WRITE(6,10) RHO

```



```

SUBROUTINE OPPL(N,X,P)
DIMENSION P(30),G(15),D(30),VP(30),FF(30),RE(30),VMAX(30),AA(60),
1VZ(11),R(11)
COMMON /B1/W/B2/LL
REAL L,N,K
DATA L,RHO,(D(I),I=1,5)/14.0,62.55,0.17225,0.115,0.06866/
WRITE(6,1) L,RHO,N,K
DO 2 M=1,3
WRITE(6,3) D(M)
Z1= 1.0 / ( N - 2.0 )
Z2= ((D(M)/2.0)**2) * RHO / (868.0 * K)
Z3= ( N / (3.0 * N + 1.0) ) ** 2
Z4= (3.0 * N + 1.0) ** 2 / N
Z5= (N+2.0) / (N+1.0)
Z6= ( 1.0 / (N+2.0) ) ** 25
Z7= Z4 * Z5
GAMMA= ( Z2 * Z7 * Z3 ) ** 21
GMAX= GAMMA * 3.14159 * ((D(M)/2.0)**3)
WRITE(6,100) GMAX
DO 4 I=1,LL
T1=2.0*L*K/(D(M)/2.0)
T2=(3.0*N+1.0)/N
T3=W(I)/(3.14159*((D(M)/2.0)**3))
T4=(T2*T3)**N
P(I)=T1*T4
T5=(D(M)/2.0)*N/(3.0*N+1.0)
T6=(P(I)/T1)**(1.0/N)
VP(I)=T5*T6
T7=(T2**N)*(2.0**(N+1.0))
T8=K/(RHO*(VP(I)**(2.0-N))*(D(M)**N))
FF(I)=T7*T8
T9=(2.0**((3.0-N))*RHO*(D(M)**N))
T10=(4.0*W(I)/(3.14159*(D(M)**2)))**(2.0-N)
T11=(T2**N)*K
RE(I)=T9*T10/T11
T12=(D(M)/2.0)*N/(N+1.0)
VMAX(I)=T12*T6
T13=(N+1.0)/N
WRITE(6,5) W(I),P(I),RE(I),FF(I),VP(I)
RDA=0.0
DO 6 J=1,11
VZ(J)=A1(VMAX(I),RDA,T13,VP(I))
WRITE(6,7) RDA,VZ(J)
RTJ=RDA
RDA=RDA+0.1
6 CONTINUE
DO 8 IL=1,11
AA(IL)=VZ(IL)
AA(IL+11)=R(IL)
8 CONTINUE
CALL PLOT(AA,11,2,0,1)
4 CONTINUE
2 CONTINUE
WRITE(6,9)

```

C

C ... FORMATS

C

1 FORMAT(/,5X,?***** MODELLO POWER LAW *****?,/,2X,?L=?,F10.6,2X,?RH

10E?,F10.0,2X,?F?,1PE15.8,2X,2X=?,1PE15.8)	347	C
5 FORMAT(//,2X,?F?,1PE15.8,//)		C
5 FORMAT(2X,?L=?,1PE15.8,2X,?F?,1PE15.8,2X,?HE=F,1PE15.8,2X,?FF=		C
1?,1PE15.8,2X,?V=?F,1PE15.8,//)		C
7 FORMAT(//,2X,?R=?F,F10.6,2X,?V/?V=?F,F10.6)		C
9 FORMAT(//,2X,?FIN DE POWER LAW?)		C
100 FORMAT(2X,?GASTO MAXIMO PERMITIDO PARA ESTOS VALORES DE D,N,K,		C
1SEGUN OYA: Y JOHNSON?, 1PE15.8,//)		C
RETURN		C
END		C
		FORMAT S
		SEGM

```

FUNCTION A1(B1,B2,B3,B4)
A1=B1*(1.0-(B2**B3))/B4
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MULEST(AX,YH,NG,NG,L)
DIMENSION XR(50),YR(30),AX(11,11),B(11),C(11),P(20),YC(20),AA(60)
279 NUMBER=NN
WRITE(6,559)
WRITE(6,281) NG
MX2=MG*2
DO 200 I=1,MX2
P(I)=0.0
DO 200 J=1,NUMBER
P(I)=P(I)+XR(J)**I
200 CONTINUE
NG=MG+1
DO 201 I=1,NG
DO 201 J=1,NG
K=I+J-2
IF(K) 209,209,208
208 AX(I,J)=P(K)
GO TO 201
209 AX(I,1)=NUMBER
201 CONTINUE
B(1)=0.0
DO 221 J=1,NUMBER
B(1)=B(1)+YR(J)
221 CONTINUE
DO 222 I=2,NG
B(I)=0.0
DO 222 J=1,NUMBER
B(I)=B(I)+YR(J)*XR(J)**(I-1)
222 CONTINUE
NM1=NG-1
DO 230 K=1,NM1
KPI=K+1
L=K
DO 240 I=KPI,NG
IF(ABS(AX(I,K))-ABS(AX(L,K))) 240,240,241
241 L=I
240 CONTINUE
IF(L=K) 250,250,245
245 DO 214 J=K,NG
TEMP=AX(K,J)
AX(K,J)=AX(L,J)
214 AX(L,J)=TEMP
TEMP=B(K)
B(K)=B(L)
B(L)=TEMP
250 DO 230 I=KPI,NG
FACTOR=AX(I,K)/AX(K,K)
AX(I,K)=0.0
DO 231 J=KPI,NG
231 AX(I,J)=AX(I,J)-FACTOR*AX(K,J)
B(I)=B(I)-FACTOR*B(K)
230 CONTINUE
IF(AX(NG,NG)) 554,555,554
554 C(NG)=B(NG)/AX(NG,NG)
I=NM1
271 IP1=I+1
SUM=0.0
DO 270 J=IP1,NG

```



```

SUBROUTINE DRRF2(L,P)
DIMENSION C(6),P(30),D(3),w(15),VP(30),FF(30),RE(30),VZ(11),R(11),
1AA(60)
COMMON /B1/B2/LL
REAL L
DATA L,RHO,(D(I),I=1,3)/19.,02.33,0.17225,0.115,0.06866/
PI=3.14159
DO 1 M=1,3
WRITE(6,2) L,RHO,D(M)
DO 3 I=1,LL
A1=C(3)*((D(M)/2.0)**5)*(PI/5.0)
A2=C(2)*((D(M)/2.0)**4)*(PI/4.0)
A3=(C(1))*((D(M)/2.0)**3)*(PI/3.0)-w(I)
CALL ECUSEG(A1,A2,A3,X1R,X1I,X2R,X2I,P0)
IF(P0) 100,8,101
100 WRITE(6,4)
13 RETURN
8 P(I)=2.0*L*X1R
GO TO 102
101 IF(X1R)12,13,14
12 P(I)=2.0*L*X2R
GO TO 102
14 P(I)=2.0*L*X1R
102 A4=C(1)*D(M)/6.0
A5=C(2)*((D(M)/2.0)**2)/4.0
A6=C(3)*((D(M)/2.0)**3)/5.0
A7=P(I)/(2.0*L)
VP(I)=A4+A5*A7+A6*(A7**2)
FF(I)=D(M)*P(I)/(2.0*L*RHO*(VP(I)**2))
RE(I)=16.0/FF(I)
A8=C(1)*D(M)/2.0
A9=C(2)*((D(M)/2.0)**2)/2.0*A7
A10=(C(3))*((D(M)/2.0)**3)/3.0*(A7**2)
WRITE(6,5) Q(I),P(I),RE(I),FF(I),VP(I)
RDA=0.0
DO 15 J=1,11
V=AB*(1.0-RDA)+A9*(1.0-(RDA**2))+A10*(1.0-(RDA**3))
VZ(J)=V/VP(I)
WRITE(6,6) RDA,VZ(J)
R(J)=RDA
RDA=RDA*0.1
15 CONTINUE
DO 16 IL=1,11
AA(IL)=VZ(IL)
AA(IL+11)=R(IL)
16 CONTINUE
CALL PLOT(AA,11,2,0,1)
3 CONTINUE
1 CONTINUE
WRITE(6,7)
WRITE(6,33)

```

C

C ... FORMATS

C

```

2 FORMAT(//,5X,7***** MODELO DE REGRESION POLINOMIAL DE GRADO 2 ****
1*,/,2X,7L=7,F10.6,2X,7RHO=7,F10.6,2X,7D=7,1PE15.8)
4 FORMAT(//,5X,7DISCRIMINANTE NEGATIVO?)
5 FORMAT(//,2X,7Q=?,1PE15.8,2X,7P=?,1PE15.8,2X,7RE=?,1PE15.8,2X,7FF=?

```



```

SUBROUTINE DPRP3(PL,C,P)
DIMENSION P(30),C(6),Q(15),PI(30),PL(30),FF(30),VP(30),RE(30),VZ(1
1),R(11),AA(60),D(3)
COMMON /B1/Q/B2/LL
REAL L
DATA L,RMO,(D(I),I=1,3)/19,0,62,35 ,0.17225,0,115,0,06866/
DO 1 I=1,3
WRITE(6,2) L, RMO,D(I)
DO 3 J=1,LL
P(J)=PL(J)
B1=D(I)/(4.0*L)
B2=6.0*C(3)/(5.0*C(4))
B3=3.0*C(2)/(2.0*C(4))
B4=(2.0*C(1)/C(4))-(6.0*Q(J)/C(4)*3.14159*((D(I)/2.0)**3))
NO=1
5 Y1=Y(B1,B2,B3,B4,P(J))
Y2=Y(P(B1,B2,B3,P(J)))
PI(J)=P(J)-Y1/Y2
IF(ABS(P(J)-PI(J)) .LT. 1.0E-06 .OR. NO .GT. 20)GO TO 4
P(J)=PI(J)
NO=NO+1
GO TO 5
4 P(J)=PI(J)
WRITE(6,6)NO,P(J)
B5=D(I)*P(J)/(4.0*L)
B6=D(I)/2.0
B7=C(4)*B6/6.0
B8=C(3)*B6/5.0
B9=C(2)*B6/4.0
B10=C(1)*B6/3.0
VP(J)=B7*(B5**3)+B8*(B5**2)+B9*B5+B10
FF(J)=D(I)*P(J)/(2.0*L*RHO*(VP(J)**2))
RE(J)=16.0/FF(J)
TW=B6*P(J)/(2.0*L)
B11=C(1)*B6
B12=C(2)*TW*B6/2.0
B13=C(3)*(TW**2)*B6/3.0
B14=C(4)*(TW**3)*B6/4.0
WRITE(6,7)Q(J),P(J),RE(J),FF(J),VP(J)
RDA=0.0
DO 8 K=1,11
V=B11*(1.0-RDA)+B12*(1.0-RDA**2)+B13*(1.0-RDA**3)+B14*(1.0-RDA**4)
VZ(K)=V/VP(J)
WRITE(6,9)RDA,VZ(K)
R(K)=RDA
RDA=RDA+0.1
8 CONTINUE
DO 10 IL=1,11
AA(IL)=VZ(IL)
AA(IL+1)=R(IL)
10 CONTINUE
CALL PLOT(AA,11,2,0,1)
3 CONTINUE
1 CONTINUE
WRITE(6,11)

```

C ... FORMATS

2 FORMAT(//,5X,1***** MODELO DE REGRESION POLINOMIAL DE GRADO 3 *****)


```

SUBRC=TIME*RN(P)
DIMENSION P(30),W(15),D(30),VP(30),FF(30),RE(30),VMAX(30),AA(60),
1VZ(11),R(11)
C=C
CO=404./B1/W/B2/LL
C=C
REAL MU,L
DATA MU,L,RHO,(D(I),I=1,3)/6.72E-04,19.0,62.530,0.17225,0.115,0.06
C=C
1800/
C=C
WRITE(6,1) L,RHO,MU
C=C
DO 2 I=1,3
C=C
WRITE(6,3) D(I)
C=C
DO 4 J=1,LL
C=C
P(J)=6.0*MU*Q(J)*L/(3.14159*((D(I)/2.0)**4))
C=C
P(J)=P(J)/32.17
C=C
VP(J)=W(J)/3.14159*((D(I)/2.0)**2)
C=C
RE(J)=4.0*W(J)*RHO/(3.14159*D(I)*MU)
C=C
IF(RE(J)=2100) 15,15,16
C=C
15 FF(J)=0.25*D(I)*P(J)/(0.5*L*RHO*(VP(J)**2))*32.17
C=C
GO TO 17
C=C
16 A=(0.0009)/(3.7*D(I))
C=C
B=2.51/RE(J)
C=C
X=-2.0*A*ALOG 10(A+1.0E-12)
C=C
100 Y=X+2.0*A*ALOG 10(A+B*X)
C=C
IF(ABS(Y)-0.000001) 30,30,200
C=C
200 YPRIM=1.0+(0.43429448*2.0*B)/(A+B*X)
C=C
X=X-Y/YPRIM
C=C
GO TO 100
C=C
30 FF(J)=1.0/(X**2)
C=C
FF(J)=FF(J)/4.0
C=C
GO TO 17
C=C
17 VMAX(J)=(D(I)/2.0)**2)*P(J)/(4.0*MU*L)*32.17
C=C
WRITE(6,5) W(J),P(J),RE(J),FF(J),VP(J)
C=C
RDA=0.0
C=C
DO 6 M=1,11
C=C
V=VMAX(J)*(1.0-(RDA**2))
C=C
VZ(M)=V*VP(J)
C=C
WRITE(6,7) RDA,VZ(M)
C=C
R(M)=0DA
C=C
RDA=RDA*0.1
C=C
6 CONTINUE
C=C
DO 8 IL=1,11
C=C
AA(IL)=VZ(IL)
C=C
AA(IL+1)=R(IL)
C=C
8 CONTINUE
C=C
CALL PLOT(AA,11,270,1)
C=C
4 CONTINUE
C=C
2 CONTINUE
C=C
WRITE(6,9)
C=C
1 FORMAT(/,5X,/'** MODELO NEWTONIANO = AGUA **',/,2X,7L=7,F10.6,
C=C
2X,7R=7,F10.6,2X,7VISCOSIDAD=7,1PE15.8)
C=C
3 FORMAT(/,2X,7D=7,1PE15.8,/)
C=C
5 FORMAT(2X,7U=7,1PE15.8,2X,7P=7,1PE15.8,2X,7RE=7,1PE15.8,2X,7FF=7,
C=C
11PE15.8,2X,7VP=7,1PE15.8,/)
C=C
7 FORMAT(/,2X,7V/A=7,F10.6,2X,7V/VP=7,F10.6)
C=C
9 FORMAT(/,2X,7FIN DEL FLUIDO NEWTONIANO/)
C=C
RETURN
C=C
END

```

```

SUBROUTINE PLOT(A, NL, NS)
DIMENSION OUT(101), YPR(11), ANG(4), P(60)
DATA (ANG(L), L=1, 4)/1H., 1H., 1H., 1H./, BLANK/1H /

```

```

C
C A MATRIZ PARA SER GRAFICADA
C N NO FILAS
C M NO COLUMNAS .1A. VARIABLE BASE LAS OTRAS SON CROSS-VARIABLES.
C NL NO LINEAS A GRAFICAR SI NL=0 ENTONCES USA 50.
C NS =0 ORDEN ASCENDENTE
C =1 ORDEN IRREGULAR.
C

```

```

WRITE(6, 1040)
II=N*M
DO 1020 J=1, II
WRITE(6, 1030) J, A(J)
1020 CONTINUE
NLL=NL
IF(NS) 26, 26, 20
20 DO 25 I=1, N
DO 24 J=1, N
IF(A(I)=A(J)) 24, 24, 21
21 L=I-N
LL=J-N
DO 22 K=1, M
L=L+N
LL=LL+N
F=A(L)
A(L)=A(LL)
22 A(LL)=F
24 CONTINUE
25 CONTINUE
WRITE(6, 85)
DO 62 K=1, II
WRITE(6, 1030) K, A(K)
62 CONTINUE
26 IF(NLL) 30, 28, 30
28 VLL=N
30 XSCAL=(A(N)-A(1))/(FLOAT(NLL)-1)
M1=N+1
YMIN=A(M1)
YMAX=YMIN
M2=MAN
DO 43 J=M1, M2
IF(A(J)=YMIN) 38, 36, 36
36 IF(A(J)=YMAX) 43, 43, 35
38 YMIN=A(J)
GO TO 43
35 YMAX=A(J)
43 CONTINUE
YSCAL=(YMAX-YMIN)/100.0
WRITE(6, 253)
XB=A(1)
L=1
MY=M-1
I=1
F=I-1
33 XPR=XB+F*XSCAL
IF(ABS(A(L)-XPR), EQ, 0.0) GO TO 1

```

```

IF(ALLI-APR) 6,7,7
6 F=F+1.0
  GO TO 55
7 XPR=(XPR+(XB+(F-1.0)*XSCAL))/2.0
1 DO 55 IX=1,101
  OUT(IX)=BLANK
55 CONTINUE
  DO 60 J=1,NY
    LL=L+J*N
    JP=((A(LL)-YMIN)/YSCAL)+1.0
    JP=ABS(JP)
    JP=LDAT(JP)
    OUT(JP)=ANG(J)
60 CONTINUE
  KK=4
  WRITE(6,90) XPR,(OUT(IZ),IZ=1,101)
1033 WRITE(6,94)
  IF(KK=4) 1031,1032,1032
1031 KK=KK+1
  GO TO 1033
1032 L=L+1
  I=I+1
  IF(I=N) 3,3,86
86 WRITE(6,97)
  YPR(1)=YMIN
  DO 909 KN=1,9
  YPR(KN+1)=YPR(KN)+YSCAL*10.0
909 CONTINUE
  YPR(11)=YMAX
  WRITE(6,98) (YPR(IP),IP=1,11)
  WRITE(6,253)
C
C ... FORMATS
C
85 FORMAT(//,20X,?DESPUES DE ORDENAR ASCENDENTEMENTE LA MATRIZ A?,//)
90 FORMAT(1H ,1PE11.4,2A,?,?,2X,101A1)
94 FORMAT(1H )
97 FORMAT(1H ,16X,101H+
1 + + + + + + + +)
98 FORMAT(1H0,4X,11F10.4)
253 FORMAT(1H1)
1030 FORMAT(20X,7A(2,I3,?) = ?,1PE20.8)
1040 FORMAT(//,20X,?VALORES DE LA MATRIZ A DE LA SUBROUTINE PLUT CALCULO-
  ILADOS A PARTIR DE LOS DATOS ORIGINALES?)
  RETURN
  END

```

FORMAT 8
SEGM

A P E N D I C E 5

ELABORACION DE UN MANOMETRO DIFERENCIAL DE MERCURIO

La ecuación general para manómetros sencillos de tipo U (véase la figura A. 5. 1) (34) es:

$$P_a - P_b = (g / g_c) R_m (\rho_a - \rho_b) \quad \text{A. 5. 1}$$

donde:

P_a, P_b . - presiones en puntos anterior y posterior, respectivamente, de la zona donde se quiere medir la caída de presión.

R_m . - lectura de la diferencia de altura entre las ramas del manómetro.

ρ_a . - densidad del líquido más pesado que debe estar colocado en el tubo en forma de U.

ρ_b . - densidad del líquido más ligero que debe estar circulando por la zona de prueba.

g . - aceleración de la gravedad.

g_c . - factor de conversión.

La ecuación A. 5. 1 es independiente de la distancia Z_m (fig. A. 5. 1) y de las dimensiones del tubo, con tal que las presiones P_a y P_b estén medidas sobre el mismo plano horizontal.

Estos manómetros deben ser diseñados para una caída de presión determin

nada, y obtener la lectura correspondiente, con el fin de dimensionar la altura que deben tener las ramas verticales del manómetro. Pero como para los fluidos no newtonianos la caída de presión depende mucho de los parámetros de cada modelo y de la concentración usada, se prefirió, en función de esto, fijar una altura determinada que proporciona la caída de presión máxima que se puede medir con éste manómetro diferencial.

Para tal efecto se contó con dos ramas verticales de tubo de vidrio de 1.5 metros de altura y 6 mm de diámetro, fijándose una altura de 1.3 metros máxima, por cuestiones de seguridad de operación y de construcción. Como la temperatura de las soluciones (y de operación del equipo) varía entre 17 y 20°C, se tomó una temperatura promedio para hacer el diseño, a la cuál se tienen los siguientes valores de las variables:

$$\rho_a = 845.8 \text{ lb/ft}^3$$

$$\rho_b = 62.33 \text{ lb/ft}^3$$

$$R_{m_{\text{máx}}} = 1300 \text{ mm} = 4.2653 \text{ ft}$$

$$(g / g_c) = 1 \text{ lb} / \text{lb}$$

Por lo tanto:

$$\Delta P_{\text{máx}} = 4.2653 (845.8 - 62.33) \text{ lb} / \text{ft}^2$$

$$\Delta P_{\text{máx}} = 3341.7345 \text{ lb} / \text{ft}^2 = 23.2 \text{ psia}$$

Por lo tanto, tenemos que el sistema no puede ser operado para soluciones que con las condiciones de flujo dadas, sobrepase éste límite de 23.2 psia para la caída de presión. Este valor no debe excederse ni en la zona laminar ni en la zona turbulenta.

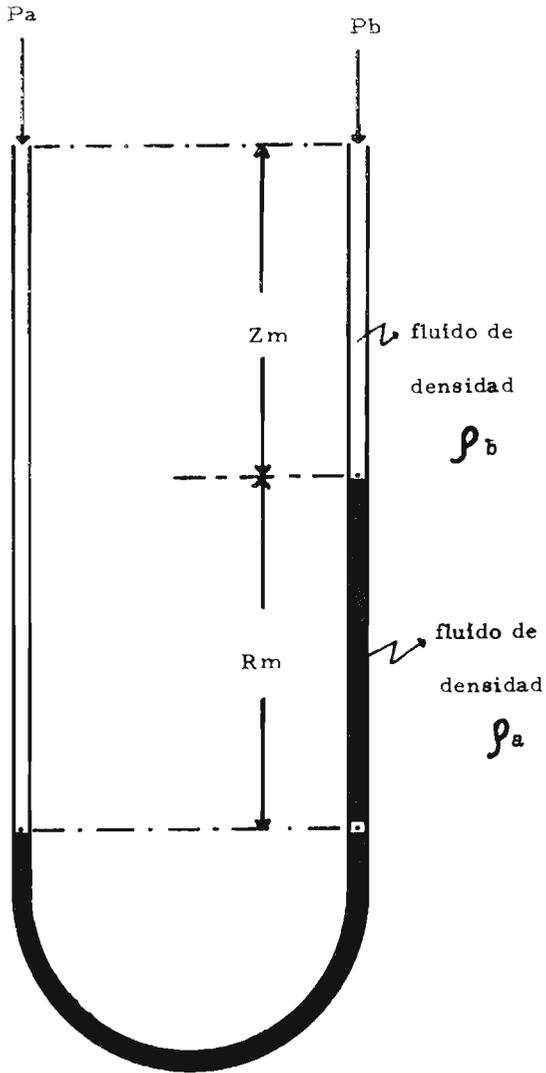


fig. A. 5. 1

F E D E R R A T A S

Página	Párrafo	Dice	Debe Decir
4	2	estáncompuestos	están compuestos
6	2	continumm	continuum
11	2	al eje en un	al eje en un
12	2	comrendidos	comprendidos
12	2	comeja	compleja
20	3	tamnién	también
33	3	comonentes	componentes
34	2	en al dirección	en la dirección
34	4	, ó empíricas,	, ó modelos empíri cos ,
54	5	reroduce	reproduce
58	2	con stante	cons tante
65	2	indepensientemente	independientemente ^A
68	1	materiales materia les y,	materiales y,
68	1	choes permitir	cho es permitir
72	3	cal ibrado	calibrado
88	2	iniaciales	iniciales
93	2	geométricamente se mejantes	geométricamente similares
122		$K = m' (3++/4n)^n$	$K = m' (3+1/4n)^n$