00362
3
2y'

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

" ESTUDIO DEL ESPINTENSOR DE LANCZOS "

T E S I S

Que para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Especialidad en Física

P r e s e n t a

TOMAS ESPINOSA MARTINEZ

México. D. F. . 1991

A G R A D E C I M I E N T O S

Agradezco:

Al Dr. José Luis Fernández Chapou, Facultad de Ciencias U.N.A.M , Area de Física UAM-Azcapotzalco por su inapreciable ayuda y dirección así como la información facilitada a traves de artículos y preprints para la elaboración del presente trabajo.

Al Dr. José Luis López Bonilla Area de Física UAM-Azcapotzalco sus invaluables recomendaciones y sugerencias en la revisión de este trabajo .

A los Señores Doctores:

Dr. Roberto Susman Livouski, Instituto de Ciencias Nucleares U.N.A.M.,

Dr. Michael Patrick Ryan Allen, Instituto de Ciencias Nucleares U.N.A.M.,

Dr. Fermin Viniegra Heberlein, Fac. de Ciencias U.N.A.M.,

Dr. Francisco Medina Nicolau, Fac. de Ciencias U.N.A.M.,

Dr. Ramiro Garcia Garcia, Instituto de Física U.N.A.M.,

Por la revisión de éste trabajo y por sus importantes y atinadas sugerencias para mejorar esta tesis.

Al M. en C. Tomas David Navarrete Gonzalez Area de Física U.A.M. Azcapotzalco por el excelente trabajo en el procesador de texto cientifico Chi-Writer para la elaboracion de esta tesis

CONTENIDO

INTRODUCCION

El objetivo de ésta tésis es proporcionar la herramienta necesaria en el tratamiento de la relatividad general en el estudio del espintensor de Lanczos. Así como el de revisar los avances del potencial generador del tensor de Weyl, conocido con el nombre de espintensor de LANCZOS. El trabajo se encuentra dividido de la siguiente manera:

En el capitulo I se presenta el marco del desarrollo de este trabajo abordándose de manera resumida la teoria general de la relatividad así como sus herramientas básicas para su descripción, tales como: el análisis tensorial, la geometria diferencial de Riemann, las tétradas reales y la transformación de Lorentz. Se describe la expresión para el tensor de Weyl en el formalismo tensorial.

A continuación, en el capitulo II se aborda mediante una exposición sistemática el formalismo de Newman-Penrose NP (1962), describiéndose inicialmente las tétradas nulas NP, los coeficientes de espin , las tétradas principales de Debever-Penrose y las identidades de Bianchi, así mismo se realiza la clasificación algebraica del tensor de Weyl todo esto en el formalismo de coeficientes de espin.

En el capitulo III, se aborda la construcción del espintensor de Lanczos y se presenta en ambos formalismos: tensorial y de coeficientes de espin. Se proporcionan expresiones del potencial de Lanczos para diversas métricas y finalmente se describe un método para el cálculo del espintensor para el espacio-tiempo según clasificación de Petrov.

Finalmente en el capitulo IV se hacen los cálculos del espintensor de Lanczos para algunas métricas de interés en la relatividad general tales como la métrica de Bianchi tipo VI y para la métrica tipo "C" de Kinnersley. También se calcula el espintensor correspondiente a la métrica de Roberson-Walker de gran interés en la cosmología y en el estudio del problema del corrimiento hacia el rojo.

CAPITULO 1

TEORIA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

1.0 INTRODUCCION.

Establecer las leyes físicas que gobiernan la relatividad general es un problema complejo desde su planteamiento. Por lo que es necesario involucrar algunas herramientas matemáticas para su descripción y estudio. El análisis tensorial y la geometría diferencial son las relaciones usuales en la teoría de la Relatividad, el analisis tensorial opera con entes y propiedades que son independientes del sistema de referencia elegido, constituyendo una herramienta ideal para el estudio de las leyes de la naturaleza. La utilidad de estas expresiones consiste en que las ecuaciones que pueden formularse son invariantes con respecto a una gran variedad de sistemas de referencia. Por otra parte la teoría moderna de la geometría se desarrolla a partir de la geometría diferencial de superficies en el espacio Euclideano por el usual proceso de abstracción; una superficie es un espacio ordinario Euclideano que puede describirse por medio de un sistema de coordenadas Cartesiano , en el cual los puntos se caracterizan por sus coordenadas $P = (x_1, x_2, x_3)$, las cuales se localizan para todos los puntos P cuyas coordenadas satisfacen la relación analitica:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad ,$$

las superficies así definidas son un caso particular de la definición más general:

$\Sigma : ((x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = f(u,v);\ x_2 = g(u,v);\ x_3 = h(u,v);$

$$(u,v) \subset D \subseteq \mathbb{R}^2 \}$$

en donde f, g y h son funciones continuas definidas en una región de $\mathbb{R}^2$.

El estudio de la transformación de coordenadas de un sistema a otro se hace a través de una transformación de Lorentz. El uso de esta transformación se debe a que esta deja invariante la cantidad ds^2, esta invariancia es equivalente a la invariancia de la velocidad de la luz para todo observador inercial (1er postulado de la relatividad de Einstein). Por otra parte el tensor de Weyl tiene su origen en el estudio de los espacios conformales, siendo este tensor único cuando dos espacios Riemannianos pertenecen a la misma clase conformal.

1.1 LA TEORIA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD

En 1905 , Einstein propuso dos postulados , uno de los cuales expresa la invariancia formal de las leyes físicas y el otro resume el resultado de la invariancia de la velocidad de la luz.

1° *Las leyes y los principios físicos tienen la misma forma en todos los sistemas Galileanos; es decir sistemas de referencia que se mueven unos con respecto a otros con velocidad constante.*

2° *La velocidad de la luz en el espacio libre tiene el mismo valor constante en todos los sistemas inerciales.*

En esencia, con estos dos postulados se garantiza que bajo ningún experimento es posible detectar el movimiento absoluto de un sistema inercial de referencia.

La trayectoria de una partícula en el espacio-tiempo define lo que se conoce como la línea de universo del observador. El tiempo medido por el observador con sus relojes recibe el nombre de tiempo propio τ , el cual se determina por:

$$- d\tau^2 = ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{con } c = 1) \qquad (1.1.1)$$

donde t,x,y,z son las coordenadas de Minkowski de un observador a lo largo de su trayectoria. La velocidad de la luz, constante se representa por c, si $c \neq 1$ entonces :

$$- d\tau^2 = \frac{1}{c^2} ds^2 = - c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

La velocidad tetradimensional (u^α) tiene componentes:

$$\left(\frac{d\ t}{d\ \tau},\frac{d\ x}{d\ \tau},\frac{d\ y}{d\ \tau},\frac{d\ z}{d\ \tau}\right)$$

y la aceleración tetradimensional $(a^\alpha) = \frac{d(u^\alpha)}{d\ \tau}$, tiene componentes:

$$\left(\frac{d^2t}{d\ \tau^2},\frac{d^2x}{d\ \tau^2},\frac{d^2y}{d\ \tau^2},\frac{d^2z}{d\ \tau^2}\right),$$

ambas se encuentran definidas en la línea de universo. Las componentes contravariantes de esos vectores tetradimensionales, se denotan por: u^a, a^b; A^g, B^d ; los índices latinos (o superíndices) indican componentes 1,2,3 y 4 y si se usan letras griegas en los índices estas indican variación 1, 2 y 3. Existe una convención en la escritura de índices repetidos debida a Einstein, la cual consiste en quitar el símbolo de suma Σ para índices repetidos , la cantidad:

$$v = v^{u} e_{u}$$

expresa un vector como una suma de las componentes de vectores contravariantes multiplicada por los vectores base:

$e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$.

Por otra parte, el producto es invariante para dos vectores tetradimensionales en las coordenadas de Minkowski :

$$A \circ B = - A^{0}B^{0} + A^{1}B^{1} + A^{2}B^{2} + A^{3}B^{3}$$

el cual puede escribirse como :

$$A \circ B \equiv A_{u}B^{u} ,$$

la cantidad A_u se conoce como las componentes covariantes de A , y se definen a través de

$$A_{u} = \eta_{uv} A^{v} \text{ , o bien ;}$$

$$A^{u} = \eta^{uv} A_{v} \text{ , en donde:}$$

$$\eta_{uv} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de manera análoga se define η^{uv} . Los vectores reciben el nombre de espacialoides , temporaloides ó nulos, dependiendo del resultado de $v \cdot v$, si este es positivo, negativo o cero, respectivamente. Las matrices η_{uv} y η^{uv} son inversas una de la otra.

Si dos sistemas de referencia difieren en una velocidad tridimensional relativa ó por una rotación espacial ó por una combinación de velocidades y rotaciones y si t,x,y,z representan las coordenadas en un sistema " S " , entonces las coordenadas en un sistema distinto " S' ", tendrá por coordenadas t', x', y', z'.

El vector componente en el sistema " S' " se escribe como $A^{u'}$, $B^{u'}$ etc. y los vectores base son $e_{u'}$. Los vectores base y las componentes de los vectores en en el sistema " S " se relacionan a través de:

$$e_{u'} = A^{\alpha}_{u'}\, e_{\alpha}$$

$$v_{u'} = A^{\alpha}_{u'}\, v_{\alpha}$$

$$v^{u'} = A_{\alpha}^{\ u'}\, v^{\alpha}$$

en donde $A^{u'}_{\alpha}$ es la matriz inversa de $A^{\alpha}_{u'}$, las matrices " A " son conocidas como las matrices de transformación de Lorentz. Es de especial interés la forma de la matriz en la transformación por cambio de velocidad sin la rotación , para el primer sistema " S " con velocidad $\beta = \frac{v}{c}$ en la dirección "x":

$$A^{u'}_{v} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en donde $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. La velocidad entre los sistemas algunas veces se parametriza por $\theta = \tan h^{-1}\beta$ (conocido como el parámetro de rapidez).

1.2 ANALISIS TENSORIAL Y GEOMETRIA DIFERENCIAL

El análisis tensorial se centra en el estudio de entes abstractos llamados tensores cuyas propiedades son independientes de los sistemas de referencia empleados para determinarlos. Un tensor está representado en un sistema de referencia particular mediante un conjunto de funciones llamadas componentes. Por otra parte la geometria diferencial estudia, aplicando métodos del análisis matemático, imágenes geometricas, curvas y superficies, ambas forman la herramienta matemática para el estudio de la teoria de la relatividad.

El espacio-tiempo en la relatividad especial puede describirse mejor por las coordenadas curvilineas generalizadas que por las inerciales (Minkowski), las coordenadas de un punto son :

$$x^{u'} = f^{u}(x^{v})$$

donde x^{v} son las coordenadas de Minkowski, y f^{u} son cuatro funciones arbitrarias. Los vectores base y las componentes de un vector en el nuevo sistema de coordenadas se relacionan con el antiguo por

$$v^{a'} = \frac{\partial x^{a}}{\partial x^{u}} v^{u} \quad , \quad v^{u} = \frac{\partial x^{u}}{\partial x^{a}} v^{a'}$$

$$v_{a'} = \frac{\partial x^{u}}{\partial x^{a'}} v_{u} \quad , \quad v_{u} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^{u}} v_{a'}$$

en otras palabras la matriz de transformación $A^{u'}_{a} = \dfrac{\partial x^{u'}}{\partial x^{a}}$ reemplaza a la matriz de Lorentz menos general (la cual sólo es aplicable a dos sistemas de coordenadas de Minkowski).

En coordenadas generales, la relación A•B puede escribirse como:

$$A \cdot B = A_{u} B^{u}$$

que en términos de la métrica puede expresarse como; $A_{u} = \eta_{uv} A^{u}$. Por otra parte el tensor coorespondiente a todo sistema de coordenadas es el tensor métrico con componentes g_{ab}, de tal manera que $ds^{2} = g_{ab}\ dx^{a}\ dx^{b}$ por lo que A_{u} puede escribirse como $A_{u} = g^{uv} A_{v}$, en donde, g^{uv} es la matriz inversa de g_{uv}.

Existen varias definiciones formales de un tensor, sin embargo será suficiente decir que es un objeto geométrico, el cual se asemeja a un vector, teniendo en sus componentes valores numéricos distintos, en sistemas de coordenadas diferentes. Un tensor B^{u} , en $\mathbb{R}^{4}$ tiene 4^{n} componentes, donde n es el rango (número de índices para las componentes). Los tensores se denominan contravariantes cuando tienen superíndices ó covariantes si tienen subíndices: T^{uv}, F_{uv} $R^{a}{}_{bcd}$, $G^{v}{}_{u}$. Los tensores se transforman con una matriz: $G_{u'}{}^{v'} = A^{a}{}_{u'}\ A^{v'}{}_{b}\ G^{b}{}_{a}$. Los tensores pueden contraerse (en sus índices covariantes y contravariantes), o bien si se multiplican, mediante el producto directo, se obtienen nuevos tensores:

$Q_{uv} = R^{a}{}_{uav}$, $A^{u} = G^{u}{}_{v} B^{v}$, $F_{uv} = A_{u} B_{v}$. Un caso especial es el de la contracción de un tensor con un tensor métrico $F^{u}{}_{v} = g_{va}F^{ua}$, el tensor resultante es una expresión con índices no libres. Las expresiones $F_{uv} A^{u}A^{v}$ ó $R_{bg} F^{bg}$ ó $A^{a}B^{b} g_{ab}$ son cantidades escalares , es decir, son números por lo que estas expresiones son invariantes en todos los sistemas.

La notacion de indices libres, representa el producto directo, por ejemplo $F^{uv}A^{p}$ se escribe como $F \otimes A$; la contracción se representa $F \cdot A$ para $F^{ua}A_{a}$, la derivada parcial se denota por

$$f_{,a} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^{a}} .$$

Las derivadas parciales de un tensor o de un vector con respecto a sus coordenadas espaciales ($A^{u}{}_{,v}$ ó $Q^{ab...}{}_{de...,v}$ no son componentes de un tensor. Las coordenadas curvilineas son opcionales en un espacio plano, pero inevitables en un espacio curvo, estas serán usadas para precisar la idea de una diferenciación covariante.

El tensor formado por una diferenciación de un tensor Q con componentes $Q^{ab}{}_{fg...}$ se denota por ∇Q cuyas componentes se expresan como:

$$Q^{ab}{}_{fg...;h} \equiv Q^{ab}{}_{fg...,h} + \Gamma^{a}{}_{vh}Q^{vb}{}_{fg...} + \Gamma^{b}{}_{vh} Q^{av}{}_{fg...} +$$

$$..... - \Gamma^{v}{}_{fg} Q^{ab}{}_{vd...} - ....- \Gamma^{v}{}_{dh} Q^{ab...}{}_{fg....}$$

en el cual existen términos de corrección para todos los indices de Q. Las cantidades Γ se conocen como simbolos de Christoffel o coeficientes de conexión afin; las derivadas parciales se relacionan con la métrica a través de

$$\Gamma^{a}{}_{bg} = g^{au}\Gamma_{ubg} = \frac{1}{2}\, g^{au}(\, g_{ub,g} + g_{ug,b} - g_{bg,u})$$

las cantidades Γ son conjuntos de números pero no son un tensor. La derivada covariante da lugar a la derivada direccional

$$(\nabla\, Q) \circ u \equiv \nabla_{u} Q \equiv Q^{ab\ldots}{}_{fg\ldots,v}\; u^{v}.$$

Si el vector u es tangente a la curva parametrizada por λ , entonces u podrá escribirse como:

$$u = \frac{d}{d\ \lambda} \quad \text{para } u^{a} = dx^{a}/d\lambda \quad y\ \nabla_{u} Q = dQ/d\lambda.$$

Para los vectores base se escribe como: $\nabla_{e_a} Q \equiv \nabla_{a} Q$; en términos de los vectores base , la conexión con los coeficientes puede escribirse como :

$$\nabla_{b}\ e_{a} = \Gamma^{u}{}_{ab}\ \ e_{u} \qquad \text{ó} \qquad \Gamma_{uab} = e_{u} \cdot \nabla_{b}\ e_{a}.$$

El operador derivada covariante ∇ obedece a las relaciones esperadas del operador derivada excepto que en el espacio curvo

$$\nabla_{u}\ \nabla_{v} \neq \nabla_{v}\ \nabla_{u}\ .$$

si u es un vector tangente a la curva , un tensor Q se dice ser paralelo a lo largo de la curva si: $\nabla_{u}\ Q = 0$; si el vector tangente a la curva es paralelo a la propagación $\nabla_{u}\ u = 0$ (covariancia constante del vector tangente). La curva es una geodésica , la generalización de una linea recta en un espacio plano. Si $x(\lambda)$ es la geodésica (con $u^a = dx^a/d\lambda$) entonces las componentes de la ecuación geodésica son :

$$0 = (\nabla_u u)^u = \frac{d\, u^u}{d\, \lambda} + u^a\, u^b\, \Gamma^u{}_{ab}$$

aquí λ es un parámetro ajustable a lo largo de la curva , para curvas no nulas, el parámetro λ es proporcional a la longitud propia.

El estudio de la curvatura se basa en el tensor de curvatura de Riemann,

$$R^u{}_{vab} = \frac{\partial\, \Gamma^u{}_{vb}}{\partial\, x^a} - \frac{\partial\, \Gamma^u{}_{va}}{\partial\, x^b} + \Gamma^u{}_{pa}\, \Gamma^p{}_{vb} - \Gamma^u{}_{pb}\, \Gamma^p{}_{va}$$

en un sistema coordenado. Las componentes covariantes del tensor de Riemann satisfacen las relaciones de simetría:

$$R_{abcd} = R_{cdab}$$
$$R_{abcd} = - R_{bacd}$$
$$R_{abcd} = - R_{abdc}$$
$$R_{a\,[bcd]} = 0$$

Las simetrías del tensor de Ricci son:

$$R_{ab} = R^u{}_{abu}$$

$$R = R^a{}_a$$

El tensor de Ricci junto con el tensor de Riemann forman el tensor de Weyl :

$$C_{luvk} = R_{luvk} - \frac{1}{2}\left[g_{lv}\; R_{uk} - g_{lk}\; R_{uv} - g_{uv}\; R_{lk} + g_{uk}\; R_{lv}\right] +$$

$$+ \frac{1}{6}\left\{ g_{lv}\; g_{uk} - g_{lk}\; g_{uv}\right\} R$$

1.3 TEORIA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

El espacio-tiempo fué modelado por Einstein (1916) mediante una variedad Pseudo-Riemanniana de cuatro dimensiones $\mathbb{R}_4$, establecida físicamente por un sistema arbitrario de coordenadas y relojes necesarios para la descripción de los eventos. La teoria de la relatividad general considera al problema de la Gravitación incluido en este contexto. Nuestro estudio procede, en principio, de acuerdo a los fundamentos de dicha teoria; asi que consideramos que la gravitación es la manifestación de la curvatura de $\mathbb{R}_4$.

A continuación se hace un breve repaso de las ecuaciones fundamentales de la teoria de la relatividad general.

En $\mathbb{R}_4$, la distancia invariante se determina por la primera forma fundamental ó tensor métrico g_{ik} (x^l) según la forma cuadrática

$$ds^2 = g_{ik}(x^l)\; dx^i\; dx^k \;,\; g_{ik} = g_{ki} \qquad (1.3.1)$$

las funciones $g_{ik}(x^l)$ contienen toda la información geométrica de $\mathbb{R}_4$. La mayor parte de la cual se obtiene a partir de sus primeras y segundas derivadas. La conexión afin del espacio se da por los símbolos de Christoffel.

$$\Gamma^{i}_{kl} = \frac{1}{2} g^{ij} (g_{jk,l} + g_{jl,k} - g_{kl,j}) \qquad (1.3.2)$$

que representa a la intensidad del campo gravitacional. Al considerar las fuerzas sobre las partículas de prueba éstas se mueven siguiendo la línea que se determina por la ecuación de las geodésicas

$$\frac{D u^{i}}{D s} = u^{i}_{;k} u^{k} = \frac{d^2 x^{i}}{d s^2} + \Gamma^{i}_{jk} \frac{dx^{j}}{ds} \frac{dx^{k}}{ds} = 0 \qquad (1.3.3)$$

donde u^{i} es la cuadrivelocidad de la partícula. El carácter no-tensorial de Γ^{i}_{jk} es la razon por la cual es difícil medir el contenido energético del campo gravitacional (y en consecuencia definir la radiación gravitacional).

La translación de un vector A^{i} sobre desplazamientos infinitesimales se realiza mediante las relaciones lineales

$$\delta A^{i} = - \Gamma^{i}_{kl} A^{k} dx^{l} \qquad (1.3.4)$$

que permiten definir la derivada covariante en $\mathbb{R}_4$. La translación sobre contornos cerrados infinitesimales deja invariante a los vectores sólo en los espacios planos , no así en los curvos.

El tensor de curvatura de Riemann es determinante en el carácter plano o curvo de $\mathbb{R}_4$:

$$R^{i}_{klm} = \Gamma^{i}_{km,l} - \Gamma^{i}_{kl,m} + \Gamma^{i}_{nl} \Gamma^{n}_{km} - \Gamma^{i}_{nm} \Gamma^{n}_{kl} \qquad (1.3.5)$$

al trasladar el vector A^i sobre un contorno cerrado se altera respecto a su valor inicial en la cantidad

$$\Delta A^i = - \frac{1}{2} R^i{}_{klm} A^k \Delta f^{lm} \qquad (1.3.6)$$

donde Δf^{lm} representa la 2-superficie limitada por el contorno, por lo que :

" *Un espacio-tiempo es plano si y sólo si* $R^i{}_{klm} = 0$. "

(1.3.7)

El efecto físico de la curvatura de $\mathbb{R}_4$ se percibe en términos de desviación de la ecuación geodésica que describe la aceleración relativa de dos partículas de prueba (se consideran esféricas y suficientemente cercanas entre si)

$$\frac{d^2 w^i}{d s^2} - R^i{}_{klm} u^k w^l u^m = 0 \qquad (1.3.8)$$

donde u^i es la cuadrivelocidad de una de las partículas y w^i su vector de desplazamiento a la otra partícula, ortogonal a la línea de universo de ésta última.

El tensor de Riemann, tiene las siguientes propiedades de simetría:

ANTISIMETRIA:

$$R_{iklm} = - R_{kilm} = - R_{ikml}$$

PROPIEDAD CICLICA:

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0$$

Las cuales implican :

$$R_{iklm} = R_{lmik} \qquad (1.3.9)$$

estas propiedades también las cumple el tensor de Weyl y además este último satisface: $C^{a}{}_{bca} = 0$. de modo que el tensor de Riemann tiene 20 componentes independientes mientras que el de Weyl tiene solamente 10; como se verá más adelante, las propiedades anteriores serán llamadas propiedades de simetría de Riemann, ellas limitan el número de componentes independientes de un tensor de cuarto orden por lo que resulta conveniente condensarlas en una matriz de 6x6 , R_{AB}, de acuerdo a la siguiente asociación de índices introducida por Ruse en (1948), [8]:

ik	ó	lm	23	31	12	14	24	34
A	ó	B	1	2	3	4	5	6

La matriz R_{AB} es simétrica en virtud de (1.3.9), $R_{AB} = R_{BA}$. En este arreglo existen veite componentes independientes debido a la propiedad cíclica

$$R_{4123} + R_{4312} + R_{4231} = 0 \qquad (1.3.10)$$

estableciéndose que:

"*El tensor de Riemann en* $\mathbb{R}_4$ *tiene 20 cantidades independientes*". (1 . 3.11)

Se define el tensor simétrico de Ricci a partir del de Riemann por :

$$R_{kl} = R^{i}{}_{kli} \quad , \; R_{kl} = R_{lk} \qquad (1.3.12)$$

el cual contiene 10 cantidades independientes relacionadas a las fuentes del campo gravitacional por medio de las ecuaciones de Einstein

$$R_{kl} - \frac{R}{2} g_{kl} = C_o \; t_{kl} \qquad (1.3.13)$$

donde t_{kl} es el tensor de materia, R es la curvatura escalar $R^{i}_{\ i}$ y C_o es una constante universal. Estas ecuaciones son **no lineales** y por ello no admiten la superposición de soluciones, lo que constituye una gran dificultad para resolverlas. De ellas es inmediato que

"*En el vacío* ($t_{ik} = 0$) *resulta* $R_{kl} = 0$" (1.3.14)

el tensor de Ricci contiene la mitad de las componentes del tensor de Riemann, las otras diez cantidades están contenidas en el tensor conformal de Weyl, definido en $\mathbb{R}_4$ como:

$$C_{iklm} = R_{iklm} + \frac{1}{2}\left[R_{il} \, g_{km} - R_{im} \, g_{kl} - R_{kl} \, g_{im} + R_{km} \, g_{il} \right] +$$

$$+ \frac{R}{6} \left[g_{im} g_{kl} - g_{il} g_{km} \right] \qquad (1.3.15)$$

Estas cantidades son independientes de aquéllas que figuran en el tensor de Ricci, esto se asegura por la identidad:

$$C^{i}_{kli} = 0 \qquad (1.3.16)$$

La característica principal del tensor de Weyl consiste en que, no aparece relacionado directamente con las fuentes;

"El tensor conformal de Weyl contiene las propiedades intrinsecas del campo gravitacional no relacionadas directamente con las fuentes". (1.3.17)

El tensor de Riemann aparece dividido en aquella parte determinada por las fuentes y otra que mide las propiedades del campo gravitacional puro, simbólicamente:

$$\{ \text{Riemann} = \text{Ricci} + \text{Weyl} + \text{Curvatura Escalar} \quad (1.3.18)$$

Hasta aquí se han dado algunos puntos esenciales de la teoría de la relatividad general.

1.4 TETRADAS REALES . TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

El establecer las leyes físicas en relatividad general es un problema bastante complicado, lo que viene relacionado con la covarianza necesaria en la que deben expresarse esas leyes para que tengan significado físico. La necesidad de atribuirles un significado preciso a las coordenadas nos lleva a buscar formalismos alternativos que descubran relaciones que pudieran permanecer ocultas en otros; uno de ellos es el formalismo de las tétradas reales . Dicho tratamiento fué sugerido por Einstein (1928), pero se generalizó por Pirani (1957), Sachs (1961) y Newman-Penrose (1962).

Las proyecciones de un tensor, segun los vectores de la tetrada son cantidades escalares que cualquier observador mide en un punto de $\mathbb{R}_4$, por ello el tratamiento es covariante en sí mismo y proporciona un entendimiento claro del significado de las cantidades usadas en los problemas locales; posteriormente al estudiar la traslación de una tétrada, se facilita la comprensión y manejo de los problemas no-locales. Esto último no se expone en este trabajo.

Tres vectores de una tétrada son tipo espacialoide e_1^i , e_2^i y e_3^i , localizados en el punto P del espacio-tiempo, Cartesianos, esto es, ortonormales. Un observador en movimiento respecto a P determina por su velocidad un cuarto vector tipo temporaloide e_4^i . Así tenemos las siguientes condiciones

$$e_a^i \, e_{bi} = n_{ab} \stackrel{def}{=} \mathrm{Diag}(1,1,1,-1) \qquad (1.4.1)$$

en donde se usan las primeras letras del alfabeto latino para etiquetar los vectores; a menos que se especifique otra cosa, los índices numéricos que aparezcan explícitamente se refieren a las etiquetas y no a las componentes tensoriales. La signatura es +2.

La matriz n_{ab} es autoinversa $n^{ab} \stackrel{def}{=} n_{ab}^{-1} = n_{ab}$, con ella construimos los vectores duales de la tétrada,

$$e^{ai} = n^{ab} e_b^i \quad , \quad e^{ai} e_{ci} = n^{ab} e_b^i e_{ci} = n^{ab} n_{bc} = \delta^a_c \qquad (1.4.2)$$

Lo que permite usar los índices que numeran la tétrada como índices tensoriales donde las matrices n_{ab} y n^{ab} se emplean al estilo del tensor métrico,

$$e^{ai} = n^{ab} e_b^i \quad . \quad e_a^i = n_{ab} e^{bi} \qquad (1.4.3)$$

el espacio en la vecindad del punto P es de Minkowski y la tétrada es una base para los vectores de esta vecindad. Podemos formar también bases para los tensores de segundo orden de la forma $e^i_a\ e^j_b$, en particular para el tensor simétrico, la base es :

$$
\begin{array}{ll}
w_{1ij} = e_{1i} e_{1j} & w_{2ij} = e_{2i}\ e_{2j} \\
w_{3ij} = e_{3i} e_{3j} & w_{4ij} = e_{4i}\ e_{4j} \\
w_{5ij} = e_{(1i}\ e_{2)j} & w_{6ij} = e_{(1i}\ e_{3)} \\
w_{7ij} = e_{(1i}\ e_{4)j} & w_{8ij} = e_{(2i}\ e_{3)j} \\
w_{9ij} = e_{(2i}\ e_{4)j} & w_{10ij} = e_{(3i}\ e_{4)j}
\end{array}
\tag{1.4.4}
$$

donde se debe simetrizar respecto de los subíndices que aparecen junto a los paréntesis, de acuerdo con:

$$e_{(ai}\ e_{b)j} = e_{ai}\ e_{bj} + e_{aj}\ e_{bi} \tag{1.4.5}$$

El desarrollo algebraico del tensor métrico proporciona la relación entre él y la tétrada,

$$g_{ij} = \sum_{s=1}^{10} A_s\ W_{s\ ij} \tag{1.4.6}$$

la que se reduce considerablemente, por ejemplo:

$$e_{1i} = g_{ij}\ e^j_1 = A_1\ e_{1i} + A_5\ e_{2i} + A_6\ e_{3i} + A_7\ e_{4i} \tag{1.4.7}$$

de donde, por la independencia lineal de los vectores la tétrada, $A_1 = 1$, $A_5 = A_6 = A_7 = 0$; desarrollos análogos para los demás vectores proporcionan:

$$A_2 = A_3 = 1\ ,\quad A_4 = -1\ ,\ A_8 = A_9 = A_{10} = 0$$

$$g_{ij} = e^a_i\ e_{aj}\quad ,\quad \delta^j_i = e^a_i\ e^j_a \qquad (1.4.8)$$

en donde se acepta la convención de suma sobre los índices a,b,c,. . . lo cual haremos de aquí en adelante.

Si a cada punto del espacio se le ha asignado una tétrada real, entonces por (1.4.3) se determina su métrica. Recíprocamente, dado el tensor métrico puede generarse una tétrada real para cada punto de $\mathbb{R}_4$, la determinación no es unívoca puesto que en las tétradas tenemos diesciséis cantidades a elegir y sujetas solamente a las diez restricciones (1.4.8). Así:

> "*Una tétrada real determina seis cantidades independientes*". (1.4.9)

este formalismo permite definir las proyecciones de un tensor sobre la tétrada; si A^i es un vector, definimos las siguientes cantidades escalares:

$$A_a = A_i\ e^i_a\quad ,\ A^a = \eta^{ab}\ A_b = A^i\ e^a_i \qquad (1.4.10)$$

El mismo vector A^i se recupera de sus proyecciones

$$A_i = A^a\ e_{ai}\quad ,\quad A^i = A^a\ e^i_a \qquad (1.4.11)$$

Para un tensor de mayor orden se definen relaciones análogas. En particular, para el tensor métrico tenemos

$$g_{ab} = g_{ij}\ e^i_a\ e^j_b = e_{ci}\ e^c_j\ e^i_a\ e^i_b = n_{ac}\ \delta^c_b = n_{ab} \qquad (1.4.12)$$

demostramos ahora que esto último está relacionado con la posibilidad de definir nuevas coordenadas tales que en ellas el tensor métrico se reduce a su forma Minkowskiana $\bar{g}_{ij}$ = Diag(1,1,1,-1) Sea por ejemplo:

$$\bar{X}^a\ (E) = |\ X^i(E) - X^i(P)\ |\ e^a_i\ (P), \qquad \bar{X}^a\ (P) = 0 \qquad (1.4.13)$$

donde E es un punto arbitrario de $\mathbb{R}_4$ y P aquel donde está situada la tetrada, por (1.4.8) podemos invertir la transformación

$$X^i(E) = X^i(P) + \bar{X}^a(E)\ e^i_a\ (P) \qquad (1.4.14)$$

de estas fórmulas obtenemos

$$\frac{\partial \bar{X}^a}{\partial X^i} = e^a_i\ (P) \quad , \quad \frac{\partial X^i}{\partial \bar{X}^a} = e^i_a\ (P) \qquad (1.4.15)$$

por lo que resulta que:

"*Las componentes tensoriales de un vector o de un tensor en las nuevas coordenadas, coinciden con sus proyección*".

(1.4.16)

por ejemplo:

$$\overline{A}_j = \frac{\partial X^i}{\partial \overline{X}^j} A_i = e^i_j A_i \qquad (1.4.17)$$

que coincide con (1.4.10) para $a = j$.

Entonces por (1.4.12)

$$\overline{g}_{ij}(P) = n_{ij} = \mathrm{Diag}(1,1,1,-1) \qquad (1.4.18)$$

es importante notar que las proyecciones g_{ab} del ternsor métrico son las mismas independientemente de la tétrada particular escogida para el punto P. Si $\overline{X}^i$ y $\check{X}^i$ son coordenadas definidas al estilo de (1.4.14) con tétradas reales e^a_i (P) y $\check{e}^a_i$ (P), respectivamente, el invariante fundamental establece:

$$ds^2 = n_{ab}\, d\overline{X}^a\, d\overline{X}^b = n_{ab}\, d\check{X}^a\, d\check{X}^b \qquad (1.4.19)$$

Lo cual significa que las diferenciales de las coordenadas están relacionadas por una transformación de Lorentz:

$$d\check{X}^a = L^a_b\, d\overline{X}^b \qquad (1.4.20)$$

Elegir otra tétrada equivale a tomar otro sistema Cartesiano de vectores espaciales. esto es una rotación espacial en P por tres parametros y a la vez otra velocidad del observador movil, definida tambien por tres parametros. completando un total de seis variables independientes. La transformacion de Lorentz posee esta propiedad y de hecho relaciona las tétradas. pues de (1.4.13) se tiene :

$$d\tilde{X}^a = \tilde{e}^a_l \, dX^l \quad , \quad d\bar{X}^b = e^b_l \, dX^l$$

que al sustituirse en (1.4.20) y debido a la arbitrariedad de las dX^l se obtiene :

$$\tilde{e}^a_l = L^a_b \, e^b_l \qquad (1.4.21)$$

La ecuacion (1.4.1) que define una tetrada debe quedar satisfecha si (1.4.21) se usa para definir la nueva tetrada. Asi obtenemos diez ecuaciones que deberá satisfacer toda matriz de Lorentz L^a_b .

$$n^{ac} = \tilde{e}^a_l \, \tilde{e}^{cl} = L^a_b \, L^c_d \, e^b_l \, e^{dl}$$

de donde

$$n^{ac} = L^a_b \, n^{bd} \, L^c_d \qquad (1.4.22)$$

El problema de obtener la transformación de Lorentz mas general, o sea, hallar la matriz mas general dependiente de seis parametros que satisface a (1.4.22), fue resuelto parcialmente por Sachs (1961) y totalmente por Greenberg-Knauer (1974): esta solucion completa se describe mediante dos numeros reales A,B y de dos numeros complejos α y β tales que $\alpha\beta \neq 1$ de manera que pueda definirse $c = \frac{1}{2} |1 - \alpha\beta|$.
Las cantidades L^a_b son :

$$L^1_1 = c\left[e^{iB}(1 + \bar{\alpha}\beta) + \bar{e}^{iB}(1 + \alpha\bar{\beta})\right]$$
$$L^1_2 = ic\left[e^{iB}(1 - \bar{\alpha}\beta) - \bar{e}^{iB}(1 - \alpha\bar{\beta})\right]$$

$$L^1_3 = c\left[e^{iB}(\beta - \bar{\alpha}) + e^{-iB}(\beta - \alpha)\right]$$
$$L^1_4 = c\left[e^{iB}(\beta + \bar{\alpha}) + e^{-iB}(1 + \bar{\alpha}\beta)\right]$$
$$L^2_1 = ic\left[e^{-iB}(1 + \alpha\bar{\beta}) - e^{iB}(1 + \bar{\alpha}\beta)\right]$$
$$L^2_2 = -c\left[e^{-iB}(\alpha\bar{\beta} - 1) + e^{iB}(\bar{\alpha}\beta - 1)\right]$$
$$L^2_3 = ic\left[e^{-iB}(\bar{\beta} - \alpha) - e^{iB}(\beta - \bar{\alpha})\right]$$
$$L^2_4 = ic\left[e^{-iB}(\alpha + \bar{\beta}) - e^{iB}(\bar{\alpha} + \beta)\right]$$
$$L^3_1 = c\left[e^{A}(\alpha + \bar{\alpha}) - e^{-A}(\beta + \bar{\beta})\right]$$
$$L^3_2 = ic\left[e^{A}(\alpha - \bar{\alpha}) + e^{-A}(\beta - \bar{\beta})\right]$$
$$L^3_3 = c\left[e^{A}(1 - \bar{\alpha}\alpha) + e^{-A}(1 - \beta\bar{\beta})\right]$$
$$L^3_4 = c\left[e^{A}(1 + \bar{\alpha}\alpha) - e^{-A}(1 + \beta\bar{\beta})\right]$$
$$L^4_1 = c\left[e^{A}(\alpha + \bar{\alpha}) + e^{-A}(\beta + \bar{\beta})\right]$$
$$L^4_2 = ic\left[e^{A}(\alpha - \bar{\alpha}) - e^{-A}(\beta - \bar{\beta})\right]$$
$$L^4_3 = c\left[e^{A}(1 - \bar{\alpha}\alpha) - e^{-A}(1 - \beta\bar{\beta})\right]$$
$$L^4_4 = c\left[e^{A}(1 + \bar{\alpha}\alpha) + e^{-A}(1 + \beta\bar{\beta})\right] \qquad (1.4.23)$$

De aquí podemos obtener tres clases particulares de transformación de Lorentz.

CLASE I. La cual corresponde a una rotación nula. se tiene $\alpha = 0$ y

$$L^1_1 = \cos B \;,\; L^1_2 = -\operatorname{sen} B \;,\; L^1_3 = -L^1_4 = \operatorname{Re}(\beta\, e^{iB})$$
$$L^2_1 = -L^1_2 \;,\; L^2_2 = L^1_1 \quad , \quad L^2_3 = -L^2_4 = \operatorname{Im}(\beta\, e^{iB})$$
$$L^3_1 = -\frac{1}{2}\, e^{-A}(\beta + \bar{\beta}) \quad , \quad L^3_2 = \frac{i}{2}\, e^{-A}(\beta - \bar{\beta})$$
$$L^3_3 = \frac{1}{2}\left[e^{A} + e^{-A}(1 - \beta\bar{\beta})\right] \quad , \quad L^3_4 = \frac{1}{2}\left[e^{A} - e^{-A}(1 + \beta\bar{\beta})\right]$$
$$L^4_1 = -L^3_1 \quad , \quad L^4_2 = -L^3_2$$
$$L^4_3 = \frac{1}{2}\left[e^{A} - e^{-A}(1 - \beta\bar{\beta})\right] \quad , \quad L^4_4 = -\frac{1}{2}\left[e^{A} + e^{-A}(1 + \beta\bar{\beta})\right]$$
$$(1.4.24)$$

CLASE II. $\beta = 0$

$$L^1_1 = \cos\beta\ , \quad L^1_2 = -\operatorname{sen}\beta\ , \quad L^1_3 = L^1_4 = -\operatorname{Re}\left(\bar{\alpha}\, e^{iB}\right)$$

$$L^2_1 = -L^1_2\ , \quad L^2_2 = L^1_1\ , \quad L^2_3 = L^2_4 = -\operatorname{Im}\left(\bar{\alpha}\, e^{iB}\right)$$

$$L^3_1 = \frac{1}{2} e^A (\alpha + \bar{\alpha})\ , \quad L^3_2 = \frac{1}{2} e^A (\alpha - \bar{\alpha})$$

$$L^3_3 = \frac{1}{2}\left[e^A(1 - \alpha\bar{\alpha}) + e^{-A}\right]\ , \quad L^3_4 = \frac{1}{2}\left[e^A(1 + \alpha\bar{\alpha}) - e^{-A}\right]$$

$$L^4_1 = L^3_1\ , \quad L^4_2 = L^3_2$$

$$L^4_3 = \frac{1}{2}\left[e^A(1 - \alpha\bar{\alpha}) - e^{-A}\right]\ , \quad L^4_4 = -\frac{1}{2}\left[e^A(1 + \alpha\bar{\alpha}) + e^{-A}\right]$$

(1.4.25)

CLASE III. $\alpha = \beta = 0$.

$$L^1_1 = L^2_2 = \cos B\ , \quad L^1_2 = -L^2_1 = -\operatorname{sen} B$$

$$L^3_3 = -L^4_4 = \cosh A\ , \quad L^3_4 = L^4_3 = \operatorname{senh} A$$

y las componentes restantes son iguales a cero.

1.5 TENSOR DE WEYL

En el estudio del tensor de Weyl mostramos sus propiedades de simetría, identidades (del tipo de las de Bianchi), el papel que desempeña en la descomposición irreducible del tensor de Riemann, se calcula el dual y el autodual en un sistema de coordenadas Lorentzianas incluyendo los del tensor de Riemann mostrándose sus simetrías e interrelaciones.

El tensor de Weyl tiene su origen en el estudio de los espacios conformales. Precisamente, Weyl ha demostrado que para que dos espacios Riemanianos pertenezcan a la misma clase conformal, sus métricas deberán estar en la relación

$$g'_{ik} = e^{2\sigma} g_{ik} \qquad , \qquad \sigma = \sigma(X^j)$$

(1.5.1)

es necesario y suficiente que el tensor que lleva su nombre sea el mismo para ambos espacios. $e^{2\sigma}$ es un factor de norma que es función de las coordenadas solamente.

El tensor de Weyl está definido para $\mathbb{R}_n$ por:

$$C_{iklm} = R_{iklm} + \frac{1}{n-2}\left\{ R_{il}\, g_{km} - R_{im}\, g_{kl} - R_{kl}\, g_{im} + R_{km}\, g_{il} \right\} - \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left\{ g_{il}\, g_{km} - g_{im}\, g_{kl} \right\}$$

(1.5.2)

donde R_{iklm} es el tensor de Riemann cuya definición es la misma que para un $\mathbb{R}_4$. ver (1.3.5). R_{ik} , R son las contracciones de Ricci.

El tensor de Riemann tiene un total de $n^2(n^2 - 1)/12$ componentes independientes que para $\mathbb{R}_4$ equivale a 20.

El tensor de Weyl satisface las relaciones de simetría de Riemann, ver (1.3.9) que reproducimos aquí:

antisimetrías: $C_{iklm} = - C_{kilm} = - C_{ikml}$ (1.5.3a)

propiedad cíclica: $C_{iklm} + C_{imkl} + C_{ilmk} = 0$ (1.5.3b)

que sabemos implican a:

$$C_{iklm} = C_{lmik} .$$

(1.5.3c)

además, cualesquiera de las contracciones del tensor de Weyl se anula idénticamente:

$$C^{i}_{kli} = 0 \tag{1.5.4}$$

Esta propiedad hace que el tensor de Weyl presente un número de componentes independientes menor que las que tiene el tensor de Riemann. Para n = 4 arroja un valor de 10 componentes independientes.

El tensor de Riemann satisface las identidades de Bianchi (1902).

$$R^{p}_{ijk;l} + R^{p}_{ikl;j} + R^{p}_{ilj;k} = 0 \tag{1.5.5a}$$

que al aplicarse sobre el tensor de Ricci resulta:

$$R^{l}_{j;l} = \frac{1}{2} R_{,j} \tag{1.5.5b}$$

en tanto que para el tensor de Weyl encontramos:

$$C^{p}_{ijk;l} + C^{p}_{ikl;j} + C^{p}_{ilj;k} = \frac{1}{n-2}\Big[\delta^{p}_{j} R_{ikl} + \delta^{p}_{k} R_{ilj} + \delta^{p}_{l} R_{ijk} + g_{ik} R^{p}_{jl} + g_{il} R^{p}_{kj} + g_{ij} R^{p}_{lk}\Big]$$

donde

$$R_{ijk} = \frac{n-2}{n-3} C^{p}_{ijk;p} = L_{ij;k} - L_{ik;j}$$

$$L_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)} g_{ij} \tag{1.5.6}$$

Así, el tensor de Weyl satisface identidades del tipo de las de

Bianchi únicamente si se anula el tensor R_{ijk}, lo que por (1.5.6) equivale a la condición

$$L_{ij;k} = L_{ik;j} \tag{1.5.7}$$

gran parte del estudio de la gravitación es el análisis del tensor de Riemann, pues el espacio es curvo o no según que este tensor sea distinto de cero o no. Para estudiar el tensor de Riemann se ha pensado en descomponerlo en tensores algebraicamente irreducibles, Debever-Géhéniau (1956) [56], cada uno de los cuales describirá propiedades específicas del campo gravitacional. El tensor de Weyl es uno de esos tensores que se presume deben poseer propiedades intrínsecas de la gravitación de acuerdo con el esquema mencionado anteriormente, ver (1.3.17,18) mostraremos el papel que el tensor de Weyl desempeña en esta descomposición.

Definimos para cuatro dimensiones

$$g_{iklm} = g_{il}\, g_{km} - g_{kl}\, g_{im} \tag{1.5.8a}$$

$$S_{iklm} = R_{iklm} + \frac{R}{12}\, g_{iklm} \tag{1.5.8b}$$

$$S_{kl} = S^{i}_{kli} = R_{kl} - \frac{R}{4}\, g_{kl} \tag{1.5.8c}$$

Los tensores g_{iklm} y S_{iklm} satisfacen a las propiedades de simetría de Riemann (1.3.9). La traza del tensor simétrico S_{kl} es nula $S^{i}_{i} = 0$, por lo que S_{iklm} contiene solamente diecinueve de las componentes independientes del tensor de Riemann en la que se ha separado la curvatura escalar R:

$$R_{iklm} = S_{iklm} - \frac{R}{12} \; g_{iklm}$$

ahora se define al tensor E_{iklm} de manera que involucra solamente las nueve componentes del tensor S_{kl} y satisface las simetrias del tensor de Riemann

$$E_{iklm} = -\frac{1}{2}\left[S_{il}\, g_{km} - S_{im}\, g_{kl} - S_{kl}\, g_{im} + S_{km}\, g_{il} \right] \tag{1.5.9}$$

este tensor equivale a la diferencia entre S_{iklm} y el tensor de Weyl C_{iklm} ,por esto, la descomposición final del tensor de Riemann viene a ser:

$$R_{iklm} = C_{iklm} + E_{iklm} - \frac{R}{12}\, g_{iklm} \tag{1.5.10}$$

debido a la propiedad (1.5.4) del tensor de Weyl, se concluye que, este y el tensor de Ricci contienen información independiente, lo que justifica el uso de la fórmula (1.3.18).

CAPITULO II

2.- FORMALISMO DE NEWMAN-PENROSE

2.0 INTRODUCCION

En 1962 Newman-Penrose desarrollaron un método para la investigación de la relatividad general en la que se destaca la importancia del cono nulo, a traves del estudio de la evolución de las cantidades principales de la tetrada nula NP denominadas coeficientes de espin. La principal ventaja de éste método, consiste en que las ecuaciones de campo del tensor métrico en el formalismo de NP son de primer grado respecto de los coeficientes de espin (mientras que las ecuaciones son de segundo grado respecto del tensor métrico), además por ser lineales resulta evidente la partición del tensor de Riemann, en una parte relacionada a la materia (tensor de Ricci), de aquella referida a la gravitación pura (representada por el tensor de Weyl).

En este capitulo, partiendo de una tétrada arbitraria de NP, se construye una base para el espacio de tensores que cumplen con las simetrias de Riemann y se expande el tensor de Weyl en función de ésta, resultando cinco cantidades complejas ψ_r, $r = 0, \ldots, 4$ equivalentes a las diez cantidades reales independientes de este tensor.

2.1 TETRADAS NULAS DE NEWMAN-PENROSE (NP)

La descripción de los eventos del espacio-tiempo se hace posible al construirse una base vectorial formada por una tétrada real ortonormal arbitraria e_1, e_2, e_3, e_4 ; tres de estos vectores son espaciales y uno temporal, los cuales satisfacen:

$$e_{(a)}{}^{r}\ e_{(j)r} = n_{(a)(j)}$$

donde

$$\underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{n}_{(a)(b)} = \text{Diag } (1,1,1,-1)$$

(2.1.1)

el símbolo ~ denota a la traza de la matriz cuadrada de tamaño 4, la signatura es +2, los índices entre paréntesis denotan elementos de la tétrada, $\eta_{(a)(b)}$ es equivalente a:

$$\begin{aligned} e_{(i)}{}^{r}\ e_{(j)r} &= \delta_{ij} \\ e_{(i)}{}^{r'}\ e_{(4)r} &= 0 \qquad\qquad i,r = 1,2,3 \\ e_{(4)}{}^{r}\ e_{(4)r} &= -1 \end{aligned}$$

(2.1.2)

En 1985 Ovando mostró que en forma natural se construye la tétrada nula compleja, formada por los vectores (m^r, $\bar{m}^r$, l^r, n^r), los cuales se relacionan con los vectores de la base real ortonormal (e_1, e_2, e_3, e_4) a través de

$$\begin{aligned} m^r &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1{}^r - i\ e_2{}^r) \\ m^r &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1{}^r - e_3{}^r) \\ l^r &= \frac{Q^{-1}}{\sqrt{2}}\,(e_4{}^r - e_3{}^r) \\ n^r &= \frac{Q}{\sqrt{2}}\,(e_4{}^r + e_3{}^r) \end{aligned}$$

(2.1.3)

Q es un parámetro arbitrario, Q = 1 ó $\sqrt{2}$, i = $\sqrt{-1}$ en (2.1.3), los vectores l^r, n^r son reales, $\bar{m}^r$ es el complejo conjugado de m^r. Los cuatro vectores constituyen una base en el plano tangente a un punto de $\mathcal{R}_4$. Los vectores ; m^r, $\bar{m}^r$, l^r, n^r, satisfacen las propiedades:

$$
\begin{gathered}
m^r\, m_r = n^r\, n_r = l^r\, l_r = 0 \\
m^r\, \bar{m}_r = -\, l^r\, n_r = 1 \\
l^r\, m_r = n^r\, m_r = 0 \\
\bar{l}^{\,r} = l^r \\
\bar{n}^{\,r} = n^r
\end{gathered}
\qquad (2.1.4)
$$

es decir, una tétrada es tipo NP, si cumple las propiedades (2.1.4). La tétrada real se puede obtener a partir de los vectores NP según las expresiones:

$$
\begin{aligned}
e^r_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(m^r + \bar{m}^r) \\
e^r_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}\,(m^r - \bar{m}^r) \\
e^r_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(n^r - l^r) \\
e^r_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(n^r + l^r)
\end{aligned}
\qquad (2.1.5)
$$

en la literatura se utiliza la notación Z_a para simbolizar la tétrada nula $Z_1 = m$, $Z_2 = \bar{m}$, $Z_3 = l$ y $Z_4 = n$; las relaciones de ortonormalidad para la tétrada son :

$$
(\, Z_{(a)}\; Z_{(b)}) = X_{(a)(b)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}
$$

con $(X^{(a)(b)}) = (X_{(a)(b)})^{-1} = X_{(a)(b)}$

(2.1.6)

La matriz (2.1.1) coincide con su inversa

$$\underset{\sim}{n}^{-1} = (n^{(a)(b)}) = (n_{(a)(b)})$$

(2.1.7)

y permite definir la tétrada dual $e^{(a)r}$:

$$e^{(a)r} = n^{(a)(b)} \quad e_{(b)}{}^{r}$$
$$\therefore \quad e_{(c)}{}^{r} = n^{(a)(b)} \; e^{(b)r}$$

(2.1.8)

es decir, con las matrices n y $\underset{\sim}{n}^{-1}$ es posible subir y bajar los índices con paréntesis. Así resultan las propiedades :

$$e^{(a)r} \; e_{(b)r} = \delta^{(a)}_{(b)}$$
$$e^{(a)r} \; e_{(a)b} = \delta^{r}{}_{b}$$

(2.1.9)

el tensor métrico g_{ij} se puede obtener de la tétrada real:

$$g_{ij} = e_i^{(a)} \; e_{(a)j} = e_{(1)i} \; e_{(1)j} + e_{(2)i} \; e_{(2)j} + $$
$$+ e_{(3)i} e_{(3)j} - e_{(4)i} e_{(4)j}$$

(2.1.10)

se puede expresar g_{ij} en función de la tétrada nula (NP):

$$g_{ij} = m_i \, \bar{m}_j + m_j \, \bar{m}_i - l_i \, n_j - l_j \, n_i = X^{(a)(b)} Z_{(a)i} Z_{(b)j}$$

(2.1.11)

la matriz $X^{(a)(b)}$ desempeña para la tétrada nula, la misma función que $n^{(a)(b)}$ para la tétrada real.

De las relaciones (2.1.10) y (2.1.11) se puede concluir que conociendo la tétrada real o la nula en un punto, se puede construir el tensor métrico en dicho punto.

La tétrada real puede concebirse como anclada en el evento, al rotarla generamos otra tétrada real ortonormal $\tilde{e}^{(a)}{}_{r}$ que se obtiene de la primera mediante una transformación de Lorentz,

$$\underset{\sim}{L} = \left[L^{(a)}{}_{(b)} \right] :$$

$$\tilde{e}^{(c)}{}_{a} = L^{(c)}{}_{(b)}\, e^{(b)}{}_{a}$$

$$L^{(c)}{}_{(a)}\, L^{(r)}{}_{(b)}\, n^{(a)(b)} = n^{(c)(r)} \tag{2.1.12}$$

así se observa que $\underset{\sim}{L}$ queda en función de seis parámetros reales; la matriz $\underset{\sim}{L}$ más general cumpliendo (2.1.1) fué obtenida por Greenberg-Knauer (1974). La tétrada nula asociada a la nueva tétrada real después de aplicar la transformación de Lorentz es:

$$\begin{aligned}
\tilde{m}^{r} &= C\, e^{-iB}\, (m^{r} + \underset{\sim}{\alpha}\, \underset{\sim}{\bar{\beta}}\, \bar{m}^{r} + \underset{\sim}{\alpha}\, Q^{-1}\, l^{r} + \underset{\sim}{\bar{\beta}}\, Q^{-1}\, n^{r}) \\
\tilde{\bar{m}}^{r} &= C\, e^{iB}\, (\bar{m}^{r} + \underset{\sim}{\bar{\alpha}}\, \underset{\sim}{\beta}\, m^{r} + \underset{\sim}{\bar{\alpha}}\, Q\, l^{r} + \underset{\sim}{\beta}\, Q^{-1}\, n^{r}) \\
\tilde{l}^{r} &= C\, e^{-A}\, (\underset{\sim}{\beta}\, Q^{-1} m^{r} + \underset{\sim}{\bar{\beta}}\, Q^{-1} \bar{m}^{r} + l^{r} + \underset{\sim}{\beta}\, \underset{\sim}{\bar{\beta}}\, Q^{-2}\, n^{r}) \\
\tilde{n}^{r} &= C\, e^{A}\, (\underset{\sim}{\bar{\alpha}}\, Q\, m^{r} + \underset{\sim}{\alpha}\, Q\, \bar{m}^{r} + \underset{\sim}{\alpha}\, \underset{\sim}{\bar{\alpha}}\, Q^{2}\, l^{r} + n^{r}) \\
C &= |\, 1 - \alpha\, \beta\, |^{-1}
\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Las cantidades A, B son funciones reales, $\underset{\sim}{\alpha}$, $\underset{\sim}{\beta}$ son funciones complejas con $\underset{\sim}{\alpha}\cdot\underset{\sim}{\beta} \neq 1$, esto conduce a tres clases de rotaciones.

<u>CLASE I.</u> $\underset{\sim}{\alpha} = 0$; Rotación nula, la dirección n^r permanece inalterada

$$\tilde{m}^{\,r} = e^{-iB} (m^r + \underset{\sim}{\bar{\beta}}\, Q^{-1}\, n^r)$$

$$\tilde{\bar{m}}^{\,r} = e^{iB} (\bar{m}^{\,r} + \underset{\sim}{\beta}\, Q^{-1}\, n^r)$$

$$\tilde{l}^{\,r} = e^{-A} (\underset{\sim}{\beta}\, Q^{-1} m^r + \underset{\sim}{\bar{\beta}}\, Q^{-1} \bar{m}^{\,r} + l^r + \underset{\sim}{\beta}\, \underset{\sim}{\bar{\beta}}\, Q^{-2}\, n^r)$$

$$\tilde{n}^{\,r} = e^{A}\, n^r$$

(2.1.14)

<u>CLASE II.</u> $\underset{\sim}{\beta} = 0$; Rotación nula sin alterar la dirección de l^r

$$\tilde{m}^{\,r} = e^{-iB} (m^r + \underset{\sim}{\alpha}\, Q\, l^r)$$

$$\tilde{\bar{m}}^{\,r} = e^{iB} (\bar{m}^{\,r} + \underset{\sim}{\bar{\alpha}}\, Q\, l^r)$$

$$\tilde{l}^{\,r} = e^{-A}\, l^r$$

$$\tilde{n}^{\,r} = e^{A} (\underset{\sim}{\bar{\alpha}}\, Q\, m^r + \underset{\sim}{\alpha}\, Q\, \bar{m}^{\,r} + \underset{\sim}{\alpha}\, \underset{\sim}{\bar{\alpha}}\, Q^2\, l^r + n^r)$$

(2.1.15)

<u>CLASE III.</u> $\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{\beta} = 0$

$$\tilde{m}^{\,r} = e^{-iB}$$

$$\tilde{\bar{m}}^{\,r} = e^{iB}\, \bar{m}^{\,r}$$

$$\tilde{l}^{\,r} = e^{-A}\, l^r$$

$$\tilde{n}^{\,r} = e^{A}\, n^r$$

(2.1.16)

si en (2.1.15) se hace $B = 0$, se obtiene una transformación de Lorentz especial (boost) en el plano $l^r - n^r$, y si se elige $A = 0$ con $B \neq 0$ entonces, se obtiene una rotación espacial en el plano

$m^r - \bar{m}^r$.

La evolución de las tétradas nulas en $\mathbb{R}^4$ informa de los cambios que sufren otros objetos tensoriales al moverse en presencia de la curvatura del espacio-tiempo de manera equivalente, debemos calcular las derivadas covariantes de:

$$(Z_{(a)}^{\ \ r}) = (m^r,\ \bar{m}^r,\ l^r,\ n^r) \qquad a = 1,...,4$$

(2.1.17)

la cual satisface las relaciones de ortonormalidad (2.1.4), por lo que se define:

$$\underset{\sim}{Z} = (\, Z_{(a)}^{\ \ r}\, Z_{(b)\,r}\,) = (\, Z_{(a)(b)}\,) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.1.18)

La matriz $\underset{\sim}{Z}^{-1} = \underset{\sim}{Z} = (\, Z^{(a)(b)})$ permite definir la base asociada a (2.1.17) y (2.1.19) se concluye que :

$Z^{(a)r} = Z^{(a)(b)}\, Z_{(b)}^{\ \ r}$ por lo tanto:

$$(Z^{(a)\,r}) = (\,\bar{m}^r,\ m^r,\ -\,n^r,\ -\,l^r)$$

(2.1.19)

es decir las matrices $\underset{\sim}{Z}$ y $\underset{\sim}{Z}^{-1}$ funcionan como una "métrica" para subir y bajar índices de la tétrada nula de NP.

Las derivadas covariantes de (2.1.17) son $Z_{(a)b;c}$, dicha expresión es un tensor de orden dos, no necesariamente simétrico en b y c, éste puede desarrollarse en términos de una base generada por la tétrada nula de acuerdo a la siguiente expresión:

$$Z_{(a)b;c} = \gamma_{qah}\, Z_b^{(q)}\, Z_c^{(h)}$$

(2.1.20)

en donde los coeficientes de la expansión, γ_{qah} se conocen como los coeficientes de rotación asociados a la tetrada bajo análisis.

Utilizando las expresiones (2.1.17), (2.1.18)

$$Z_{(p)\ c}\ Z_{(h)}^{\ c} = Z_{(p)(h)}$$

$$Z_{(a)\ b}\ Z^{(a)}_{\ \ c} = g_{bc}$$

(2.1.21)

despejando γ_{qah} de (2.1.20):

$$\gamma_{abc} = Z_{(b)\ r;\ t}\ Z_{(a)}^{\ r}\ Z_{(c)}^{\ t} = Z_{(b)(a);(c)}$$

(2.1.22)

En donde los coeficientes de rotación son las proyecciones de $Z_{(a)r;t}$ sobre la tétrada nula. La expresión (2.1.22) refleja el caracter invariante de γ_{abc} bajo la transformación de coordenadas, sin embargo, si cambia al variar la tétrada. En la expresión (2.1.22) existe la antisimetría que puede observarse a través de las relaciones (2.1.18), (2.1.19), (2.1.20) y (2.1.21):

$$\gamma_{abc} = \left[(Z_{(b)r}\ Z_{(a)}^{\ \ r})_{;t} - Z_{(b)r}\ Z_{(a)\ ;t}^{\ \ r} \right] Z_{(c)}^{\ \ t} =$$
$$= - Z_{(a)r;t}\ Z_{(b)}^{\ \ r}\ Z_{(c)}^{\ \ t}$$

(2.1.23)

por consiguiente:

$$\gamma_{abc} = - \gamma_{bac}$$

(2.1.24)

la consecuencia de (2.1.24) es que γ_{abc} sólo tiene 24 componentes independientes como (2.1.17) es compleja entonces (2.1.22) no son reales excepto γ_{433} y γ_{434}. Al aplicar la cojugación compleja a los coeficientes de rotación se obtiene:

$\gamma^{123} = - m_{r;t}\ \bar{m}^r l^t$ de donde $\bar{\gamma}^{123} = - \bar{m}_{r;t}\ m^r\ l^t = \gamma^{213}$, similarmente $\bar{\gamma}^{134} = \gamma^{234}$, $\bar{\gamma}^{241} = \gamma^{142}$.

En conclusión al conjugar (2.1.20) se intercambian 1 y 2;

$$\gamma_{a_1a_2a_3} = \gamma_{b_1b_2b_3} \quad \text{con } b_r = 2\delta_{1a_r} + \delta_{2a_r} + a_r(\delta_{3a_r} + \delta_{4a_r}) \qquad (2.1.25)$$

para el proceso de obtener γ_{qrc} es necesario obtener las derivadas covariantes (lo cual exige la determinación de los símbolos de Christoffel).

Sin embargo, también existe otro algoritmo que emplea derivadas parciales en lugar de covariantes:

Los γ_{abc} son antisimétricos en (ab), también para la pareja (bc), de (2.1.23) se obtiene:

$$\gamma_{abr} - \gamma_{arb} = -\left[Z_{(a)p;q} - Z_{(a)q;p}\right]Z_{(b)}^{\;p}\, Z_{(r)}^{\;q} =$$
$$= C_{abr} = -C_{arb} \qquad (2.1.26)$$

entonces permutaciones cíclicas de (abc) conducen a la expresión :

$$\gamma_{bra} - \gamma_{bar} = C_{bra}\,,\; \gamma_{rab} - \gamma_{rba} = C_{rab} \qquad (2.1.27)$$

sumando las expresiones (2.1.27) se obtiene:

$$\gamma_{abr} = \frac{1}{2}\left(C_{abr} + C_{bra} - C_{rab} \right) \qquad (2.1.28)$$

y por la definición de derivada covariante (2.1.26) puede escribirse en la forma:

$$C_{abr} = -\left[Z_{(a)p,q} - Z_{(a)q,p}\right]Z_{(b)}^{\;p}\, Z_{(r)}^{\;q} \qquad (2.1.29)$$

En donde sólo se involucran derivadas parciales, surgiendo un proceso alternativo:

1) dada la métrica g_{ar}

2) se puede calcular $Z_{(a)r}$ y $Z_{(b)c,t}$

3) se calcula C_{abr}

4) calcular γ_{abr}

5)teniendo los valores γ_{abr} se pueden calcular los coeficientes de espin. (ver la tabla):

TABLA DE LOS COEFICIENTES DE ESPIN DE NEWMAN-PENROSE. (NP)

$$\begin{aligned}
\kappa &= \gamma_{414} = -n_{a;b}\, m^a m^b , & \rho &= \gamma_{412} = -n_{a;b}\, m^a \bar{m}^b \\
\sigma &= \gamma_{411} = -n_{a;b}\, m^a m^b , & \tau &= \gamma_{413} = -n_{a;b}\, m^a l^b \\
\nu &= \gamma_{233} = l_{a;b}\, \bar{m}^a l^b , & \mu &= \gamma_{231} = l_{a;b}\, \bar{m}^a m^b \\
\lambda &= \gamma_{232} = l_{a;b}\, \bar{m}^a \bar{m}^b , & \pi &= \gamma_{234} = l_{a;b}\, \bar{m}^a n^b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{1}{2}\left[\gamma_{434} - \gamma_{124}\right] = -\frac{1}{2}\left[n_{a;b}\, l^a n^b - m_{a;b}\, \bar{m}^a n^b\right] \\
\gamma &= \frac{1}{2}\left[\gamma_{433} - \gamma_{123}\right] = -\frac{1}{2}\left[l_{a;b}\, n^a l^b - \bar{m}_{a;b}\, m^a l^b\right] \\
\alpha &= \frac{1}{2}\left[\gamma_{432} - \gamma_{122}\right] = \frac{1}{2}\left[l_{a;b}\, n^a \bar{m}^b - \bar{m}_{a;b}\, m^a \bar{m}^b\right] \\
\beta &= \frac{1}{2}\left[\gamma_{431} - \gamma_{121}\right] = -\frac{1}{2}\left[n_{a;b}\, l^a m^b - m_{a;b}\, \bar{m}^a m^b\right]
\end{aligned}$$

(2.1.30)

2.2 CLASIFICACION ALGEBRAICA DEL TENSOR DE WEYL.

Las tétradas reales o nulas son útiles en la clasificación de Petrov, la cual se efectúa sobre el tensor conformal de Weyl, definido en cuatro dimensiones por:

$$C_{ijkm} = R_{ijkm} + \frac{1}{2}\left[R_{ik}\, g_{jm} + R_{jm}\, g_{ik} - R_{jk}\, g_{im} - R_{im}\, g_{jk} \right] +$$

$$+ \frac{R}{6}\left[g_{im} g_{jk} - g_{ik} g_{jm}\right]$$

(2.2.1)

donde R_{abcd} , R_{ab} y R son los tensores de Riemann y Ricci, y la curvatura escalar respectivamente, los cuales pueden expresarse como:

$$R^{i}{}_{jkm} = \Gamma^{i}{}_{jm,k} - \Gamma^{i}{}_{jk,m} + \Gamma^{i}{}_{ck}\,\Gamma^{c}{}_{jm} - \Gamma^{i}{}_{cm}\,\Gamma^{c}{}_{jk}$$

donde:

$$\Gamma^{i}{}_{jm} = \frac{1}{2} g^{ir} \left[g_{rj,m} + g_{rm,j} - g_{jm,r} \right]$$

(2.2.2)

son los símbolos de Christoffel.

$$R_{ab} = R_{ba} = R^{c}_{abc} \quad \& \quad R = R^{a}{}_{a}$$

(2.2.3)

Las proyecciones de (2.2.1) sobre la tétrada nula NP se conocen como cantidades de NP.

Considérense los tensores U, V, M definidos como:

$$U = \bar{m} \otimes l = U_{ab} = l_b\, \bar{m}_a - l_a\, \bar{m}_b$$

$$V = n \otimes m = V_{ab} = n_a\, m_b$$

$$M = m \otimes \bar{m} + l \otimes n = M_{ab} = m_a\, \bar{m}_b - m_b\, \bar{m}_a - n_a\, l_b + n_b\, l_a$$

(2.2.4)

éstos constituyen una base para el espacio de bivectores autoduales, para los cálculos posteriores son útiles las contracciones:

$$V_{ik}\, V^{k}{}_{r} = U_{ik}\, U^{k}{}_{r} = 0$$

$$M_{ik}\, M^{k}{}_{r} = g_{ir}$$

$$V_{ik}\, U^{k}{}_{r} = n_i l_r - m_i\, \bar{m}_r$$

$$V_{ik}\, M^{k}{}_{r} = -\,V_{ir}$$

$$U_{ik}\, M^{k}{}_{r} = U_{ir},$$

(2.2.5)

de donde se deduce que los únicos productos internos entre los

U, V y M distintos de cero son:

$$U \cdot V = 2 \qquad , \qquad M \cdot M = -4$$

cualquier tensor autodual de cuarto orden que cumple con las simetrias de Riemann, se expande según la siguiente base:

$$\begin{aligned}
B_0 &= U \cdot U \\
B_1 &= U \cdot M + M \cdot U \\
B_2 &= U \cdot V + V \cdot U \\
B_3 &= V \cdot M + M \cdot V \\
B_4 &= V \cdot V \\
B_5 &= M \cdot M
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

la cual respeta las condiciones de simetría de Riemann. El tensor conformal se desarrolla por medio de coeficientes ψ_r, $r = 0,1,2,3,4$ que se conocen con el nombre de cantidades de NP, éstas no son independientes porque el tensor de Weyl tiene traza nula $C^{ik}{}_{kj} = 0$ lo que exige que ψ_2 sea igual a ψ_5 obteniéndose,

$$W = C + i\,{}^*C = 2\left|\, \psi_0\, UU + \psi_1 (UM + MU) + \psi_2 (UV + VU + MM) + \right. \\ \left. + \psi_3 (VM + MV) + \psi_4 (VV) \,\right| \tag{2.2.7}$$

donde el factor 2 se introduce por conveniencia y ${}^*C$ representa el conjugado del tensor conformal. Las cinco cantidades complejas independientes de NP, ψ_r, $r = 0,\ldots,4$, sustituyen en forma equivalente a las diez componentes reales independientes del tensor conformal, éstas cantidades fueron introducidas inicialmente por Sachs (1961). Con las cantidades NP para cada tipo Petrov de $\mathbb{R}_4$ y mediante una rotación apropiada de la tétrada nula NP, es posible conseguir que, el desarrollo del tensor de Weyl, se reduzca de acuerdo con la siguiente tabla

Tipo	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
I	$\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$	0	$-\frac{1}{2}\lambda_3$	0	$\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$
D	0	0	λ_1	0	0
II	0	0	λ_1	0	1
N	0	0	0	0	1
III	0	0	0	$-\frac{i}{\sqrt{2}}$	0

donde las cantidades de NP se calculan construyendo al tensor conformal con base (U,V,M).

$$
\begin{aligned}
\psi_0 &= \frac{1}{8} V\cdot C^{+}\cdot V = C_{pqrs}\, n^p\, m^q\, n^r\, m^s \\
\psi_1 &= -\frac{1}{16} V\cdot C^{+}\cdot M = C_{pqrs}\, n^p\, l^q\, n^r\, m^s \\
\psi_2 &= \frac{1}{8} V\cdot C^{+}\cdot V = C_{pqrs}\, \bar{m}^p\, l^q\, n^r\, m^s \\
\psi_3 &= -\frac{1}{16} U\cdot C^{+}\cdot M = C_{pqrs}\, n^p\, l^q\, \bar{m}^r\, l^s \\
\psi_4 &= \frac{1}{8} U\cdot C^{+}\cdot U = C_{pqrs}\, \bar{m}^p\, l^q\, \bar{m}^r\, l^s
\end{aligned}
\tag{2.2.8}
$$

estos cinco escalares complejos contienen la misma información que las diez componentes independientes de C_{abij}. Las cantidades ψ_r no se alteran bajo una transformación de coordenadas, pero si cambian al rotar la tétrada nula;

<u>**CLASE 1.**</u> $\underset{\sim}{\alpha} = 0$

$$\tilde{\psi}_0 = e^{2(A - iB)}\, \psi_0$$
$$\tilde{\psi}_1 = e^{(A - iB)}\, (\psi_1 + \underset{\sim}{\beta}\, Q^{-1}\, \psi_0)$$

$$\tilde{\psi}_2 = \psi_2 + 2\,\underset{\sim}{\beta}\, Q^{-1}\,\psi_1 + \underset{\sim}{\beta}^2\, Q^{-2}\,\psi_0$$

$$\tilde{\psi}_3 = e^{-A+iB}(\psi_3 + \underset{\sim}{\beta}\, Q^{-1}\psi_2 + 3\,\underset{\sim}{\beta}^2\, Q^{-2}\psi_1 + \underset{\sim}{\beta}^3\, Q^{-3}\psi_0)$$

$$\tilde{\psi}_4 = e^{2(-A-iB)}(\psi_4 + 4\,\underset{\sim}{\beta} Q^{-1}\psi_3 + 6\,\underset{\sim}{\beta}^2 Q^{-2}\psi_2 + 4\,\underset{\sim}{\beta}^3 Q^{-3}\psi_1 + \underset{\sim}{\beta}^4 Q^{-4}\psi_0)$$

<u>**CLASE II.**</u> $\underset{\sim}{\beta} = 0$

$$\tilde{\psi}_0 = e^{2(A-iB)}(\psi_0 + 4\,\underset{\sim}{\alpha} Q\psi_1 + 4\,\underset{\sim}{\alpha}^2 Q^2\psi_2 + 4\,\underset{\sim}{\alpha}^3 Q^3\psi_3 + \underset{\sim}{\alpha}^4 Q^4\psi_4)\ ,$$

$$\tilde{\psi}_1 = e^{(A-iB)}(\psi_1 + 3\,\underset{\sim}{\alpha} Q\psi_2 + 3\,\underset{\sim}{\alpha}^2 Q^2\psi_3 + \underset{\sim}{\alpha}^3 Q^3\psi_4)$$

$$\tilde{\psi}_2 = \psi_2 + 2\,\underset{\sim}{\alpha}\,\psi_3 + \underset{\sim}{\alpha}^2 Q^2\psi_4$$

$$\tilde{\psi}_3 = e^{(-A+iB)}(\psi_3 + \underset{\sim}{\alpha}\, Q\, \psi_4)$$

$$\tilde{\psi}_4 = e^{2(-A+iB)}\,\psi_4\ .$$

<u>**CLASE III.**</u> $\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{\beta} = 0$

$$\tilde{\psi}_0 = e^{2(A-iB)}\psi_0$$

$$\tilde{\psi}_1 = e^{A-iB}\,\psi_1$$

$$\tilde{\psi}_2 = \psi_2$$

$$\tilde{\psi}_3 = e^{-A+iB}\,\psi_3$$

$$\tilde{\psi}_4 = e^{2(-A+iB)}\psi_4 .$$

2.3 TETRADAS PRINCIPALES DE DEBEVER-PENROSE (D.P.)

Los vectores de Debever-Penrose (tetradas Principales) son las direcciones nulas de C_{ijkm}, estos vectores satisfacen:

$$K^r K_{[t\ b]_{rm}} [n^k{}_c] K^m = 0$$
$$K^r K_r = 0$$
$$\bar{K}^r = K^r$$

(2.3.1)

En cada punto del espacio-tiempo tenemos a lo más 4 vectores de (DP) los cuales pueden coincidir entre si, esto conduce a una nomenclatura más precisa:

$$W_{brmn} K^m = 0$$

(2.3.2)

$$W_{brn} [n^k{}_c] K^m = 0$$

(2.3.3)

$$K^r W_{brn} [n^k{}_c] K^m = 0$$

(2.3.4)

$$K^r K_{[t\ \check{}\ b]_{rm}} [n^k{}_c] K^m = 0$$

(2.3.5)

en donde K^r es un vector Debever-Penrose (DP), estos se clasifican según Ovando en:

1) 4-degenerado si satisface (2.3.2)

2) 3-degenerado si satisface (2.3.3), pero no satisface (2.3.1)

3) 2-degenerado si verifica (2.3.4), y no satisface (2.3.2) y (2.3.3).

4) no-degenerado o simple si cumple con (2.3.5) y no satisface (2.3.2), (2.3.3) y (2.3.4).

En opinión de Robinson (1982) la presencia de los vectores de DP ya habian sido indicados por Cartan (1922), pero no se les consideró valiosos, sin embargo en la actualidad son relevantes en

diversas investigaciones. Nótese que cualquier múltiplo de una dirección principal nula, es nuevamente un vector DP.
En términos de (2.3.2 a 4) se puede clasificar el tensor de Weyl de la siguiente manera (clasificación de Petrov):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &: [\,1\ 1\ 1\ 1\,] \\
\mathrm{II} &: [\,1\ 1\ 2\,] \\
\mathrm{D} &: [\,2\ 2\,] \\
\mathrm{III} &: [\,1\ 3\,] \\
\mathrm{N} &: [\,4\,]
\end{aligned}
$$

es decir, en el tipo I existen 4 direcciones principales simples, en II tenemos dos vectores de DP simples y uno 2-degenerado, en D se cuenta con dos vectores 2-degenerados, en III uno no degenerado y uno 3-degenerado y en N sólo tenemos un vector 4-degenerado.
Si ahora suponemos que n^r y/o l^r son DP entonces algunas ψ_a se anulan , lo cual es una gran simplificación en diversas aplicaciones, en la siguiente tabla se muestran las funciones que se anulan:

TABLA 2.3.1

DEGENERACION	n^r	l^r
simple	$\psi_0 = 0$	$\psi_4 = 0$
doble	$\psi_0 = \psi_1 = 0$	$\psi_3 = \psi_4 = 0$
triple	$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = 0$	$\psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0$
cuadruple	$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$	$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0$

La tabla anterior solo es válida cuando n^r y/o l^r son direcciones principales DP; también en esta tabla es valido el si y solo si, es decir, por ejemplo: n^r es 2-degenerado $\Leftrightarrow \psi_0 = \psi_1 = 0$ ó bien, l^r es simple $\Leftrightarrow \psi_4 =$ etc.

En Ovando (1985) se probó que existe una tétrada nula de DP (no necesariamente única) que llamaremos canónica tal que:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{N}: && \psi_4 = 1, && \psi_r = 0; \quad r = 0,1,2,3 \\
&\mathrm{III}: && \psi_3 = \frac{-i}{\sqrt{2}}, && \psi_r = 0; \quad r = 0,1,2,3; \quad i = \sqrt{-1} \\
&\mathrm{D}: && \psi_2 = \lambda_1, && \psi_r = 0; \quad r = 0,1,3,4 \\
&\mathrm{II}: && \psi_2 = \lambda_1, \ \psi_4 = 1, && \psi_r = 0; \quad r = 0,1,3 \\
&\mathrm{I}: && \psi_0 = \psi_4 = \tfrac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) \ \ \text{y} \ \ \psi_2 = -\tfrac{1}{2}\lambda_3, && \psi_r = 0; \ r = 1,3.
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

en donde λ_j son valores propios de la matriz de Petrov.

2.4 IDENTIDADES DE BIANCHI Y ECUACIONES DE NEWMAN-PENROSE

Las identidades de Bianchi rigen la evolución de la geometría del espacio-tiempo

$$R_{abcf;r} + R_{abfr;c} + R_{abrc;f} = 0 \tag{2.4.1}$$

si ahora recordamos que:

$$R_{abcf} = R_{(i)(j)(t)(d)} Z^{(i)}{}_a Z^{(j)}{}_b Z^{(t)}{}_c Z^{(d)}{}_f$$

y sustituimos en (2.4.1) y proyectamos sobre la tétrada NP se obtiene:

$$R_{(k)(q)(l)(p);(h)} + R_{(k)(q)(p)(h);(l)} + R_{(k)(q)(l);(p)} +$$

$$+ \gamma^i{}_{qh} R_{(i)(k)(l)(p)} + \gamma^i{}_{ql} R_{(i)(k)(p)(h)} + \gamma^i{}_{qp} R_{(i)(k)(l)(h)} +$$

$$- \gamma^{i}{}_{kh}R_{(i)(q)(l)(p)} - \gamma^{i}{}_{kl}R_{(i)(q)(p)(h)} - \gamma^{i}{}_{kp}R_{(i)(q)(h)(l)} +$$
$$+ (\gamma^{i}{}_{ph} - \gamma^{i}{}_{hp})R_{(i)(l)(k)(q)} + (\gamma^{i}{}_{lp} - \gamma^{i}{}_{pl})R_{(i)(h)(k)(q)} +$$
$$+ (\gamma^{i}{}_{hl} - \gamma^{i}{}_{lh})R_{(i)(p)(k)(q)} = 0. \qquad (2.4.2)$$

Si en esta expresión damos valores a los índices $kqlph$, se deducen las identidades de Bianchi en el formalismo de Newman-Penrose (1962):

<u>Identidades de Bianchi:</u>

(a) $$\bar{\delta}\psi_0 - D\psi_1 - D\phi_{01} + \delta\phi_{00} = (4\alpha - \pi)\psi_0 - 2(2\rho + \varepsilon)\psi_1 + 3K\psi_2 - (\bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\beta)\phi_{00} - 2(\varepsilon + \bar{\rho})\phi_{01} - 2\sigma\bar{\phi}_{01} + 2K\phi_{11} + \bar{K}\phi_{02}, \qquad (2.4.5)$$

(b) $$\Delta\psi_0 - \delta\psi_1 - D\phi_{02} + \delta\phi_{01} = (4\gamma - \mu)\psi_0 - 2(2\tau + \beta)\psi_1 + 3\gamma\psi_2 - (2\varepsilon - 2\bar{\varepsilon} + \bar{\rho})\phi_{02} - 2(\bar{\pi} - \beta)\phi_{01} - 2\sigma\phi_{11} + 2K\phi_{12} + \lambda\phi_{00} \qquad (2.4.6)$$

(c) $$\bar{\delta}\psi_3 - D\psi_4 - \bar{\delta}\,\bar{\phi}_{12} + \Delta\phi_{02} = (4\varepsilon - \rho)\psi_4 - 2(2\pi + \alpha)\psi_3 + 3\lambda\psi_3 - (2\gamma - 2\bar{\gamma} + \bar{\mu})\phi_{02} - 2(\bar{\tau} - \alpha)\bar{\phi}_{12} - 2\lambda\phi_{11} + 2\nu\bar{\phi}_{01} + \bar{\sigma}\phi_{22} \qquad (2.4.7)$$

(d) $$\Delta\psi_3 - \delta\psi_4 - \bar{\delta}\phi_{22} + \Delta\bar{\phi}_{12} = (4\beta - \tau)\psi_4 - 2(2\mu + \gamma)\psi_3 + 3\nu\psi_2 - (\bar{\tau} - 2\bar{\beta} - 2\alpha)\phi_{22} - 2(\gamma + \bar{\mu})\bar{\phi}_{12} - 2\lambda\phi_{12} + 2\nu\phi_{11} + \bar{\nu}\,\bar{\phi}_{02}, \qquad (2.4.8)$$

(e) $$D\psi_2 - \bar{\delta}\psi_1 - \Delta\phi_{00} + \bar{\delta}\phi_{01} - \frac{1}{12}DR = -\lambda\phi_0 + 2(\pi - \alpha)\psi_1 + 3\rho\psi_2 - 2K\psi_2 + 2(\bar{\tau} + \alpha)\phi_{01} - (2\gamma + 2\bar{\gamma} - \bar{\mu})\phi_{00} + 2\tau\phi_{01} - 2\rho\phi_{11} - \bar{\sigma}\phi_{03} \quad , \tag{2.4.9}$$

(f) $$\Delta\psi_2 - \delta\psi_3 - D\phi_{22} + \delta\bar{\phi}_{12} - \frac{1}{12}\Delta R = \sigma\psi_4 + 2(\beta - \tau)\psi_3 - 3\mu\psi_2 + 2\nu\psi_1 - 2(\bar{\pi} + \beta)\bar{\phi}_{12} - (\bar{\rho} - 2\varepsilon - 2\bar{\varepsilon})\phi_{22} - 2\pi\phi_{12} + 2\mu\phi_{11} + \bar{\lambda}\,\bar{\phi}_{02} \quad , \tag{2.4.10}$$

(g) $$D\psi_3 - \bar{\delta}\psi_2 + D\bar{\phi}_{12} - \delta\bar{\phi}_{02} + \frac{1}{12}\bar{\delta}R = -K\psi_4 + 2(\rho - \varepsilon)\psi_3 + 3\pi\psi_2 - 2\lambda\psi_1 + 2(\bar{\rho} - \varepsilon)\bar{\phi}_{12} - (2\bar{\alpha} - 2\beta - \bar{\pi})\bar{\phi}_{02} + 2\pi\phi_{11} - 2\mu\bar{\phi}_{01} - \bar{K}\phi_{22} \quad , \tag{2.4.11}$$

(h) $$\Delta\psi_1 - \delta\psi_2 + \Delta\phi_{01} - \bar{\delta}\phi_{02} + \frac{1}{12}\delta R = \nu\psi_0 + 2(\gamma - \mu)\psi_1 - 3\tau\psi_2 + 2\sigma\psi_3 - 2(\bar{\mu} - \gamma)\phi_{01} - (\bar{\tau} - 2\bar{\beta} + 2\alpha)\phi_{02} - 2\tau\phi_{11} + 2\rho\phi_{12} + \bar{\nu}\phi_{00} \quad , \tag{2.4.12}$$

(i) $$D\phi_{11} - \delta\bar{\phi}_{01} - \bar{\delta}\phi_{01} + \Delta\phi_{00} + \frac{1}{8}DR = (2\gamma - \mu + 2\bar{\gamma} - \bar{\mu})\,\phi_{00} + (\pi - 2\alpha - 2\bar{\tau})\phi_{01} + \bar{\sigma}\phi_{02} + (\bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\tau)\bar{\phi}_{01} + 2(\rho + \bar{\rho})\phi_{11} + \sigma\bar{\phi}_{02} - \bar{K}\phi_{12} - K\bar{\phi}_{12} \quad , \tag{2.4.13}$$

(j) $$D\phi_{12} - \delta\phi_{11} - \bar{\delta}\phi_{02} + \Delta\phi_{01} + \frac{1}{8}\delta R = (-2\alpha + 2\bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\phi_{02} + (\bar{\rho} + 2\rho - 2\bar{\varepsilon})\phi_{12} + 2(\bar{\pi} - \tau)\phi_{11} + (2\gamma - 2\bar{\mu} - \mu)\phi_{01} + \bar{\nu}\phi_{00} - \bar{\lambda}\,\bar{\phi}_{01} + \sigma\bar{\phi}_{12} - K\phi_{22} ,$$

(2.4.14)

(k) $$D\phi_{22} - \delta\bar{\phi}_{12} - \bar{\delta}\phi_{12} + \Delta\phi_{11} + \frac{1}{8}\Delta R = (\rho + \bar{\rho} - 2\varepsilon - 2\bar{\varepsilon})\phi_{22} + (2\bar{\beta} + 2\pi - \tau)\phi_{12} - 2(\mu + \bar{\mu})\phi_{11} + (2\beta + 2\bar{\pi} - \tau)\bar{\phi}_{12} + \nu\phi_{01} + \bar{\nu}\phi_{01} - \bar{\lambda}\,\bar{\phi}_{02} - \lambda\phi_{02} ,$$

(2.4.15)

Estas 11 relaciones contienen la misma información que la expresión tensorial (2.4.1) y han sido escritas en el mismo orden que en J A. Torres (1985). Las herramientas que se utilizan para analizar el campo gravitacional son :

RELATIVIDAD GENERAL	=	ECUACIONES DE CAMPO	+	ECUACIONES DE N-P	+	IDENTIDADES DE BIANCHI	+	RELACIONES DE CONMUTACION

(2.4.16)

Por otra parte se tienen las útiles ecuaciones de Newman-Penrose:

<u>ECUACIONES DE NEWMAN-PENROSE</u>

(a) $D\rho - \bar{\delta}\kappa = (\rho^2 + \sigma\bar{\sigma}) + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\rho - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \beta - \pi) - \phi_{00}$,

(b) $D\sigma - \delta\kappa = (\rho + \bar{\rho})\sigma + (3\varepsilon - \bar{\varepsilon})\sigma - (\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta)\kappa + \psi_0$,

(c) $D\tau - \Delta\kappa = (\tau + \bar{\pi})\rho + (\bar{\tau} + \pi)\sigma + (\varepsilon - \bar{\varepsilon})\tau - (3\gamma + \bar{\gamma})\kappa + \psi_1 - \phi_{01}$,

(d) $D\alpha - \bar{\delta}\varepsilon = (\rho + \bar{\varepsilon} - 2\varepsilon)\alpha + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\varepsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma + (\varepsilon + \rho)\pi - \bar{\phi}_{01}$,

(e) $D\beta - \delta\varepsilon = (\alpha + \pi)\sigma + (\bar{\rho} - \bar{\varepsilon})\beta - (\mu + \gamma)\kappa - (\bar{\alpha} - \bar{\pi})\varepsilon + \psi_1$,

(f) $D\gamma - \Delta\varepsilon = (\tau + \bar{\pi})\alpha + (\bar{\tau} + \pi)\beta - (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\gamma - (\gamma + \bar{\gamma})\varepsilon + \tau\pi - \nu\kappa +$
$+ \psi_2 - \phi_{11} + \frac{R}{24}$,

(g) $D\lambda - \bar{\delta}\pi = (\rho\lambda + \bar{\sigma}\mu) + \pi^2 + (\alpha - \bar{\beta})\pi - \nu\bar{\kappa} - (3\varepsilon - \bar{\varepsilon})\lambda - \bar{\phi}_{02}$,

(h) $D\mu - \delta\pi = (\bar{\rho}\mu + \sigma\lambda) + \pi\bar{\pi} - (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\mu - \pi(\bar{\alpha} - \beta) - \nu\kappa + \psi_2 - \frac{R}{12}$,

(i) $D\nu - \Delta\pi = (\pi + \tau)\mu + (\bar{\pi} + \tau)\lambda + (\gamma - \bar{\gamma})\pi - (3\varepsilon + \bar{\varepsilon})\nu + \psi_3 - \bar{\phi}_{12}$,

(j) $\Delta\lambda - \bar{\delta}\nu = -(\mu + \bar{\mu})\lambda - (3\gamma - \bar{\gamma}) + (3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\nu - \psi_4$,

(k) $\delta\rho - \bar{\delta}\sigma = \rho(\bar{\alpha} + \beta) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + (\rho - \bar{\rho})\tau + (\mu - \bar{\mu})\kappa - \psi_1 - \phi_{01}$,

(l) $\delta\alpha - \bar{\delta}\beta = (\mu\rho - \lambda\sigma) + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + \gamma(\rho - \bar{\rho}) + \varepsilon(\mu - \bar{\mu}) - \psi_2 +$
$- \phi_{11} - \frac{R}{24}$,

(m) $\delta\lambda - \bar{\delta}\mu = (\rho - \bar{\rho})\nu + (\mu - \bar{\mu})\pi + \mu(\alpha + \bar{\beta}) + \lambda(\bar{\alpha} - 3\beta) - \psi_3 - \bar{\phi}_{12}$,

(n) $\delta\nu - \Delta\mu = (\mu^2 + \lambda\bar{\lambda}) + (\gamma + \bar{\gamma})\mu - \bar{\nu}\pi + (\tau - 3\beta - \bar{\alpha})\nu - \phi_{22}$,

(o) $\delta\gamma - \Delta\beta = (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\gamma + \mu\tau - \sigma\nu - \varepsilon\bar{\nu} - \beta(\gamma - \bar{\gamma} - \mu) + \alpha\bar{\lambda} - \phi_{12}$,

(p) $\delta\tau - \Delta\sigma = (\mu\sigma + \bar{\lambda}\rho) + (\tau + \beta - \bar{\alpha})\tau - (3\gamma - \bar{\gamma})\sigma - \kappa\bar{\nu} - \phi_{02}$,

(q) $\Delta\rho - \bar{\delta}\tau = -(\rho\bar{\mu} + \sigma\lambda) + (\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau})\tau + (\gamma + \bar{\gamma})\rho + \nu\kappa - \psi_2 + \frac{R}{12}$,

(r) $\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma = (\rho + \varepsilon)\nu - (\tau + \beta)\lambda + (\bar{\gamma} - \bar{\mu})\alpha + (\bar{\beta} - \bar{\tau})\gamma - \psi_3$,

donde:

$$\kappa = \gamma_{414} = -n_{a;b}\, m^a n^b \quad , \qquad \rho = \gamma^{412} = -n_{a;b}\, m^a \bar{m}^b$$

$$\sigma = \gamma_{411} = -n_{a;b}\, m^a m^b \quad , \qquad \tau = \gamma_{413} = -n_{a;b}\, m^a l^b$$

$$\nu = \gamma_{233} = l_{a;b}\, \bar{m}^a l^b \quad , \qquad \mu = \gamma_{231} = l_{a;b}\, \bar{m}^a m^b$$

$$\lambda = \gamma_{232} = l_{a;b}\, \bar{m}^a \bar{m}^b \quad , \qquad \pi = \gamma_{234} = l_{a;b}\, \bar{m}^a n^b$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma_{432} - \gamma_{124}) = -\frac{1}{2}(n_{a;b}\, l^a n^b - m_{a;b}\, \bar{m}^a n^b)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_{433} - \gamma_{123}) = -\frac{1}{2}(l_{a;b}\, n^a l^b - \bar{m}_{a;b}\, m^a l^b)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\gamma_{432} - \gamma_{122}) = \frac{1}{2}(l_{a;b}\, n^a \bar{m}^b - \bar{m}_{a;b}\, m^a \bar{m}^b)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\gamma_{431} - \gamma_{121}) = -\frac{1}{2}(n_{a;b}\, l^a m^b - m_{a;b}\, \bar{m}^a m^b)$$

Estas 12 cantidades complejas se conocen con el nombre de <u>coeficientes de espin</u> .

Además las siguientes relaciones denotan la evolución en el espacio-tiempo de la tetrada nula (derivadas direccionales):

$$\delta m_a = -\sigma l_a + \bar{\lambda} n_a + (\beta - \bar{\alpha}) m_a \quad , \quad \delta \bar{m}_a = -\bar{\rho} l_a + \mu n_a = (\bar{\alpha} + \beta)\bar{m}_a ,$$

$$\delta l_a = -(\bar{\alpha} + \beta) l_a + \mu m_a + \bar{\lambda} \bar{m}_a \quad , \quad \delta n_a = (\bar{\alpha} + \beta) n_a - \bar{\rho} m_a - \sigma \bar{m}_a ,$$

$$\bar{\delta} m_a = -\rho l_a + \bar{\mu} n_a + (\alpha - \bar{\beta}) m_a \quad , \quad \bar{\delta} \bar{m}_a = -\bar{\sigma} l_a + \lambda n_a + (\bar{\beta} - \alpha) \bar{m}_a ,$$

$$\bar{\delta} l_a = -(\alpha + \bar{\beta}) + \lambda m_a + \overline{\mu m}_a \quad , \quad \bar{\delta} n_a = (\alpha + \bar{\beta}) n_a - \bar{\sigma} m_a - \rho \bar{m}_a ,$$

$$\Delta m_a = -\tau l_a + \bar{\nu} n_a + (\gamma - \bar{\gamma}) m_a \quad , \quad \Delta \bar{m}_a = -\bar{\tau} l_a + \nu n_a + (\bar{\gamma} - \gamma) \bar{m}_a ,$$

$$\Delta l_a = -(\gamma + \bar{\gamma}) l_a + \nu m_a + \overline{\nu m}_a \quad , \quad \Delta n_a = (\gamma + \bar{\gamma}) n_a - \bar{\tau} m_a - \tau \bar{m}_a ,$$

$$D m_a = -\varkappa l_a + \bar{\pi} n_a + (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) m_a \quad , \quad D \bar{m}_a = -\bar{\varkappa} l_a + \pi n_a + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) \bar{m}_a ,$$

$$D l_a = -(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) l_a + \pi m_a + \overline{\pi m}_a \quad , \quad D n_a = (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) n_a - \bar{\varkappa} m_a - \varkappa \bar{m}_a .$$

Las funciones ϕ_{00} , ϕ_{11}, ϕ_{22} son reales y ϕ_{01}, ϕ_{02}, ϕ_{12} son complejos;

$$\phi_{00} = \frac{1}{2} E_{ab} n^a n^b \quad , \quad \phi_{01} = \frac{1}{2} E_{ab} n^a m^b \quad , \quad \phi_{02} = \frac{1}{2} E_{ab} m^a m^b ,$$

$$\phi_{11} = \frac{1}{4} E_{ab} (m^a \bar{m}^b + n^a l^b) = \frac{1}{2} E_{ab} n^a l^b = \frac{1}{2} E_{ab} m^a \bar{m}^b$$

$$\phi_{12} = \frac{1}{2} E_{ab} \bar{l}^a m^b \quad , \quad \phi_{22} = \frac{1}{2} E_{ab} l^a l^b ,$$

en donde:

$$E_{ab} = 2[\phi_{02} \bar{m}_a \bar{m}_b + \phi_{02} m_a m_b + \phi_{00} l_a l_b + \phi_{22} n_a n_b + \phi_{11} (m_a \bar{m}_b + \bar{m}_a m_b +$$

$$+ l_a n_b + n_a l_b) - \bar{\phi}_{01} (m_a l_b + m_b l_a) - \bar{\phi}_{12} (m_a n_b + m_b n_a) - \phi_{01} (\bar{m}_a l_b +$$

$$+ l_a \bar{m}_b) - \phi_{12} (\bar{m}_a n_b + \bar{m}_b n_a)]$$

ESPINTENSOR DE LANCZOS

3.0 INTRODUCCION

El trabajo de Cornelius Lanczos (1962) [21] y [22] consistió en tratar de geometrizar el campo electromagnetico <u>sin abandonar</u> la geometría Riemanniana por lo que su investigacion fué enfocada hacia la búsqueda de expresiones matemáticas que permitiesen reproducir las ecuaciones de Maxwell, de esta manera los campos: eléctrico y magnetico quedarian en función de propiedades intrinsecas del espacio-tiempo, asi como también dependerian de la curvatura (desviación relativa de las geodesicas vecinas) y de ésta manera se relacionarian con la gravedad. Desafortunadamente, Lanczos no culminó su geometrización del campo de Maxwell pero logró demostrar que en todo 4-espacio de Riemann existe un tensor (no necesariamente único) K_{ijr} , llamado espintensor que genera al tensor conformal, via una expresión algebraica-diferencial: esto ultimo es muy importante debido a que éste resultado no depende de las ecuaciones de campo, por lo que su validez se extiende en toda la teoria geometrica de $\mathbb{R}_4$.

En la Sección 3.1 se describe la expresión que corresponde al potencial de Weyl en el formalismo tensorial. En la Seccion 3.2 se reescribe el espintensor de Lanczos en el formalismo de Newman-Penrose con la finalidad de disponer de un metodo sistematico para la construcción del espintensor K_{ijc}. Finalmente en la Sección 3.3 se determinan las expresiones para el potencial de Lanczos, para algunas metricas de interes en relatividad general.

3.1 POTENCIAL DEL TENSOR DE WEYL (Generador del Tensor Conformal). FORMALISMO TENSORIAL.

Lanczos siempre estuvo interesado en geometrizar el campo electromagnetico bajo el mismo espiritu con que Einstein habia geometrizado la gravedad, asi desde 1931 hasta su muerte en 1974 intentó extender la relatividad general mediante ecuaciones de campo deducibles a partir de un principio variacional tipo Hilbert, con Lagrangiana L cuadratica en el tensor de Riemann , en su articulo de 1938 demostro que cuando $L = L_0 \equiv {}^*R^{*abcd} R_{abcd}$ el proceso variacional conducia a 0 = 0 (debido a que la Lagrangiana es una divergencia exacta), ver H.A. Buchdall [9], es decir no aparecen ecuaciones de campo que restrinjan la geometria del espacio-tiempo, dicho de otra manera, las consecuencias de :

$$\delta \int_{V_4} L_0 \sqrt{-g} \; d^4x = 0 \qquad (3.1.1)$$

son validas para todo $\mathbb{R}_4$ de Riemann. Por otra parte 0 = 0 no producia beneficio alguno para el proceso variacional simbolizado por δ efectuado sobre la metrica (tecnica de Hilbert), esta situacion fue remediada por Lanczos (1962), al sugerir realizar δ variando g_{ab} y ${}^*R^{*abcd}$ independientemente e introduciendo multiplicadores de Lagrange para tomar en cuenta las restricciones que este enfoque origina, la expresion (3.1.1) proporciona nueva información sobre la estructura de la geometria Riemanniana, uno de los multiplicadores resultó ser el tensor K_{ijb} con las simetrias:

$$K_{aij} = - K_{iaj} \qquad (3.1.2.a)$$

$$K_{a\ r}^{\ r} = 0 \qquad (3.1.2.b)$$

$$K_{ab\ ;c}^{\ \ c} = 0 \qquad (3.1.2.c)$$

$$K_{aij} + K_{ija} + K_{jai} = 0 \qquad (3.1.2.d)$$

el cual genera al tensor conformal via la relación :

$$C_{pqjb} = K_{pqj;b} - K_{pqb;j} + K_{jbp;q} - K_{jbq;p} + \\ + g_{pb} K_{jq} - g_{pj} K_{qb} + g_{qj} K_{pb} - g_{qb} K_{pj} \qquad (3.1.3)$$

donde

$$K_{jr} \equiv K_{j\ r;a}^{\ a} = K_{rj} . \qquad (3.1.4)$$

En todo espacio-tiempo existe un tensor de tercer orden que juega el papel de superpotencial para el tensor de Weyl que a su vez es la parte del tensor de Riemann, no ligada directamente al tensor de Ricci. Bampi-Caviglia (1983) [2] volvieron a probar (3.1.3) de manera rigurosa y probaron que (3.1.2.a) a (3.1.2.d) son fundamentales para la existencia del potencial de Lanczos.

En el proceso para el calculo de K_{ijc} debe considerarse que en un espacio-tiempo dado se tiene como dato la metrica g_{ab} , por lo que determinar C_{ijrc} es rutina ya que existe una relacion definida que encadena a estos tensores, por ejemplo con g_{ip} es posible calcular los simbolos de Christoffel y con ellos obtener los tensores de Riemann y Ricci que de inmediato conducen al tensor conformal, asi se tiene que $C_{ijka} = C_{ijka}(g_{pq}, g_{pq;r}, g_{pq;rb})$, sin embargo, K_{ijc} no es función del tensor métrico y de sus primeras derivadas. El hecho es que no existe regla ó fórmula que permita obtener el potencial de Lanczos a partir de g_{ab}. En las expresiones (3.3) los datos son la métrica y C_{ijka}, al dar valores a los índices pqjb resulta un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales para las componentes K_{ijc} y la dificultad de resolver este sistema dependera de g_{ab}, el problema radica en que se debe integrar (3.1.3) para obtener K_{prt} por lo que se dice que éste tensor es no local. El aspecto no local de K_{ijr} se ha interpretado como que dicho tensor dependera en forma explicita de la geometria global de $\mathcal{R}_4$, por lo que a muchos autores les pareció una tarea realmente muy compleja (Fernandez [24]) frenando la construcción de los potenciales de Lanczos para diversas metricas de interés en relatividad general.

En 1962 Lanczos resolvió (3.1.3) para campos gravitacionales débiles con $R_{ab} = 0$ en dicha solución apareció la ecuación de Dirac para espin $\frac{1}{2}$ aunque no estaba claro a qué partícula se refiere, de todos modos este hecho hizo que el tensor K_{ijr} se bautizara con el nombre de espintensor. Sin embargo Taub (1966), considero el hallazgo de la ecuación de Dirac en dicho trabajo accidental y sin importancia debido a que en ningún momento se consideraron efectos cuánticos.

Con la idea de encadenar la gravitacion con la mecanica cuantica vía K_{ijr} Maher-Zund (1968-1975) [25] escribieron en forma espinorial las expresiones (3.1.2.a-b), (3.1.3) y (3.1.4) y el resultado fué la inesperada presencia de las ecuaciones para una particula con masa cero y espin 2, que algunos tratan de identificar con el graviton . Newman-Goenner [28] y [29] (1984) afirman que Ashtekar obtuvo la versión espinorial de (3.1.2 - 3.1.4) con toda la herramienta de cuantización canónica de la gravedad.

En la teoria de Maxwell, al 4-potencial puede agregársele un gradiente sin que se afecte el correspondiente tensor de Faraday , éstas transformaciones de norma pueden extenderse al espintensor, es decir si a K_{ijc} se le reemplaza por $K_{ijc} + B_{ijc}$, donde B_{ijc} es cualquier espintensor de Lanczos para un espacio conformalmente plano, entonces permanece inalterado el lado izquierdo de (3.1.3), dichas transformaciones de norma fueron sugeridas por Zund (1975) y estudiadas por Atkins-Davis (1980) en teorias de norma no - Abelianas. el resultado de Lanczos introduce un nuevo grupo de transformaciones en relatividad general.

Cuando Lanczos llamó espintensor a K_{ijc} sembró la idea de que dicho tensor es capaz de describir el espin de ciertas particulas, esta idea fué adoptada por aquellos que intentan explicar la rotación de las particulas mediante una torsión del 4-espacio por lo que K_{ijc} es considerado como una contorsión en teorias Einstein-Cartan. ver Davis-Atkins-Baker (1978).

En 1948, Ruse fué el primero en estudiar la estructura algebraica de C_{ijcp} mediante la geometria proyectiva y el resultado es lo que ahora se conoce como clasificacion de Petrov (CP) de gran importancia en la relatividad actual. ver Ovando (1985). en su trabajo se enfatiza que el tensor de Weyl tiene eigenvectores nulos llamados vectores de Debever-Penrose (DP) o direcciones nulas principales. Los invariantes de C_{ijcp} poseen un papel relevante en dicha clasificacion . En el trabajo de Becerril (1986) se proponen dos caminos para efectuar la clasificacion de K_{ijc} a saber:

a) Idea de J. Plebañski;

Con el espintensor construir un tensor de cuarto orden con las mismas simetrias de C_{ijrc} y entonces a dicho tensor aplicarle la CP para así obtener información algebraica de K_{ijr}.

b) Idea adaptada de Collinson-Shaw (1972)

Mediante K_{ijc} formar un tensor simétrico de segundo orden con traza nula y aplicar a este la clasificación Churchill-Plebañski.

En ambos casos sería interesante relacionar las direcciones principales del espintensor con los eigenvalores de los tensores de Weyl y Ricci, sin embargo, otro posible camino a seguir está dado por Fernández (1986):

c) Método de Fernández:

El método para el análisis de la estructura algebraica de K_{ijc} el cual tiene semejanza con el enfoque matricial Petrov para la C.P. consiste en lo siguiente: En un evento dado del espacio-tiempo se construye una tétrada ortonormal arbitraria y se proyecta sobre ésta al espintensor, originándose así una matriz de 6x4 de acuerdo a:

$$K^{A}{}_{B} = K^{(a)(b)}{}_{(c)} \qquad (3.5)$$

donde B = 1,...,4 y

A ;	1	2	3	4	5	6
(a)(b)	(2)(3)	(3)(1)	(1)(2)	(1)(4)	(2)(4)	(3)(4)

(3.5.a)

entonces a la matriz rectangular $(K^{A}{}_{B})$ pueden obtenérsele sus eigenvalores y vectores propios mediante el ingenioso método de Lanczos (1958) [21], Lanczos extendió el problema de obtención de eigenvalores de matrices cuadradas a matrices arbitrarias, este trabajo le valió el premio Chauvet en 1960, ver Scaife (1974).

Por otra parte , Novello en 1990 ref [51] y [52] desarrolla una teoría completa de campo con espín dos, usando para ello las variables de Fierz $A_{\alpha\beta\mu}$, para el espacio-tiempo plano ó curvo, estas variables se relacionan con las variables estándar $\psi_{\mu\nu}$, sirviendo de puente para pasar de una representación a otra . La teoría de Novello no es la aproximación débil de Einstein de la relatividad general en la formulación Jordan-Lichnerowicz [52]. La teoría no-lineal se obtiene de la acción cuadrática del tensor de Weyl, usando para ello las variables de Fierz, la cual se relaciona con el potencial de Lanczos. Esta nueva teoría presenta similitud con la teoria electromagnética, desarrollada bajo un esquema de cuantización por Fermi-Gupta-Brewler [52].

3.2 ESPINTENSOR DE LANCZOS EN EL FORMALISMO COEFICIENTES DE ESPIN DE NEWMAN-PENROSE

En la sección 3.1 se comentó que (3.1.3) en su forma tensorial no proporciona un método sistemático para encontrar K_{ijc} aún cuando se proporcione como dato la metrica de $\mathbb{R}_4$. En esta sección se presenta la transcripción al enfoque NP, las relaciones que se obtienen permiten obtener espintensores con relativa facilidad. Los primeros en hacer esto son : Maher-Zund (1968-1975) [25]. En esta sección se usará la técnica de tétradas nulas expuesta en la Seccion 2.3.

Al aplicar el formalismo de NP al tensor de Weyl , se expande este $(C_{abpq} + i\,{}^{*}C_{abpq})$ en función de los bivectores V_{ab} , U_{ab} y M_{ab}, dando origen a las cantidades complejas: $\psi_0,\ldots,\psi_4$. Análogamente, usando la sugerencia de Zund (1969) para K_{jrc}, se construye el tensor complejo:

$$Q_{abc} \equiv K_{abc} + i\,{}^{*}K_{abc} \quad \text{con}$$

$${}^{*}K_{abc} = \frac{1}{2}\, \eta_{abpq}\, K^{pq}{}_{c} \quad , \; i = \sqrt{-1} \quad , \tag{3.2.1}$$

y que satisface las propiedades algebraicas (3.1.2)

$$Q_{abc} = -\,Q_{bac}$$
$$Q_{a}{}^{c}{}_{c} = 0 \tag{3.2.2}$$

la expresión (3.2.1) admite el desarrollo :

$$\begin{aligned} Q_{abc} = 2\Big[\, & \Omega_0 U_{ab}\, l_c + \Omega_1 (M_{ab}\, l_c - U_{ab}\, m_c) + \Omega_2 (V_{ab}\, l_c - M_{ab}\, m_c) \\ & - \Omega_3 V_{ab}\, m_c - \Omega_4\, U_{ab}\, \bar{m}_c + \Omega_5 (U_{ab}\, n_c - M_{ab}\, \bar{m}_c) + \Omega_6 (M_{ab}\, n_c - V_{ab}\, \bar{m}_c) + \\ & + \Omega_7\, V_{ab}\, n_c \Big] \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

donde las cantidades Ω_a , $a = 0,\ldots,7$ (ocho cantidades complejas son equivalentes a dieciséis componentes reales independientes de K_{ijc}) son proyecciones del espintensor sobre la tétrada nula consideradas como adecuadas para éste propósito, Fernández (1986) :

$$\Omega_0 = K_{(1)(4)(4)} \qquad\qquad \Omega_4 = K_{(1)(4)(1)}$$
$$\Omega_1 = K_{(1)(4)(2)} \qquad\qquad \Omega_5 = K_{(1)(4)(3)}$$

$$\Omega_2 = K_{(3)(2)(4)} \qquad \Omega_6 = K_{(3)(2)(1)}$$

$$\Omega_3 = K_{(3)(2)(2)} \qquad \Omega_7 = K_{(3)(2)(3)}$$

(3.2.4)

al construir una clasificación algebraica de K_{ijc} mediante el formalismo de NP, el algoritmo resultante queda en términos de las Ω_a de la expresión (3.1.2):

$$N_{ab} = K_{ab} \equiv K_{ab;c}{}^{c} = 0$$

(3.1.2)

que al contraerse con la tétrada nula, implica:

$$N_{(t)(h)} = K_{(t)(h);(r)}{}^{(r)} + K_{(t)(h)}{}^{(r)} Z_{(r);}{}^{c}{}_{c} -$$

$$- K_{(p)(h)}{}^{(r)} \cdot Y^{(p)}_{(t)(r)} - K_{(t)(p)}{}^{(r)} \quad Y^{(p)}_{(h)(r)}$$

(3.2.5)

con los valores (t)(h) = (2)(3), (1)(4), (1)(2), (3)(4), generándose tres ecuaciones tipo NP, las cuales contienen la misma información que (3.1.2): Zund (1975).

$$\Delta\Omega_2 - \delta\Omega_3 - \bar{\delta}\Omega_6 + D\Omega_7 - 2V\Omega_1 + (3\mu + \bar{\mu} + \gamma - \gamma)\Omega_2 +$$
$$+ (\bar{\alpha} - 3\beta + \tau - \pi)\Omega_3 + 2\ \lambda\ \Omega_5 + (-\alpha - \bar{\beta} + \bar{\tau} - 3\pi)\Omega_6 +$$
$$(3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \rho - \bar{\rho})\Omega_7 = 0 \ ,$$

$$\Delta\Omega_0 - \delta\Omega_1 - \bar{\delta}\Omega_4 + D\Omega_5 + (\mu + \bar{\mu} - 3\gamma - \bar{\gamma})\Omega_0 +$$
$$+ (\bar{\alpha} + \beta + 3\tau - \bar{\pi})\Omega_1 - 2\ O\ \Omega_2 + (3\alpha - \bar{\beta} + \bar{\tau} - \pi)\Omega_4 +$$
$$(\bar{\varepsilon} - \varepsilon - \bar{\rho} - 3\rho)\Omega_5 + 2\ K\ \Omega_6 = 0 \ ,$$

$$\Delta\Omega_1 + \delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_5 - D\Omega_6 + V\Omega_0 + (\gamma + \bar{\gamma} - 2\mu - \bar{\mu})\Omega_1 +$$
$$+ (-\bar{\alpha} + \beta - 2\tau + \bar{\pi})\Omega_2 + 0\,\Omega_3 - \lambda\,\Omega_4 + (-\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau} + 2\pi)\Omega_5 +$$
$$(-\bar{\varepsilon} - \varepsilon + \bar{\rho} + 2\rho)\Omega_6 - K\,\Omega_7 = 0\,, \tag{3.2.6}$$

bajo la misma filosofía, se proyecta (3.1.3) sobre la tétrada de NP para deducir el encadenamiento existente entre Ω_r y las cantidades ψ_a. De (3.1.3) se originan cinco ecuaciones tipo:

$$\psi_0 = 2\left[-\delta\Omega_0 + D\Omega_4 + (\bar{\alpha} + 3\beta - \bar{\pi})\Omega_0 - 3O\Omega_1 + (-3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho})\Omega_4 + \right.$$
$$\left. + 3K\Omega_5\right],$$

$$2\psi_1 = -\Delta\Omega_0 - 3\delta\Omega_1 + \bar{\delta}\Omega_4 + 3D\Omega_5 + (3\gamma + \bar{\gamma} + 3\mu - \bar{\mu})\Omega_0 +$$
$$+ 3(\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi} - \tau)\Omega_1 - 6O\Omega_2 + (-3\alpha + \bar{\beta} - 3\pi - \bar{\tau})\Omega_4 +$$
$$+ 3(-\varepsilon + \bar{\varepsilon} + \rho - \bar{\rho})\Omega_5 + 6\,K\Omega_6\,,$$

$$\psi_2 = -\Delta\Omega_1 - \delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_5 + D\Omega_6 + V\Omega_0 + (2\mu - \bar{\mu} + \gamma + \bar{\gamma})\Omega_1 +$$
$$+ (\bar{\alpha} - \beta - \bar{\pi} - 2\tau)\Omega_2 - O\Omega_3 - \lambda\Omega_4 + (-\alpha + \bar{\beta} - 2\pi - \bar{\tau})\Omega_4 +$$
$$+ (\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho} + 2\,\rho)\Omega_6 + K\,\Omega_7\,,$$

$$2\psi_3 = -3\Delta\Omega_2 - \delta\Omega_3 + 3\bar{\delta}\Omega_6 + D\Omega_7 + 3(-\bar{\mu} + \mu + \bar{\gamma} - \gamma)\Omega_2 +$$
$$+ 6V\Omega_1 + (\bar{\alpha} - 3\beta - \bar{\pi} - 3\tau)\Omega_3 - 6\lambda\Omega_5 + 3(\alpha + \bar{\beta} - \pi - \bar{\tau})\Omega_6 +$$
$$+ (3\varepsilon + \bar{\varepsilon} + 3\rho - \bar{\rho})\Omega_7\,,$$

$$\psi_4 = 2\left[-\Delta\Omega_3 + \bar{\delta}\Omega_7 + 3V\Omega_2 + (-\bar{\mu} - 3\gamma + \bar{\gamma})\Omega_3 - 3\lambda\,\Omega_6 + \right.$$
$$\left. + (3\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})\Omega_7\right], \tag{3.2.7}$$

si se combinan (3.2.6) y (3.2.7) se obtiene un sistema equivalente

(Fernández (1986)) con ocho ecuaciones:

ECUACIONES DE WEYL LANCZOS

$$\psi_0 = 2\left[-\delta\Omega_0 + D\Omega_4 + (\bar{\alpha} + 3\beta - \bar{\pi})\Omega_0 - 3\sigma\Omega_1 + (-3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho})\Omega_4 + 3\kappa\Omega_5 \right],$$

$$\psi_1 = 2\left[-\delta\Omega_1 + D\,\Omega_5 + \mu\Omega_0 + (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})\Omega_1 - 2\sigma\Omega_2 - \pi\Omega_4 + \right.$$
$$\left. + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon - \bar{\rho})\Omega_5 + 2\kappa\Omega_6 \right],$$

$$\psi_2 = 2\left[-\delta\Omega_2 + D\Omega_6 + 2\mu\Omega_1 + (\bar{\alpha} - \beta - \bar{\pi})\Omega_2 - \sigma\Omega_3 - 2\pi\Omega_5 + \right.$$
$$\left. + (\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho})\Omega_6 + \kappa\Omega_7 \right],$$

$$\psi_3 = 2\left[-\Delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_6 + 2\nu\Omega_1 + (-\bar{\mu} + \bar{\gamma} - \gamma)\Omega_2 - \tau\Omega_3 + \right.$$
$$\left. - 2\lambda\Omega_5 + (\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})\Omega_6 + \rho\Omega_7 \right],$$

$$\psi_4 = 2\left[-\Delta\Omega_3 + \bar{\delta}\Omega_7 + 3\nu\Omega_2 + (-\bar{\mu} - 3\gamma + \bar{\gamma})\Omega_3 + \right.$$
$$\left. - 3\lambda\Omega_6 + (3\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})\Omega_7 \right],$$

$$\psi_1 = 2\left[-\Delta\Omega_0 + \bar{\delta}\Omega_4 + (-\bar{\mu} + 3\gamma + \gamma)\Omega_0 - 3\tau\Omega_1 + \right.$$
$$\left. + (-3\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})\Omega_4 + 3\rho\Omega_5 \right],$$

$$\psi_2 = 2\left[-\Delta\Omega_1 + \delta\Omega_5 + \nu\Omega_0 + (\gamma + \bar{\gamma} - \bar{\mu})\Omega_1 - 2\tau\Omega_2 - \lambda\Omega_4 + \right.$$
$$\left. + (-\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})\Omega_5 + 2\rho\Omega_6 \right],$$

$$\psi_3 = 2\left[-\delta\Omega_3 + D\Omega_7 + 3\mu\Omega_2 + (\bar{\alpha} - 3\beta - \bar{\pi})\Omega_3 - 3\pi\Omega_6 + \right.$$
$$\left. + (3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho})\Omega_7 \right],$$

(3.2.8)

para construir los espintensores sólo es necesario utilizar las ecuaciones (3.2.8): con la métrica dada se genera un cuarteto de vectores nulos tipo NP (en dicho cuarteto conviene incluir a los vectores de Debever-Penrose debido a que estos por lo general causan simplicidad en los coeficientes de espin) y con respecto a éstos se determina $\psi_0,\ldots,\psi_4$, $\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\tau,\pi,\ldots$ con los operadores δ , $\bar{\delta}$, Δ , D. Se resuelve el sistema (3.2.8) formado por ecuaciones diferenciales parciales acopladas con las Ω_a .

Al proyectar (3.1.4) sobre la tétrada nula, se obtiene:

$$K_{(t)(h)} = K_{(t)(h);(q)}{}^{(q)} - K_{(p)(h)}{}^{(q)}\, Y_{(t)(q)}{}^{(p)} + K_{(t)(h)}{}^{(q)}\, Z_{(q);(a)}{}^{(a)} + \\ - K_{(t)(p)}{}^{(q)}\, Y_{(h)(q)}{}^{(p)}$$

con los valores (t)(h) = (1)(1), (1)(2), (1)(3), (1)(4), (3)(3), (4)(4), lo cual conduce al conjunto de ecuaciones (se utilizaron las ecs. 3.2.6):

$$\begin{aligned} K_{(1)(1)} = {} & \delta(\Omega_5 - \bar{\Omega}_6) - \Delta\Omega_4 + D\bar{\Omega}_3 + \bar{V}\,\Omega_0 + \bar{\lambda}(2\bar{\Omega}_1 - \Omega_1) + \\ & + (-\bar{\alpha} + \beta - 3\bar{\pi})\bar{\Omega}_2 + (-\bar{\rho} - \varepsilon + 3\bar{\varepsilon})\bar{\Omega}_3 + \\ & + (-\mu - \bar{\gamma} + 3\gamma)\Omega_4 + (\bar{\alpha} - \beta - 3\tau)\Omega_5 + 2\sigma\Omega_6 - \sigma\bar{\Omega}_6 + K\bar{\Omega}_7 \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{(1)(2)} = {} & - \delta\bar{\Omega}_5 - \delta\Omega_5 + D(\Omega_6 + \bar{\Omega}_6) + \bar{\mu}\Omega_1 + \mu\bar{\Omega}_1 - \bar{\pi}\Omega_2 + \\ & - \pi\bar{\Omega}_2 + \lambda\Omega_4 + \overline{\lambda\Omega}_4 + (\alpha - \bar{\beta} - 2\pi)\Omega_5 + (\bar{\alpha} - \beta - 2\bar{\pi})\bar{\Omega}_5 + \\ & + (\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\rho)\Omega_6 + (\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\bar{\rho})\bar{\Omega}_6 + K\Omega_7 + \overline{K\Omega}_7 \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{(1)(3)} = {} & \delta\Omega_6 + \bar{\delta}\,\bar{\Omega}_3 - \Delta(\bar{\Omega}_2 + \Omega_5) + \bar{V}(\Omega_1 + 2\bar{\Omega}_1) - \bar{\lambda}\Omega_2 + \\ & + (\gamma - \bar{\gamma} - 3\bar{\mu})\bar{\Omega}_2 + (3\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau})\bar{\Omega}_3 + V\Omega_4 + \\ & + (\gamma - \bar{\gamma} - 2\mu)\Omega_5 + (\bar{\alpha} + \beta - 2\tau)\Omega_6 - \tau\bar{\Omega}_6 + O\Omega_7 + \rho\bar{\Omega}_7 \quad , \end{aligned}$$

$$K_{(1)(4)} = -\delta\bar{\Omega}_1 - \bar{\delta}\,\Omega_4 + D(\bar{\Omega}_2 + \Omega_5) + \bar{\mu}\Omega_0 + \bar{\lambda}\,\bar{\Omega}_0 - \pi\,\Omega_1 +$$
$$+ (\bar{\alpha} + \beta - 2\bar{\pi})\,\bar{\Omega}_1 + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon - \bar{\rho})\bar{\Omega}_2 + \bar{K}\,\bar{\Omega}_3 +$$
$$+ (3\alpha - \bar{\beta} - \pi)\Omega_4 + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon - 3\rho)\Omega_5 - \quad \bar{\Omega}_5 +$$
$$+ K(2\Omega_6 + \bar{\Omega}_6)\ ,$$

$$K_{(3)(3)} = \delta\Omega_7 + \bar{\delta}\,\bar{\Omega}_7 - \Delta(\Omega_6 + \bar{\Omega}_6) + V\Omega_2 + V\bar{\Omega}_2 - \bar{\lambda}\Omega_3 +$$
$$- \lambda\bar{\Omega}_3 + 2V\Omega_5 + 2\bar{V}\,\bar{\Omega}_5 - (\gamma + \bar{\gamma} + 3\mu)\Omega_6 - (\gamma + \bar{\gamma} + 3\mu)\bar{\Omega}_6 +$$
$$+ (-\tau + \bar{\alpha} + 3\beta)\Omega_7 + (-\bar{\tau} + \alpha + 3\bar{\beta})\bar{\Omega}_7\ ,$$

$$K_{(4)(4)} = -\delta\bar{\Omega}_0 + \bar{\delta}\,\Omega_0 - D(\Omega_1 + \bar{\Omega}_1) + (3\alpha + \bar{\beta} - \pi)\Omega_0 +$$
$$+ (3\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})\bar{\Omega}_0 - (\varepsilon + \bar{\varepsilon} + 3\rho)\Omega_1 - (\varepsilon + \bar{\varepsilon} + 3\rho)\bar{\Omega}_1 +$$
$$+ 2K\Omega_2 + 2\bar{K}\bar{\Omega}_2 - \bar{\ }\Omega_4 + \bar{K}\Omega_5 + K\Omega_5 \tag{3.2.9}$$

estas relaciones (3.2.9) no son necesarias, si se trabaja con (3.1.3) en la obtención de superpotenciales de Lanczos, sin embargo si son fundamentales en unión con (3.2.6) para construir generadores para tensores simétricos de orden dos con traza y divergencia nula.

3.3 DETERMINACION DEL POTENCIAL DE LANCZOS PARA DIVERSAS METRICAS.

Si se emplea la expresión (3.1.3) en la forma tensorial, entonces aún cuando la métrica esté dada es sumamente difícil construir el tensor conformal, debido a la carencia de ecuaciones básicas, de ecuaciones cuyo análisis nos lleve a K_{ijc} , sólo existe la esperanza de que las coordenadas utilizadas simplifiquen la derivada covariante y las componentes C_{ijkr}, fuera de esto, no se tiene libertad para introducir más simplificaciones en (3.1.3). Por otra parte si (3.1.3) se transfiere al formalismo NP, entonces se adquiere mayor maniobrabilidad porque además de seleccionar de manera arbitraria las coordenadas, también se tiene libertad al escoger una adecuada tétrada nula para simplificar los coeficientes de espín y los operadores δ , $\bar{\delta}$, Δ , D . En esta Sección se determinan los espintensores para algunas métricas de interés en relatividad general.

3.3.1 MODELO COSMOLOGICO DE GÖDEL

La métrica de este modelo es:

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - 2e^{x^4} dx^1 dx^2 - \frac{1}{2} e^{2x^4} (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 \qquad (3.3.1.1)$$

La expresión (3.3.1) describe a un fluido perfecto en donde $e^r_{(4)}$ corresponde al vector de la 4-velocidad, véase tésis de Fernández (1986) [24], si se considera la tétrada nula:

$$(m^r) = (1\ ,\ -e^{-x^4}\ ,\ 0\ ,\ \frac{i}{\sqrt{2}}\ )$$

$$(l^r) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (1\ ,\ 0\ ,\ -1\ ,\ 0)$$

$$(n^r) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0)$$

junto con :

$$\kappa = \sigma = \tau = \nu = \lambda = \pi = 0,$$

$$\alpha = \beta = \frac{i}{2\sqrt{2}}\ ,\ \mu = \rho = \frac{i}{2}\ ,\ \varepsilon = \gamma = \frac{i}{4}\ ,$$

$$\psi_r = 0\ ,\ r \neq 2 \qquad\qquad \psi_2 = -\frac{1}{6}$$

$$\phi_{01} = \phi_{02} = \phi_{12} = 0 \; ; \; \phi_{00} = \phi_{22} = 2 \; , \; \phi_{11} = - \frac{1}{4}$$

sustituyendo en las ecuaciones (3.2.8) estas quedan como:

$$\begin{aligned}
- \delta\Omega_0 + D\Omega_4 + i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_0 - \frac{1}{2} \Omega_4 \right) &= 0 \\
- \delta\Omega_1 + D\Omega_5 + \frac{i}{\sqrt{2}} \Omega_0 &= 0 \\
\delta\Omega_2 + D\Omega_6 + i\left(\Omega_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_2 + \frac{1}{2} \Omega_6 \right) &= - \frac{1}{12} \\
- \Delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_6 + \frac{i}{2} \Omega_7 &= 0 \\
- \Delta\Omega_3 + \delta\Omega_7 + i\left(\frac{i}{\sqrt{2}} \Omega_7 - \frac{1}{2} \Omega_3 \right) &= 0 \\
- \Delta\Omega_0 + \bar{\delta}\Omega_4 + i\left(\Omega_0 - \sqrt{2}\, \Omega_4 + \frac{3}{2} \Omega_5 \right) &= 0 \\
- \Delta\Omega_1 + \bar{\delta}\Omega_5 + i\left(\frac{1}{2} \Omega_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_5 + \Omega_6 \right) &= - \frac{1}{12} \\
\Delta\Omega_3 + D\Omega_7 + i\left(\frac{3}{4} \Omega_2 - \sqrt{2}\, \Omega_3 + \Omega_7 \right) &= 0
\end{aligned} \tag{3.3.1.3}$$

La solución del sistema es :

$$\Omega_r = 0 \qquad r \neq 1,6$$

$$\Omega_1 = \Omega_6 = \frac{i}{18}$$

al sustituir en (3.2.3) implica:

$$K_{ijc} = \frac{i}{18} \left[(M_{ab} - \bar{M}_{ab})(n_c + l_c) + (\bar{V}_{ab} - U_{ab}) m_c - - (V_{ab} - \bar{U}_{ab})\, \bar{m}_c \right] \tag{3.3.1.4}$$

si en (3.3.4) se sustituyen las definiciones para V_{ab}, U_{ab} y M_{ab} se encuentra:

$$K_{ijc} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2}}\, \eta_{icab}\, L^{ab}{}_{j} \tag{3.3.1.5}$$

donde,

$$L_{bij} = (e_{(3)b}\, e_{(4)i} - e_{(3)(i)}\, e_{(4)(b)})e_{(4)(j)} + \\ + \frac{1}{3}(e_{(3)(b)}\, g_{(i)(j)} - e_{(3)(i)}\, g_{(b)(j)})$$

con:

$$e_{(3)(a)} = (0,\ 0,\ 1,\ 0)$$
$$e_{(4)(a)} = (-\ 1,\ -\ e^{x^4},\ 0,\ 0)$$

(3.3.1.6)

los vectores $e_{(a)(b)}$, $a = 3{,}4$ son de Killing con las propiedades

$$e_{(3)(b);c} = 0 \quad , \quad e_{(3)(a)}\, e_{(3)}{}^{a} = 1$$
$$e_{(3)(a)}\, e_{(4)}{}^{a} = 0 \quad , \quad e_{(4)(a)}\, e_{(4)}{}^{(a)} = -\ 1$$
$$e_{(4);(a)}{}^{a} = 0 \quad , \quad e_{(4)}{}^{a}\, e_{(4)(b);a} = 0$$

(3.3.1.7)

con este ejemplo se trata de ilustrar el procedimiento a seguir para hallar el espintensor de Lanczos para una metrica dada. Enseguida se aplica este proceso a diversos campos gravitacionales, solo se mostraran los resultados esenciales.

3.3.2 METRICA DE SCHWARZSCHILD

Las conocidas tres pruebas a favor de la relatividad general se apoyan en la solución de Schwarzschild:

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\ d\phi^2) - (1 - \frac{2m}{r})dt^2$$

(3.3.2.1)

eligiendo las coordenadas:

$$x_1 = r \ ; \ x_2 = \theta \ ; \ x_3 = \phi \quad y \quad x_4 = t$$

(considerando la región $r > 2m$):

$$(m^a) = \frac{1}{\sqrt{2}\, r} \left(0 \ , \ 1 \ , \ - \frac{i}{\text{sen}\ \theta} \ , \ 0\right) \quad ,$$

$$(l^a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \ , \ 0 \ , \ 0, \ \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \right] ,$$

$$(n^a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 - \frac{2m}{r}} , \ 0 \ , \ 0 \ , \ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \right] ,$$

$$\psi_a = 0 \ , \quad a \neq 2 \quad ; \ \psi_2 = - \frac{m}{\sqrt{3}} \ ,$$

$$\mu = \rho = - \frac{1}{\sqrt{2}\ r} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \quad , \quad \gamma = \varepsilon = \frac{m}{2\sqrt{2}\ r^2 \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \ ,$$

$R = 0$, $\alpha = - \beta = - \dfrac{ctg\ \theta}{2\sqrt{2}\ r}$ y los restantes coeficientes valen cero

$$\phi_{ab} = 0. \tag{3.3.2.2}$$

Las expresiones (3.3.2.2) satisfacen $R_{ab} = 0$. Dados por Torres en 1985, [35] en donde se obtuvieron las cantidades de NP para el caso general con simetia esférica. Al sustituir (3.3.2.2) en (3.2.8) se origina un sistema de ecuaciones en donde Ω_a acepta la solución :

$$\Omega_a = 0 \quad , \quad a \neq 1 \ , \ 6$$

$$\Omega_1 = \Omega_6 = \frac{m}{3\sqrt{2}\ r^2 \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \quad , \ r > 2m \tag{3.3.2.3}$$

algo semejante puede hacerse para la región interna al horizonte ($r < 2m$).

3.3.3 SOLUCION DE TAUB

La mètrica de Taub:

$$ds^2 = f^{-1}(dx^2 - dt^2) + f^2(dy^2 + dz^2),$$
$$f = \sqrt{1 + K x} \quad , \quad K = \text{cte.} \neq 0 \tag{3.3.3.1}$$

La cual posee simetria plana a lo largo del eje x y satisface $R_{ab} = 0$. Obtenida por Taub en (1954) en su estudio de grupos de movimientos admitidos por el espacio-tiempo.

Eligiendo: $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$; $x_4 = t$

entonces para (3.3.3.1):

$$(m^a) = \frac{f^{-1}}{\sqrt{2}} (0, 1, - i, 0)$$
$$(l^a) = \frac{f}{2} (-1 , 0, 0 , 1)$$
$$(n^a) = \frac{f}{2} (1, 0, 0, 1)$$

$\rho = \mu = 4\varepsilon = 4\gamma = - \dfrac{K f^{-3/2}}{2\sqrt{2}}$, los demás coeficientes de espin se anulan,

$$\psi_r = 0 \quad , \quad r \neq 2$$
$$\psi_2 = \frac{K^2}{8} f^{-3}$$
$$R = 0 \ , \ \phi_{ab} = 0. \tag{3.3.3.2}$$

que en unión con (3.2.8) conduce a un espintensor con :

$$\Omega_r = 0 \qquad , \quad r \neq 1, 6$$

$$\Omega_1 = \Omega_6 = - \frac{K\sqrt{2}}{24} f^{-3/2} = - \frac{K\sqrt{2}}{24} (1 + K x)^{-3/4} \tag{3.3.3.3}$$

3.3.4 METRICA DE BERTOTTI

El elemento de linea es:

$$ds^2 = f^{-1}dx^2 - f\,dt^2 + h\,dy^2 + h^{-1}dz^2$$

$$\text{con} \quad f = 1 + \frac{x^2}{r_1^2}, \quad h = 1 - \frac{z^2}{r_2^2}, \quad r_a = \text{ctes.}, \quad a = 1, 2$$

(3.3.4.1)

propuesto por Bertotti (1959) genera un $\mathbb{R}_4$ en presencia de un campo electromagnetico uniforme. Si $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ y $x_4 = t$, utilizando:

$$(m^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[0, \frac{1}{\sqrt{h}}, i\sqrt{h}, 0\right]$$

$$(l^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\sqrt{f}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{f}}\right]$$

$$(n^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{f}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{f}}\right]$$

$$\alpha = \beta = \frac{i\,z}{2\,r_2^2\sqrt{2h}}$$

$$\varepsilon = \gamma = \frac{x}{2\,r_1^2\sqrt{2f}}, \quad \psi_2 = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right],$$

$$R = 12\,\psi_2$$

$$\phi_{ab} = 0 \quad \text{excepto} \quad \phi_{11} = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right]$$

(3.3.4.2)

los coeficientes de espin no indicados valen cero.

Aqui es necesario considerar dos casos:

1° Cuando $r_1^2 \neq r_2^2$ (tipo D), entonces utilizando (3.3.4.2) en conjuncion con las ecuaciones (3.2.8):

$$\Omega_a = 0 \qquad a \neq 1\,,\,6$$

$$\Omega_1 = \Omega_6 = \frac{\psi_2 - x}{\sqrt{2f}}$$

(3.3.4.3)

2° Cuando $r_1^2 = r_2^2$, el tensor de Weyl se anula, entonces (3.3.4.2) en conjunción con las ecuaciones (3.2.8):

$$\Omega_a = 0 \qquad r \neq 1\,,\,6$$

$$\Omega_1 = \Omega_6 = \frac{1}{\sqrt{f}}$$

(3.3.4.4)

3.3.5 ESPACIO DE KASNER

Consideremos ahora la métrica de Kasner (1921)

$$ds^2 = t^{2p_1}\, dx^2 + t^{2p_2}\, dy^2 + t^{2p_3}\, dz^2 - dt^2 \quad .$$

(3.3.5.1)

donde p_a, a = 1,2,3 son constantes, tales que :

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$$

(3.3.5.2)

sean $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ y $x_4 = t$, entonces empleamos:

$$(m^a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[t^{-p_1} \,,\, -\, i\, t^{-p_2} \,,\, 0 \,,\, 0 \right]$$

$$(l^a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[0 \,,\, 0 \,,\, -\, t^{-p_3},\, 1 \right]$$

$$(n^a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[0 \,,\, 0 \,,\, t^{-p_3} \,,\, 1 \right]$$

$$R = 0 \qquad . \qquad \phi_{ab} = 0$$

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}\,t} (p_2 - p_1) \qquad , \qquad \rho = \frac{-1}{2\sqrt{2}\,t} (p_2 + p_1)$$

$$\varepsilon = \frac{p_3}{2\sqrt{2}\,t} \,,$$

$$\lambda = \sigma \quad , \mu = - \beta \; , \gamma = - \varepsilon$$

$$\varkappa = \tau = \alpha = \beta = \gamma = \pi = 0 \; ,$$

$$\psi_0 = \psi_4 = \frac{p_3}{2 \; t^2} (p_1 - p_2) \quad ; \quad \psi_2 = - \frac{p_1 p_2}{2 \; t^2}$$

$$\psi_1 = \psi_3 = 0$$

(3.3.5.3)

el espacio-tiempo de Kasner puede clasificarse de 3 formas (tres tipos Petrov, Fernández (1986)).

TIPO I: $\quad p_1 \neq p_2 \quad , \quad p_3 \neq 0$

TIPO D: $\quad p_1 = p_2 \neq 0 \quad , \quad p_3 \neq 0$

PLANO $\quad p_1 = 1 \quad , \; p_2 = p_3 = 0 \quad$ ó

$\quad p_1 = p_2 = 0 \quad , \quad p_3 = 1 \quad$ o

$\quad p = p = 0 \quad , \quad p = 1$

(3.3.5.4)

para los dos primeros, tipo I y D:

$$\psi_a = 0 \qquad a \neq 1 \; , \; 6$$

$$\Omega_1 = - \Omega_6 = \frac{\sqrt{2} \; p_3}{6 \; t}$$

(3.3.5.5)

considerando el uso de las relaciones:

$$p_1^2 + p_2^2 - p_1 - p_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$p_3^2 = p_3 + p_1 p_2$$

(3.3.5.6)

el caso plano fué estudiado por Ares y Becerril en (1985).

3.3.6 SOLUCION DE NARLIKAR-KARMARKAR

La metrica conformalmente plana (tipo O):

$$ds^2 = A(\xi)\,(dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} - dx^{4^2})$$

(3.3.6)

con A función arbitraria de $\xi = x^1 - x^4$, fue obtenida por Narlikar-Karmarkar (1949).

$$(m^a) = \frac{1}{\sqrt{2A}}\,(1\,,\,-i\,,\,0,\,0)$$
$$(l^a) = -\frac{1}{\sqrt{2A}}\,(0\,,\,0\,,\,1,\,1)$$
$$(n^a) = \frac{1}{\sqrt{2A}}\,(0\,,\,0\,,\,1,\,-1)$$
$$\rho = -\frac{A'}{(2A)^{3/2}} = \tau = -\mu = -\pi\ ;$$
$$\varepsilon = -2\rho = \beta = -\gamma = -\alpha.$$
$$A' = \frac{dA}{d\xi}\ ,$$
$$\psi_a = 0\ ,\ \psi_{00} = \psi_{02} = \phi_{22} = \frac{1}{4A^3}\,(A\,A'' - 3A'^2)$$
$$A'' = \frac{d^2A}{d\xi^2}\ ,\ R = 0$$
$$\psi_{01} = \frac{1}{8A^3}\,(2A\,A'' - 3\,A'^2)\ ,\quad \phi_{12} = \frac{1}{8A^3}\,(8A\,A'' - 9A'^2)$$
$$\phi_{11} = \frac{1}{8A^3}\,(8A\,A'' + 3\,A'^2)$$

(3.3.6.2)

entonces (3.3.6.1) y (3.2.8) implican :

$$\Omega_a = 0 \qquad a \neq 2,\ 6.$$
$$\Omega_2 = \Omega_6 = \frac{A'}{A\sqrt{2A'}}$$

(3.3.6.3)

3.3.7 ESPACIO-TIEMPO DE CLASE DOS

considerando:

$$ds^2 = f^{4/3}(dx^{1^2} + dx^{2^2}) + f^2 dx^{3^2} - dx^{4^2}$$
$$f = K\,x^4 + 1\quad ,\quad K = \text{cte}.$$

(3.3.7.1)

esta métrica para estudiar el proceso de inmersión , para construir nuevas soluciones de las ecuaciones de Einstein, ésta es semejante a las metricas de Petrov (1962), la cual es tipo O y no satisface $R_{ab} = 0$, y fué construida por Fernández (1986), empleando:

$$(m^a) = \frac{f^{-2/3}}{\sqrt{2}} (1 , - i , 0 ,0),$$
$$(l^a) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0 , 0 , - f^{-1}, 1),$$
$$(n^a) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 0 , f^{-1} , 1)$$
$$\rho = -\mu = \frac{-\sqrt{2}\,K}{3\ f} \quad , \varepsilon = - \gamma = \frac{\sqrt{2}\ K}{4\ f} ,$$

los demás coeficientes de espín se anulan,

$$\psi_a = 0 \quad , \phi_{01} = \phi_{02} = \phi_{12}$$
$$\phi_{00} = \phi_{22} = 4\ \phi_{11} = - \frac{4\ K^2}{9\ f^2} \quad , R = 6\ \phi_{00} \qquad (3.3.7.2)$$

de (3.3.7.1) y (3.2.8) se tiene:

$$\Omega_a = 0 \quad , a \neq 4 \qquad y \qquad \Omega_4 = c\ f^{\ 1/3} , c = cte.$$

3.3.8 ESPACIO DE NOVOTNY-HORSKY

El espacio de Einstein con:

$$ds^2 = sen^{4/3}(az) (dx^2 + dy^2) + dx^2 - cos^2(az)sen^{-3/2}(az)\ dt^2$$
$$a = cte.$$
$$(3.3.8.1)$$

construido para realizar la inmersión de $\mathbb{R}_4$ de Einstein, sumergido en $\mathbb{E}_6$ por Novotny-Horsky (1974). Considerando :

$$x_1 = x \quad , \quad x_2 = y \quad , \quad x_3 = z \quad , \quad x_4 = t$$
$$(m^r) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ sen^{-2/3}(az)(1 , - i, 0, 0)$$
$$(l^r) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (0 , 0, -1, sen^{1/3}(az)\ sec(az))$$

$$(n^r) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (0\ ,\ 0,\ 1,\ \mathrm{sen}^{1/3}(az)\ \sec(az))$$

$$\varkappa = \sigma = \alpha = \beta = \pi = \tau = \varphi = \lambda = 0$$

$$\mu = \rho = -\frac{a}{3}\sqrt{2}\ \mathrm{ctg}(az)$$

$$\varepsilon = \gamma = -\frac{a\sqrt{2}}{4}\ [\mathrm{tg}(az) + \frac{1}{3}\ \mathrm{ctg}\ (az)]$$

$$\phi_{bc} = 0$$

$$\psi_r = 0 \quad , r \neq 2 \quad , \psi_2 = \frac{2\ a^2}{9}\ \csc^2(az)$$

$$r = -\frac{16}{3}\ a^2$$

$$(3.3.8.2)$$

El potencial de Lanczos, está dado por:

$$\Omega_r = 0\ ,\ r \neq 1{,}6\ ;\ \Omega_1 = \Omega_6 = -\frac{a\sqrt{2}}{9}\ \csc(az)$$

$$(3.3.8.3)$$

3.3.9 METRICA TIPO Ń DE KAIGORODOV

El espacio-tiempo es homogéneo

$$ds^2 = \frac{2}{K^2\ x^2}\ (dx^2 + dy^2) - 2\ du\ (dv + \frac{2v}{x}\ dx + x\ du) \qquad K = \mathrm{cte.}$$

$$(3.3.9.1)$$

obtenido por Kaigorodov (1963), satisface las condiciones de espacio de Einstein ($R_{ab} = \frac{R}{4}\ g_{ab}$). Si las coordenadas se etiquetan como: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = v$, $x_4 = u$, entonces la tétrada nula:

$$(m^a) = K\ (\ \frac{K}{2}\ ,\ \frac{iK}{2}\ ,\ -\ v\ ,\ 0)$$

$$(l^a) = (0\ ,\ 0,\ -\sqrt{x}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{x}})$$

$$(n^a) = (\ 0\ ,\ 0\ ,\ \sqrt{x}\ ,\ 0)$$

$$\varkappa = \sigma = \lambda = \rho = \varepsilon = \mu = \gamma = 0$$

$$\tau = -\pi = \frac{v}{3} = \frac{K}{2} \qquad , \qquad \alpha = 5\beta = \frac{5K}{8}\ ,\ R = 6K^2$$

$$\psi_a = 0 \ , \ a \neq 4 \ , \ \psi_4 = \frac{3K^2}{2} \ , \ \phi_{ab} = 0$$

(3.3.9.2)

estas cantidades (3.3.9.2) en unión con las ecuaciones de Weyl-Lanczos (3.2.8) implican :

$$\Omega_a = 0 \quad , \quad a \neq 7 \quad , \quad \Omega_7 = \frac{K}{2}$$

(3.3.9.3)

3.3.10 SOLUCION TIPO III DE KAIGORODOV

Espacio homogéneo de Kaigorodov (1963):

$$ds^2 = 2(Kx)^{-2}(dx^2 + dy^2) - 2du(dv + \frac{2v}{x}dx + \frac{4x}{3K}dy + 2x^3 du), \quad K = \text{cte.}$$

(3.3.10.1)

eligiendo : $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = v$, $x_4 = u$, trabajando con:

$$(m^a) = (\frac{Kx}{2} \ , - \frac{iKx}{2} \ , -Kv + \frac{2x^2}{3} i \ , 0)$$

$$(l^a) = (0. \ 0, \ \sqrt{2}\ x \ , - \frac{1}{\sqrt{2}\ x^2})$$

$$(n^a) = (0 \ , 0, - \sqrt{2}\ x^2 \ , 0)$$

$$\kappa = \rho = \varepsilon = \sigma = \lambda = 0$$

$$\tau = - \pi = \beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{\nu}{6} = \frac{K}{2} \quad , \quad \gamma = \frac{\mu}{2} = \frac{iK}{2\sqrt{2}} \quad , \quad R = 6K^2$$

$$\psi_a = 0 \ , \ a \neq 3{,}4 \quad ; \ \psi_3 = \frac{iK^2}{2\sqrt{2}} \quad , \ \psi_4 = \frac{15}{2}\ K^2$$

$$\phi_{ab} = 0 \text{ excepto } \phi_{22} = - 5K^2$$

obteniéndose el espintensor:

$$\Omega_a = 0 \ , \ a \neq 3{,}6{,}7 \ , \ \Omega_3 = - \Omega_6 = - \frac{iK}{6\sqrt{2}} \quad , \ \Omega_7 = \frac{28K}{18} \ .$$

3.3.11 METRICA DE ROBINSON-TRAUTMAN

Las métricas de Robinson-Trautman [57] son aquellas que satisfacen las propiedades :

i) Admiten una congruencia nula $\Gamma(n^r)$ geodésica , sin deformación con expansión y sin rotación

ii) satisfacen las propiedades:

$R_{ab}\, n^a\, n^b = R_{ab}\, n^a\, m^b = R_{ab}\, m^a\, m^b = 0$ en donde R_{ij} es el tensor de Ricci y m^a es un vector nulo complejo tal que $n^a\, m_a = 0$.

En el formalismo de NP las condiciones i) y ii) equivalen a:

$$\kappa = \sigma = 0\ ,\ \rho = \bar{\rho} \neq 0\ \ ,\ \phi_{00} = \phi_{01} = \phi_{02} = 0$$

(3.3.11)

La expresión de dicha metrica es:

$$ds^2 = \frac{2r^2}{p^2}\,({dx^1}^2 + {dx^2}^2) - 2du\, dr - 2H\, du^2$$

(3.3.11.2)

donde $p(x^1,x^2,u)$ y $H(x^1,x^2,r,u)$ son funciones reales. Con la tétrada

$$(m^r) = \frac{p}{2\ r}\,(1,i,0,0) \qquad (\bar{m}^r) = \frac{p}{2\ r}\,(1,-i,0,0)$$

$$(l^r) = (0,0,\ -H,1) \qquad (n^r) = (0,0,1,0)$$

(3.3.11.3)

y los coeficientes de espin:

$$\eta = x^1 + i\ x^2$$

$$\varepsilon = \pi = \tau = \lambda = 0$$

$$\rho = -\frac{1}{r}\ \ ,\ \gamma = \frac{1}{2}\,\frac{\partial H}{\partial r}$$

$$\alpha = -\bar{\beta} = \frac{1}{2\ r}\,\frac{\partial p}{\partial \eta}\ ;\ \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^1} - i\,\frac{\partial}{\partial x^2}\right]$$

$$\nu = \frac{p}{r}\,\frac{\partial}{\partial \eta}\,H \qquad \mu = -\frac{\dot{p}}{p} - \frac{H}{r}\ ,\ \dot{p} = \frac{\partial p}{\partial u}$$

(3.3.11.4)

$$\psi_0 = \psi_1 = 0$$

lo cual significa que la metrica es algebraicamente especial , con lo anterior se obtienen:

$$\Omega_c = 0 \qquad c = 0,1,2,3$$

$$\Omega_4 = \rho F \qquad F = p^2 \int p^{-3} \frac{\partial p}{\partial \bar{\eta}} d\eta$$

$$\Omega_5 = \frac{2}{3} \beta + G \qquad G = - \frac{p}{3} \int p^{-3} \dot{p} \, d\eta$$

$$\Omega_6 = \frac{1}{6} (\mu + 2\gamma) - \frac{\dot{p}}{6 p} \qquad \Omega_7 = \frac{\nu}{2} . \tag{3.3.11.5}$$

las integrales F y G se efectúan sobre η manteniendo constantes $\bar{\eta}$ y u : en (3.3.11.5).

3.4 CALCULO DEL ESPINTENSOR PARA EL ESPACIO-TIEMPO SEGUN LA CLASIFICACION DE PETROV.

En la seccion 3.1 se dijo que Ruse (1948) y Petrov (1954), realizaron la clasificacion del campo gravitacional puro, usando para ello las formas canonicas del tensor conformal. La clasificación conjunta del campo gravitacional y sus fuentes fueron abordadas por Petrov (1961) y por Mishra (1968) bajo distintos puntos de vista. el primero llega a numerar tres tipos distintos sin contar las degeneraciones y el segundo menciona nueve tipos de $\mathbb{R}_4$ y sus fuentes (este problema no ha sido resuelto y se considera importante porque engloba el problema de resolver las ecuaciones de Einstein).

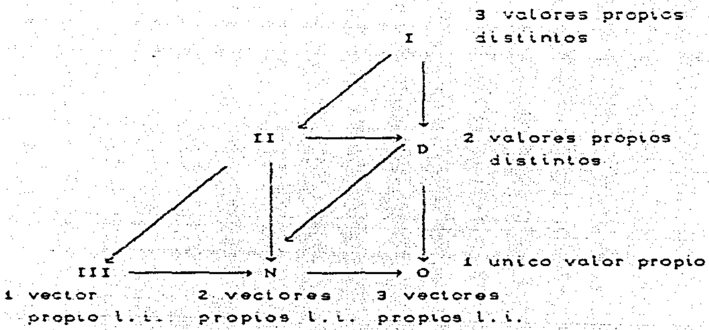
La clasificación de Petrov (CP), se realiza empleando la matriz compleja P de 3x3 , que lleva el nombre de matriz de Petrov y que contiene toda la informacion del tensor conformal. Las formas canonicas de la matriz arrojan seis tipos distintos de $\mathbb{R}_4$ que se distinguen por el numero de vectores propios linealmente independientes (l.i.) y por el numero de valores propios distintos. tambien se puede adoptar el punto de vista, segun el cual existen tres tipos de $\mathbb{R}_4$ con sus respectivas degeneraciones:

Los Tipos Petrov de $\mathbb{R}_4$

Tipo	N° de eigenvectores linealmente independientes	N° de valores propios diferentes	Metricas
I	3	3	—
D	3	2	Schwarzschild Kerr
II	2	2	Kerr – –Schild
N	2	1	Ondas Gravitacionales planas
III	1	1	Petrov
O	3	1	De Sitter

En esta tabla aparecen algunas métricas que ejemplifican los tipos Petrov. Se considera que existen esencialmente tres tipos Petrov distintos que se diferencian por el número de sus vectores propios linealmente independientes, el cual no puede ser menor que el número de valores propios distintos. La suma de dichos eigenvalores es cero. La siguiente ordenación de los tipos Petrov. se debe a Penrose (1960) (obtenida con el cálculo espinorial).

Diagrama de Penrose

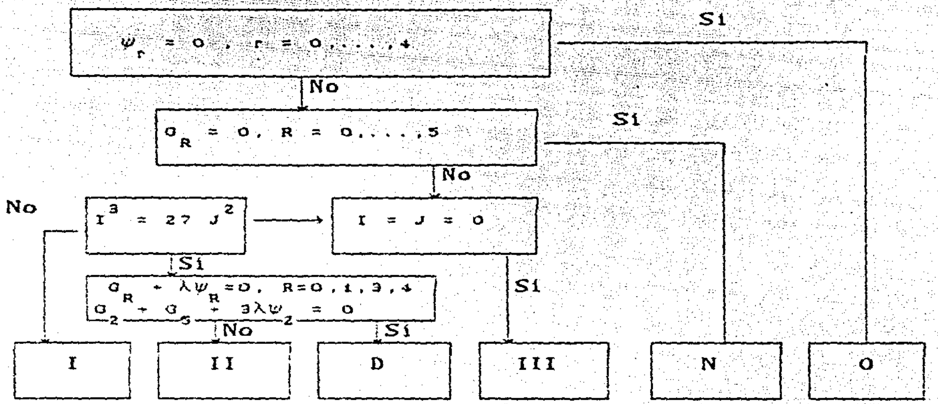


El tipo I se denomina algebraicamente general y cualquier otro, algebraicamente especial. Un tipo Petrov se considera mas especial según lo indiquen las flechas en el diagrama.

Cada tipo Petrov de $\mathcal{R}_{+}$ tiene su correspondiente forma canonica Jordan y en consecuencia un polinomio minimo satisfecho por la clasificación de Petrov. El siguiente algoritmo fue deducido por Ovando (1985):

Diagrama de Ovando

Método Tensorial - Tétradas Nulas



Donde :

$$G_0 = 2(\psi_0 \psi_2 - \psi_1^2) \quad , \quad G_1 = \psi_0\psi_3 - \psi_1\psi_2$$
$$G_2 = \psi_2^2 + \psi_0\psi_4 - 2\psi_1\psi_3 \quad , \quad G_3 = \psi_1\psi_4 - \psi_2\psi_3$$
$$G_4 = 2(\psi_2\psi_4 - \psi_3^2) \quad , \quad G_5 = 2(\psi_1\psi_3 - \psi_2^2)$$
$$I = G_2 - G_5 \quad , \quad J = -\psi_3 G_1 + \frac{1}{2}(\psi_2 G_5 + \psi_4 G_0)$$
$$\lambda^2 = \frac{I}{3} \quad , \quad \lambda^3 = -J$$

(3.4.1)

El algoritmo es válido para una tétrada NP arbitraria. La tétrada de NP puede elegirse tal que :

$$N: \psi_4 \neq 0 \quad , \quad \psi_r = 0 \quad , \quad r \neq 4$$
$$III: \psi_3 \neq 0 \quad , \quad \psi_r = 0 \quad , \quad r \neq 3$$
$$D: \psi_2 \neq 0 \quad , \quad \psi_r = 0 \quad , \quad r \neq 2$$

$$\mathrm{II} : \psi_2 \neq 0 \quad , \quad \psi_4 \neq 0 \quad , \quad \psi_r = 0 \quad , r \neq 2,4$$

$$\mathrm{I} : \psi_0 = \psi_4 \neq 0 \quad , \quad \psi_2 \neq 0 \quad \psi_r = 0 \quad , r \neq 1,3$$

$$\mathrm{O} : \quad \psi_r = 0 \qquad , r = 0,1,2,3,4. \tag{3.4.2}$$

La idea de utilizar vectores nulos, es por que se anulan algunas ψ_r, y a la inversa si se anula alguna ψ_r entonces uno de los vectores es proporcional a una dirección (vector) de DP. (direcciones principales nulas)

3.4 CALCULO DEL ESPINTENSOR PARA EL ESPACIO-TIEMPO SEGUN LA CLASIFICACION DE PETROV

La obtención de K_{abc} para espacio-tiempos arbitrarios fué posible gracias a los potenciales de Lanczos encontrados por Becerril y Fernandez (1986), los cuales sugirieron una intima relación entre los coeficientes de espin (NP) y K_{abc}.
La tétrada nula de NP se ordena en la forma (una barra sobre una cantidad denota su conjugada compleja)

$$(Z(a)^r \; Z(b)_r) = (m^r, \bar{m}^r \;, l^r \;, n^r) \quad , \quad a = 1,\dots,4$$

cumpliéndose las relaciones de ortogonalidad (signatura = + 2).

$$(Z(a)^r \; Z(b)_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.4.3}$$

Las simetrias de la ecuacion (3.23) implican que K_{abc} posee 8 componentes complejas independientes sobre la tétrada nula, denotadas por Ω_ι , $\iota = 0,\dots,7$, y que generan al tensor conformal por la relación

$$K_{abc} = T_{abc} + \bar{T}_{abc}$$

(3.4.4)

en donde

$$T_{abc} = \Omega_0 U_{ab} l_c + \Omega_1 (M_{ab} l_c - U_{ab} m_c) + \Omega_2 (V_{ab} l_c - M_{ab} m_c) - \Omega_3 V_{ab} m_c + - \Omega_4 U_{ab} n_c + \Omega_5 (U_{ab} n_c - M_{ab} m_c) + \Omega_6 (M_{ab} n_c - V_{ab} m_c) + \Omega_7 V_{ab} n_c .$$

con

$$V_{ab} = n_a m_b - n_b m_a$$

$$U_{ab} = - l_a \bar{m}_b + l_b \bar{m}_a$$

$$M_{ab} = m_a \bar{m}_b - m_b \bar{m}_a - n_a l_b + n_b l_a$$

1) Tipos O y N

Eligiendo la tétrada nula (NP) de manera que el tensor de Weyl tenga la forma:

$$C_{pqjb} = \psi_4 \; V_{pq} V_{jb} + \bar{\psi}_4 \; V_{pq} \bar{V}_{jb}$$

(3.4.5)

donde

$$\psi_4 = C_{abjr} \, l^a \, \bar{m}^b \, l^j \, \bar{m}^r$$

(3.4.6)

$\psi_4 \neq 0$ implica el tipo Petrov N y $\psi_4 = 0$ conduce al tipo O.

Si se emplean los coeficientes de espín en la ecuación (3.4.3) se obtiene:

$$\Omega_0 = -\frac{\varkappa}{2},\ \Omega_1 = -\frac{\rho}{\sigma},\ \Omega_2 = \frac{\pi}{\sigma},\ \Omega_3 = \frac{\lambda}{2},\ \Omega_4 = -\frac{\sigma}{2},\ \Omega_5 = -\frac{\tau}{\sigma},$$
$$\Omega_6 = \frac{\mu}{\sigma},\ \Omega_7 = \frac{\nu}{2} \qquad (3.4.7)$$

sustituyendo la ecuación (3.4.2) en (3.1.3) se obtiene la ecuación (3.4.5), de esta manera se ha deducido explicitamente el potencial de Lanczos para un $\mathbb{R}_4$ arbitrario tipo O ó N, el resultado no depende de las ecuaciones de Einstein por lo que es valido para cualquier teoría gravitacional que utilice un espacio-tiempo de los tipos Petrov.

2) Tipos O y III

Para estos $\mathbb{R}_4$ la tétrada nula puede seleccionarse de forma que

$$C_{pqbj} = \psi_0\left(V_{pj}M_{qb} + V_{jb}M_{pq}\right) + \overline{\psi}_3(V_{pj}M_{jb} + \overline{V}_{jb}\overline{M}_{pq}) \qquad (3.4.8)$$

con
$$\psi_3 = C_{abjr}\, l^a\, n^b\, L^j\, \overline{m}^r \qquad (3.4.9)$$

$\psi_3 = 0$ genera el tipo O y $\psi_3 \neq 0$ genera el tipo III. Si en la ecuación (3.4.3) se utiliza:

$$\Omega_0 = -\varkappa,\ \Omega_1 = -\frac{\rho}{3},\ \Omega_2 = \frac{\pi}{3},\ \Omega_3 = \lambda,\ \Omega_4 = -\gamma,\ \Omega_5 = -\frac{\tau}{3},$$
$$\Omega_6 = \frac{\mu}{3},\ \Omega_7 = \nu \qquad (3.4.10)$$

usando la ecuación (3.4.2) en la ecuación (3.1.3), de esta manera queda construido el espintensor para cualquier espacio-tiempo tipo O ó III (independientemente de las ecuaciones de campo).

Para checar la validez de las ecuaciones (3.4.7) y (3.4.10) conviene usar las dieciocho ecuaciones de NP ref.(44), los calculos son tediosos pero rutinarios. A continuación se consideran metricas de interes en relatividad general.

i) Radiación pura tipo O (45)

$$ds^2 = -2\,dx^1 dx^4 + \mathrm{sen}^2(x^4)(dx^{2^2} + dx^{3^2}) \quad , \qquad (3.4.11)$$

eligiendo la tétrada nula :

$m^a = 2^{-\frac{1}{2}} \csc(x^4)\ (0\ ,\ 1,\ -1,\ 0),$

$l^a = (0\ ,\ 0,\ 0,\ 1),$

$n^a = (1,\ 0\ ,0\ ,\ 0) \qquad (3.4.12)$

que satisface la ecuación (3.4.5) con $\psi_4 = 0$ o bien la ecuacion (3.4.8) con $\psi_3 = 0$. Los correspondientes coeficientes de espin se anulan salvo $\mu = \cot(x^4)$. Así la ecuación (3.4.7) conduce al espintensor (3.4.2) con

$$\Omega_r = 0\ , \quad r \neq 6 \quad , \Omega_6 = \frac{1}{6} \cot\ (x^4) \qquad (3.4.13)$$

ii) Petrov. Tipo N (38)

$$ds^2 = -2\,dx^1 dx^4 + \mathrm{sen}^2(x^4) dx^{2^2} + \mathrm{senh}^2(x^4) dx^{3^2} \ , \qquad (3.4.14)$$

empleando la tétrada nula de NP.

$m^a = 2^{-1/2}\ (0\ ,\ \csc(x^4)\ ,\ -i\ \mathrm{csch}(x^4),\ 0),$

$l^a = (0,\ 0,\ 0,\ 1)$

$n^a = (1,\ 0,\ 0,\ 0) \qquad (3.4.15)$

cumpliendo así la ecuación (3.4.5) con $\psi_4 = 1$. Se anulan todos los coeficientes de espin excepto,

$\lambda = \frac{1}{2}\ (\ \cot\ (x^4) - \coth(x^4))$

$\mu = \frac{1}{2}\ (\cot\ (x^4) + \coth(x^4)); \qquad (3.4.16)$

de la ecuación (3.4.7) se obtiene,

$$\Omega_a = 0 \quad a \neq 3,6 \qquad \Omega_3 = \frac{1}{4}\,(\cot(x^4) - \coth(x^4))$$

$$\Omega_6 = \frac{1}{12}\,(\cot(x^4) + \coth(x^4)). \tag{3.4.17}$$

iii) Kaigorodov. Tipo N (16)

$$ds^2 = 2(Kx)^{-2}(dx^2 + dy^2) - 2du(dv + 2vx^{-1}dx + xdu), \qquad K = \text{cte.}$$

etiquetando las coordenadas según $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = v$, $x^4 = u$, entonces:

$$m^a = K\,(x/2,\ i\,x/2,\ -v,\ 0),$$

$$l^a = (0,0,\ -1x^{1/2},\ x^{-1/2}),$$

$$n^a = (0,\ 0,\ x^{1/2},\ 0) \tag{3.4.18}$$

sólo sobreviven los coeficientes de espin

$$\tau = -\pi = \nu/3 = \varkappa/2. \qquad \alpha = 5\beta = \frac{5}{8}\,\varkappa \tag{3.4.19}$$

con $\Psi_4 = 3\varkappa^2/2$. Asi la ecuacion (3.4.7) implica:

$$\Omega_a = 0 \quad a \neq 2,5,7. \quad \Omega_2 = \Omega_5 = -\,\varkappa/12.\ \Omega_7 = \frac{3}{4}\,\varkappa \tag{3.4.20}$$

iv) Kaigorodov. Tipo III (29)

$$ds^2 = 2\,(Kx)^{-2}(dx^2 + dy^2) +$$

$$-\ 2du(dv + 2vx^{-1}dx + \frac{4}{3}\,K^{-1}xdy + 2x^4du). \quad K = \text{cte.} \tag{3.4.21}$$

Las coordenadas se etiquetan como en el caso anterior. Las tetradas son.

$$m^a = (\frac{1}{2}\,Kx - \frac{15}{4}\,i\sqrt{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\,i\,K\,x - \frac{15}{4}\,i\,\sqrt{2}\ ,\ -\,Kv + \frac{42}{6}\,ix^2\ ,\ 0)$$

$n^a = (0,\ 0,\ -\sqrt{2}\ x^2,\ 0)$

$$l^a = \left(0\ ,\ \frac{15}{4}\sqrt{2}\ Kx,\ -\ \frac{257}{8}\sqrt{2}\ x^2,\ -\ 2^{-1/2}x^{-2} \right); \qquad (3.4.22)$$

cumpliéndose la ecuación (3.4.8) con $\psi_3 = 2^{-3/2} i\ K^2$. Los coeficientes de espin, quedan :

$$\kappa = \rho = \sigma = \varepsilon = 0$$

$$\gamma = \mu/98 = 2\lambda/45 = (iK/4)\sqrt{2},$$

$$\tau = \beta = -\pi = \alpha/2 = 8/153\ \nu = K/2 \qquad (3.4.23)$$

utilizando la ecuación (3.4.10)

$$\Omega_0 = \Omega_1 = \Omega_4 = 0 \quad ,\ \Omega_2 = \Omega_5 = -K/6$$

$$\Omega_3 = \frac{45}{8}\ i\ K\ \sqrt{2} \quad ,\ \Omega_6 = \frac{49}{6}\ i\ K\ \sqrt{2}\ ,\ \Omega_7 = \frac{153}{16}\ K \qquad (3.4.24)$$

Las componentes NP del espintensor de Lanczos estan asociadas a los coeficientes de espin para los tipos O, N, y III.

Por otra parte en (46), 1991 se obtuvo el potencial de Lanczos para las once metricas vacias tipo D de Kinnersley, el cual demostro que solo pueden existir clases de metricas con $R_{ij} = 0$ del tipo Petrov D. En dicho trabajo, tambien se demostro que los coeficientes de espin de NP generan las proyecciones de K_{abc} sobre la tétrada nula. En los once casos solo se utiliza la tétrada: $(m^c\ ,\ \bar{m}^c,\ l^c\ ,\ n^c)$ lo cual permite obtener la correspondiente metrica via $g^{ab} = m^a\ \bar{m}^b + m^b\ \bar{m}^a + l^a\ n^b - l^b\ n^a$ y los respectivos coeficientes de espin. Ademas los vectores l^c y n^c siempre estaran alineados con las direcciones de Debever-Penrose, entonces $\psi_a = 0$, $a \neq 2$ y de acuerdo con el teorema de Goldberg-Sachs (16) $\kappa = \sigma = \lambda = \nu = 0$ para todas las once metricas de Kinnersley.

Para las metricas de clase IV, se tienen dos casos:

V.1) $\qquad i = \sqrt{-1}$.

$$n^b = (0,\ 0,\ 1,\ 0) \qquad \xi^2 = \frac{2amx + l(a^2 + x^2)}{2a(a^2 + x^2)}$$

$$m^b = (\xi,\ \frac{\iota}{\xi},\ \frac{2rx\xi}{a^2 + x^2},\ 0)$$

$$l^b = (0,\ \frac{4ar}{a^2 + x^2},\ -\frac{r^2 l}{2a(a^2 + x^2)},\ 1) \tag{3.4.25}$$

donde a, l y m son constantes reales. Las correspondientes cantidades de NP nos quedan:

$$\mu = \rho = \varepsilon = 0 \qquad , \gamma = \frac{rl}{2a(a^2 - x^2)}$$

$$\tau = -\pi = \bar{\alpha} + \beta = -\frac{\xi(x - \iota a)}{a^2 + x^2}$$

$$\alpha = [lx^3 - amx^2 + a^2lx - a^3m + \iota a(lx^2 - 2amx - la^2)]/4a\xi(a^2 + x^2)^2$$

$$\beta = [lx^3 - 3amx^2 + 3a^2lx + a^3m - \iota a(lx^2 - 2amx - la^2)]/4a\xi(a^2 + x^2)^2$$

$$\psi_2 = 2\pi\ (\alpha - \beta) = \frac{(m - \iota l)}{(x - \iota a)^3} \tag{3.4.26}$$

Las expresiones (3.4.26) en unión con las ecuaciones de Weyl - Lanczos (WL) (3.2.8) permiten obtener las componentes del espintensor de Lanczos:

$$\Omega_c = 0 \quad , \quad c \neq 2,5,6,7 \quad ; \quad \Omega_2 = \frac{\alpha}{3}$$

$$\Omega_5 = \frac{\beta}{3} - \frac{\pi}{6} \quad , \quad \Omega_6 = \frac{\gamma}{3} \quad , \quad \Omega_7 = \frac{r}{2}\ \pi\gamma \tag{3.4.27}$$

debido a que K_{abc} carece de unicidad, las ecuaciones (3.4.27) son una de las múltiples soluciones de WL.

V.2) Si se considera la tetrada:

$$n^b = (0,\ 0,\ 1,\ 0)$$

$$l^b = (0,\ 0,\ \frac{cr^2}{x^2},\ 1)$$

$$m^b = (\xi\ ,\ \frac{\iota}{\xi}\ ,\ \frac{2r\xi}{x}\ ,\ 0) \qquad , \qquad \xi^2 = c + \frac{m}{x}$$

con c y m constantes reales. Donde,

$$\mu = \rho = \varepsilon = 0 \qquad , \tau = -\pi = \alpha + \beta = -\frac{\xi}{x} \tag{3.4.28}$$

entonces,

$$\gamma = -\frac{cr^2}{x^2} \qquad , \qquad \alpha = -\frac{(m + 2cx)}{4x^2\xi}$$

$$\beta = -\frac{(3m + 2cx)}{4x^2\xi} \qquad , \qquad \psi_2 = \frac{m}{x^2}$$

(3.4.29)

así las ecuaciones de WL (3.2.8) conducen al espintensor:

$$\Omega_c = 0 \quad , c \neq 2,5; \qquad \Omega_2 = \frac{2}{3}\,\alpha \qquad , \qquad \Omega_5 = \frac{2}{3}\,\beta \qquad (3.4.30)$$

con (3.4.27) y (3.4.30) queda determinado K_{ijr} para las métricas de clase IV, las cuales son únicas con $\mu = \rho = 0$.

En las métricas de clase III, también se tienen dos casos:

V.3) Para $\mathbb{R}_4$ se trabaja con la tétrada nula:

$$n^j = (QE)^{1/2}\,(\,0,\ 0,\ 1,\ 0) \qquad , \ Q = \pm 1$$

$$l^j = (QE)^{-1/2}\,(\,0\ ,\ -^{4}\ ,\ U,\ -^{1}) \qquad , \ QE > 0$$

$$m^j = (2\Sigma)^{-1/2}\,\left(-4a\pi^\circ,\ \frac{dn\ x}{\pi^\circ},\ \frac{sn\ x}{2\ \pi^\circ},\ -i\sqrt{2}\,\pi^\circ(r^2 + 3\rho^{\circ 2})\right) \quad (3.4.31)$$

$$A = r - i\rho^\circ \quad , \quad \rho^\circ = a\ cn\ x \quad , \ \Sigma = A\,\bar{A}$$

$$\pi^\circ = \left[c\ sn\ x\ dn\ x + \frac{b}{4a^2}\,cn^2x - \frac{\sqrt{2}}{8a^3}\,cn\ x\left[m\ sn\ x + l\sqrt{2}\ dn\ x\right]\right]^{1/2}$$

$$E = \frac{1}{\Sigma}\left[\tau\,\bar{\tau}^{\,\circ} - \frac{1}{2}\,(A\psi^\circ + \bar{A}\,\bar{\psi}^{\,\circ}) + 2\rho^\circ\pi^{\circ 2}(\rho^\circ r^2 - 2rt^\circ - 3\rho^{\circ 3}\right] -$$

$$- r^2\pi^{\circ 2} - \mu^\circ r - U^\circ + 2\rho^{\circ 2}\pi^{\circ 2} \qquad ,$$

$$t^\circ = 2a^2\sqrt{2}\ sn\ x\ dn\ x \qquad , \qquad \psi^\circ = (m + il)(dn\ x - \frac{i\sqrt{2}}{2}\,sn\ x)^3 \ ,$$

$$U^\circ = -\,3\rho^{\circ 2}\,\pi^{\circ 2} + \frac{3\sqrt{2}}{4\ a}\,cn\ x\ (m\ sn\ x - l\sqrt{2}\ dn\ x) \ ,$$

$$\mu^\circ = -\frac{1}{t^\circ}\,(l^\circ + 2\rho^\circ U^\circ - 2\,\rho^{\circ 3}\pi^{\circ 2}) \qquad .$$

$$l^\circ = l\ dn\ x\ (1 - 2\ sn^2x) - \frac{m}{\sqrt{2}}\ sn\ x\ (3 - 2\ sn^2x) \qquad (3.4.32)$$

las cantidades a, b, c, l, y m son constantes arbitrarias y cn x , sn x , dn x representan funciones elípticas de modulo $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

En (43) pag. 1201 pueden consultarse las expresiones para $-^{1}$, $-^{4}$ y U las cuales participan en l^j .

con (3.4.31) es posible verificar la validez de (3.4.37), considerando (46):

$$- = \tau = \frac{i\ \pi^\circ}{\bar{A}\ \sqrt{\Sigma}}\,(r^2 + 2i\rho^\circ r + \rho^{\circ 2} - it^\circ)$$

$$\rho = Q\mu = -\frac{1}{\bar{A}}(QE)^{1/2}, \qquad \psi_2 = -\frac{\psi^{\circ}}{\bar{A}^3}, \text{ etc.} \qquad (3.4.33)$$

Las Ω_c son obtenidas a partir de (3.4.38).

V.4) Si se selecciona la tétrada nula (este espacio-tiempo tambien se conoce como " métrica C " y su espintensor ya fué calculado en (51), la tétrada se proporciona en (43):

$$n^c = (1, \frac{1}{2} r^2[f(x - 1/R)]^2, 0, 0)$$

$$l^c = (0, 1, 0, 0)$$

$$m^c = (0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\, Rf(x), -\frac{1}{2}\sqrt{2}\, R^{-1}f(x), -\frac{1}{2} i\sqrt{2}\, R^{-1}[f(x)]^{-1})$$

$$\text{con } f(x) = (-2mx^3 + ax + b)^{1/2} \qquad (3.4.34)$$

las cantidades m, a, b, son constantes. Esta solución de la métrica constante fué discutida inicialmente por Elhers-Kund en (1962). En las métricas de clase II, existen seis casos, para todas ellas el espintensor tiene la misma estructura, en donde siempre es posible elegir la tétrada nula de tal manera que:

$$\tau = \pi, \ \alpha = \beta, \ \rho - \bar{\rho} = 2(\varepsilon - \bar{\varepsilon}), \ \pi + \bar{\pi} = 2(\beta + \bar{\beta})$$

$$\mu = Q\rho, \ \gamma = Q\varepsilon, \ \psi_2 = 4Q(\varepsilon\rho - Q\pi\beta), \ Q = \pm 1 \qquad (3.4.35)$$

utilizando las ecuaciones de WL implican:

$$\Omega_0 = \Omega_7 = Q\frac{\pi}{4}, \qquad \Omega_3 = Q\,\Omega_4 = Q\frac{\rho}{4}$$

$$\Omega_1 = Q\,\Omega_6 = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\rho}{12}, \qquad \Omega_2 = \Omega_5 = \frac{\beta}{3} + \frac{\pi}{12}$$

$$(3.4.36)$$

Por lo que si se puede encontrar una tetrada con las caracteristicas (3.4.35), el correspondiente potencial de Lanczos estará dado por (3.4.36).

V.5) Esta métrica es la solución de Kerr-Nut (47).

$$n^b = (-\frac{Q}{2}\frac{R}{\Sigma})^{1/2}(0, 0, 1, 0)$$

$$l^b = (-2QR\Sigma)^{-1/2}(0, 2a, R, 2(r^2 + l^2 + a^2))$$

$$m^b = (2\Sigma)^{-1/2}(-i, \csc x, 0, a \operatorname{sen} x + 2l \cot x) \qquad (3.4.38)$$

donde $Q = \pm 1$ tal que $-QR > 0$ y $A = r - i(l - a\cos x)$,

$$\Sigma = A\ \bar{A} \quad , \qquad R = -r^2 + 2mr + l^2 - a^2$$

con a, l y m constantes reales

cuando $l = 0$ se obtiene la métrica de Kerr (48) (hoyo negro con rotación) y si $a = l = 0$, entonces resulta la solucion de Schwarzschild, con (3.4.37) y (3.4.38) se cumple (3.4.35):

$$\rho = Q\mu = -\frac{1}{\bar{A}}\left(-\frac{QR}{2\Sigma}\right)^{1/2} \quad , \quad \tau = \pi = -\frac{a}{\bar{A}} \operatorname{sen} x\ (2\Sigma)^{-1/2}$$

$$\alpha = \beta = \frac{\csc x}{2\bar{A}}\ (-a + l\cos x - ir\cos x)\ (2\Sigma)^{-1/2}$$

$$\varepsilon = Q\gamma = -\frac{Q}{2\ \bar{A}}\left[a^2 - mr - l^2 + i(m - r)(l - a\cos x)\right]\left[-2Q\Sigma R\right]^{-1/2}$$

$$\psi_2 = 4Q\ (\varepsilon\rho - Q\pi\beta) = -\frac{(m + il)}{\bar{A}^{\ 3}} \quad , \qquad (3.4.39)$$

el espintensor correspondiente está dado por (3.4.36) con $Q = -1$ en las regiones del espacio-tiempo donde $R < 0$ (46).

V.6) En este caso se elige la tetrada:

$$n^b = \left[-\frac{QN}{2\Sigma}\right]^{1/2} (\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$$

$$l^b = (-2QN\Sigma)^{-1/2}\ (\ 0,\ 2a,\ N,\ 2(r^2 + l^2 + a^2))$$

$$m^b = (2\Sigma)^{-1/2}\ (-i\ ,\ \operatorname{csch} x,\ 0,\ -a \operatorname{senh} x + 2l \coth x)$$

con $Q = \pm 1$ tal que $QN < 0$ y $A = r - i(a\cosh x - l)$

$$\Sigma = A\ \bar{A} \quad , \ N = r^2 + 2mr - l^2 + a^2 \qquad (3.4.40)$$

se verifica (3.4.35):

$$\rho = Q\mu = \frac{1}{\bar{A}}\left[-\frac{QN}{2\Sigma}\right]^{1/2} \quad , \ \tau = \pi = -\frac{a \operatorname{senh} x}{\bar{A}}\left[2\Sigma\right]^{-1/2}$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2\ \bar{A}} \operatorname{csch} x\ (a - l\cosh x - ir\cosh x)\ \left[2\Sigma\right]^{-1/2}$$

$$\varepsilon = Q\gamma = -\frac{Q}{2\ \bar{A}}\left[-mr + l^2 - a^2 + i(m + r)(a\cosh x - l)\right](-2QN\Sigma)^{-1/2}$$

$$\psi_2 = -\frac{(m + il)}{\bar{A}^{\ 3}} \qquad (3.4.41)$$

Las Ω_c se determinan de acuerdo a (3.4.36).

V.7) Para la determinación del potencial de Lanczos la tetrada más conveniente es (46):

$$n^b = \left[-\frac{QM}{2\Sigma}\right]^{1/2} (0,\ 0,\ 1,\ 0)$$
$$l^b = (-2QM\Sigma)^{-1/2} (0,\ 2a,\ M,\ 2(r^2 + l^2 - a^2))$$
$$m^b = (2\Sigma)^{-1/2} (-i,\ \mathrm{sech}\ x,\ 0,\ 2l \tanh x - a \cosh x)$$

donde $Q = \pm 1$ con $-QM > 0$ y $A = r - i(a\ \mathrm{senh}\ x - l)$, $\Sigma = A\bar{A}$,

$$M = r^2 + 2mr - a^2 - l^2 \qquad (3.4.42)$$

Las cantidades NP adquieren los valores:

$$\rho = Q\mu = -\frac{1}{\bar{A}}\left[-\frac{QM}{2\Sigma}\right]^{1/2}, \quad \tau = \pi = -\frac{a \cosh x}{\bar{A}} (2\Sigma)^{-1/2}$$
$$\alpha = \beta = -\frac{\mathrm{sech}\ x}{2\bar{A}}\left[a + l\ \mathrm{senh}\ x + ir\ \mathrm{senh}\ x\right] (2\Sigma)^{-1/2}$$
$$\varepsilon = Q\gamma = -\frac{Q}{2\bar{A}}\left[-mr + a^2 + l^2 + i(m + r)(a\ \mathrm{senh}\ x - l)\right](-2QM\Sigma)^{-1/2}$$
$$\psi_2 = -\frac{(m + i\ l)}{\bar{A}^3}$$

$$(3.4.43)$$

satisfaciéndose (3.4.35) y en consecuencia (3.4.36) aporta el correspondiente espintensor.

V.8) Se tiene la tétrada:

$$n^b = \left[-\frac{QF}{2\Sigma}\right]^{1/2} (0,\ 0,\ 1,\ 0)$$
$$l^b = (-2QF\Sigma)^{-1/2} (0,\ 2a,\ F,\ 2(r^2 + l^2)) \qquad ,\ Q = \pm 1$$
$$m^b = (2\Sigma)^{-1/2} (-i,\ e^{-x},\ 0,\ -ae^{-x} + 2l) \qquad ,\ QF < 0$$
$$A = r - i(ae^{x} - l)\ ,\ \Sigma = A\bar{A}\ ,\ F = r^2 + 2mr - l^2 \qquad (3.4.44)$$

Las condiciones (3.4.35) se verifican con las expresiones:

$$\rho = Q\mu = -\frac{1}{\bar{A}}\left[-\frac{QF}{2\Sigma}\right]^{1/2}, \quad \tau = \pi = -\frac{a\,e^{x}}{\bar{A}}(2\Sigma)^{-1/2}$$

$$\alpha = \beta = -\frac{(l + ir)}{2\bar{A}}(2\Sigma)^{-1/2},$$

$$\varepsilon = Q\gamma = -\frac{Q}{2\bar{A}}\left[-mr + l^2 + i(m + r)(ae^{x} - l)\right]\left[-2QF\Sigma\right]^{-1/2}$$

$$\psi_2 = -\frac{(m + il)}{\bar{A}^3} \qquad (3.4.47)$$

Las Ω_c se obtienen de (3.4.36).

V.9) Si se selecciona la tetrada nula :

$$n^c = \left[\frac{m + b}{\Sigma}\right]^{1/2}(0, 0, 1, 0)$$

$$l^c = \left[\Sigma(mr + b)\right]^{-1/2}(0, 1, mr + b, r^2 + b^2)$$

$$m^c = (2\Sigma)^{-1/2}\left(-i, , \frac{1}{x}, 0, -bx - \frac{x^3}{4}\right)$$

$$A = r - i\left(b + \frac{x^2}{2}\right), \qquad \Sigma = A\bar{A}, \qquad m, b = \text{ctes.}$$

entonces

$$\rho = -\mu = -\frac{1}{\bar{A}}\left[\frac{mr + b}{\Sigma}\right]^{1/2}, \qquad \tau = \pi = -\frac{x}{\bar{A}}(2\Sigma)^{-1/2}$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{4x\bar{A}}(2b - x^2 - 2ir)(2\Sigma)^{-1/2},$$

$$\varepsilon = -\gamma = -\frac{(mA + 2b)}{4\bar{A}}\left[\Sigma(mr + b)\right]^{-1/2},$$

$$\psi_2 = -\frac{(m + i)}{\bar{A}^3} \qquad (3.4.48)$$

el espintensor se calcula de acuerdo a (3.4.36), con Q = −1.

V.10) La metrica se genera con :

$$n^c = \left(-\frac{Q}{2}\frac{T}{\Sigma}\right)^{1/2}(0, 0, 1, 0)$$

$$l^c = (-2QT\Sigma)^{-1/2}(0, 2, T, 2r^2), \qquad Q = \pm 1$$

$$m^c = (2\Sigma)^{-1/2}(-i, 1, 0, -x^2), \qquad -QT > 0$$

$$A = r - ix, \quad \Sigma = A\bar{A}, \quad T = 2mr - 1$$

de donde

$$\rho = Q\mu = -\frac{1}{\bar{A}}\left(-\frac{Q}{2}\frac{T}{\Sigma}\right)^{1/2}, \qquad \tau = \pi = -\frac{1}{\bar{A}}(2\Sigma)^{-1/2}$$

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}, \qquad \psi_2 = -\frac{m}{\bar{A}^3}$$

$$\varepsilon = Q\gamma = - \frac{Q}{2\bar{A}} (1 - mr + imx) (-2QF\Sigma)^{-1/2} \qquad (3.4.47)$$

El espintensor de Lanczos se determina utilizando (3.4.36).

En las métricas de clase I, los espacios vacíos corresponden a las soluciones de Nut (49,50), su tétrada nula esta dada por:

$$n^b = (0,\ 0,\ 1,\ 0)$$

$$m^b = \frac{1}{A} (- P\ ,\ - iP\ ,\ 0,\ \frac{ic}{\sqrt{2}}\ \eta)$$

$$l^b = (\ 0,\ 0,\ - M_o - \frac{1}{2} (\psi^{\circ}\rho + \overline{\psi}^{\circ}\overline{\rho})\ ,\ 1)$$

donde

$$A = r - ic, \qquad c = cte.\ ,\ \rho = - \frac{1}{\bar{A}}$$

$$\eta = x + iy \qquad ,\ P = \frac{i}{\sqrt{2}} (1 + \frac{M_o}{2}\ \eta\bar{\eta})$$

$$\psi^{\circ} = \tilde{\psi}^{\circ} + 2i\ M_o c \qquad ,\ M_o = - \frac{1}{2}\ ,\ 0,\ \frac{1}{2} \qquad (3.4.48)$$

La cantidad $\tilde{\psi}^{\circ}$ es una cantidad constante real.

$$\varkappa = \sigma = \nu = \lambda = \varepsilon = \tau = \pi = 0$$

$$\beta = - \bar{\alpha} = - \frac{M_o\ \bar{\rho}\ \bar{\eta}}{2\sqrt{2}} \qquad ,\ \gamma = \frac{\rho^2}{2}\ \psi^{\circ}$$

$$\mu = M_o\bar{\rho} + \frac{1}{2}\ \psi^{\circ}(\rho^2 + \rho\bar{\rho}) \qquad , \qquad \psi_2 = \rho^3\psi^{\circ} = 2\gamma\rho, \qquad (3.4.49)$$

Las ecuaciones de Weyl-Lanczos aceptan la solución ;

$$\Omega_c = 0, \qquad b \neq 1,6 \quad ;\ \Omega_1 = \frac{\rho}{\sigma} \qquad ,\ \Omega_\sigma = \frac{\gamma}{3} - \frac{M_o}{\sigma}\ \bar{\rho} \qquad (3.4.50)$$

para los tres posibles valores de M_o.

4.0 APLICACIONES ADICIONALES

En varios fenómenos investigados en la física existe un determinado tipo de interacciones fundamentales y diferentes , se observan efectos " fuertes y débiles ". Las interacciones nucleares y la interaccion electromagnetica pueden considerarse como débiles cuando el rango de interacción de las partículas es lo suficientemente grande, por otra parte para un gran agregado de materia, esta se vuelve eléctricamente neutra. En apariencia el fenómeno a gran escala en el Universo se ve fuertemente afectado por la interacción gravitacional. Si se considera a la gravedad como la influencia dominante, entonces la teoria de la relatividad general puede proporcionar una descripción del Universo a gran escala.

En la construcción de un modelo cosmológico aceptable para describir el Universo es necesario hallar un numero limitado de observaciones de naturaleza global. Algunas de las mediciones utiles son la medición de distancias, esto se hace a traves de la triangulacion para estrellas cercanas (aproximadamente cien años luz), sin embargo para estrellas lejanas que tienen paralaje mas pequeño se utiliza un metodo que involucra la medicion de la luminosidad aparente.

Con la determinación de la luminosidad aparente de estrellas, los astrónomos determinan y clasifican sus lineas espectrales y descubren un corrimiento de conocidas lineas espectrales, llamado: corrimiento hacia el rojo . La relacion del corrimiento relativo en la longitud de onda esta dada por $\Delta\lambda/\lambda$ y esta es proporcional a la distancia de la galaxia. El Universo puede visualizarse como en expansión de acuerdo a las observaciones de Hubble (1936), este resultado puede expresarse por: $\Delta\lambda/\lambda \cong \frac{L}{c} H$, esta expresión se conoce como la ley de Hubble con $H^{-1} = 5.6 \times 10^{17}$ s. (la constante H^{-1} fué calculada por Sandaje en 1972).

Para la aplicacion de las ecuaciones de Einstein del Universo actual es necesario el conocimiento previo de la distribución física de la materia, esta se representa por un tensor $T^{\mu\nu}$ conocido como tensor de Energía-Momento. Si se hace la suposición ideal de que a una escala lo suficientemente grande , la materia puede considerarse homogeneamente distribuida, lo cual solo sucede en los cúmulos de galaxias, pero no a la escala de galaxias individuales entonces se puede considerar un Universo idealizado por una distribución de materia uniformemente continua representada por una densidad constante de materia-energía ρ_0 la cual es la componente T^0_0 del tensor energía-momento. Las ecuaciones de campo para un espacio lleno homogeneamente con materia predicen la evolución del Universo en el tiempo, lo cual puede compararse con mediciones astronómicas, tales modelos corresponden a Universos estáticos o dinámicos.

La tarea matematica para resolver el problema cosmológico consiste en determinar una metrica a gran escala de cuatro dimensiones y una correspondiente distribucion que satisfaga las ecuaciones de Einstein. La metrica debe predecir cómo las galaxias y los rayos de luz se mueven a lo largo de las geodésicas en el espacio cuadridimensional.

Para restringir las posibles formas de una metrica cosmologica, se impone como primer requerimiento que el espacio sea isotrópico, lo

cual tiene que ver con que el espacio sea homogéneo a una escala no muy grande . A continuación se presentan como nuevos ejemplos los espintensores correspondientes a métricas de gran interés en la cosmología y en la relatividad general.
Todos los resultados son nuevos, ya que no se encuentran reportados en la literatura referente a este tema.

4.1 LA METRICA DE ROBERTSON-WALKER.

Para la construcción de ésta métrica se hace la suposición física de que la materia se distribuye homogeneamente en el Universo además se desea que la geometría del espacio se determine por la distribución de materia, este requerimiento general se conoce como principio de Mach, el cual se enuncia como " *la inercia de un cuerpo se debe a la presencia de otros cuerpos en el Universo* ". De acuerdo con el principio anterior, se requiere que la geometría de tres dimensiones espaciales sea homogeneo con respecto a la distribución de materia . **PARTIENDO DE CONCEPTOS PURAMENTE GEOMETRICOS** tales como: la métrica de un espacio tetradimensional debe contener al subespacio homogeneo tridimensional y basandose en las hipótesis:

1° Existe un tiempo global de coordenadas, las cuales sirven como el x^0 de un sistema de coordenadas.

2° El espacio tetradimensional para varios valores es localmente isotrópico.

3° Dos observadores en diferentes puntos observan una física similar.

Se genera lo que se conoce como métrica de Robertson-Walker, la cual es de suma importancia en la cosmología, en particular es importante para el estudio del corrimiento hacia el rojo.

$$ds^2 = -\,dt^2 + \frac{A^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(1 + \frac{K}{4}(x^2 + y^2 + z^2))^2}$$

(4.1.1)

A partir de esta métrica (4.1.1) se construye la tétrada nula usando para ello las ecuaciones: (1.3.1), (1.4.2) y (2.1.3), de ésta manera se obtiene:

$$Z_{(1)} = \underset{\sim}{m}_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(i,u,0,0)$$
$$Z_{(2)} = \underset{\sim}{\bar{m}}_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i,\ u,0,0)$$
$$Z_{(3)} = l_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-u,u)$$
$$Z_{(4)} = n_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,u,u)$$

(4.1.2)

En donde u es;

$$u = \frac{A}{(1 + \frac{K}{4}[x^2 + y^2 + z^2])}$$

(4.1.3)

con estas expresiones se calculan los coeficientes de espin de Newman-Penrose, utilizando las ecuaciones:

(2.1.26), (2.1.27), (2.1.28) , (2.1.29) y (2.1.30) obteniéndose:

$$\kappa = 0$$
$$\sigma = -\rho = 2F(y + z)$$
$$\lambda = \tau = \pi = \frac{1}{2}\nu = -2F\ x$$
$$\mu = 2F(-y + z)$$
$$\varepsilon = (\frac{1}{4}F)(4y + 4z + 2x)$$
$$\gamma = (\frac{1}{4}F)(4y + 4z + 2x)$$
$$\alpha = -\beta = -\frac{1}{2}F$$

en donde

$$F = \frac{-KA}{8\sqrt{2}\,(1 + \frac{K}{4}[x^2 + y^2 + z^2])^2} \tag{4.1.4}$$

utilizando las ecuaciones (4.1.4) , (2.2.4) y (3.2.3) se obtienen:

$$\Omega_0 = -\frac{\varkappa}{2} = 0$$

$$\Omega_1 = -\frac{\rho}{\sigma} = -\frac{1}{3} F (x + z)$$

$$\Omega_2 = \frac{\pi}{\sigma} = -\frac{1}{3} F (x)$$

$$\Omega_3 = \frac{\lambda}{\sigma} = - F (x)$$

$$\Omega_4 = -\frac{\sigma}{2} = \frac{1}{3} F (x)$$

$$\Omega_5 = -\frac{\tau}{\sigma} = \frac{1}{3} F (x)$$

$$\Omega_6 = \frac{\mu}{\sigma} = \frac{1}{3} F (-y + z)$$

$$\Omega_7 = \frac{\nu}{2} = - 2F (x)$$

4.2 ALGUNAS METRICAS DEL TIPO ROBINSON-TRAUTMAN

Las metricas de Robinson-Trautman tienen gran importancia en la relatividad general. ejemplos de estos tipos de espacio-tiempo son: La solucion de Reissner-Nordström, la de Schwarzschild, los espacios de Siklos, Petrov, Novotny-Horsky, Kasner, la metrica de Minkowski, la metrica de tipo Bianchi VI y la metrica estática tipo "C" de Kinnersley entre otras [57].

En la metrica del tipo Robinson-Trautman r es un parámetro afín a los rayos de luz de los eigenvectores nulos repetidos y u es el tiempo retardado. Para una superficie r , u es constante, estos valores determinan una especie de esfera distorsionada. Las soluciones de (3.3.11.2) se refieren a una descripcion de la radiación gravitacional esférica, aunque para que se tengan ondas gravitacionales esféricas es necesario que Δ ln p = K(u), $\Delta = 2p^2\ \partial x^1\ \partial x^2$ y m = 1. La ecuación (3.3.11.2) muestra que la métrica es estática si m = 0. Fisicamente m representa la masa del sistema [58].

Como ejemplos de la aplicación de la técnica para determinar el espintensor de Lanczos, se hacen los cálculos para las métricas de la solución de tipo Bianchi VI y para la métrica estática tipo C de Kinnersley . Los resultados encontrados en esta Sección son nuevos y no se encuentran reportados en la literatura.

4.2.1 METRICA DE LA SOLUCION DE BIANCHI (TIPO IV).

Las soluciones son del tipo III de Petrov [58] con m = 0 lo cual implica que $\psi_2 = 0$, además se tiene:

$\Delta \ln p = \varkappa = -3\,[f(\xi,\mu) + \bar{f}(\bar{\xi},\mu)]$ con $f_{,\xi} \neq 0$ y $(\Delta \ln p)_{,\xi} \neq 0$

por lo que $p = (\xi + \bar{\xi})^{3/2}$.

Utilizando las expresiones (3.3.11.3)

$$(m^r) = \frac{(\xi + \bar{\xi})^{3/2}}{2\ r}\,(1,\ i,\ 0,\ 0)$$

$$(\bar{m}^{\,r}) = \frac{(\xi + \bar{\xi})^{3/2}}{2\ r}\,(1,\ -\ i,\ 0,\ 0)$$

$$(l^r) = (0,\ 0, -H,\ 1)$$

$$(n^r) = (0,\ 0,\ 1,\ 0)$$

En donde H es una función del tipo $H(\xi, \bar{\xi}, r, u)$ arbitraria.

Utilizando las ecuaciones (3.3.11.4) se calculan los coeficientes de espin de Newman-Penrose.

$$\varkappa = \sigma = \varepsilon = \pi = \tau = \lambda = 0$$

$$\phi_{00} = \phi_{11} = \phi_{22} = 0$$

$$\rho = -\frac{1}{r} \quad , \gamma = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r} H$$

$$\alpha = -\overline{\beta} = \frac{3}{4\, r}(\xi + \overline{\xi})^{1/2}$$

$$\nu = \frac{(\xi + \overline{\xi})^{3/2}}{r}\frac{\partial H}{\partial \eta}$$

$$\mu = -\frac{H}{r} \quad y \quad \psi_{o} = \psi_{1} = 0$$

con los coeficientes de espín y las ecuaciones (3.4.10) se obtiene:

$$\Omega_{o} = \Omega_{2} = \Omega_{3} = \Omega_{5} = 0$$

$$\Omega_{1} = \frac{1}{3\, r} \; ; \; \Omega_{4} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r} H \quad ; \quad \Omega_{6} = -\frac{H}{3\, r}$$

$$\Omega_{7} = \frac{(\xi + \overline{\xi})^{3/2}}{r}\frac{\partial}{\partial \eta} H.$$

4.2.2 METRICA ESTATICA TIPO C DE KINNERSLEY

Utilizando la métrica de Robinson-Trautman (3.3.11.2) y considerando : $p^{-2}(\eta) = -2\,\eta^{3} + b\,\eta + c$, al igual que (4.2.1), las tétradas nulas quedan expresadas como:

$$(m^{r}) = (1,\, i,\, 0,\, 0)$$

$$(\overline{m}^{\,r}) = \frac{[\,-2\eta^{3} + b\eta + c\,]^{-1/2}}{2\, r}(1\,,\, -\, i,\, 0,\, 0)$$

$$(l^{r}) = (0,\, 0,\, -\, H,\, 1)$$

$$(n^{r}) = (0,\, 0,\, 1,\, 0)$$

con estas tétradas y las ecuaciones (3.3.11.4) se obtienen los coeficientes de espin de Newman-Penrose:

$$\kappa = \sigma = \varepsilon = \pi = \tau = \lambda = 0$$

$$\rho = -\frac{1}{r} \quad ; \gamma = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r} H$$

$$\alpha = -\overline{\beta} = \frac{(-\,2\eta^{3} + b\eta + c)^{-3/2}}{4\, r}(6\eta^{2} + b)$$

$$\nu = \frac{(-\,2\eta^{3} + b\eta + c)}{r}\frac{\partial}{\partial \eta} H \quad ; \mu = -\frac{H}{r}$$

utilizando las ecuaciones (3.4.36) para las métricas con clasificación Petrov tipo D, se tiene:

$$\Omega_{\circ} = \Omega_{7} = 0$$

$$\Omega_{1} = Q\ \Omega_{6} = -\frac{1}{r} \qquad Q = \pm 1$$

$$\Omega_{3} = Q\ \Omega_{4} = -\frac{Q}{4\ r}$$

$$\Omega_{2} = \Omega_{5} = \frac{\beta}{3} + \frac{\pi}{12}$$

CONCLUSIONES

Con el análisis realizado en el presente trabajo, se ha mostrado la importancia de las tetradas nulas (formalismo N.P.) como una herramienta alternativa al calculo tensorial para el estudio y construcción del espintensor de Lanczos (W-L), el cual genera el tensor conformal de Weyl (que como se sabe es sumamente importante debido a que éste contiene las propiedades intinsecas del campo gravitacional no relacionadas con las fuentes). La importancia del espintensor de Lanczos radica en que dicha expresion matemática describe fisicamente una densidad de momento angular (en la metrica de Kerr). [18]. Por otra parte el concepto de espintensor K_{ijk} significa un paso hacia la unificacion de la teoria de la mecánica cuántica y de la gravedad, Taub ([11] y [12]). En ésta dirección Novello en 1990 ([51] y [52]) desarrollo una teoria completa de campo con espin dos.

En este trabajo se ha resumido. la informacion más reciente referente al espintensor de Lanczos. a la fecha se han determinado las expresiones correspondientes del espintensor K_{ijk} para los tipos; III , N, O, y todos los tipos D (cuando $R_{ij} = 0$). por otra parte en el capitulo 4 se aplicó la tecnica descrita en los capitulos anteriores de este trabajo para hallar los espintensores de Lanczos pra las métricas Robertson-Walker y Robinson-Trautmann por su importancia en la Fisica y en la Cosmologia, esta es una aportación original que no ha sido reportada en la literatura. Sin embargo aun permanecen varias cuestiones abiertas:

1) Determinación de K_{ijk} (espintensor de Weyl-Lanczos) para

todo $\mathbb{F}_4$ no-vacio tipo D.

2) Determinar expresiones de K_{ijk} para $\mathbb{F}_4$ tipo I y tipo II de manera general.

3) Construccion de una teoria que unifique la gravedad con la teoria de la mecanica cuantica, aunque ya existen buenos intentos realizados por Novello en 1990 ([51],[52]).

24) J. Fernandez, Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias U.N.A.M. (1986).

25) W. F. Maher, J. D. Zund. N. Cim. A53 , 638 (1968)

26) V. V. Narlikar, Proc. Indian Acad. Sci. , 91(1949)

27) I. S. Sokolnikoff, Análisis tensorial Wiley-Limusa 1985.

28) E. T. Newman, J. Math. Phys. A3 566 (1962)

29) H. F. Goenner, General Relativity and Gravitation Ed. B. Bertotti, F. de Felice, A. Pascolini, D. Reidel, pag.199(1984)

30) J. Novotny, C. Zech. J. Phys. B24 , 718 (1974)

31) G. Ovando, Tesis de Maestría E.S.F.M. - I.P.N. (1985).

32) A. Papapetrou, Ann. Inst. Henri Poincaré , 271 (1970).

33) A. Papapetrou, Perspectives in Geometry and Relativity, Ed. B. Hoffmann, P. 360 (1966).

34) A. Papapetrou, Comp. Maths. with Appls. 1 , 377(1975) Ann. Inst. Henri Poincare A 41 , 227 (1984).

35) J. A. Torres, Tesis de Maestría E.S.F.M. - I.P.N. (1985).

36) M. Sh. Yakupov, Sov. Phys. Doklady 13 . 585 (1968).

37) J. D. Zund, Ann. Math. Pura Appl. 82 , 381 (1969); , 239 (1975).

38) A. Z. Petrov, Recent Developments in General Relativity, Pergamon Press (1962).

39) J. Plebañski, Bull. Acad. Polon. Sci. 9, 373 (1962).

40) J. Plebañski, J. Math. Phys. 9 , 269 (1968).

41) H. S. Ruse, Proc. London. Math. Soc. 50 , 75(1948)

42) A. A. Taub, Ann. of Math. , 472 (1951) Perspectives in Geometry and Relativity, Ed. B. Hoffmann, P. 360 (1966). Comp. Maths. with Appls. 1 , 377(1975) Ann. Inst. Henri Poincare A41 , 227 (1984).

43) W. Kinnersley, J. Math. Phys. 10 (1969)1195

REFERENCIAS

1) F. Bampi. C.R. Acad. Sci. Paris A 264, 738(1967)

2) G. Caviglia. Gen. Relat. Grav. 15 , 375 (1983) 423 (1984).

3) F. Bampi. C. Zordan Gen. Relat. Grav. 9 , 393 (1978)

4) R. Becerril. Tesis de Maestria E.S.F.M.-I.P.N.

5) R. Becerril J. Lopez B. Bol. Dpto. Fis. E.S.F.M.-I.P.N. 3 N° 2, 99 (1983).

6) B. Bertotti. Phys. Rev. 116 . 1331 (1959).

7) E. Brinis. Rend. Inst. Lomb. A 111 , 466 (1977)

8) R. A. D'Inverno. R. A. Rusell-Clark J. Math.Phys. 1, 1258 (1971).

9) H. A. Buchdahl. R. Butler J. Maths. Phys. 1 , 537 (1960) comp. maths. with appl. 1 , 258 (1975).

10) J. Fernandez. J. Lopez G. Ovando M. Rosales Rep. Internos DCBI-UAM-A (1985)

11) R. Fuentes. Tesis de Maestria. Facultad de Ciencias U.N.A.M. (1985).

12) R. Fuentes. J. Lopez Acta Mex. Ciencia y Tec. I.P.N. , N° 9, 9 (1985).

13) K. Gödel. Rev. Mod. Phys. 21 , 447 (1949).

14) J. N. Goldberg. Gen. Relat. Grav. 5 183 (1974)

15) J. N. Goldberg. R. W. Sachs Acta Phys. Polon. Suppl. 22 , 13 (1962)

16) V. R. Kaigorodov. Sov. Phys. Dokklady 7, 893 (1963).

17) K. R. Karmarkar. Proc. Indian Acad. Sci. A 27 , 56 (1948)

18) E. Kasner. Amer. J. Math. 43 , 217 (1921)

19) C. Lanczos. Ann. of Math. 39 842 (1938).

20) C. Lanczos. Rev. Mod. Phys. 21 , 497 (1949).

21) C. Lanczos. Amer. Math. Mont. 65 , 665 (1958).

22) C. Lanczos. Rev. Mod. Phys. 34 , 379 (1962).

23) J. Lopez. Rep. Interno DCBI-U.A.M.-A N°59 (1981)

44) G. Ares de Parga. Rev. Mex. de Fis. 36 (1990)
O. Chavova A.
J. Lopez B.
J. Morales R.
J. Fernandez Ch. "Superpotencial de Lanczos"

45) D. Kramer. Exact solution of Einstein's field equations. Camb. Univ. Press (1980) chap. VII.
H. Stephani.
M. MacCallum.
E. Herlt.

46) V. Gaftoi N. Espintensor para espacio-tiempos vacios tipo D. (Enviado a la Rev. Mex. de Fis.)
J. Morales R.
J. L. López B.
T. D. Navarrete G.
G. Ovando Z.

47) M. Demiański. Bull. Acad. Polon. Sci. 14 (1966) 653
E. Newman.

48) R. P. Kerr, Phys. Rev. Lett. 11 (1963)237

49) M. Carmeli, Group Theory and General Relativity. McGraw-Hill N.Y. (1977) Chap.11

50) E. Newman, Phys. Rev. Lett. 11 (1963)237
L. Tamburino.
T. Unti. J. Math. Phys. 4 (1963)915

51) G. Ares de Parga, Rev. Mex. Fis 35 (1989)393
J. L. López B.
T. Matos Ch.
G. Ovando Z.

52) M. Novello, Quantization of Spin-two field in terms of Fierz Variables 1991. (Enviado a N. Cim.)
L. De Freitas
N. P. Neto
N. F. Svaiter

53) M. Novello, Theory of Gravity in Fierz Variables 1991. (Enviado a N. Cim.).
N. P. Neto

54) I. Frick Gen. Rel. Grav. 12, 693 (1980)
R. A. D'Inverno

55) A. Karhede Gen Rel. Grav. 14, 835 (1982)

56) R. Debever, Bull. Acad. Bel. cl. Sci. 43 ,114 (1956)
J. Géhéniau

57) V. Gaftoi N. Espintensor de Lanczos para las soluciones de Robinson-Trautman. (Preprint, enviado a la Revista Mexicana de Fisica).
J. L. López B.
T. D. Navarrete G.
G. A. Ovando Z.

58) D. Kramer, Exact solution of Einstein's field equations. Cambridge Univ. Press (1980)
H. Stephani
M. Mac Callum
E. Herlt