



11474  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
Facultad de Ingeniería

5  
2ej

APLICACION DEL METODO DE LAS CARACTERISTICAS  
A PROCESOS NO MISCIBLES DE RECUPERACION MEJORADA

NEMESIO MIGUEL HERNANDEZ

T E S I S

Presentada a la División de Estudios de Posgrado de la  
Facultad de Ingeniería  
de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener el grado de  
MAESTRO EN INGENIERIA (PETROLERA)

Cd. Universitaria

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Mayo de 1991



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

TEMA	PAGINA
1.- INTRODUCCION.....	1
2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	4
2.1.- DEFINICION DE RECUPERACION MEJORADA DE HIDROCARBUROS (RMH).....	4
2.2.- METODOS DE RECUPERACION MEJORADA DE HIDROCARBUROS.....	6
2.2.1.- RECUPERACION TERMICA.....	7
2.2.1.1.- DESPLAZAMIENTO CON VAPOR.....	7
2.2.1.2.- DESPLAZAMIENTO POR COMBUSTION IN-SITU.....	10
2.2.2.- RECUPERACION CON PRODUCTOS QUIMICOS.....	11
2.2.2.1.- DESPLAZAMIENTO POR SURFACTANTE-POLIMERO.....	12
2.2.2.2.- DESPLAZAMIENTO CON POLIMERO.....	14
2.2.2.3.- DESPLAZAMIENTO ALCALINO O CAUSTICO.....	16
2.2.3.- RECUPERACION CON SOLVENTES.....	18
2.2.3.1.- DESPLAZAMIENTO CON HIDROCARBUROS MISCIBLES.....	18
2.2.3.2.- DESPLAZAMIENTO CON CO <sub>2</sub> MISCIBLE.....	19
2.2.3.3.- DESPLAZAMIENTO CON GAS INERTE.....	21
2.3.- TIPOS DE DESPLAZAMIENTO EN UN PROCESO DE RECUPERACION MEJORADA DE HIDROCARBUROS.....	23
2.3.1.- DESPLAZAMIENTO INMISCIBLE.....	23
2.3.2.- DESPLAZAMIENTO MISCIBLE.....	23
2.4.- MODELOS EXISTENTES PARA SIMULAR LOS TIPOS DE DESPLAZAMIENTO.....	26

3.- DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO.....	28
3.1.- METODO DE LAS CARACTERISTICAS.....	28
3.2.- METODO CON UNA VARIABLE DEPENDIENTE.....	30
3.3.- METODO CON DOS VARIABLES DEPENDIENTES.....	36
3.4.- EL CONCEPTO DE COHERENCIA.....	53
4.- ACOPLAMIENTO DEL MODELO MATEMATICO Y LA TEORIA DE DESPLAZAMIENTO FRONTAL (FLUJO BIFASICO).....	55
4.1.- MODELO DE BUCKLEY-LEVERETT.....	55
4.2.- APLICACION DEL METODO DE LAS CARACTERISTICAS A LA ECUACION DE BUCKLEY-LEVERETT.....	63
4.3.- EJEMPLO DE APLICACION DE BUCKLEY-LEVERETT.....	66
4.3.1.- EL CONCEPTO DE ONDA DE CHOQUE.....	73
5.- ACOPLAMIENTO DEL MODELO MATEMATICO DE DOS VARIABLES DEPENDIENTES A FLUJO TRIFASICO.....	84
5.1.- APLICACION A FLUJO TRIFASICO.....	84
5.2.- EJEMPLO DE APLICACION DE FLUJO TRIFASICO.....	92
6.- CONCLUSIONES.....	108
7.- RECOMENDACIONES.....	110
8.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.....	111
APENDICE A: FORMA ALTERNA DE LA ECUACION DE FLUJO FRACCIONAL.....	114
APENDICE B: PROGRAMA Y RESULTADOS DEL EJEMPLO DE UNA VARIABLE DEPENDIENTE (MODELO DE BUCKLEY-LEVERETT).....	117
APENDICE C: EFECTO DE LA PRESION CAPILAR Y COMPRESIBILIDAD EN EL PROCESO DE DESPLAZAMIENTO.....	123

APENDICE D: GENERALIZACION DE LA TEORIA DE FLUJO FRACCIONAL A n FASES (COMPONENTES).....	134
APENDICE E: PROGRAMA Y RESULTADOS DEL EJEMPLO DE DOS VARIABLES DEPENDIENTES (FLUJO TRIFASICO).....	138

## RESUMEN

En los procesos de estudio de recuperación mejorada comunmente son empleados simuladores numéricos que utilizan gran capacidad de equipo técnico-humano, teniendo como consecuencia costos elevados en los proyectos. Una alternativa para resolver este problema es el uso de la teoría de Buckley-Leverett o teoría de avance frontal, la cual se basa en el concepto de flujo fraccional en medios porosos. Esta teoría se presenta en forma de ecuaciones diferenciales parciales las cuales se pueden resolver utilizando el método de las características.

El método de las características es un procedimiento de solución de ecuaciones diferenciales parciales pseudolineales parabólicas e hiperbólicas.

En el presente trabajo se describen los métodos mas comunes de recuperación mejorada de hidrocarburos, se presentan los tipos de desplazamiento de fluidos en medios porosos, además del desarrollo del método de las características para una y dos variables dependientes.

Adicionalmente se presenta la aplicación del método de las características a flujo bifásico y trifásico en una dimensión y la generalización de esta teoría a  $N$  componentes, despreciando efectos capilares.

Vo. Bo.

  
Dr. Luis Macías Chapa

# CAP. 1

## INTRODUCCION

Desde principios del siglo XX, el mundo ha demostrado cada vez mayor dependencia de los energéticos a fin de continuar con el dinamismo de la tecnología, el impulso de la maquinaria productiva, el transporte de pasajeros y de bienes de toda índole y la fabricación de materias primas, que permitan incrementar el nivel de vida de la sociedad.

Dentro de este contexto, la materia prima que ha regido a la historia durante este siglo, es sin duda alguna el petróleo, que abastece aproximadamente el 60 % de la energía que consume el mundo, y en las últimas décadas su utilización como materia prima para la elaboración de fibras, plásticos, fertilizantes, detergentes, pinturas, alimentos y un sinnúmero de otros productos ha cobrado una importancia creciente.

Como consecuencia de lo anterior, la demanda mundial de petróleo ha ido en constante incremento con la consecuente reducción de las reservas de hidrocarburos, haciéndose imprescindible la incorporación de volúmenes adicionales o la implantación de sistemas que permitan incrementar el porcentaje de recuperación de los yacimientos ya descubiertos, así las formas de incrementar las reservas son (ver Lake<sup>1</sup>).

- a):- Descubriendo nuevos campos.
- b):- Descubriendo nuevos yacimientos.
- c):- Extendiendo los yacimientos en los campos conocidos.
- d):- Redefiniendo las reservas por cambios económicos en la tecnología de extracción.

Lake<sup>1</sup> resume de un estudio hecho en los Estados Unidos, que la producción excede la adición de reservas, a menos que se descubran grandes yacimientos o grandes campos, la probabilidad de encontrar nuevos campos es declinante, en los últimos años, cada vez se perforan más pozos exploratorios para descubrir nuevos campos.

En la exploración y perforación de nuevas áreas, la recuperación de hidrocarburos por comportamiento primario del yacimiento es variable, dependiendo del mecanismo de empuje existente.

A continuación se muestran los rangos de variación de la recuperación como función del mecanismo primario de explotación<sup>2</sup>:

- a): Gas en solución, recuperación final de 5 a 25%.
- b): Empuje de casquete de gas, recuperación final de 20 a 40%.
- c): Yacimiento de empuje por agua, recuperación final de 40 a 70%.
- d): Yacimiento con segregación gravitacional, recuperación final menor al 70%.

Como se observa, la recuperación primaria de hidrocarburos varía de acuerdo al tipo de empuje existente en el yacimiento, y resulta evidente, que una gran cantidad de hidrocarburos se queda en el subsuelo. Por lo que, para satisfacer esa demanda creciente de petróleo no solo se realizan esfuerzos en la exploración y perforación de nuevas estructuras, sino también mejorando la eficiencia de producción de los yacimientos conocidos, cuya implantación requiere realizar minuciosos estudios del



comportamiento que exhibirán los fluidos inyectados cuando entran en contacto con los hidrocarburos dentro del medio poroso.

Con el objetivo de realizar los estudios de proyectos de Recuperación Mejorada de Hidrocarburos, actualmente se utilizan simuladores numéricos, dado que estos simuladores están basados en la solución de ecuaciones diferenciales, en 1981 Helferich<sup>3</sup> propuso un método alterno para los estudios de Recuperación Mejorada de Hidrocarburos, utilizando la técnica de solución de ecuaciones diferenciales parciales pseudolineales conocida como método de las características (se puede utilizar para sistemas lineales y para algunos sistemas no lineales). El método de las características aplicado a procesos de desplazamiento multifásico multicomponente en medios porosos también se le conoce como teoría de onda simple o teoría de coherencia. Esta teoría utiliza el concepto de flujo fraccional en medios porosos en forma de ecuaciones diferenciales parciales, las cuales describen el comportamiento de los fluidos en el yacimiento. Hasta ahora el desarrollo se ha efectuado para una sola dimensión.

La facilidad<sup>1</sup> que da el método de las características, es la visión del flujo a través del medio permeable como la propagación de una o más ondas, además de que conjuntado este método con el comportamiento de fase conduce al estudio de nuevas aplicaciones en proyectos de recuperación mejorada de hidrocarburos.

Con el objeto de sustentar bases para el entendimiento de procesos de recuperación mejorada y establecer la posición central de la teoría de flujo fraccional, se requiere contar con la herramienta matemática que nos permita el desarrollo de estudios de desplazamiento de fluidos para las diversas técnicas de recuperación mejorada de hidrocarburos, por lo que en este trabajo se desarrolló un modelo y programa de cómputo para efectuar tales estudios.

# CAP. 2

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 2.1 DEFINICION DE RECUPERACION MEJORADA DE HIDROCARBUROS ( RMH ).

L. W. Lake<sup>1</sup> define a la recuperación mejorada de hidrocarburos, como la obtenida por la inyección de fluidos y/o materiales normalmente no presentes en el yacimiento. Esta definición abarca todos los mecanismos existentes de empuje, ya sea por desplazamiento normal, desplazamiento cíclico o bien por algún tratamiento a los pozos, y cubre a los diferentes agentes utilizados en la recuperación de aceite. Esta definición no restringe a la RMH a una fase particular de la vida del yacimiento, recuperación primaria, secundaria o terciaria, definidos de la siguiente manera:

**Recuperación primaria de hidrocarburos:** Es la recuperación obtenida por mecanismos de empuje natural, tales como gas en solución, flujo de acuíferos al yacimiento, empuje por casquete de gas o drene gravitacional.

**Recuperación secundaria de hidrocarburos:** Es la recuperación obtenida por técnicas tales como inyección de agua o gas cuyos propósitos en parte son mantener la presión del yacimiento.

**Recuperación terciaria de hidrocarburos:** Es cualquier técnica aplicada después de la recuperación secundaria.

La definición de RMH excluye a los procesos de desplazamiento con agua, e intenta excluir a todos los procesos de mantenimiento de presión, algunas veces la distinción no es clara, ya que muchos procesos de mantenimiento de presión tienen carácter desplazante. También agentes como metano en un empuje de gas a alta presión, o de CO<sub>2</sub> en un yacimiento con CO<sub>2</sub> residente, no satisfacen la definición, pero en ambos, no se discute que son procesos de recuperación mejorada. Usualmente los casos de recuperación mejorada que caen fuera de la definición son claramente clasificados por el propósito del proceso.

## 2.2 METODOS DE RECUPERACION MEJORADA DE HIDROCARBUROS.

Todos los métodos de recuperación mejorada de hidrocarburos, caen dentro de tres diferentes categorías<sup>1</sup>: Métodos térmicos, métodos químicos y métodos con solventes, con algunas excepciones por ejemplo el desplazamiento con espuma que cae dentro de las tres categorías. Cada categoría puede ser dividida en procesos individuales, además se pueden clasificar los métodos de acuerdo al mecanismo principal de recuperación<sup>4</sup>, existen realmente tres mecanismos básicos:

Métodos que reducen la tensión interfacial entre el fluido desplazante y desplazado.

Métodos que extraen el aceite con algún solvente y.

Métodos que reducen la viscosidad del aceite o incrementan la viscosidad en el agua.

Para un mejor entendimiento de los procesos de recuperación mejorada de hidrocarburos, definiremos los siguientes términos:

**Movilidad de un fluido:** Se define como la razón de la permeabilidad relativa a dicho fluido entre la viscosidad del mismo, generalmente se expresa con la letra  $\lambda$ , por ejemplo:  $\lambda_o = k_{ro}/\mu_o$ .

**Relación de movilidades:** En procesos de recuperación mejorada se expresa como el cociente de la movilidad del fluido desplazado entre la movilidad del fluido desplazante, por ejemplo:  $\lambda_o/\lambda_g = (k_{ro} \mu_g) / (k_{rg} \mu_o)$ , donde el aceite es el fluido

desplazado y el gas es el fluido desplazante.

Razón de viscosidades: Es la viscosidad del fluido desplazado entre la viscosidad del fluido desplazante ( $\mu_o/\mu_g$ ), como se observa es un término que se encuentra en la relación de movilidades.

#### 2.2.1.-Recuperación térmica:

Estas técnicas se utilizan generalmente en yacimientos de aceites viscosos, teniendo como objetivo<sup>4</sup> mejorar el desplazamiento y las eficiencias de recuperación. El principio de funcionamiento de este proceso es la reducción de viscosidad en el aceite crudo que acompaña al incremento de temperatura ocasionado por la inyección de fluidos calientes, no solamente permite que el aceite fluya más libremente, sino también resulta en una razón más favorable de la movilidad. Los casos particulares a este método de recuperación son:

##### 2.2.1.1.- Desplazamiento con vapor (incluye el proceso de inyección de agua caliente).

Es un proceso similar al desplazamiento con agua. De todos los procesos de recuperación mejorada de hidrocarburos, actualmente el desplazamiento con vapor es el único rutinariamente usado con bases comerciales en los Estados Unidos<sup>4</sup>, el método se utiliza en yacimientos que tienen crudos de alta viscosidad que son difíciles de movilizar por otros métodos.

En el proceso de desplazamiento por vapor, el vapor se introduce<sup>4</sup> continuamente en los pozos inyectoros para reducir la viscosidad de aceites pesados y proveer fuerzas de empuje que muevan al aceite hacia los pozos productores, en proyectos de empuje por vapor, comunmente se utiliza 80% de vapor y 20% de

agua, o sea vapor de calidad 80%. Cuando el vapor se inyecta en el yacimiento, el calor se transfiere a los fluidos del yacimiento, parte a las capas adyacentes y a la matriz de la roca. Como resultado un porcentaje de vapor se condensa hasta obtener una mezcla de vapor y agua caliente fluyendo a través del yacimiento.

El desplazamiento con vapor puede trabajar empujando al agua y al aceite hasta formar un banco de aceite en el frente de la zona con vapor. Idealmente este banco de aceite permanece en el frente, incrementándose en volúmen hasta que es producido por los pozos productores. Sin embargo, en muchos casos el vapor fluye sobre el aceite y le transfiere calor por conducción. El aceite disminuye su viscosidad en la interface, y es llevado con el vapor hacia los pozos productores.

La capacidad de recuperación se incrementa a causa de que el vapor disminuye la viscosidad del aceite, y mejora su movilidad. Como se desplaza el aceite más móvil, la zona de vapor se expande verticalmente, y la interface vapor-aceite se mantiene. Este proceso es de intensa energía, ya que requiere el uso de una fracción significativa de la energía para la generación de vapor, del orden de 25 a 40% del petróleo producido.

Aunque el desplazamiento con vapor es comunmente usado con aceites de 10 a 25 °API, se ha aplicado también en aceites con densidades menores, y hay interés por utilizar este método en yacimientos de aceites ligeros. Los aceites de viscosidades menores de 20 cp usualmente no son candidatos para desplazamiento con vapor ya que el desplazamiento con agua resulta menos costoso y proporciona resultados similares, el rango normal es de 100 a 500 cp, se requiere una alta saturación de aceite en el yacimiento a causa del uso intensivo de energía en la generación de vapor.

Por otro lado para minimizar la cantidad de roca calentada y

maximizar la cantidad de aceite calentado, se requieren formaciones con porosidad alta, esto significa que las areniscas o arenas no consolidadas son los principales candidatos, aunque también es posible aplicarlo en carbonatos. Se recomienda como un parámetro de selección que el producto de la saturación de aceite con la porosidad sea mayor que 0.08.

La fracción de pérdida de calor en el estrato superior y en la base de la roca varía inversamente con el espesor del yacimiento, entonces, entre más grande sea el espesor del yacimiento, mayor será la eficiencia térmica. El desplazamiento con vapor es posible en formaciones delgadas si la permeabilidad es alta. Se prefieren permeabilidades altas (mayor que 200 md o preferiblemente mayor que 500 md), para permitir una inyectividad adecuada del vapor, la transmisibilidad podría ser mayor de 100 md-pie/cp a condiciones de yacimiento.

Las profundidades menores a 300 pies no podrían permitir buena inyectividad a causa de que las presiones requeridas pueden exceder los gradientes de fractura. Las pérdidas de calor llegan a ser importantes a profundidades mayores de 2500 pies, y el desplazamiento con vapor, no es frecuente a profundidades mayores de 5000 pies.

Existen también estimulaciones con vapor o inyecciones cíclicas de vapor<sup>5</sup>. En este proceso se inyecta vapor en un pozo productor. por periodos específicos de tiempo ( normalmente de dos a tres semanas), posteriormente el pozo se cierra por unos pocos días para permitir la disipación suficiente del calor y entonces se abre a producción. El calor del vapor inyectado, incrementa la temperatura del yacimiento, resultando en un incremento pronunciado en la movilidad de aceites pesados y un correspondiente mejoramiento en los gastos de producción. Otros beneficios positivos que pueden contribuir en la decisión de

utilizar estimulaciones con vapor son: Expansión térmica de los fluidos, compresión del gas en solución, baja saturación residual de aceite, efectos de limpieza en el pozo.

#### 2.2.1.2.- Desplazamiento por combustión in-situ.

Existen<sup>5</sup> fundamentalmente dos procesos de la combustión in-situ: Combustión hacia adelante y combustión en reversa.

En la combustión hacia adelante, el yacimiento es quemado en la vecindad de un pozo inyector de aire, y el frente de combustión se propaga más allá del pozo. La inyección continua de aire, controla la zona de combustión a través del yacimiento hasta cerca de los pozos productores vecinos.

El proceso de combustión en reversa, se comienza de la misma manera que la combustión hacia adelante, pero después de quemar una corta distancia del pozo de ignición, la inyección de aire se efectúa en los pozos adyacentes, ésto empuja al aceite hacia el pozo previamente quemado, mientras que el frente de ignición viaja en dirección opuesta, hacia los pozos adyacentes. El proceso fué desarrollado como un método para mejorar la recuperación en yacimientos que contienen crudos extremadamente pesados.

La teoría y práctica de la combustión in-situ es cubierta comprensivamente por Prats<sup>6</sup>.

La gran ventaja que tiene el desplazamiento con fuego viene del hecho de que usa el más barato y abundante de los fluidos de inyección que es el aire. Sin embargo, se queman cantidades significativas de combustible; tanto en la superficie para comprimir el aire como en el yacimiento en el proceso de combustión. Afortunadamente los componentes más pesados del crudo son los que se queman, ya que los ligeros son llevados hacia



adelante en el avance de la zona de combustión.

En general la combustión in-situ se aplica cuando las pérdidas de calor por desplazamiento con vapor son considerables. En otras palabras la combustión puede llevarse a cabo en yacimientos profundos y en secciones de arena delgadas y ligeras donde las pérdidas de calor por desplazamiento con vapor son excesivas. Se recomiendan profundidades mayores que 500 pies, aunque es factible en profundidades menores. El combustible y el consumo de aire disminuye cuando la gravedad del aceite se incrementa.

En resumen, si son favorables todos los criterios, el desplazamiento por combustión in-situ aparece como un método atractivo para yacimientos en los cuales no se puede producir por métodos usados para aceites ligeros. Sin embargo, el proceso es muy complicado, y se presentan muchos problemas prácticos, tales como corrosión, erosión en tuberías y razones de movilidad bajas comparados con el desplazamiento con vapor. Por lo tanto cuando las evaluaciones económicas<sup>6</sup> arrojan resultados similares, la inyección de vapor se prefiere a un empuje por combustión.

#### 2.2.2.- Recuperación con productos químicos.

Los métodos químicos de recuperación de aceite incluyen<sup>4</sup>: Polímeros, surfactante-polímero (sus variaciones son llamadas micellar-polímero, microemulsión, o desplazamiento con agua de baja tensión), y desplazamiento alcalino (o cáustico). Todos estos métodos incluyen mezcla de químicos (y algunas veces otras sustancias) en el agua previo a la inyección. Por lo tanto estos métodos requieren condiciones muy favorables para la inyección de agua: viscosidades de aceite de bajas a moderadas, y permeabilidades de moderadas a altas. De aquí que el desplazamiento químico es usado para aceites que son más viscosos (mayor de 2 cp) que aquellos aceites recuperados por métodos de

inyección de gas, pero menos viscosos (menor que 50 cp) que los aceites que pueden ser económicamente recuperados por métodos térmicos.

La permeabilidad del yacimiento para condiciones de desplazamiento químico necesita ser mayor (aprox. mayor que 20 md) que para métodos de inyección de gas, pero no tan alta como para métodos térmicos (los métodos térmicos necesitan permeabilidades mayores de 400 md). Ya que se inyecta normalmente fluidos de baja movilidad, se requiere una adecuada inyektividad. Si previamente se efectuó un desplazamiento con agua, entonces el desplazamiento químico respondería favorablemente desarrollando un banco de aceite. Generalmente no son candidatos idóneos las formaciones con empuje de agua activo para la aplicación de estos métodos a causa del potencial para las bajas saturaciones de aceite remanente, de la misma manera los yacimientos con capa de gas no son prospectos ya que el aceite movilizado puede resaturar la capa de gas.

Las formaciones con alto contenido de arcilla son indeseables puesto que la arcilla incrementa la absorción de los químicos inyectados. Se prefieren las salmueras del yacimiento de salinidad moderada con bajas cantidades de iones divalentes, debido a que concentraciones altas interactúan desfavorablemente con los químicos inyectados.

#### 2.2.2.1.- Desplazamiento por surfactante-polímero:

Este proceso<sup>5</sup> es conducido en dos pasos, primero la inyección de un bache de surfactante y después un bache con polímero para controlar la movilidad. Al bache de surfactante también se le conoce como solución micellar, microemulsión, aceite soluble y micelle inflado.

Como ejemplo de la variedad de volúmenes y concentraciones

utilizadas en este proceso, se cita lo siguiente: en algunos sistemas<sup>4</sup> se considera un bache pequeño ( mayor que 5% de volúmen poroso (VP)) con una concentración de surfactante normalmente de 5-10%. En muchos casos la microemulsión incluye surfactante, hidrocarburo, agua, un electrolito (sal), y un cosolvente (usualmente un alcohol), el propósito primario de este bache es reducir la tensión interfacial. Normalmente se usa un bache(30 - 50% VP) de agua adicionada con polimero para proveer un control de movilidad en el desplazamiento del surfactante y del banco aceite-agua hacia los pozos productores.

En la mayoría de los casos, se han usado los sulfonatos petrolíferos de bajo costo o mezclas con otros surfactantes. Se han propuesto también<sup>4</sup> concentraciones intermedias de surfactantes y sistemas de baja concentración (desplazamiento de agua de baja tensión). Los sistemas de menor concentración de surfactantes pueden o no contener polímeros en el bache surfactante, pero utilizarán un bache mayor (30-100% VP) de solución de polimero.

Se prefiere con relación a la viscosidad del aceite, menores a 30 cp, para que se obtenga un adecuado control de movilidad, el cual es esencial para este método, con el objeto de utilizar al máximo el potencial de los químicos que son de altos costos. También se prefieren areniscas a causa de que los yacimientos de carbonatos son heterogéneos, contienen salmueras con alto contenido de iones divalentes y causan absorción alta de surfactantes comunmente usados.

Para asegurar una inyectividad adecuada, la permeabilidad podría ser mayor de 20 md. La temperatura del yacimiento deberá ser menor de 175 °F para minimizar la degradación del surfactante. Se requiere generalmente de baja salinidad y dureza para la mayoría de los sistemas disponibles comercialmente. Obviamente, este método es muy complejo, caro y sujeto a un amplio rango de

problemas. El problema más importante es que el sistema provee reducción óptima en la tensión interfacial sobre un rango muy estrecho de salinidad.

En la práctica<sup>5</sup>, el sistema polímero-surfactante ha sido difícil de controlar y predecir en aplicaciones de campo reales. A causa de la reacción química continua y el cambio que ocurre con el movimiento del bache a través del yacimiento, las simulaciones de laboratorio, frecuentemente no representan las condiciones reales de campo. El proceso surfactante-polímero tiene excelente potencial pero se requieren realizar un mayor número de pruebas de campo.

#### 2.2.2.2.- Desplazamiento con polímeros:

La técnica<sup>5</sup> de desplazamiento con polímeros incluye la adición de un agente pesado (polímero) al agua inyectada para incrementar su viscosidad. Aunque la última saturación de aceite residual es esencialmente inafectada, con la adición de un polímero se obtienen dos beneficios: Reduce el volumen total de agua requerida hasta alcanzar la saturación residual de aceite, además de que incrementa la eficiencia de barrido debido al mejoramiento de la razón de movilidad.

Soluciones acuosas diluidas de polímeros solubles en el agua pueden reducir la movilidad del agua en un yacimiento<sup>4</sup>. Las policriamidas hidrolizadas parcialmente (PAMH) y polímeros de goma de xanthan, ambos reducen la movilidad incrementando la viscosidad. Además las PAMH pueden alterar las rutas de flujo reduciendo la permeabilidad de la formación al agua. La reducción obtenida con las PAMH puede caer permanentemente mientras que la permeabilidad al aceite puede permanecer relativamente invariable. El desplazamiento con polímeros es visto como un mejoramiento de la técnica de desplazamiento con agua, ya que ésta, ordinariamente

no recupera aceite residual que ha sido atrapado y aislado por el agua. Sin embargo, el desplazamiento con polímero puede producir aceite adicional con respecto al obtenido por desplazamiento con agua por mejoramiento de la eficiencia de desplazamiento e incremento del volumen contactado en el yacimiento. El aceite recuperado a un límite económico dado puede ser de 4-10% mayor con un desplazamiento de movilidad controlada que con agua.

Un tamaño apropiado de tratamiento con polímeros puede requerir de la inyección de un mínimo de 15-25% del volumen poroso de yacimiento; las concentraciones de polímeros puede normalmente variar de 250-2000 mg/L. Las variaciones en el uso de polímeros en el desplazamiento con agua incluyen varios métodos de polímeros de gel para cambiar el flujo de agua en yacimientos con permeabilidad estratificada o sistemas de fractura menor.

Ya que el objetivo del desplazamiento con polímeros es mejorar la razón de movilidad sin necesariamente hacer la razón favorable, la máxima viscosidad de aceite para este método es de 100 ó posiblemente 150 cp. Si las viscosidades del aceite son muy altas, se requieren concentraciones altas de polímero para obtener el control de movilidad deseado, y entonces los métodos térmicos pueden ser más atractivos.

Como discutimos anteriormente, el desplazamiento con polímeros ordinariamente no movilizará al aceite que ha sido completamente atrapado por el agua, debido a esto se desea una saturación de aceite móvil de más del 10% . De hecho, un desplazamiento con polímero es normalmente más efectivo cuando se comienza a bajas razones de producción agua-aceite. Aunque se prefieren los yacimientos de arenisca, también se puede aplicar en carbonatos.

Los polímeros de pesos moleculares menores pueden ser utilizados en yacimientos con permeabilidades tan bajas como 10 md (y en

algunos carbonatos, 3 md). Mientras es posible fabricar polímeros de peso molecular menor para inyectar en formaciones de baja permeabilidad, la cantidad de viscosidad generada por libra de polímero podría no ser suficiente para hacer tales productos de interés. Con polímeros comunes, las temperaturas de yacimiento deberán ser menores de 200°F para minimizar la degradación; este requerimiento limita las profundidades a alrededor de 9000 pies. Un problema potencial serio con el desplazamiento polimérico es la disminución de inyectividad debido al incremento en la viscosidad del fluido inyectado. Si la disminución de inyectividad se prolonga, los gastos de producción de aceite y los costos de producción pueden afectar sensiblemente la factibilidad del proyecto. Los gastos de inyección para soluciones poliméricas pueden ser de solamente 40-60% de aquellas que utilizan únicamente agua, y la inyectividad reducida puede aumentar los costos totales del proyecto.

#### 2.2.2.3.- Desplazamiento alcalino o cáustico:

El desplazamiento cáustico<sup>5</sup> o alcalino, es un proceso en el cual el PH del agua inyectada, se controla a un valor de 12 a 13, para mejorar la recuperación de un desplazamiento con agua ordinario.

Existen desplazamientos con agua que pueden fácilmente convertirse a desplazamiento cáustico añadiéndole de 1 al 5 % en peso de NaOH. El desplazamiento alcalino<sup>4</sup> o cáustico consiste de inyectar soluciones acuosas de hidróxido de sodio, carbonato de sodio, silicato de sodio o hidróxido de potasio. Los químicos alcalinos reaccionan con ácidos orgánicos en ciertos aceites crudos para producir surfactantes in-situ que bajan la tensión interfacial entre el agua y el aceite. Los agentes alcalinos también reaccionan con la superficie de la roca del yacimiento para alterar la mojabilidad, ya sea de mojada por aceite a mojada por agua o viceversa. Otros mecanismos involucrados son la

emulsificación y arrastre del aceite o emulsificación y entrapamiento del aceite para ayudar al control de movilidad.

Los tamaños de baches de la solución alcalina es frecuentemente 10-15% VP; las concentraciones de los químicos alcalinos son normalmente 0.2 - 5%. En pruebas recientes se están usando volúmenes grandes con concentraciones relativamente altas. Una inyección inicial de agua fresca o suave frecuentemente precede al bache alcalino, y un fluido de empuje (ya sea agua o agua engrosada con polímero) sigue al bache alcalino.

Los aceites de gravedad entre 13 y 35 °API son normalmente los objetivos para desplazamiento alcalino. Estos aceites son lo suficientemente pesados para contener los ácidos orgánicos, pero suficientemente ligeros para permitir algún grado de control de movilidad.

Los límites superiores de viscosidad (menores que 200 cp) son ligeramente más altos que para desplazamiento polimérico. Se necesita alguna saturación de aceite móvil, entre más grande mejor.

El mínimo promedio de permeabilidad es alrededor de la misma que para surfactante-polímero (mayor que 20 md).

Se prefieren Los yacimientos de arenisca ya que los carbonatos frecuentemente contienen anhidrita o yeso los cuales reaccionan y consumen los químicos alcalinos.

Los materiales alcalinos también son consumidos por arcillas, minerales o sílices; este consumo es mayor a temperaturas elevadas, por lo tanto se desea como máxima temperatura, 200 °F.

El consumo cáustico en proyectos de campo ha sido mayor que el

indicado en pruebas de laboratorio. Otro problema potencial en aplicaciones de campo es la formación de escamas las cuales pueden resultar en taponamiento de los pozos productores.

### 2.2.3.- Recuperación con solventes.

#### 2.2.3.1.- Desplazamiento con hidrocarburos miscibles:

Este proceso<sup>5</sup> incluye la introducción de un fluido (solvente), que disolverá completamente al aceite del yacimiento, eliminando las fuerzas que causan la retención de aceite en la matriz de la roca, y barre la mezcla solvente-aceite hacia el pozo productor. Este solvente puede ser alcohol, hidrocarburos refinados, gases de hidrocarburos condensados, dióxido de carbono, gases del petróleo condensado ó gases exaustos.

Primero se inyecta un bache de solvente (miscible con el aceite del yacimiento). Se sigue con la inyección de un liquido o gas para forzar la mezcla solvente-aceite hacia los pozos productores. Desafortunadamente el bache miscible de solvente llega concentrado con el aceite conforme se mueve a través del yacimiento, cambiando su composición y disminuyendo su capacidad para disolver aceite, como resultado las recuperaciones teóricas nunca se obtienen.

La inyección de gas es ciertamente uno de los métodos más viejos<sup>4</sup> utilizados por los ingenieros para mejorar la recuperación, y su uso se ha incrementado recientemente, aunque la mayoría de la nueva expansión ha venido de los gases no hidrocarburos. A causa del creciente interés del CO<sub>2</sub> y N<sub>2</sub> o de los métodos de gas de combustión, se han separado de las técnicas de hidrocarburos miscibles, aunque frecuentemente se contemplan como proyectos de gas miscible.

El desplazamiento con hidrocarburos miscibles puede además



subdividirse en tres métodos distintos: Empuje por baches de LPG o desplazamiento solvente, empuje de gas enriquecido (condensado) y empuje de gas a alta presión (gas vaporizante). Se necesita en estos problemas un rango de presiones apropiado (por lo tanto profundidades) para obtener miscibilidad. Así, se requiere de una profundidad mínima para cada uno de los procesos. La permeabilidad no es crítica si la estructura es relativamente uniforme, ésta, varía de 0.1 a 25800 md. Las características del aceite crudo son muy importantes. Un aceite de densidad alta, viscosidad baja con un alto porcentaje de intermedios (C<sub>2</sub> a C<sub>7</sub>) es esencial si la miscibilidad se obtiene con los empujes de gas vaporizante.

Con excepción de aquellos yacimientos de características favorables, son comunes surgimientos tempranos y traspaso de grandes cantidades de aceite. Los hidrocarburos necesarios para el proceso son importantes, y existe creciente oposición para inyectarlos nuevamente al subsuelo cuando se desconoce acerca del porcentaje que se recuperará. Por lo tanto en años recientes el énfasis ha ido cambiando a gases no hidrocarburos de menor valor tales como CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> y gases de combustión. Aunque el N<sub>2</sub> y los gases de combustión no recuperan aceite tan eficientemente como los gases hidrocarburos (o líquidos), su economía resulta más favorable.

#### 2.2.3.2.- Desplazamiento con CO<sub>2</sub> miscible.

El mecanismo<sup>5</sup> para obtener miscibilidad entre CO<sub>2</sub> y el aceite, es similar al mecanismo de gas a alta presión para desplazamiento miscible de hidrocarburos con gas natural. Aunque el CO<sub>2</sub> no es miscible con el aceite del yacimiento, al ponerse en contacto, este crea un frente de desplazamiento miscible con las condiciones correctas de presión, temperatura y composición del aceite, bajo estas condiciones, el gas extraerá hidrocarburos pesados del aceite y se concentrará en un frente de desplazamiento, así el CO<sub>2</sub>

y el aceite llegan a ser miscibles, formando una sola fase líquida y barriendo eficientemente el aceite hacia los pozos productores.

El CO<sub>2</sub> es efectivo para la recuperación de aceite por un número de razones<sup>4</sup>. En general el CO<sub>2</sub> es muy soluble en el aceite crudo a presiones de yacimiento; por lo tanto, llena los espacios dejados por el aceite y reduce su viscosidad antes que la miscibilidad se obtenga por el mecanismo de empuje del gas vaporizante. Como se alcanza la miscibilidad, ambas, fases de aceite y CO<sub>2</sub> (la cual contiene muchos de los hidrocarburos de componentes intermedios) fluyen juntos a causa de la baja tensión interfacial y el incremento relativo en los volúmenes totales del combinado CO<sub>2</sub> y la fase de aceite. Sin embargo, la generación de miscibilidad entre aceite y CO<sub>2</sub> es todavía el mecanismo más importante, y ocurrirá en sistemas aceite-CO<sub>2</sub> tan bien como suficiente sea la presión. Esta presión es llamada, presión mínima de miscibilidad (PMM), por lo cual, se ha investigado en el laboratorio y es bien conocida.

La presión requerida debe ser suficientemente alta para obtener una densidad mínima en la fase CO<sub>2</sub>. A esta densidad mínima (varía con la composición del aceite), el CO<sub>2</sub> llega a ser un buen solvente para el aceite, especialmente en los hidrocarburos intermedios, y la miscibilidad requerida puede ser generada o desarrollada para proveer el desplazamiento eficiente normalmente observado con el CO<sub>2</sub>. Por lo tanto a temperaturas mayores, las presiones mayores son necesarias solamente para incrementar la densidad del CO<sub>2</sub> del valor observado a la PMM a la temperatura menor.

A causa de la presión mínima requerida, la profundidad es un criterio importante, y el desplazamiento con CO<sub>2</sub> es normalmente en yacimientos que tienen más de 2000 pies de profundidad. La composición del aceite es también importante, y la densidad API

requerida es mayor que 30°. Se puede utilizar también la inyección de CO<sub>2</sub> como desplazamiento inmiscible.

Aunque el mecanismo para el desplazamiento con CO<sub>2</sub>, parece ser el mismo que para el desplazamiento con hidrocarburos miscibles, el desplazamiento con CO<sub>2</sub> es capaz de generar mejores recuperaciones, si el sistema está arriba de su presión de miscibilidad. Comparando con los hidrocarburos, el CO<sub>2</sub> tiene una mayor solubilidad en el agua, el CO<sub>2</sub> se difunde a través de la fase de agua, hinchándose y traspasando al aceite hasta que es móvil. Así, no solamente son el tipo de aceite y el criterio de profundidad fáciles de encontrar en el desplazamiento con CO<sub>2</sub>, pero la recuperación final puede ser mayor que con hidrocarburos miscibles cuando se esta arriba de la PMM, lo anterior ha sido parcialmente comprobado.

#### 2.2.3.3.- Desplazamiento con gas inerte (N<sub>2</sub>) y gases de combustión.

El N<sub>2</sub> y gases de combustión<sup>4</sup> (alrededor de 87% de N<sub>2</sub> y 12% de CO<sub>2</sub>) Se usa en lugar de los gases hidrocarburos a causa de su economía. El nitrógeno también compite con el CO<sub>2</sub> en algunas situaciones por la misma razón, el N<sub>2</sub> se prefiere no solamente por su bajo costo, sino también a causa de su mucha menor compresibilidad, para una cantidad dada a condiciones estándar, el N<sub>2</sub> ocupará mucho más espacio a presiones de yacimiento que el CO<sub>2</sub> o el metano a las mismas condiciones. Sin embargo, ambos, el N<sub>2</sub> y los gases de combustión son inferiores a los gases hidrocarburos (y mucho inferiores al CO<sub>2</sub>) desde un punto de vista de recuperación de aceite.

El N<sub>2</sub> tiene una menor viscosidad, baja solubilidad en el aceite y requiere mucho mayor presión para generar o desarrollar miscibilidad. El incremento en la presión requerida es

significante comparada al metano y muy grande (4-5 veces) cuando se compara al CO<sub>2</sub>. Por lo tanto el N<sub>2</sub> no reducirá la eficiencia de desplazamiento cuando se usa como un gas de inyección posterior al bache de metano, pero puede causar una caída significativa en la efectividad de un desplazamiento con CO<sub>2</sub> si las presiones de yacimiento son igualadas a los requerimientos de miscibilidad para el desplazamiento con CO<sub>2</sub>. Desde luego el metano se cuenta como un desplazante deseable final o intermedio en el desplazamiento con N<sub>2</sub>, pero el metano es bastante peligroso para la obtención de miscibilidad en el desplazamiento con CO<sub>2</sub> a presiones modestas.

Los criterios para el desplazamiento con N<sub>2</sub> o gases de combustión, son similares a aquellos de empuje de gas a alta presión. Se requiere mayor presión y por lo tanto profundidad, así como la necesidad de aceites muy ligeros, si se realiza la miscibilidad completa en el yacimiento. El método del N<sub>2</sub>, los gases de combustión y el desplazamiento con CO<sub>2</sub>, están colocados entre hidrocarburos miscibles, pero los procesos pueden también recuperar aceite del modo inmisible. El desplazamiento por N<sub>2</sub> o gases de combustión puede ser económico, debido a que parte del yacimiento se llena con gas de bajo costo.

### 2.3.- TIPOS DE DESPLAZAMIENTO EN UN PROCESO DE RECUPERACION MEJORADA DE HIDROCARBUROS.

En todos los metodos de RMH vistos anteriormente, el fluido desplazante empuja al fluido desplazado creando un frente de desplazamiento, el cual es de tipo inmisible o miscible.

#### 2.3.1.- Desplazamiento inmisible:

El desplazamiento de tipo inmisible surge cuando no existe una zona de transición entre el fluido desplazante y desplazado, o más bién no hay miscibilidad entre ambos en el frente de desplazamiento. En la fig. 2.1a se presenta esquemáticamente este tipo de desplazamiento, existen básicamente dos aspectos<sup>7</sup> que es necesario resaltar. Primero: La saturación de los fluidos del yacimiento, a medida que avanza el frente de desplazamiento, disminuye continuamente hasta que se alcanza la saturación residual, una vez alcanzado este valor de saturación, no existe ningún cambio de saturación posterior. Segundo: La composición de los fluidos no desplazados es esencialmente la misma que la composición de los fluidos presentes en el yacimiento al inicio del proceso. Existe la misma composición de gas, componentes intermedios y pesados en el aceite residual como los fluidos del yacimiento que están mas allá del frente de desplazamiento.

#### 2.3.2.- Desplazamiento miscible:

El desplazamiento miscible se presenta cuando existe una zona de transición en el frente de desplazamiento, esta zona de transición se debe a que se presentan las condiciones de miscibilidad entre los fluidos desplazantes y desplazado. En la fig. 2.1b se presenta

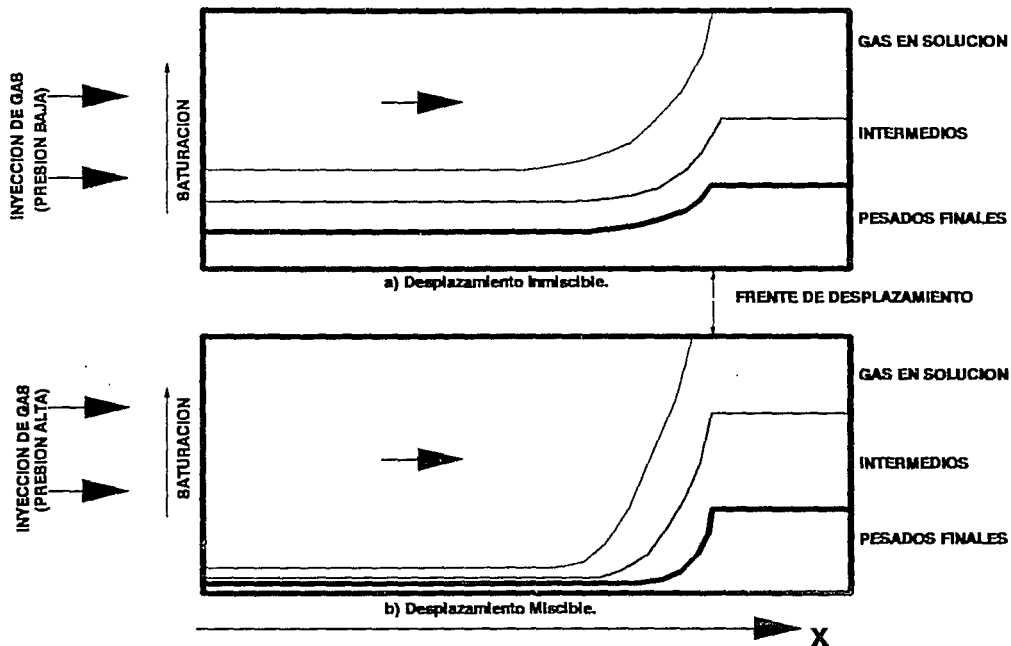


Fig. 2.1: Comparación del desplazamiento Miscible con el Inmiscible (SLOBOD-KOCH).

esquemáticamente este proceso. Se debe notar que<sup>7</sup> la saturación de los fluidos del yacimiento no desplazados, atrás del frente de desplazamiento, disminuye mucho más rápidamente que el caso de desplazamiento inmisible. Esta acción es el resultado de la disminución de la razón de viscosidad (visc. de fluidos de yacimiento / visc. de fluido desplazante). Esta razón disminuye mayormente a causa de que el gas llega a ser más viscoso y consecuentemente es un mejor agente desplazante. El aceite en el frente de desplazamiento, también disuelve algo de gas, lo cual disminuye su viscosidad. El diagrama también muestra que atrás del frente, el aceite no desplazado, se está continuamente enriqueciendo de componentes intermedios, como resultado de este intercambio, resulta una disminución de la saturación, este proceso continúa por alguna distancia atrás del frente, hasta que esencialmente todos los intermedios son llevados, y lo que se queda del aceite son los componentes pesados.

Existen algunas ventajas del desplazamiento miscible sobre el inmisible, ya que en el primero se presenta un desplazamiento más eficiente en el frente a causa de la mejor razón de viscosidad.

El enriquecimiento de componentes intermedios, un poco más allá del frente de desplazamiento, causa que más aceite fluya y deje una menor cantidad de los fluidos originales.

Finalmente existe un encogimiento del aceite no desplazado, debido al cambio de componentes intermedios al fluido desplazante.

## 2.4.- MODELOS EXISTENTES PARA SIMULAR LOS TIPOS DE DESPLAZAMIENTO.

En el estudio de los problemas de recuperación mejorada de hidrocarburos, se utilizan generalmente los simuladores numéricos.

Las ventajas principales de los simuladores numéricos son:

- Resultan útiles en la planeación definitiva de los proyectos de RMH.
- Utiliza información a detalle como se desee (heterogeneidades de formación, porosidad y permeabilidad).

Las desventajas de los simuladores numéricos son:

- Alto costo de renta (mayor a 10,000 dólares por mes).
- Grandes tiempos de computadora (generalmente tiempo de CPU mayor a 8 hrs.).
- Se necesitan especialistas en el manejo de simuladores.
- Es difícil manejarlos en campo, debido a que necesita equipo de computo y personal especializado.

La teoría de Buckley-Leverett (teoría de avance frontal) es un modelo analítico para resolver este tipo de problemas, aunque está limitada al manejo de únicamente dos fases. La teoría y aplicación presentada en este trabajo, es una generalización de la teoría de Buckley-Leverett para más de dos fases y una dimensión. El desarrollo está enfocado a desplazamientos del tipo inmisible, aunque conjuntado con los modelos de comportamiento de fase tiene un gran alcance en procesos miscibles. Por lo tanto resulta sumamente importante fincar las bases para estudios posteriores con esta herramienta.



Las principales ventajas de la teoría de avance frontal son:

- El tiempo de computadora es sumamente pequeño (5-8 minutos en computadoras personales<sup>8</sup> (PC)).
- Los resultados son similares comparado con simuladores numéricos.
- Es práctico en el campo, debido a que no se necesitan especialistas para su manejo.
- A medida que se incrementa la distancia entre pozos, funciona mejor la teoría de avance frontal.
- En un proyecto desarrollado, es mejor el seguimiento del mismo con la teoría de avance frontal, debido a su simplicidad.

Las principales desventajas de la teoría de avance frontal son:

- No es adecuada en la planeación de proyectos de Recuperación Mejorada.
- Toma propiedades promedio del yacimiento en estudio<sup>8</sup>.
- Desprecia los efectos capilares y la compresibilidad de los fluidos.
- Probablemente en procesos de desplazamiento con polímeros exista variación en los resultados, por el hecho de que aumenta la presión capilar.
- El desarrollo de la teoría actualmente es para una dimensión.

# CAP. 3

## DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO

Del desarrollo de la teoría de flujo fraccional en una dimensión surgen ecuaciones diferenciales parciales (EDPs), las cuales tienen como variables dependientes a la saturación ( $S$ ) y como variables independientes a la distancia ( $x$ ) y al tiempo ( $t$ ), (ver ecuaciones (4.17), (5.14) y (5.15)), estas EDPs pueden ser resueltas utilizando el método de las características.

Se presenta inicialmente (sección 3.1) el método de las características en forma general para una variable dependiente  $u$ , y posteriormente para dos variables dependientes  $u$  y  $v$  (sección 3.2). En ambos casos, las variables independientes son  $x$  y  $t$ . Tanto las variables dependientes como independientes serán substituidas posteriormente por las variables de interés en los procesos de recuperación mejorada de hidrocarburos.

### 3.1.- METODO DE LAS CARACTERISTICAS.

El método de las características<sup>9</sup> transforma ecuaciones diferenciales parciales (EDP) a ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), como también lo puede ser el método de separación de variables. El objetivo del método de las

características<sup>1</sup> es encontrar una transformación de las EDPs, tal que sobre líneas formadas en el plano de las variables independientes  $(x,t)$ , las EDPs transformadas contengan solamente derivadas ordinarias, y por lo tanto se puedan integrar fácilmente. Estas líneas son llamadas las características del problema. En ecuaciones lineales dependen las características de los coeficientes y en problemas no lineales dependen de la solución misma, por lo tanto deben generarse conjuntamente con la solución.

### 3.2.- METODO CON UNA VARIABLE DEPENDIENTE.

Una ecuación diferencial parcial con una variable dependiente<sup>10</sup>, se representa por:

$$A u_x + B u_t = C$$

O bien:

$$A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial t} = C \quad (3.1)$$

Donde los coeficientes A, B y C son función de x, t y u, pero no son función de  $\partial u/\partial x$  y de  $\partial u/\partial t$ .

La derivada total de u, está representada por:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad (3.2)$$

De (3.1), podemos despejar  $\partial u/\partial x$ , y obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{C - B \partial u/\partial t}{A}$$

Substituyendo en (3.2):

$$du = \frac{C - B \partial u/\partial t}{A} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

Multiplicando por A:

$$- A du + \left\{ C - B \frac{\partial u}{\partial t} \right\} dx + A \frac{\partial u}{\partial t} dt = 0$$

Desarrollando el segundo término:

$$-A \, du + C \, dx - B \frac{\partial u}{\partial t} \, dx + A \frac{\partial u}{\partial t} \, dt = 0$$

Agrupando términos:

$$(C \, dx - A \, du) + (A \, dt - B \, dx) \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (3.3)$$

Esta ecuación es independiente de  $\partial u / \partial x$ , para que sea independiente de  $\partial u / \partial t$  tenemos que:

$$A \, dt - B \, dx = 0 \quad (3.4)$$

Substituyendo en (3.3):

$$C \, dx - A \, du = 0 \quad (3.5)$$

La ecuación (3.4) es una ecuación diferencial para las curvas características. La ecuación (3.5) es una ecuación diferencial para los valores solución de nuestra variable dependiente  $u$ , en las curvas características generadas por la ecuación (3.4).

De (3.4) y (3.5):

$$\frac{dx}{A} = \frac{dt}{B} = \frac{du}{C} \quad (3.6)$$

Las ecs. (3.4) y (3.5) son ecuaciones diferenciales ordinarias que se pueden resolver por integración simultánea, y la ec. (3.6) representa la base del método de las características para una ecuación con una variable dependiente  $u$ .

Ahora supongamos que tenemos las condiciones iniciales:

$$u(0, x_1) = u_1 \quad (3.7)$$

Y las condiciones de frontera:

$$u(t_j, 0) = u_j \quad (3.8)$$

Además de que el coeficiente  $C$  de la ec. (3.1) es cero, (ver la

fig. (3.1)).

Integrando los dos primeros términos de la ecuación (3.6):

$$\int \frac{dx}{A} = \int \frac{dt}{B}$$

Resulta:

$$\frac{x}{A} = \frac{t}{B} + \text{cte} \quad (3.9)$$

Para obtener el valor de la constante, se utilizan las condiciones de frontera e iniciales. Substituyendo las condiciones iniciales (3.7) en (3.9):

$$\frac{x_1}{A} = \text{cte.} \quad (3.10)$$

Substituyendo las condiciones de frontera (3.8) en (3.9):

$$0 = \frac{t_j}{B} + \text{cte, por lo tanto:} \\ \text{cte} = - \frac{t_j}{B} \quad (3.11)$$

La ec. (3.10) en (3.9):

$$\frac{x}{A} = \frac{t}{B} + \frac{x_1}{A}, \text{ o bien:} \\ x = \frac{A}{B} t + x_1 \quad (3.12)$$

La ec. (3.11) en (3.9):

$$\frac{x}{A} = \frac{t}{B} - \frac{t_j}{B}, \text{ o bien:} \\ x = \frac{A}{B} t - \frac{A}{B} t_j \quad (3.13)$$

Para la obtención de los valores de  $u$ , de la ec. (3.6) despejamos

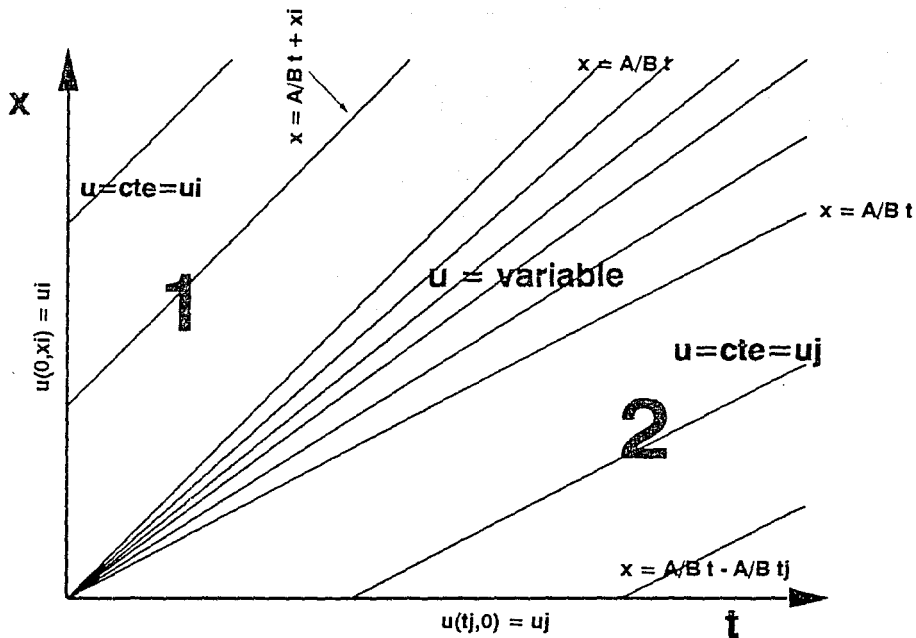


Fig. 3.1: Grafica que muestra las rectas características para la variable dependiente  $u$  (ENHANCED OIL RECOVERY, L. W. LAKE)

du:

$$du = \frac{C}{A} dx = \frac{C}{B} dt, \text{ como } C = 0, \text{ entonces:}$$

$$du = 0 \quad (3.14)$$

Se observa en esta ecuación que los valores de  $u$  son constantes a lo largo de las rectas características debido a que la derivada de  $u$  es cero:

Las rectas representadas por la ec. (3.12), para diferentes valores de  $x_1$ , se observan en la fig. (3.1), éstas, son las paralelas de la región 1. Recordando que  $A$  y  $B$  son función de  $x$ ,  $t$  y  $u$ , más adelante veremos que  $u$  es constante en esta región, de este modo,  $A$  y  $B$  son función únicamente de las condiciones iniciales, como las condiciones iniciales son constantes, entonces la pendiente de la ec. (3.12) es constante en esta región, y las rectas son paralelas, variando en posición únicamente por la ordenada al origen  $x_1$ . De la misma manera las rectas representadas por la ec. (3.13) (región 2), donde  $A$  y  $B$  son función de las condiciones de frontera, la pendiente de la recta en la ec. (3.13) también es constante en esta región, y las rectas son paralelas.

De la ec. (3.12), cuando  $x_1$  es cero:

$$x = \frac{A}{B} t \quad (3.15)$$

Esta recta es la que separa la región 1 con la región en forma de abanico en la fig. (3.1). De la ec. (3.13) cuando  $t_1$  es cero:

$$x = \frac{A}{B} t \quad (3.16)$$

Esta recta es la que separa la región de abanico con la región 2 en la fig. (3.1).



Tomando en cuenta que la ecuación (3.14) define a  $u$  como constante para cada recta característica, y debido a que las características que se encuentran en la región 1 cruzan el eje  $x$ , donde el valor de  $u$  está definido por las condiciones iniciales (3.7), así, los valores de  $u$  para estas rectas características son  $u_i$  (condición inicial), entonces en toda la región 1,  $u$  es constante, y se le llama región de estado constante.

De la observación anterior, sucede lo mismo con la región 2 de la figura 3.1, en este caso las rectas características cruzan el eje  $t$ , donde está definida la condición de frontera  $u = u_j$ , a cada recta característica le corresponde un valor  $u_j$ , entonces en toda la región 2,  $u$  es constante y también es una región de estado constante.

Las ecs. (3.15) y (3.16) forman una región de abanico entre ellas (fig. 3.1), donde todas las rectas posibles tienen pendientes diferentes, las cuales varían de un máximo de  $A/B$  definido por la pendiente de la recta (3.15), a un mínimo de  $A/B$  dado por la pendiente de la recta (3.16), debido a que  $u$  es constante para cada recta característica (ec. (3.14)), en esta región  $u$  es diferente para cada característica, a esta región en forma de abanico se le llama onda, onda simple u onda coherente<sup>1</sup>.

### 3.3.- METODO CON DOS VARIABLES DEPENDIENTES.

En el caso anterior se tenía la variable dependiente  $u$  con las variables independientes  $x$  y  $t$ . En este caso tendremos dos variables dependientes  $u$  y  $v$ , con las mismas variables independientes  $x$  y  $t$ .

Consideremos dos operadores  $L_1$  y  $L_2$  linealmente dependientes<sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} L_1(u, v) &= A_1 u_t + B_1 u_x + C_1 v_t + D_1 v_x + E_1 = 0 \\ L_2(u, v) &= A_2 u_t + B_2 u_x + C_2 v_t + D_2 v_x + E_2 = 0 \end{aligned} \right\} (3.17)$$

Donde:

$$u_t = \partial u / \partial t$$

$$u_x = \partial u / \partial x$$

$$v_t = \partial v / \partial t$$

$$v_x = \partial v / \partial x$$

Se puede expresar un operador  $L$ :

$$L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$$

Entonces:

$$\left. \begin{aligned} L = & \lambda_1 A_1 u_t + \lambda_1 B_1 u_x + \lambda_1 C_1 v_t + \lambda_1 D_1 v_x + \lambda_1 E_1 \\ & + \lambda_2 A_2 u_t + \lambda_2 B_2 u_x + \lambda_2 C_2 v_t + \lambda_2 D_2 v_x + \lambda_2 E_2 \end{aligned} \right\} (3.18)$$

La ec. (3.18), es una ec. diferencial con dos variables dependientes  $u$  y  $v$ , los coeficientes  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, A_2, B_2, C_2, D_2$  y  $E_2$ , son función de  $x, t, u$  y  $v$ , pero no son función de

$u_t, u_x, v_t$  y  $v_x$ , la ec. (3.18) es equivalente a:

$$\lambda_1 A_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_1 B_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_1 C_1 \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda_1 D_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda_1 E_1 +$$

$$\lambda_2 A_2 \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_2 B_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2 C_2 \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda_2 D_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda_2 E_2 = 0$$

Si definimos:

$$\left. \begin{aligned} A\lambda &= A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2, \\ B\lambda &= B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2, \\ C\lambda &= C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2, \text{ y} \\ D\lambda &= D_1 \lambda_1 + D_2 \lambda_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

La ecuación (3.18) queda:

$$A\lambda u_t + B\lambda u_x + C\lambda v_t + D\lambda v_x + E\lambda = 0 \quad (3.20)$$

Despejando  $u_t, v_t, u_x$  y  $v_x$ :

$$u_t = \frac{-B\lambda u_x - C\lambda v_t - D\lambda v_x - E\lambda}{A\lambda} \quad (3.21)$$

$$v_t = \frac{-D\lambda v_x - E\lambda - A\lambda u_t - B\lambda u_x}{C\lambda} \quad (3.22)$$

$$u_x = \frac{-A\lambda u_t - C\lambda v_t - D\lambda v_x - E\lambda}{B\lambda} \quad (3.23)$$

$$v_x = \frac{-A\lambda u_t - B\lambda u_x - C\lambda v_t - E\lambda}{D\lambda} \quad (3.24)$$

Las derivadas totales de  $u$  y  $v$  pueden expresarse:

$$du = u_t dt + u_x dx \quad (3.25)$$

$$dv = v_t dt + v_x dx \quad (3.26)$$

Substituyendo la ec. (3.21) en (3.25):

$$du = \frac{-B\lambda u_x - C\lambda v_t - D\lambda v_x - E\lambda}{A\lambda} dt + u_x dx$$

O bien:

$$A\lambda du = -B\lambda u_x dt - C\lambda v_t dt - D\lambda v_x dt - E\lambda dt + A\lambda u_x dx$$

Pasando el término del lado derecho al lado izquierdo, y agrupando términos:

$$(B\lambda dt - A\lambda dx) u_x + (A\lambda du + C\lambda v_t dt + D\lambda v_x dt + E\lambda dt) = 0 \quad (3.27)$$

Esta ec. es independiente de  $u_t$ , para que sea independiente de  $u_x$ , el término:

$$B\lambda dt - A\lambda dx = 0 \quad (3.28)$$

Substituyendo en la ec. (3.27):

$$A\lambda du + C\lambda v_t dt + D\lambda v_x dt + E\lambda dt = 0 \quad (3.29)$$

Substituyendo la ec. (3.22) en la ec. (3.26):

$$dv = \frac{-D\lambda v_x - E\lambda - A\lambda u_t - B\lambda u_x}{C\lambda} dt + v_x dx$$

O bien:

$$C\lambda dv = -D\lambda v_x dt - E\lambda dt - A\lambda u_t dt - B\lambda u_x dt + C\lambda v_x dx$$

Pasando el término del lado derecho al izquierdo, y agrupando términos:

$$(D\lambda dt - C\lambda dx) v_x + (C\lambda dv + E\lambda dt + A\lambda u_t dt + B\lambda u_x dt) = 0 \quad (3.30)$$

Esta ec. es independiente de  $v_t$ , para que sea independiente de  $v_x$ :

$$C\lambda dx - D\lambda dt = 0 \quad (3.31)$$

Substituyendo en la ec. (3.30):

$$C\lambda dv + E\lambda dt + A\lambda u_t dt + B\lambda u_x dt = 0 \quad (3.32)$$

Substituyendo la ec. (3.23) en (3.25):

$$du = u_t dt + \frac{-A\lambda u_t - C\lambda v_t - D\lambda v_x - E\lambda}{B\lambda} dx$$

O bien:

$$B\lambda du = B\lambda u_t dt - A\lambda u_t dx - C\lambda v_t dx - D\lambda v_x dx - E\lambda dx$$

Pasando el término del lado derecho al lado izquierdo y agrupando términos:

$$(A\lambda dx - B\lambda dt) u_t + (B\lambda du + C\lambda v_t dx + D\lambda v_x dx + E\lambda dx) = 0 \quad (3.33)$$

Esta ecuación es independiente de  $u_x$ , para que sea independiente de  $u_t$ :

$$A\lambda dx - B\lambda dt = 0 \quad (3.34)$$

Substituyendo en la ec. (3.33):

$$B\lambda du + C\lambda v_t dx + D\lambda v_x dx + E\lambda dx = 0 \quad (3.35)$$

Substituyendo la ec. (3.24) en (3.26):

$$dv = v_t dt + \frac{-A\lambda u_t - B\lambda u_x - C\lambda v_t - E\lambda}{D\lambda} dx$$

O bien:

$$D\lambda dv = D\lambda v_t dt - A\lambda u_t dx - B\lambda u_x dx - C\lambda v_t dx - E\lambda dx$$

Pasando el término del lado derecho al lado izquierdo y agrupando términos:

$$(C\lambda dx - D\lambda dt) v_t + (D\lambda dv + A\lambda u_t dx + B\lambda u_x dx + E\lambda dx) = 0 \quad (3.36)$$

Esta ec. es independiente de  $v_x$ , para que sea independiente de  $v_t$ :

$$C\lambda dx - D\lambda dt = 0 \quad (3.37)$$

Substituyendo en (3.36)

$$D\lambda dv + A\lambda u_t dx + B\lambda u_x dx + E\lambda dx = 0 \quad (3.38)$$

De la ec. (3.28), (3.31), (3.34) y (3.37):

$$A\lambda dx = B\lambda dt$$

$$C\lambda dx = D\lambda dt$$

Por lo tanto:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B\lambda}{A\lambda} = \frac{D\lambda}{C\lambda} \quad (3.39)$$

Substituyendo las definiciones (3.19):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2}{A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2} = \frac{D_1 \lambda_1 + D_2 \lambda_2}{C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2} \quad (3.40)$$

Esta ecuación representa la pendiente de las rectas características, en el plano de las variables independientes  $x-t$ , debido a que  $dx$  y  $dt$  son derivadas totales.

Para relacionar las variables dependientes  $u$ ,  $v$  con las rectas características, despejando  $dt$  de la ec. (3.39):

$$dt = \frac{C\lambda}{D\lambda} dx$$

Substituyendo en el tercer término de la ec. (3.29):

$$A\lambda du + C\lambda v_t dt + D\lambda v_x \frac{C\lambda}{D\lambda} dx + E\lambda dt = 0$$

Agrupando y eliminando términos:

$$A\lambda du + C\lambda (v_t dt + v_x dx) + E\lambda dt = 0$$

Como:  $dv = v_t dt + v_x dx$ , la ecuación anterior queda:

$$A\lambda du + C\lambda dv + E\lambda dt = 0$$

Substituyendo los valores de  $A\lambda$ ,  $C\lambda$  y  $E\lambda$  de (3.19):

$$(A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) du + (C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2) dv + (E_1 \lambda_1 + E_2 \lambda_2) dt = 0 \quad (3.41)$$

Otra forma de obtener esta ecuación es despejando  $dt$  de la ec. (3.39):

$$dt = \frac{A\lambda}{B\lambda} dx$$

Substituyendo en el cuarto término de la ec (3.32)

$$C\lambda \, dv + E\lambda \, dt + A\lambda \, u_t \, dt + B\lambda \, u_x \frac{A\lambda}{B\lambda} \, dx = 0$$

Agrupando y eliminando términos:

$$C\lambda \, dv + E\lambda \, dt + A\lambda \, (u_t \, dt + u_x \, dx) = 0$$

Como:  $du = u_t \, dt + u_x \, dx$ , la ecuación anterior queda:

$$C\lambda \, dv + E\lambda \, dt + A\lambda \, du = 0$$

Substituyendo los valores de  $C\lambda$ ,  $E\lambda$  y  $A\lambda$  de (3.19):

$$(A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) \, du + (C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2) \, dv + (E_1 \lambda_1 + E_2 \lambda_2) \, dt = 0$$

Como se observa esta ecuación es la ec. (3.41).

Para relacionar de otra manera las variables dependientes con las rectas características, despejando  $dx$  de la ec. (3.39):

$$dx = \frac{D\lambda}{C\lambda} \, dt$$

Substituyendo en el segundo término de la ec. (3.35):

$$B\lambda \, du + C\lambda \, v_t \frac{D\lambda}{C\lambda} \, dt + D\lambda \, v_x \, dx + E\lambda \, dx = 0$$

Agrupando y eliminando términos:

$$B\lambda \, du + D\lambda \, (v_t \, dt + v_x \, dx) + E\lambda \, dx = 0$$

Como:  $dv = v_t \, dt + v_x \, dx$ , la ecuación anterior queda:

$$B\lambda \, du + D\lambda \, dv + E\lambda \, dx = 0$$



Substituyendo los valores de  $B\lambda$ ,  $D\lambda$  y  $E\lambda$  de la definición (3.19):

$$(B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2) du + (D_1 \lambda_1 + D_2 \lambda_2) dv + (E_1 \lambda_1 + E_2 \lambda_2) dx = 0 \quad (3.42)$$

Otra manera de obtener esta ecuación, es despejando  $dx$  de la ec. (3.39):

$$dx = \frac{B\lambda}{A\lambda} dt$$

Substituyendo en el segundo término de la ec. (3.38):

$$D\lambda dv + A\lambda u \frac{B\lambda}{A\lambda} dt + B\lambda u_x dx + E\lambda dx = 0$$

Agrupando y eliminando términos:

$$D\lambda dv + B\lambda (u dt + u_x dx) + E\lambda dx = 0$$

Como:  $du = u dt + u_x dx$ , la ecuación anterior queda:

$$D\lambda dv + B\lambda du + E\lambda dx = 0$$

Substituyendo los valores de  $D\lambda$ ,  $B\lambda$  y  $E\lambda$  de la definición (3.19):

$$(B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2) du + (D_1 \lambda_1 + D_2 \lambda_2) dv + (E_1 \lambda_1 + E_2 \lambda_2) dx = 0$$

Como se observa, esta ecuación es la (3.42).

Hasta ahora se han obtenido tres ecuaciones: la ecuación (3.40), (3.41) y (3.42), las cuales se han reafirmado. Si definimos:

$$\sigma = dx/dt \quad (3.43)$$

Substituyendo en la primera parte de la ec. (3.40):

$$(A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) \sigma = B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2$$

Desarrollando esta ecuación:

$$A_1 \lambda_1 \sigma + A_2 \lambda_2 \sigma - B_1 \lambda_1 - B_2 \lambda_2 = 0$$

Agrupando términos:

$$(A_1 \sigma - B_1) \lambda_1 + (A_2 \sigma - B_2) \lambda_2 = 0 \quad (3.44)$$

Substituyendo (3.43) en la segunda parte de la ec. (3.40):

$$(C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2) \sigma = D_1 \lambda_1 + D_2 \lambda_2$$

Desarrollando:

$$C_1 \lambda_1 \sigma + C_2 \lambda_2 \sigma - D_1 \lambda_1 - D_2 \lambda_2 = 0$$

Agrupando términos:

$$(C_1 \sigma - D_1) \lambda_1 + (C_2 \sigma - D_2) \lambda_2 = 0 \quad (3.45)$$

Las ecs. (3.44) y (3.45), en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} A_1 \sigma - B_1 & A_2 \sigma - B_2 \\ C_1 \sigma - D_1 & C_2 \sigma - D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que este sistema tenga solución, el determinante de la matriz debe ser cero, entonces:

$$A_1 C_2 \sigma^2 - (B_1 C_2 + A_1 D_2) \sigma + B_1 D_2 - A_2 C_1 \sigma^2 + (B_2 C_1 + A_2 D_1) \sigma - B_2 D_1 = 0$$

Agrupando términos:

$$(A_1 C_2 - A_2 C_1) \sigma^2 + (B_2 C_1 - B_1 C_2 + A_2 D_1 - A_1 D_2) \sigma + (B_1 D_2 - B_2 D_1) = 0 \quad (3.46)$$

La solución de esta ecuación de segundo grado proporciona dos valores de  $\sigma$ , estos son:  $\sigma^+$  para el valor mayor y  $\sigma^-$  para el menor. Para problemas de flujo en medios porosos, estos valores generalmente son reales<sup>1</sup>. Como se observa de la definición (3.43), los valores de  $\sigma$  representan la pendiente de las rectas características, y por lo tanto se van a obtener para un punto en el espacio x-t dos rectas que se cruzan, una con pendiente  $\sigma^+$ , y otra con pendiente  $\sigma^-$ , ver fig. 3.2.

Para obtener los valores de u y v, desarrollando la ec. (3.41):

$$A_1 \lambda_1 du + A_2 \lambda_2 du + C_1 \lambda_1 dv + C_2 \lambda_2 dv + E_1 \lambda_1 dt + E_2 \lambda_2 dt = 0$$

Agrupando términos:

$$(A_1 du + C_1 dv + E_1 dt) \lambda_1 + (A_2 du + C_2 dv + E_2 dt) \lambda_2 = 0 \quad (3.47)$$

Desarrollando la ec. (3.42):

$$B_1 \lambda_1 du + B_2 \lambda_2 du + D_1 \lambda_1 dv + D_2 \lambda_2 dv + E_1 \lambda_1 dx + E_2 \lambda_2 dx = 0$$

Agrupando términos:

$$(B_1 du + D_1 dv + E_1 dx) \lambda_1 + (B_2 du + D_2 dv + E_2 dx) \lambda_2 = 0 \quad (3.48)$$

Para poder encontrar la variación de u y v a lo largo de las

direcciones características, considerando el caso donde  $E_1$  y  $E_2$  son cero, los coeficientes  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$  son función de  $u$  y  $v$  únicamente, de las ecs. (3.44) y (3.47), en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} A_1 \sigma - B_1 & A_2 \sigma - B_2 \\ A_1 du + C_1 dv & A_2 du + C_2 dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que el sistema tenga solución, el determinante debe ser cero:

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1) du + (A_1 C_2 - A_2 C_1) \sigma dv + (B_2 C_1 - B_1 C_2) dv = 0$$

Dividiendo esta ec. por  $dv$ :

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1) \frac{du}{dv} + (A_1 C_2 - A_2 C_1) \sigma + (B_2 C_1 - B_1 C_2) = 0$$

O bien:

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1) \frac{du}{dv} = (A_2 C_1 - A_1 C_2) \sigma + (B_1 C_2 - B_2 C_1) \quad (3.49)$$

Esta ecuación diferencial ordinaria no lineal nos da la solución a las variables dependientes  $u$  y  $v$ , resolviendola por algún metodo de integración numérica, para los diferentes valores de  $\sigma$  calculados por la ecuación (3.46).

Otra manera de relacionar a las variables dependientes  $u$  y  $v$  con los valores  $\sigma$ , es considerando las ecs. (3.45) y (3.48) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} C_1 \sigma - D_1 & C_2 \sigma - D_2 \\ B_1 du + D_1 dv & B_2 du + D_2 dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que el sistema tenga solución, el determinante debe ser cero, entonces:

$$(B_2 C_1 - B_1 C_2) \sigma \, du + (B_1 D_2 - B_2 D_1) \, du + (C_1 D_2 - C_2 D_1) \sigma \, dv = 0$$

Dividiendo por  $du$ :

$$(B_2 C_1 - B_1 C_2) \sigma + (B_1 D_2 - B_2 D_1) + (C_1 D_2 - C_2 D_1) \sigma \frac{dv}{du} = 0$$

Por lo tanto:

$$(C_1 D_2 - C_2 D_1) \sigma \frac{dv}{du} = (B_1 C_2 - B_2 C_1) \sigma + (B_2 D_1 - B_1 D_2) \quad (3.50)$$

Esta ecuación arroja los mismos resultados que la ecuación (3.46).

Para la obtención de las rectas características, de la ec. (3.39):

$$\frac{dx}{dt} = \sigma, \text{ por lo tanto: } dx = \sigma \, dt.$$

Integrando:

$$\int dx = \int \sigma \, dt$$
$$x = \sigma^{\pm} t + \text{cte.} \quad (3.51)$$

La cual es la ecuación de las rectas características con pendientes  $\sigma^+$  y  $\sigma^-$ , en el plano de las variables independientes  $x$ ,  $t$ .

Si tenemos condiciones iniciales:  $u = u_1$ ,  $v = v_1$  para  $(0, x_1)$ , substituyendo en la ec. (3.51):

$x_1 = \sigma^{\pm}(0) + \text{cte}$ , entonces:  $\text{cte} = x_1$ .

Y la ecuación (3.51) de las rectas características es:

$$x = \sigma^{\pm} t + x_1 \quad (3.52)$$

En la fig. 3.2, estas rectas son las que se encuentran en la región 1, en cada punto de esta región se cruzan dos rectas características, una con pendiente  $\sigma^+$  y otra con pendiente  $\sigma^-$ , estas pendientes están regidas por la ec. (3.46), y son función de los coeficientes  $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ , que a su vez son función de  $x, t, u$  y  $v$ , por lo tanto  $\sigma^{\pm}$  es función de  $x, t, u$  y  $v$ , además, todas las rectas características de la región 1 cruzan el eje  $x$  donde están definidas las condiciones iniciales, por lo tanto los valores de  $u$  y  $v$  para las características en esta región son  $u = u_1$  y  $v = v_1$ , entonces es llamada región de estado constante. Como  $\sigma^+$  y  $\sigma^-$  se mantienen constantes en esta región, las rectas guardan paralelismo.

Si tenemos las condiciones de frontera:  $u = u_j, v = v_j$  para  $(t_j, 0)$ , substituyendo en (3.51):

$$0 = \sigma^{\pm} t_j + \text{cte}, \text{ entonces: } \text{cte} = -\sigma^{\pm} t_j.$$

La ec. (3.51) queda:

$$x = \sigma^{\pm} t - \sigma^{\pm} t_j \quad (3.53)$$

De la fig. 3.2, estas rectas se encuentran en la región 2, de la misma manera que en la región de estado constante 1, en cada punto se cruzan dos rectas características, una con pendiente  $\sigma^+$ , y otra con pendiente  $\sigma^-$ , las cuales son función de  $x, t$  u y  $v$ . Las

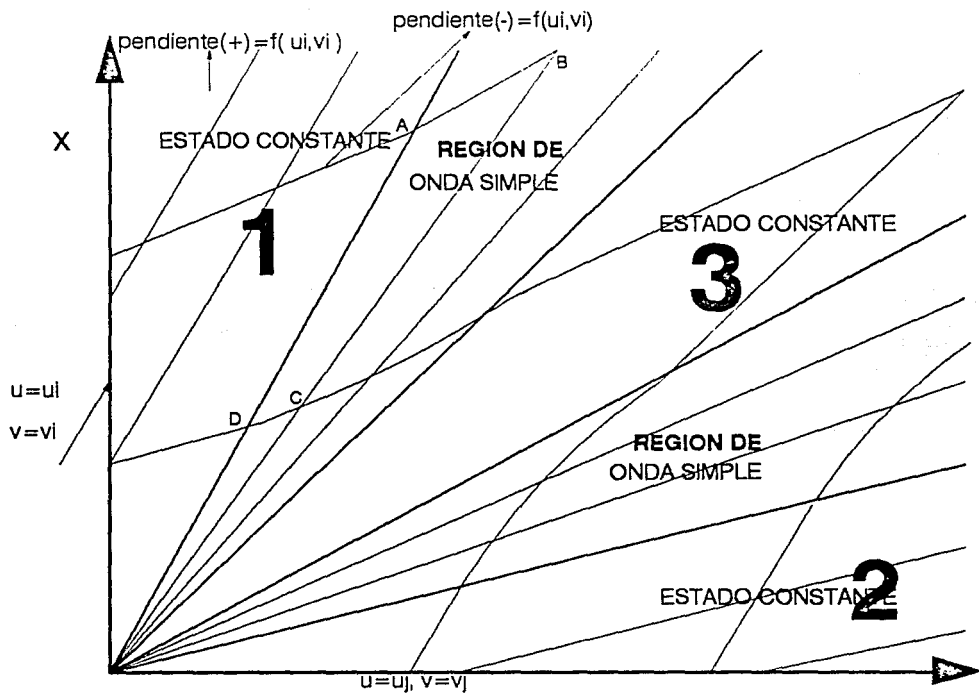


Fig. 3.2: Rectas características para dos variables dependientes  
(ENHANCED OIL RECOVERY, L. W. LAKE)

características en esta región cruzan el eje  $t$  (condición de frontera), como a cada característica le corresponde un valor  $u$ ,  $v$ , por lo tanto en esta región  $u = u_j$  y  $v = v_j$  para cada característica, entonces se le llama también región de estado constante. De la misma manera que en la región 1, en la región 2 de estado constante  $\sigma^+$  y  $\sigma^-$  son constantes, por lo tanto las características guardan paralelismo

De la ec. (3.52), cuando la ordenada al origen vale cero, queda:

$$x = \sigma^+ t \quad (3.54)$$

La región en forma de abanico adyacente a la región de estado constante 1 es la que se forma con esta ecuación, debido a que en cada punto de la región existe un cruce entre dos rectas características con pendientes  $\sigma^+$  y  $\sigma^-$ , las rectas con pendientes  $\sigma^+$  son las que emanan como rayos del origen y por lo tanto son de pendiente constante, las  $\sigma^-$  forman líneas curvas en esta región de abanico.

De la ecuación (3.53), cuando la ordenada al origen vale cero, tenemos:

$$x = \sigma^- t \quad (3.55)$$

La región en forma de abanico adyacente a la región de estado constante 2, es la que resulta de la ec. (3.55), de igual manera que en el caso anterior, como en cada punto de esta región existe un cruce entre dos rectas características ( $\sigma^+$  y  $\sigma^-$ ), ahora las características con pendiente  $\sigma^-$  son las que emanan como rayos del origen y las características con pendiente  $\sigma^+$  forman líneas curvas<sup>1</sup>.



De la primera región de abanico adyacente a la región de estado constante 1 (rectas que emanan del origen con pendientes  $\sigma^+$ ) se conoce el límite con la región de estado constante 1 (ec. (3.54)). De la segunda región de abanico adyacente a la región de estado constante 2 (rectas que emanan del origen con pendientes  $\sigma^-$ ) se conoce el límite con la región de estado constante 2 (ec. (3.55)), de este modo, la primera región de abanico se extiende desde la región de estado constante 1 hasta su límite de influencia (límite de la región de estado constante 3 con la segunda región de abanico), y la segunda región de abanico se extiende desde la región de estado constante 2 hasta su límite de influencia (límite de la región de estado constante 3 con la primera región de abanico), de este modo se genera una región de estado constante 3, donde las rectas características con pendientes  $\sigma^+$  (primera región de abanico) se traslapan con las rectas características con pendientes  $\sigma^-$  (segunda región de abanico), originando que  $\sigma^+$  sea menor que  $\sigma^-$ , lo cual es una incongruencia, en general los valores de  $u$  y  $v$  en esta región son diferentes de cualquier condición inicial o de frontera<sup>3</sup>.

Las ecs. (3.49) y (3.50) dan una relación entre las dos variables dependientes  $u$  y  $v$ , a lo largo de las características  $\sigma^\pm$  en el espacio  $x-t$ , ya que todos los coeficientes en la ec. (3.49) son funciones conocidas de  $u$  y  $v$ . Al espacio formado por  $u-v$  se le llama Diagrama de Rutas Composicionales, la resultante de la función  $u = u(v)$  para las características positivas es la curva imagen  $\Gamma^+$ , de la misma manera la que resulta de las características negativas se le llama curva imagen  $\Gamma^-$ , a las curvas  $\Gamma^+$  y  $\Gamma^-$  se les llama rutas composicionales.

Como se vió anteriormente dentro de las regiones de abanico, las características con pendientes  $\sigma^+$  y  $\sigma^-$ , no pueden ambas ser rectas, o de otra manera serían regiones de estado constante, pero una de las características debe ser recta en cada región, en nuestro

caso  $\sigma^+$  en el abanico superior y  $\sigma^-$  en el abanico inferior (ver fig. 3.2), esto se debe a que dos puntos A y D sobre la frontera tienen el mismo valor  $(u,v)$ , ya que ellos son declarados existentes en la región de estado constante, esto es cierto para todos los otros rayos en la región en forma de abanico que emanan del origen, por ejemplo el que pasa a través de C y B, las otras rectas características en la región de abanico son curvas y al final intersectan una región de estado constante. Entonces, todos los puntos sobre la línea recta característica tienen el mismo valor  $(u,v)$ . Ya que  $(u,v)_A = (u,v)_D$  y  $(u,v)_B = (u,v)_C$ , entonces  $\bar{\sigma}_B = \bar{\sigma}_C$  y la pendiente de la característica  $\bar{\sigma}$  es la misma sobre todas las características  $\sigma^+$ . Esto significa que la relación  $u = u(v)$  definida por la ecuación (3.49) es la misma sobre cualquier característica  $\sigma^-$  en la región en forma de abanico, así  $(du/dv)_{\sigma^-}$  y  $(du/dv)_{\sigma^+}$  únicamente determinan las variaciones de  $u$  y  $v$  en su respectiva región de abanico. La función  $u = u(v)$  siempre se calcula basándose en la curva característica<sup>1</sup>.

De la discusión anterior (esta sección y la sección 3.2) aplicado generalmente a PDEs reducibles con cualquier número de  $N$  variables dependientes, se observa lo siguiente<sup>1</sup>:

a).- Adyacente a cualquier región de estado constante, hay una región que tiene al menos una línea recta característica, la región siguiente es una región de onda simple.

b).- Dentro de una región de onda simple, las variables dependientes se relacionan a través de un juego de EDOS.

c).- Para condiciones de frontera y condiciones iniciales que son uniformes, el dominio completo  $x-t$  consiste de regiones alternantes de estado constante y regiones de onda simple.

#### 3.4.- EL CONCEPTO DE COHERENCIA.

El concepto de coherencia fué originalmente desarrollado para el fenómeno cromatológico, para un mejor entendimiento, se define lo siguiente<sup>3</sup>:

##### Onda:

Es una variación de la composición, usualmente propagada en la dirección de flujo.

##### Velocidad de partícula:

Es la velocidad de partículas distinguibles o elementos de volúmen, por ejemplo la velocidad de fase.

##### Velocidad de onda:

Es la velocidad de avance de valores dados de variables físicas, por ejemplo velocidad de concentración y velocidad de composición.

Si se inyecta un fluido diferente al que está en el yacimiento, observando a una distancia del punto de inyección, en general desde el punto de vista propagacional es inestable, o sea que no puede ser propagado con integridad como una sola onda simple, mejor dicho, se separa en varias ondas de propagación estables (coherentes), las cuales viajan a diferentes velocidades y entre las cuales surgen zonas de diferente composición uniforme. Este es el comportamiento normal en la dinámica multicomponente y es bien conocida en la Ingeniería de Yacimientos en al menos la situación siguiente: La formación de un banco de aceite por inyección de un

fluido desplazante.

Una onda en un sistema multicomponente en general es una composición de ondas de todas las variables dependientes. Para que las ondas multicomponentes sean propagadas con integridad (sean coherentes), las ondas de todas las variables dependientes deben permanecer juntas (avanzar a la misma velocidad), por consiguiente la condición de coherencia requiere que todas las variables dependientes en cualquier punto dado de espacio y tiempo deben tener la misma velocidad.

De la discusión anterior y de las secciones 3.2 y 3.3, se puede establecer con más significado físico de ondas simples en la terminología de ondas coherentes<sup>3</sup>, ya que  $(u, v)$  es constante sobre cada recta característica en una región de onda simple o coherente, y como  $\sigma$  ( $=dx/dt$ =velocidad) es una función de  $(u, v)$  solamente, entonces:

$$\frac{dx}{dt} \Big|_u = \frac{dx}{dt} \Big|_v \quad (3.56)$$

Para N variables dependientes:

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{u_1} = \frac{dx}{dt} \Big|_{u_2} = \dots = \frac{dx}{dt} \Big|_{u_N} \quad (3.57)$$

La ec. (3.57) establece que la velocidad de valores constantes de la variable dependiente (condición de coherencia) es la misma. El método de coherencia para calcular ondas simples es más directo que usando el método de las características.

# CAP. 4

## ACOPLAMIENTO DEL MODELO MATEMATICO Y LA TEORIA DE DESPLAZAMIENTO FRONTAL (FLUJO BIFASICO)

### 4.1.- MODELO DE BUCKLEY-LEVERETT.

Buckley-Leverett en 1942<sup>11</sup>, describieron de una manera cualitativa las características de desplazamiento inmisible de aceite por gas o agua, con el objeto de aclarar el mecanismo por el cual tal desplazamiento se efectúa, en el desarrollo relacionaron un balance de material y la ley de Darcy para las fases fluyendo. En 1952, el problema fué retomado por Weldge<sup>12</sup>, quien propuso un desarrollo alterno de cálculo de desplazamiento de aceite por gas o agua, utilizando el desarrollo de Buckley-Leverett, posteriormente Craig<sup>13</sup> en 1971 y Pope<sup>14</sup> en 1980 presentan ejemplos prácticos para la teoría de avance frontal.

Para desarrollar la ec. de Buckley-Leverett, consideremos la fig. (4.1), que es un volumen elemental representativo, haciendo un balance de masa<sup>15</sup>:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{masa que} \\ \text{entra} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{masa que} \\ \text{sale} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{masa que se} \\ \text{acumula} \end{array} \right] \quad (4.1)$$

De la fig. (4.1), considerando únicamente la dirección x, de flujo de fluidos, y de la ec. (4.1):

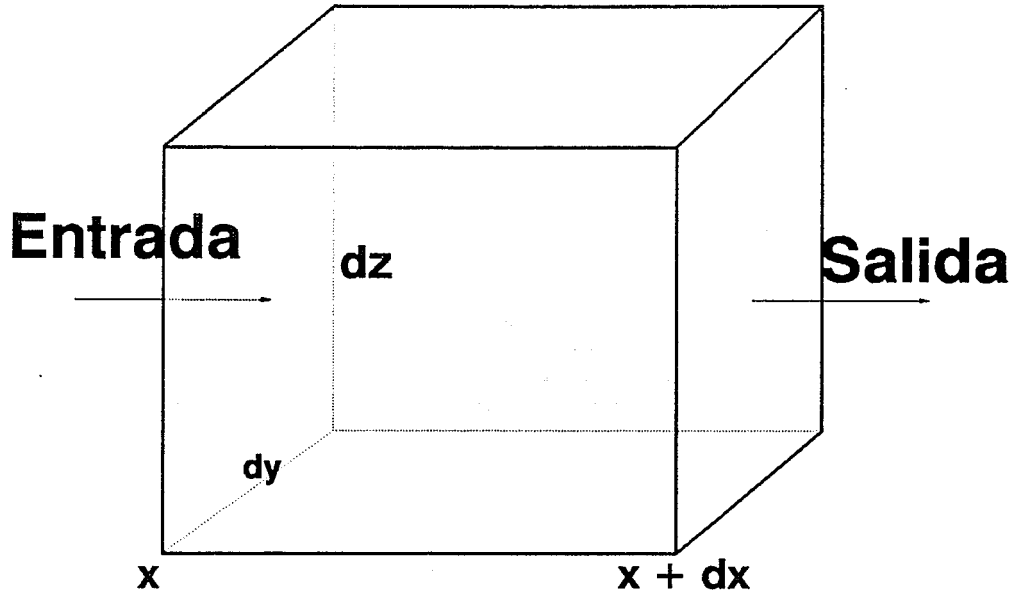


Fig. 4.1: Volumen elemental representativo

$$\Delta t \left\{ (\rho u)_x \Delta y \Delta z + (q\rho)_I - (\rho u)_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z - (q\rho)_P \right\} = \Delta x \Delta y \Delta z \phi S \rho|_{t+\Delta t} - \Delta x \Delta y \Delta z \phi S \rho|_t \quad (4.2)$$

Como  $u \Delta y \Delta z = u \lambda = q$ , entonces la ec. anterior se puede escribir:

$$\Delta t \left\{ (q\rho)_x + (q\rho)_I - (q\rho)_{x+\Delta x} - (q\rho)_P \right\} = \lambda \Delta x \phi S \rho|_{t+\Delta t} - \lambda \Delta x \phi S \rho|_t$$

Si consideramos que el fluido es incompresible,  $\rho = \text{cte.}$ , entonces:

$$\Delta t \left\{ q_x + q_I - q_{x+\Delta x} - q_P \right\} = \lambda \Delta x \phi S|_{t+\Delta t} - \lambda \Delta x \phi S|_t$$

O bien:

$$-\Delta t \left\{ q_{x+\Delta x} - q_x + q_P - q_I \right\} = \lambda \Delta x \phi S|_{t+\Delta t} - \lambda \Delta x \phi S|_t$$

Dividiendo por  $-\lambda \Delta x \Delta t \phi$ :

$$\frac{q_{x+\Delta x}}{\lambda \Delta x \phi} - \frac{q_x}{\lambda \Delta x \phi} + \frac{q_P}{\lambda \Delta x \phi} - \frac{q_I}{\lambda \Delta x \phi} = \frac{S|_{t+\Delta t} - S|_t}{\Delta t}$$

Tomando límites cuando  $\Delta x$  y  $\Delta t$  tienden a cero:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q}{\phi \lambda} \right) + \frac{q_P}{\lambda \Delta x \phi} - \frac{q_I}{\lambda \Delta x \phi} = - \frac{\partial S}{\partial t}$$

Esta, es la ecuación de continuidad. Para la fase mojanje queda:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_w}{\phi \lambda} \right) + \frac{q_{wp}}{\lambda \Delta x \phi} - \frac{q_{wl}}{\lambda \Delta x \phi} = - \frac{\partial S_w}{\partial t}$$

Para la fase no mojanete:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_{nw}}{\phi \lambda} \right) + \frac{q_{nwp}}{\lambda \Delta x \phi} - \frac{q_{nwl}}{\lambda \Delta x \phi} = - \frac{\partial S_{nw}}{\partial t}$$

Si no se toman en cuenta los términos fuente, estas ecuaciones se pueden escribir:

$$\frac{\partial}{\partial x} q_w = - \phi \lambda \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} q_{nw} = - \phi \lambda \frac{\partial S_{nw}}{\partial t} \quad (4.4)$$

Las saturaciones de las fases mojanete y no mojanete se relacionan por:

$$S_w + S_{nw} = 1 \quad (4.5)$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial S_{nw}}{\partial t} = 0, \text{ por lo tanto:}$$

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = - \frac{\partial S_{nw}}{\partial t} \quad (4.6)$$

De la ec. (4.5), las ecs. (4.3) y (4.4) se pueden sumar:

$$\frac{\partial q_w}{\partial x} + \frac{\partial q_{nw}}{\partial x} = - \phi \lambda \frac{\partial S_w}{\partial t} - \phi \lambda \frac{\partial S_{nw}}{\partial t}$$

Substituyendo (4.6) en esta ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x} (q_w + q_{nw}) = \phi \lambda \frac{\partial S_{nw}}{\partial t} - \phi \lambda \frac{\partial S_{nw}}{\partial t} = 0$$



O bien:

$$\frac{\partial}{\partial x} (q_t) = 0$$

Lo que concluye que el gasto total es constante a lo largo de la muestra, entonces podemos definir<sup>16</sup>:

$$f_w = \frac{q_w}{q_t} \quad (4.7)$$

Y:

$$f_{nw} = \frac{q_{nw}}{q_t} = (1 - f_w) \quad (4.8)$$

Substituyendo estas dos últimas ecuaciones en (4.3) y (4.4):

$$q_t \frac{\partial}{\partial x} f_w = - \phi \Lambda \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (4.9)$$

$$q_t \frac{\partial}{\partial x} f_{nw} = - \phi \Lambda \frac{\partial S_{nw}}{\partial t} \quad (4.10)$$

La presión capilar se define por:

$$p_c = p_{nw} - p_w$$

Derivando esta ecuación con respecto a x:

$$\frac{\partial p_c}{\partial x} = \frac{\partial p_{nw}}{\partial x} - \frac{\partial p_w}{\partial x}, \text{ o bien:}$$

$$\frac{\partial p_{nw}}{\partial x} = \frac{\partial p_c}{\partial x} + \frac{\partial p_w}{\partial x} \quad (4.11)$$

La ley de Darcy para la fase mojanete es:

$$q_w = - \frac{k_w \Lambda}{\mu_w} \left[ \frac{\partial p_w}{\partial x} + \rho_w g \sin \alpha \right]$$

Despejando  $\partial p_w / \partial x$ :

$$\frac{\partial p_w}{\partial x} = - \frac{q_w \mu_w}{k_w \lambda} - \rho_w g \sin \alpha \quad (4.12)$$

La ley de Darcy para la fase no mojanete es:

$$q_{nw} = - \frac{k_{nw} \lambda}{\mu_{nw}} \left[ \frac{\partial p_{nw}}{\partial x} + \rho_{nw} g \sin \alpha \right]$$

Substituyendo (4.11) en esta última ecuación:

$$q_{nw} = - \frac{k_{nw} \lambda}{\mu_{nw}} \left[ \frac{\partial p_c}{\partial x} + \frac{\partial p_w}{\partial x} \rho_{nw} g \sin \alpha \right]$$

Substituyendo (4.12) en la ecuación anterior:

$$q_{nw} = - \frac{k_{nw} \lambda}{\mu_{nw}} \left[ \frac{\partial p_c}{\partial x} - \frac{q_w \mu_w}{k_w \lambda} - \rho_w g \sin \alpha + \rho_{nw} g \sin \alpha \right]$$

O bien:

$$q_{nw} = - \frac{k_{nw} \lambda}{\mu_{nw}} \left[ \frac{\partial p_c}{\partial x} - \frac{q_w \mu_w}{k_w \lambda} - (\rho_w - \rho_{nw}) g \sin \alpha \right]$$

Si  $\nabla p = \rho_w - \rho_{nw}$ ,

$$q_{nw} = - \frac{k_{nw} \lambda}{\mu_{nw}} \left[ \frac{\partial p_c}{\partial x} - \frac{q_w \mu_w}{k_w \lambda} - \Delta \rho g \sin \alpha \right] \quad (4.13)$$

De (4.7) y (4.8):

$$q_w = f_w q_t, \text{ y:}$$

$$q_{nw} = (1 - f_w) q_t$$

Substituyendo en (4.13):

$$q_t - f_w q_t = - \frac{k_{nw} A}{\mu_{nw}} \left[ \frac{\partial p_c}{\partial x} - \frac{f_w q_t \mu_w}{k_w A} - \Delta \rho g \sin \alpha \right]$$

Desarrollando esta ecuación:

$$- \frac{q_t \mu_{nw}}{k_{nw} A} + f_w q_t \frac{\mu_{nw}}{k_{nw} A} = \frac{\partial p_c}{\partial x} - \frac{f_w q_t \mu_w}{k_w A} - \Delta \rho g \sin \alpha$$

Pasando el segundo término del lado derecho al lado izquierdo:

$$- \frac{q_t \mu_{nw}}{k_{nw} A} + f_w q_t \frac{\mu_{nw}}{k_{nw} A} + \frac{f_w q_t \mu_w}{k_w A} = \frac{\partial p_c}{\partial x} - \Delta \rho g \sin \alpha$$

Multiplicando por A y agrupando los términos de  $f_w$ :

$$- q_t \frac{\mu_{nw}}{k_{nw}} + f_w q_t \left[ \frac{\mu_{nw}}{k_{nw}} + \frac{\mu_w}{k_w} \right] = A \left[ \frac{\partial p_c}{\partial x} - \Delta \rho g \sin \alpha \right]$$

Despejando  $f_w$ :

$$f_w = \frac{A \left[ \frac{\partial p_c}{\partial x} - \Delta \rho g \sin \alpha \right] + q_t \frac{\mu_{nw}}{k_{nw}}}{q_t \left[ \frac{\mu_{nw}}{k_{nw}} + \frac{\mu_w}{k_w} \right]}$$

Multiplicando y dividiendo el lado derecho por  $\frac{k_{nw}}{q_t \mu_{nw}}$ :

$$f_w = \frac{\frac{A k_{nw}}{q_t \mu_{nw}} \left[ \frac{\partial p_c}{\partial x} - \Delta \rho g \sin \alpha \right] + 1}{1 + \frac{k_{nw} \mu_w}{k_w \mu_{nw}}} \quad (4.14)$$

En el APENDICE A se presenta una forma alterna de esta ecuación. Como se observa, si se desprecia la presión capilar, las diferencias de densidad son pequeñas y el gasto es alto (tiene el mismo efecto si se desprecia la presión capilar, y el desplazamiento ocurre en un sistema horizontal):

$$f_w = \left( 1 + \frac{k_{nw} \mu_w}{k_w \mu_{nw}} \right)^{-1} \quad (4.15)$$

En esta ecuación,  $f_w$  es función de  $k_w$  y  $k_{nw}$ , y a su vez  $k_w$  y  $k_{nw}$  son función de  $S_w$ , por lo tanto  $f_w$  es función de  $S_w$  únicamente, de la regla de la cadena:

$$\frac{\partial f_w}{\partial x} = \frac{df_w}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} \quad (4.16)$$

Substituyendo (4.16) en (4.9):

$$\left[ \frac{q}{\phi \lambda} \frac{df_w}{dS_w} \right] \frac{\partial S_w}{\partial x} + \frac{\partial S_w}{\partial t} = 0 \quad (4.17)$$

Esta es la ecuación de Buckley-Leverett<sup>11,16,17</sup>.

**4.2.- APLICACION DEL METODO DE LAS CARACTERISTICAS A LA ECUACION DE BUCKLEY-LEVERETT:**

La ecuación de Buckley-Leverett (4.17), tiene la forma de la ecuación diferencial parcial (3.1), donde los coeficientes A, B y C, la variable dependiente u y las variables independientes x, t son:

MODELO	MODELO
MATEM.	B. L.
A	$\frac{q}{\phi} \frac{df_w}{dS_w}$
B	1
C	0
u	$S_w$
x	x
t	t

La ec. (3.6) aplicada a (4.17):

$$\frac{dx}{\frac{q}{\phi} \frac{df_w}{dS_w}} = dt = \frac{dS_w}{0} \quad (4.18)$$

Integrando los dos primeros términos:

$$\int dx = \frac{q}{\phi} \frac{df_w}{dS_w} \int dt$$

$$x = \frac{q}{\phi} \frac{df_w}{dS_w} t + \text{cte} \quad (4.19)$$

(ver la ec. (3.9)). Para obtener el valor de la constante se utilizan las condiciones iniciales y de frontera:

De la ec. (3.7), las condiciones iniciales:

$$S_w = S_{w1}, \text{ para } S_w(0, x_1)$$

De la ec. (3.8), las condiciones de frontera:

$$S_w = S_{w2} = (1 - S_{or}), \text{ para } S_w(t_1, 0)$$

De las condiciones iniciales y de (4.19):

$$x_1 = \text{cte.} \quad (4.20)$$

De las condiciones de frontera y de (4.19)

$$0 = \frac{q}{\phi \lambda} \frac{df_w}{dS_w} t_1 \Big|_{1-S_{or}} + \text{cte.}, \text{ entonces:}$$
$$\text{cte} = - \frac{q}{\phi \lambda} \frac{df_w}{dS_w} t_1 \Big|_{1-S_{or}} \quad (4.21)$$

De (4.19) y (4.20):

$$x = \frac{q}{\phi \lambda} \frac{df_w}{dS_w} \Big|_{S_{w1}} t + x_1 \quad (4.22)$$

(ver ec. (3.12)). Cuando la ordenada al origen  $x_1$  vale cero:

$$x = \frac{q}{\phi \lambda} \frac{df_w}{dS_w} \Big|_{S_{w1}} t \quad (4.23)$$

(ver ec. (3.15)). De la ec. (4.19) y (4.21):

$$x = \frac{q}{\phi \lambda} \frac{df_w}{dS_w} \Big|_{1-S_{or}} t - \frac{q}{\phi \lambda} \frac{df_w}{dS_w} t_1 \Big|_{1-S_{or}} \quad (4.24)$$

(ver ec. (3.13)). Cuando la ordenada al origen vale cero:

$$x = \frac{q}{\phi \lambda} \frac{df_w}{dS_w} \Big|_{1-S_{or}} t \quad (4.25)$$

De la ec. (4.18),  $dS_w = 0$ , entonces  $S_w$  es constante a lo largo de las características (ver ec. (3.14)).

#### 4.3.- EJEMPLO DE APLICACION DE BUCKLEY-LEVERETT<sup>15</sup>:

Los siguientes datos se utilizaron para el ejemplo:

$$\begin{aligned}L &= 1400 \text{ pies.} \\t &= 600 \text{ días.} \\ \mu_w &= 1 \text{ cp.} \\ \mu_{nw} &= 4 \text{ cp.} \\ q &= 0.1 \\ k &= 100 \text{ md.} \\ \phi &= 0.1 \\ \lambda &= 1 \text{ pie}^2\end{aligned} \tag{4.26}$$

Se compararon los resultados con una solución numérica de diferencias finitas, con un esquema de solución totalmente implícito<sup>15</sup>, por lo tanto:

$$\begin{aligned}dt &= 10 \text{ días} \\ \text{No. celdas} &= 28 \\ dx &= 50 \text{ pies}\end{aligned}$$

Condiciones iniciales:

$$S_w(0, x_i) = S_{wi} = 0.05$$

Condiciones de frontera:

$$S_w(t_j, 0) = 1 - S_{or} = S_{wj} = 0.8$$

De la ec. (4.22), y los datos (4.26):



$$x = \frac{0.1}{(1)(0.1)} \frac{df_w}{dS_w} \Big|_{s_w} t + x_1, \text{ por lo tanto:}$$

$$x = \frac{df_w}{dS_w} \Big|_{s_w} t + x_1 \quad (4.27)$$

Cuando  $x_1$  es cero:

$$x = \frac{df_w}{dS_w} \Big|_{s_w} t \quad (4.28)$$

De la ec (4.24), y los datos (4.26):

$$x = \frac{0.1}{(0.1)(1)} \frac{df_w}{dS_w} \Big|_{1-s_{or}} t - \frac{0.1}{(0.1)(1)} \frac{df_w}{dS_w} \Big|_{1-s_{or}} t_j, \text{ entonces}$$

$$x = \frac{df_w}{dS_w} \Big|_{1-s_{or}} t - \frac{df_w}{dS_w} \Big|_{1-s_{or}} t_j \quad (4.29)$$

Cuando  $t_j$  es cero:

$$x = \frac{df_w}{dS_w} \Big|_{1-s_{or}} t \quad (4.30)$$

Para la obtención de  $df_w/dS_w$  se partió de datos de permeabilidades relativas, ver fig. 4.2, a los cuales se les ajustaron ecuaciones, y se obtuvieron:

$$k_{rw} = S_w^2 \quad (4.31)$$

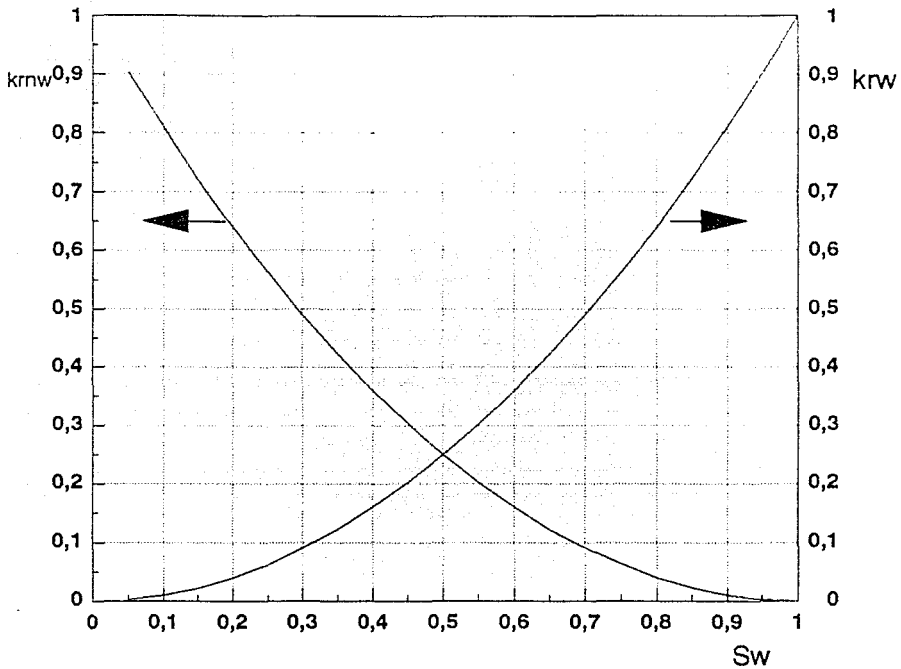
$$k_{rnw} = (1 - S_w)^2 \quad (4.32)$$

Como:  $k_w = k k_{rw}$ , y  $k_{nw} = k k_{rnw}$ , entonces:

$$\frac{k_{nw}}{k_w} = \frac{k_{rnw}}{k_{rw}}$$

Substituyendo en la ec. (4.15) y derivando con respecto a  $S_w$ :

$$\frac{df_w}{dS_w} = - \left( 1 + \frac{k_{rnw} \mu_w}{k_{rw} \mu_{nw}} \right)^{-2} \frac{\mu_w}{\mu_{nw}} \frac{k_{rw} \frac{\partial k_{rnw}}{\partial S_w} - k_{rnw} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w}}{k_{rw}^2} \quad (4.33)$$



**Fig. 4.2: Permeabilidades relativas a la fase mojante y no mojante.**  
(EJEMPLO DE BUCKLEY-LEVERETT)

Entonces, para diferentes valores de  $S_w$  se obtuvieron valores de  $kr_w$  y  $kr_{nw}$  con las ecuaciones (4.31) y (4.32), posteriormente valores de  $\partial kr_w / \partial S_w$  y  $\partial kr_{nw} / \partial S_w$ , para así obtener:  $df_w / dS_w$  con la ec. (4.33). La fig (4.3) presenta estos resultados, en el APENDICE B se encuentran los cálculos.

De la fig. (4.3):

$$\frac{df_w}{dS_w} \Big|_{S_w=0.05} = 0.456, \text{ y}$$

$$\frac{df_w}{dS_w} \Big|_{1-\alpha=0.8} = 0.189$$

Entonces la recta (4.28) queda:

$$x = 0.456 t \quad (4.34)$$

Y la recta (4.30):

$$x = 0.189 t \quad (4.35)$$

En la figura (4.4) se observan estas rectas características, y el abanico solución de la ec. diferencial (4.18) para diferentes valores de  $S_w$ , ver APENDICE B.

Las pendientes de las rectas en la región en forma de abanico deben variar de 0.456 (ec. (4.34)) a 0.189 (ec. (4.35)), observando la fig. (4.3) de nuestro ejemplo, ésto no sucede, los cálculos de  $df_w/dS_w$  inician con 0.456 ( $S_w = 0.05$ ), posteriormente se incrementan a medida que aumenta  $S_w$ , hasta llegar a un máximo de 2.33 aproximadamente, después el valor de la derivada disminuye a medida que aumenta  $S_w$ .

En la figura (4.5) se presentan los resultados obtenidos, dando

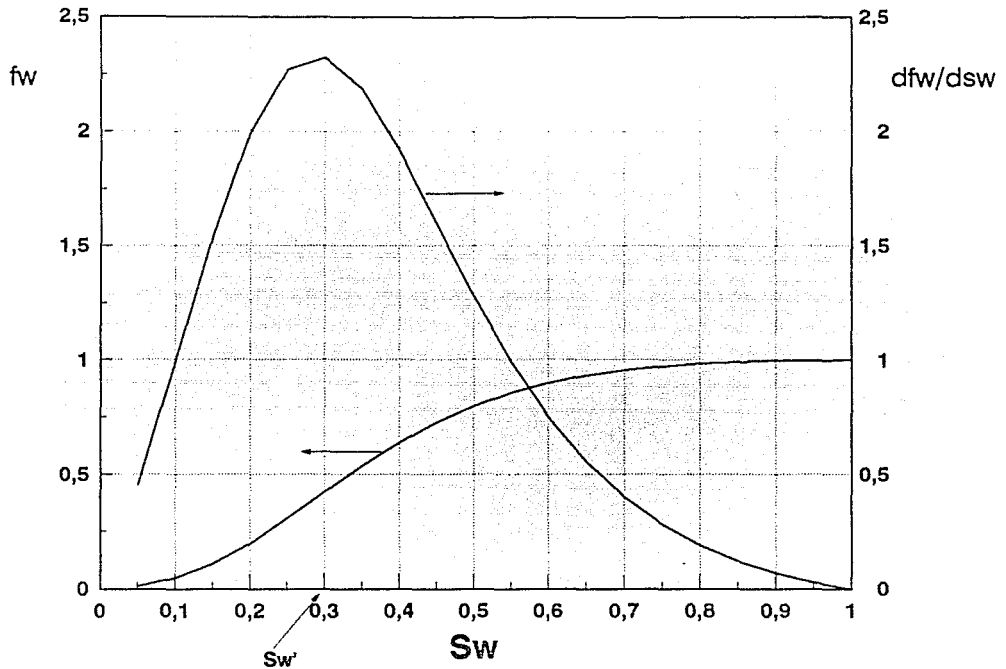
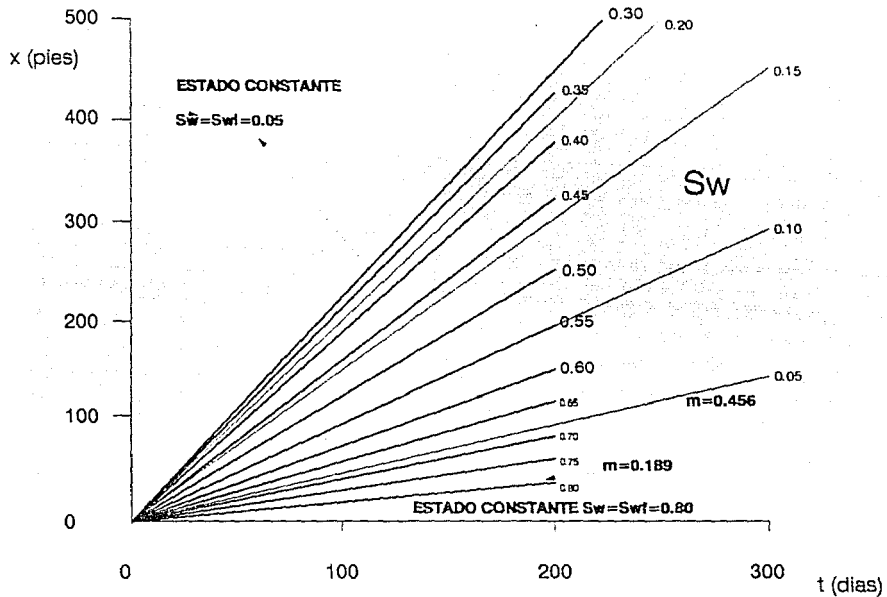


Fig. 4.3: Resultados de  $f_w$  y  $df_w/dS_w$ . (Ejemplo de Buckley-Leverett).



**Fig. 4.4: Rectas características para el ejemplo de Buckley-Leverett.**  
 ( sin el concepto de onda de choque )

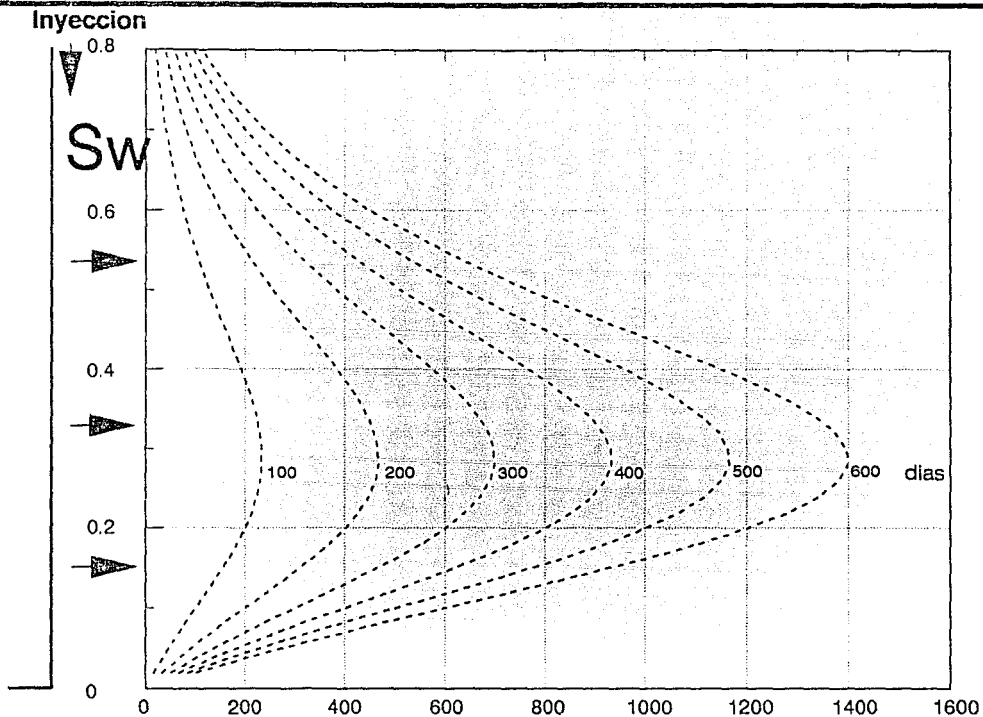


Fig. 4.5: Resultados del ejemplo de Buckley-Leverett por el metodo de las características ( sin la aplicación del concepto de onda de choque )

pies

curvas cóncavas hacia la derecha, o sea para un solo valor de  $x$  se tienen tres valores de saturación diferentes ( $S_{w1}$  y dos valores dados por cada curva), lo cual es físicamente imposible.

El tiempo en que surgen los valores triples, básicamente depende de dos aspectos<sup>17</sup>: de la forma de la curva de  $df_w/dS_w$  y de la forma del perfil de saturación inicial; en nuestro caso el perfil de saturación inicial es constante y no depende de  $x$ , el problema del valor triple se presenta para cualquier tiempo de inyección ( $t$  mayor que cero). Si el problema estuviera completo, o sea que tomara en cuenta efectos disipativos (principalmente presión capilar y compresibilidad), nunca sucede la complicación del valor triple de  $S_w$ . Para resolver este problema Buckley-Leverett introdujeron una discontinuidad.

#### 4.3.1- EL CONCEPTO DE ONDA DE CHOQUE.

En la fig. (4.6) se presenta la curva de  $f_w$  vs.  $S_w$  para nuestro ejemplo, observándose una tangente que se origina en  $S_{w1}$ , y el punto de tangencia define la saturación del frente de desplazamiento<sup>1</sup>,  $S_w^*$ , esta saturación es equivalente a la saturación obtenida por Buckley-Leverett con argumentos intuitivos. La forma del perfil de saturación entre la saturación de agua inicial y la saturación del frente de desplazamiento, no puede predecirse de la solución de avance frontal (solución por el método de las características), se obtiene una aproximación considerando un cambio de saturación desde  $S_{w1}$  hasta la saturación en el frente de desplazamiento  $S_w^*$ , a esto es lo que se le llama onda de choque (cambio discontinuo de una cantidad física, que en este caso es saturación) porque todas las saturaciones menores que  $S_w^*$  se mueven a la velocidad del frente de desplazamiento, y las saturaciones mayores que  $S_w^*$  se mueven a velocidades calculadas por la ec. (4.18).

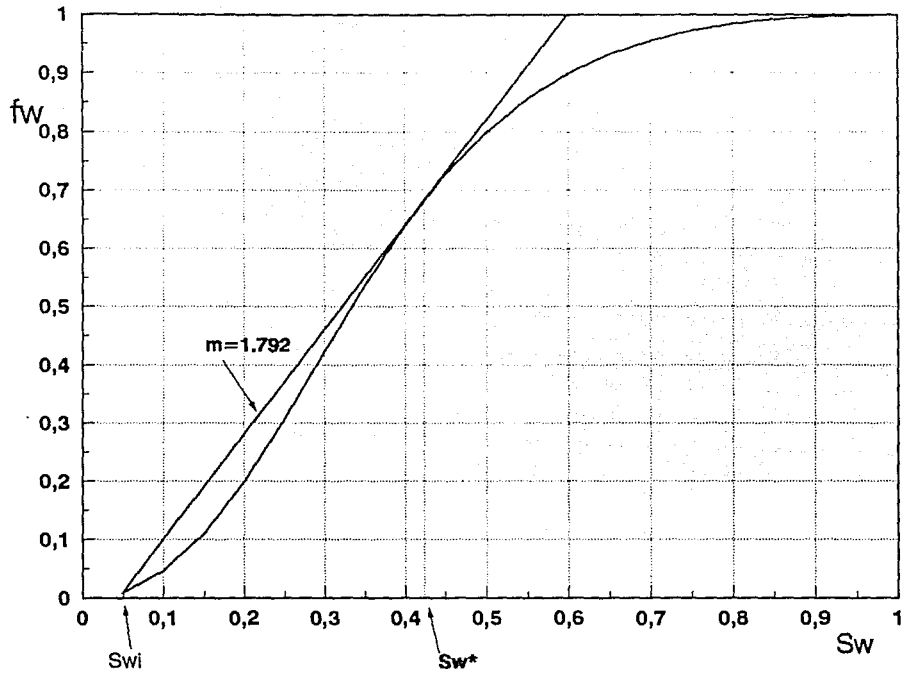


Fig. 4.6:  $f_w$  vs.  $Sw$  (Ejemplo de Buckley-Leverett)



Las ondas de choque<sup>1</sup> son rasgos característicos de ecuaciones hiperbólicas. Estrictamente hablando las ondas de choque no están presentes en la naturaleza, ya que alguna disipación ( dispersión, difusión, presión capilar, compresibilidad y conductividad térmica) está siempre presente, lo cual se opone a la formación de la onda de choque. Cuando estos efectos se presentan, las ondas de choque desaparecen alrededor de la posición del frente de la onda de choque, pero la posición no se altera. Las ondas de choque juegan un papel central en la teoría de flujo fraccional, donde se desprecian los efectos disipativos, y describen flujos reales con buena aproximación.

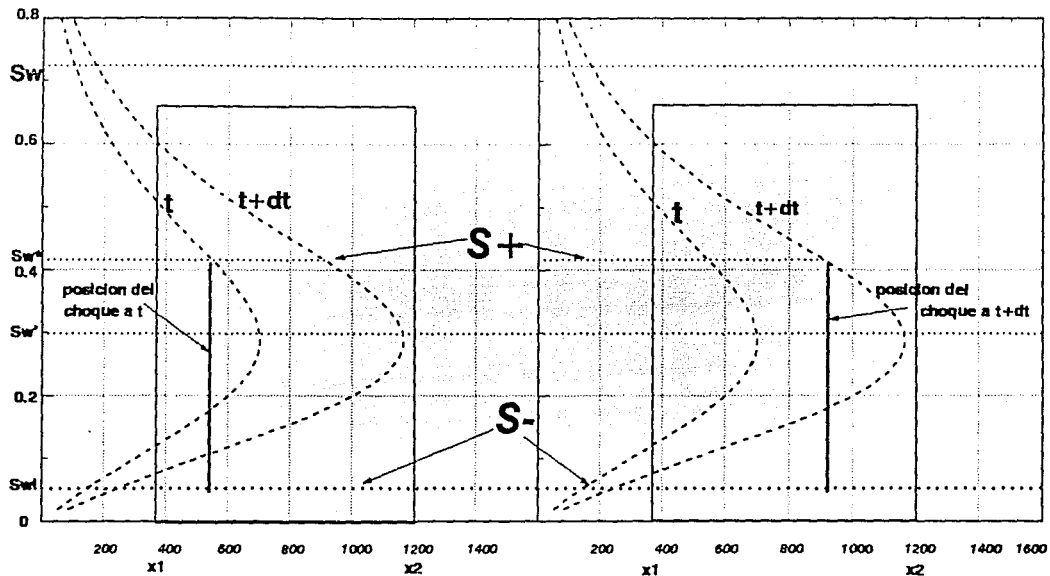
Ahora, el problema es donde colocar la posición de la discontinuidad, los cálculos son relativamente fáciles cuando se forman las ondas de choque. La fig. (4.7) muestra una posición de una onda de choque, que se mueve de izquierda a derecha, la saturación de agua delante del choque es  $S_w^-$ , y la que está detrás del choque es  $S_w^+$ , la cantidad  $\Delta S_w = S_w^+ - S_w^-$ , es el cambio de saturación a través de la onda de choque. Un balance de la fase mojante acumulativa en base a un volumen de control que contiene la onda de choque (ver fig. 4.7) en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es:

$$\left\{ \text{Vol. agua} \right\}_{t+\Delta t} - \left\{ \text{Vol. agua} \right\}_t = \left\{ \text{Vol. agua} \right\}_{\text{entra } \Delta t} - \left\{ \text{Vol. agua} \right\}_{\text{sale } \Delta t} \quad (4.36)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \left\{ \text{Vol. agua} \right\}_{t+\Delta t} &= \left\{ \text{Vol. agua} \right\}_{t+\Delta t, S^+} + \left\{ \text{Vol. agua} \right\}_{t+\Delta t, S^-} \\ &= \left\{ u(t+\Delta t) - x_1 \right\} S_w^+ A \phi + \left\{ x_2 - u(t+\Delta t) \right\} S_w^- A \phi \quad (4.37) \end{aligned}$$

$$\left\{ \text{Vol. agua} \right\}_t = \left\{ \text{Vol. agua} \right\}_{t, S^+} + \left\{ \text{Vol. agua} \right\}_{t, S^-}$$



a): Posicion del choque a  $t$ .

b): posicion del choque a  $t+dt$

*pies*

Fig. 4.7: Posicion de la Discontinuidad (Onda de Choque).

(ENHANCED OIL RECOVERY. L. W. LAKE).

$$= \{u t - x_1\} S_w^+ \Lambda \phi + \{x_2 - u t\} S_w^- \Lambda \phi \quad (4.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vol. agua} \\ \text{entra } \Delta t \end{array} \right\} = q_v|_x \Delta t = q f_w(S_w^+) \Delta t \quad (4.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vol. agua} \\ \text{sale } \Delta t \end{array} \right\} = q_v|_{x+\Delta x} \Delta t = q f_w(S_w^-) \Delta t \quad (4.40)$$

Substituyendo las ecuaciones (4.37), (4.38), (4.39) y (4.40) en (4.36):

$$\begin{aligned} & \left\{ [u(t + \Delta t) - x_1] S_w^+ + [x_2 - u(t + \Delta t)] S_w^- \right\} \Lambda \phi \\ & - \left\{ (u t - x_1) S_w^+ + (x_2 - u t) S_w^- \right\} \Lambda \phi \\ & = \left\{ f_w(S_w^+) - f_w(S_w^-) \right\} q \Delta t \end{aligned}$$

Desarrollando esta ecuación:

$$\begin{aligned} & \left\{ u(t + \Delta t) S_w^+ - x_1 S_w^+ + x_2 S_w^- - u(t + \Delta t) S_w^- \right. \\ & \left. - u t S_w^+ + x_1 S_w^+ - x_2 S_w^- + u t S_w^- \right\} \Lambda \phi \\ & = \left\{ f_w(S_w^+) - f_w(S_w^-) \right\} q \Delta t \end{aligned}$$

Eliminando términos y agrupando:

$$\begin{aligned} & \Lambda \phi S_w^+ \left\{ u(t + \Delta t) - u t \right\} - \Lambda \phi S_w^- \left\{ u(t + \Delta t) - u t \right\} \\ & = \left\{ f_w(S_w^+) - f_w(S_w^-) \right\} q \Delta t \end{aligned}$$

Como los términos  $(u t)$ , y  $(u(t + \Delta t))$  representan la posición de

la onda de choque a  $t$  y  $(t + \Delta t)$  respectivamente, el término  $\{u(t + \Delta t) - u(t)\}$  es el  $\Delta x$  que avanzó la onda, por lo tanto la ecuación anterior queda:

$$A \phi S_w^+ \Delta x - A \phi S_w^- \Delta x = \{f_w(S_w^+) - f_w(S_w^-)\} q \Delta t$$

Agrupando términos y despejando  $A \phi \Delta x / q \Delta t$ :

$$\frac{A \phi \Delta x}{q \Delta t} = \frac{A \phi}{q} u = \frac{f_w(S_w^+) - f_w(S_w^-)}{S_w^+ - S_w^-} \quad (4.41)$$

De la ecuación (4.18) tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = u = \frac{q}{\phi A} \frac{df_w}{dS_w}$$

Que es la ecuación de velocidad específica de una saturación constante, pudiéndose escribir también:

$$\frac{\phi A}{q} u = \frac{df_w}{dS_w} \quad (4.42)$$

Como se observa esta ecuación es similar a la ecuación (4.41), y por lo tanto la ecuación (4.41) nos da la velocidad con que avanza la onda de choque, entonces se puede escribir:

$$u_{\Delta S_w} = \frac{f_w(S_w^+) - f_w(S_w^-)}{S_w^+ - S_w^-} = \frac{\Delta f_w}{\Delta S_w} \quad (4.43)$$

Para incorporar la formación de una onda de choque en el problema de desplazamiento, se considera un perfil de saturación que contenga un valor triple. En general, alguna saturación  $S_w^*$  marcará el final de la saturación de agua continua y el inicio de la onda de choque, esta saturación debe satisfacer simultáneamente

las ecs. (4.18) y (4.42). La ec. (4.18) da velocidades mayores que  $S_w^*$ , y la ec. (4.42) da velocidades de  $S_w$  menores que  $S_w^*$ . Igualando las ecs. (4.41) y (4.42), se obtiene la siguiente ec. para  $S_w^*$ .

$$u_{\Delta S_w} = \frac{\Delta f_w}{\Delta S_w} = \frac{f_w(S_w^*) - f_w(S_{w1})}{S_w^* - S_{w1}} \quad (4.44)$$

Donde tomamos  $S_w^- = S_{w1}$  en la ec. (4.44). La ec. (4.44) conduce ella misma a una solución gráfica, si consideramos que:

$$f_w(S_w) - f_w(S_{w1}) = m (S_w - S_{w1}) \quad (4.45)$$

Es la ecuación de una línea recta de pendiente  $m$  que pasa a través del punto  $(f_{w1}, S_{w1})$  en la gráfica de flujo fraccional. Si  $m = df_w/dS_w$ , entonces  $m$  es la pendiente de esa línea en la gráfica de flujo fraccional, para  $S_w^*$ :

$$m = \frac{f_w - f_w(S_{w1})}{S_w - S_{w1}} = \frac{f_w(S_w^*) - f_w(S_{w1})}{S_w^* - S_{w1}}$$

Por comparación,  $S_w^*$  es la tangente a la curva de flujo fraccional de una línea recta que pasa a través del punto  $(f_{w1}, S_{w1})$ . La pendiente de esta recta es la velocidad específica de la onda de choque. La onda de choque es un cambio discontinuo en saturación desde  $S_{w1}$  hasta  $S_w^*$ , ver fig. (4.7), la saturación  $S_w^*$ , no es la misma que  $S_w'$ ,  $S_w^*$  es la saturación cuya posición requiere que el área neta entre la solución matemática y la solución física sea cero (región sombreada). Esto requiere que la onda de choque preserve el balance de materia. Con esta construcción todas las velocidades de saturación son monótonicamente decrecientes (aunque no continuamente) en la dirección corriente arriba.

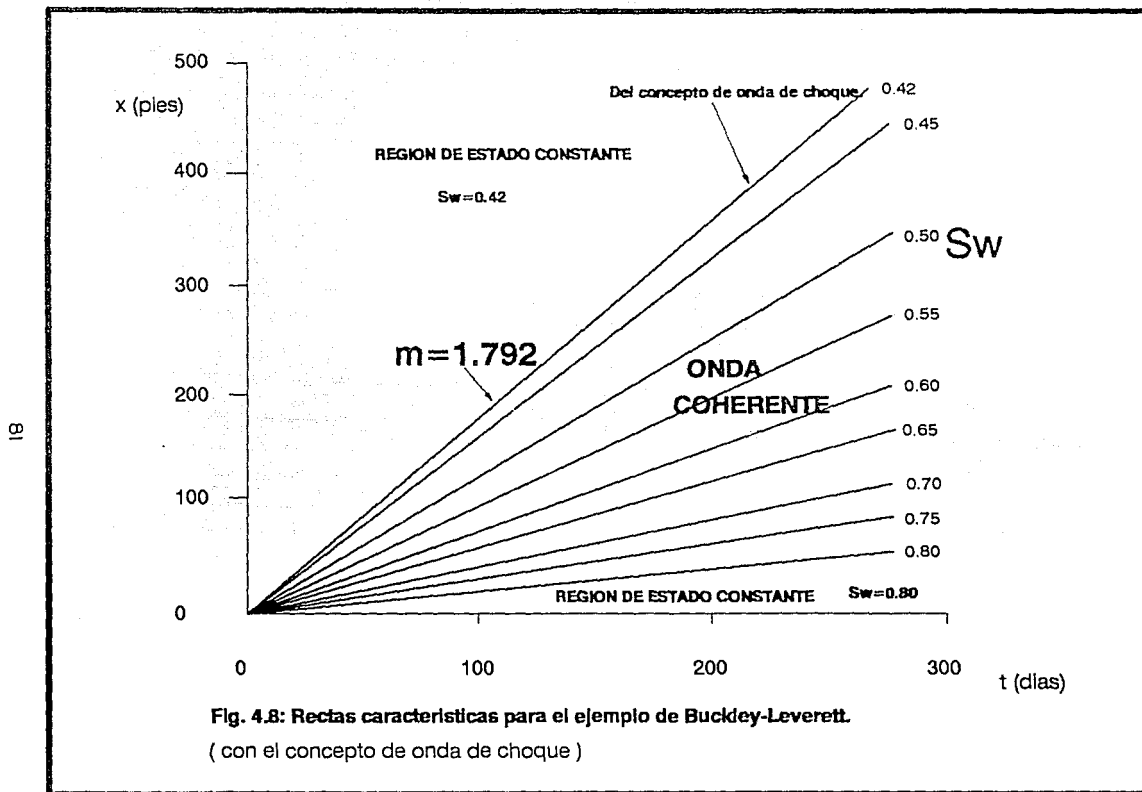
De la fig. (4.6),  $S_w^* = 0.42$ , se considera que para saturaciones menores a  $S_w^*$ ,  $df_w/dS_w$  tiene un valor constante e igual a 1.792

(ver fig 4.3), y para valores mayores que  $S_w^*$ , los valores de  $df_w/dS_w$  se deben obtener de la fig. (4.3) o de la ec. (4.33).

En la fig. (4.8) se presenta el diagrama distancia-tiempo ya aplicado el concepto de onda de choque, como se observa  $m = 1.792$  es el valor de la pendiente en la tangente que pasa por  $S_w^*$  (fig. 4.6). En la figura (4.9) se presentan los resultados calculados anteriormente, así como los obtenidos con un simulador de diferencias finitas, utilizando un esquema de solución totalmente implícito.

La simulación por diferencias finitas en el frente de desplazamiento presenta una difusión numérica. En la fig. 4.10 se presentan los resultados con el método de las características y los obtenidos con un simulador de diferencias finitas utilizando un esquema de solución explícito, la diferencia de resultados del simulador en las figuras. 4.9 y 4.10 es en el valor de  $\Delta x$  utilizado, en la fig. 4.9  $\Delta x = 50$  pies y en la fig. 4.10,  $\Delta x = 20$  pies, en un intento por aproximarse a la solución exacta.

Eliminar la difusión numérica obtenida por los simuladores en el frente de desplazamiento ya ha sido resuelto utilizando un 'factor de peso' (ver Lasseter<sup>18</sup>), el cual provoca el cambio en Saturación en el frente de desplazamiento, este 'factor de peso' actúa comparando las velocidades de onda simple y las velocidades de onda de choque.



**Fig. 4.8: Rectas características para el ejemplo de Buckley-Leverett.**  
 ( con el concepto de onda de choque )

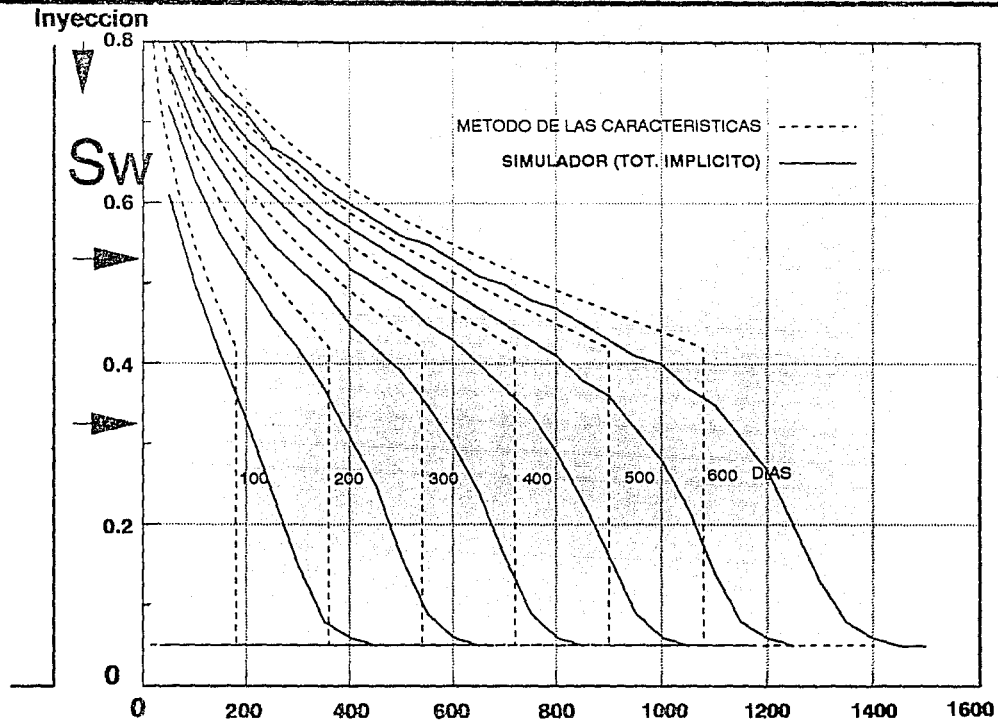


Fig. 4.9: Resultados del ejemplo de Buckley-Leverett por el metodo de las caracteristicas (con el concepto de onda de choque).

pies



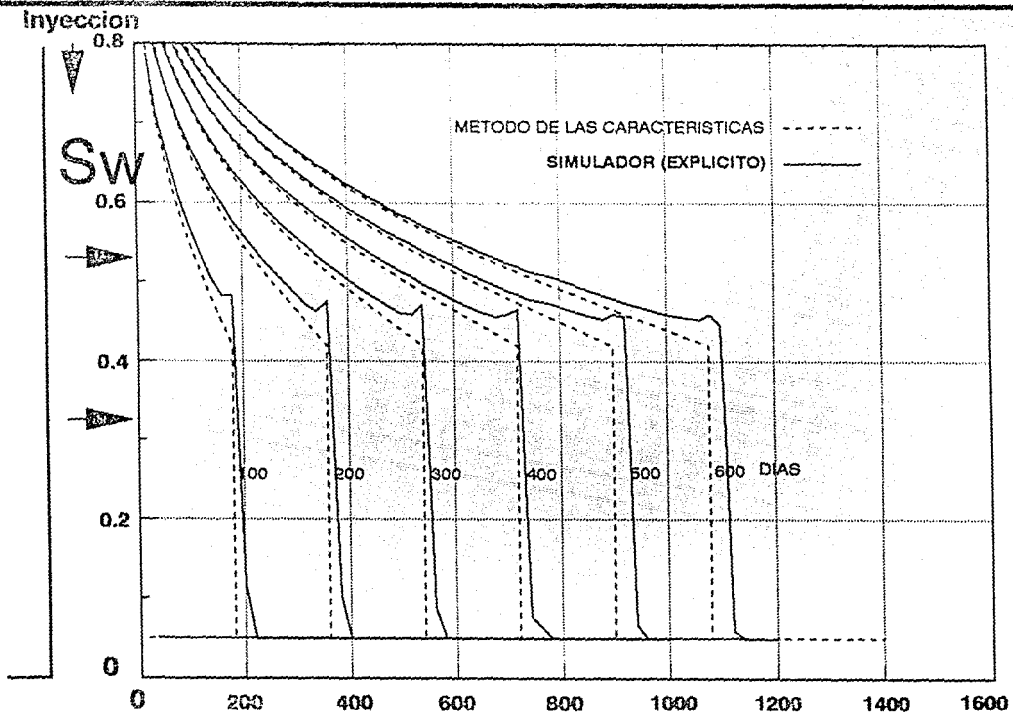


Fig 4.10: Resultados del ejemplo de Buckley-Leverett por el metodo de las caracteristicas (con el concepto de onda de choque).

pies

# CAP. 5

## ACOPLAMIENTO DEL MODELO MATEMATICO DE DOS VARIABLES DEPENDIENTES A FLUJO TRIFASICO

### 5.1.- APLICACION A FLUJO TRIFASICO.

Consideremos un problema de flujo trifásico, agua (subíndice 1), aceite (subíndice 2) y gas (subíndice 3), suponiendo que no existen efectos disipativos, tales como presión capilar y variaciones de las propiedades del fluido dependientes de la presión. (ver APENDICE C), además de que los fluidos son los únicos pseudocomponentes en las fases. La suposición de que una fase de gas sea incompresible es de hecho realista solamente si:

$$c_3 \Delta p \ll \frac{\Delta p}{p}$$

es pequeña, donde  $\Delta p$  es la caída de presión total en el medio poroso y  $c_3$  es la compresibilidad del gas a la presión  $p$ . Esta condición generalmente no se encuentra aunque para flujos en medios altamente permeables, donde se tienen caídas de presión bajas,  $c_3 \Delta p$  puede ser pequeña. Pero si  $c_3 \Delta p$  es grande, la compresibilidad del fluido causa que las ondas se desvanezcan y no afecta la velocidad de la onda.

En nuestro caso tenemos que obtener dos saturaciones  $S_1$  y  $S_2$ , de tal forma que:

$$S_1 + S_2 + S_3 = 1$$

De la ec. (4.9) para la fase agua (subíndice 1):

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\phi A}{q} \frac{\partial S_1}{\partial t} = 0$$

Como  $u = q/A$ :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\phi}{u} \frac{\partial S_1}{\partial t} = 0 \quad (5.1)$$

Multiplicando por L:

$$L \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{L \phi}{u} \frac{\partial S_1}{\partial t} = 0$$

O bien:

$$\frac{\partial f_1}{\partial (x/L)} + \frac{\partial S_1}{\partial (u t/L \phi)} = 0 \quad (5.2)$$

Definiendo:

$$x_D = x/L \quad (5.3)$$

$$t_D = \frac{u t}{\phi L} \quad (5.4a)$$

Si el gasto de inyección es constante, y:

$$t_D = \int_0^t \frac{u dt}{\phi L} \quad (5.4b)$$

Si el gasto de inyección es variable. Substituyendo las ecuaciones (5.3) y (5.4) en (5.2):

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_D} + \frac{\partial f_1}{\partial x_D} = 0 \quad (5.5)$$

Para la fase agua, y para la fase aceite:

$$\frac{\partial S_2}{\partial t_D} + \frac{\partial f_2}{\partial x_D} = 0 \quad (5.6)$$

Donde para un yac. horizontal:

$$f_j = \frac{\lambda_{rj}}{\sum_{m=1}^2 \lambda_{rm}} \quad (5.7)$$

Las movilidades son:

$$\lambda_j = \frac{k_{rj}}{\mu_j} \quad (5.8)$$

Las permeabilidades relativas se miden en el laboratorio o se estiman de datos de campo y son función de las saturaciones.

De la ec. (4.18) del ejemplo de Buckley-Leverett:

$$\frac{dx}{dt} \frac{\phi}{u} = \frac{df_w}{dS_w}$$

La cual es la ecuación de velocidad de una fase (en este caso la fase agua), donde  $u$  es igual a  $q/\lambda$ . Multiplicando por  $L/L$ :

$$\frac{dx}{dt} \frac{\phi}{u} \frac{L}{L} = \frac{df_w}{dS_w} = \frac{d(x/L)}{d\left(\frac{u}{\phi} \frac{t}{L}\right)} = \frac{df_w}{dS_w}$$

De las definiciones de variables adimensionales (5.3) y (5.4):

$$\frac{dx_D}{dt_D} = \frac{df_w}{dS_w}$$

De esta ecuación y de la ecuación de coherencia (3.57):

$$\sigma = \frac{dx_D}{dt_D} = \frac{df_1}{dS_1} = \frac{df_2}{dS_2} = \dots = \frac{df_N}{dS_N} \quad (5.9)$$

Donde  $m$  es el número total de fases (o componentes), si la onda no tiene irregularidades, y si es onda de choque (sección 4.3.1):

$$v_{s_j} = \frac{\Delta f_1}{\Delta S_j}, \quad j = 1 \text{ ó } 2 \quad (5.10)$$

La ecuación (5.9), para el caso de flujo trifásico:

$$\sigma = v_{s_j} = \frac{df_1}{dS_1} = \frac{df_2}{dS_2} \quad (5.11)$$

Como:  $f_1 = f_1(S_1, S_2)$ ,  $S_1 = S_1(x_D, t_D)$  y  $S_2 = S_2(x_D, t_D)$ , a  $S_1$  y  $S_2$  se les llama variables primarias, y a  $x_D$  y  $t_D$  variables secundarias, entonces la derivada de  $f_1$  con respecto a cualquiera de las variables secundarias se puede escribir<sup>19</sup>:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_D} = \frac{\partial f_1}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial x_D} + \frac{\partial f_1}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial x_D} \quad (5.12)$$

De la misma manera la derivada parcial de  $f_2$  con respecto a  $x_D$ :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_D} = \frac{\partial f_2}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial x_D} + \frac{\partial f_2}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial x_D} \quad (5.13)$$

Substituyendo la ec. (5.12) y (5.13) en (5.5) y (5.6) respectivamente:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_D} + \frac{\partial f_1}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial x_D} + \frac{\partial f_1}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial x_D} = 0 \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial t_D} + \frac{\partial f_2}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial x_D} + \frac{\partial f_2}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial x_D} = 0 \quad (5.15)$$

Estas dos ecuaciones son de la forma de la ec. (3.17), donde  $u = S_1$  y  $v = S_2$ , por lo tanto se puede aplicar el método de las características. Para la ec. (5.14):

MODELO	EJEMPLO	MODELO	EJEMPLO
<u>MAT.</u>	<u>TRIF.</u>	<u>MAT.</u>	<u>TRIF.</u>
A <sub>1</sub>	1	u <sub>t</sub>	$\frac{\partial S_1}{\partial t_D}$
B <sub>1</sub>	$\frac{\partial f_1}{\partial S_1}$	u <sub>x</sub>	$\frac{\partial S_1}{\partial x_D}$
C <sub>1</sub>	0	v <sub>t</sub>	0
D <sub>1</sub>	$\frac{\partial f_1}{\partial S_2}$	v <sub>x</sub>	$\frac{\partial S_2}{\partial x_D}$

Y para la ecuación (5.15):

MODELO	EJEMPLO	MODELO	EJEMPLO
<u>MAT.</u>	<u>TRIF.</u>	<u>MAT.</u>	<u>TRIF.</u>
A <sub>2</sub>	0	u <sub>t</sub>	0
B <sub>2</sub>	$\frac{\partial f_2}{\partial S_1}$	u <sub>x</sub>	$\frac{\partial S_1}{\partial x_D}$
C <sub>2</sub>	1	v <sub>t</sub>	$\frac{\partial S_2}{\partial t_D}$
D <sub>2</sub>	$\frac{\partial f_2}{\partial S_2}$	v <sub>x</sub>	$\frac{\partial S_2}{\partial x_D}$

Si definimos:

$$\left. \begin{aligned} f_{11} &= \partial f_1 / \partial S_1 \\ f_{12} &= \partial f_1 / \partial S_2 \\ f_{21} &= \partial f_2 / \partial S_1 \\ f_{22} &= \partial f_2 / \partial S_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Substituyendo en la ec. (3.46):

$$\sigma^2 + (-f_{11} - f_{22})\sigma + (f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}) = 0 \quad (5.17)$$

Resolviendo para  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{(f_{11} + f_{22}) \pm \left\{ (-f_{11} - f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}) \right\}^{1/2}}{2}$$

Desarrollando el término al cuadrado y eliminando términos:

$$\sigma = \frac{(f_{11} + f_{22}) \pm \left\{ f_{11}^2 - 2 f_{11} f_{22} + f_{22}^2 + 4 f_{12} f_{21} \right\}^{1/2}}{2}$$

Queda:

$$\sigma = \frac{1}{2} \left\{ (f_{11} + f_{22}) \pm \left[ (f_{11} - f_{22})^2 + 4 f_{12} f_{21} \right]^{1/2} \right\} \quad (5.18)$$

En nuestro ejemplo las dos variables dependientes son  $S_1$  y  $S_2$ ,  $u = S_1$  y  $v = S_2$ , de la ec. (3.49):

$$f_{21} \frac{du}{dv} = -\sigma + f_{11}$$

Por lo tanto:

$$\frac{dS_1}{dS_2} = \frac{f_{11} - \sigma}{f_{21}} \quad (5.19)$$

Otra forma de obtener las ecuaciones (5.18) y (5.19), es considerando las derivadas totales de flujo fraccional:

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial f_1}{\partial S_2} dS_2 \quad (5.20)$$

$$df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial f_2}{\partial S_2} dS_2 \quad (5.21)$$

Multiplicando el lado izquierdo de las ecs. (5.20) y (5.21) por  $dS_1/dS_1$  y  $dS_2/dS_2$  respectivamente, se obtiene:

$$\frac{df_1}{dS_1} dS_1 = \frac{\partial f_1}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial f_1}{\partial S_2} dS_2 \quad (5.22)$$

$$\frac{df_2}{dS_2} dS_2 = \frac{\partial f_2}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial f_2}{\partial S_2} dS_2 \quad (5.23)$$

Substituyendo la ecuación (5.11) y tomando en cuenta las definiciones (5.16), las ecs. (5.22) y (5.23) quedan:

$$\sigma dS_1 = f_{11} dS_1 + f_{12} dS_2$$

$$\sigma dS_2 = f_{21} dS_1 + f_{22} dS_2$$

Estas dos últimas ecuaciones en forma matricial<sup>3</sup>:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dS_1 \\ dS_2 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} dS_1 \\ dS_2 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Como se observa este es un sistema de valores característicos<sup>20</sup> (Eigensistema), por lo tanto se resuelve:

$$\det \left\{ \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \right\} = 0$$

Esto es igual a:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \sigma - f_{11} & -f_{12} \\ -f_{21} & \sigma - f_{22} \end{bmatrix} &= (\sigma - f_{11})(\sigma - f_{22}) - (-f_{12})(-f_{21}) \\ &= \sigma^2 - \sigma(f_{11} + f_{22}) + f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} = 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Como se observa esta ecuación es la misma que la ecuación (5.17), y por lo tanto al resolver para  $\sigma$  se llega a la ecuación (5.18). Para la obtención de los eigenvectores se resuelve el sistema para un eigenvalor, por ejemplo para  $\sigma^+$  (eigenvalor mayor):

$$\begin{aligned} \left\{ \sigma^+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} dS_1 \\ dS_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma^+ - f_{11} & -f_{12} \\ -f_{21} & \sigma^+ - f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dS_1 \\ dS_2 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$



Por lo tanto:

$$(\sigma^+ - f_{11}) dS_1 = f_{12} dS_2$$

Despejando:

$$\frac{dS_2}{dS_1} = \frac{\sigma^+ - f_{11}}{f_{12}} \quad (5.27)$$

De la ec. (5.26) también se obtiene:

$$(\sigma^+ - f_{22}) dS_2 = f_{21} dS_1$$

Despejando:

$$\frac{dS_2}{dS_1} = \frac{f_{21}}{\sigma^+ - f_{22}} \quad (5.28)$$

Para el eigenvalor  $\sigma^-$  (valor menor), las ecuaciones (5.27) y (5.28) son las mismas, únicamente substituyendo el valor de  $\sigma^+$  por  $\sigma^-$ . En el APENDICE D se presenta la generalización de la teoría de coherencia a  $n$  fases (componentes).

## 5.2.- EJEMPLO DE APLICACION DE FLUJO TRIFASICO (VER LAKE<sup>1</sup>).

Considerando una mezcla de aceite-gas siendo desplazada por agua, donde las permeabilidades relativas están expresadas por:

$$k_{rj} = \frac{S_j - S_{jr}}{1 - S_{1r} - S_{2r} - S_{3r}}, \quad j = 1 \text{ ó } 2 \quad (5.29)$$

El subíndice  $j$  se refiere a las fases. Las saturaciones residuales de cada fase son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} S_{1r} &= 0.1 \\ S_{2r} &= 0.1 \\ S_{3r} &= 0.1 \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

Las viscosidades son:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 1.00 \text{ mPaS} \\ \mu_2 &= 5.00 \text{ mPaS} \\ \mu_3 &= 0.01 \text{ mPaS} \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

Las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{aligned} S_{1i} &= 0.10 \\ S_{2i} &= 0.45 \\ S_{3i} &= 0.45 \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

Las condiciones de frontera:

$$\left. \begin{aligned} S_{1j} &= 0.8 \\ S_{2j} &= 0.1 \\ S_{3j} &= 0.1 \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Este procedimiento corresponde a la inyección de agua a un yacimiento, iniciada ésta, en la fase de producción primaria.

En la fig. (5.1) se presentan las permeabilidades relativas obtenidas de la ec. (5.29).

La movilidad de la fase  $j$  está definida por:

$$\lambda_j = \frac{k_{rj}}{\mu_j} \quad (5.34)$$

Y a su vez el flujo fraccional de cada fase:

$$f_j = \frac{\lambda_j}{\sum_{m=1}^3 \lambda_{rm}} \quad (5.35)$$

Substituyendo (5.34) en la ec. (5.35):

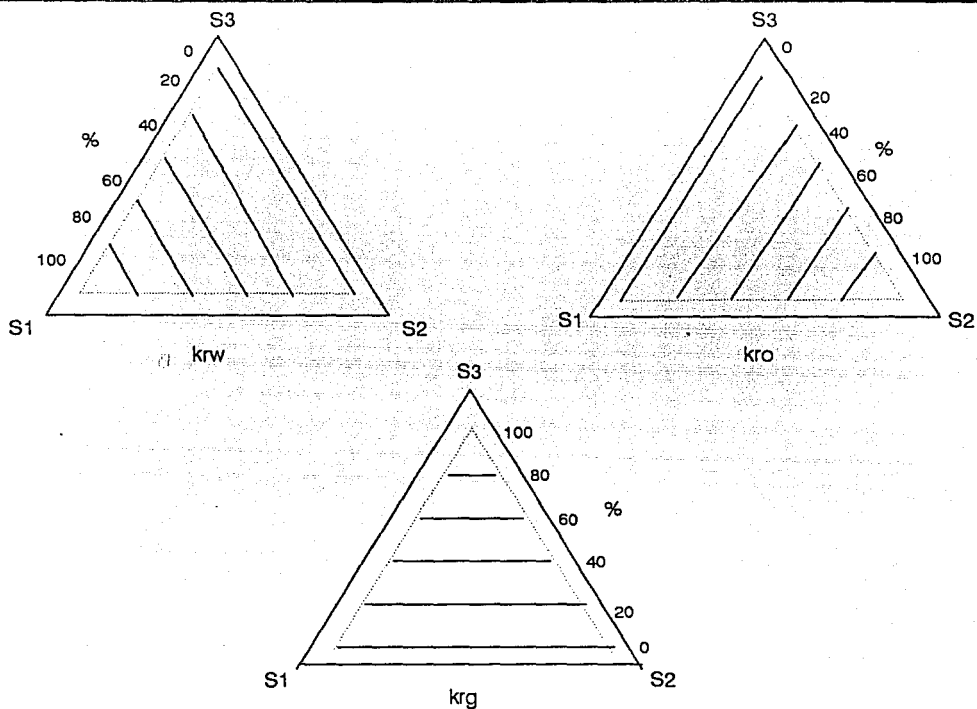
$$f_j = \frac{\frac{k_{rj}}{\mu_j}}{\sum_{m=1}^3 \frac{k_{rm}}{\mu_m}}$$

Para la fase 1 y 2:

$$f_1 = \frac{\frac{k_{r1}}{\mu_1}}{\sum_{m=1}^3 \frac{k_{rm}}{\mu_m}}$$

$$f_2 = \frac{\frac{k_{r2}}{\mu_2}}{\sum_{m=1}^3 \frac{k_{rm}}{\mu_m}}$$

Derivando estas dos ecuaciones con respecto a  $S_1$  y  $S_2$ :



**Fig. 5.1: Permeabilidades relativas al agua, aceite y gas (subíndice 1, 2 y 3 respectivamente), para el ejemplo de flujo trifásico.**

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_1} = \frac{\sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \frac{\partial}{\partial S_1} \left( \frac{K_{r1}}{\mu_1} \right) - \left( \frac{K_{r1}}{\mu_1} \right) \frac{\partial}{\partial S_1} \left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right)}{\left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right)^2} \quad (5.36a)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_2} = \frac{\sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \frac{\partial}{\partial S_2} \left( \frac{K_{r1}}{\mu_1} \right) - \left( \frac{K_{r1}}{\mu_1} \right) \frac{\partial}{\partial S_2} \left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right)}{\left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right)^2} \quad (5.36b)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_1} = \frac{\sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \frac{\partial}{\partial S_1} \left( \frac{K_{r2}}{\mu_2} \right) - \left( \frac{K_{r2}}{\mu_2} \right) \frac{\partial}{\partial S_1} \left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right)}{\left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right)^2} \quad (5.36c)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_2} = \frac{\sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \frac{\partial}{\partial S_2} \left( \frac{K_{r2}}{\mu_2} \right) - \left( \frac{K_{r2}}{\mu_2} \right) \frac{\partial}{\partial S_2} \left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right)}{\left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right)^2} \quad (5.36d)$$

De la ec. (5.29)

$$\frac{K_{r1}}{\mu_1} = \frac{S_1 - S_{1r}}{\mu_1 (1 - S_{1r} - S_{2r} - S_{3r})}$$

Definiendo:  $S_D = 1 - S_{1r} - S_{2r} - S_{3r}$ , entonces:

$$\frac{K_{r1}}{\mu_1} = \frac{S_1 - S_{1r}}{\mu_1 S_D} \quad (5.37)$$

Desarrollando las derivadas de las ecs (5.36):

$$\frac{\partial}{\partial S_1} \left( \frac{K_{r1}}{\mu_1} \right) = \frac{\partial}{\partial S_1} \left( \frac{S_1 - S_{1r}}{\mu_1 S_D} \right) = \frac{1}{\mu_1 S_D} \quad (5.38a)$$

$$\frac{\partial}{\partial S_1} \left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right) = \frac{\partial}{\partial S_1} \left( \sum_{m=1}^3 \frac{S_m - S_{mr}}{\mu_m S_D} \right) = \frac{1}{\mu_1 S_D} - \frac{1}{\mu_3 S_D} \quad (5.38b)$$

$$\frac{\partial}{\partial S_2} \left( \frac{K_{r1}}{\mu_1} \right) = \frac{\partial}{\partial S_2} \left( \frac{S_1 - S_{1r}}{\mu_1 S_D} \right) = 0 \quad (5.38c)$$

$$\frac{\partial}{\partial S_2} \left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right) = \frac{\partial}{\partial S_2} \left( \sum_{m=1}^3 \frac{S_m - S_{mr}}{\mu_m S_D} \right) = \frac{1}{\mu_2 S_D} - \frac{1}{\mu_3 S_D} \quad (5.38d)$$

$$\frac{\partial}{\partial S_1} \left( \frac{K_{r2}}{\mu_2} \right) = \frac{\partial}{\partial S_1} \left( \frac{S_2 - S_{2r}}{\mu_2 S_D} \right) = 0 \quad (5.38e)$$

$$\frac{\partial}{\partial S_2} \left( \frac{K_{r2}}{\mu_2} \right) = \frac{\partial}{\partial S_2} \left( \frac{S_2 - S_{2r}}{\mu_2 S_D} \right) = \frac{1}{\mu_2 S_D} \quad (5.38f)$$

De las saturaciones residuales (5.30):

$$S_D = 1 - 0.1 - 0.1 - 0.1 = 0.7 \quad (5.39)$$

Substituyendo este valor y los valores de viscosidad (5.31) en las ecs. (5.38):

$$\frac{\partial}{\partial S_1} \left( \frac{K_{r1}}{\mu_1} \right) = \frac{1}{0.7} = 1.4285714 \quad (5.40a)$$

$$\frac{\partial}{\partial S_1} \left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right) = \frac{1}{0.7} - \frac{1}{(0.01)(0.7)} = -141.4285714 \quad (5.40b)$$

$$\frac{\partial}{\partial S_2} \left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right) = \frac{1}{(5)(0.7)} - \frac{1}{(0.01)(0.7)} = -142.5714286 \quad (5.40c)$$

$$\frac{\partial}{\partial S_2} \left( \frac{K_{r2}}{\mu_2} \right) = \frac{1}{(5)(0.7)} = 0.2857143 \quad (5.40d)$$

Substituyendo los valores (5.40), (5.38c) y (5.38e) en las ecs. (5.36):

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_1} = \frac{1.42857 \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} + 141.4285714 \frac{K_{r1}}{\mu_1}}{\left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right)^2} \quad (5.41a)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_2} = \frac{142.5714286 \frac{K_{r1}}{\mu_1}}{\left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right)^2} \quad (5.41b)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_1} = \frac{141.4285714 \frac{K_{r2}}{\mu_2}}{\left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right)^2} \quad (5.41c)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_2} = \frac{0.2857 \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} + 142.5714286 \frac{K_{r2}}{\mu_2}}{\left( \sum_{m=1}^3 \frac{K_{rm}}{\mu_m} \right)^2} \quad (5.41d)$$

Tomando en cuenta las definiciones (5.16), substituyendo las ecuaciones (5.41) en la ecuación (5.18) y posteriormente en la ec. (5.27), obtenemos una ecuación diferencial ordinaria no lineal, ésta, no se puede integrar directamente, por lo tanto se utilizó el método numérico de Runge-Kutta-Feldberg para su solución (ver APENDICE E). La fig. (5.2) muestra diferentes valores calculados de  $S_2$  para diferentes condiciones iniciales dadas a la ec. (5.27), utilizando los valores de  $\sigma^+$  y  $\sigma^-$ . La misma información de la figura (5.2) se presenta en la gráfica triangular (5.3), para resaltar el hecho de que  $S_1 + S_2 + S_3 = 1$ .

En nuestro ejemplo, las líneas continuas representan la solución para la  $\sigma^+$ , y las líneas discontinuas para la  $\sigma^-$ , cada línea es la resultante de una sola condición inicial de nuestro sistema, y las flechas indican el sentido en que aumenta el valor de  $\sigma$ .

A la gráfica triangular (fig. 5.3) se le llama diagrama de rutas composicionales, este diagrama es general, ya que no está restringido a ciertas condiciones iniciales y de frontera. Las rutas señaladas con las flechas indican la trayectoria que sigue el proceso de desplazamiento desde las condiciones iniciales hasta

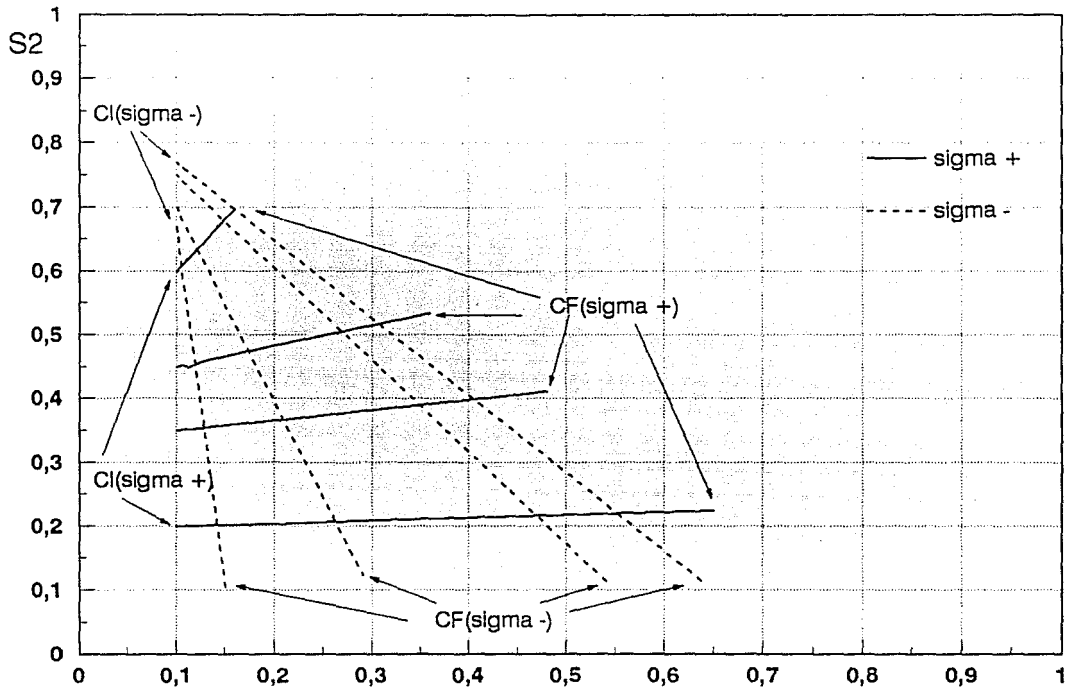


Fig. 5.2: Resultados de la ecuación diferencial para diferentes condiciones iniciales y de frontera, (ejemplo de flujo trifásico).

S1



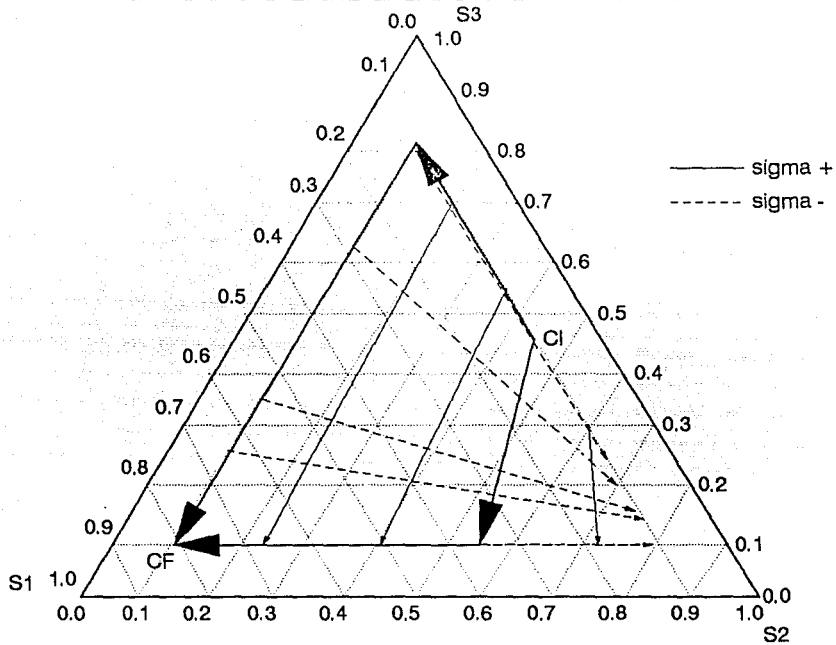


Fig. 5.3: Diagrama de rutas composicionales (ejemplo de flujo trifasico).

las condiciones de frontera.

De las condiciones iniciales de nuestro ejemplo:  $S_1=0.1$ ,  $S_2=0.45$  (ec. (5.32)), se tienen dos trayectorias posibles para llegar a las condiciones de frontera  $S_1 = 0.8$ ,  $S_2 = 0.10$  (ec. (5.33)). La primera, parte de la condición inicial, siguiendo por la trayectoria definida por la  $\sigma^-$  hasta el vértice superior, y de ahí al vértice izquierdo (condición de frontera). La segunda trayectoria, parte de la condición inicial, sigue por la trayectoria definida por la  $\sigma^+$  hasta el punto ( $S_1=0.36$ ,  $S_2=0.54$ ,  $S_3=0.10$ ), continuando hasta el vértice izquierdo (condición de frontera).

Como el valor de  $\sigma$  representa velocidades específicas de saturación constante, las cuales deben de disminuir monótonicamente, aunque no continuamente en la dirección de flujo, y como  $\sigma^+ > \sigma^-$ , por lo tanto la única ruta posible es la segunda.

La primera ruta que define a nuestro sistema es la definida por los valores de  $\sigma^+$ , y en ésta, no decrecen los valores de las  $\sigma$ 's, sino al contrario aumentan, entonces es una onda de choque.

Graficando  $f_1$  vs.  $S_1$  para la ruta  $\sigma^+$  y  $\sigma^-$ , se obtiene la figura (5.4a), haciendo lo mismo con  $f_2$  vs.  $S_2$  se obtiene la figura (5.4b). Del concepto de onda de choque, trazando una línea tangente de la condición inicial a la unión de las curvas generadas por  $\sigma^+$  y  $\sigma^-$ , se obtiene la figura (5.4c), como puede observarse, las rectas tangentes de  $f_1$  vs.  $S_1$  y de  $f_2$  vs.  $S_2$  tienen la misma pendiente, esta relación está avalada por la ec. (5.11), por lo tanto la curva que sirve para representar a nuestro sistema es la curva señalada con línea gruesa, fig. (5.4d).

De la fig. (5.4d), se puede construir el diagrama distancia-tiempo. Las sigmas son las pendientes en la gráfica  $f_1$

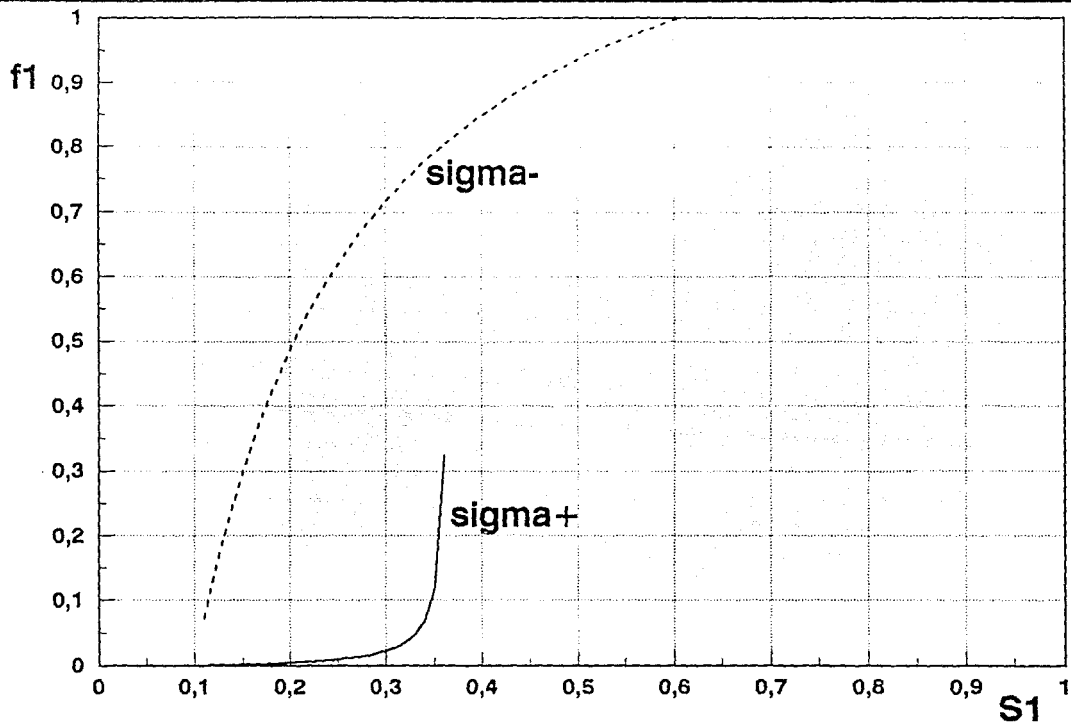


Fig. 5.4a:  $f_1$  vs.  $S_1$  para la  $\sigma$  positiva y negativa (ejemplo de flujo trifásico)

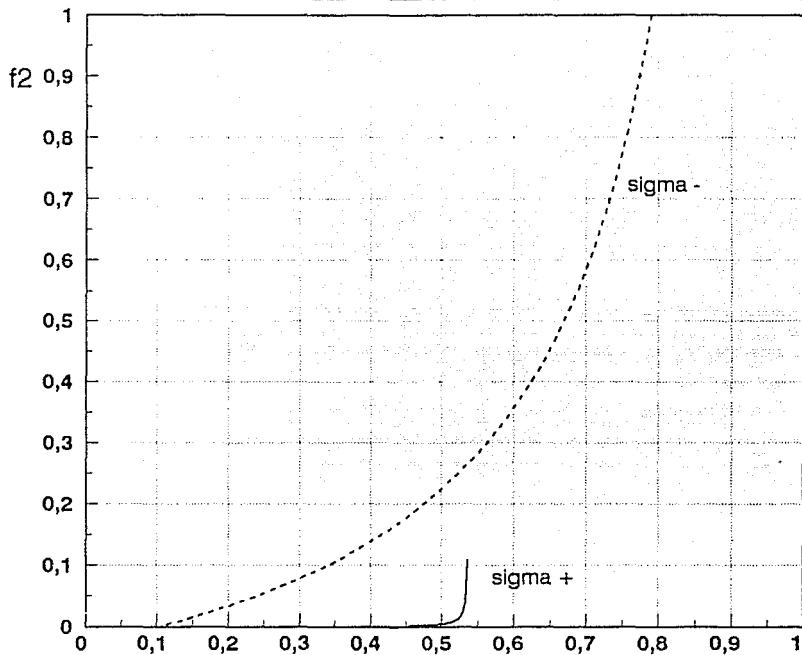


Fig. 5.4b:  $f_2$  vs  $S_2$  para la  $\sigma$  positiva y negativa  
(ejemplo de flujo trifásico).

$S_2$

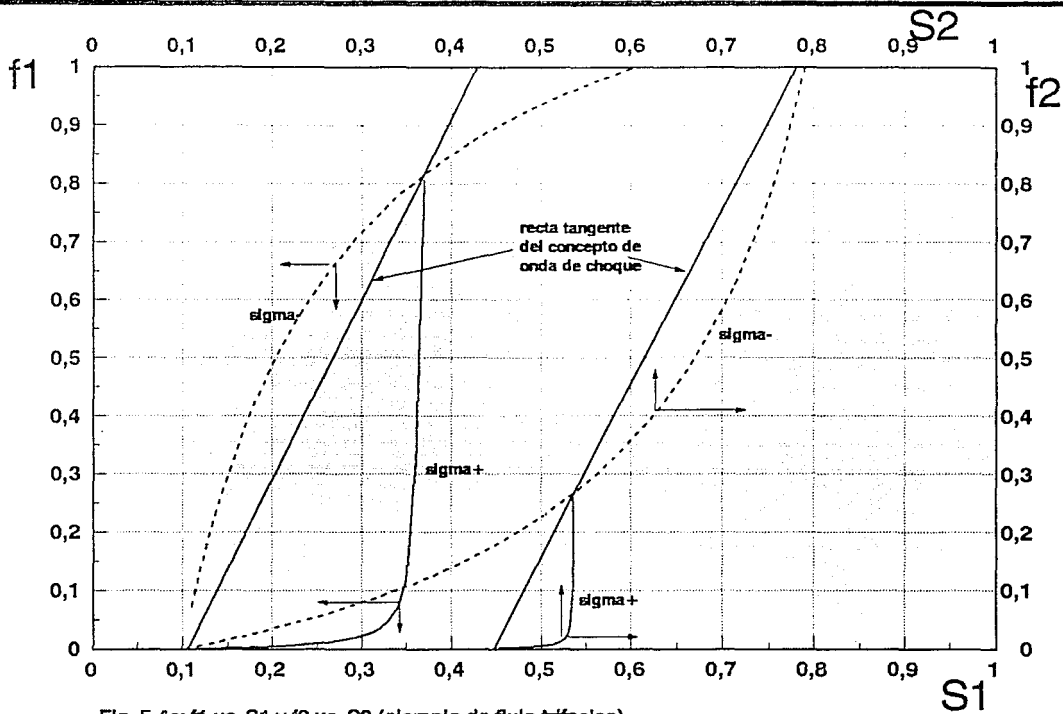


Fig. 5.4c:  $f_1$  vs.  $S_1$  y  $f_2$  vs.  $S_2$  (ejemplo de flujo trifásico).

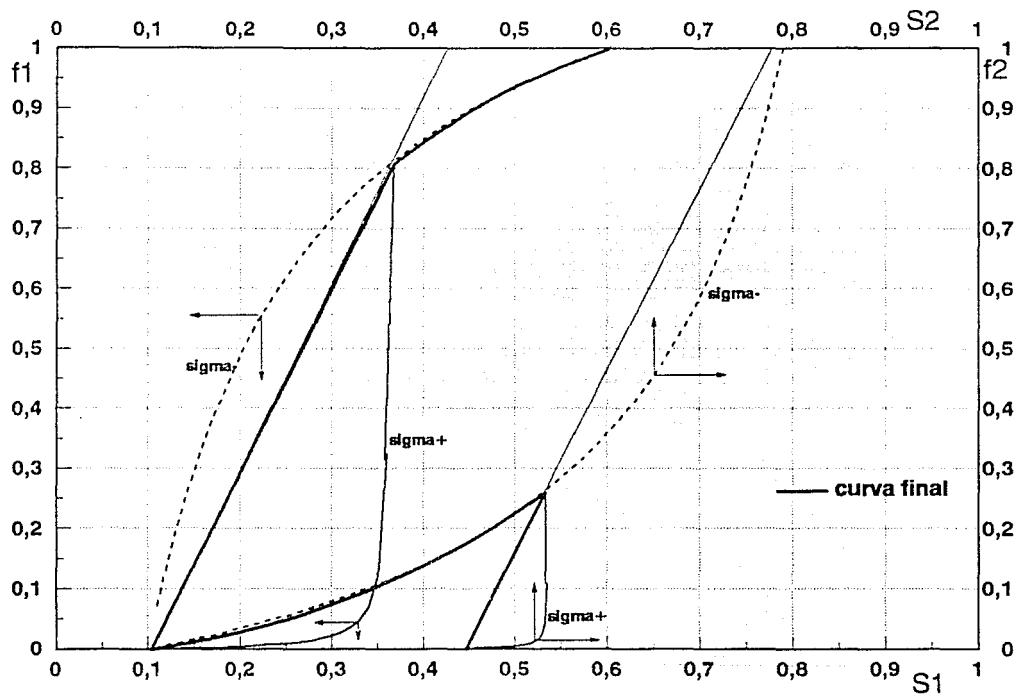


Fig. 5.4d:  $f_1$  vs.  $S_1$  y  $f_2$  vs.  $S_2$  (ejemplo de flujo trifásico).

vs.  $S_1$  y  $f_2$  vs.  $S_2$  (ec. (5.11)). En la parte donde el valor de  $\sigma$  no disminuye monóticamente, se tiene la tangente a la curva resultado del concepto de onda de choque (ver fig. (5.4d)). De lo anterior resulta la fig. 5.5. De la ec. (5.9),  $\sigma = dx_D/dt_D$  es la pendiente de las rectas características en el diagrama distancia-tiempo, por lo tanto  $dx_D = \sigma dt_D$  y se puede construir la siguiente tabla.

$S_1$	$S_2$	$\sigma$	$t_D=0.25$	$t_D=0.5$	$t_D=0.75$	$t_D=1$
			$dx_D=0.25\sigma$	$dx_D=0.5\sigma$	$dx_D=0.75\sigma$	$dx_D=\sigma$
0.36	0.54	1.2451	0.31127	0.6225	0.9338	1.2451
0.40	0.50	1.0440	0.26100	0.5220	0.7830	1.0440
0.50	0.40	0.7128	0.17820	0.3564	0.5346	0.7128
0.60	0.30	0.5173	0.12932	0.2586	0.3879	0.5173
0.70	0.20	0.3924	0.09810	0.1962	0.2943	0.3924
0.80	0.10	0.3079	0.07690	0.1539	0.2309	0.3079

Tabla 5.1.- Cálculos de  $dx_D$  para diferentes valores de  $t_D$ , utilizando las rectas características de la fig. 5.5.

En la fig. 5.6, se muestran graficados los valores de la tabla 5.1, presentándose  $S_1$  y  $S_2$  vs.  $x_D$  para diferentes valores de  $t_D$ , pudiéndose observar el perfil de saturación obtenido para cada valor de  $t_D$ , además del efecto de la onda de choque.

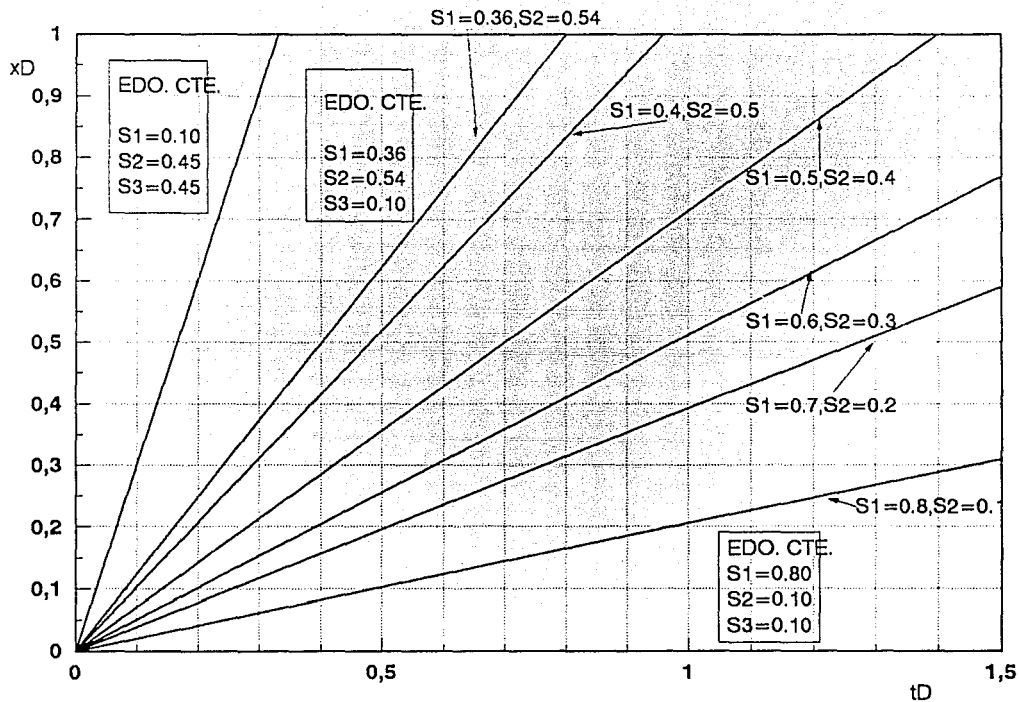


Fig. 5.5: Diagrama distancia-tiempo (ejemplo de flujo trifasico).



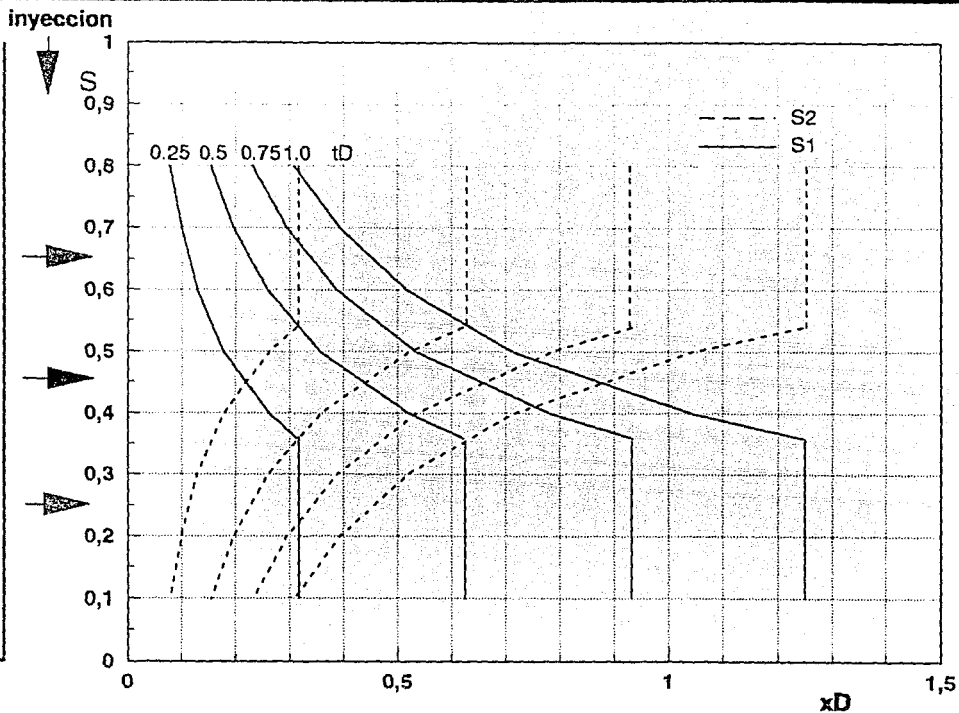


Fig. 5.6: Perfiles de saturacion a diferentes tD (ejemplo de flujo trifasico).

# CAP. 6

## CONCLUSIONES

El método de las características para resolver EDPs conjuntado con la teoría de flujo fraccional en medios porosos, forman una herramienta para resolver problemas de flujo en medios porosos. De la discusión en los capítulos anteriores se concluye:

- 1.- Se desarrolló un modelo aplicable para estudios de Recuperación Mejorada de Hidrocarburos, el cual es para una dimensión.
- 2.- Es un modelo que no implica altos costos de cómputo, como lo es un Simulador Numérico, ya que se puede aplicar en una computadora personal (PC).
- 3.- No se requiere de un grado alto de especialización para manejar este tipo de modelos, comparado con el requerido para el manejo de los Simuladores Numéricos.
- 4.- El modelo no se limita al flujo de dos fases y tiene como caso particular, la teoría de avance frontal de Buckley-Leverett.
- 5.- Se puede aplicar en procesos de flujo multifásico multicomponente, en desplazamientos de tipo miscible.

6.- La teoría de Buckley-Leverett ha demostrado sus bondades en la predicción del comportamiento de desplazamiento de fluidos a través de medios porosos.

7.- La teoría de flujo fraccional combinada con el método de las características o teoría de coherencia, se convierte en una herramienta poderosa para estudios de RMH.

# **CAP. 7**

## **RECOMENDACIONES**

- 1.- Se considera muy recomendable aplicar el modelo a casos de campo, debido a su sencillez.
- 2.- Se recomienda utilizarlo en estudios de recuperación mejorada para conocer la factibilidad de su implantación.
- 3.- Se recomienda ahondar en el estudio de la teoría de flujo fraccional aplicada a desplazamientos de tipo miscible.

# CAP. 8

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- 1.- Lake, L. W., Enhanced Oil Recovery, New Jersey, Prentice Hall (1989).
- 2.- Samaniego-V., F., Apuntes Materia: Mecánica de yacimientos. DEPEFI - UNAM. 1989.
- 3.- Helfferich, F. G., "Theory of Multicomponent, Multiphase Displacement in Porous Media". SPEJ (Feb. 1981).
- 4.- Taber, J. J. and Martin, F. D., "Technical Screening Guides for the Enhanced Recovery of Oil", SPE 12069 (1983).
- 5.- Van-Poolen, H. K., Enhanced Oil Recovery, PENWELL BOOKS (1980).
- 6.- Prats, M., Thermal Recovery, AIME - Vol. 7 (1986).
- 7.- Slobod, R. L. and Koch, H. A., Jr., "Which to Use - 'I' Type or 'M' Type in High-Pressure Gas Injection", Oil and Gas Journal (Abril 6, 1953).

8.- Allison, E., Waldrop, R. and Ray, M., Supporting Technology for Enhanced Oil Recovery, U. S. Dep. of Energy. Bartlesville Oklahoma 74005 (feb. 1988).

9.- Reynolds, W., Notas: Curso de Matemáticas para Ingenieros Mecánicos, Standford University.

10.- Smith, G. D., Numerical Solution of Partial Diferential Equations: Finite Difference Methods, Oxford Aplied Mathematics and Computing Science Series.

11.- Buckley, S. E. and Leverett, M. C., "Mechanisms of Fluid Displacement in Sands", Transactions of AIMME, 146(1942), 107-116.

12.- Welge, H. J., "A Simplified Method for Computing Oil Recovery by gas or Water Drive", Transactions of AIMME, 195(1952), 91-98.

13.- Craig, F. F., Jr., The Reservoir Engineering Aspects of Waterflooding, Society of Petroleum Engineers Monograph, Dallas (1971).

14.- Pope, G. A., "The Aplication of fractional flow theory to Enhanced Oil Recovery", SPEJ (June 1980), 191-205.

15.- García-H, F., Apuntes de Simulación Avanzada de Yacimientos. DEPMI-UNAM.

16.- Collins, R. E., Flow of Fluids Trough Porous Materials. Penwell Books. (1976).

17.- Marle, C. M., Multiphase Flow in Porous Media. Institut Francais Du Pétrole Publications, Gulf Publishing Company (1981).

18.- Lasseter, T. J., "The extension of the Variable-Flux-Weighting Method to Multidimensional Problems Including Gravity and Capillarity", SPE No.13508, Dallas Texas 1985

19.- Thomas, G. B., Jr., Calculus and Analitic Geometry, Third Edition (June 1962).

20.- Anton, H., Introducción al Algebra Lineal, LIMUSA, 3<sup>a</sup> Edición (1986).

21.- Rapoport, L. A. and Leas, W. J., "Properties of Linear Waterfloods", Transactios of AIMME, 198(1953), 139-148.

## APENDICE A

### FORMA ALTERNA DE LA ECUACION DE FLUJO FRACCIONAL



De la ec. (4.14), y como  $k_2 = k_{kr2}$ ,  $k_1 = k_{kr1}$ , considerando al subíndice 1, la fase mojanete y al 2 la fase no mojanete, el flujo fraccional de la fase mojanete es:

$$f_1 = \frac{\frac{\Lambda k_{kr2}}{q \mu_2} \left[ \frac{\partial p_c}{\partial x} - \Delta \rho g \sin \alpha \right] + 1}{1 + \frac{k_{kr2}}{k_{kr1}} \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

las movilidades se definen como:  $\lambda_1 = k_{r1}/\mu_1$  y  $\lambda_2 = k_{r2}/\mu_2$ , entonces:

$$f_1 = \frac{\frac{\Lambda k \lambda_2}{q} \left[ \frac{\partial p_c}{\partial x} - \Delta \rho g \sin \alpha \right] + 1}{1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

el denominador  $1 + \lambda_2/\lambda_1$  es igual a  $(\lambda_1 + \lambda_2)/\lambda_1$ , substituyendo en la ecuación anterior y desarrollando:

$$f_1 = \frac{\frac{\Lambda k \lambda_2}{q} \frac{\partial p_c}{\partial x} - \frac{\Lambda k \lambda_2}{q} \Delta \rho g \sin \alpha + 1}{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1}}$$

agrupando términos y considerando  $q/\Lambda = u$ :

$$f_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left\{ 1 - \frac{\Lambda k \lambda_2}{q} \Delta \rho g \sin \alpha \right\} + \frac{\frac{k \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\partial p_c}{\partial x}}{\lambda_1}$$

finalmente:

$$f_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left\{ 1 - \frac{\Lambda k \lambda_2}{q} \Delta \rho g \sin \alpha \right\} + \frac{k \lambda_2}{u (1 + \lambda_2/\lambda_1)} \frac{\partial p_c}{\partial x} \quad (A1)$$

el primer término del lado derecho es el flujo fraccional de la

fase 1 con la ausencia de presión capilar, el segundo término del lado derecho, es la contribución de la presión capilar al flujo fraccional de la fase 1.

## APENDICE B

### PROGRAMA Y RESULTADOS DEL EJEMPLO DE UNA VARIABLE DEPENDIENTE (MODELO DE BUCKLEY LEVERETT)

DEFFI-UNAM

PROGRAMA QUE CALCULA LA DERIVADA DE Fw  
 PARA EL EJEMPLO DE BUCKLEY-LEVERETT

NEMESIO MIGUEL HERNANDEZ)

```

program ejemplo_bukley_levwrett_distancia_tiempo;
uses crt,printer;
var
    sw,sw1,dsw,q,t,dt,x,integral,krw,kro,fw,Dko,
    Dkw,Dfw,u,por,xr:real;
    uw,uo:real;
    i:byte;
procedure Derivada_fw;
begin
    krw:=sqr(sw);
    kro:=sqr(1-sw);
    fw:=1/(1+kro*uw/krw/uo);
    Dkw:=2*sw;
    Dko:=-2*(1-sw);
    Dfw:=-1/sqr(1+kro*uw/krw/uo)*uw/uo*(krw*Dko-kro*Dkw)/
    sqr(krw);
end;
begin
    (programa principal)
    uw:=1;uo:=4;u:=0.1;por:=0.1;
    sw:=0.0;xr:=0;
    q:=0.1;
    sw1:=0.05;
    writeln(lst);writeln(lst);writeln(lst);writeln(lst);
    writeln(lst);writeln(lst);writeln(lst);writeln(lst);
    writeln(lst);writeln(lst);writeln(lst);writeln(lst);
    for i:=1 to 16 do
    begin
        sw:=sw+sw1;
        derivada_fw;
        writeln(lst,'          Para sw=',sw:5:3,
        ' La pendiente de la recta es: ',dfw:5:3);
    end;
    writeln(lst,#12);
end.
    
```

Para  $sw=0.050$  La pendiente de la recta es: 0.456  
Para  $sw=0.100$  La pendiente de la recta es: 0.997  
Para  $sw=0.150$  La pendiente de la recta es: 1.545  
Para  $sw=0.200$  La pendiente de la recta es: 2.000  
Para  $sw=0.250$  La pendiente de la recta es: 2.272  
Para  $sw=0.300$  La pendiente de la recta es: 2.325  
Para  $sw=0.350$  La pendiente de la recta es: 2.186  
Para  $sw=0.400$  La pendiente de la recta es: 1.920  
Para  $sw=0.450$  La pendiente de la recta es: 1.600  
Para  $sw=0.500$  La pendiente de la recta es: 1.280  
Para  $sw=0.550$  La pendiente de la recta es: 0.992  
Para  $sw=0.600$  La pendiente de la recta es: 0.750  
Para  $sw=0.650$  La pendiente de la recta es: 0.554  
Para  $sw=0.700$  La pendiente de la recta es: 0.400  
Para  $sw=0.750$  La pendiente de la recta es: 0.280  
Para  $sw=0.800$  La pendiente de la recta es: 0.189

{DEPFI-UNAM

PROGRAMA QUE CALCULA LOS PERFILES DE SATURACION  
A DIFERENTES TIEMPOS  
DEL EJEMPLO DE BUCKLEY-LEVERETT

NEMESIO MIGUEL HERNANDEZ  
}

PROGRAM ejemplo\_bukley\_levwrett\_perfiles\_saturacion;

USES CRT,PRINTER;

VAR

Sw,Sw1,Dsw,q,t,dt,x,krw,kro,fw,Dko,Dkw,Dfw,u:real;

uw,uo,A,Fi:real;

I:byte;

PROCEDURE DERIVADA\_FW;

{ DERIVADA DE FLUJO FRACCIONAL}

BEGIN

{ CON RESPECTO A Sw}

krw:=sqr(sw);

{PERMEABILIDAD RELATIVA DE FASE MOJANTE}

kro:=sqr(1-sw);

{PERMEABILIDAD RELATIVA DE FASE NO MOJANTE}

fw:=1/(1+kro\*uw/krw/uo);

{FLUJO FRACCIONAL DE FASE MOJANTE}

Dkw:=2\*sw;

{PARCIAL DE Kw CON RESPECTO A Sw}

Dko:=-2\*(1-sw);

{PARCIAL DE Knw CON RESPECTO A Sw}

Dfw:=-1/sqr(1+kro\*uw/krw/uo)

\*uw/uo\*(krw\*Dko-kro\*Dkw)/sqr(krw); {dfw/dSw}

END;

BEGIN { Del Programa Principal }

uw:=1;uo:=4;Fi:=0.1; {uw= VISCOSIDAD DE FASE MOJANTE}

Sw:=0.0;A:=1;t:=600; {uo= VISCOSIDAD DE FASE NO MOJANTE}

q:=0.1; {Fi= POROSIDAD}

Sw1:=0.05; {A= AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL}

writeln(1st);writeln(1st);

FOR I:=1 TO 16 DO {q= GASTO TOTAL}

BEGIN

Sw:=Sw+Sw1;

DERIVADA\_FW;

WRITELN(1ST,' Para sw=',sw:5:3,  
' La pendiente de la recta es: ',dfw:5:3);

x:=q/fi/A\*dfw\*t;

WRITELN(1st,' A t =',t:5:0,' dias, Sw=',

Sw:5:3,' a ',x:8:3,' pies');

END;

END.

A t =	100 dias,	Sw=0.050 a	45.637 pies
A t =	100 dias,	Sw=0.100 a	99.654 pies
A t =	100 dias,	Sw=0.150 a	154.509 pies
A t =	100 dias,	Sw=0.200 a	200.000 pies
A t =	100 dias,	Sw=0.250 a	227.219 pies
A t =	100 dias,	Sw=0.300 a	232.526 pies
A t =	100 dias,	Sw=0.350 a	218.578 pies
A t =	100 dias,	Sw=0.400 a	192.000 pies
A t =	100 dias,	Sw=0.450 a	159.980 pies
A t =	100 dias,	Sw=0.500 a	128.000 pies
A t =	100 dias,	Sw=0.550 a	99.240 pies
A t =	100 dias,	Sw=0.600 a	75.000 pies
A t =	100 dias,	Sw=0.650 a	55.401 pies
A t =	100 dias,	Sw=0.700 a	39.976 pies
A t =	100 dias,	Sw=0.750 a	28.050 pies
A t =	100 dias,	Sw=0.800 a	18.935 pies

A t =	200 dias,	Sw=0.050 a	91.274 pies
A t =	200 dias,	Sw=0.100 a	199.308 pies
A t =	200 dias,	Sw=0.150 a	309.018 pies
A t =	200 dias,	Sw=0.200 a	400.000 pies
A t =	200 dias,	Sw=0.250 a	454.438 pies
A t =	200 dias,	Sw=0.300 a	465.052 pies
A t =	200 dias,	Sw=0.350 a	437.155 pies
A t =	200 dias,	Sw=0.400 a	384.000 pies
A t =	200 dias,	Sw=0.450 a	319.960 pies
A t =	200 dias,	Sw=0.500 a	256.000 pies
A t =	200 dias,	Sw=0.550 a	198.481 pies
A t =	200 dias,	Sw=0.600 a	150.000 pies
A t =	200 dias,	Sw=0.650 a	110.801 pies
A t =	200 dias,	Sw=0.700 a	79.952 pies
A t =	200 dias,	Sw=0.750 a	56.099 pies
A t =	200 dias,	Sw=0.800 a	37.870 pies

A t =	300 dias,	Sw=0.050 a	136.911 pies
A t =	300 dias,	Sw=0.100 a	298.962 pies
A t =	300 dias,	Sw=0.150 a	463.527 pies
A t =	300 dias,	Sw=0.200 a	600.000 pies
A t =	300 dias,	Sw=0.250 a	681.657 pies
A t =	300 dias,	Sw=0.300 a	697.578 pies
A t =	300 dias,	Sw=0.350 a	655.733 pies
A t =	300 dias,	Sw=0.400 a	576.000 pies
A t =	300 dias,	Sw=0.450 a	479.939 pies
A t =	300 dias,	Sw=0.500 a	384.000 pies
A t =	300 dias,	Sw=0.550 a	297.721 pies
A t =	300 dias,	Sw=0.600 a	225.000 pies
A t =	300 dias,	Sw=0.650 a	166.202 pies
A t =	300 dias,	Sw=0.700 a	119.929 pies
A t =	300 dias,	Sw=0.750 a	84.149 pies
A t =	300 dias,	Sw=0.800 a	56.805 pies

A t =	400 dias,	Sw=0.050 a	182.548 pies
A t =	400 dias,	Sw=0.100 a	398.616 pies
A t =	400 dias,	Sw=0.150 a	618.036 pies
A t =	400 dias,	Sw=0.200 a	800.000 pies
A t =	400 dias,	Sw=0.250 a	908.876 pies
A t =	400 dias,	Sw=0.300 a	930.104 pies
A t =	400 dias,	Sw=0.350 a	874.310 pies
A t =	400 dias,	Sw=0.400 a	768.000 pies
A t =	400 dias,	Sw=0.450 a	639.919 pies
A t =	400 dias,	Sw=0.500 a	512.000 pies
A t =	400 dias,	Sw=0.550 a	396.961 pies
A t =	400 dias,	Sw=0.600 a	300.000 pies
A t =	400 dias,	Sw=0.650 a	221.603 pies
A t =	400 dias,	Sw=0.700 a	159.905 pies
A t =	400 dias,	Sw=0.750 a	112.199 pies
A t =	400 dias,	Sw=0.800 a	75.740 pies

A t =	500 dias,	Sw=0.050 a	228.185 pies
A t =	500 dias,	Sw=0.100 a	498.270 pies
A t =	500 dias,	Sw=0.150 a	772.544 pies
A t =	500 dias,	Sw=0.200 a	1000.000 pies
A t =	500 dias,	Sw=0.250 a	1136.095 pies
A t =	500 dias,	Sw=0.300 a	1162.630 pies
A t =	500 dias,	Sw=0.350 a	1092.888 pies
A t =	500 dias,	Sw=0.400 a	960.000 pies
A t =	500 dias,	Sw=0.450 a	799.899 pies
A t =	500 dias,	Sw=0.500 a	640.000 pies
A t =	500 dias,	Sw=0.550 a	496.202 pies
A t =	500 dias,	Sw=0.600 a	375.000 pies
A t =	500 dias,	Sw=0.650 a	277.004 pies
A t =	500 dias,	Sw=0.700 a	199.881 pies
A t =	500 dias,	Sw=0.750 a	140.248 pies
A t =	500 dias,	Sw=0.800 a	94.675 pies

A t =	600 dias,	Sw=0.050 a	273.822 pies
A t =	600 dias,	Sw=0.100 a	597.924 pies
A t =	600 dias,	Sw=0.150 a	927.053 pies
A t =	600 dias,	Sw=0.200 a	1200.000 pies
A t =	600 dias,	Sw=0.250 a	1363.314 pies
A t =	600 dias,	Sw=0.300 a	1395.156 pies
A t =	600 dias,	Sw=0.350 a	1311.466 pies
A t =	600 dias,	Sw=0.400 a	1152.000 pies
A t =	600 dias,	Sw=0.450 a	959.879 pies
A t =	600 dias,	Sw=0.500 a	768.000 pies
A t =	600 dias,	Sw=0.550 a	595.442 pies
A t =	600 dias,	Sw=0.600 a	450.000 pies
A t =	600 dias,	Sw=0.650 a	332.404 pies
A t =	600 dias,	Sw=0.700 a	239.857 pies
A t =	600 dias,	Sw=0.750 a	168.298 pies
A t =	600 dias,	Sw=0.800 a	113.609 pies



## APENDICE C

### EFFECTO DE LA PRESION CAPILAR Y COMPRESIBILIDAD EN EL PROCESO DE DESPLAZAMIENTO.

Los principales efectos disipativos son: Presión capilar y compresibilidad del sistema roca-fluidos, se discutirá a continuación cuando afectan a un proceso de desplazamiento.

#### PRESION CAPILAR:

La presión capilar en un medio poroso, es la diferencia de presión existente a través de la interfase que separa a dos fluidos inmiscibles, uno de los cuales moja preferentemente la superficie de la roca. Por lo tanto tiene algún significado la presión capilar en procesos donde se genere una interface entre dos fluidos, por ejemplo en el desplazamiento polimérico, se dice 'algún significado', por el hecho de que se puede desprestigiar el valor de la presión capilar como veremos más adelante.

De la ecuación A1 (APENDICE A), cuando  $\sin \alpha$  es igual a cero (yacimiento horizontal), tenemos:

$$f_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{k \lambda_2}{(1 + \lambda_2/\lambda_1) u} \frac{\partial p_c}{\partial x}$$

Esta ecuación también se puede escribir como:

$$f_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{k \lambda_1}{(1 + \lambda_1/\lambda_2) u} \frac{\partial p_c}{\partial x}$$

Substituyendo en la ec. (5.1a):

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_d} + \frac{\partial}{\partial x_D} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_D} \left\{ \frac{k \lambda_1}{(1 + \lambda_1/\lambda_2) u} \frac{\partial p_c}{\partial x} \right\} = 0$$

Multiplicando el tercer término por L/L:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_D} + \frac{\partial}{\partial x_D} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_D} \left\{ \frac{k \lambda_1}{(1 + \lambda_1/\lambda_2) u} \frac{1}{L} \frac{\partial p_c}{\partial (x/L)} \right\} = 0$$

Como  $\lambda_1$  es igual a  $k_{r1}/\mu_1$ , substituyendo en el tercer término, y tomando en cuenta que  $x_D = x/L$  (sección 5.1):

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_D} + \frac{\partial}{\partial x_D} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right\} + \frac{k}{u} \frac{k_{r1}}{L \mu_1} \frac{\partial}{\partial x_D} \left\{ \frac{k_{r1}}{(1 + \lambda_1/\lambda_2)} \frac{\partial p_c}{\partial x_D} \right\} = 0 \quad (C1)$$

Por otra parte, en una gráfica de presión capilar vs. saturación, la curvatura es función de la distribución del tamaño de poro. Leverett<sup>1</sup> en 1941 propuso una forma adimensional para la curva de presión capilar que es independiente del tamaño de poro, además es función de la saturación de la fase no mojanete, la cual se conoce como función  $j$  de Leverett:

$$j(S_2) = \frac{p_c (k/\phi)^{1/2}}{\sigma \cos \theta}$$

Despejando la presión capilar y derivando con respecto a  $S_2$  (fase no mojanete):

$$\frac{\partial p_c}{\partial S_2} = \frac{\sigma \cos \theta}{(k/\phi)^{1/2}} \frac{\partial j(S_2)}{\partial S_2} \quad (C2)$$

Aplicando la regla de la cadena en la ec. (C1), en el tercer término:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_D} + \frac{\partial}{\partial x_D} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right\} + \frac{k}{u} \frac{k_{r1}}{L \mu_1} \frac{\partial}{\partial x_D} \left\{ \frac{k_{r1}}{1 + \lambda_1/\lambda_2} \frac{\partial p_c}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial x_D} \right\} = 0$$

Substituyendo la ecuación (C2) en esta ecuación:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_D} + \frac{\partial}{\partial x_D} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right\}$$

$$+ \frac{k}{u L \mu_1} \frac{\sigma \cos \theta}{(k/\phi)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x_D} \left\{ \frac{k_{r1}}{1 + \lambda_1/\lambda_2} \frac{\partial^j (S_2)}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial x_D} \right\} = 0 \quad (C3)$$

La parte del tercer término que está fuera del parentesis:

$$\begin{aligned} \frac{k}{u L \mu_1} \frac{\sigma \cos \theta}{(k/\phi)^{1/2}} &= \frac{1}{\frac{u L \mu_1 (k/\phi)^{1/2}}{\sigma \cos \theta k}} = \frac{1}{\frac{u L \mu_1 (k/\phi)^{1/2} \phi}{\sigma \cos \theta k \phi}} \\ &= \frac{1}{\frac{u L \mu_1 \phi^{1/2}}{\sigma \cos \theta \phi k^{1/2}}} \end{aligned} \quad (C4)$$

En el caso de la permeabilidades relativas, Lake<sup>1</sup>propuso dos ecuaciones para el ajuste de los datos (ver fig C1):

$$k_{r1} = k_{r1}^0 \left( \frac{S_1 - S_{1r}}{1 - S_{1r} - S_{2r}} \right)^{n_1} \quad (C5)$$

$$k_{r2} = k_{r2}^0 \left( \frac{1 - S_1 - S_{2r}}{1 - S_{1r} - S_{2r}} \right)^{n_2} \quad (C6)$$

Estas ecuaciones se ajustan a datos experimentales y separan explícitamente la curvatura de las permeabilidades relativas con los exponentes  $n_1$ ,  $n_2$  y los puntos finales  $k_{r1}^0$  y  $k_{r2}^0$ .

Substituyendo las ecuaciones (C4) y (C5) en (C3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial t_D} + \frac{\partial}{\partial x_D} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right\} \\ + \frac{1}{N_{RL}} \frac{\partial}{\partial x_D} \left\{ \frac{1}{1 + \lambda_1/\lambda_2} \left( \frac{S_1 - S_{1r}}{1 - S_{1r} - S_{2r}} \right)^{n_1} \frac{\partial^j (S_2)}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial x_D} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (C7)$$

Donde  $N_{RL}$  es el número adimensional de Rapoport-Leas<sup>21</sup>, el cual es:

$$N_{RL} = \frac{u L \mu_1}{k_{r1}^0 \phi \sigma \cos \theta} \sqrt{\frac{\phi}{k}} \quad (C8)$$

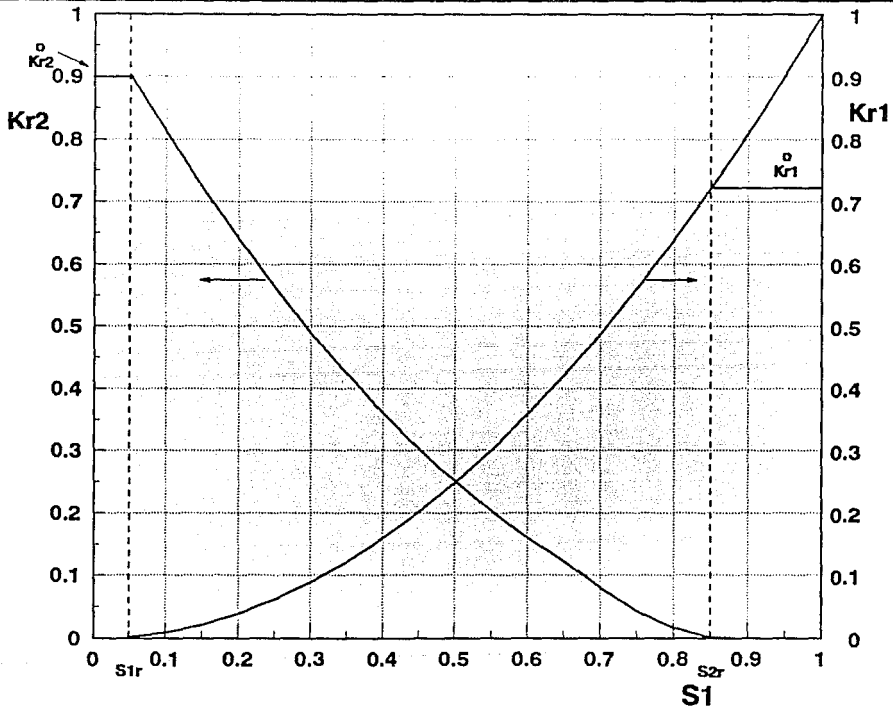


fig. C1: Curvas típicas de permeabilidades relativas al agua(1) y aceite(2).  
(ENHANCED OIL RECOVERY, L. W. LAKE).

De la ec. (C7) se observa que el comportamiento del desplazamiento no solo es función de la naturaleza del medio poroso y el sistema roca-fluidos (porosidad, permeabilidad, viscosidad, permeabilidades relativas y presión capilar), sino también de la longitud del sistema y los gastos de inyección. Rapoport-Leas estudiaron<sup>21</sup> el efecto de la longitud del sistema, los gastos de inyección y las viscosidades, no consideraron la variación de la tensión interfacial y el ángulo de contacto a causa de las imposibilidades experimentales, encontraron un resultado significativo sobre el rango completo de variaciones de gasto, longitud del sistema y viscosidades, donde la recuperación de aceite con su correspondiente factor de  $(L u \mu_1)$  resulta en la formación de una curva definida para cada tipo de núcleo.

En la fig C2 se presentan los resultados para un núcleo, observándose que a valores de  $(L u \mu_1)$  mayores que  $3 \text{ cm}^2 \text{ cp/min}$ , no afecta en la recuperación de aceite, esto sucede para todos los tipos de núcleos. Aunque los estudios fueron hechos en núcleos menores de 31 cm. de longitud Rapoport-Leas concluyeron que a valores mayores del punto crítico<sup>21</sup> (aprox.  $3 \text{ cm}^2 \text{ cp/min}$ ), la recuperación de aceite llega a ser constante e independiente del gasto, longitud y viscosidad del agente desplazante.

Supongamos un ejemplo, donde:  $L = 10,000 \text{ cms}$  (100 m)  $\mu_1 = 1 \text{ cp.}$ ,  $q = 110,408 \text{ cm}^3/\text{min}$  (1000 BPD),  $A = 90,000 \text{ cm}^2$  (3 x 3 m), el factor  $L u \mu_1$ :

$$L u \mu_1 = (10,000) (110,408/90,000) (1) = 12,267 \text{ cm}^2 \text{ cp/min.}$$

Como se observa es mucho mayor que 3, si la longitud es 5,000 cms. (50 m), el factor  $(L u \mu_1)$  es  $6134 \text{ cm}^2 \text{ cp/min}$ . De estos resultados se concluye que en aplicaciones de campo, no afecta la longitud del sistema, los gastos de inyección y los valores de viscosidades

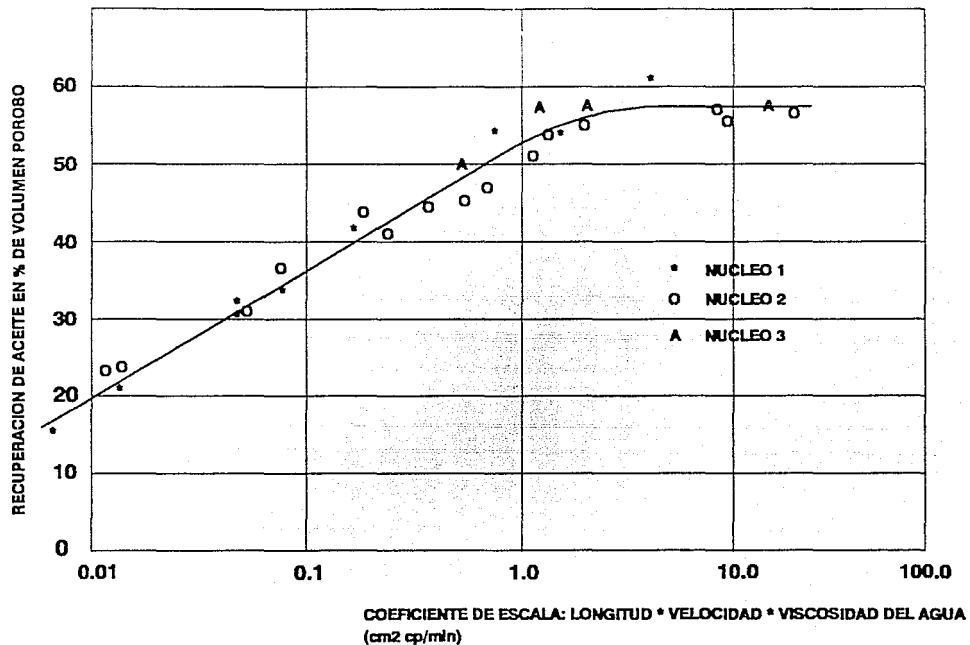


Fig. C2: Relacion entre recuperacion de aceite y el coeficiente (Longitud \* velocidad \* viscosidad del agua) (RAPOPORT-LEAS).

en la recuperación de aceite, debido a que se manejan valores grandes de longitud del sistema.

De la discusión anterior, de la ec. (C7) y de la fig. C2 se observa que para valores pequeños del factor  $L$  u  $\mu$ , la presión capilar es significativa, y para valores grandes los efectos de presión capilar son despreciables, como sucede realmente en el campo, ya que el valor de  $L$  es muy grande comparado con ejemplos de laboratorio.

El número capilar  $N_{vc}$  es una razón adimensional de fuerzas viscosas a fuerzas capilares, comúnmente se expresa en la forma siguiente (ver Lake<sup>1</sup>):

$$N_{vc} = \frac{u \mu_1}{k_{r1}^2 \phi \sigma \cos \theta} = \frac{v \mu_1}{k_{r1}^2 \sigma \cos \theta} \quad (C9)$$

Donde  $v = u/\phi$  es la velocidad intersticial o microscópica. Las saturaciones residuales de las fases mojante y no mojante se pueden expresar en función de este número capilar  $N_{vc}$  (ver fig. C3). Substituyendo la ecuación (C9) en (C8):

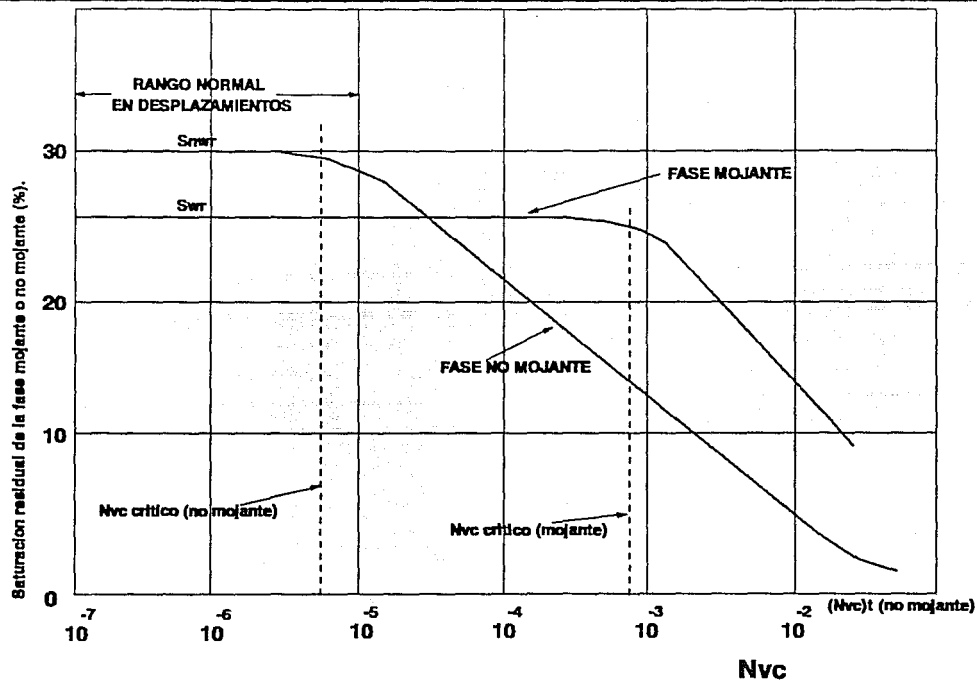
$$N_{RL} = \sqrt{\frac{\phi}{k}} L N_{vc} \quad (C10)$$

Como se observa  $N_{RL}$  y  $N_{vc}$  expresan el mismo factor, únicamente diferenciados por el 'factor de escala'  $(\phi/k)^{1/2}L$ .

En la fig. C3 se presentan las saturaciones residuales de las fases mojante y no mojante con respecto al número capilar, notándose que a valores de número capilar menores de  $10^{-5}$ , el efecto sobre la saturación residual es el mismo y está en el rango de las aplicaciones de campo<sup>1</sup>.

De nuestro ejemplo anterior, considerando la porosidad como 0.20 y





**Fig. C3: Curva esquemática de desaturación capilar.**

(ENHANCED OIL RECOVERY, L. W. LAKE).

el término  $k_r^0 \sigma \cos \theta$  igual a 1 mN/m (1 mN/m = 1 dina/cm, es un valor típico para medios mojados por agua<sup>1</sup>), de la ecuación (C9) tenemos:

$$N_{vc} = \frac{110,408}{90,000} \frac{1}{0.20} \left\{ \frac{\text{cm}^2}{\text{min}} \frac{\text{cp}}{\text{dina}} \frac{\text{poise}}{100 \text{ cp}} \frac{\text{dina}}{\text{gr}} \frac{\text{seg}^2}{\text{cm}} \frac{\text{min}}{60 \text{ seg}} \frac{\text{g}}{\text{poise}} \frac{1}{\text{cm}} \frac{1}{\text{seg}} \right\}$$

entonces:

$$N_{vc} = 1.02 \times 10^{-3}$$

En la fig. C3 se observa que este valor no cae dentro de las condiciones que se pueden aplicar en el campo donde  $N_{vc}$  es menor a  $10^{-5}$  (ver fig. C3). De esto, el valor determinante para despreciar el efecto de la presión capilar es que  $N_{nl}$  sea mayor que 3, si  $N_{vc}$  es mayor que  $10^{-5}$ , implica que con el tipo de desplazamiento utilizado se tienen menores saturaciones residuales de la fase no mojante.

De las discusiones anteriores, para que las fuerzas capilares no afecten al desplazamiento, se debe de cumplir lo siguiente:

$$3 < N_{nl} \tag{C11}$$

### COMPRESIBILIDAD

La compresibilidad isotérmica se define como:

$$c = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_t$$

Tiene unidades de presión<sup>-1</sup>, por lo tanto cuando el producto de la compresibilidad por presión es pequeño, se puede considerar que su efecto es despreciable. Lake<sup>1</sup> propuso que cuando  $c \Delta p$  sea menor a 0.01, la compresibilidad es despreciable, donde  $c$  es la

compresibilidad de la fase y  $\Delta p$  es la caída de presión a lo largo de la muestra.

## APENDICE D

### GENERALIZACION DE LA TEORIA DE FLUJO FRACCIONAL A N FASES (COMPONENTES)

La teoría de coherencia presenta ventajas con respecto al método de las características, en el hecho de que es más simple su manejo. Para la generalización de la teoría a  $n$  fases o  $n$  componentes ( $n$  es cualquier número, no se relaciona a fase o componente), en el segundo caso, se substituye el flujo fraccional de la fase por el flujo fraccional promedio del componente, dado por<sup>3</sup>:

$$F_i = \sum_{j=1}^m f_j C_{ij}, \quad i=1 \dots n$$

Y la saturación de la fase por la concentración promedio del componente<sup>3</sup>:

$$C_i = \sum_{j=1}^m S_j C_{ij}, \quad i=1 \dots n$$

Donde:

$m$  = Número de fases.

$n$  = Número de componentes.

$C_{ij}$  = Fracción de volúmen del componente  $i$  en la fase  $j$ .

$S_j$  = Saturación de la fase  $j$ .

$f_j$  = Flujo fraccional de la fase  $j$ .

Las derivadas totales de flujo fraccional son:

$$\left. \begin{aligned}
 df_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial f_1}{\partial S_2} dS_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial S_{N-1}} dS_{N-1} \\
 df_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial f_2}{\partial S_2} dS_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial S_{N-1}} dS_{N-1} \\
 &\vdots \\
 df_{N-1} &= \frac{\partial f_{N-1}}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial f_{N-1}}{\partial S_2} dS_2 + \dots + \frac{\partial f_{N-1}}{\partial S_{N-1}} dS_{N-1}
 \end{aligned} \right\} (D1)$$

Las derivadas totales son hasta  $N-1$ , debido a que:

$$\sum_{i=1}^{i=N} S_i = 1$$

Dividiendo por  $dS_1, dS_2, \dots, dS_N$  las ecuaciones (D1):

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{df_1}{dS_1} &= \frac{\partial f_1}{\partial S_1} \frac{dS_1}{dS_1} + \frac{\partial f_1}{\partial S_2} \frac{dS_2}{dS_1} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial S_{N-1}} \frac{dS_{N-1}}{dS_1} \\
 \frac{df_2}{dS_2} &= \frac{\partial f_2}{\partial S_1} \frac{dS_1}{dS_2} + \frac{\partial f_2}{\partial S_2} \frac{dS_2}{dS_2} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial S_{N-1}} \frac{dS_{N-1}}{dS_2} \\
 &\vdots \\
 \frac{df_{N-1}}{dS_{N-1}} &= \frac{\partial f_{N-1}}{\partial S_1} \frac{dS_1}{dS_{N-1}} + \frac{\partial f_{N-1}}{\partial S_2} \frac{dS_2}{dS_{N-1}} + \dots + \frac{\partial f_{N-1}}{\partial S_{N-1}} \frac{dS_{N-1}}{dS_{N-1}}
 \end{aligned} \right\} (D2)$$

Si definimos:

$$\frac{\partial f_i}{\partial S_j} = f_{ij} \quad (D3)$$

Considerando esta definición y la ecuación (5.9) (condición de coherencia), nuestro sistema de ecuaciones (D2) queda:

$$\left. \begin{aligned}
 f_{11} dS_1 + f_{12} dS_2 + \dots + f_{1,N-1} dS_{N-1} &= \sigma dS_1 \\
 f_{21} dS_1 + f_{22} dS_2 + \dots + f_{2,N-1} dS_{N-1} &= \sigma dS_2 \\
 &\vdots \\
 f_{N-1,1} dS_1 + f_{N-1,2} dS_2 + \dots + f_{N-1,N-1} dS_{N-1} &= \sigma dS_{N-1}
 \end{aligned} \right\} (D4)$$

Este sistema de ecuaciones en forma matricial<sup>3</sup>:

$$\begin{Bmatrix} f_{11} & f_{12} & & f_{1,N-1} \\ f_{21} & f_{22} & & f_{2,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1,1} & f_{n-1,2} & & f_{n-1,N-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} dS_1 \\ dS_2 \\ \vdots \\ dS_{N-1} \end{Bmatrix} = \sigma \begin{Bmatrix} dS_1 \\ dS_2 \\ \vdots \\ dS_{N-1} \end{Bmatrix} \quad (D5)$$

Este es un problema de valores característicos<sup>20</sup> (eigensistema), también se puede escribir:

$$F dS = \sigma dS$$

Para resolver este sistema, se calculan los eigenvalores  $\sigma$ , resolviendo:

$$\det (\sigma I - F) = 0 \quad (D6)$$

Donde I es la matriz identidad, posteriormente para cada eigenvalor se calculan los eigenvectores correspondientes, resolviendo:

$$(\sigma I - F) dS = 0 \quad (D7)$$

Para así encontrar nuestras ecuaciones diferenciales ordinarias que están en función de dS, y resolviendo estas ecuaciones diferenciales se obtienen los valores de nuestras variables dependientes  $S_i$  ( $i=1$  hasta  $n-1$ ).

## APENDICE E

### PROGRAMA Y RESULTADOS DEL EJEMPLO DE DOS VARIABLES DEPENDIENTES (FLUJO TRIFASICO)



DEPFI-UNAM

PROGRAMA PARA RESOLVER LA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA  
 NO LINEAL, RESULTADO DE FLUJO TRIFASICO UNIDIMENSIONAL  
 POR EL METODO DE LAS CARACTERISTICAS, UTILIZA EL  
 METODO DE RUNGE-KUTTA-FEHLBERG

NEMESIO MIGUEL HERNANDEZ

```

)

program rkf;
uses crt,printer;
var
    k1,k2,k3,k4,k5,k6,sigma,f1,f2:real;
    x,y,xend,h:real;
    tol,error:real;
    i,Itera,cont:integer;
    Y_Aux : real;
    c:char;

function fcn(s1,s2:real):real;
var
    slr,s2r,s3r,kr1,kr2,kr3,sum,f12,f21,F11,F22:real;
    mu1,mu2,mu3,s3:real;
begin
    slr:=0.1;s2r:=0.1;s3r:=0.1;
    mu1:=1.0;mu2:=5;mu3:=0.01;
    s3:=1.0-s1-s2;
    kr1:=(s1-slr)/(1-slr-s2r-s3r);
    kr2:=(s2-s2r)/(1-slr-s2r-s3r);
    kr3:=(s3-s3r)/(1-slr-s2r-s3r);
    sum:=kr1/mu1+kr2/mu2+kr3/mu3;
    f1:=kr1/mu1/sum;
    f2:=kr2/mu2/sum;
    f11:=(1.42857*sum+141.4285714*kr1/mu1)/sqr(sum);
    f12:=142.5714286*kr1/mu1/sqr(sum);
    f21:=141.4285714*kr2/mu2/sqr(sum);
    f22:=(0.2857*sum+142.5714286*kr2/mu2)/sqr(sum);
    if f11 <= 0.0 then f11:=0.0;
    if f22 <= 0.0 then f22:=0.0;
    sigma:=0.5*( f11+f22) - sqrt( sqr(f11-f22)+4*f12*f21));
    Fcn:=((Sigma-F11)/F12);
    { fcn:=(f11-sigma)/f21; }
end; { del function fcn }

```

```

begin      ( del programa principal )
x:=0.1001;y:=0.77;xend:=0.64;
h:=0.01;          (valor inicial)
tol:=5.0e-5;
writeln;writeln;
writeln(lst,'          S1 =',x:4:2,
' S2 =',y:4:2,'          ***COND. INIC.***');
cont:=0;
while ( x < xend ) do
Begin
  Y_aux:=y;
  k1:=h*fcn(x,y_aux);
  k2:=h*fcn(x+h/4,y_aux+k1/4);
  k3:=h*fcn(x+3*h/8,y_aux+(3*k1+9*k2)/32);
  k4:=h*fcn(x+12*h/13,y_aux+(1932*k1-7200*k2
    +7296*k3)/2197);
  k5:=h*fcn(x+h,y_aux+439*k1/216-8*k2+3680
    *k3/513-845*k4/4104);
  k6:=h*fcn(x+h/2,y_aux-8*k1/27+2*k2-3544
    *k3/2565+1859*k4/4104-11*k5/40);
  error:=abs(k1/360-128*k3/4275-2197*k4/75240
    +k5/50+2*k6/55);
  ( if (error < tol ) then)
  begin
    cont:=cont+1;
    if cont = 50 then c:=readkey;
    x:=x+h;
    y:=y_aux+(25*k1/216+1408*k3/2565
      +2197*k4/4104-k5/5);
  end;
  writeln(lst,'          S1=',x:5:2,' S2=',y:5:2,' Func=','
  fcn(x,y):5:2,
  ' Sigma=','sigma:7:5,' F1=',f1:6:4,' F2=',f2:6:4);
  ( if (error > tol ) then h:=h/2;
  if (error <= tol) then h:=h+h;
  if (h >= abs(xend-x) ) then h:=abs (xend-x);
end;
writeln(lst,'          a S1=',x:5:3,
' CALCULO S2=',y:5:3,' *****error=',error);
end.

```

```

S1 =0.10 S2 =0.20                ***COND.  INIC.***
S1= 0.11 S2= 0.20 Func= 0.04 Sigma+=0.01726 F1=0.0002 F2=0.0003
S1= 0.12 S2= 0.20 Func= 0.04 Sigma+=0.01788 F1=0.0003 F2=0.0003
S1= 0.13 S2= 0.20 Func= 0.04 Sigma+=0.01853 F1=0.0005 F2=0.0004
S1= 0.14 S2= 0.20 Func= 0.04 Sigma+=0.01922 F1=0.0007 F2=0.0004
S1= 0.15 S2= 0.20 Func= 0.04 Sigma+=0.01995 F1=0.0009 F2=0.0004
S1= 0.16 S2= 0.20 Func= 0.04 Sigma+=0.02073 F1=0.0011 F2=0.0004
S1= 0.17 S2= 0.20 Func= 0.04 Sigma+=0.02155 F1=0.0013 F2=0.0004
S1= 0.18 S2= 0.20 Func= 0.04 Sigma+=0.02241 F1=0.0015 F2=0.0004
S1= 0.19 S2= 0.20 Func= 0.04 Sigma+=0.02334 F1=0.0018 F2=0.0004
S1= 0.20 S2= 0.20 Func= 0.04 Sigma+=0.02432 F1=0.0020 F2=0.0004
S1= 0.21 S2= 0.20 Func= 0.04 Sigma+=0.02536 F1=0.0023 F2=0.0004
S1= 0.22 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.02647 F1=0.0025 F2=0.0004
S1= 0.23 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.02766 F1=0.0028 F2=0.0005
S1= 0.24 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.02893 F1=0.0031 F2=0.0005
S1= 0.25 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.03029 F1=0.0034 F2=0.0005
S1= 0.26 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.03174 F1=0.0037 F2=0.0005
S1= 0.27 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.03331 F1=0.0040 F2=0.0005
S1= 0.28 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.03499 F1=0.0043 F2=0.0005
S1= 0.29 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.03680 F1=0.0047 F2=0.0005
S1= 0.30 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.03876 F1=0.0051 F2=0.0006
S1= 0.31 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.04088 F1=0.0055 F2=0.0006
S1= 0.32 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.04317 F1=0.0059 F2=0.0006
S1= 0.33 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.04567 F1=0.0063 F2=0.0006
S1= 0.34 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.04839 F1=0.0068 F2=0.0006
S1= 0.35 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.05136 F1=0.0073 F2=0.0006
S1= 0.36 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.05461 F1=0.0078 F2=0.0007
S1= 0.37 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.05817 F1=0.0084 F2=0.0007
S1= 0.38 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.06210 F1=0.0090 F2=0.0007
S1= 0.39 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.06645 F1=0.0097 F2=0.0007
S1= 0.40 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.07126 F1=0.0103 F2=0.0008
S1= 0.41 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.07662 F1=0.0111 F2=0.0008
S1= 0.42 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.08260 F1=0.0119 F2=0.0008
S1= 0.43 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.08931 F1=0.0127 F2=0.0009
S1= 0.44 S2= 0.21 Func= 0.04 Sigma+=0.09688 F1=0.0137 F2=0.0009
S1= 0.45 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.10545 F1=0.0147 F2=0.0010
S1= 0.46 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.11521 F1=0.0158 F2=0.0010
S1= 0.47 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.12639 F1=0.0170 F2=0.0011
S1= 0.48 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.13929 F1=0.0183 F2=0.0011
S1= 0.49 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.15425 F1=0.0198 F2=0.0012
S1= 0.50 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.17177 F1=0.0214 F2=0.0013
S1= 0.51 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.19246 F1=0.0232 F2=0.0013
S1= 0.52 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.21711 F1=0.0253 F2=0.0014
S1= 0.53 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.24683 F1=0.0276 F2=0.0015
S1= 0.54 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.28309 F1=0.0302 F2=0.0016
S1= 0.55 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.32797 F1=0.0333 F2=0.0018
S1= 0.56 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.38444 F1=0.0368 F2=0.0019
S1= 0.57 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.45685 F1=0.0410 F2=0.0021
S1= 0.58 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.55182 F1=0.0460 F2=0.0023
S1= 0.59 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.67982 F1=0.0522 F2=0.0026

```

S1= 0.60 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=0.85811 F1=0.0598 F2=0.0029  
S1= 0.61 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=1.11699 F1=0.0696 F2=0.0033  
S1= 0.62 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=1.51347 F1=0.0826 F2=0.0039  
S1= 0.63 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=2.16565 F1=0.1007 F2=0.0047  
S1= 0.64 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=3.35198 F1=0.1276 F2=0.0058  
S1= 0.65 S2= 0.22 Func= 0.04 Sigma+=5.82876 F1=0.1714 F2=0.0077  
a S1=0.650 CALCULO S2=0.224 \*\*\*\*\*error= 3.6082248300E-16

```

S1 =0.10 S2 =0.35                ***COND. INIC.***
S1= 0.11 S2= 0.35 Func= 0.16 Sigma+=0.02339 F1=0.0002 F2=0.0011
S1= 0.12 S2= 0.35 Func= 0.16 Sigma+=0.02466 F1=0.0005 F2=0.0012
S1= 0.13 S2= 0.35 Func= 0.16 Sigma+=0.02604 F1=0.0007 F2=0.0012
S1= 0.14 S2= 0.36 Func= 0.16 Sigma+=0.02754 F1=0.0010 F2=0.0013
S1= 0.15 S2= 0.36 Func= 0.16 Sigma+=0.02918 F1=0.0013 F2=0.0013
S1= 0.16 S2= 0.36 Func= 0.16 Sigma+=0.03096 F1=0.0016 F2=0.0014
S1= 0.17 S2= 0.36 Func= 0.16 Sigma+=0.03291 F1=0.0019 F2=0.0014
S1= 0.18 S2= 0.36 Func= 0.16 Sigma+=0.03506 F1=0.0022 F2=0.0015
S1= 0.19 S2= 0.36 Func= 0.16 Sigma+=0.03742 F1=0.0026 F2=0.0015
S1= 0.20 S2= 0.37 Func= 0.16 Sigma+=0.04003 F1=0.0030 F2=0.0016
S1= 0.21 S2= 0.37 Func= 0.16 Sigma+=0.04292 F1=0.0034 F2=0.0017
S1= 0.22 S2= 0.37 Func= 0.16 Sigma+=0.04613 F1=0.0038 F2=0.0017
S1= 0.23 S2= 0.37 Func= 0.16 Sigma+=0.04972 F1=0.0043 F2=0.0018
S1= 0.24 S2= 0.37 Func= 0.16 Sigma+=0.05374 F1=0.0048 F2=0.0019
S1= 0.25 S2= 0.37 Func= 0.16 Sigma+=0.05828 F1=0.0054 F2=0.0020
S1= 0.26 S2= 0.38 Func= 0.16 Sigma+=0.06341 F1=0.0060 F2=0.0021
S1= 0.27 S2= 0.38 Func= 0.16 Sigma+=0.06925 F1=0.0067 F2=0.0022
S1= 0.28 S2= 0.38 Func= 0.16 Sigma+=0.07594 F1=0.0074 F2=0.0023
S1= 0.29 S2= 0.38 Func= 0.16 Sigma+=0.08365 F1=0.0082 F2=0.0024
S1= 0.30 S2= 0.38 Func= 0.16 Sigma+=0.09259 F1=0.0091 F2=0.0026
S1= 0.31 S2= 0.38 Func= 0.16 Sigma+=0.10305 F1=0.0100 F2=0.0027
S1= 0.32 S2= 0.39 Func= 0.16 Sigma+=0.11538 F1=0.0111 F2=0.0029
S1= 0.33 S2= 0.39 Func= 0.16 Sigma+=0.13006 F1=0.0124 F2=0.0031
S1= 0.34 S2= 0.39 Func= 0.16 Sigma+=0.14775 F1=0.0137 F2=0.0033
S1= 0.35 S2= 0.39 Func= 0.16 Sigma+=0.16929 F1=0.0153 F2=0.0036
S1= 0.36 S2= 0.39 Func= 0.16 Sigma+=0.19592 F1=0.0172 F2=0.0038
S1= 0.37 S2= 0.39 Func= 0.16 Sigma+=0.22937 F1=0.0193 F2=0.0042
S1= 0.38 S2= 0.39 Func= 0.16 Sigma+=0.27217 F1=0.0218 F2=0.0046
S1= 0.39 S2= 0.40 Func= 0.16 Sigma+=0.32817 F1=0.0248 F2=0.0051
S1= 0.40 S2= 0.40 Func= 0.16 Sigma+=0.40342 F1=0.0284 F2=0.0056
S1= 0.41 S2= 0.40 Func= 0.16 Sigma+=0.50786 F1=0.0329 F2=0.0064
S1= 0.42 S2= 0.40 Func= 0.16 Sigma+=0.65880 F1=0.0387 F2=0.0073
S1= 0.43 S2= 0.40 Func= 0.16 Sigma+=0.88859 F1=0.0464 F2=0.0085
S1= 0.44 S2= 0.40 Func= 0.16 Sigma+=1.26349 F1=0.0570 F2=0.0102
S1= 0.45 S2= 0.41 Func= 0.16 Sigma+=1.93738 F1=0.0726 F2=0.0127
S1= 0.46 S2= 0.41 Func= 0.16 Sigma+=3.33913 F1=0.0980 F2=0.0167
S1= 0.47 S2= 0.41 Func= 0.16 Sigma+=7.07145 F1=0.1466 F2=0.0245
S1= 0.48 S2= 0.41 Func= 0.16 Sigma+=23.43611 F1=0.2741 F2=0.0448
a S1=0.480 CALCULO S2=0.411 *****error= 9.5511151231E-17

```

```

S1 =0.10 S2 =0.45          ***COND. INIC.***
S1= 0.11 S2= 0.45 Func= 0.33 Sigma+=0.03081 F1=0.0003 F2=0.0021
S1= 0.12 S2= 0.46 Func= 0.33 Sigma+=0.03336 F1=0.0006 F2=0.0022
S1= 0.13 S2= 0.46 Func= 0.33 Sigma+=0.03625 F1=0.0010 F2=0.0023
S1= 0.14 S2= 0.46 Func= 0.33 Sigma+=0.03953 F1=0.0013 F2=0.0024
S1= 0.15 S2= 0.47 Func= 0.33 Sigma+=0.04327 F1=0.0018 F2=0.0026
S1= 0.16 S2= 0.47 Func= 0.33 Sigma+=0.04758 F1=0.0022 F2=0.0027
S1= 0.17 S2= 0.47 Func= 0.33 Sigma+=0.05256 F1=0.0027 F2=0.0029
S1= 0.18 S2= 0.48 Func= 0.33 Sigma+=0.05836 F1=0.0033 F2=0.0031
S1= 0.19 S2= 0.48 Func= 0.33 Sigma+=0.06518 F1=0.0039 F2=0.0033
S1= 0.20 S2= 0.48 Func= 0.33 Sigma+=0.07327 F1=0.0046 F2=0.0035
S1= 0.21 S2= 0.49 Func= 0.33 Sigma+=0.08297 F1=0.0054 F2=0.0038
S1= 0.22 S2= 0.49 Func= 0.33 Sigma+=0.09473 F1=0.0062 F2=0.0040
S1= 0.23 S2= 0.49 Func= 0.33 Sigma+=0.10917 F1=0.0073 F2=0.0044
S1= 0.24 S2= 0.50 Func= 0.33 Sigma+=0.12719 F1=0.0084 F2=0.0048
S1= 0.25 S2= 0.50 Func= 0.33 Sigma+=0.15007 F1=0.0098 F2=0.0052
S1= 0.26 S2= 0.50 Func= 0.33 Sigma+=0.17973 F1=0.0115 F2=0.0058
S1= 0.27 S2= 0.51 Func= 0.33 Sigma+=0.21913 F1=0.0134 F2=0.0064
S1= 0.28 S2= 0.51 Func= 0.33 Sigma+=0.27307 F1=0.0159 F2=0.0072
S1= 0.29 S2= 0.51 Func= 0.33 Sigma+=0.34968 F1=0.0190 F2=0.0082
S1= 0.30 S2= 0.52 Func= 0.33 Sigma+=0.46371 F1=0.0230 F2=0.0096
S1= 0.31 S2= 0.52 Func= 0.33 Sigma+=0.64419 F1=0.0285 F2=0.0114
S1= 0.32 S2= 0.52 Func= 0.33 Sigma+=0.95488 F1=0.0363 F2=0.0139
S1= 0.33 S2= 0.53 Func= 0.33 Sigma+=1.55948 F1=0.0485 F2=0.0179
S1= 0.34 S2= 0.53 Func= 0.33 Sigma+=2.99122 F1=0.0701 F2=0.0251
S1= 0.35 S2= 0.53 Func= 0.33 Sigma+=7.90730 F1=0.1188 F2=0.0410
S1= 0.36 S2= 0.54 Func= 0.33 Sigma+=54.65223 F1=0.3246 F2=0.1087
a S1=0.360 CALCULO S2=0.535 *****error= 8.8817841970E-16

```

```
S1 =0.10 S2 =0.60          ***COND. INIC.***
S1= 0.11 S2= 0.62 Func= 1.62 Sigma+=0.06580 F1=0.0006 F2=0.0059
S1= 0.12 S2= 0.63 Func= 1.62 Sigma+=0.09085 F1=0.0014 F2=0.0072
S1= 0.13 S2= 0.65 Func= 1.62 Sigma+=0.13350 F1=0.0025 F2=0.0089
S1= 0.14 S2= 0.66 Func= 1.62 Sigma+=0.21510 F1=0.0041 F2=0.0117
S1= 0.15 S2= 0.68 Func= 1.62 Sigma+=0.40293 F1=0.0071 F2=0.0164
S1= 0.16 S2= 0.70 Func= 1.62 Sigma+=0.99919 F1=0.0134 F2=0.0266
a S1=0.160 CALCULO S2=0.697 *****error= 7.2830630415E-14
```

```
S1 =0.10 S2 =0.67          ***COND. INIC.***
S1= 0.11 S2= 0.56 Func=-11.32 Sigma=-0.02372 F1=0.0004 F2=0.0039
S1= 0.12 S2= 0.44 Func=-11.32 Sigma=-0.01143 F1=0.0006 F2=0.0020
S1= 0.13 S2= 0.33 Func=-11.32 Sigma=-0.00671 F1=0.0007 F2=0.0010
S1= 0.14 S2= 0.22 Func=-11.32 Sigma=-0.00440 F1=0.0007 F2=0.0004
S1= 0.15 S2= 0.11 Func=-11.32 Sigma=-0.00312 F1=0.0008 F2=0.0000
a S1=0.150 CALCULO S2=0.105 *****error= 4.9737991503E-12
```



```

S1 =0.10 S2 =0.70
***COND. INIC.***
S1= 0.11 S2= 0.67 Func=-3.04 Sigma=-0.06831 F1=0.0008 F2=0.0094
S1= 0.12 S2= 0.64 Func=-3.04 Sigma=-0.05006 F1=0.0014 F2=0.0076
S1= 0.13 S2= 0.61 Func=-3.04 Sigma=-0.03825 F1=0.0019 F2=0.0063
S1= 0.14 S2= 0.58 Func=-3.04 Sigma=-0.03018 F1=0.0022 F2=0.0052
S1= 0.15 S2= 0.55 Func=-3.04 Sigma=-0.02442 F1=0.0025 F2=0.0044
S1= 0.16 S2= 0.52 Func=-3.04 Sigma=-0.02016 F1=0.0027 F2=0.0037
S1= 0.17 S2= 0.49 Func=-3.04 Sigma=-0.01693 F1=0.0029 F2=0.0032
S1= 0.18 S2= 0.46 Func=-3.04 Sigma=-0.01441 F1=0.0030 F2=0.0027
S1= 0.19 S2= 0.43 Func=-3.04 Sigma=-0.01242 F1=0.0032 F2=0.0023
S1= 0.20 S2= 0.40 Func=-3.04 Sigma=-0.01081 F1=0.0033 F2=0.0019
S1= 0.21 S2= 0.37 Func=-3.04 Sigma=-0.00950 F1=0.0034 F2=0.0016
S1= 0.22 S2= 0.34 Func=-3.04 Sigma=-0.00841 F1=0.0035 F2=0.0014
S1= 0.23 S2= 0.30 Func=-3.04 Sigma=-0.00750 F1=0.0035 F2=0.0011
S1= 0.24 S2= 0.27 Func=-3.04 Sigma=-0.00673 F1=0.0036 F2=0.0009
S1= 0.25 S2= 0.24 Func=-3.04 Sigma=-0.00607 F1=0.0037 F2=0.0007
S1= 0.26 S2= 0.21 Func=-3.04 Sigma=-0.00551 F1=0.0037 F2=0.0005
S1= 0.27 S2= 0.18 Func=-3.04 Sigma=-0.00502 F1=0.0038 F2=0.0004
S1= 0.28 S2= 0.15 Func=-3.04 Sigma=-0.00459 F1=0.0038 F2=0.0002
S1= 0.29 S2= 0.12 Func=-3.04 Sigma=-0.00422 F1=0.0039 F2=0.0001
a S1=0.290 CALCULO S2=0.123 *****error= 1.7763568394E-15

```

```

S1 =0.10 S2 =0.75          ***COND. INIC.***
S1= 0.11 S2= 0.74 Func=-1.45 Sigma=-0.16452 F1=0.0018 F2=0.0228
S1= 0.12 S2= 0.72 Func=-1.45 Sigma=-0.14059 F1=0.0033 F2=0.0306
S1= 0.13 S2= 0.71 Func=-1.45 Sigma=-0.12152 F1=0.0046 F2=0.0187
S1= 0.14 S2= 0.69 Func=-1.45 Sigma=-0.10608 F1=0.0058 F2=0.0171
S1= 0.15 S2= 0.68 Func=-1.45 Sigma=-0.09341 F1=0.0068 F2=0.0156
S1= 0.16 S2= 0.66 Func=-1.45 Sigma=-0.08288 F1=0.0076 F2=0.0143
S1= 0.17 S2= 0.65 Func=-1.45 Sigma=-0.07404 F1=0.0084 F2=0.0132
S1= 0.18 S2= 0.63 Func=-1.45 Sigma=-0.06654 F1=0.0091 F2=0.0122
S1= 0.19 S2= 0.62 Func=-1.45 Sigma=-0.06012 F1=0.0098 F2=0.0113
S1= 0.20 S2= 0.61 Func=-1.45 Sigma=-0.05459 F1=0.0103 F2=0.0104
S1= 0.21 S2= 0.59 Func=-1.45 Sigma=-0.04979 F1=0.0109 F2=0.0097
S1= 0.22 S2= 0.58 Func=-1.45 Sigma=-0.04559 F1=0.0113 F2=0.0090
S1= 0.23 S2= 0.56 Func=-1.45 Sigma=-0.04191 F1=0.0118 F2=0.0084
S1= 0.24 S2= 0.55 Func=-1.45 Sigma=-0.03865 F1=0.0122 F2=0.0078
S1= 0.25 S2= 0.53 Func=-1.45 Sigma=-0.03576 F1=0.0125 F2=0.0072
S1= 0.26 S2= 0.52 Func=-1.45 Sigma=-0.03318 F1=0.0129 F2=0.0067
S1= 0.27 S2= 0.50 Func=-1.45 Sigma=-0.03087 F1=0.0132 F2=0.0063
S1= 0.28 S2= 0.49 Func=-1.45 Sigma=-0.02879 F1=0.0135 F2=0.0058
S1= 0.29 S2= 0.47 Func=-1.45 Sigma=-0.02692 F1=0.0138 F2=0.0054
S1= 0.30 S2= 0.46 Func=-1.45 Sigma=-0.02522 F1=0.0141 F2=0.0051
S1= 0.31 S2= 0.45 Func=-1.45 Sigma=-0.02368 F1=0.0143 F2=0.0047
S1= 0.32 S2= 0.43 Func=-1.45 Sigma=-0.02228 F1=0.0145 F2=0.0044
S1= 0.33 S2= 0.42 Func=-1.45 Sigma=-0.02100 F1=0.0147 F2=0.0041
S1= 0.34 S2= 0.40 Func=-1.45 Sigma=-0.01982 F1=0.0149 F2=0.0038
S1= 0.35 S2= 0.39 Func=-1.45 Sigma=-0.01874 F1=0.0151 F2=0.0035
S1= 0.36 S2= 0.37 Func=-1.45 Sigma=-0.01775 F1=0.0153 F2=0.0032
S1= 0.37 S2= 0.36 Func=-1.45 Sigma=-0.01683 F1=0.0155 F2=0.0030
S1= 0.38 S2= 0.34 Func=-1.45 Sigma=-0.01598 F1=0.0157 F2=0.0027
S1= 0.39 S2= 0.33 Func=-1.45 Sigma=-0.01520 F1=0.0158 F2=0.0025
S1= 0.40 S2= 0.32 Func=-1.45 Sigma=-0.01447 F1=0.0160 F2=0.0023
S1= 0.41 S2= 0.30 Func=-1.45 Sigma=-0.01379 F1=0.0161 F2=0.0021
S1= 0.42 S2= 0.29 Func=-1.45 Sigma=-0.01316 F1=0.0162 F2=0.0019
S1= 0.43 S2= 0.27 Func=-1.45 Sigma=-0.01257 F1=0.0164 F2=0.0017
S1= 0.44 S2= 0.26 Func=-1.45 Sigma=-0.01202 F1=0.0165 F2=0.0015
S1= 0.45 S2= 0.24 Func=-1.45 Sigma=-0.01151 F1=0.0166 F2=0.0014
S1= 0.46 S2= 0.23 Func=-1.45 Sigma=-0.01103 F1=0.0167 F2=0.0012
S1= 0.47 S2= 0.21 Func=-1.45 Sigma=-0.01058 F1=0.0168 F2=0.0010
S1= 0.48 S2= 0.20 Func=-1.45 Sigma=-0.01015 F1=0.0169 F2=0.0009
S1= 0.49 S2= 0.18 Func=-1.45 Sigma=-0.00975 F1=0.0170 F2=0.0007
S1= 0.50 S2= 0.17 Func=-1.45 Sigma=-0.00937 F1=0.0171 F2=0.0006
S1= 0.51 S2= 0.16 Func=-1.45 Sigma=-0.00902 F1=0.0172 F2=0.0005
S1= 0.52 S2= 0.14 Func=-1.45 Sigma=-0.00868 F1=0.0173 F2=0.0003
S1= 0.53 S2= 0.13 Func=-1.45 Sigma=-0.00836 F1=0.0174 F2=0.0002
S1= 0.54 S2= 0.11 Func=-1.45 Sigma=-0.00807 F1=0.0175 F2=0.0001
a S1=0.540 CALCULO S2=0.113 *****error= 8.8817841970E-16

```

```

S1 = 0.10 S2 = 0.77          ***COND. INIC.***
S1= 0.11 S2= 0.76 Func=-1.22 Sigma=-0.27794 F1=0.0030 F2=0.0393
S1= 0.12 S2= 0.75 Func=-1.22 Sigma=-0.24376 F1=0.0056 F2=0.0361
S1= 0.13 S2= 0.73 Func=-1.22 Sigma=-0.21551 F1=0.0079 F2=0.0333
S1= 0.14 S2= 0.72 Func=-1.22 Sigma=-0.19191 F1=0.0099 F2=0.0308
S1= 0.15 S2= 0.71 Func=-1.22 Sigma=-0.17198 F1=0.0118 F2=0.0286
S1= 0.16 S2= 0.70 Func=-1.22 Sigma=-0.15500 F1=0.0134 F2=0.0266
S1= 0.17 S2= 0.68 Func=-1.22 Sigma=-0.14042 F1=0.0149 F2=0.0248
S1= 0.18 S2= 0.67 Func=-1.22 Sigma=-0.12780 F1=0.0162 F2=0.0232
S1= 0.19 S2= 0.66 Func=-1.22 Sigma=-0.11681 F1=0.0174 F2=0.0217
S1= 0.20 S2= 0.65 Func=-1.22 Sigma=-0.10718 F1=0.0185 F2=0.0203
S1= 0.21 S2= 0.64 Func=-1.22 Sigma=-0.09869 F1=0.0196 F2=0.0191
S1= 0.22 S2= 0.62 Func=-1.22 Sigma=-0.09117 F1=0.0205 F2=0.0179
S1= 0.23 S2= 0.61 Func=-1.22 Sigma=-0.08448 F1=0.0214 F2=0.0168
S1= 0.24 S2= 0.60 Func=-1.22 Sigma=-0.07850 F1=0.0222 F2=0.0158
S1= 0.25 S2= 0.59 Func=-1.22 Sigma=-0.07313 F1=0.0230 F2=0.0149
S1= 0.26 S2= 0.57 Func=-1.22 Sigma=-0.06830 F1=0.0237 F2=0.0140
S1= 0.27 S2= 0.56 Func=-1.22 Sigma=-0.06393 F1=0.0243 F2=0.0132
S1= 0.28 S2= 0.55 Func=-1.22 Sigma=-0.05996 F1=0.0250 F2=0.0125
S1= 0.29 S2= 0.54 Func=-1.22 Sigma=-0.05636 F1=0.0255 F2=0.0118
S1= 0.30 S2= 0.53 Func=-1.22 Sigma=-0.05307 F1=0.0261 F2=0.0111
S1= 0.31 S2= 0.51 Func=-1.22 Sigma=-0.05006 F1=0.0266 F2=0.0105
S1= 0.32 S2= 0.50 Func=-1.22 Sigma=-0.04729 F1=0.0271 F2=0.0099
S1= 0.33 S2= 0.49 Func=-1.22 Sigma=-0.04475 F1=0.0276 F2=0.0093
S1= 0.34 S2= 0.48 Func=-1.22 Sigma=-0.04241 F1=0.0280 F2=0.0088
S1= 0.35 S2= 0.47 Func=-1.22 Sigma=-0.04025 F1=0.0284 F2=0.0083
S1= 0.36 S2= 0.45 Func=-1.22 Sigma=-0.03825 F1=0.0288 F2=0.0078
S1= 0.37 S2= 0.44 Func=-1.22 Sigma=-0.03640 F1=0.0292 F2=0.0074
S1= 0.38 S2= 0.43 Func=-1.22 Sigma=-0.03468 F1=0.0295 F2=0.0069
S1= 0.39 S2= 0.42 Func=-1.22 Sigma=-0.03307 F1=0.0299 F2=0.0065
S1= 0.40 S2= 0.40 Func=-1.22 Sigma=-0.03158 F1=0.0302 F2=0.0061
S1= 0.41 S2= 0.39 Func=-1.22 Sigma=-0.03018 F1=0.0305 F2=0.0057
S1= 0.42 S2= 0.38 Func=-1.22 Sigma=-0.02888 F1=0.0308 F2=0.0054
S1= 0.43 S2= 0.37 Func=-1.22 Sigma=-0.02765 F1=0.0311 F2=0.0050
S1= 0.44 S2= 0.36 Func=-1.22 Sigma=-0.02651 F1=0.0313 F2=0.0047
S1= 0.45 S2= 0.34 Func=-1.22 Sigma=-0.02543 F1=0.0316 F2=0.0044
S1= 0.46 S2= 0.33 Func=-1.22 Sigma=-0.02442 F1=0.0318 F2=0.0041
S1= 0.47 S2= 0.32 Func=-1.22 Sigma=-0.02347 F1=0.0321 F2=0.0038
S1= 0.48 S2= 0.31 Func=-1.22 Sigma=-0.02257 F1=0.0323 F2=0.0035
S1= 0.49 S2= 0.29 Func=-1.22 Sigma=-0.02172 F1=0.0325 F2=0.0032
S1= 0.50 S2= 0.28 Func=-1.22 Sigma=-0.02092 F1=0.0328 F2=0.0030
S1= 0.51 S2= 0.27 Func=-1.22 Sigma=-0.02016 F1=0.0330 F2=0.0027
S1= 0.52 S2= 0.26 Func=-1.22 Sigma=-0.01945 F1=0.0332 F2=0.0025
S1= 0.53 S2= 0.25 Func=-1.22 Sigma=-0.01877 F1=0.0333 F2=0.0023
S1= 0.54 S2= 0.23 Func=-1.22 Sigma=-0.01812 F1=0.0335 F2=0.0020
S1= 0.55 S2= 0.22 Func=-1.22 Sigma=-0.01751 F1=0.0337 F2=0.0018
S1= 0.56 S2= 0.21 Func=-1.22 Sigma=-0.01693 F1=0.0339 F2=0.0016
S1= 0.57 S2= 0.20 Func=-1.22 Sigma=-0.01638 F1=0.0340 F2=0.0014
S1= 0.58 S2= 0.18 Func=-1.22 Sigma=-0.01585 F1=0.0342 F2=0.0012
S1= 0.59 S2= 0.17 Func=-1.22 Sigma=-0.01535 F1=0.0344 F2=0.0010

```

S1= 0.60 S2= 0.16 Func=-1.22 Sigma-=0.01487 F1=0.0345 F2=0.0008  
S1= 0.61 S2= 0.15 Func=-1.22 Sigma-=0.01441 F1=0.0347 F2=0.0007  
S1= 0.62 S2= 0.14 Func=-1.22 Sigma-=0.01398 F1=0.0348 F2=0.0005  
S1= 0.63 S2= 0.12 Func=-1.22 Sigma-=0.01356 F1=0.0349 F2=0.0003  
S1= 0.64 S2= 0.11 Func=-1.22 Sigma-=0.01317 F1=0.0351 F2=0.0001  
a S1=0.640 CALCULO S2=0.111 \*\*\*\*\*error= 8.8817841970E-16

```

S1 =0.10 S2 =0.80                ***COND. INIC.***
S1= 0.11 S2= 0.79 Func=-1.00 Sigma=-6.87491 F1=0.0734 F2=1.0035
S1= 0.12 S2= 0.78 Func=-1.00 Sigma=-6.18864 F1=0.1387 F2=0.9383
S1= 0.13 S2= 0.77 Func=-1.00 Sigma=-5.60022 F1=0.1975 F2=0.8794
S1= 0.14 S2= 0.76 Func=-1.00 Sigma=-5.09190 F1=0.2509 F2=0.8261
S1= 0.15 S2= 0.75 Func=-1.00 Sigma=-4.64977 F1=0.2996 F2=0.7774
S1= 0.16 S2= 0.74 Func=-1.00 Sigma=-4.26282 F1=0.3441 F2=0.7329
S1= 0.17 S2= 0.73 Func=-1.00 Sigma=-3.92224 F1=0.3850 F2=0.6921
S1= 0.18 S2= 0.72 Func=-1.00 Sigma=-3.62091 F1=0.4227 F2=0.6544
S1= 0.19 S2= 0.71 Func=-1.00 Sigma=-3.35301 F1=0.4575 F2=0.6196
S1= 0.20 S2= 0.70 Func=-1.00 Sigma=-3.11377 F1=0.4899 F2=0.5873
S1= 0.21 S2= 0.69 Func=-1.00 Sigma=-2.89926 F1=0.5199 F2=0.5573
S1= 0.22 S2= 0.68 Func=-1.00 Sigma=-2.70618 F1=0.5479 F2=0.5293
S1= 0.23 S2= 0.67 Func=-1.00 Sigma=-2.53175 F1=0.5741 F2=0.5031
S1= 0.24 S2= 0.66 Func=-1.00 Sigma=-2.37367 F1=0.5986 F2=0.4786
S1= 0.25 S2= 0.65 Func=-1.00 Sigma=-2.22994 F1=0.6216 F2=0.4556
S1= 0.26 S2= 0.64 Func=-1.00 Sigma=-2.09888 F1=0.6432 F2=0.4340
S1= 0.27 S2= 0.63 Func=-1.00 Sigma=-1.97905 F1=0.6636 F2=0.4136
S1= 0.28 S2= 0.62 Func=-1.00 Sigma=-1.86919 F1=0.6829 F2=0.3944
S1= 0.29 S2= 0.61 Func=-1.00 Sigma=-1.76823 F1=0.7010 F2=0.3762
S1= 0.30 S2= 0.60 Func=-1.00 Sigma=-1.67523 F1=0.7182 F2=0.3590
S1= 0.31 S2= 0.59 Func=-1.00 Sigma=-1.58939 F1=0.7346 F2=0.3427
S1= 0.32 S2= 0.58 Func=-1.00 Sigma=-1.50997 F1=0.7501 F2=0.3272
S1= 0.33 S2= 0.57 Func=-1.00 Sigma=-1.43637 F1=0.7648 F2=0.3125
S1= 0.34 S2= 0.56 Func=-1.00 Sigma=-1.36801 F1=0.7788 F2=0.2985
S1= 0.35 S2= 0.55 Func=-1.00 Sigma=-1.30443 F1=0.7922 F2=0.2852
S1= 0.36 S2= 0.54 Func=-1.00 Sigma=-1.24517 F1=0.8049 F2=0.2724
S1= 0.37 S2= 0.53 Func=-1.00 Sigma=-1.18986 F1=0.8171 F2=0.2603
S1= 0.38 S2= 0.52 Func=-1.00 Sigma=-1.13816 F1=0.8287 F2=0.2486
S1= 0.39 S2= 0.51 Func=-1.00 Sigma=-1.08976 F1=0.8398 F2=0.2375
S1= 0.40 S2= 0.50 Func=-1.00 Sigma=-1.04438 F1=0.8505 F2=0.2268
S1= 0.41 S2= 0.49 Func=-1.00 Sigma=-1.00177 F1=0.8607 F2=0.2166
S1= 0.42 S2= 0.48 Func=-1.00 Sigma=-0.96172 F1=0.8706 F2=0.2068
S1= 0.43 S2= 0.47 Func=-1.00 Sigma=-0.92403 F1=0.8800 F2=0.1974
S1= 0.44 S2= 0.46 Func=-1.00 Sigma=-0.88851 F1=0.8890 F2=0.1883
S1= 0.45 S2= 0.45 Func=-1.00 Sigma=-0.85499 F1=0.8978 F2=0.1796
S1= 0.46 S2= 0.44 Func=-1.00 Sigma=-0.82334 F1=0.9062 F2=0.1712
S1= 0.47 S2= 0.43 Func=-1.00 Sigma=-0.79342 F1=0.9142 F2=0.1631
S1= 0.48 S2= 0.42 Func=-1.00 Sigma=-0.76509 F1=0.9220 F2=0.1554
S1= 0.49 S2= 0.41 Func=-1.00 Sigma=-0.73826 F1=0.9295 F2=0.1478
S1= 0.50 S2= 0.40 Func=-1.00 Sigma=-0.71281 F1=0.9368 F2=0.1406
S1= 0.51 S2= 0.39 Func=-1.00 Sigma=-0.68866 F1=0.9438 F2=0.1336
S1= 0.52 S2= 0.38 Func=-1.00 Sigma=-0.66572 F1=0.9506 F2=0.1268
S1= 0.53 S2= 0.37 Func=-1.00 Sigma=-0.64390 F1=0.9571 F2=0.1203
S1= 0.54 S2= 0.36 Func=-1.00 Sigma=-0.62314 F1=0.9635 F2=0.1139
S1= 0.55 S2= 0.35 Func=-1.00 Sigma=-0.60336 F1=0.9696 F2=0.1078
S1= 0.56 S2= 0.34 Func=-1.00 Sigma=-0.58451 F1=0.9755 F2=0.1019
S1= 0.57 S2= 0.33 Func=-1.00 Sigma=-0.56654 F1=0.9813 F2=0.0961
S1= 0.58 S2= 0.32 Func=-1.00 Sigma=-0.54937 F1=0.9869 F2=0.0906
S1= 0.59 S2= 0.31 Func=-1.00 Sigma=-0.53298 F1=0.9923 F2=0.0851

```

S1= 0.60	S2= 0.30	Func=-1.00	Sigma=-0.51731	F1=0.9975	F2=0.0799
S1= 0.61	S2= 0.29	Func=-1.00	Sigma=-0.50232	F1=1.0026	F2=0.0748
S1= 0.62	S2= 0.28	Func=-1.00	Sigma=-0.48797	F1=1.0076	F2=0.0699
S1= 0.63	S2= 0.27	Func=-1.00	Sigma=-0.47423	F1=1.0124	F2=0.0650
S1= 0.64	S2= 0.26	Func=-1.00	Sigma=-0.46106	F1=1.0171	F2=0.0604
S1= 0.65	S2= 0.25	Func=-1.00	Sigma=-0.44844	F1=1.0216	F2=0.0558
S1= 0.66	S2= 0.24	Func=-1.00	Sigma=-0.43632	F1=1.0260	F2=0.0514
S1= 0.67	S2= 0.23	Func=-1.00	Sigma=-0.42469	F1=1.0303	F2=0.0471
S1= 0.68	S2= 0.22	Func=-1.00	Sigma=-0.41352	F1=1.0345	F2=0.0429
S1= 0.69	S2= 0.21	Func=-1.00	Sigma=-0.40278	F1=1.0386	F2=0.0388
S1= 0.70	S2= 0.20	Func=-1.00	Sigma=-0.39245	F1=1.0426	F2=0.0349
S1= 0.71	S2= 0.19	Func=-1.00	Sigma=-0.38252	F1=1.0465	F2=0.0310
S1= 0.72	S2= 0.18	Func=-1.00	Sigma=-0.37296	F1=1.0502	F2=0.0272
S1= 0.73	S2= 0.17	Func=-1.00	Sigma=-0.36375	F1=1.0539	F2=0.0235
S1= 0.74	S2= 0.16	Func=-1.00	Sigma=-0.35489	F1=1.0575	F2=0.0199
S1= 0.75	S2= 0.15	Func=-1.00	Sigma=-0.34634	F1=1.0610	F2=0.0164
S1= 0.76	S2= 0.14	Func=-1.00	Sigma=-0.33809	F1=1.0644	F2=0.0130
S1= 0.77	S2= 0.13	Func=-1.00	Sigma=-0.33014	F1=1.0678	F2=0.0097
S1= 0.78	S2= 0.12	Func=-1.00	Sigma=-0.32246	F1=1.0710	F2=0.0064
S1= 0.79	S2= 0.11	Func=-1.00	Sigma=-0.31505	F1=1.0742	F2=0.0032
S1= 0.80	S2= 0.10	Func=-1.00	Sigma=-0.30796	F1=1.0773	F2=0.0002
a S1=0.800 CALCULO S2=0.101 *****error= 1.7763568394E-15					