



12  
29

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

---

*FACULTAD DE CIENCIAS*

# INTRODUCCION A LAS CAUSTICAS

TESIS

Que para obtener el Título de:

MATEMATICO

PRESENTA:

Joel García León



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice

A manera de Introducción - - - - -	I
1. Material necesario o requisitos previos - - - - -	1
1.1 curvas planas - - - - -	1
1.2 mínima discurción sobre curvatura - - - - -	9
1.3 Fórmulas de Frenet - - - - -	20
1.4 Punto y Orden de contacto - - - - -	24
1.5 Puntos de inflexión y Vértices - - - - -	28
1.6 Envolvente - - - - -	37
2.0 Intensidad de la luz y Cáusticas - - - - -	51
2.1 Ortotómicas - - - - -	56
2.2 Pedales y Ortotómicas - - - - -	63
2.3 Ortotómicas y Ordenes de contacto - - - - -	72
2.4 Cáusticas por reflexión - - - - -	76
2.5 Cónicas y cáusticas - - - - -	82
2.5.1 círculo discriminante - - - - -	98
3 cáusticas y singularidades - - - - -	103
3.1 Cúspides y vértices - - - - -	103
3.2 Cúbicas Nodales y cáusticas - - - - -	111
3' otras posiciones para F - - - - -	134
3'.1 La fuente de luz en alguna tangente <del>en PEEIS'</del>	134
3'.2 Elpto. al infinito como fuente de luz - - - - -	136

## A manera de introducción

Sospechamos que cuando Arquimides quemó una flota romana, con solamente el sol y un sistema óptico a base de espejos y lentes, en la batalla de Siracusa, tenía conocimiento de las cáusticas.

En general, el estudio analítico de las cáusticas es bastante difícil. En realidad, en este trabajo pretendemos dar solamente una introducción, aunque con herramienta de la matemática moderna, no podemos dejar de pensar que esto es solo el principio, y que ni por accidente logramos dar una visión completa de lo que es el estudio de las cáusticas.

La definición de cáustica en realidad es muy sencilla: Supongamos que tenemos una curva suave en  $\mathbb{R}^2$ , a la que denominamos con la letra  $E$  (para nosotros, representará un espejo en el plano, si  $F \in \mathbb{R}^2$  lo pensamos como una fuente de luz, al lanzar un rayo a nuestro espejo  $E$ , sabemos por la ley de Snell que en el pto.  $P$  donde choca con  $E$ , se reflejará de tal manera que la trayectoria seguida por el rayo, forma ángulos de incidencia iguales con la recta tangente de  $E$  en  $P$ . (fig. 1)

## II

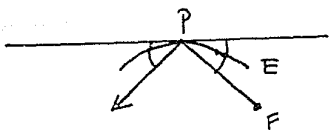


Fig. 1.

Imagínese ahora, que todos los rayos que emanan de  $F$ , al reflejarse en  $E$ , iluminan una región de  $\mathbb{R}^2$  (fig. 2)

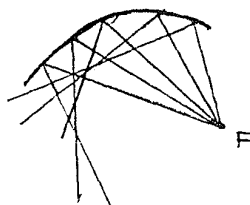


Fig. 2.

Dentro de esta zona iluminada, existe una parte donde la luz es más intensa, esta zona, matemáticamente es una zona a la cual llamaremos *cáustica por reflexión* o simplemente *cáustica del espejo  $E$  respecto a la fuente  $F$* .

El nombre de *cáustica*, según algunos autores, quiere decir "zona caliente" (pensando en calor), o "zona brillante" (pensando en luz), y es por ello que se asume el nombre.

Notemos lo siguiente: (i) si ésta en la recta tangente de  $E$  en el pto.  $P$ , la construcción falla, y por tanto, dedicaremos un apartado especial en este trabajo.

(ii) si  $F \in E$  nuevamente la construcción falla, y por tanto no lo consideraremos.

### III

a menos que se diga lo contrario, la hipótesis (ii) se supondrá a lo largo de este trabajo, que no se cumpla la consideración (i) de plano queda descartada.

Para el estudio de la cáustica recurriremos a una curva auxiliar llamada *antotónica*, que construiremos del siguiente modo:

- a) Tomamos el pto.  $P \in E$  y recta tangente a  $E$  en  $P$  que llamamos  $L$ .  $F$  lo reflejamos perpendicularmente sobre  $L$ , y el pto. que obtenemos  $F'$  es un punto de la antotónica (fig. 3).

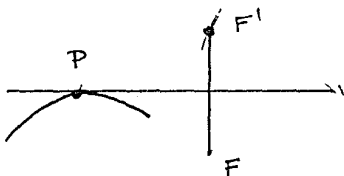


Fig. 3

- b) al variar el punto  $P \in E$  sobre la curva, obtenemos la curva antotónica que denotaremos por  $O$ , o por  $O(t)$  cuando ésta esté parametrizada con el parámetro  $t$ .

Por construcción de esta curva, el rayo que emana de  $F$  y se refleja en el pto.  $P \in E$ , la dirección que sigue después de reflejarse, es la misma que  $F'P$ .

Una propiedad de esta curva es: la recta tangente a  $O$  que pasa por  $F'$  es perpendicular a la recta  $PF'$ : entonces, las direcciones seguidas por los rayos

#### IV

es la misma que las rectas normales de la ortotónica, entónces la cáustica se puede definir de dos maneras:

- (a) la envolvente de las normales a  $O$ .
- (b) la evoluta de  $O$ .

De esta definición (pues son equivalentes) concluimos que la cáustica es tangente a  $PF'$ .

El estudio de las ortotónicas es bastante interesante, por ejemplo, esta depende de una curva  $E$  y un pto.  $F$ , si consideramos dos fuentes de luz  $F_1$  y  $F_2$  diferentes, las curvas ortotónicas respecto a  $F_1$  y  $F_2$  son diferentes.

Para el estudio de las propiedades de  $O$ , necesitamos estudiar lo que llamamos coordenadas

pedales respecto a  $F$ , que se construyen como sigue:

Tomamos un pto.  $P \in E$ , y  $L$  la recta tangente a  $E$  en  $P$ , llamamos  $R$  al pie de la perpendicular a  $L$  trazada desde  $F$ . Los segmentos  $q = FR$  y  $r = FP$ , son las coordenadas pedales respecto a  $F$  (Fig. 4), de la

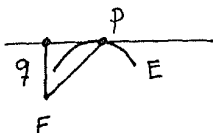


Fig. 4.

curva  $E$ , en el pto.  $P$ .

## V

Moviendo el pto.  $P$  a lo largo de  $E$ , el pto.  $R$  nos describirá una nueva curva, esto es, si por cada pto.  $P \in E$ , tomamos los pies de las perpendiculares describirán una curva, a la que llamamos curva pedal, que "unívocamente" resulta ser una curva "paralela" a la ortotómica.

Con las coordenadas pedales estudiaremos las propiedades fundamentales de la ortotómica, como amplitud y sus primeras derivadas.

Un segundo aspecto del estudio de los causticos, es como lograr extraer propiedades de éstas sin recurrir a la ortotómica. Para lograr esto hacemos mención de dos materiales interesantes:

- (a) pto. y órdenes de contacto entre curvas.
- (b) cónicas osculantes.

La parte (a) nos habla de lo siguiente:

Dadas dos curvas (fig. 5), si tienen un pto. en común,  $P$ , éste es un pto. de contacto de orden 1.

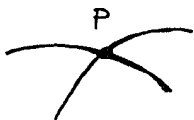


Fig. 5



## VI

Si las curvas no solamente se intersectan en  $P$ , sino que además tienen recta tangente en común en el mismo punto (fig. 6), diremos que  $P$  es un pto. de contacto de orden 2 entre las curvas.

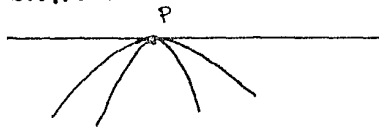


Fig. 6

Si adicionalmente las curvas tienen la misma curvatura en  $P$ , entonces el orden de contacto de  $P$  es igual a 3.

En general, se define cuando un pto.  $P$ , es un pto. de contacto de orden  $R$  entre dos curvas, bajo ciertas condiciones analíticas.

La parte b) está íntimamente ligada a la parte a), pues una cónica osculante a una curva  $E$  en un pto.  $P$ , es una cónica que "toca" a  $E$  en  $P$  y el orden de contacto entre la cónica osculante y  $E$  en  $P$  es al menos 3, intuitivamente, es una cónica "muy parecida" a  $E$  cerca de  $P$ .

Las cónicas osculantes nos permiten saber el comportamiento local de la cáustica de un espejo  $E$  respecto a una fuente de luz  $F$  dada, pues resulta, que hay una cónica osculante a  $E$  en  $P$ , tal que sus focos son  $F$  y  $S$ , donde  $S$  es un pto. de la cáustica (el que corresponde a  $P$ ), y esto nos permiti-

## VII

Te saber si la cáustica en  $S$  es regular o tiene una singularidad.

El último problema es: dado un espejo  $E$ , queremos en contrar, dado  $P \in E$ , el lugar geométrico de los focos (o fuente de luz) para que la cáustica resulte, o bien regular, o con una singularidad. Si tenemos una singularidad, también tiene su interés, en cuanto a clasificar en singularidad, sin embargo en este trabajo no lo abordaremos con la profundidad necesaria y deseada, nos limitamos a buscar cuando una singularidad en la cáustica resulta un cúspide simple.

Otro problema ligado con el anterior, es buscar la posición de la fuente de luz de tal manera que en la cáustica las singularidades sean "más horribles" que una cúspide simple. El conjunto de estas posiciones de la fuente de luz, aunque no demostramos formalmente, intuimos que es un conjunto de medida cero, desgraciadamente no podemos decir más, por ejemplo: si esto es denso. De cualquier manera, es un alivio saber que el conjunto de las posibles posiciones es "muy flaco", comparándolo con el conjunto de posiciones para las cuales la cáustica a lo más tiene una cúspide simple.

## 1. Material necesario o requisitos previos

### 1.1 curvas planas

En los cursos de geometría analítica, comencamos una curva plana es un conjunto de puntos en el plano que cumplen una ecuación de la forma:

$$F(x, y) = 0$$

por ejemplo,  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  representa una circunferencia con centro en  $(0, 0)$  y radio 1,  $F(x, y) = ax + by + c = 0$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$  fijos, representa una recta en el plano.

Esta forma de ver una curva es cierto modo con acuerdo con la idea de representarla como "lugar geométrico" de puntos en  $\mathbb{R}^2$ .

Es de bastante utilidad también, representar a las curvas planas por medio de una función  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  donde  $I$  es un intervalo en  $\mathbb{R}$ . A las curvas representadas de esta manera se les llama curvas parametrizadas.

Por ejemplo, la circunferencia  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  la podemos "parametrizar" con la función  $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ , o como la función  $\beta: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\beta(\theta) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ . Es claro que la circunferencia unitaria se puede parametrizar de muchas formas, y esto, en general, se puede hacer con una curva determinada.

Como en general, una curva se puede parametrizar<sup>n</sup> con distintas funciones, pueden sucedernos cosas como la siguiente:

$$\gamma(t) = (t^3, \text{sen } t^3)$$

<sup>a cero,</sup>  $\beta(s) = (s, \text{sen } s)$ , definidas en intervalos que contengan a cero, es claro que las imágenes son iguales, sin embargo las funciones  $\alpha$  y  $\beta$  son distintas. Ahora vemos este punto y para ello necesitamos las siguientes definiciones.

Una función  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $I$  un intervalo en  $\mathbb{R}$  abierto,  $\alpha(t)$  la podemos ver como  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  donde  $\alpha_1, \alpha_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ , y a dichas funciones  $\alpha_1, \alpha_2$ , les llamamos funciones coordenadas.

### Definición 1.

Sea  $I$  un intervalo abierto en  $\mathbb{R}$ , y  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  decimos que  $\alpha$  es derivable en  $t_0 \in I$ , siempre y cuando  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  sean derivables en  $t_0 \in I$ , y la derivada de  $\alpha$  en  $t_0$ , que denotaremos por  $\alpha'(t_0)$  está dada por:

$$\alpha'(t_0) = (\alpha_1'(t_0), \alpha_2'(t_0))$$

Si  $\alpha'(t)$  existe para toda  $t \in I$ , decimos que  $\alpha$  es derivable en  $I$ , además si  $\alpha_1'$  y  $\alpha_2'$  son continuas en  $I$ , decimos que  $\alpha$  es "continuamente diferenciable" o de clase  $C^1(I)$ , y cuando no se preste a confusión, solamente diremos que es de clase  $C^1$ . Si  $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in I$  decimos que  $\alpha$  es regular en  $I$ , si encontramos  $t_0 \in I$  tal que  $\alpha'(t_0) = 0$ , diremos que  $\alpha$  no es regular

(continua definición 1)

Si  $\alpha_1''(t)$  y  $\alpha_2''(t)$  existen  $\forall t \in I$  y son continuas, decimos que  $\alpha$  es de clase  $\mathcal{C}^2(I)$  o de clase  $\mathcal{C}^r$  simplemente, su equivalente podemos definir cuando una función  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es de clase  $\mathcal{C}^r$ , para algún  $r \in \mathbb{N}$ . Si  $\alpha$  es de clase  $\mathcal{C}^r$  para cualquier  $r \in \mathbb{N}$ , decimos que  $\alpha$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty$ , o solamente:  $\alpha$  es una función lisa o suave.

### Definición 2.

Sea  $I$  un intervalo abierto en  $\mathbb{R}$ .

Una curva plana parametrizada es una función lisa  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Con esta definición,  $\gamma(t)$  y  $\beta(s)$  son dos curvas diferentes, mas aún,  $\gamma$  no es una curva regular y  $\beta$  sí lo es!

Podemos definir también curvas para el caso cuando el intervalo  $I$  no es cerrado, y lo hacemos así: Decimos que  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es derivable en el intervalo  $I$ , si existe un intervalo  $J$  abierto, y una función  $\delta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con las propiedades siguientes:

- (i)  $I \subset J$ .
- (ii)  $\delta(t) = \alpha(t) \quad \forall t \in I$ .
- (iii)  $\delta'(t)$  existe para toda  $t \in J$ .

La derivada de  $\alpha$  en  $t \in I$ , está dada por:

$$\alpha'(t) = \delta'(t).$$

Si  $\delta$  es  $\mathcal{C}^1(J)$ , decimos que  $\alpha$  es  $\mathcal{C}^1(I)$ ,  
si  $\delta$  es  $\mathcal{C}^n(J)$ ,  $\alpha$  es  $\mathcal{C}^n(I)$ .

Notas: (i) Normalmente  $I$  siempre denotará un intervalo abierto en  $\mathbb{R}$ , a la imagen de  $I$  bajo  $d$  (i.e. al conjunto  $\{P \in \mathbb{R}^2 : d(t) = P \text{ p.o.a. } t \in I\}$ ) la denotaremos por  $\text{Im } d$  o  $d(I)$  y la llamaremos traza de  $d$ .

(ii) En ocasiones, en este texto se encontrarán afirmaciones como la que sigue: "Sea  $E \subset \mathbb{R}^2$  una curva regular", en realidad, lo que queremos decir es que  $E = d(I)$  es la traza de una curva regular de acuerdo a nuestras definiciones. Pedimos perdón de antemano si esto se presta a confusión.

Geométicamente, una curva regular significa que en cada punto de su traza  $d(I)$ , el vector tangente correspondiente es distinto de cero y, que al "variar  $t$ ", estos vectores tangentes "varían continuamente" (fig. 1)



curvas regulares



curva no regular.

Fig. 1

Es sabido que si  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es  $\mathcal{C}^1$ , su longitud de arco está dada por la fórmula

$$l = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

En general, la longitud de arco de  $E = \alpha(I)$  desde  $\alpha(a)$ , hasta  $\alpha(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , está dada por la fórmula:

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi.$$

### Definición 3.

Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva.

Un cambio de parámetros para  $\alpha$  es una función  $h: J \rightarrow I$ , donde  $J$  es un intervalo en  $\mathbb{R}$ , tal que satisface lo siguiente:

- (i)  $h$  es  $\mathcal{C}^\infty(J)$
- (ii)  $h'(s) \neq 0 \quad \forall s \in J$ .
- (iii)  $h(J) = I$

La curva  $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\beta(s) = \alpha(h(s))$  decimos que es una reparametrización de  $\alpha$

Obs. (i) Bajo las condiciones de la definición 3, se deduce que  $h^{-1}: I \rightarrow J$  existe, es  $\mathcal{C}^\infty$  y  $(h^{-1})'(t) \neq 0$ . (Esto es una consecuencia del teorema de la función inversa para  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ). Esto permite obtener:  $\alpha(t) = \beta(h^{-1}(t))$ ,  $t \in I$ . Es decir  $\alpha$  es una reparametrización de  $\beta$ .

(ii) con las condiciones de la definición 3, si  $\alpha$  es regular,  $\beta$  también lo es:  $\beta'(s) = \alpha'(h(s)) \cdot h'(s) \neq 0$ , dado que  $\alpha'$  y  $h'$  no son cero.

(iii) Una función  $h: J \rightarrow I$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$  se llama un difeomorfismo (de  $J$  en  $I$ ) si  $h^{-1}: I \rightarrow J$  existe y es también  $\mathcal{C}^\infty$ . Las hipótesis de la definición 3 obligan a que  $h$  sea un difeomorfismo (y también  $h^{-1}$ ).

ejemplo:

Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva lisa. Supongamos que  $\alpha'(t) \neq 0$ ,  $t_0 \in I$ . Entonces podemos reparametrizar  $\alpha$  en una vecindad  $V$  de  $t_0$  de tal modo que  $\gamma(I)$  se podemos ver como la gráfica de una función suave  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dem.

Por continuidad de  $\alpha'$ , existe  $V \subset \mathbb{R}$  vecindad de  $t_0$  tal que  $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in V$ . Sea  $J = \alpha_1(V)$ .  $\alpha_1: V \rightarrow J$  es un difeomorfismo. Hacemos  $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida como  $\beta = \alpha \circ \alpha_1^{-1}$ . (ver figura 2). Entonces, para  $x \in J$ , tenemos  $\beta(x) = \alpha(\alpha_1^{-1}(x)) = (\alpha_1(\alpha_1^{-1}(x)), \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x))) = (x, f(x))$ , con  $f = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$ , naturalmente  $f$  es suave por que  $\alpha_2$  y  $\alpha_1^{-1}$  lo son.

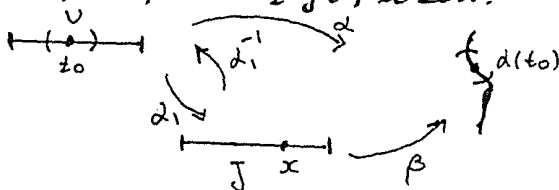


Fig. 2.



Este ejemplo es de gran importancia porque nos dice que si  $\alpha$  es regular, localmente la podemos ver como la gráfica de una función  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Otra parametrización de gran importancia es la obtenida por la longitud de arco de una curva. Esto siempre es posible, si la curva  $\alpha$  es regular.

### Teorema 1

Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular. Entonces  $\alpha$  se puede reparametrizar de tal modo que sea una curva parametrizada con longitud de arco. Esta reparametrización  $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisface:

$$\|\beta'(s)\| = 1 \quad \forall s \in J.$$

Dem.

El cambio de parámetro está dado por la función que definimos arriba:  $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(s)\| ds$ . Esta función es suave (porque  $\alpha$  lo es),  $s'(t) > 0$

$\forall t \in I$  y  $s(I) = [0, s(b)] = J$ . Definiendo  $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $\beta(s) = \alpha(g^{-1}(s))$ , donde  $g: J \rightarrow I$  es la inversa de  $s: I \rightarrow J$ , tenemos:  $\beta'(s) = \alpha'(g^{-1}(s))(g^{-1})'(s)$   
 $= \alpha'(t) \frac{1}{s'(t)} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ .

En consecuencia:

$$\|\beta'(s)\| = 1 \quad \forall s.$$

Dada una curva regular  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , normalmente es difícil obtener explícitamente su reparametrización con longitud de arco. Sin embargo, el teorema 1 es de gran importancia teórica.

Por último, demos la siguiente:

Definición 4:

Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regular parametrizada con longitud de arco. Al vector  $\alpha'(s)$  lo llamamos tangente unitaria (a  $\alpha(I)$  en  $\alpha(s)$ ) y lo denotamos por  $T(s)$ .

obs.

Las curvas parametrizadas por longitud de arco se llaman comúnmente curvas de rapidez unitaria.

## 1.2 Mínima discusión sobre curvatura.

Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular, parametrizada con longitud de arco, y sea  $P \in \gamma(I)$ . Intuitivamente, la curvatura de  $\gamma$  en  $P$  nos mide que tan "redonda" es la curva en torno a  $P$ . Por ejemplo, sea cual sea la forma de definir curvatura, es claro que una recta debe tener curvatura cero en todos sus pto., y una circunferencia debe tener curvatura diferente de cero y constante (i.e. la curvatura debe ser la misma en cada pto. de la circunferencia). Una elipse, sin embargo, debe tener curvatura diferente en puntos cercanos.

La definición es la siguiente:

### Definición 5

Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular, parametrizada con longitud de arco, el número  $\|\alpha''(s)\| = \kappa(s)$  se llama curvatura de  $\alpha$  en  $s$ , o curvatura de  $\gamma(I)$  en  $P = \alpha(s)$ .

Obrviamente, con esta definición, la curvatura de una recta es cero, en todos sus pto., pues una recta la podemos parametrizar como:

$$\alpha(s) = su + P, \quad u, P \in \mathbb{R}^2 \text{ y } \|u\| = 1. \text{ Entonces } \alpha'(s) = u \text{ y } \alpha''(s) = 0 \quad \forall s \in I.$$

Es tan fácil sencillo ver que las únicas curvas tales que su curvatura es cero en todos sus pto. son las rectas.

Sea  $\gamma$  una circunferencia de radio  $R$ , y damos en parametrización con longitud de arco esta dada por:

$$\alpha(s) = (R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}), \quad s \in [0, 2\pi R]$$

entonces:  $\alpha'(s) = (-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R})$  y

$$\alpha''(s) = (-\frac{1}{R} \cos(\frac{s}{R}), -\frac{1}{R} \sin(\frac{s}{R}))$$

por tanto:  $\kappa(s) = \frac{1}{R}$ .

Naturalmente, 2 circunferencias de radios distintos tienen curvaturas distintas, como es de esperarse.

Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada con longitud de arco. Es fácil comprobar que  $\alpha'(s)$  y  $\alpha''(s)$  son vectores perpendiculares entre sí, (si  $\alpha''(s) \neq 0$ ).  
En efecto: como  $\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 1 \quad \forall s \in I$ , tenemos:

$$\frac{d}{ds} \alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 2 \alpha'(s) \cdot \alpha''(s) = 0.$$

Si  $\alpha''(s) \neq 0$ , definimos al vector unitario normal en dirección de  $\alpha''(s)$ , a través de la ecuación:

$$\alpha''(s) = \kappa(s) N(s).$$

Obs.

Por la definición de curvatura que tenemos,  $\kappa(s) \geq 0$

Por tanto, si  $d''(s) \neq 0$ ,  $N(s)$  si siempre apunta en la misma dirección y sentido que  $d''(s)$ .

Para fines de orientación, en ocasiones es conveniente asignarle a  $k(s)$  signo. Esto se puede lograr definiendo  $N(s)$  de un modo distinto al anterior: en lugar de tomarlo si siempre en dirección de  $d''(s)$ , definiremos al vector normal normal unitario como aquél que se obtiene al girar  $\pi/2$  radianes al vector tangente en dirección contraria a la manecillas del reloj. (Fig. 3).

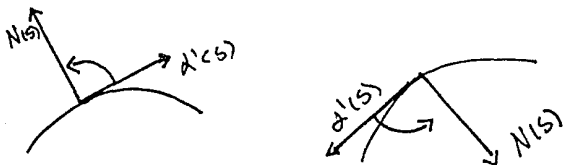


Fig. 3.

Si llamamos a este nuevo vector normal  $N(s)$ , entonces definimos la curvatura (con signo), mediante la ecuación: (Fig. 4):

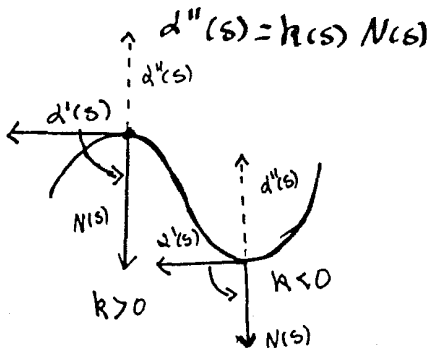


Fig. 4.

con esta definición,  $|K(s)|$  coincide con la definición anterior de curvatura.

En este trabajo consideramos a la curvatura con signo en el sentido indicado.

Si  $k(s) = 0$ , en  $P = \alpha(s_0)$

Posteriormente, vemos que los pts. donde la curvatura es cero, corresponden a pts. de inflexión de la curva.

Por cada  $s \in I$ , tenemos asignado un número  $K(s)$  que nos mide la curvatura, entonces, la curvatura la interpretamos como  $K: I \rightarrow \mathbb{R}$ , y tenemos, que como  $\alpha$  es  $C^\infty(I)$ , entonces  $K$  es  $C^\infty$ , siempre y cuando  $K(s) \neq 0$ .

Hasta ahora hemos definido curvatura para curvas parametrizadas con longitud de arco, y vamos a definirla para curvas regulares sin que necesariamente estén parametrizadas con longitud de arco, la definición es como sigue:

### Definición 6

Sea  $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular y sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  la reparametrización de  $\alpha$  con longitud de arco, esto es  $\gamma(s) = \alpha(h(s))$ , donde  $h: I \rightarrow J$  es difeomorfismo y  $\gamma'(s) \cdot \gamma'(s) = 1$ . Sea  $t_0 = h(s_0)$ , definimos la curvatura de  $\alpha$  en  $t_0$ , como la curvatura de  $\gamma$  en  $s_0$ :  $K_\alpha(t_0) = K_\gamma(s_0) = K(t_0)$

Obs.

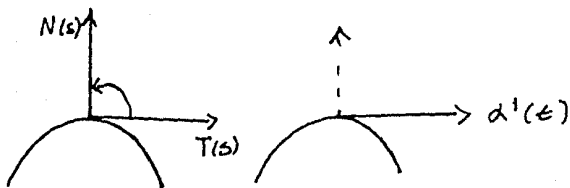
(i) La longitud de arco de una curva se puede medir a partir de un pto. inicial  $d(t_0)$ , o a partir de algún otro pto.  $d(t_1) \neq d(t_0)$ . En éste (Fig. 5) sentido no existe una única función longitud de arco, aunque es evidente que cualquier una de estas funciones se diferencia de otra solamente por una constante (en otras palabras, la longitud de arco de  $P_0$  a  $P$  es la longitud de  $P_0$  a  $P_1$  más la longitud de arco de  $P_1$  a  $P$ ).



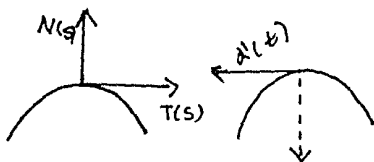
Fig. 5

Se comprueba que  $R(t_0)$  no depende del pto. inicial que tomemos y en su sentido,  $R(t_0)$  está bien definida.

(ii) El problema de nuestro definición es si el signo se preserva en la curvatura, y eso en mucho depende de  $h'$ , pues si  $h' > 0$ , el signo de la curvatura no cambia, si  $h' < 0$ , el signo de la curvatura sí cambia, para evitar este entredo, tomaremos  $h' > 0$ . (Fig. 6).



a) cuando  $h'$  es positivo



(b)  $h' < 0$ .

fig. 6

La siguiente fórmula es sumamente útil:

Proposición 1

Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular. Hagamos

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$ . Entonces

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \quad \forall t.$$

Dem.

Sea  $t_0 \in I$ , por definición,  $k(t_0)$  es el número tal que  $T'(s_0) = k(t_0)N(s_0)$ , donde  $N(s_0)$  se obtiene al rotar  $T(s_0)$   $\pi/2$  radianes en el sentido contrario de las manecillas del reloj.



ahora:

$$T(s(t)) = \frac{(x'(t), y'(t))}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{1/2}}$$

Por tanto:

$$N(s(t)) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{1/2}}$$

Por otro lado, si  $\beta$  es parametrización con longitud de arco:

$$\alpha(t) = \beta(s(t)), t \in I$$

$$\therefore \alpha'(t) = \beta'(s(t)) s'(t)$$

$$\therefore \alpha''(t) = \beta''(s(t)) s'^2(t) + \beta'(s(t)) s''(t)$$

$$= k(s(t)) N(s(t)) s'^2(t) + T'(s(t)) s''(t)$$

multiplicando a lo largo de esta última ecuación por  $N(s(t))$  (y, omitiendo por facilidad la variable), tenemos:

$$N \cdot \alpha'' = k(s)^2 = k(x'^2 + y'^2)$$

$$\therefore k = \frac{N \cdot \alpha''}{(s')^2} = \frac{(-y', x') \cdot (x'', y'')}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{y'' x' - y' x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

$$\text{i.e. } k(s(t)) = \frac{x'(t) y''(t) - y'(t) x''(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}}$$

Haciendo  $s(t_0) = s_0$  el resultado se sigue.

Ejemplos:

(i) La elipse es un caso donde es casi imposible obtener explícitamente una fórmula para representarla a través de su longitud de arco. Sin embargo, con base en la proposición anterior, podemos encontrar su curvatura en cualquiera de sus pts. Supongamos que la elipse la parametrizamos como es usual, esto es la parametrizamos por  $d(t) = (a \cos t, b \sin t)$ , con  $a \geq b > 0$  y  $t \in [0, 2\pi]$ . Haciendo los cálculos de la proposición 1, llegamos a:

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

En geometría analítica, los pts. de la elipse  $A, A', B$  y  $B'$  (fig. 7), se denominan vértices de la elipse. más adelante introduciremos la noción general de vértice y veremos que en este caso, coinciden con  $A, A', B$  y  $B'$ . (ver también fig. 26 pag. 50')

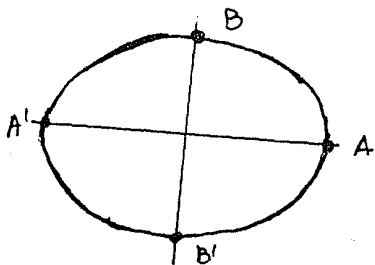


Fig. 7.

(ii) Supongamos que nuestra curva es la gráfica de una función suave, esto es:  $\gamma(x) = (x, f(x))$  con  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  suave, entonces, según la proposición 1, la curvatura la podemos calcular como:

$$K = \frac{f''(x)}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}.$$

Si  $f(x)$  tiene como recta tangente en  $x=0$ , al eje  $\mathbb{E}$ , entonces  $f'(0) = 0 = f'(0)$  y de este modo, la curvatura está dada por:

$$K = f''(0)$$

para el pto.  $x=0$ .

Supongamos que tenemos una curva regular parametrizada con longitud de arco  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , y  $P = \alpha(t_0)$ . Sea  $K_0$  la curvatura de  $\alpha$  en  $P$ . Supongamos  $K_0 \neq 0$ .

El radio de curvatura de  $\alpha$  en  $P$  lo definiremos como:

$$\rho_0 = \frac{1}{K_0}.$$

La circunferencia de curvatura de  $\alpha$  en  $P$  la definiremos como sigue: trazamos la normal en  $P$  con la dirección de  $\alpha''(t_0)$ . La circunferencia con centro en esta normal y radio  $\rho_0$  la llamamos circunferencia de  $\alpha$  en  $P$  (Fig. 8). El centro de

de esta circunferencia se llama también centro de curvatura de  $\alpha$  en  $P$ .

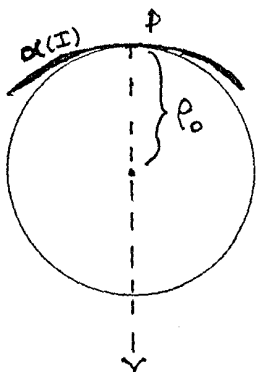


Fig. 8

En general, si  $k(\epsilon) \neq 0$ , el centro de curvatura de  $\alpha$  en  $P = \alpha(\epsilon)$  está dada por:

$$E(\epsilon) = \alpha(\epsilon) + \frac{1}{k(\epsilon)} N(\epsilon)$$

donde  $N(\epsilon) = \frac{\alpha''(\epsilon)}{\|\alpha''(\epsilon)\|}$ . La ecuación correspondiente a la circunferencia de curvatura la podemos escribir como:

$$\|\bar{x} - E(\epsilon)\| = \frac{1}{k(\epsilon)} ; \bar{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Denotemos a la curva  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $E$ , (i.e.  $E = \alpha(I)$ ). Mantengamos la suposición que  $E$  está parametrizada con longitud de arco. Tomemos el siguiente:

## Teorema 2

Sea  $P \in E$  y supongamos que la curvatura de  $E$  en  $P$  es distinta de cero. Entonces:

$\mathcal{L}$  es la circunferencia de curvatura de  $E$  en  $P$   
 $\Leftrightarrow P \in \mathcal{L}$ , la recta tangente a  $\mathcal{L}$  en  $P$  es la misma que la recta tangente de  $E$  en  $P$ , y la curvatura de  $\mathcal{L}$  coincide con la curvatura de  $E$  en  $P$ .

La demostración de este teorema la daremos más adelante, reformulando el mismo a través de la noción de "orden de contacto" entre curvas. (Otra idea para esta vez este resultado puede verse en [10, pag. 1-11].

De hecho, el teorema 2 es una bonita interpretación geométrica de curvatura y circunferencia de curvatura. La idea detrás de este teorema se usa muchos veces como pto. de partida para definir estos conceptos. (Nuevamente remitimos al lector a [10] para una discusión de esto).

Además:

A la circunferencia de curvatura, algunos autores le llaman circunferencia osculante o circunferencia osculatriz, frecuentemente en este trabajo recurrimos al nombre de circunferencia osculante.

### 1.3. Fórmulas de Frenet.

Supongamos que tenemos una curva regular parametrizada con longitud de arco  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sea  $T'(t)$  esta relacionado con el vector  $N(t)$  de la siguiente manera:

$$T'(t) = k(t)N(t)$$

siempre y cuando  $k(t) \neq 0$ , por otro lado sabemos:

$$N(t) \cdot N(t) = 1$$

para cualquier  $t \in I$ . Derivando ambos lados de la ecuación tenemos:

$$2N'(t) \cdot N(t) = 0$$

y por tanto el vector  $N'(t)$  es paralelo a  $T(t)$ , es decir  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tal que:

$$N'(t) = \lambda T(t).$$

También sabemos:

$$T(t) \cdot N(t) = 0$$

y al derivar esta ecuación:

$$T'(t) \cdot N(t) + T(t) \cdot N'(t) = 0$$

sustituyendo las ecuaciones:

$$T'(t) = k(t)N(t) \text{ y } N'(t) = \lambda T(t)$$

en la última ecuación:

$$k(t) \cdot N(t) \cdot N(t) + T(t) \cdot \lambda T(t) = 0$$

y por tanto  $k(t) + \lambda = 0$

es decir  $\lambda = -k(\epsilon)$ , tenemos entonces las fórmulas:

$$T'(\epsilon) = k(\epsilon)N(\epsilon)$$

$$N'(\epsilon) = -k(\epsilon)T(\epsilon).$$

Estas son conocidas como fórmulas de Frenet para curvas planas.

A los vectores  $T(\epsilon)$  y  $N(\epsilon)$  se les llama marco de referencia local de Frenet, o simplemente aparato de Frenet. (Para una visión más completa se puede consultar [4]).

Para concluir este capítulo, daremos otra forma de calcular la curvatura de una manera sencilla, que nos ayude a entender un poco más este concepto, supongamos que tenemos una curva parametrizada de la forma  $(t, f(t))$ , donde  $f$  es una función suave, si tomamos  $f$  tal que  $f(0) = f'(0) = 0$ , es decir la curva pasa por el origen y su recta tangente es el eje de las  $t$ 's (fig. 9).

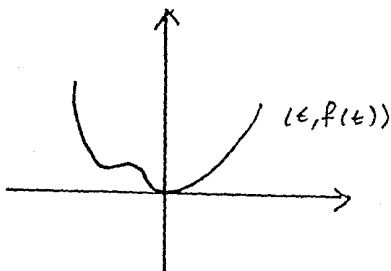


Fig. 9

Por el ejemplo (ii) pag. 17 de este capítulo, sabemos que la curva tiene en 0 esta dada por:

$$k(0) = f''(0).$$

Si expresamos a  $f$  en una vecindad de cero a través de su polinomio de Taylor, tenemos:

$$f(t) = \frac{f''(0)}{2} t^2 + t^2 P(t)$$

donde  $P(t)$  es una función suave tal que

$$\frac{P(t)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$



Haciendo las operaciones correspondientes tenemos:

$$\frac{2f'(t)}{t^2} = f''(0) + P(t)$$

sacando el límite cuando  $t \rightarrow 0$ , tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2f'(t)}{t^2} = f''(0) + \lim_{t \rightarrow 0} P(t) = f''(0) = k(0).$$

este resultado lo podemos interpretar como sigue:  
 $f(t)$  mide la "altura" de la curva respecto a la recta tangente en el pto. dado.  $t$  es la proyección del pto.  $(t, f(t))$  sobre la recta tangente en el mismo pto. . usando el marco de referencia local de Frenet:  $\delta(t) \cdot N(t)$  mide la altura respecto a la recta tangente en el pto.  $\delta(t_0)$ ,  $\delta(t) \cdot T(t_0)$  es la distancia de la proyección del punto  $\delta(t)$  sobre la tangente en  $\delta(t_0)$ . entonces la curvatura la podemos ver también como sigue: (fig. 10).

$$R = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{2 \delta(t) \cdot N(t)}{[\delta(t) \cdot T(t_0)]^2}$$

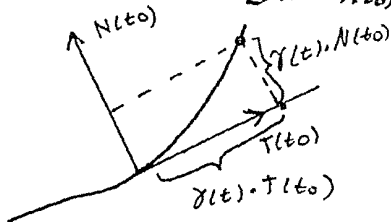


Fig. 10

Hasta aquí, hemos tratado de dar los aspectos fundamentales de la teoría de las curvas planas, en la siguiente sección abordaremos puntos y órdenes de contacto entre curvas planas.

### 1.4 Puntos y Ordenes de contacto entre curvas planas.

En esta sección, consideraremos dos hipótesis fundamentales:

1º) Damos una curva una curva parametrizada  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que sea regular y  $s$  el parámetro longitud de arco.

2º) Tenemos una curva dada en la forma  $F(x)=0$  con  $x \in \mathbb{R}^2$ . Las condiciones que pedimos a  $F$  son: que  $F$  sea suave, es decir que tenga derivadas parciales de todos los órdenes y estas sean continuas. El 0 es valor regular de  $F$ , esto es si  $x \in \mathbb{R}^2$  es tal que  $F(x)=0$ , alguna derivada parcial en  $x$  sea diferente de cero.

Empezamos con la siguiente:

#### Definición 7

Sean  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave, tal que 0 sea valor regular, y  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular.

Sea  $g: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $g(s) = F(\alpha(s))$ .

Decimos que  $P = \alpha(s_0)$  es un pto. de contacto de orden  $n$  entre  $F(\alpha(s))$  y  $\alpha(s)$ , si y solo si:  $g(s_0) = 0$ ,

$g^{(i)}(s_0) = 0$  para  $i = 1, \dots, n-1$  y  $g^{(n)}(s_0) \neq 0$ .

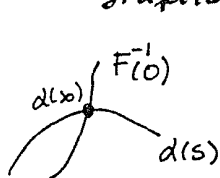
por  $g^{(i)}(s_0)$  entendemos la  $i$ -ésima derivada de la función  $g$ .

Obs.

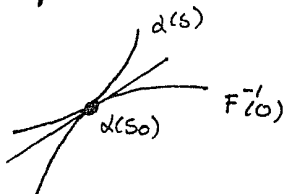
(i) con esta definición, la función  $g$  resulta ser una función suave, pues es composición de dos funciones suaves:  $F$  y  $d$ .

(ii) por las hipótesis restrictivas de la función  $F$ ,  $F'(0)$  resulta ser una curva en el plano, más aún por el teorema de la función implícita para funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ , resulta una curva suave.

Gráficamente esto se puede ver así: (fig. 11)



a) pto. de contacto de orden 1



b) Pto. de contacto de orden mayor o igual a 4.

Ejemplos: fig. 11

(1) tomemos la circunferencia unitaria en su forma implícita:  $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Sea  $d: I \rightarrow \mathbb{S}$  con  $I = [-1, 1]$ , y  $d$  dada por  $d(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(s, s)$ . Naturalmente, ambas curvas se intersectan en el plano (fig. 12).

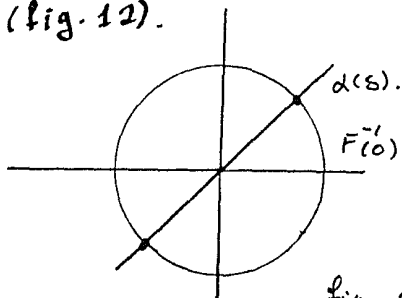


fig. 12.

busquemos ahora los pto. de intersección entre ambas curvas, en otras palabras, apliquemos nuestra definición de orden de contacto:

$$g(s) = F(d(s)) = F\left(\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{2} - 1 = s^2 - 1 = 0$$

entonces  $g(s) = 0$ , si y solo si  $s = \pm 1$ , esto es, los puntos de intersección son:

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } Q = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

P y Q son puntos de contacto de orden al menos 1 entre  $d(s)$  y  $F(\cdot)$ . Pasaremos a ver que P y Q no tienen orden de contacto 2.

$$g'(s) = 2s = 0 \iff s = 0$$

concluimos entonces, que P y Q tienen orden de contacto exactamente igual a 1.

(ii) Tomemos la circunferencia de radio 1, con centro en  $(0,1)$ , y la parábola  $d(s) = (s, s^2)$ , por la figura 13, sospechamos que los pto.  $P = (-1,1)$  y  $Q = (1,1)$  tienen orden de contacto entre estas curvas igual a 1, y el pto.  $R = (0,0)$  tiene orden de contacto al menos 2, pues ambas curvas tienen como recta tangente en R al eje X.

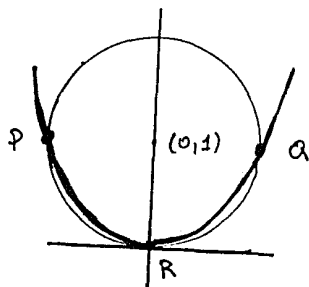


fig. 13

Tomamos la circunferencia en su forma implícita:

$$F(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1.$$

Sea  $g(s) = F(s, s^2) = s^2 + (s^2 - 1)^2 - 1$ , entonces las soluciones de la ecuación  $g(s) = 0$ , son  $s = \pm 1$  y  $s = 0$

entonces los pto. P, Q y R tienen al menos un orden de contacto igual a 1.

Para ver si estos tienen contacto igual a 2 derivamos  $g$  y buscamos las soluciones de la ecuación:  $g'(s) = 0$ , es decir

$$g'(s) = 2s(2s^2 - 1) = 0$$

y esta ecuación tiene dos soluciones:

$$s = 0 \text{ y } s = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

sin embargo, la solución  $s = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  no es solución de  $g(s) = 0$ , y por tanto la descartamos.

La solución  $s = 0$ , si es solución de:

$$g(s) = g'(s) = 0.$$

de aquí concluimos: P y Q son pto. de contacto de orden 1 entre  $d(s)$  y  $F'(0)$ , y R es un pto. de contacto de orden 2, que era lo que pensábamos.

### 1.5. Puntos de inflexión y nérticos.

Esta asociación es importante para nuestro trabajo, puesto en estos conceptos se basa gran parte de nuestros resultados sobre las cáusticas se basan en estos conceptos.

tomemos  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde  $I$  es un intervalo abierto que contiene al cero, y  $\alpha$  definida como:

$\alpha(t) = (t, t^3)$ , es bien sabido que en  $t=0$  nuestra curva tiene un pto. de inflexión (fig 14).

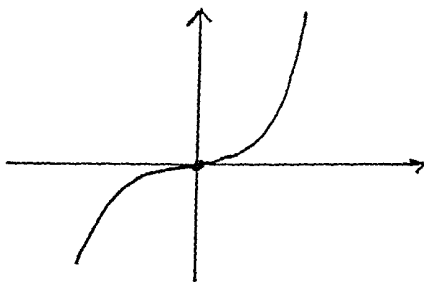


Fig. 14

observamos lo siguiente: la recta tangente es el eje  $X$  y su ecuación la podemos dar implícitamente mediante  $F(x, y) = y = 0$ . al aplicar nuestra definición de pto. de contacto, tenemos:

$$g(t) = F(\alpha(t)) = F(t, t^3) = t^3 = 0$$

$$g'(t) = 3t^2 = 0$$

$$g''(t) = 6t = 0$$

$$g'''(t) = 6 \neq 0$$

y concluimos que el pto.  $p = (0, 0)$  es un pto. de contacto de orden 3 entre  $\alpha(t)$  y su recta tangente en  $t=0$ .

de esta manera tenemos:

Definición 8.

Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular.

- (i) Decimos, que el pto  $P = \alpha(t_0)$  es un pto. de inflexión ordinario, si  $\alpha$  y su recta tangente en  $\alpha(t_0)$  tienen un pto. de contacto de orden 3.
- (ii) Cuando el orden de contacto, sea mayor que 3, decimos que se trata de un pto. de inflexión degenerado.

Cuando se habla en este trabajo de pto. de inflexión, en realidad nos referiremos a pto. que cumplen nuestra definición 8.

Obs.

a) En general, la parte (ii) rompe con nuestra idea "intuitiva" de lo que es un pto. de inflexión, pues como, sabemos, un pto. de inflexión es aquel don, de la recta tangente "cruza" la gráfica de la función, cuando la función es de valores reales y variables reales. Sin embargo, consideremos la función  $f(x) = x^4$ , aplicando la definición de puntos de contacto tenemos:

la recta tangente, está dada implícitamente por  $F(x,y) = y$ , entonces  $g(x) = F(x, x^4) = x^4$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$g'''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$g''''(x) \neq 0$$

y de esta manera, según nuestra definición (ii)  $f(x)$  tiene un pto de inflexión degenerado.

(b) otra forma de definir los ptes. de inflexión nos permitirá diferenciar a las curvas por medio de su curvatura, y esto lo veremos más adelante.

Supongamos que tenemos una curva regular, sabemos localmente que esta puede parametrizarse localmente, de la forma  $\alpha(t) = (t, f(t))$ , y supongamos que  $f'(0) = f''(0) = 0$ , con ello, estamos pensando en una curva cuya recta tangente en  $t=0$ , es el eje  $t$ . Entonces, la recta tangente está dada implícitamente por la ecuación:

$$F(x, y) = y = 0, \text{ tomemos } g(t) = F(\alpha(t)) = F(t, f(t)) = f(t)$$

y observamos:

$$g(t) = f(t) = 0$$

$$g'(t) = f'(t) = 0$$

$$g''(t) = f''(t) = 0$$

$$g'''(t) = f'''(t) = 0$$



y notamos que en  $t=0$ ,  $d(t)$  tiene un pto. de inflexión si y solo si  $g''(0) = f''(0) = 0$ , y como  $f''(0)$  mide la curvatura en  $t=0$ , prácticamente tenemos demostrada la:

Proposición 2

Sea  $d: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular, entonces:

$P = d(t_0)$  es un pto de inflexión si y solo si la curvatura de  $d$  en  $t=t_0$  es cero.

De este modo, podemos decir que los pto. de inflexión son aquellos donde la curva tiene curvatura cero.

Pasamos a discutir los pto. en el plano, tales que llamaremos nítidos a una curva  $d(t)$ . En la página 17 de este capítulo, definimos la circunferencia de curvatura o circunferencia osculante, estamos en condiciones de abordar este problema, supongamos que tenemos una curva regular parametrizada con longitud de arco  $d(t)$ , y nos preguntamos: dado  $P = d(t_0)$ , ¿cuántas circunferencias existen tal que  $d(t_0) = P$  sea un pto de contacto de orden al menos 4 con  $d(t)$ , Para abordar este problema, usamos el hecho de que si  $R \in \mathbb{R}^+$  y  $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$ , la circunferencia con centro en  $\bar{a}$  y radio  $R$ , tiene la expresión implícita:  $F(x) = (x-\bar{a}) \cdot (x-\bar{a}) - R^2 = 0$

donde  $x \in \mathbb{R}^2$ , si queremos que se intersekte con nuestra curva en  $P = d(t_0)$ , se debe de cumplir que  $t = t_0$  es solución de:

$$g(t) = F(d(t)) = 0$$

pero el conjunto de circunferencias que cumplen esta ecuación es "muy grande" (Fig. 15),

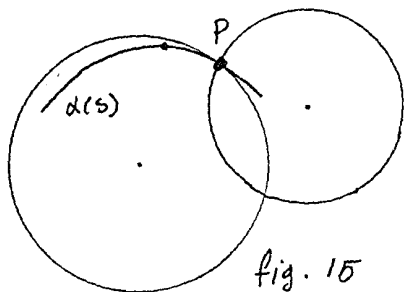


Fig. 15

pues hay muchísimas circunferencias, que tocan a  $d(t)$  en  $P = d(t_0)$ , y es por eso que nuestra ecuación  $g(t) = 0$ , tiene una infinidad de soluciones.

Si tomamos  $g'(t) = 0$ , el conjunto de circunferencias que son tangentes a  $d(t)$  en  $P$ , son las que cumplen esta ecuación, y por tanto, todavía hay una infinidad de soluciones en las ecuaciones  $g(t) = 0$  y  $g'(t) = 0$  (Fig. 16). Sin embargo, las ecuaciones  $g''(t) = 0$  y  $g'''(t) = 0$ , nos reducen bastante el conjunto de soluciones, a tal grado, que solamente hay una...

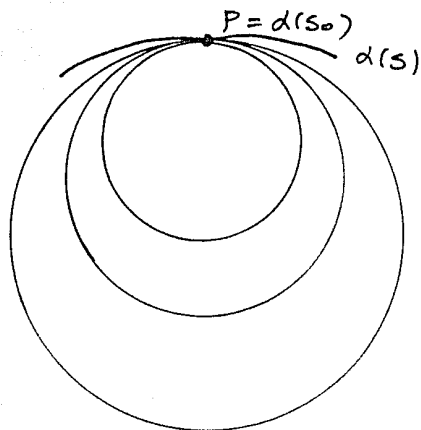


Fig. 16.

haciendo los cálculos correspondientes, tenemos:

$$g(t) = (d(t) - a) \cdot (d(t) - a) - R^2 = 0$$

$$g'(t) = 2T(t) \cdot (d(t) - a) = 0$$

$$g''(t) = 2 [T'(t) \cdot (d(t) - a) + T(t) \cdot T'(t)] \\ = 2 [T'(t) N(t) \cdot (d(t) - a) + 1] = 0$$

puesto que queremos que  $P = d(t_0)$  sea punto de contacto de orden 4, tenemos de  $g'(t_0) = 0$  que el vector  $d(t_0) - a$ , debe cumplir: es perpendicular a  $T(t_0)$  y por tanto para todo a  $N(t_0)$  y por tanto  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $d(t_0) - a = \lambda N(t_0)$  y por tanto  $a = d(t_0) - \lambda N(t_0)$ .

al substituir en la ecuación  $g''(t_0) = 0$ , tenemos

$$k(t_0) N(t_0) - (\lambda N(t_0)) + 1 = 0$$

es decir  $\lambda = -\frac{1}{k(t_0)}$

y entonces, a es el vector:

$$a = d(t_0) + \frac{1}{k(t_0)} N(t_0)$$

¡ la circunferencia osculante!, volviendo a derivar  $g''(t)$ , tenemos:

$$g'''(t) = 0$$

como queremos contacto igual a 4, to debe de cumplir la ecuación, y por tanto:

$$g'''(t_0) = \frac{2k'(t_0)}{k(t_0)} = 0$$

y esto se cumple a menos que  $k'(t_0) = 0$ .

para que la ecuación  $g''(t_0) = 0$  sea válida, debemos pedir  $k(t_0) \neq 0$ , y por tanto, si  $P = d(t_0)$  no es un pto. de inflexión, entonces podemos sacar dos conclusiones:

- 1) La circunferencia osculante a  $d(t)$  en  $P = d(t_0)$  tiene un pto. de contacto de orden 3 con  $d(t)$ .
- 2) Si la circunferencia osculante a  $d(t)$  en  $d(t_0)$  tiene un pto. de contacto de orden 4 con  $d(t)$ , se cumple:  $k'(t_0) = 0$ .

Notemos entonces, que en terminos de contacto, podemos redefinir la circunferencia osculante:

Def. 9

Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $P = \alpha(t_0)$ , si  $R(t_0) \neq 0$ , la circunferencia osculante es aquella que tiene un pto. de contacto de orden al menos 3 con  $\alpha(\epsilon)$  en  $P = \alpha(t_0)$ .

De (2) también podemos tener:

Definición 10

Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  con las hipótesis de la definición 9.

(i) decimos que  $P = \alpha(t_0)$  es un vértice ordinario de  $\alpha(\epsilon)$ , si y solo si existe una circunferencia tal que  $P = \alpha(t_0)$  sea un pto. de contacto de orden 4, entre esta circunferencia y la curva  $\alpha(\epsilon)$ .

(ii) si la circunferencia  $\gamma$  tiene un pto. de contacto con  $\alpha(\epsilon)$  en  $P = \alpha(t_0)$ , decimos que el vértice es degenerado.

Notamos lo siguiente, si un pto.  $P$  cumple la definición 10, ya sea (i) o (ii), simplemente lo llamaremos vértice, y observamos que si un pto.  $P$  es vértice, este no puede ser un pto. de inflexión y por tanto esto no debe prestarse a ambigüedades.

De hecho, también estamos en condiciones de formular:

Proposición 3.

Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular y  $P = \alpha(t_0)$ .  
 $P$  es un vértice si y solo si, la derivada de la curvatura de  $\alpha$  en  $P$  es igual a cero.

Comentarios:

- (1) en la definición 10, estamos asumiendo que la circunferencia es osculante, sea de "radio infinito", es decir una recta, pues según la proposición 2, esto corresponde a ptos. de inflexión.
- (2) se pudo definir un vértice por medio de la proposición 3, sin embargo nos pareció más geométrico (i.e. más bonito) hacerlo a través de puntos de contacto.
- (3) Hay autores [4] que no diferencian entre vértices e inflexiones, pues solamente definen vértices en términos de la derivada de la curvatura.
- (4) En las proposiciones del capítulo 3, convenientemente se formulan en la siguiente forma: "... sea  $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \neq 0$ , si  $P$  es vértice ...", de acuerdo con las definiciones dadas en esta parte resulta redundante, sin embargo, lo hicimos para evitar confusiones en el trabajo.

## 1.6 Envoltentes

### Definición de envoltente

Empezamos este capítulo con un ejemplo sencillo: Pensmos en la familia de circunferencias de radio 1, con centro en el eje  $X$ , es decir las curvas cuya ecuación es:

$$(x-t)^2 + y^2 = 1.$$

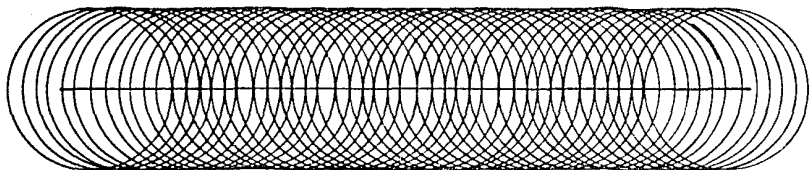


fig. 17

Consideremos las rectas  $y = \pm 1$ . Estas rectas tienen varias propiedades interesantes, por ejemplo, para cualquier punto en cada una de ellas, hay una circunferencia de la familia tangente a la recta en dicho punto. Una segunda propiedad es la siguiente: dichas rectas son la frontera de la banda o región que "llenan" las circunferencias. Las rectas  $y = \pm 1$  se llaman la envoltente de la familia de circunferencias (fig. 17).

Un ejemplo parecido es el siguiente: tomemos una curva  $\Gamma$ , y, con centro en cada punto de ésta, trazamos una circunferencia de radio  $r > 0$ . Las curvas paralelas a  $\Gamma$ , a una distancia  $r$  de  $\Gamma$ , son la envolvente de esta familia de circunferencias (fig.18).

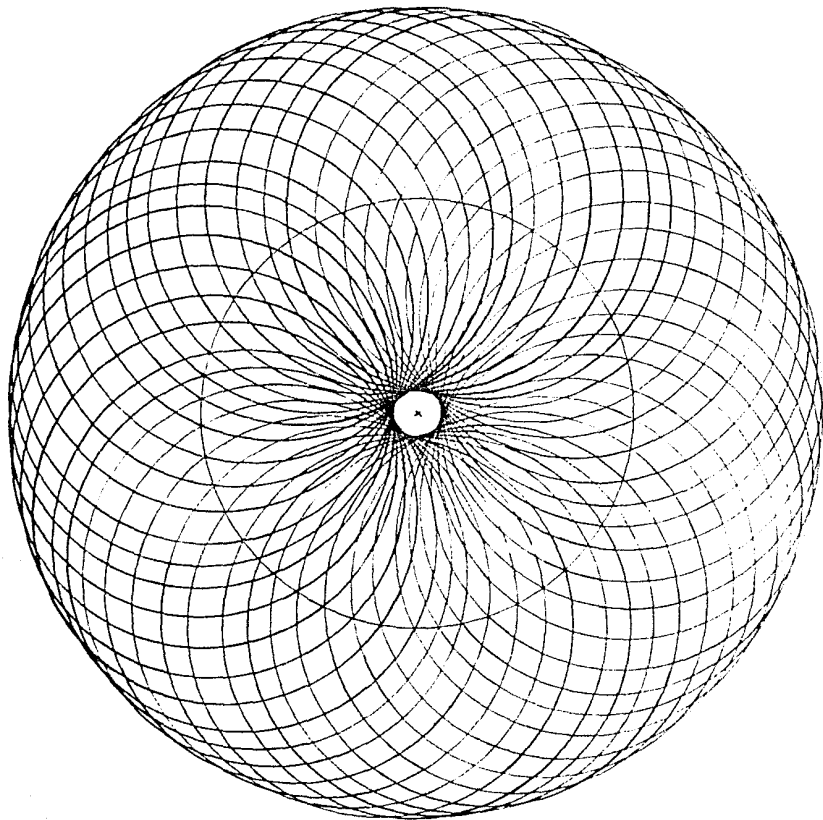


fig. 18  
Paralelas de una circunferencia.



Partiendo de estos sencillos ejemplos, nuestro problema, ahora, es cómo definir en general el concepto de envolvente de una familia de curvas, que para nosotros, la familia de curvas serán curvas regulares.

De los ejemplos anteriores podemos dar algunas propiedades, y proponerlas como definición, digamos:

- 1) La envolvente de una familia de curvas es aquella curva (o curvas) que es tangente a todas las curvas de la familia.
- 2) La envolvente de una familia de curvas, es la frontera de la región "llenada" por la familia.

El problema que tenemos ahora, es que estas dos definiciones no son equivalentes, y para ello veamos algunos ejemplos:

a) tomemos la familia de circunferencias, de radio menor o igual a 1, entonces, dicha familia llena el disco de radio 1 (exceptuando el origen), y su frontera es el origen, junto con la circunferencia de radio 1. Sin embargo, esta circunferencia no cumple con el criterio (1).

b) Tomemos ahora una parábola y sus rectas normales en cada punto, nuestra familia es entonces la de las rectas normales. También esta familia tiene una envolvente en el sentido de (1), que es la evoluta de la parábola. Es claro que esta envolvente no cumple el criterio (2).

Para resolver este enredo, revisemos con un poco más de cuidado nuestros ejemplos: en el caso de las circunferencias con centro en el eje  $X$ , podemos dar la

ecuación:

$$(x-t)^2 + y^2 = 1$$

aquí, para el caso en que  $t$  está fijo, representa una circunferencia de radio 1, pero esta ecuación también la podemos ver como:

$$(x-t)^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Si definimos  $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , como  $F(x, y, t) = (x-t)^2 + y^2 - 1$ , entonces claramente el cero es un valor regular y  $F^{-1}(0)$  es un "cilindro" en  $\mathbb{R}^3$  (fig. 19).

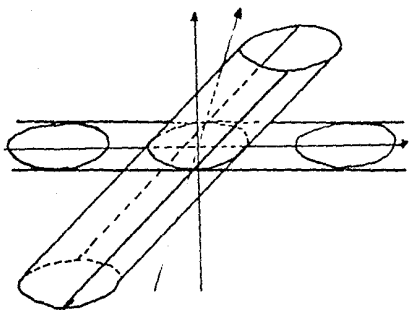


fig. 19

Para encontrar dichos puntos y proyectar, usaremos material del cálculo diferencial e integral. Sabemos, por ejemplo, que si  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave, bajo la condición que  $\nabla F(\bar{x}_0) \neq 0$ , entonces el vector gradiente  $\nabla F(\bar{x}_0)$  es un vector perpendicular a la superficie de nivel  $F^{-1}(\{F(\bar{x}_0)\})$ ; es decir, si  $\pi$  es el plano tangente en  $\bar{x}_0$  a la superficie, entonces, para cualquier  $\gamma \in \pi$ , tenemos  $\nabla F(\bar{x}_0) \cdot \gamma = 0$ .

En términos de nuestro problema, tendríamos la siguiente situación: Si el plano tangente en  $\bar{x}_0$  es paralelo al eje  $t$ , el vector  $\nabla F(x, y, t) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial t} \right)$ , debe ser paralelo

Aquí vemos lo siguiente: las rectas  $y = \pm 1$  en el plano, corresponden a la proyección en  $\mathbb{R}^2$  de los puntos de la superficie donde el plano tangente es paralelo al eje  $t$ . Nuestro problema entonces se traduce en describir estos puntos y proyectar sobre el plano.

al plano  $x, y$ , esto es, la última componente de tal vector debe ser cero (fig. 20).

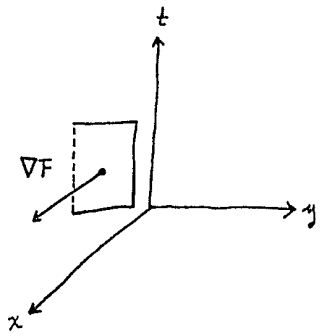


fig. 20

Veamos esto con más calma en nuestro ejemplo:  $F(0)$  es el conjunto de puntos  $(x, y, t)$  que cumplen  $F(x, y, t) = (x-t)^2 + y^2 - 1 = 0$ . Ahora, de estos puntos también buscamos aquellos para los cuales  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ ; es decir:  $\frac{\partial F}{\partial t} = -2(x-t) = 0$  y concluimos:  $x=t$ .

Hecho esto, tenemos que los puntos que buscamos en la superficie son de la forma  $(t, y, t)$ . Al aplicarles nuevamente la función, tenemos  $F(t, y, t) = y^2 - 1 = 0$  y  $\therefore y = \pm 1$ .

Si proyectamos en el plano la solución de ambas ecuaciones, esto es,  $(t, \pm 1, t)$ , tenemos el conjunto  $(t, \pm 1)$ , que son precisamente las rectas "envolventes".

Pasamos ahora al ejemplo de la parábola: supongamos que la parábola la parametrizamos de la siguiente manera:  $(t, t^2) = \gamma(t)$ . Para cada  $t$ , la ecuación de la recta normal a la parábola en  $(t, t^2)$  está dada por:

$$x + t(2y - 1) - 2t^3 = 0.$$

Definimos la función  $F(x, y, t) = x + t(2y - 1) - 2t^3$ . Ahora  $F(x, y, t) = 0$  representa una superficie en  $\mathbb{R}^3$  (fig. 21). Los puntos que buscamos son aquellos donde el plano tangente es paralelo al eje  $t$ , al proyectar estos puntos sobre el plano  $x, y$  obtenemos la evoluta de la parábola. Aplicamos el cálculo para encontrar la curva buscada; es

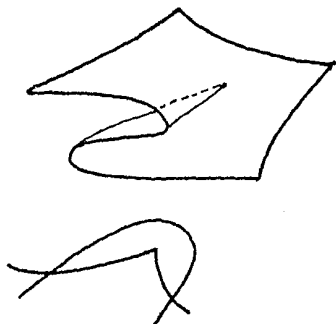
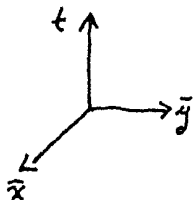


fig. 21

decir, tenemos que buscar la solución del sistema:

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0 \end{cases}$$

al tomar la segunda ecuación tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2y - 1 - 6t^2 = 0$$

y por tanto:  $y = \frac{1}{2}(6t^2 + 1)$

al sustituir en la primera ecuación, tenemos:

$$x = 4t^3.$$

Entonces, sobre la superficie, los puntos buscados son:  $(-4t^3, \frac{1}{2}(6t^2 + 1), t)$  que al proyectarlos sobre el plano, tenemos los puntos:

$$(-4t^3, \frac{1}{2}(6t^2 + 1)),$$

que es la envoltura de las rectas normales.

Comentario: el anterior ejemplo se puede ver como la solución del problema de una máquina gravitacional de contorno parabólico, ver [3, capítulo I].

El ejemplo (a) lo resolvemos así:

Sea  $F(x, y, t) = x^2 + y^2 - (1-t^2)$  con  $0 \leq t \leq 1$ , entonces tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0 \end{cases}$$

de la segunda ecuación tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2t = 0$$

y por tanto  $t=0$ .

Geométicamente, esto significa lo siguiente: para  $t$  fijo, tenemos una circunferencia de radio  $(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$ , y  $F(x, y, 0) = 0$  representa la circunferencia unitaria en el plano, que

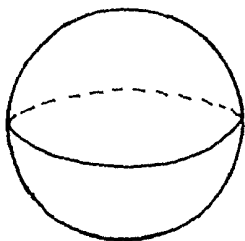


fig. 22

es la solución de nuestro sistema (fig. 22). Entonces, como era de esperarse, la solución es  $(x, y, 0)$ , que al proyectar sobre el plano, son precisamente los puntos de la circunferencia unitaria.

Por otro lado  $(x, y, 0)$ , son los puntos de la superficie donde el plano tangente es paralelo al eje  $t$ .

Pasamos, pues, a sintetizar nuestra discusión.

Por un lado, nuestra familia de curvas depende de un parámetro, digamos  $t$ , entonces, nuestra familia puede ser descrita por una función  $F: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $U$  es abierto en  $\mathbb{R}^2$  y  $V$  abierto en  $\mathbb{R}$ . Damos por sentado que la función  $F(x, y, t)$  es una función suave y  $0$  es un valor regular.

### Definición:

Sea  $F(x, y, t) = 0$  una familia de curvas, parametrizada con  $t$ . Sean

$$E = \{ (x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0 \} \quad y$$

$$\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ dada por } \pi(x, y, t) = (x, y).$$

La envolvente de la familia de curvas, será el conjunto  $\pi(E) = \mathcal{P}$ .

Ejemplos:

1) Paralelas:

Supongamos que tenemos una curva regular  $\gamma(t)$  parametrizada con longitud de arco, trazar una curva paralela a  $\gamma(t)$ ; si  $x \in \mathbb{R}^2$ , para que esté en la circunferencia de radio  $R$  con centro en  $\gamma(t)$ , debe cumplir:

$$(x - \gamma(t)) \cdot (x - \gamma(t)) - R^2 = 0.$$

Definimos  $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$F(x, t) = (x - \gamma(t)) \cdot (x - \gamma(t)) - R^2,$$

y tenemos que resolver el sistema:

$$F(x, t) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 0$$

Tomando la segunda ecuación, tenemos:

$$\frac{\delta F}{\delta t} = -2T(t) \cdot (x - \gamma(t)) = 0$$

y por tanto  $x - \gamma(t)$  es paralelo al vector normal  $N(t)$ , esto es,  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tal que:

$$x - \gamma(t) = \lambda N(t)$$

y por tanto  $x = \gamma(t) + \lambda N(t)$ ,

al sustituir en la primera ecuación, tenemos:

$$(\gamma(t) + \lambda N(t) - \gamma(t)) \cdot (\gamma(t) + \lambda N(t) - \gamma(t)) - R^2 = 0$$

y por tanto  $\lambda^2 - R^2 = 0$ ,

esto es  $\lambda = \pm R$ .

Así, la solución del sistema es el conjunto de puntos

$$(\gamma(t) \pm RN(t), t)$$

que al proyectar en el plano es

$$\gamma \pm RN(t).$$

El hecho de que tengamos dos soluciones, nos indica que en realidad no hay una, sino dos curvas paralelas.

De aquí, ya podemos dar una definición de lo que entendemos como una curva paralela a una curva dada.

### Definición:

Sea  $\gamma(t)$  una curva regular, parametrizada con longitud de arco. Decimos que  $\beta(t)$  es una curva paralela a  $\gamma(t)$ , si  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\beta(t) = \gamma(t) + \lambda N(t).$$

### 2) Evoluta de una curva regular.

Supongamos que tenemos una curva regular  $\gamma(t)$ , parametrizada con longitud de arco. Consideremos todas sus rectas normales, queremos encontrar la envolvente de estas rectas.

Primero; si  $x = TR^2$  es un punto de la recta normal, entonces debe cumplir (fig. 23):

$$x \cdot T(t) - (\gamma(t) \cdot T(t)) = 0$$

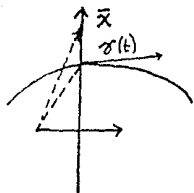


fig. 23

Entonces definimos  $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$F(x, t) = x \cdot T(t) - (\gamma(t) - T(t))$ . Para cada  $t$  fijo  $F(x, t) = 0$  representa una recta normal a la curva.

Aplicando la definición de envolvente, debemos resolver el sistema:

$$F(x, t) = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta t}(x, t) = 0$$

tomando la segunda ecuación tenemos:

$$\frac{\delta F}{\delta t} = x \cdot T'(t) - (T(t) \cdot T(t) + \gamma(t) \cdot T'(t)).$$

Aplicando las fórmulas de Frenet tenemos:

$$\frac{\delta F}{\delta t} = kx \cdot N(t) - (1 + k(t) \gamma(t) \cdot N(t)) = 0$$

$$\Rightarrow k(t)x \cdot N(t) - k(t) \gamma(t) \cdot N(t) = 1$$

$$\text{i.e. : } k(t)N(t) \cdot (x - \gamma(t)) = 1$$

y por tanto la solución es:

$$x = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)} N(t),$$

esta curva en realidad ya la conocíamos, pues es la curva formada por los centros de curvatura, a la que llamaremos evoluta de la curva  $\gamma(t)$ .

### Definición

Sea  $\gamma(t)$  una curva regular, parametrizada con longitud de arco, y con curvatura diferente de cero.

La evoluta de la curva  $\gamma(t)$  es la curva

$$E_{\gamma}(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)} N(t)$$



Observación:

-47-

Una pregunta natural sobre las curvas paralelas es la siguiente: si tomamos una curva regular, y una paralela a ésta, ¿la parábola es regular? Nuestra intuición diría que sí, sin embargo, observemos lo siguiente: Sea  $\beta(t)$  una curva paralela a  $\gamma(t)$ , entonces

$\exists r \in \mathbb{R} \exists \gamma: \beta(t) = \gamma(t) + rN(t)$ , y al derivar esta ecuación tenemos:

$$\beta'(t) = \gamma'(t) + rN'(t) = T(t) - K(t)T(t)r = T(t)(1 - K(t)r)$$

entonces si existe  $t_0$ , tal que  $r = \frac{1}{K(t_0)}$ , quiere decir que  $\beta'(t_0) = 0$ , por tanto nuestra curva paralela perdería la regularidad en este punto (fig. 24).

Ahora, otra pregunta, también natural es la siguiente:

¿la evoluta es una curva regular?, y para ver esto tendríamos:

$$E(t) = \gamma(t) + \frac{1}{K(t)} N(t)$$

y al derivar:

$$E'(t) = T(t) - \frac{1}{K(t)} K'(t)T(t) - \frac{K'(t)}{K^2(t)} N(t)$$

y esta ecuación es igual a cero si y sólo si  $K'(t) = 0$ , es decir, en los vértices de la curva.

De este modo tenemos demostrado lo siguiente:

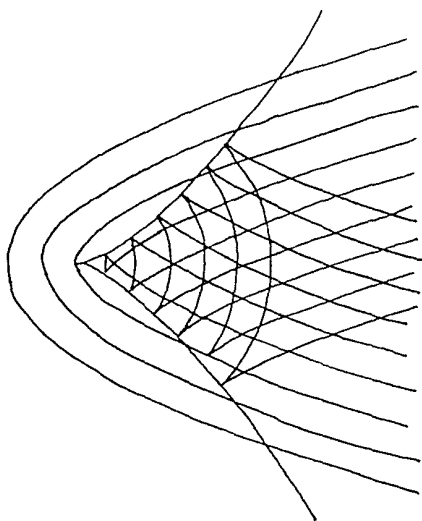


fig. 24  
Paralelas de  
una parábola.

Proposición:

Sea  $\gamma(t)$  una curva regular parametrizada con longitud de arco, con curvatura diferente de cero:

a) Si  $r \neq \frac{1}{K(t)} \forall t$ , entonces la curva paralela:

$$\beta(t) = \gamma(t) + r N(t)$$

es una curva regular.

b) Si  $\gamma(t)$  no tiene vértices, entonces  $\epsilon(t) = \gamma(t) + \frac{1}{K(t)} N(t)$

es una curva regular.

Para continuar, nos detendremos a ver un poco la familia de curvas  $F(x, t) = 0$  con  $x \in \mathbb{R}^2$ , naturalmente, esta familia depende del parámetro  $t$ , si cambiamos el parámetro, ¿cambiará la envolvente?, para responder esta pregunta, veremos un ejemplo:

i) tomemos las familias

$$F_1(x, y, t) = y - x + t = 0 \quad \text{y} \quad F_2(x, y, s) = y - x + s^3 = 0$$

estas funciones como familias son la misma en  $\mathbb{R}^2$ , pues ellas son rectas paralelas a la recta  $y = x$  (fig. 25).

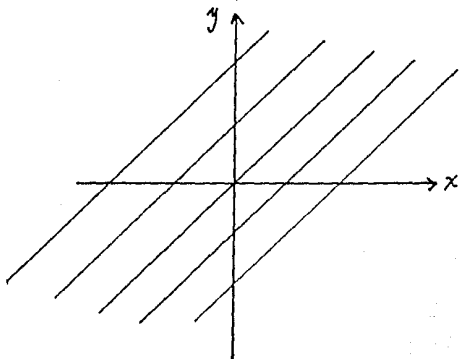


fig. 25

Sin embargo, tenemos

-49-

$$\frac{\delta F_1}{\delta t} = 1 \neq 0 \quad \forall t$$

$$4 \quad \frac{\delta F_2}{\delta s} = 3s^2 = 0 \iff s=0$$

y de aquí concluimos que la familia  $F_1$  no tiene envolvente!, y, sin embargo,  $F_2$  tiene como envolvente a la recta  $y=x$ !. El problema en este ejemplo, fue que una familia  $F_1$ , la reparametrizamos con un "mal parámetro"; esto quiere decir que al reparametrizar, usamos una función que en un punto su derivada es cero. Para evitar este problema, al reparametrizar pediremos que en todos sus puntos no tenga derivada cero, esto es, pedimos que sea un difeomorfismo, entonces tenemos el siguiente resultado:

### Proposición

Sea  $F$  una familia de funciones, y sea  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un difeomorfismo, sea  $G$  definida como  $G(x, t) = F(x, h(t))$ , entonces  $0$  es valor regular de  $G$ , y la envolvente de la familia  $G$  es la misma que la envolvente de la familia  $F$ .

### Demostración

Sea  $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida como  $H(x, t) = (x, h(t))$ , entonces:

$$\frac{\delta H}{\delta t} = h'(t) \neq 0 \quad \forall t, \quad \text{y} \quad DH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h'(t) \end{pmatrix} \quad \text{como} \quad \det H = h'(t) \neq 0,$$

y por tanto  $H$  es un difeomorfismo.

Por otro lado tenemos  $G(x, t) = (F \circ H)(x, t)$ , usando la regla de la cadena tenemos:

$$DG = DF DH$$

esto es:

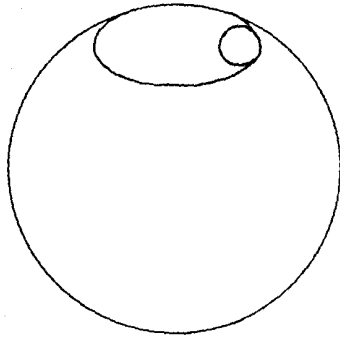
$$\frac{\delta G}{\delta x} = \frac{\delta F}{\delta x}; \quad \frac{\delta G}{\delta y} = \frac{\delta F}{\delta y} \quad \text{y} \quad \frac{\delta G}{\delta t} = \frac{\delta F}{\delta t} \cdot \psi'(t)$$

y como

$$\frac{\delta F}{\delta x} \neq 0 \text{ o } \frac{\delta F}{\delta y} \neq 0, \text{ entonces } \frac{\delta G}{\delta x} \neq 0 \text{ o } \frac{\delta G}{\delta y} \neq 0, \text{ además}$$

$$\text{como } \psi'(t) \neq 0 \quad \frac{\delta G}{\delta t} = 0 \iff \frac{\delta F}{\delta t} = 0.$$

De aquí concluimos, que 0 es valor regular de G, y por tanto si  $\psi(t)$  es tal que  $\frac{\delta F}{\delta t} = 0$ , entonces  $\frac{\delta G}{\delta t} = 0$ , y desde luego, al proyectar en el plano serán los mismos conjuntos.



2 Vértices y circunferencias osculantes  
de la elipse.

fig. 26

## 2.0 Intensidad de la luz y cáusticas.

En esta parte del trabajo empezamos buscando una fórmula para determinar la intensidad de la luz. Supongamos que tenemos una curva regular  $\alpha(t)$  parametrizada con longitud de arco, que tiene las siguientes propiedades:

(a) la curvatura de  $\alpha(t)$  no es cero.

(b) que hay una fuente de luz  $F$ , tal que la luz emitida de ésta, viaja por las normales a  $\alpha(t)$ . Aparentemente, la hipótesis (b) es descabellada, pero conforme avancemos en el trabajo nos daremos cuenta que no lo es tanto, si no por el contrario: ¡es fundamental!.

Para medir la intensidad de la luz, usamos la definición dada por Saunders (8): "Si fijamos nuestra atención a un pequeño conjunto de rayos vecinos que llamaremos haz de rayos, hallamos que la intensidad de la luz es inversamente proporcional a la superficie de la sección perpendicular al haz".

De esta manera, podemos hacer lo siguiente: de fijamos  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , como:

$$G(t, r) = \alpha(t) + rN(t).$$

Esta función tiene la siguiente propiedad geométrica: (Figura 1).

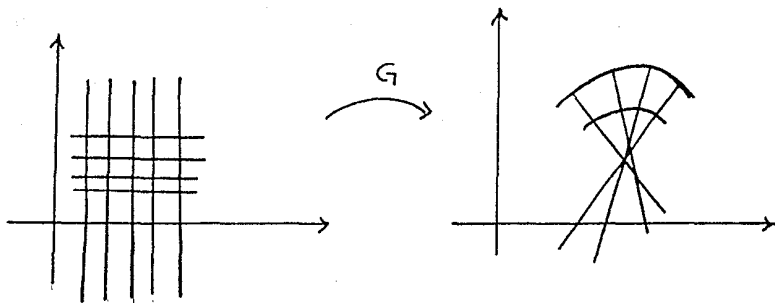


Fig. 1.

al eje  $(t, 0)$  lo manda a la curva  $a(t)$ , pensando a  $r$  fija  $G$  manda  $(t, r)$  a una curva paralela a  $a(t)$ , frecuentemente, por esta razón, se interpreta como un "frente de onda" en física. Si consideramos a  $t$  fijo y  $r$  variable, a la recta  $(t, r)$   $G$  la manda a la normal a  $a$  en el pto.  $a(t)$ .

Para encontrar la fórmula de intensidad de la luz, tomamos un pequeño rectángulo  $R \subset \mathbb{R}^2$ , después lo aplicamos la función  $G$  y sacamos las áreas correspondientes, y la intensidad promedio por unidad de área está dada por la fórmula:

$$i_{\text{prom}} = \frac{a(R)}{a(G(R))}$$

geométricamente se puede ver como en la figura 2.

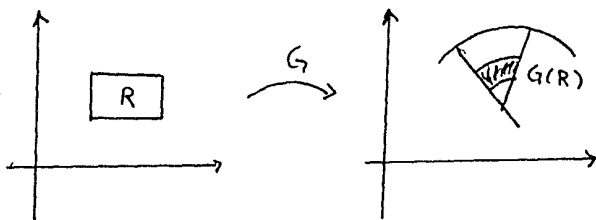


Fig. 2.

lo que buscamos ahora, es una fórmula para medir la intensidad de la luz en un pto. (o intensidad puntual). Dado que ya tenemos una forma de calcular la intensidad promedio, la usamos de la siguiente manera:

sea  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ , y tomamos  $R$ , tal que  $\bar{x} \in G(R)$ , y la intensidad promedio esta dada:

$$i_{\text{prom}} = \frac{a(R)}{a(G(R))}$$

Ahora bien,  $G': \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una transformación lineal (puesto que es la derivada de  $G$ ), y sabemos lo siguiente: si  $R$  es un rectángulo en  $\mathbb{R}^2$ , entonces:

$$\frac{a(G'(R))}{a(R)} = \det G'$$

entonces, si tomamos  $R$  cada vez más pequeño, tenemos

$$i_{\text{prom}} = \frac{a(R)}{a(G(R))} \approx \frac{a(R)}{a(G'(R)) \det G} = \frac{1}{\det G}$$



de esta manera definiremos la intensidad en un pto. por la fórmula:

$$i = \frac{1}{\det(G)}$$

de esta manera, podemos calcular para cada pto. la intensidad.

Nótese lo siguiente; si  $(t, r)$  es tal que  $\det G^2(t, r) = 0$ , entonces en ese pto. la intensidad de la luz es infinita, y por tanto podemos concluir lo siguiente: el conjunto de valores críticos de  $G$ , la intensidad de la luz es infinita, y dada la importancia de este conjunto le ponemos un nombre especial: El conjunto de valores críticos de la función  $G$  se llama *mancha caústica de  $\alpha(t)$* .

El siguiente paso es encontrar quién es la caústica de la curva  $\alpha(t)$ , y para ello necesitamos calcular  $G'(t, r)$  que es una matriz cuadrada  $2 \times 2$ , cuyas columnas son  $\frac{\partial G}{\partial t}$  y  $\frac{\partial G}{\partial r}$ , de acuerdo con esto tenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \alpha'(t) + r N^2(t) = T(t) - R(t) r T(t) = (1 - R(t) r) T(t).$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} = N(t)$$

por lo tanto  $G'(t, r)$  es una matriz cuyas columnas son  $(1 - R(t) r) T(t)$  y  $N(t)$ .

Ahora, como  $T(t)$  y  $N(t)$  son vectores linealmente independientes, la única manera que  $G'(t, r)$  tenga determinante cero, es que el escalar  $(1 - R(t)r)$  sea cero, esto es:

$$1 - R(t)r = 0$$

$$\text{y por tanto } r = \frac{1}{R(t)}.$$

de acuerdo a esto la cáustica esta dada por la parametrización:

$$E(t) = d(t) + \frac{1}{R(t)} N(t),$$

esta curva de hecho ya la conocemos, pues es la curva formada por los centros de curvatura de  $d(t)$ , o evoluta de ésta.

Para dar una definición de cáustica tenemos dos alternativas, ambas equivalentes:

- (a) como la envolvente de las normales a  $d(t)$ .
- (b) como la evoluta de  $d(t)$ .

En lo que resta del trabajo, nos será indistinto cual de las dos definiciones usemos, puesto que no altera nuestras posteriores conclusiones.

## Ortotónicas, pedales y cáusticas en el plano.

Como mencionamos en la introducción, para el estudio de las cáusticas necesitamos conocer las propiedades de las ortotónicas, y por este motivo abrimos un apartado especial.

### 2.1. Ortotónicas.

Suponiendo que la fuente de luz  $F$  es tal que no está en todas las tangentes a  $E$ , ni en  $E$  mismo nuestro primer paso será encontrar una parametrización de la ortotónica, teniendo una parametrización de  $E$ , digamos  $\gamma(t)$ , donde el parámetro  $t$  es la longitud de arco de  $E$ .

Dado un punto  $P = \gamma(t_0) \in E$ , sean  $\ell$  la recta tangente a  $E$  en  $P$ ,  $R$  el pie de la perpendicular a  $\ell$  trazada desde  $F$ , y  $F'$  el punto que obtenemos al reflejar  $F$  en  $\ell$ .

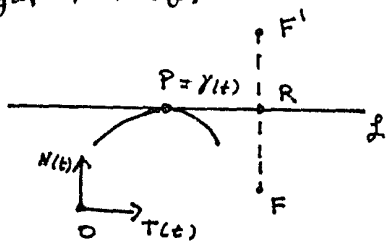


fig. 3

De la figura 3, obtenemos:

$$F'R = R - F$$

y por tanto:

$$F' = 2R - F$$

usando la parametrización de  $E$ , se tiene:

$$P = \gamma(t)$$

$$R = (\gamma'(t) \cdot N(t))N(t) + (T(t) \cdot F)T(t)$$

y por tanto tenemos que la parametrización de la ortotónica está dada por:

$$O(t) = 2(\gamma'(t) \cdot N(t))N(t) + 2(T(t) \cdot F)T(t) - F.$$

si suponemos que  $F=0$ , entonces:

$$O(t) = 2(\gamma'(t) \cdot N(t))N(t).$$

puesto que nuestro análisis no pierde generalidad si asumimos que nuestra fuente de luz es el origen, entonces mantendremos esta hipótesis de aquí en adelante, y pasamos a dar la siguiente:

### Definición 1

Sea  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular, parametrizada con longitud de arco. Entonces, la curva ortotónica de  $\gamma$  con respecto al origen estará dada por la parametrización:

$$O(t) = 2(\gamma'(t) \cdot N(t))N(t)$$

Dada esta definición, la pregunta obligada es: ¿la ortotónica es una curva regular? Para responder basta con derivar:

$$O'(t) = 2[(\gamma'(t) \cdot N(t)) + \gamma(t) \cdot N'(t)]N(t) + (\gamma'(t) \cdot N(t))N'(t)$$

y usando el hecho:  $\gamma'(t) = T(t)$  y  $N'(t) = -k(t)T(t)$ , donde  $k(t)$  es la curvatura de  $\gamma(t)$ , tenemos:

$$O'(t) = -2k(t) [(\gamma(t) \cdot T(t))N(t) + (\gamma(t) \cdot N(t))T(t)].$$

ahora, como  $N(t)$  y  $T(t)$  son vectores linealmente independientes, y  $\gamma(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ , entonces  $\gamma(t) \cdot N(t) \neq 0$  o  $\gamma(t) \cdot T(t)$  es diferente de cero, por tanto, la otra posibilidad para que  $O'(t) \neq 0$  es  $k(t) \neq 0$ .

En resumen:

Nótese que en términos de nuestro problema que pretendemos resolver, para que la ortotónica sea una curva regular, nuestro espejo  $E$  debe tener curvatura diferente de cero en todos sus puntos.

#### 2.1.4 Ortotónicas y envolventes.

Otra forma de encontrar una parametrización de la ortotónica, es pensarla como envolvente de cierta familia de circunferencias:

Por construcción, sabemos  $F'P = FP$  en la figura 4, y esto quiere decir que tanto  $F'$  como  $F$  están en una circunferencia de radio  $F'P = FP = r$  y centro en  $P$ , en la figura 4 se muestra un ejemplo de ortotónica como envolvente de una familia de circunferencias:

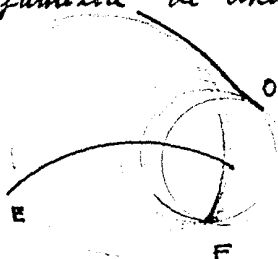


Figura 4.

Para describir la familia que nos interesa, suponemos que  $x \in \mathbb{R}^2$  es un p.to. de una circunferencia con centro en  $P \in E$  y radio  $PF = r$ , entonces debe satisfacer la ecuación:

$$(x-p) \cdot (x-p) = (p-f) \cdot (p-f)$$

y como suponemos que  $f=0$ , tenemos:

$$(x-p) \cdot (x-p) = p \cdot p.$$

al parametrizar  $E$  con longitud de arco  $\gamma(t)$ , la familia de circunferencias se puede ver como:

$$F(x,t) = 0$$

con  $F: \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$  definida de la siguiente manera:

$$F(x,t) = (x-\gamma(t)) \cdot (x-\gamma(t)) - \gamma(t) \cdot \gamma(t).$$

aplicando nuestra definición de envolvente, tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} F(x,t) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = 0 \end{cases}$$

tomando la segunda ecuación del sistema, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= -2T(t) \cdot (x-\gamma(t)) - 2T(t) \cdot \gamma(t) \\ &= -2T(t) \cdot (x-\gamma(t) + \gamma(t)) \\ &= -2T(t) \cdot x = 0 \end{aligned}$$

y esto quiere decir que existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $x = \lambda N(t)$ , puesto que es perpendicular a  $T(t)$ , al sustituir en la primera ecuación y desarrollar se tiene la ecuación:

$$\lambda^2 - 2\lambda N(t) \cdot \gamma(t) = 0$$

cuyas soluciones son:

$$\lambda=0 \text{ y } \lambda=2N(t)\cdot\delta(t)$$

al sustituir la segunda solución en  $x = \chi N(t)$ , tenemos la parametrización obtenida en el párrafo anterior, es decir:  $x = 2(N(t)\cdot\delta(t))$ . La solución  $\lambda=0$ , nos dice que la envolvente también contiene al origen (en nuestro caso a la fuente de luz), en general este hecho no altera lo dicho hasta ahora, pues consideraremos solamente la parte de la envolvente que corresponde a la solución  $\lambda=2N(t)\cdot\delta(t)$ , que es la parte que definiremos como ortotómica.

Observaciones:

- (a) En general, si  $F \neq O$ , la envolvente de la familia de circunferencias contiene al pto.  $F$ , pero esto no altera el análisis que se presentará en los capítulos posteriores.
- (b) Si  $F'$  es el pto. de la ortotómica correspondiente a  $P$  respecto a  $F$ , como  $F'$  está en la circunferencia con centro en  $P$  y radio  $PF=r$ , entonces, la tangente a  $O$  en  $F'$  es perpendicular a  $PF'$ .

Conclusiones:

- (i) Sea  $P \in E$  y  $F'$  el pto. correspondiente a  $P$  sobre  $O$ , respecto a  $F$ , entonces, para trazar la recta tangente a  $O$  en  $F'$ , es suficiente tomar la recta perpendicular a  $F'P$  que pasa por  $F'$  (ver figura 5)

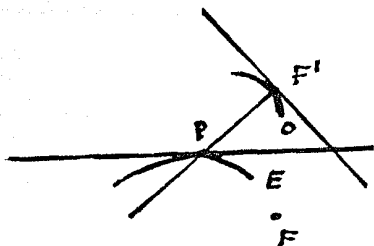


Figura 5.

(ii) si  $F$  es una fuente de luz y  $E$  un espejo con curvatura diferente de cero, además, si  $F$  no está en las rectas tangentes a  $E$  y  $F \neq E$ , entonces los rayos de luz emanados de  $F$ , al reflejarse en  $E$ , siguen la dirección de las rectas normales de la ortotómica.

Por la observación (b) y la conclusión (ii), es de gran utilidad conocer la evolvente de la ortotómica y conocer algunas de sus propiedades, por el momento supondremos que la curva ortotómica no tiene curvatura cero. Si parametrizamos  $O(s)$  con  $s$  longitud de arco y  $k_0(s)$  la curvatura de la ortotómica, entonces su evolvente está parametrizada de la siguiente manera:

$$E_0(s) = O(s) + \frac{1}{k_0(s)} N_0(s)$$

Al derivar  $E_0(s)$  con respecto a  $s$ , tenemos



$$E'_0(s) = T_0(s) + \left( \frac{k'_0(s)}{k_0^2(s)} \right) N_0(s) + \frac{1}{R_0(s)} N_0^2(s)$$

$$= \frac{k'_0(s)}{k_0^2(s)} N_0(s)$$

de aquí, podemos deducir:  $E'_0(s) = 0 \Leftrightarrow k'_0(s) = 0$ , entonces, se puede afirmar en general lo siguiente: si la ortotómica no tiene vértices, entonces su proyección es una curva regular, e inversamente.

La afirmación anterior nos plantea el problema siguiente: dado un espejo  $E$  con curvatura distinta de cero, ¿habrá alguna forma de saber si nuestra curva ortotómica tiene vértices?, ¿cómo podemos encontrar la curvatura de la ortotómica?, responder a estas preguntas, se puede hacer de dos maneras, la primera aplicando las definiciones, y una segunda, es tratar de relacionar la curvatura de  $E$  con la curvatura de su ortotómica, y esta última forma requiere del conocimiento de algunas propiedades de las coordenadas pedales, y por ello les dedicamos un apartado especial.

## 2.2 Pedales y ortotómicas

Empezaremos por definir coordenadas pedales, sea  $E$  una curva regular y  $P \in E$ ,  $F \in \mathbb{R}^2$  un pto. en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathcal{L}$  la recta tangente a  $E$  en  $P$ . Adicionalmente supongamos que  $F$  no está en la normal de  $E$  en  $P$  y  $F \notin \mathcal{L}$ , desde el pto.  $F$  trazamos la recta perpendicular a  $\mathcal{L}$  y al pie de dicha perpendicular sobre  $\mathcal{L}$  le llamamos  $R$  (figura 6).

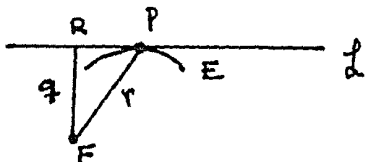


Figura 6.

a las longitudes  $q = RF$  y  $r = PF$  les llamaremos coordenadas pedales de  $E$  respecto a  $F$ .

Notemos lo siguiente, si el pto  $P$  lo variamos a lo largo de  $E$ ,  $R$  nos describirá una curva a la cual le llamaremos curva pedal. (Figura 7)

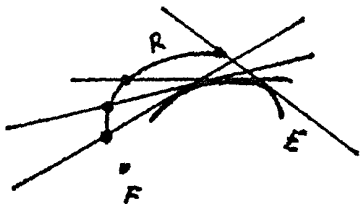


Fig. 7

Si  $E$  está parametrizada con longitud de arco  $\delta(t)$ , entonces, de la figura 6, podemos sacar una expresión para las coordenadas pedales y la curva pedal en términos del parámetro  $t$ , sin pérdida de generalidad  $F=0$ :

$$r(t) = \delta(t) \cdot \delta'(t)^{1/2}$$

$$q(t) = r(t) \cdot N(t) \quad \text{-----} (*)$$

$$R(t) = (\delta(t) \cdot N(t)) N'(t)$$

Con estas ecuaciones, estamos en condiciones de determinar curvatura de la ortotónica en términos de curvatura de la curva  $E$  así como sus longitudes de arcos correspondientes.

Denotemos por  $t$  la longitud de arco de  $E$  y por  $s$  la longitud de arco de  $O$ , es decir, la ortotónica de  $E$  respecto a  $F=0$ . Por definición de  $s$  tenemos que esta dada por la fórmula:

$$s = \int_{t_0}^t |O'(\xi)| d\xi$$

y por el teorema fundamental del cálculo, ponemos la fórmula equivalente:

$$\frac{ds}{dt} = |O'(t)|$$

por otro lado, sabemos:

$$O'(\epsilon) = -R(\epsilon) [ (\gamma(\epsilon) \cdot N(\epsilon))N(\epsilon) + (\gamma(\epsilon) \cdot T(\epsilon))T(\epsilon) ]$$

donde  $R(\epsilon)$  es la curvatura de  $E$  en el pto.  $\gamma(\epsilon)$ .

ahora:

$$|O'(\epsilon)|^2 = 4R^2(\epsilon) [ (\gamma(\epsilon) \cdot T(\epsilon))N(\epsilon) + (\gamma(\epsilon) \cdot N(\epsilon))T(\epsilon) ]^2$$

usando:

$$\begin{aligned}
& [ (\gamma(\epsilon) \cdot T(\epsilon))N(\epsilon) + (\gamma(\epsilon) \cdot N(\epsilon))T(\epsilon) ]^2 \\
&= [ (\gamma(\epsilon) \cdot T(\epsilon))N(\epsilon) + (\gamma(\epsilon) \cdot N(\epsilon))T(\epsilon) ] \cdot [ (\gamma(\epsilon) \cdot T(\epsilon))N(\epsilon) + (\gamma(\epsilon) \cdot N(\epsilon))T(\epsilon) ] \\
&= (\gamma(\epsilon) \cdot T(\epsilon))^2 + (\gamma(\epsilon) \cdot N(\epsilon))^2
\end{aligned}$$

entonces  $|O'(\epsilon)|^2 = 4R^2(\epsilon) ( (\gamma(\epsilon) \cdot T(\epsilon))^2 + (\gamma(\epsilon) \cdot N(\epsilon))^2 )$ .

de la figura (8), obtenemos  $(\gamma(\epsilon) \cdot T(\epsilon))^2 = r^2 - q^2$ .

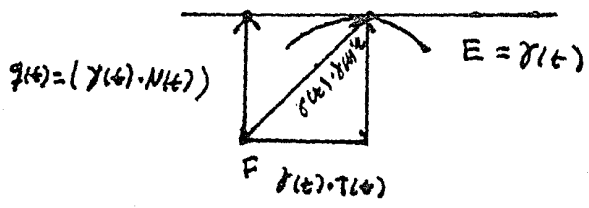


Fig. 8

entonces, sustituyendo coordenadas pedales, tenemos la fórmula:

$$|O'(\epsilon)|^2 = 4R^2(\epsilon) r(\epsilon)$$

y por tanto

$$|O'(\epsilon)| = 2R(\epsilon) r(\epsilon)$$

De acuerdo con esto, tenemos una fórmula que nos relaciona las longitudes de arco, y lo escribimos como:

### Proposición 1

Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva parametrizada con longitud de arco y con curvatura diferente de cero. Sea  $o(s)$  la ortotómica de  $\gamma(t)$  respecto al origen. Si  $s$  es la longitud de arco de  $o$ , entonces

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = 2k(t)r(t).$$

Pensemos ahora, a  $q$  y  $r$  como funciones que dependen de la longitud de arco de  $E$ , esto es,  $q, r: I \rightarrow \mathbb{R}$ , además por como están definidas en (\*) resultan ser funciones diferenciables localmente, y sus derivadas las podemos calcular directamente.

$$q'(t) = \delta(t) \cdot N'(t) = -k(t)(\delta(t) \cdot T(t))$$

y de la figura 6 obtenemos  $\delta(t) \cdot T(t) = (r^2(t) - q^2(t))^{1/2}$ ,  
y por tanto, tenemos la fórmula:

$$(q'(t))^2 = k^2(t)(r^2(t) - q^2(t))$$

al derivar  $r(t)$ , tenemos:

$$r'(t) = \frac{\delta(t) \cdot T'(t)}{\delta(t) \cdot \delta(t)^{1/2}}$$

y nuevamente, por la figura, tenemos:

$$r'(t) = \frac{(r^2(t) - q^2(t))^{1/2}}{r(t)}$$

y por tanto:

$$(r'(t))^2 = \frac{r^2(t) - q^2(t)}{r^2(t)}$$

así, encontramos que los denominados de  $q$  y  $r$ , los podemos encontrar conociendo a  $q$  y  $r$  solamente!

Por otro lado, al dividir  $(q'(t))^2$  entre  $(r'(t))^2$ , obtenemos:

$$\frac{(q'(t))^2}{(r'(t))^2} = \frac{k(t)(r^2(t) - q^2(t))}{r^2(t) - q^2(t)} = r^2(t) k^2(t)$$

$$\text{así: } k^2(t) = \frac{1}{r^2(t)} \left( \frac{q'(t)}{r'(t)} \right)^2$$

y de este modo tenemos:

Proposición 2:

Sea  $\gamma(t)$  una curva parametrizada con longitud de arco y curvatura distinta de cero  $\forall t$ . Sean  $q(t)$  y  $r(t)$  las coordenadas pedales de  $\gamma(t)$  respecto al origen. Si  $F=0$  no está en la recta normal a  $\gamma(t)$ , entonces:

$$k(t) = \frac{1}{r(t)} \left( \frac{q'(t)}{r'(t)} \right)$$

Esta fórmula resulta bastante interesante, puesto que nos va a permitir encontrar la curvatura de la ortotómica en términos de la



sin embargo,  $r_0$  y  $q_0$  son funciones que dependen de  $s$ , y  $r$  y  $q$  funciones que dependen de  $t$ , para resolver este problema, sabemos por la proposición 1, sabemos que  $s$  y  $t$  están relacionados, por medio de una fórmula que involucra a  $r(t)$ , y de este modo sabemos que podemos relacionarlos del siguiente modo:

$$r_0(s(t)) = 2q(t)$$

$$q_0(s(t)) = \frac{2q^2(t)}{r(t)}$$

y usando la regla de la cadena, tenemos:

$$r_0'(s(t)) s'(t) = 2q'(t)$$

$$q_0'(s(t)) s'(t) = 2 \left( \frac{2q(t)q'(t)r(t) - q^2(t)r'(t)}{r^2(t)} \right)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{q_0'(s)}{r_0'(s)} &= \frac{q_0'(s(t)) s'(t)}{r_0'(s(t)) s'(t)} = 2 \left( \frac{2q(t)q'(t)r(t) - q^2(t)r'(t)}{r^2(t)} \right) \\ &= q(t) \left( \frac{2q'(t)r(t) - q(t)r'(t)}{r^2(t)q'(t)} \right) \end{aligned}$$

sustituyendo la fórmula para  $q'(t)$  y  $r'(t)$ :

$$= q(t) \left( \frac{2k(t)r^2(t) - q(t)}{2k(t)r^3(t)} \right)$$

al sustituir en la fórmula para  $h_0$ , tenemos.

$$h_0 = \frac{1}{r_0(s)} \left( \frac{q_0'(s)}{r_0'(s)} \right) = \frac{1}{2q(t)} q(t) \left( \frac{2k(t)r^2(t) - q(t)}{2k(t)r^3(t)} \right)$$



De esta manera tenemos:

### Proposición 3

Sea  $E$  una curva regular, con las mismas hipótesis de las proposiciones 1 y 2. Sean  $k$ ,  $r$  y  $q$  la curvatura y coordenadas pedales en  $P \in E$  respectivamente. Sea  $F'$  el punto de la ortotómica correspondiente a  $P$  respecto al origen, si  $k_0$  es la curvatura de  $O$  en  $F'$ , entonces:

$$k_0 = \frac{2Rr^2 - q}{2Rr^3}$$

Obs.

Recuérdese que  $k_0$  está evaluada con la longitud de arco de  $O$ , mientras que  $k$ ,  $r$  y  $q$  están evaluadas con la longitud de arco de  $E$ .

Hasta el momento hemos mantenido la hipótesis que  $F$  no está en la normal a  $E$  en algún pto.  $P_1$ , pero lo cierto es que esta hipótesis no cambia nuestra conclusión de la proposición 3 y lo demostramos así:

$$\text{Sean } f(t) = \frac{2R(t)r^2(t) - q(t)}{2R(t)r^3(t)} \text{ y } g(t) = R(S(t))$$

y sea  $P_1 = \gamma(t_1)$  un pto tal que  $F$  está en la perpendicular a  $E = \gamma(t)$  en  $P_1$ .

Como  $r(t)$  y  $q(t)$  son funciones continuas y  $R(t) \neq 0$ ,  $r(t) \neq 0 \quad \forall t$ , entonces  $f$  está bien definida y es continua

por otro lado  $g(t)$  es composición de funciones continuas  $K_0(s(t))$ , entonces:

$$\lim_{t \rightarrow t_1} f(t) = f(t_1) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow t_1} g(t) = g(t_1) = K_0(s(t_1))$$

como  $f(t) = g(t)$  si  $t \neq t_1$ , por continuidad:

$$f(t_1) = g(t_1)$$

y por tanto:

$$K_0(s_1) = K_0(s(t_1)) = \frac{2K(t_1)r^2(t_1) - q(t_1)}{2K(t_1)r^3(t_1)}$$

y por tanto es válida la fórmula.

Además, en este caso  $q(t_1) = r(t_1)$ , y por tanto la fórmula es:

$$K_0 = \frac{2K(t_1)r^2(t_1) - 1}{2K(t_1)r^2(t_1)}$$

### 2.3 Ortotómicas y órdenes de contacto.

Para concluir con las ortotómicas y sus propiedades, trataremos de abordar el siguiente problema: Sean  $E_1$  y  $E_2$  dos curvas, tal que  $P$  es un pto. de contacto entre ellas, ¿las ortotómicas también tienen un punto de contacto?, de ser así, ¿tienen el mismo orden?, en general no podemos responder afirmativamente la primera pregunta, como lo muestra la figura 10.

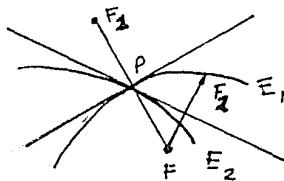


Figura 10.

en este caso el pto. correspondiente de la ortotómica a  $E_1$ , es  $F_1$ , y  $F_2$  para  $E_2$ .

El problema que se nos presenta en la figura 8, es que la recta tangente de  $E_1$  en  $P$ , y la de  $E_2$  en  $P$  no coinciden. Si tomamos a  $E_1$  y  $E_2$  de tal manera que tengan recta tangente común en  $P$ , entonces  $P$  al menos será un pto. de contacto de orden 1 entre  $E_1$  y  $E_2$ , al tomar las ortotómicas  $O_1$  y  $O_2$  correspondientes, entonces el pto  $F'$  es común a  $O_1$  y  $O_2$ . Por otro lado, sabemos que la tangente a  $O_1$  por  $F'$  es perpendicular a  $F'P$ , y lo mismo ocurre para  $O_2$ , y por tanto, las ortotómicas también comparten rectas tangentes, es decir  $F'$  es un pto. de contacto de orden 1 entre  $O_1$  y  $O_2$ . (Fig. 11)

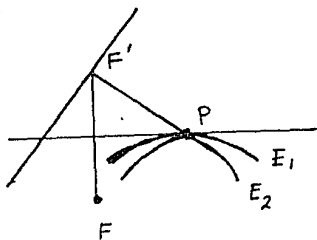


Fig. 11.

De lo anterior, concluimos lo siguiente: Si P es un pto. de contacto de orden 2, entonces las ortotómicas correspondientes  $O_1$  y  $O_2$  respecto al pto. F, tienen en el pto.  $F'$  contacto de orden igual a 2. El recíproco también resulta verdadero con los mismos argumentos.

Pensemos ahora, que  $E_1$  y  $E_2$  tienen un pto. P de contacto de orden igual a 3, también sus curvaturas coinciden, además, en P sus coordenadas pedales son iguales y aplicando nuestra fórmula para curvatura de la ortotómica, tenemos:

$$k_{o_1} = \frac{2k_1 r_1^2 - q_1}{2k_1 r_1^3} = \frac{2k_2 r_2^2 - q_2}{2k_2 r_2^3} = k_{o_2}$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son las curvaturas correspondientes a  $E_1$  y  $E_2$  y  $p_1, r_1, q_2, r_2$  son las coordenadas pedales.

De aquí deducimos que si  $E_1$  y  $E_2$  tienen un pto. de contacto de orden 3, entonces las ortotómicas también tienen un pto. de contacto de orden 3.

Para el contacto de orden 4, necesitamos encontrar la derivada de la curvatura de  $O$ , y nuevamente usamos nuestra fórmula:

$$k_0(s(t)) = \frac{2k(t)r^2(t) - q(t)}{2k(t)r^3(t)}$$

derivando ambos lados de la ecuación, tenemos:

$$k_0' s' = \frac{[4r r' k + 2r^2 k' - q'] (2r^3 k) - (2r^2 k - q) (6r^2 r' k + 2r^3 k')}{(2r^3 k)^2}$$

y usando el hecho que  $s' = 2kr$ , entonces.

$$k_0' = \frac{[4r r' k + 2r^2 k' - q'] (2r^3 k) - (2r^2 k - q) (6r^2 r' k + 2r^3 k')}{8k^3 r^7}$$

ahora, si  $E_1$  y  $E_2$  tienen un pto. de contacto de orden 4, entonces  $k_1 = k_2$  y  $k_1' = k_2'$ , además:

$$(q_1')^2 = k_1^2 (r_1^2 - q_1^2) = k_2^2 (r_2^2 - q_2^2) = (q_2')^2$$

$$(r_1')^2 = \frac{r_1^2 - q_1^2}{r_1^2} = \frac{r_2^2 - q_2^2}{r_2^2} = (r_2')^2$$

y al sustituir en la fórmula de  $k_0'$ , y  $k_0'$ , concluimos:

$$k_0' = k_0'.$$

así, tenemos el siguiente resultado:

#### Proposición 4:

(i) Sean  $E_1$  y  $E_2$ , curvas regulares, si  $E_1$  y  $E_2$  tienen un pto. de contacto de orden 3, entonces  $O_1$  y  $O_2$  tienen un pto. de contacto de orden 3, e inversamente.

(ii)  $E_1$  y  $E_2$  tienen un punto de contacto de orden 4, si y sólo si  $O_1$  y  $O_2$  tienen un punto de contacto de orden 4.

El resultado para órdenes mayores que 4 también se cumple, sin embargo, para demostrarlo necesitamos tener una fórmula de las derivadas de orden superior de la curvatura de la ortotómica, o bien encontrar técnicas que van más allá de las posibilidades de esta tesis, es por esto que solo nos conformamos con mencionarlo.

## 2.4 Cónicas por reflexión.

Supongamos que tenemos una curva  $E \subset \mathbb{R}^2$ , con curvatura diferente de cero en todos sus pto.s., y  $F \in \mathbb{R}^2$ . Si pensamos a  $E$  como un espejo y  $F$  como una fuente de luz, cuando un rayo emana de  $F$  y choca con el espejo  $E$  en un pto.  $P$ , el rayo se refleja de tal modo que tiene ángulos de incidencia iguales con la recta tangente a  $E$  en  $P$ . (Fig. 12)

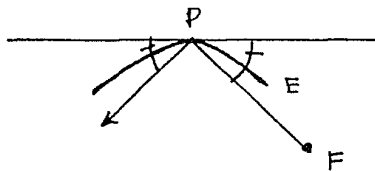


Fig. 12

Notemos que si  $F$  está en la tangente a  $E$  en  $P$ , y  $F \in E$ , esta construcción falla, y por tanto supondremos que  $F$  no está en la tangente a  $E$  en  $P$ .

Usando nuestra construcción de ortotómica, sahemos que la dirección que sigue el rayo de luz es la misma que la normal de la ortotómica de  $E$  respecto a  $F$ , y esto nos da la pauta para dar la:

## Definición 2:

Sea  $E$  una curva regular con curvatura diferente de cero en todos sus pts.

Sea  $F \in \mathbb{R}^2$ , decimos que la curva  $G$  es la cáustica por reflexión de  $E$  respecto a  $F$ , si y sólo si  $G$  es la cáustica de la ortotómica de  $E$  respecto a  $F$ .

Cuando no se preste a confusión,  $G$  simplemente la llamaremos cáustica de  $E$  respecto a  $F$ , o cáustica de  $E$ .

Aclaración:

Si  $E$  es una curva cerrada, y  $F$  éste en el interior de  $E$ , sucede que el rayo emanado de  $F$  rebota indefinidamente sobre  $E$ . Nuestra definición solamente considera el "primer rebote" del rayo.

Ejemplos:

- 1) Tomemos a  $E$  como una elipse y  $F$  uno de sus focos, quisiéramos encontrar la cáustica de  $E$ , y, como primer paso hay que construir la ortotómica, y después sacar la cáustica de ésta:



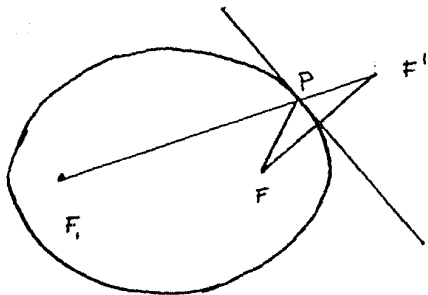


Fig. 13.

Supongamos que  $F_1$  es el otro foco,  $P \in E$ , de la figura 13, y por definición de elipse, tenemos, al tomar  $F'$  en la ortotónica:

$$PF_1 + PF = PF_1 + PF' = \text{cte.}$$

puesto que esta constante no depende de la elección del punto  $P$ , entonces la ortotónica de  $E$  es una circunferencia con centro en  $F_1$ , y por tanto, la cáustica de  $E$  es un solo pto., el otro foco.

2) sea  $E$  una parábola y  $F$  su foco, y llamemos la ortotónica de  $E$  respecto a  $F$ .

Sea  $D$  la directriz de  $E$ .

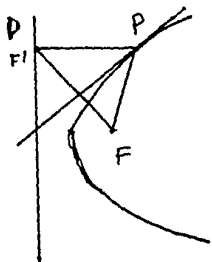


Fig. 14

usando el hecho que la tangente a  $E$  en  $P$  es bisectriz del ángulo  $F'PF$  de la figura 14, y  $F'P=PF$  por definición de parábola, con deducimos que la ortotómica de  $E$  es  $D$ . Los rayos viajarán paralelos, y todos ellos serán perpendiculares a  $D$ , y por tanto la caústica es el pto. al infinito.

Comentarios:

(i) De los ejemplos anteriores, notamos que las caústicas no necesariamente son curvas regulares, más aún, puede ser el pto. al infinito como en el ejemplo 2, en lo que resta del trabajo trataremos de ver bajo que condiciones una caústica resulta una curva regular, y si no ver como podría comportarse localmente.

(ii) con el mismo método de construir ortotómicas, si tomamos una hipérbola como  $E$  y  $F$  uno de sus focos, la ortotómica resulta una circunferencia con centro en el otro foco.

(iii) un problema que surge de los ejemplos (1) y (2), es el siguiente: de (2) decimos que la parábola es la anti-ortotómica de  $D$  con respecto a  $F$ , de (1) decimos que la elipse es anti-ortotómica de una circunferencia con centro en el otro foco y radio la constante  $F'P+PF = \text{cte.}$ , ( $P \in E$ ).

En general, podríamos plantear el problema como: dada una curva  $O$  y un pto.  $F \in \mathbb{R}^2$ , ¿se puede encontrar una curva  $E$ , tal que  $O$  sea la ortotónica de  $E$  respecto a  $F$ ?; la respuesta es que sí, y la manera de construirla es la siguiente:

Sea  $F' \in O$ , tomamos  $F'F$ , y por el pto medio trazamos la perpendicular, al hacer esta construcción para todos los pto. de  $O$ , la envolvente de las rectas perpendiculares será la curva buscada, a la que le llamaremos antiortotónica de  $O$  respecto a  $F$ .

Un resultado interesante, que por el momento no demostraremos es el siguiente: si  $O$  es una circunferencia y  $F \neq O$ , entonces la antiortotónica de  $O$  respecto a  $F$  es una cónica. En esta afirmación también estamos considerando a las rectas como una circunferencia de radio no finito.

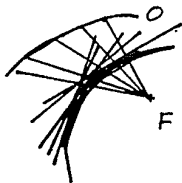


Fig. 15.

construcción de una antiortotómica.

Pues hasta aquí, tenemos una serie de resultados que serán útiles en éste trabajo, pues ellos simplificarán nuestro estudio, y cuando éstos sacamos las siguientes conclusiones:

- (a) Si  $E$  es un espejo con curvatura diferente de cero, y  $F$  una fuente de luz que no está en  $E$  ni sus tangentes. Entonces la luz viaja por las normales de la ortotómica de  $E$  respecto a  $F$ .
- (b) La cáustica por reflexión a  $E$  respecto a  $F$ , es la cáustica de su ortotómica respecto a  $F$ , esto es la evoluta de la ortotómica.
- (c) La cáustica de  $E$  respecto a  $F$  es una curva regular siempre y cuando la ortotómica no contenga nósticos, y su curvatura sea diferente de cero (sección 2.1.1.)

## 2.5 Cónicas y cáusticas.

Para calcular la cáustica de un espejo  $E$ , respecto a un foco dado, necesitamos la construcción de la ortotómica, pero nos gustaría poder analizar la cáustica sin necesidad de recurrir a la ortotómica, y para ello es de gran utilidad usar el concepto de circunferencia osculante.

Pensemos por el momento que el foco o fuente de luz  $F$  cae adentro de la circunferencia osculante de la ortotómica en  $F'$ , a la que llamamos  $C$ , sa-  
hemos que el centro de  $C$  es un pto. de la cáustica por reflexión de  $E$  respecto  $F$ , a dicho centro lo llama-  
mos  $S$ . Tomemos un pto.  $Q \in C$  y lo unimos con  $F$   
(Fig. 16)

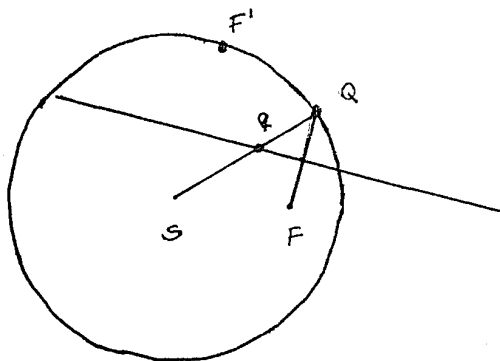


Fig. 16.

Por el punto medio de  $\overline{FQ}$  trazamos la recta perpendicular  $\ell$  a  $\overline{FQ}$ . Unimos  $s$  y  $Q$  y tomamos  $q$  en la intersección de  $\ell$  y  $\overline{sQ}$ , entonces:

$$\overline{sq} + \overline{qQ} = \overline{sQ} + \overline{qF} = \overline{sF'}$$

como se muestra en la figura 16.

Si hacemos esto para todos los pto. de la circunferencia, entonces los  $q$ 's formarán una elipse con focos  $s$  y  $F$ . Prácticamente estamos construyendo la antioctotómica de  $C$  con respecto a  $F$ , y esto da pauta para formular la siguiente:

### Proposición 5

Sea  $E$  una curva regular con curvatura distinta de cero, y  $F$  un pto en el plano que no está ni en  $E$  ni en sus tangentes.

Sea  $O$  la ortotómica de  $E$  respecto a  $F$ . Supongamos además que  $O$  no tiene curvatura cero en  $F'$ , que es el punto correspondiente a  $P \in E$  respecto a  $F$ .

Sea  $C$  la circunferencia osculante de  $O$  en  $F'$ , y  $s$  el centro de  $C$ , supongamos que  $\overline{sF} < \overline{sF'}$ .

Entonces existe una única elipse con focos en  $s$  y  $F$  tal que  $P$  es un pto de contacto de orden mayor o igual a 3 entre la elipse y  $\underline{E}$ .

Dem.

De hecho ya se dió una demostración geométrica sobre la construcción de la elipse, y solamente nos falta el orden de contacto, y lo probamos así: Sabemos que  $C$  y  $O$  tienen un pto. de contacto en  $F'$  de orden mayor o igual a 3. Ahora como  $C$  es la ortotómica de la elipse respecto a  $F$ , y  $O$  es la ortotómica de  $E$  respecto a  $F$ , por la proposición 4 concluimos nuestra afirmación. La unicidad de la elipse se sigue del hecho que pasa por  $P$ , que es la intersección de  $\overline{FF'}$  y la perpendicular por el pto. medio de  $\overline{FF'}$ , y tenemos los focos fijos.

a la elipse de la proposición 5, le llamaremos elipse osculante de  $E$  respecto a  $F$  en el punto  $P$ .

Ya sabemos entonces: si el foco o fuente de luz  $F$  está dentro de la circunferencia osculante de  $O$  en  $F'$ , entonces encontramos una elipse cuyos focos son la fuente de luz  $F$ , y el pto. de la cáustica correspondiente a  $P$ , sin embargo, la fuente de luz puede estar fuera de ella, y en este caso se puede hacer lo siguiente:

a) El pto.  $P$  también está fuera de intc:

usando la misma notación,  $S$  es el centro de  $C$ ,  $F'$  el pto. de  $O$  y  $F$  la fuente.

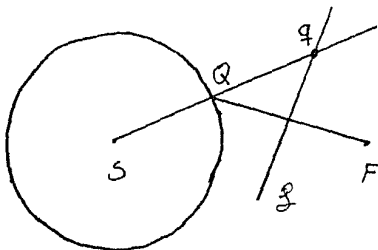


Fig. 17.

tomamos cualquier pto  $Q \in C$ , unimos  $Q$  y  $F$  y por el pto medio de  $QF$  trazamos la perpendicular  $l$ , al unir  $SQ$ , buscamos el pto. de intersección de  $SQ$  con  $l$ , al que lo llamamos  $q$ , entonces es claro de la fig. 17 lo siguiente:

$$\overline{Sq} - \overline{qF} = \overline{Sq} - \overline{Qq} = \text{cte.} = \overline{SQ}.$$

y por tanto para cualquier pto.  $Q \in C$ , la ecuación se sigue cumpliendo, por tanto el conjunto de pto.  $q$  construidos de esta manera es una rama de una hipérbola con focos  $S$  y  $F$ .

b) caso en que  $P \in \text{int.} C$

En este caso tomamos una circunferencia con centro en  $F$  y radio igual al radio de  $C$  y hacemos la misma construcción

obs. El hecho que  $P$  este dentro o fuera de  $C$ , solamente nos indica en que rama de la hipérbola se encuentra.



de esta manera tenemos:

Proposición 6

Sea  $E$  con las mismas hipótesis que la proposición 5. Sea  $O$  la ortotómica de  $E$  respecto a  $F$  y supongamos que no tiene curvatura cero en  $F'$ .

Si  $F$  está en el exterior de  $C^*$  la arcu osculante a  $O$  en  $F'$ , entonces existe una única hipérbola con focos en el centro de  $C$  y  $F$ , tal que  $P$  es un punto de contacto de orden mayor o igual a 2 entre la hipérbola y  $E$ .

Dem.

Es exactamente igual al argumento dado en la proposición 5.

A la hipérbola de la proposición 6 le llamaremos hipérbola osculante de  $E$  respecto a  $F$ , perpendicular a  $P$ .

Comentario:

Como sabemos, toda recta divide al plano en dos regiones ajenas, digamos  $R_1$  y  $R_2$ . Ahora, cualquier recta tangente a una hipérbola, separa a los focos de tal modo, que uno está en  $R_1$  y el otro en  $R_2$ , y de este modo tenemos el siguiente corolario:

Corolario:

Si el centro de  $C$  está en  $R_1$ , y  $F \in R_2$ , entonces encontramos una hipérbola con las características anteriores.

\* ver nota 3, final del capítulo.

geométricamente se puede ver como en la fig. 18.

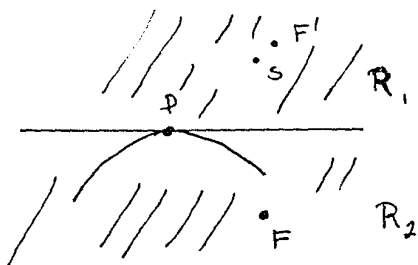


Fig. 18

Dem.

Si  $S \in R_1$ , entonces  $C$  no contiene a  $F$  en su interior, por tanto, se cumplen las hipótesis de la proposición 6 y se obtiene el resultado.

El siguiente paso es pensar que pasa cuando la curvatura de  $C$  en  $F'$  es cero, en éste caso la "circunferencia osculante" es la recta tangente a  $C$  en  $F'$ . tomamos dicha tangente que llamamos  $L_0$ , y hacemos la siguiente construcción: sea  $Q \in L_0$ , tomamos  $QF$  y por el pto. medio trazamos la perpendicular  $L$ .

Por el pto.  $Q$  trazamos la perpendicular a  $L_0$  que llamamos  $L_0'$ , entonces si  $q$  es el pto. de intersección de  $L_0'$  y  $L$ , tenemos:  $qF = qQ$ , y por tanto  $q$  está en la parábola cuya directriz es  $L_0$  y foco  $F$ . (fig. 19), entonces, también tenemos un resultado para cuando la curvatura de la ortotómica es igual a cero:

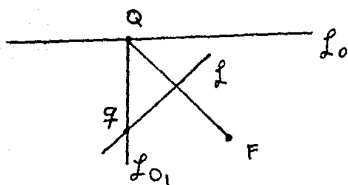


Fig. 19

Proposición 7:

Sea  $E$  como en la prop. 5, y  $F$  una fuente de luz que no este en  $E$  ni sus tangentes.

Sea  $O$  la astotómica de  $E$  respecto a  $F$ , y supongamos que  $O$  tiene curvatura cero en  $F'$ , entonces existe una parábola única tal que:

- a) La recta tangente a  $O$  en  $F'$  es la astotómica de la parábola, y  $F$  su foco.
- b) La parábola y  $E$  tienen un pto. de contacto de orden mayor o igual a 3.

La demostración es igual que las proposiciones 6 y 7.

Una pregunta natural es la siguiente: si la curvatura de la astotómica es diferente de cero, ¿que pasa cuando  $F \in C$ ? Para responder, hacemos lo siguiente: sin pérdida de generalidad suponemos que  $F = 0$ , y por nuestra fórmula de  $R_0$ , tenemos:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{2r^3k}{2kr^2 - g} = r$$

entonces  $\frac{2kr^2}{2kr^2 - q} = 1$ , y esto es posible solamente cuando  $q=0$ , pero de ser así,  $F$  está sobre la recta tangente a  $E$  en  $P$  (Fig. 20), pero esta hipótesis ya la habíamos desechado.

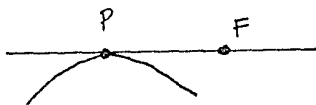


Fig. 20.

De las proposiciones 5, 6 y 7, podemos formular una proposición general:

### Proposición 8

Sea  $E$  como en 5, 6 y 7,  $F$  un pto. que no esté en  $E$  ni sus tangentes. Entonces, si  $P \in E$  existe una única cónica tal que:

- (i)  $F$  es el foco de la cónica
- (ii)  $P$  es un pto de contacto de orden mayor o igual a 3 entre la cónica y  $E$ .
- (iii) El otro foco de la cónica es un pto. de la cáustica por reflexión de  $E$  respecto a  $P$ .

a dicha cónica, le llamaremos cónica osculante de  $E$  respecto a  $F$ , correspondiente a  $P$ .

Comentario:

Con este resultado, para encontrar el pto. de la cáustica correspondiente a  $P$ , nos remite a encontrar

el otro foco de la cónica osculante, y puesto que si la cónica resulta una parábola, entonces el pto. de la cáustica será un pto. al infinito, puesto que la parábola tiene solamente un foco en  $\mathbb{R}^2$ , y el otro lo podemos pensar en el infinito.

Para continuar con este trabajo, necesitamos del álgebra de las cónicas y sus focos, y es por esto que damos una demostración algebraica de la proposición 8

Dem.

Sin pérdida de generalidad, supondremos lo siguiente:

- a) El pto.  $P \in E$ , es el origen de coordenadas.
- b) La recta tangente a  $E$  en  $P$ , es el eje  $X$ .
- c) La fuente de luz  $F$  tiene coordenadas  $(u, v)$ .

En general, la ecuación de una cónica en el plano, tiene la forma cuadrática:

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + Dx + Ey + F = 0. \dots (*)$$

Como el pto  $P = (0, 0)$  es un pto de osculación, al sustituir tenemos  $F = 0$ . Puesto que el eje  $X$  es tangente a la cónica también, para que ésta y  $E$  tengan un pto. de contacto de orden mayor que 1, al derivar implícitamente (\*), tenemos:

$$y'(0) = 0 \quad y:$$

$$2Ax + 2H(y + xy') + 2Byy' + D + Ey' = 0, \text{ entonces } D = 0.$$

ahora, para que la cónica y E tengan orden de contacto mayor o igual a 2, deben tener la misma curvatura, entonces derivamos por segunda vez, y  $y''$  debe medirse la curvatura en  $(0,0)$ , y por tanto  $y''(0)$  es diferente de cero:

$$2A + 2H(2y' + xy'') + 2B(y'^2 + yy'') + Ey'' = 0,$$

de aquí deducimos que  $E \neq 0$  y  $y''(0) = -\frac{2A}{E}$ , quedando la ecuación de la forma:

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + y = 0.$$

$$\text{sea } a = \frac{A}{E}; \quad h = \frac{H}{E} \quad \text{y} \quad b = \frac{B}{E}$$

entonces la ecuación general de nuestra cónica es de la forma:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + y = 0. \dots (* *)$$

Ahora bien, como queremos que la cónica tenga contacto de orden al menos 3 con nuestra curva E en 0, debe cumplir, si  $k$  es la curvatura de E:

$$a = -\frac{k}{2}.$$

Para determinar la unicidad de la cónica solamente, es suficiente determinar sus coeficientes  $a, h$  y  $b$ , ya tenemos determinado  $a$ , y solamente nos falta determinar los coeficientes  $h$  y  $b$ , y para ello usaremos  $F = (u, v)$  y un par de ecuaciones que determinen las condiciones suficientes y necesarias, para que un pto.  $(u, v)$  sea foco de  $(* *)$ .

(ver nota 1 al final del capítulo):

$$\begin{cases} 4(h^2-ab)(v^2-u^2) = 4av + 4hu + 1 & (+) \\ 2(h^2-ab)uv = au - hv \end{cases}$$

La ecuación de arriba la multiplicamos por  $\frac{uv}{2}$ , y la de abajo por  $(v^2-u^2)$ , y las restamos:

$$\begin{aligned} 0 &= 4(h^2-ab)(v^2-u^2)\frac{uv}{2} - 2(h^2-ab)uv \\ &= (4av + 4hu + 1)\frac{uv}{2} - (au - hv)(v^2-u^2) \end{aligned}$$

y de aquí tenemos:

$$(4av + 4hu + 1)uv - 2(au + hv)(v^2-u^2) = 0$$

por tanto

$$2a uv^2 + 2au^3 + uv = -2h u^2 v - 2h v^3$$

despejando  $h$ ;

$$h = -\frac{2a uv^2 + 2au^3 + uv}{2v(u^2 + v^2)}$$

puesto que  $v^2 - u^2 = 0$  y  $uv = 0$  no pueden cumplirse simultáneamente, entonces  $h$  queda determinada de manera única. También  $v \neq 0$ , pues si  $v = 0$ , entonces  $F$  esta sobre el eje  $X$ , es decir sobre la tangente a  $E$ , cosa que habíamos descartado.

Solamente falta determinar el coeficiente  $b$ , y lo obtenemos de la siguiente manera:

(a) si  $uv \neq 0$ , tenemos:

$$2(h^2-ab)uv = au - hv$$

despejando  $b$ :

$$b = \frac{h^2}{a} - \frac{au - hv}{2a uv}$$

b) si  $v^2 - u^2 \neq 0$ , tomamos la ecuación:

$$4(h^2 - ab)(v^2 - u^2) = 4av + 4ku + 1$$

despejando b:

$$b = \frac{h^2}{a} - \frac{4av + 4ku + 1}{4a(v^2 - u^2)}$$

de este modo, a by h quedan bien determinados de manera única, por tanto la cónica encontrada es única, no degenerada. Como la cónica y E tienen tanto tangente como curvaturas comunes en  $P=(0,0)$ , quiere decir que P es un pto. de contacto de orden mayor o igual a 3, que es lo que buscábamos.

El otro foco es el punto de la cáustica por las proposiciones 5, 6 y 7.

Para saber de que cónica se trata, tenemos el siguiente criterio:

$h^2 - ab < 0$  es una elipse

$h^2 - ab > 0$  es una hipérbola

$h^2 - ab = 0$  parábola.

Por el aspecto geométrico del problema, los ángulos de incidencia con respecto al eje x deben ser iguales, y por tanto el otro foco tiene la forma:  $(-\lambda u, \lambda v)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si siempre y cuando la cónica sea una elipse o una hipérbola. Si la cónica es una parábola, entonces el otro foco es el pto. al infinito, pero de cualquier forma, el otro foco está sobre la recta:

$$\lambda(-u, v) \text{ (fig. 25).}$$



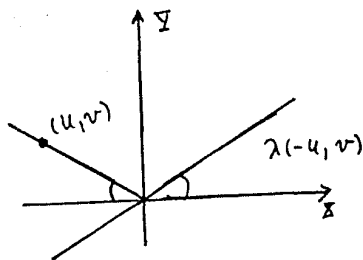
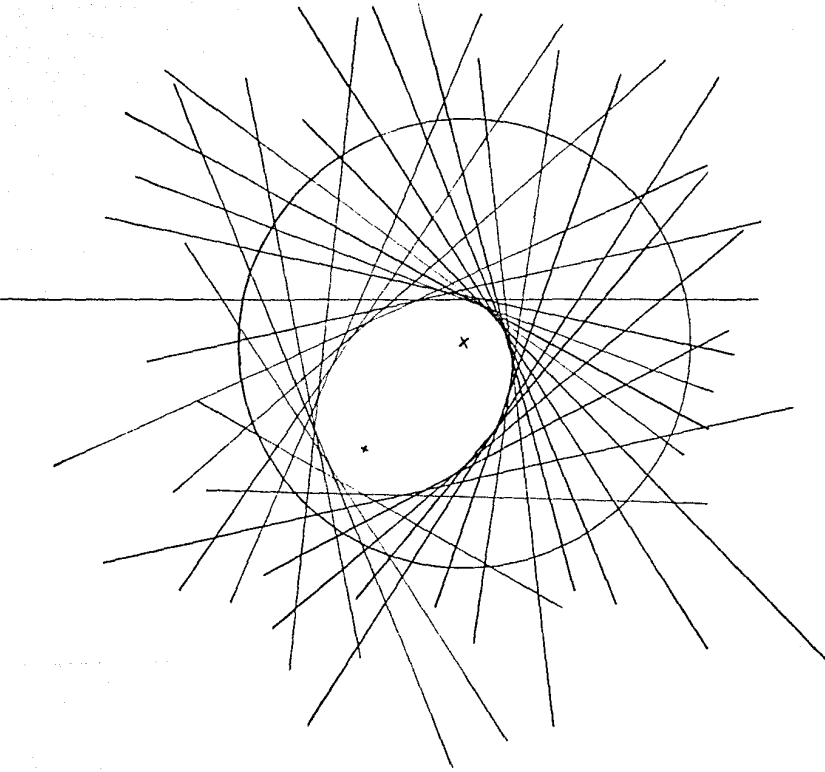


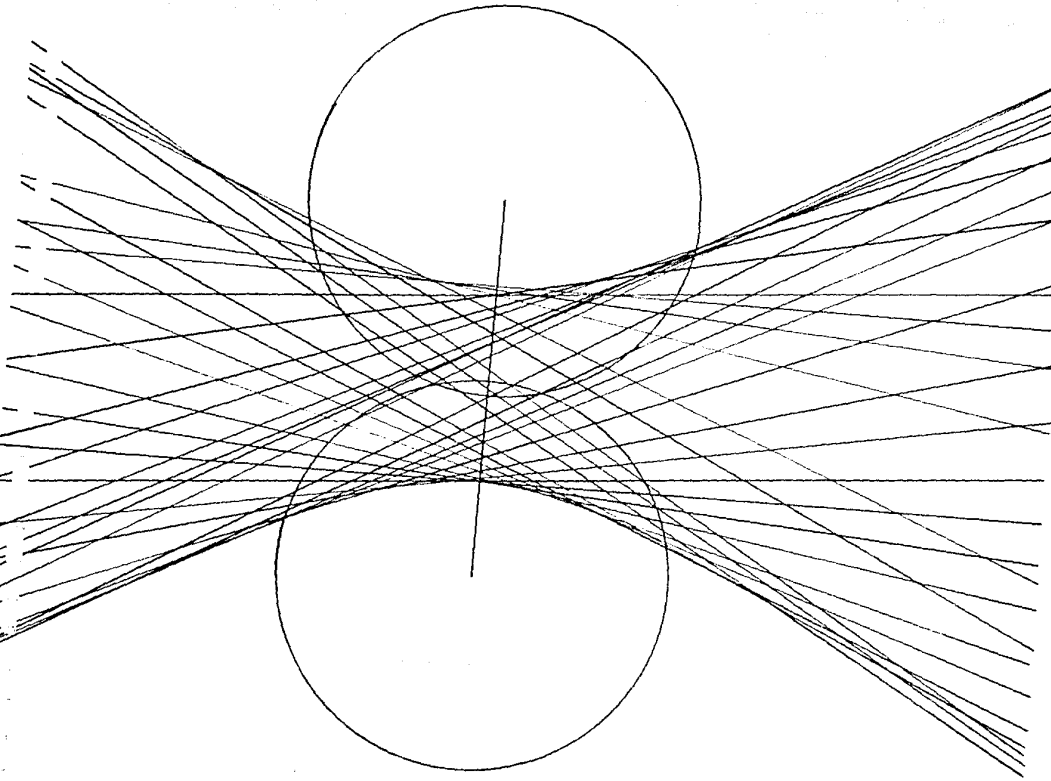
Fig. 21.

Obs.

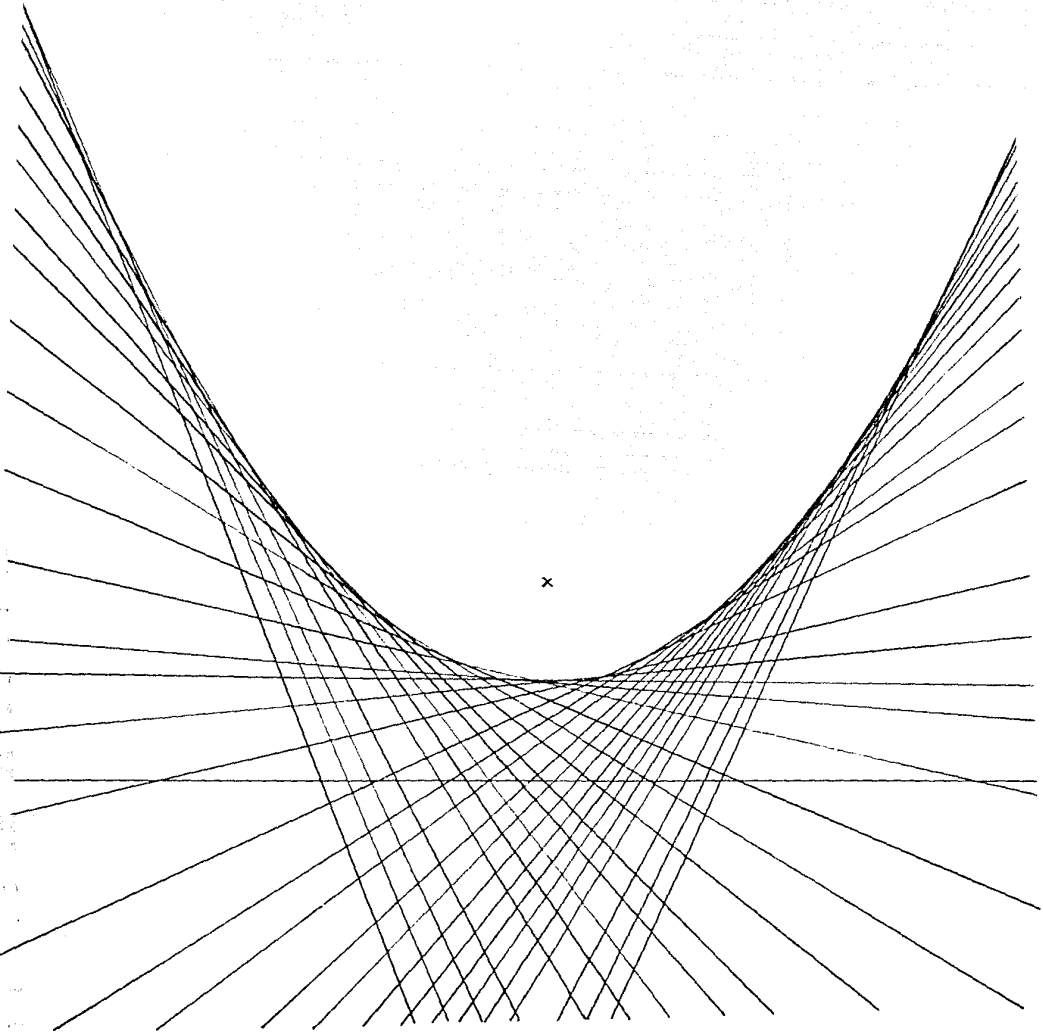
De la proposición 8, se puede decir lo siguiente:  
 si  $s$  es el punto de la cáustica correspondiente a  $P \in E$ ,  
 y  $F$  la fuente de luz, como  $s$  y  $F$  son focos de una  
 cónica, si tomamos ahora a  $s$  como fuente de luz, el  
 pto. de la cáustica correspondiente a  $P$  será  $F$ .



Antiortotómica de una circunferencia  
respecto a un pto. dentro de ella



Antiortotómica de una circunferencia, respecto a un punto F fuera de ella (hipérbola)



Antiortotómica de una recta  
respecto a un pto. que no está  
sobre ella

### 2.5.1 Círculo discriminante

Otro criterio interesante para saber como es la cónica osculante de la proposición 8, la obtenemos mediante el círculo discriminante, esto es el círculo que construimos del siguiente modo: si  $C_P$  es el centro de curvatura de  $E$  en  $P$ , entonces el centro del círculo discriminante está sobre la normal a  $E$  en  $P$ , y su radio es igual a la mayor parte del radio de curvatura. en la figura 23, el círculo sombreado es el círculo discriminante. (el círculo discriminante contiene a  $P$  como fig. 23)

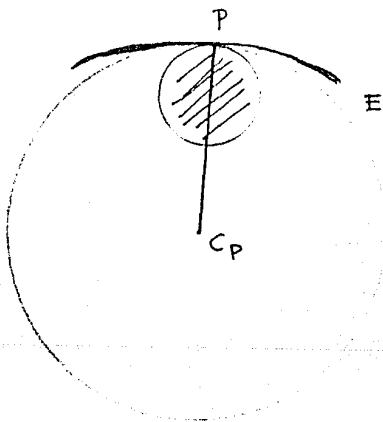


Fig. 23.

Hasta ahora sabemos lo siguiente: si  $h^2 - ab < 0$  la cónica osculante es una elipse, si  $h^2 - ab > 0$  se trata de una hipérbola, y si  $h^2 - ab = 0$ , entonces tenemos una parábola.

La proposición es la siguiente:

### Proposición 9

Sea  $E$  y  $P \in E$  como en la proposición 8 y supongamos que tanto  $C_p$  como  $F$  están del mismo lado de la recta tangente. Sea  $C'_p$  el círculo discriminante, entonces:

- (i) si  $F \in \text{int. } C'_p$ , entonces la cónica osculante respecto de  $P$  es una hipérbola.
- (ii) si  $F \in \text{ext. } C'_p$ , la cónica osculante es una elipse.
- (iii) si  $F \in \partial C'_p$ , la cónica osculante es una parábola.

comentario:

Si  $F$  y  $C_p$  están de lados contrarios, entonces la cónica es una hipérbola. \*

Dem.

con la misma notación que en la proposición 8, sin pérdida de generalidad supongamos que  $v > 0$ . Como el centro de curvatura está del mismo lado que  $F$ , quiere decir que el coeficiente  $a$  de la cónica osculante es negativo, y la curvatura en  $P = (0,0)$  es  $-2a$ .

Usando nuevamente las ecuaciones (+) de los focos, como  $v > 0$ , la ecuación de abajo la multiplicamos por  $\frac{4a}{v}$  y la sumamos a la ecuación de arriba:

$$4(h^2 - ab)(v^2 - u^2) + 8(h^2 - ab)u^2 = 4av + 4hu + 1 + \frac{4au^2}{v} - 4hu$$

desarrollando tenemos:

$$(h^2 - ab)(4v^2 - 4u^2 + 8u^2) = \frac{4av^2 + 4au^2 + v}{v}$$

\* ver nota [3] final del capítulo.

por tanto:

$$h^2 - ab = \frac{4a(u^2 + v^2) + v}{4v(u^2 + v^2)}$$

Por otro lado, el centro de la circunferencia osculante es  $(0, -\frac{1}{2a})$  y por tanto el centro del círculo discriminante es  $(0, -\frac{1}{8a})$ .

(i) Como  $F \in \text{int} C'_p$ , entonces:

$$u^2 + (v + \frac{1}{8a})^2 < (\frac{1}{8a})^2$$

y por tanto:

$$u^2 + v^2 + \frac{v}{4a} + (\frac{1}{8a})^2 < (\frac{1}{8a})^2$$

$$\frac{4a(u^2 + v^2) + v}{4a} < 0$$

como  $v(u^2 + v^2) > 0$ , entonces:

$$\frac{4a(u^2 + v^2) + v}{4av(u^2 + v^2)} < 0$$

como  $a < 0$ , al multiplicar por  $a$  la desigualdad anterior, tenemos

$$\frac{4a(u^2 + v^2) + v}{4v(u^2 + v^2)} = a \left( \frac{4a(u^2 + v^2) + v}{4av(u^2 + v^2)} \right) > 0$$

y por tanto:  $h^2 - ab > 0$ ,

esto es, la cónica osculante es una hipérbola.

(ii) como  $F \in \text{Ext } C_p$ , desarrollando como en (i) la desigualdad:

$$u^2 + \left(v^2 + \frac{1}{8a}\right)^2 > \left(\frac{1}{8a}\right)^2$$

Tenemos:

$$h^2 - ab = \frac{4a(u^2 + v^2) + v}{4v(u^2 + v^2)} > 0$$

y por tanto, la cónica osculante es una elipse.

(iii) como en los anteriores casos:

$$u^2 + \left(v^2 + \frac{1}{8a}\right)^2 = \left(\frac{1}{8a}\right)^2$$

y por lo tanto:

$$h^2 - ab = \frac{4a(u^2 + v^2) + v}{4v(u^2 + v^2)} = 0$$

lo que quiere decir que nuestra cónica es una parábola.



## Notas (admiración)

(1) En [7, pags. 159-160], se demuestra el siguiente teorema:

Teorema:

Sea  $S$  una cónica dada por la ecuación:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

en coordenadas rectangulares. Entonces, un foco  $(x, y)$  de  $S$ , satisface (en particular) las ecuaciones:

$$c(x^2 - y^2) - 2Gx + 2Fy + A - B = 0$$

donde  $c = ab - h^2$ ,  $G = hf - bg$ ,  $F = gh - af$ ,  $H = fg - ch$ ,  
 $A = bc - f^2$  y  $B = ca - g^2$ .

En nuestro caso  $g = c = 0$  y  $f = \frac{1}{2}$ , por consiguiente,  $C = ab - h^2$ ,  $F = -\frac{1}{2}a$ ,  $A = -\frac{1}{4}$  y  $B = H = 0$ .

Haciendo las sustituciones adecuadas en las dos ecuaciones del teorema, obtenemos las ecuaciones (+), indicadas en la página 92 de este capítulo.

(2) Si la cónica osculante a PEF es una parábola puede ocurrir que esta tenga contacto de orden 3, o de orden 4, en algunos casos el pto. correspondiente de la cústica es el pto. al infinito (veanse los ejemplos al final del capítulo 3).

En el caso en el que la cónica osculante es una parábola, para las formulaciones de los resultados, es conveniente distinguir si el contacto es 3 o 4, o más aún, mayor que 4.

así, en [1] y [3], si el contacto de la parábola osculante es  $\geq 4$ , al punto al infinito lo reconocen como una singularidad de la cáustica, en cambio no hacen lo mismo si el contacto es 3.

Esto nos resultó confuso en muchos momentos en este trabajo, en la tesis trata-

mos de evitar esta confusión lo más posible

Esta problemática está ligada también con lo siguiente: si la cónica osculante es una parábola, ello corresponde a que en la autotónica tenemos una inflexión. (pag 88).

adhiriéndonos a lo expuesto en [3], en este trabajo consideramos diferentes a los vértices y a las inflexiones. Es decir, la condición necesaria para que  $F'$  sea vértice de la autotónica que la curvatura  $K$  en  $F'$  no sea cero (o de una curva general).

Otros autores, como [4], no hacen esta distinción, pues definen vértice solo exigiendo que  $K' = 0$ .

Con esta distinción -quizá sutil- en la proposición 2, del capítulo 3, antes mencionada, la cónica osculante de contacto mayor o igual a 4 ahí referida, jamás puede ser parábola y, en consecuencia, la singularidad correspondiente de la cáustica es un pto del plano (finito).

(3) una aclaración pertinente:

cuando hablamos del interior en las proposiciones 5 y 6 nos referimos al conjunto de pts. encerrados por la circunferencia osculante, más no al interior topológico. Lo mismo ocurre con el exterior, con los pts. que no encierran la circunferencia osculante.

En el caso de que tratemos con la el círculo osculante, ahí sí nos referimos tanto al interior topológico, como al exterior.

### 3. Cáusticas y singularidades.

En el capítulo anterior vimos bajo que condiciones la cáustica resulta ser regular, llegando a la siguiente conclusión: si la ortotónica no tiene vértices, entonces la cáustica es una curva regular, e inversamente (sec. 2.4) si la cáustica es una curva regular, la ortotónica no tiene vértices. Sin embargo, no siempre la ortotónica carece de vértices, y en este capítulo abordaremos el caso cuando la ortotónica tenga vértices, por lo para ello, necesitamos definir algunos conceptos elementales de la teoría de singularidades.

#### 3.1 Cúspides y vértices.

Sea  $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , gráficamente esta curva se puede ver como en la figura 1.

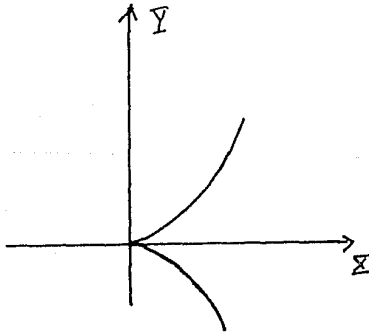


Fig. 1

Vemos que en el pto.  $P=(0,0)$  se forma un pico, al que llamaremos cúspide. Al tomar la derivada de  $\gamma$  en  $t=0$ , tenemos  $\gamma'(0)=(0,0)$ , esto es, en el punto  $t=0$

la curva  $\gamma(t)$  tiene una singularidad. al derivar por segunda y tercera ocasión en  $t=0$ , tenemos:

$$\gamma''(0) = (2, 0)$$

$$\gamma'''(0) = (0, 6).$$

notamos que los vectores  $\gamma''(0)$  y  $\gamma'''(0)$  son linealmente independientes. Esto da la pauta para la siguiente:

Definición 1.

Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^\infty$  y decimos que  $\gamma$  tiene una cúspide simple en  $t_0 \in I$ , si y solo si:

(i)  $\gamma'(t_0) = 0$

(ii)  $\gamma''(t_0)$  y  $\gamma'''(t_0)$  son vectores linealmente independientes.

con esta definición, es suficiente para continuar nuestro trabajo.

Supongamos que en el pto.  $F!$ , nuestra ortotómica tenga un vértice, es decir  $K'_0(s_0) = 0$ , donde  $K_0(s_0)$  denota la curvatura de  $O$  en el pto.  $O(s_0) = F!$ . Entonces si  $O$  está parametrizada con longitud de arco  $s$ , sabemos que la cáustica  $G$  es la evolvente de  $O$ , y por tanto, podemos parametrizarla como:

$$G(s) = O(s) + \frac{1}{K_0(s)} N_0(s)$$

por lo tanto:

$$G'(s_0) = \frac{K'_0(s_0)}{K_0^2(s_0)} N_0(s_0) = 0$$

Es decir, en  $S=S_0$ , la cáustica tiene una singularidad. De hecho hemos demostrado lo siguiente:

Proposición 1.

$F'$  es un vértice de la ortotómica, si y solo si la cáustica en el pto. correspondiente (que llamamos  $S$ ) tiene una singularidad.

De esta proposición podemos concluir que las singularidades en la cáustica  $G$  corresponden a vértices en la ortotómica, y viceversa, de aquí nuestro interés de estudiar vértices, para saber que tan "horribles" son las singularidades en la cáustica  $G$ .

Una observación es la siguiente: Como los vértices dependen del orden de contacto de la ortotómica y su circunferencia osculante, y éste se preserva entre la cónica osculante y el espejo  $F$ , entonces se puede establecer el siguiente resultado en términos de órdenes de contacto y cónicas osculantes.

Proposición 2.

Sea  $E$  una curva regular con curvatura diferente de cero, y  $F \in \mathbb{R}^2$ . Entonces la cónica osculante de  $E$  en  $P$  respecto a  $F$  tiene orden de contacto mayor o igual a 4, si y solo si la cáustica en  $S$  tiene una singularidad.

Dem.

$\Rightarrow$ ) Sea  $\mathcal{C}_p$  la cónica osculante, y supongamos que  $P$  es un pto. de contacto de orden mayor o igual a 4 de  $\mathcal{C}_p$  y  $E$ . Sea  $O$  la ortotónica de  $E$  respecto a  $F$ ,  $C, P, F'$  su circunferencia osculante,

como  $\mathcal{C}_p$  y  $E$  tienen un pto. de contacto de orden mayor o igual a 4, por la proposición 4 del capítulo 2  $C, P, F, O$  tienen un pto. de contacto de orden mayor o igual a 4 en  $F'$ , es decir,  $O$  tiene un vértice en  $F'$  y por la proposición 1 de este capítulo,  $C$  tiene una singularidad en  $S$ .

$\Leftarrow$ ) Supongamos ahora que la cáustica  $C$  tiene una singularidad en  $S$ , entonces, por la proposición 1 de este capítulo,  $O$  tiene un vértice en  $F'$ , y portanto  $O$  y  $C, P, F'$  tienen un pto. de contacto de orden mayor o igual a 4 en  $F'$ . Como  $\mathcal{C}_p$  es la antiortotónica de  $O$ , entonces  $\mathcal{C}_p$  y  $E$  tienen un pto. de contacto de orden mayor o igual a 4 en  $P$ ,

Basta el momento, tenemos dos criterios para saber si la cáustica es regular o lisa, tiene una singularidad: por medio de la ortotónica o usando las cónicas osculantes. Sin embargo, nos interesa saber que clase de singularidad tiene la cáustica, cuando la tiene, y es lo que pasamos a ver en este momento.

Pensemos que la ortotómica tiene un vértice ordinario en  $F'$ , esto es,  $k_0^{(F')} \neq 0$ ,  $k_0'(F') = 0$  y  $k_0''(F') \neq 0$ . La cúspide tiene la parametrización:

$$G(s) = O(s) + \frac{1}{k_0(s)} N_0(s)$$

donde  $s$  es la longitud de arco de  $O$ .

La primera derivada es:

$$G'(s_0) = - \frac{k_0'(s_0)}{k_0^2(s_0)} N_0(s_0)$$

y por lo dicho antes, para  $F' = O(s_0)$ , tenemos:

$$G'(s_0) = 0.$$

al derivar por segunda y tercera vez, en  $s_0$ :

$$G''(s_0) = - \frac{k_0''(s_0)}{k_0^3(s_0)} N_0(s_0)$$

$$G'''(s_0) = - \frac{k_0'''(s_0)}{k_0^4(s_0)} N_0(s_0) + 2 \frac{k_0''(s_0)}{k_0^3(s_0)} T_0(s_0)$$

esto es,  $G''(s_0)$  y  $G'''(s_0)$  son linealmente independientes, por tanto  $G(s)$  tiene una cúspide simple. Tenemos entonces la siguiente:

### Proposición 3

Sea  $E$  regular con curvatura distinta de cero. Sean  $P \in E$ ,  $F \in \mathbb{R}^2$  y  $F' \in O$  perpendicular a  $P$  respecto a  $F$ . Denotamos -como siempre-  $k_0$  la curvatura de la ortotómica.

$F'$  es un vértice ordinario si y solo si, la cúspide en el pto.  $s$  perpendicular a  $F'$  tiene una cúspide simple.



En términos de cónicas osculantes y el orden de contacto, es como sigue:

Proposición 4

Sea  $E$  con las hipótesis de las proposiciones anteriores. La cónica osculante  $C_P$  y  $E$  tienen un pto. de contacto de orden exactamente 4 en  $P$ , si y sólo si el pto. de la cáustica correspondiente  $s$ , la cáustica tiene una cúspide simple.

Ejemplo 1

En el caso que  $E$  es una elipse y  $F$  uno de sus focos, la cónica osculante es ella misma, por tanto la cáustica es "muy singular", pues es solamente un pto.: el otro foco.

Una pregunta natural respecto a los vértices de la ortotómica, es si estos provienen de vértices de  $E$ , la respuesta es que no siempre, el caso de la elipse es un ejemplo de este hecho: Tomando como fuente uno de sus focos, la ortotómica resultante es una circunferencia, y todos sus pto. son vértices no así los puntos de la elipse.

Sin embargo, podemos demostrar la siguiente afirmación general:

Supongamos que  $F$  está sobre la normal de  $E$  en  $P$ , entonces,  $P$  es un vértice de  $E$  si y solo si  $F$  es un vértice de  $O$ .

Para ser una demostración, usamos nuestra cónica osculante  $L_P$ ; como  $F$  está en la normal a  $E$  en  $P$ , entonces  $F$  debe estar en el eje focal de  $L_P$ , puesto que los pts. correspondientes de la cáustica también deben estar sobre la normal a  $E$  en  $P$ , entonces, el orden de contacto en  $P$  es mayor o igual a 4 si y solo si  $P$  es un vértice de  $E$ , por tanto  $F$  es un vértice de  $O$ , así, la cáustica tiene una singularidad en  $S$ .

Pero este hecho también se puede demostrar con coordenadas pedales, y es del siguiente modo:

(a) como  $F$  está en la normal, entonces  $r=q$ , y por tanto  $(q')^2 = -R(r^2 - q^2) = \frac{r^2 - q^2}{r^2} = 0$  (fig. 2).

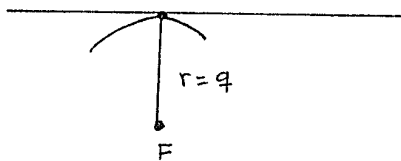


Figura 2.

(aquí estamos suponiendo, sin pérdida de generalidad  $F=0$ )

(b) tomando la fórmula de  $K_0$ , y derivando, tenemos:

$$K_0 = \frac{[2(K'r^2 + 2Krr') - q^2] 2Krr^3 - (2Krr^2 - q)^2 (K'r^3 + 3r^2r')}{2Kr(2Krr^2)^2}$$

aplicando las observaciones de a) :

$$k'_0 = \frac{2k^2 r^4}{2kr(2kr^3)^2}$$

como  $r \neq 0$   $k \neq 0$ , entonces :

$$k'_0 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 0$$

Usando este hecho, formularemos los dos últimos resultados de esta sección :

Proposición 5.

Sean  $E$  y  $P \in E$  con las hipótesis de siempre, entonces  $F'$  es un vértice de  $O$  si y solo si  $P$  es un vértice de  $E$ .

Proposición 6.

Supongamos que  $F$  está en la normal de  $E$  en  $P$ . Entonces:  $S$  es una singularidad en la cáustica, si y solo si  $P$  es un vértice de  $E$ .

### 3.2. Cústicas modales y cáusticas.

Hasta el momento, podemos decir el comportamiento local de la cáustica:

- (i) La cáustica tiene una singularidad en el pto.  $s$  si y sólo si la ortotónica tiene un vértice en  $F'$ .
- (ii) La cáustica tiene una cúspide simple en  $s$  si y sólo si la ortotónica tiene un vértice ordinario en  $F'$ .
- (iii) La cáustica es regular  $\Leftrightarrow$  la ortotónica no tiene vértices.

también tenemos los mismos resultados con cónicas osculantes, y arcos de contacto.

ahora, nos planteamos el siguiente problema: si tengo un espejo  $E$ , para que posiciones de  $F$  la cáustica resultante tiene singularidades. En realidad este problema no es sencillo de abordar de manera general, pero en este trabajo, nos limitaremos a lo siguiente: supongamos que nuestro espejo  $E$  tiene las hipótesis hasta ahorita asumidas, y tomamos  $P \in E$  fijo, queremos encontrar para cuales posiciones de  $F$ , la cáustica tiene singularidades en el punto  $s$  que corresponde a  $P$ .

Definimos el conjunto:

$A_P = \{ F \in \mathbb{R}^2 : \text{la cáustica respecto a } F \text{ en el pt. correspondiente a } P, \text{ tiene singularidades?} \}$ .

por los resultados con cónicas osculantes, sabemos que es el mismo que:

$A'_p = \{F \in \mathbb{R}^2 : \text{la cónica osculante respecto a } F \text{ en } P \text{ tiene orden de contacto mayor o igual a } 4\}$

En esta parte trataremos de determinar el conjunto,  $A'_p$ , y veremos que esta es una curva, a la que llamaremos *cúbica nodal*.

Usando la notación de la proposición 8, secc. 2.5, y sus hipótesis, tenemos que la ecuación de la cónica está dada por:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + y = 0 \dots (**)$$

para que esta cónica y  $E$  tengan un pto. de contacto de orden 3, se debe de cumplir:  $K = -2a$ , (por proposición 8 secc. 2.5). Como ahora nuestras variables son  $(u, v)$  y nuestro coeficiente  $h$  en la prop. 8, debemos de buscar otro modo de determinarlo, para ella, derivando implícitamente 3 veces (\*\*\*) y evaluando en  $(0, 0)$ :

$$y'''(0) = 12ah. \dots (1)$$

Por otro lado, si queremos que la cónica osculante y  $E$  tengan un pto. de contacto de orden 4, se debe cumplir:

$$K'(0) = y''''(0) \dots (2)$$

donde  $K$  denota la curvatura de  $E$  en  $(0, 0)$ .

(i) El pto.  $P=(0,0)$  es un pto. doble (o nodo).

(ii) En el pto. doble o nodo, las rectas tangentes son perpendiculares, y en nuestro caso son la tangente y la normal a  $E$  en  $P$ .

(ver nota 1 al final del capítulo).

De esta manera, tenemos demostrada la siguiente:

Proposición 7

El lugar geométrico de los focos de cónicas osculantes tales que  $O=P$  es un pto. de contacto de orden mayor o igual a 4 con  $E$ , es el conjunto de ptes.  $(x,y)$  tales que cumplen la ecuación:

$$2(x^2+y^2)(ax+by)=-xy$$

gráficamente, esta curva se puede ver como en la figura 3.

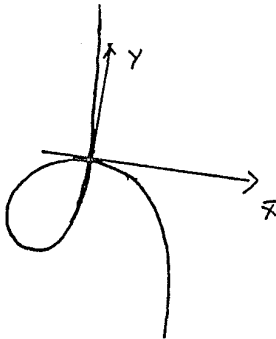


Figura 3. cúbica nodal.

De este modo, nuestro conjunto  $A'_p$ , queda definido como:

$$A'_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2(x^2 + y^2)(ax + by) = -xy\}.$$

obs.

- a) Si  $F \in A'_p$ , y  $s$  es el pto. de la cáustica, entonces  $s \in A'_p$  porque ambos son focos de la misma cónica.
- b) Si  $F \notin A'_p$ , entonces lo cabmente nuestra cáustica es una curva regular.

En el caso que  $P$  sea un vértice de  $E$  la cúbica nodal se simplifica, En efecto, pues  $y'''(0) = 0$  y por tanto  $k = 0$ , entonces la ecuación se transforma:

$$2(x^2 + y^2)ax + xy = 0 \dots (3)$$

y una solución es  $x = 0$ , que resulta ser el  $\Delta, 0$ , en general, la normal de  $E$  en  $P$ .

Cuando  $x \neq 0$ , entonces la ecuación 3 es equivalente a

$$2(x^2 + y^2)a + y = 0$$

haciendo cálculos algebraicos tenemos:

$$2(x^2 + y^2)a + y = 2a\left(x^2 + y^2 + \frac{y}{2a}\right)$$

$$= 2a\left(x^2 + y^2 + 2\left(\frac{y}{4a}\right) + \left(\frac{1}{4a}\right)^2 - \left(\frac{1}{4a}\right)^2\right) = 2a\left(x^2 + \left(y + \frac{1}{4a}\right)^2 - \left(\frac{1}{4a}\right)^2\right) = 0$$

entonces, una segunda solución es una circunferencia con centro en  $(0, -\frac{1}{4a})$  y radio  $|\frac{1}{4a}|$

esta circunferencia, claramente tiene la mitad del radio de la circunferencia osculante, y por tanto, cuando  $P$  es un vértice, la solución se puede ver geométricamente como en la figura 4.

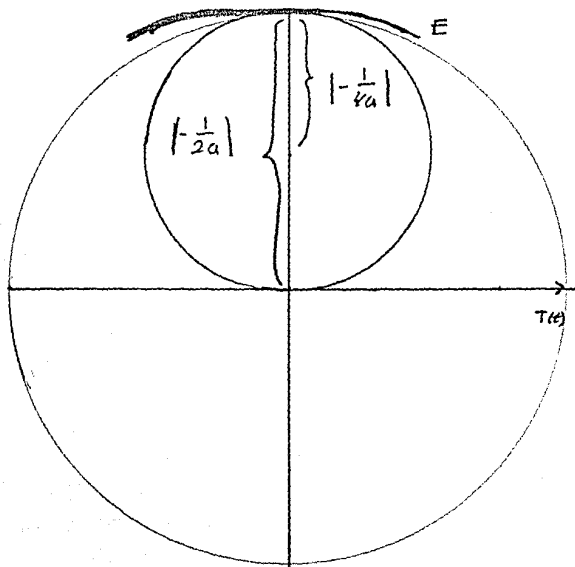


Fig. 4 el espejo  $E$ , su "cúbica nodal" y circunferencia osculante.

ejemplo:

El hecho que la cúbica nodal se descompone en una circunferencia y una recta cuando  $P$  es un vértice de  $E$ , nos permite desarrollar una aplicación sencilla al caso en que  $E$  es una circunferencia para determinar las singularidades de una cáustica.



Sea  $\mathcal{L}$  una circunferencia y  $F$  un pto. en el plano.  
¿En que puntos puede tener singularidades la cáustica  
de  $\mathcal{L}$  respecto a  $F$ ? . Tomando a  $F$  como fuente de luz,  
nuestro problema consiste en saber para que puntos  
 $P \in \mathcal{L}$   $F$  está en su cúbica nodal.

Por lo dicho anteriormente, si  $P \in \mathcal{L}$ , la cúbica nodal  
resulta una circunferencia - cuyo radio es la mitad  
del radio de  $\mathcal{L}$  - y la recta perpendicular a  $\mathcal{L}$  en  $P$   
(Figura 5)

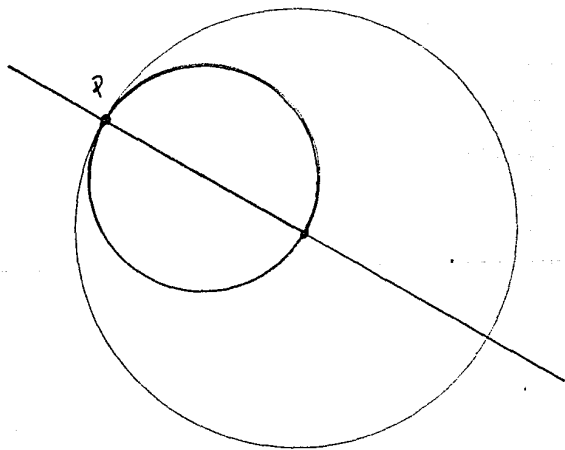


Fig. 5. cúbica nodal del punto  $P$ .

Por tanto, es claro que si  $F$  está fuera, como en la figura 6, solo está en la cubica nodal de  $P_1$  y  $P_3$ ,

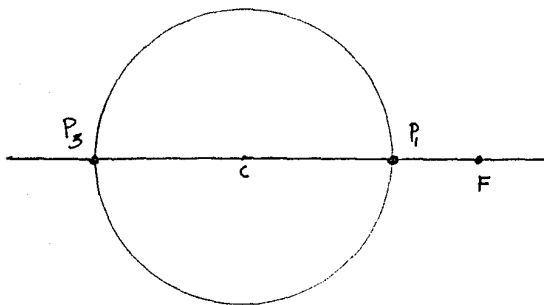


Fig. 6

puesto que  $F$  está en la línea que pasa por  $P_1$  y  $P_3$ , que es perpendicular a  $L$  en estos puntos. Es decir, la cáustica tendrá singularidades en los puntos correspondientes a  $P_3$  y  $P_1$ , y solamente en esos pto.

Utilizando el criterio del círculo descriptivo, se puede decir un poco más: El centro de curvatura en cada punto  $P \in L$  es justamente el centro de  $L$ . Si  $F$  está como en la figura 6,  $F$  y  $C$  quedan del mismo lado

la tangente a  $L$  en  $P_3$  y de lados opuestos respecto a la tangente a  $L$  en  $P_1$ . Por tanto, la cónica osculante en  $P_3$  (respecto a  $F$ ) es una hipérbola. El otro foco  $s$  de esta hipérbola es un pto. en el plano (esto es, no es el pto. al infinito), es decir, el pto. de la cáustica correspondiente, no es el pto. al infinito.

Respecto a  $P_3$ , como evidentemente  $F$  queda fuera del círculo discriminante de  $P_3$ , la cónica osculante resulta ser una elipse y su otro foco  $S_3 \neq F$  está también en la recta  $\overline{P_1 P_3}$ ,  $S_3$  también resulta que no es el pto. al infinito.

En los ejemplos, al final del capítulo veremos que si  $F$  está fuera de  $\mathcal{L}$ , toda la cáustica queda dentro de  $\mathcal{L}$ .

Si  $F$  está dentro de  $\mathcal{L}$ , como en la figura 7, y  $F \neq C$ , hay 4 puntos  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  de  $\mathcal{L}$  que producen singularidades en la cáustica.

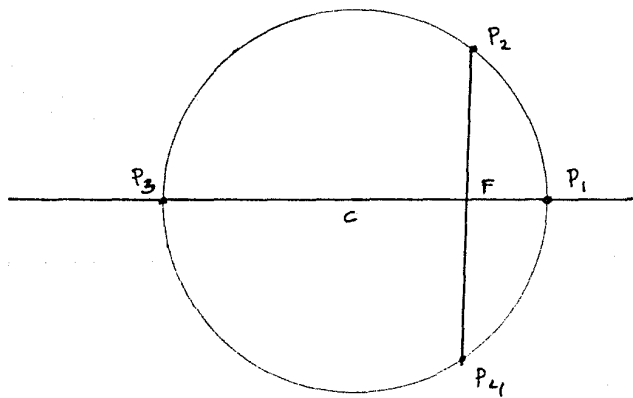


Figura 7.

dos de estos puntos ( $P_1$  y  $P_3$ ), son los extremos del diámetro de  $\mathcal{L}$  que pasa por  $F$ , dado que este diámetro es parte de la cónica nodal de  $P_2$  y  $P_3$ .

Si tomamos ahora la perpendicular al diámetro  $\overline{P_1 P_3}$  que pasa por  $F$ , los dos puntos restantes  $P_2$  y  $P_4$  que producen singularidades son precisamente los que están en la intersección de  $\mathcal{C}$  con dicha perpendicular (Fig. 8)

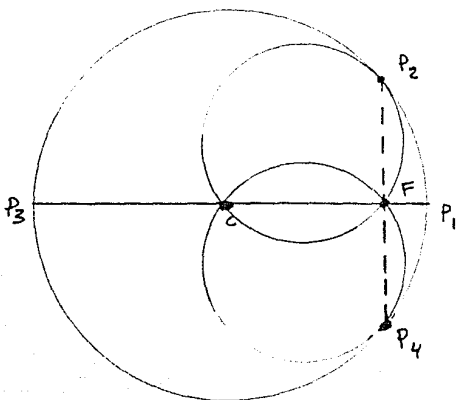


Figura 8.

obviamente en  $P_2$  la circunferencia que forma parte de la cúbica nodal pasa por  $F$ , y análogamente ocurre con  $P_4$ .

Excepto en estos cuatro puntos, en ningún otro punto de  $\mathcal{C}$  ocurre que la cúbica nodal correspondiente pasa por  $F$ .

Ilumemos  $s_1, s_2, s_3$  y  $s_4$  a los puntos de la cáustica correspondientes a  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ .  $F$  está en el diámetro  $\overline{P_1 P_3}$ , y  $F \neq C$ , entonces está más cerca de  $P_1$  o es más cercano a  $P_3$ . Supongamos, como en la fi-

gura 7,  $F$  está más cerca de  $P_1$  que de  $P_3$ . El centro de curvatura en cada punto  $P \in \mathcal{L}$  es precisamente  $c$ , y el círculo discriminante de cada  $P \in \mathcal{L}$  es un círculo cuyo radio es la mayor parte del radio de  $\mathcal{L}$  que toca a  $\mathcal{L}$  en  $P$ . (Fig. 9).

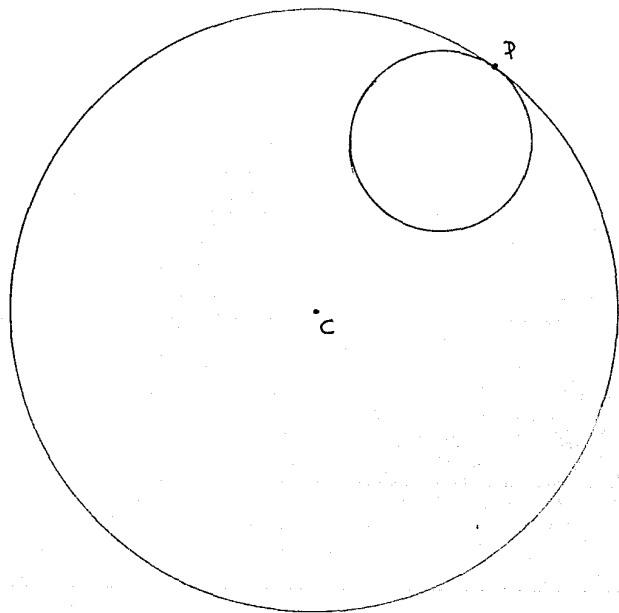


Fig. 9.

$F$  jamás puede estar en el círculo discriminante de  $P_3$ , en cambio, respecto a  $P$  hay tres situaciones posibles: que  $F$  este esté dentro, fuera o en la frontera del círculo discriminante de  $P_1$ . En la primera y segunda situación, tendremos que  $S_1$  es un pto.

del plano (finito). En la Tercera, tendrse mos que  $S_1$  es el punto al infinito.

Como  $F$  no puede estar en los círculos discriminantes de los puntos correspondientes a  $P_2$  y  $P_4$ , concluimos que solo en el pto.  $P_1$  puede ocurrir que el pto. correspondiente a la cáustica  $S_1$  puede ser el pto. al infinito.

Por último, haremos notar que en el caso de la circunferencia, si las singularidades de la cáustica son ptos. del plano, solo pueden ser cúspides simples:

En efecto, si una cónica osculante tiene un contacto de orden mayor que 4, y la otra es una cónica entonces, ella misma es su cónica osculante. (Esta afirmación se demuestra en el siguiente parágrafo), y por tanto las cónicas osculantes de  $\mathcal{L}$  respecto a  $F$  tiene un contacto a lo más de orden 4 y por tanto las singularidades en  $S_1, S_2, S_3$  y  $S_4$  son cúspides simples de la cáustica.

Después de este brevísimo ejemplo, nos planteamos el siguiente cuestionamiento: ¿cuántas cónicas osculantes a  $E$ , tienen orden de contacto mayor que 4 en  $P = (0, 0)$ ?, para responder, retomamos la discusión, sea bien que los coeficientes  $a$  y  $h$  están determinadas por las derivadas  $y''$  y  $y'''$  en  $x=0$ , que debe coincidir con las derivadas de la función que representa nuestro espejo, entonces aplicando la misma técnica, al derivar implícitamente por cuarta ocasión la ecuación de la cónica y evaluando en  $x=0=y=y'$ , y despejando el coeficiente  $b$ :

$$b = - \frac{8h(y'''(0) + y''''(0))}{6y''(0)^2}$$

que está bien determinada por que  $y''(0) \neq 0$ , así podemos afirmar, que solamente hay una cónica que tiene orden mayor que 4, en el pto. de contacto  $P = (0, 0)$ .

o.l.s.

- 1) En el caso que nuestro espejo  $E$  sea él mismo una cónica, entonces la cónica osculante es el propio espejo  $E$ .
- 2) Los focos de la cónica osculante con orden de contacto mayor que 4, en  $P = (0, 0)$  con  $E$ , se encuentran también en la cónica nodal  $A_p$ .

3) Solamente hay dos posiciones para la fuente de luz, tal que en el pto. correspondiente de la cáustica exista una singularidad "horrible".

Definamos ahora los conjuntos:

$\mathcal{L}_p \subset A_p$ , tal que si  $F \in \mathcal{L}_p$ , entonces la conica es osculante con foco  $F$ , tiene un orden de contacto con  $E$  en  $P$  mayor que 4.

$$\mathcal{L} = \bigcup_{P \in E} \mathcal{L}_p.$$

nos preocupa, saber como es el conjunto  $\mathcal{L}$ , y quisiéramos ver que "tan gordo" o que "tan fino" resulta. Si variáramos el pto.  $P$  sobre  $E$ , sospechamos que  $\mathcal{L}$  debe ser una curva, y esto quiere decir ¡ que tiene medida cero!, según [1], [2] y [3], esto es así, sin embargo, la demostración requiere de material que va más allá de las posibilidades de esta tesis, y nos conformamos con decir que nos parece "razonable", de cualquier manera formulamos la proposición, aunque falte la demostración.

Proposición 8

Sea  $\mathcal{L}$  el conjunto definido arriba, entonces  $\mathcal{L}$  tiene Lebesgue medida, y su medida es cero.



### Ejemplos:

#### Ejemplo 1.

La figura A muestra la cáustica de un círculo  $C$  respecto al punto  $S$  (colocado fuera de  $C$  en el plano finito).

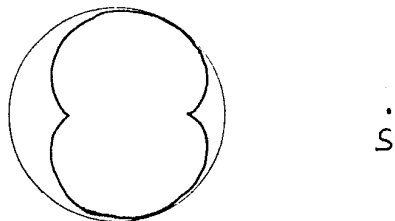


fig. A.

Las figuras B y C muestran como se obtienen los puntos  $F$  y  $F'$  de la cáustica que corresponden, respectivamente, a los puntos  $P$  y  $P'$  de  $C$ .

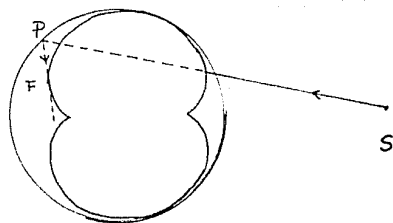


fig. B.

Usando los resultados expuestos vamos a ver cómo se obtiene esta cáustica.

Empecemos por obtener las singularidades de la cáustica, que, como hemos hecho notar, son cúspides simples en este caso.

Forzosamente,  $S$  está en la dirección de algún diámetro  $\overline{P_1 P_2}$ ; en consecuencia,  $S$  está en la

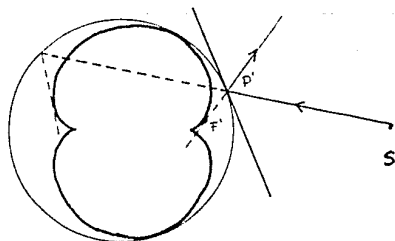


fig. C.

cúbica nodal de  $P_1$  y en la de  $P_2$  (Recuérdese que como todos los puntos de  $C$  son vértices, la cúbica nodal en cada punto siempre es una circunferencia y un diámetro. El radio de esta circunferencia es la mitad del radio de  $C$ ).

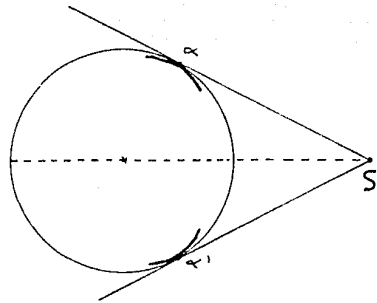


fig. D.

Las cúspides  $F_i$  correspondientes a  $P_i$ ,  $i=1,2$ , están en el diámetro  $\overline{P_1 P_2}$ . Antes de ubicar estas cúspides con más precisión, notemos lo siguiente: existen dos puntos  $\alpha$  y  $\alpha'$  cuyas tangentes a  $C$  pasan por  $S$ . Ahí, la cáustica es regular y toca a  $C$  en dichos puntos  $\alpha$  y  $\alpha'$  (figura D).

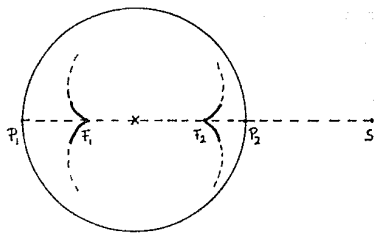


fig. E.

Para los puntos  $P'$  comprendidos entre  $\alpha$  y  $\alpha'$  -yendo de  $\alpha'$  a  $\alpha$  en sentido contrario a las manecillas del reloj- ocurre lo siguiente: la tangente a  $C$  en  $P'$  deja, de un lado a  $S$ , y del otro lado al centro  $C$ , que es, a su vez, el centro de curvatura (de cada punto) de  $C$ . En consecuencia, la cónica de contacto

para todos estos puntos  $P_i$  es una hipérbola cuyo foco  $F' \neq S$  quedará en el lado de la tangente (a  $P_i$ ) en el que no está  $S$ . Eso obliga a  $F'$  - que es el punto de la cáustica correspondiente a  $P_i$  - a quedar dentro de  $C$  (ver figura C).

Para los restantes puntos  $P$  (comprendidos ahora entre  $\alpha$  y  $\alpha'$  atravesando  $C$  en sentido contrario a las manecillas del reloj),  $S$  y el centro de  $C$  quedan del mismo lado de la tangente a  $C$  en  $P$ . El círculo discriminante en cada uno de estos puntos  $P$  tiene radio  $\frac{r}{4}$ , donde  $r$  es el radio de  $C$ . Como  $S$  queda claramente fuera de cada círculo discriminante, el punto correspondiente de la cáustica queda también dentro de  $C$ . En conclusión, toda la cáustica está dentro de  $C$ , y solo tiene singularidades (cúspides simples) en  $F_1$  y  $F_2$ .

Intuitivamente al menos, es claro, por como van quedando los puntos de la cáustica cercanos a los puntos  $P_i$ , que las cúspides "apuntan" como en la figura E (veáanse también figuras B y C).

Con toda esta información la cáustica queda como en la figura A.

Está claro que si alejamos a  $S$  un poco más de  $C$ , la cáustica resultante no cambia mucho de forma. En particular si  $S \rightarrow \infty$

(es decir, si pensamos a la fuente de luz situada en  $\infty$ ), la cáustica resultante es la siguiente:

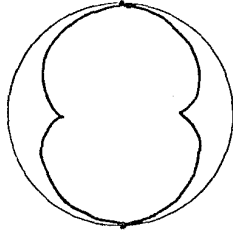


fig. 7.

Ejemplo 2.

Analicemos ahora las cáusticas cuando la fuente de luz  $S$  está dentro del círculo  $C$ . Si  $S$  es el centro del círculo, la cáustica se reduce a un punto (el propio centro), así que pensemos que  $S$  no es el centro de  $C$ .

Para fijar ideas, supongamos que la diferencia de  $S$  al centro de  $C$  es  $\frac{3}{4}$  del radio de  $C$ . La cáustica resultante en este caso se muestra en la fig. A.

Empecemos, nuevamente, por determinar las singularidades de la cáustica. Como ya vimos (páginas ), existen exactamente cuatro puntos  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  en  $C$  que producen singularidades en la cáustica. Estos puntos están situados como en la fig. B, y las singularidades de la cáustica son cúspides simples. La "tangente cuspidal" en cada caso, pasa por el correspondiente punto  $P_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ .

Llamamos  $F_i$  al punto de la cáustica correspondiente a  $P_i$ ,  $i=1, \dots, 4$ .  $F_2$  y  $F_4$  son fáciles de localizar como vimos antes. Para  $F_1$  y  $F_3$  sabemos por lo pronto, que están en algún lugar de la recta que contiene al diámetro  $P_1P_3$ . Usando el criterio del círculo discriminante obtenemos  $F_1$  y  $F_3$  como en la fig. C. Usando los cri-

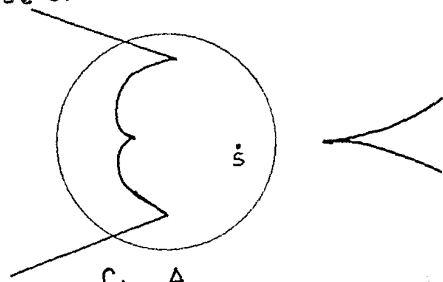


fig. A.

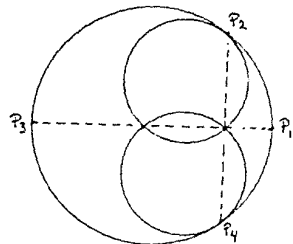


fig. B.

Los círculos internos son parte de la cúbica nodal de  $P_i$ ,  $i=2, 4$ .

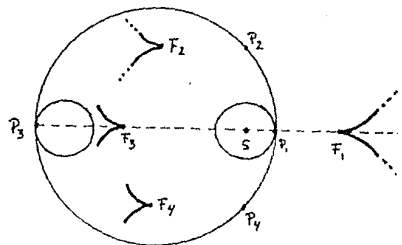


fig. C.

Los círculos internos son los círculos discriminantes de  $P_3$  y  $P_1$ , respectivamente

terios

obtenemos la localización exacta de  $F_1$  y  $F_3$ . Excepto por los puntos  $F_i$ ,  $i=1, \dots, 4$ , en todas las demás partes (finitas), la cáustica es una curva regular.

$F_1$  queda fuera de  $C$  porque  $S$  está dentro del círculo discriminante de  $P_1$ . Es claro que para puntos cercanos a  $P_1$ ,  $S$  queda dentro del círculo discriminante de dichos puntos (nótese que, en este caso, dado  $P \in C$ ,  $S$  y el centro de  $C$  siempre quedan del mismo lado de la tangente a  $C$  en  $P$ ). Entonces, en estos puntos cercanos, la cónica de contacto es una hipérbola y por consiguiente, el punto correspondiente de la cáustica quedará fuera de  $C$  (como veremos, no sólo en estos puntos la cáustica queda fuera de  $C$ ) fig. D.

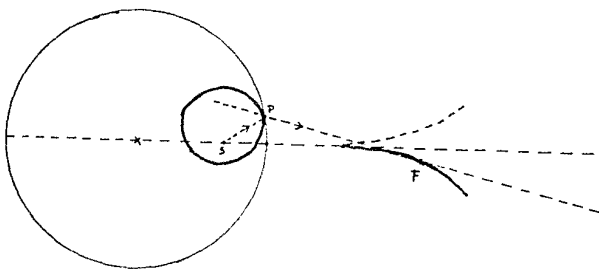


fig. D. Círculo discriminante de  $P$  cercano a  $P_1$ .  $F$  queda fuera de  $C$ .

Existen también puntos  $\alpha$  y  $\alpha'$  en  $C$  (simétricos respecto al diámetro  $\overline{P_1 P_3}$ ) cuyos círculos discriminantes pasan exactamente por  $S$ . Por lo tanto, en  $\alpha$  y  $\alpha'$  la cónica de contacto correspondiente es una parábola, lo que equivale a decir que el punto de la cáustica resultante, en ambos casos, es  $F = \infty$  (fig. E).

Así, hay una parte de  $C$  -comprendida entre  $\alpha$  y  $\alpha'$ -en la que necesariamente la cáustica queda fuera de  $C$ . En  $\alpha$  y  $\alpha'$  la cáustica "se va a infinito" (fig. F).

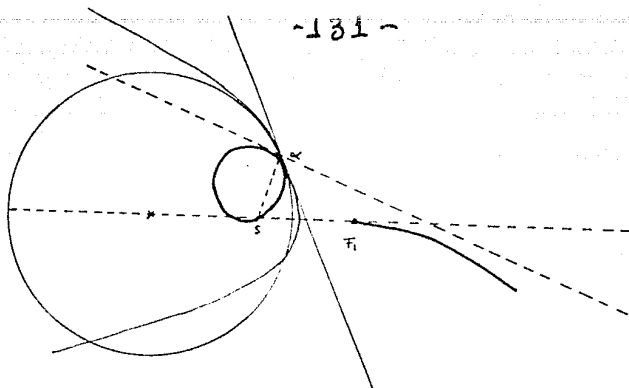


fig E.  $S \in$  Círculo discriminante de  $\alpha$ .  $F = \infty$

Para puntos P "después" de  $\alpha$  (yendo en sentido contrario a las manecillas del reloj), la cáustica "reaparece" del otro lado de C y empieza a configurarse como en la fig. A.

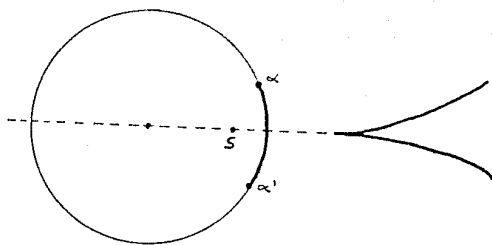


fig. F.

Para comprender esto veamos lo siguiente:

La fig. G muestra cómo se obtiene el punto  $\nu$  de la cáustica correspondiente a  $\mu \in C$ . Si vamos de  $\mu$  a  $\mu'$  (en el sentido "levógiro") obtenemos la parte de la cáustica que se ve en la misma figura. Si ahora vamos de  $\mu$  a  $P_2$  (en sentido de las manecillas del reloj), llegamos hasta la cúspide simple  $F_2$ . Nos seguimos moviendo (en el mismo sentido) de  $P_2$  a  $\alpha$ ; conforme más nos aproximamos a  $\alpha$ , la cáustica se sale de C y tiende a infinito.

La fig. H muestra un punto  $\beta$  de la cáustica correspondiente a un punto R en C muy cercano a  $\alpha$ .

Utilizando la construcción geométrica dada en ? obtenemos la localización precisa de  $\beta$ .

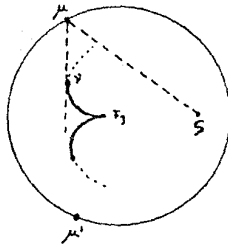


fig. G.

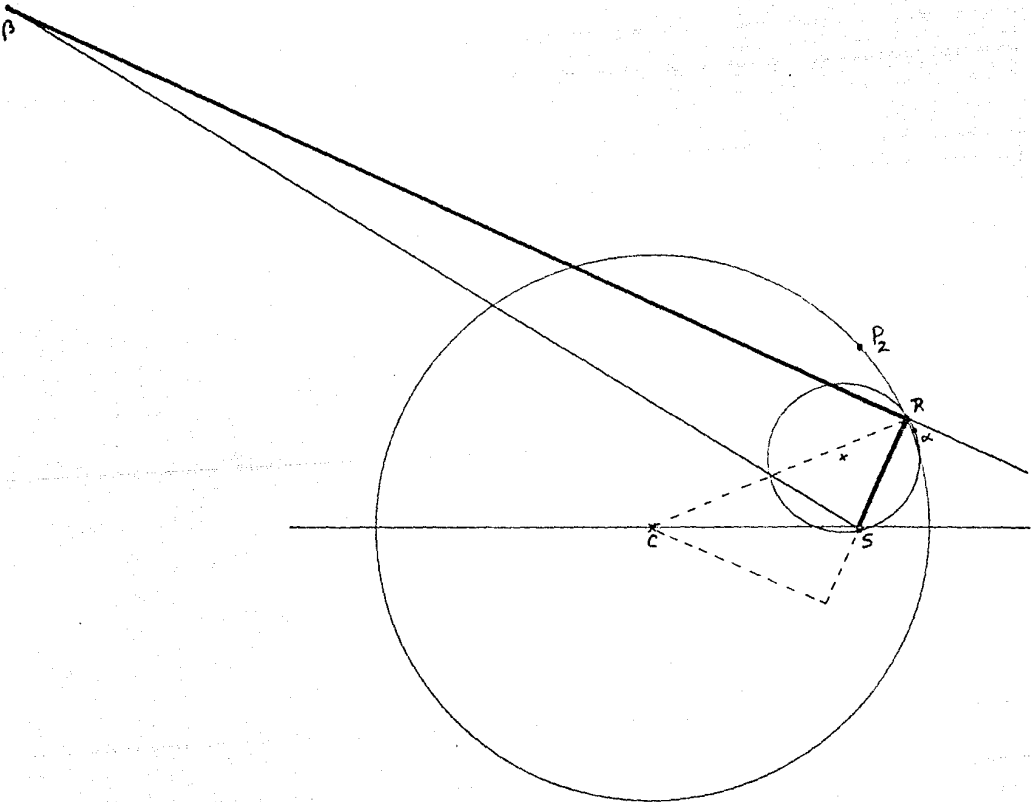


fig. H.



Razonando en forma parecida para los puntos de  $C$  entre  $\mu'$  y  $\alpha'$  obtenemos que la cáustica es como se indica en la fig. A.

Si suponemos ahora a  $S$  a una distancia  $\frac{r}{2}$  de centro de  $C$  ( $r$  es el radio de  $C$ ), la cáustica se ve como en la fig. I. Cabe notar que en este caso,  $S$  está en el círculo discriminante de  $P_1$ , por lo que  $F_1 = \infty$ . Por lo demás, razonando como en el caso anterior, obtenemos la fig. I.

En particular, cuando  $S$  está en el círculo discriminante de  $P_1$  y  $P_2$  se obtiene la cáustica de la fig. I.

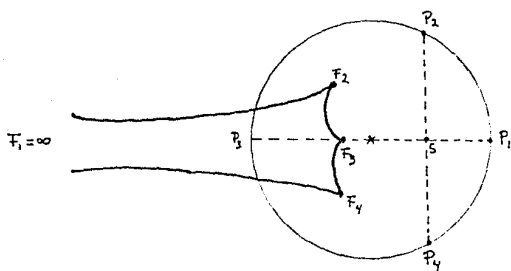


fig. I.

Por último, si  $S$  se va acercando al centro,  $S$  deja de estar en los círculos discriminantes de los puntos de  $C$ . La cáustica resultante no tiene puntos al infinito en este tipo de casos. La fig. J muestra la cáustica para  $S$  a  $\frac{r}{4}$  del centro de  $C$ .

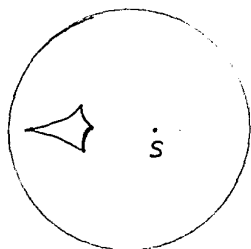


fig. J.

### 3'. Otras posiciones para F.

con el objeto de redondear este trabajo, y tener la libertad de usar algunos argumentos, cognominados en los ejemplos del capítulo 3, vimos que era necesario incluir un suplemento como éste.

#### 3'.1 La fuente de luz en alguna tangente en PEE.

Supongamos que F está sobre la tangente a E en algún pto P. (Fig. 1).

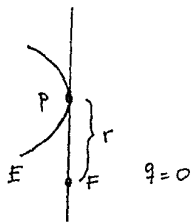


Fig. 1

Sin pérdida de generalidad, suponemos  $F=0$ . Por la parametrización de la ortotónica, esta resulta nuevamente una curva regular. Usando las coordenadas pedales,

$$q=0, \text{ y puesto que } p_0 = 2 \frac{q^2}{F} \text{ y}$$

$r_0 = 2q$ , concluimos que la ortotónica pasa por la fuente de luz F. Nuestro problema es ver que pasa con la cáustica. Por la fórmula de la curvatura de la ortotónica en términos de las coordenadas pedales, tenemos:

$$k_0 = \frac{2kr^2 - q}{2kr^3}$$

como  $q=0$ , entonces:

$$k_0 = \frac{1}{r}$$

esto que nos dice, es que el centro de curvatura de la antotónica es el pto. P. Es decir, P está en la caústica, más aún como PF, es la normal de la antotónica, PF resulta tangente a la caústica en el pto. P.

También, se puede afirmar P es un pto. regular de la caústica: en coordenadas pedales, la derivada de la curvatura está dada por la fórmula:

$$k'_0 = \frac{-3r^2 r' k^2 + 3gr'k + grk^3}{4r^5 k^3},$$

como sabemos también  $(r')^2 = \frac{r^2 - g^2}{r^2}$ , entonces  $r' \neq 0$  por que  $g \neq 0$ ; la derivada de la curvatura en el pto. F nos queda:

$$-\frac{3}{4r^5 k} \neq 0.$$

Es decir, el punto F no es un vértice de la antotónica, y por tanto la caústica es regular en P.

Obrviamente, en este caso, no se puede afirmar que existe una cónica osculante a E en el pto. P, tal que el otro foco sea el pto. de la caústica. Y precisamente por que no existe tal cónica, lo que sí podemos afirmar es lo siguiente:

Si el pto. P coincide con el pto. de la caústica, entonces F está en la tangente a E, y al revés.

### 3'.2 El pto. al infinito como fuente de luz.

En esta parte solo se mencionaran los resultados importantes, una demostración de ellos puede verse en [1] y [9].

Supongamos que nuestra fuente de luz es el pto. al infinito. Claramente, nuestra construcción de la curva astotónica carece de sentido. Entonces, nuestro primer problema a resolver es definir la astotónica para las condiciones en que nos encontramos.

Para ello, procedemos así:

Tomamos la dirección de los rayos de luz provenientes del pto. al infinito, por el momento pensamos que no hay rectas tangentes a  $E$ , paralelas a los rayos. Sean  $\ell$  cualquier recta perpendicular a los rayos,  $R$  un rayo,  $P \in R \cap E$  y  $F \in \ell \cap R$ . Consideramos la recta tangente a  $E$  en  $P$  (fig. 2).

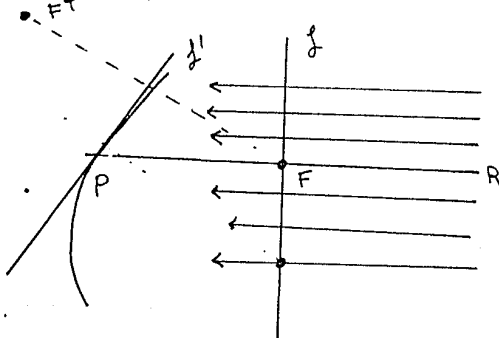


Fig. 2.

al pto.  $F$  lo reflejamos respecto  $\mathcal{L}'$ , y obtenemos en pto.  $F'$ . Si variamos  $F$  a lo largo de  $\mathcal{L}$  y repetir este procedimiento, el lugar geométrico de los correspondientes pto.  $F'$  decimos que es una ortotónica. Para cada recta perpendicular  $\mathcal{L}$  a los rayos obtenemos una ortotónica distinta.

La primera pregunta que surge de esta construcción es si al reflejarse los rayos, siguen la dirección de las normales a cada ortotónica, y para ver esto, usamos otra forma equivalente de construir las ortotónicas. De las consideraciones anteriores, sabemos que  $F'P = PF$  y por tanto  $F'$  y  $F$  están en una circunferencia de radio  $PF = PF'$  con centro en  $P$ . Si tomamos a cada  $P \in \mathcal{E}$  como centro de una circunferencia tangente a  $\mathcal{L}$ , el radio naturalmente será  $PF$ , la envolvente de esta familia de circunferencias anotará de los puntos: la recta  $\mathcal{L}$  y la ortotónica recién definida. Por lo tanto, la circunferencia de radio  $PF$  con centro en  $P$ , tiene la misma tangente que la curva ortotónica, es decir,  $F'P$  está en la normal a la ortotónica.

Ahora, si  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{M}$  son dos rectas distintas, perpendiculares a los rayos, entonces las ortotónicas  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_M$  respectivas, son diferentes. Pero una propiedad interesante de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_M$  es que son paralelas, y por tanto tienen las mismas normales. Para visualizar esto, tracemos lo siguiente:

to mannos las rectas  $L$  y  $M$ , y la distancia entre ellas que llamamos  $d$ . Entoucas, sea  $R$  un rayo,  $P \in R \cap E$ ,  $Q' \in M \cap R$  y  $F \in R \cap L$ . (Fig. 3):

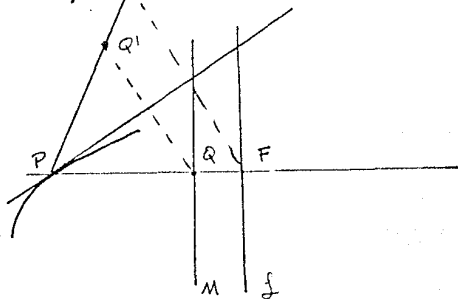


Fig. 3.

a los pto. en las ortotónicas  $O_L$  y  $O_M$ , las llamaremos  $F'$  y  $Q'$ . Por construcción  $PF' = PF$  y  $PF' = PQ' + Q'F'$ , entoucas  $Q'F' = PF - PQ'$ , pero  $PQ' = PQ$  y por tanto  $Q'F' = PF - PQ = d$ , y puesto que nuestra condición no depende del rayo  $R$ , entoucas la distancia entre  $Q'$  y  $F'$  es constante, independiente del rayo  $R$ , y por tanto  $O_L$  y  $O_M$  son paralelas, como habíamos afirmado.

ahora, si definimos la cáustica por reflexión del espejo  $E$ , respecto al punto en el infinito, como la suma trazo de las normales de la ortotónica, entoucas esta no depende de la recta  $L$ , y por tanto esta línea definida.

Puesto que nuestro interés es buscar el conpor tangente de la cáustica sin recurrir a la ortotónica, podríamos razonar del siguiente modo:

Si  $F$  es el pto correspondiente de la cáustica, por la proposición 8 del capítulo anterior pag. 89, usando ahora a  $F$  como fuente de luz, entonces el pto. al infinito será ahora el punto de la cáustica y la cónica osculante de la proposición 8 pag. 89, es entonces una parábola tal que el contacto con  $E$  en  $P$  es mayor o igual a 4, y aplícanos nuestros resultados.

Sin embargo, a pesar de que la afirmación es cierta, el argumento esgrimido es completamente falso, esto es, es verdad que en todo pto.  $P \in E$  existe, una tal parábola osculante, pero el razonamiento anterior no es válido.

No lo es, porque la prop. 8, cuando la fuente de luz es finita, la cónica osculante resalta ser parábola solamente en los pto. de inflexión de la ortotónica. Si en todo pto.  $P \in E$  el pto.  $F$  correspondiente de la ortotónica recién definida fuese una inflexión, no importa como es el espejo, la ortotónica siempre son rectas.

El razonamiento pues, no es válido, y de-le entonces ha cese de manera distinta, y no lo abordaremos el problema aquí.

sin embargo, para no dejar el asunto volando, ponemos la proposición de los parábolas oscu-  
lantes.

### Proposición 9

Supongase que la curvatura de  $E$  en  $P$  no es cero, y la tangente de  $E$  en  $P$  no es paralela a los rayos de incidencia, entonces existe una parábola  $\pi$  tal que  $P$  es un pto de contacto de  $E$  y la parábola con orden mayor o igual a 3. además, el eje focal de la parábola es paralelo a los rayos de incidencia, y su foco (finito)  $F$  es el pto. de la cáustica correspondiente al pto.  $P \in E$ .

FIN

(87) ¡ por fin !



## Notas del capítulo 3.

(4) En [5, pag. 84] se demuestra el siguiente:

Teorema:

Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^2$ .

Sea  $(0,0) \in f^{-1}(0)$  una singularidad de  $f$ , de modo que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f(0,0) = 0$

Por el teorema de Taylor, en una vecindad de  $(0,0)$   $f$  se puede expresar en la forma

$$f(x,y) = \phi_2 + \phi_3 + \dots + \phi_n + R_n$$

donde  $\phi_2$  es (una forma cuadrática):

$$a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2, \text{ con } a_2 = f''$$

$\phi_3 = \text{etc.} \dots$  y  $R_n$  es el residuo de orden  $n \geq 2$ .

En relación con  $\phi_2$ , sea:

$$\Delta = b_2^2 - 4a_2c_2$$

Entonces, si  $\Delta > 0$ , la singularidad en  $(0,0)$  es un pto. doble oxido con tangentes distintas; la curva tiene 2 ramas a través de la singularidad, cada una de ellas tocando una de las dos rectas distintas definidas por  $\phi_2 = 0$ .

En nuestro caso,  $0 = f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ ,  
con  $f(x,y) = 2(x^2 + y^2)(ax + by) - xy$ .

además:

$$\phi_2 = \frac{1}{2!} \left( x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

calculando las parciales en  $(0,0)$

$$\phi_2 = \frac{1}{2!} (2xy) = xy$$

y

$$\Delta = 2^2 - 0 = 4 > 0$$

En consecuencia,  $(0,0)$  es un pto doble de la cónica nodal, y ésta tiene dos ramas por  $(0,0)$ , tangentes a las rectas  $\phi_2 = xy = 0$ , es decir los ejes  $x$  y  $y$ .

## Bibliografía

1. Bruce, J.W., Giblin, P.J., y Gibson, C.G. (1981). "On Caustics of plane curves". *Am. Math. Monthly*. 88:651-667
2. Bruce, J.W., Giblin, P.J., y Gibson, C.G. (1984). "Caustics through the looking glass". *The Math. Intelligencer*. 6(1):47-59
3. Bruce, J.W., y Giblin, P.J. (1984). "Curves and Singularities". Cambridge University Press.
4. Do Carmo, M.P. (1976). "Differential Geometry of Curves and Surfaces". Prentice-Hall.
5. Fowler, R. H. (1964). "The Elementary Differential Geometry of plane curves". Stechert-Hafner Service Agency, N.Y & London.
6. Lockwood, E. H. (1961). "A book of Curves". Cambridge Univ. Press.
7. Rajagopal, C.T., y Srinivasaraghavan, V.R. (1955). "An Introduction to Analytical Conics". Oxford University Press.
8. Saunders, P.T. (1983). "Una Introducción a la Teoría de Catastrofes". Siglo ~~XXI~~, México.
9. Shot, S. H. (1979). "Geometrical Properties of the Penosculating conics of a plane curve". *Am. Math. Monthly* 86:449-457.
- 10: Spiva K, H. (1970). "A Comprehensive Introduction to Differential Geometry". Vol. II. Publish or Perish, Inc.